

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures et matériaux**

Présentée par

BOUSAHLA ABDELMOUMEN ANIS

Sujet de thèse

**Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques
épaisses en matériaux composites avancés**

Soutenu le	devant le Jury composé de :		
Mr. B. FAHSI	MCA	UDL-SBA	Président
Mr. E.A. ADDA BEDIA	Professeur	UDL-SBA	Directeur de thèse
Mr. A. BENACHOUR	MCA	UDL-SBA	Examineur
Mr. H. BERRABAH	MC A	CU-RELIZANE	Examineur
Mr. R. YEGHNEM	MCA	U. SAIDA	Examineur
Mr. A. KACI	MCA	U. SAIDA	Examineur
Mr. A. TOUNSI	Professeur	UDL-SBA	Invité

AVANT – PROPOS

Ce travail a été réalisé à la faculté de technologie (UDL-FT) au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH).

Je voudrais remercier Messieurs, **TOUNSI ABDELOUAHED** et **ADDA BEDIA EL ABASS** pour m'avoir encadré durant ma thèse, pour leurs nombreux conseils, leur grande disponibilité et leur soutien.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **B. FAHSI, A. BENACHOUR, H. BERRABAH, R. YEGHNEM** et **A. KACI** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier tous mes collègues du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés et tous les enseignants de l'institut des Sciences et technologie du Centre Universitaire de Relizane

Remerciements

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, Je tiens à remercier chaleureusement Mon directeur de thèse, M. Adda Bedia. Je tiens à lui exprimer ma Reconnaissance pour ses conseils et son soutien qu'il m'a accordé durant ce travail. Sa patience, sa disponibilité et Sa grande compétence m'ont aidé à surmonter les obstacles. Monsieur, j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec vous.

Mes remerciements s'adressent également à M. Tounsi Abdelouhed, Sans lui rien n'aurait été possible, Monsieur vous êtes notre lumière. Que Dieu te protège et te garde pour Nous.

À ma très chère mère qui a su m'entouré de tout son amour, de toute son affection durant mes études, merci pour tout. J'espère que vous êtes tout simplement fière de moi, et je vous dédie ce travail. Merci à toute ma famille, Mes oncles et Mes tantes, à mes amis sur qui je peux toujours compter.

A mes Princesses, Mes anges, les prunelles de mes yeux, Mes deux filles Meriem Anissa et Djoud Ines rien n'est plus beau sur terre que de les voir sourire. Qu'elles soient fières de leur père.

A ma femme qui m'a donné l'énergie et la patience, surtout dans les Moments difficiles, pour mener à bien ce travail.

Je finirai par ces quelques mots de Françoise Dolto : « Tout groupe humain prend sa richesse dans la communication, l'entraide et la solidarité visant à un but commun : l'épanouissement de chacun dans le respect des différences ».

Si le savoir est une lumière, la recherche est sa lampe.

ملخص

ملخص

هدفت هذه الدراسة الى وضع النظرية مثلثيه جديدة ذات نظام عالي متضمنة أثر التمدد لتحليل ودراسة لوحات المركبة المتطورة مثل لوحات متدرجة وظيفيا. عدد المتغيرات المستخدمة في هذه النظرية هو خمسة فقط ضد ستة أو أكثر في حالة نظريات تشويه القص الأخرى. يتم الحصول على معادلات التوازن باستخدام مبدأ عمل الغير ظاهري والمفهوم المادي للسطح المحايد. الحلول التحليلية للوحة المتدرجة وظيفيا المسندة ببساطة والمتعرضة لتحميل مستعرض يتم الحصول عليها و تحدها بحلول NAVIER. تم إجراء المقارنة مع نتائج الدراسات السابقة للتحقق من دقة و فعالية النظرية الحالية

الكلمات المفتاحية: لوحات متدرجة وظيفيا ، النظرية المثلثية . تأثير التمدد . موقف السطح المحايد

Abstract

Abstract

In this thesis, a new trigonometric higher-order theory including the stretching effect is developed for the static analysis of advanced composite plates such as functionally graded plates. The number of unknown functions involved in the present theory is only five as against six or more in case of other shear and normal deformation theories. The governing equations are derived by employing the principle of virtual work and the physical neutral surface concept. Navier-type analytical solution is obtained for functionally graded plate subjected to transverse load for simply supported boundary conditions. A comparison with the corresponding results is made to check the accuracy and efficiency of the present theory.

Keywords: FG plates; new plate theory; Stretching effect; Neutral surface position.

Résumé

Résumé

Dans ce travail, une nouvelle théorie trigonométrique d'ordre élevé qui inclut l'effet d'étirement est développée pour l'analyse statique des plaques composites avancées telles que les plaques fonctionnellement graduées. Le nombre de variables utilisées dans la présente théorie est seulement cinq contre six ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels et le concept physique de la surface neutre. Les solutions analytiques pour une plaque fonctionnellement graduée simplement appuyée et soumise à une charge transversale sont obtenues et déterminées par les solutions de Navier. Une comparaison avec les résultats correspondants à la littérature est faite pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle.

Mots-clés : plaques FGM, théorie trigonométrique; l'effet d'étirement; position de la surface neutre.

Liste des tableaux et des figures

LISTE DES TABLEAUX ET DE FIGURES

- *Liste des tableaux :*

CHAPITRE I

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....5

Tableau I.2 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.....10

CHAPITRE IV

Tableau IV.1 : Effet de la déformation normale ε_z Sur la contrainte longitudinale $\bar{\sigma}_x$ Et le déplacement \bar{w} Pour une plaque carrée en FG.....

- *Liste des figures :*

CHAPITRE I

Figure I.1 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....6

Figure I.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM.....7

Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....8

Figure I.4 : Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM.....9

Figure I.5 : Les principaux domaines d'application des FGM.....12

Figure I.6 : Géométrie d'une plaque en FGM.....13

Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....14

Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FG.....15

Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....16

Figure I.10 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....17

Figure I.11 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....18

Figure I.12 : Illustration de la plaque d'ordre élevé.....19

LISTE DES TABLEAUX ET DE FIGURES

Chapitre III

Fig. III.1: La position de la surface médiane et la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée.....55

Chapitre IV

Fig IV. 1 : Variation de la position de la surface neutre par rapport au paramètre matériel n ..66

Fig IV. 2 : le déplacement transversal, \bar{w} , à travers l'épaisseur d'une plaque carré en FG ($a/h = 4$) pour différentes valeurs des paramètres matérielle n 67

Fig IV. 3 : La variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ À travers l'épaisseur d'une plaque FG carrés ($a/h = 4$) pour différentes valeurs des paramètres du matériau n 68

Fig IV. 4 : La variation de la contrainte tangentielle dans le plan $\bar{\tau}_{xy}$ À travers l'épaisseur d'une plaque en FG carrés ($a/h = 4$) pour différentes valeurs du paramètres matérielle n ...69

Fig IV. 5: La variation de la contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ À travers l'épaisseur d'une plaque carrés en FGM ($a/h = 4$) pour différentes valeurs du paramètre matérielle n ..70

Fig IV. 6 : La variation de la contrainte normale transversale $\bar{\sigma}_z$ À travers l'épaisseur d'une plaque FG carrés ($a/h = 4$) pour différentes valeurs des paramètres du matérielle n ...71

LISTE DES NOTATIONS

LISTE DES NOTATIONS

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité du métal
$V(z)$	Fraction volumique
$\lambda(z), \mu(z)$	Coefficients de Lamé
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u_b, v_b, w_b	Les composantes du champ de déplacement de flexion
u_s, v_s, w_s	Les composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δK	Variation de l'énergie potentielle
δT	Variation de l'énergie cinétique.
$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
$i, j, l \text{ et } m$	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement

H_{ij}^s Termes de rigidité de la plaque en cisaillement

(m,n) ième mode propre

$q(x,y)$ Charge transversale

(I_i, J_i, K_i, J_i^s) Inerties de masse

$\{ \}$ Vecteur colonne

$[]$ Matrice

Table des matières

TABLE DES MATIERES

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction générale..... 1

Chapitre I : généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués

I.1. Introduction.....	4
I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués	4
I.3. Différences entre matériaux fonctionnellement gradués et matériaux composites traditionnels.....	7
I.4. Historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués	8
I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux fonctionnellement gradués	11
I.5.1. Coulage en bande (Tape Casting).....	11
I.5.2. Compaction sèche des Poudres.....	11
I.5.3. Projection plasma.....	11
I.5.4. Frittage et Infiltration.....	12
I.6. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués	12
I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	13
I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	14
I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	15
I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	16
I.8. Les modèles analytiques des plaques multicouches FGM.....	16
I.8.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	16
I.8.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)....	17

I.8.3.	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)...	19
I.9.	Solution exactes des plaques	21
I.10.	Conclusion.....	22

Chapitre II : Aperçu de recherche bibliographique des différentes théories pour la modélisation et l'analyse des matériaux fonctionnellement gradués

II.1.	Introduction.....	23
II.2.	Théories des plaques monocouches ELS	24
II.2.1.	Modèle CPT	24
II.2.2.	Modèle FSDT	29
II.2.3.	Modèle TSDT	35
II.2.4.	Les modèles HSDTs.....	39
II.2.4.1	Modèles basés sur une fonction polynomiale.....	39
II.2.4.2	Modèles basés sur une fonction non- polynomiale	41
II.2.5.	Théories simplifiées	43
II.2.6	Les. Théories mixtes.....	45
II.3.	Théories d'élasticité 3D.....	47
II.4	Formulation unifiée.....	50
II.5.	Conclusion.....	52

Chapitre III: Modèle Mathématique

III.1.	Introduction.....	54
III.2.	Formulation théorique	54
III.2.1.	Hypothèses de base	56
III.2.2.	Cinématique	57
III.2.3.	Les équations constitutives.....	58
III.2.4.	Équations d'équilibre.....	59
III.3.	Solution exacte pour une plaque FGM simplement appuyée	62
III.5.	Conclusion	63

Chapitre IV: RESULTATS ET DISCUSSION

IV.1.	Introduction.....	65
IV.2.	Analyse des résultats.....	65
IV.4.	Conclusion	71
	CONCLUSION GENERALE.....	72
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	74

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux fonctionnellement gradués (matériaux FGMs) sont une classe des composites qui ont une variation continue des propriétés matérielles d'une surface à une autre. Ces matériaux peuvent être fabriqués en variant le pourcentage des constituants de deux matériaux ou plus de telle sorte que ces nouveaux matériaux auront une propriété graduée désirée dans des directions spatiales. La gradation dans les propriétés des matériaux réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte trouvés dans les composites stratifiés. Les FGMs ont acquis une application généralisée comme structures de barrière thermique, contre l'usure et comme revêtements résistant à la corrosion autres que le collage de matériaux différents. Les concepts de FGMs ont été proposés par les Japonais Yamanouchi et al. [1] et Koizumi et Sata [2], et sont projetés comme des matériaux de barrière thermique pour des applications dans l'espace, l'aéronautique, structures spatiales et les réacteurs nucléaires.

Au cours des trois dernières décennies, les recherches sur les plaques fonctionnellement graduées (FGM), ont reçu beaucoup d'attention, et plusieurs théories de plaques ont été proposées. Elles sont basées sur la prise en considération de l'effet de déformation de cisaillement transversal. La théorie classique des plaques (CPT), qui néglige l'effet de déformation de cisaillement transversal, fournit des résultats raisonnables pour les plaques minces. Pour remédier à l'irrégularité du CPT, de nombreuses théories de plaque de déformation de cisaillement qui représentent les effets de déformation de cisaillement transversal ont été développées. La théorie de Reissner [3] et [4] de Mindlin est connue comme la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), elle prend en compte l'effet de cisaillement transversal par le moyen d'une variation linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur [5,6].

Depuis le FSDT outrepassé les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque c'est pourquoi un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser l'erreur due à une hypothèse de déformation de cisaillement constante à

travers l'épaisseur. Le facteur de correction de cisaillement non seulement dépend du matériau et des propriétés géométriques mais aussi du chargement et des conditions aux limites. Bien que la (FSDT) fournit un résultat suffisamment précis pour les plaques fines modérément épaisses, mais son utilisation n'est pas assez pratique en raison de la difficulté de la détermination de la valeur correcte du facteur de correction de cisaillement [7]. Afin d'éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, de nombreuses théories de déformation de cisaillement de plaques raffinées ont été élaborées, comme la théorie de déformation de cisaillement de plaque du troisième ordre (TSDT) de Reddy [8], la théorie de plaque de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) [9, 10], et la théorie de plaque de déformation de cisaillement hyperbolique (HSDT) [11-12-13].

Toutefois, dans la plupart des théories de déformation de cisaillement, les plaques FGMs ont été analysées en négligeant l'étirement ε_z , dans l'épaisseur comme étant le déplacement transversal considéré comme indépendant par les coordonnées d'épaisseur. L'effet d'étirement qui s'étend sur l'épaisseur de la plaque FGM a été étudié par Carrera et al. [14], en utilisant les méthodes éléments finis. Neves et al. [15 - 17] ont présenté une théorie originale de déformation en cisaillement sinusoïdale-hyperbolique pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGMs. Bien que la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé normale à six variables donne des résultats satisfaisants et qui ont une réponse exacte pour les plaques minces et épaisses comparativement à la CPT avec trois variables indépendantes, mais elles ne sont pas simples à utiliser. Par conséquent, il y a une volonté d'élaborer une théorie précise qui est simple à utiliser.

Le but de ce travail est d'élaborer une nouvelle théorie de la plaque de déformation de cisaillement pour plaques FGM qui prend en compte le soi-disant "effet stretching". Seulement cinq inconnues des fonctions de déplacement sont utilisées dans la présente théorie contre six ou plusieurs fonctions de déplacement inconnu utilisé dans d'autres travaux. Pour simplifier les équations pour la plaque FGM, le système de coordonnées est situé au niveau de la surface de la plaque neutre. Cela est dû au fait que le stretching - flexion dans le couplage des équations constitutives d'une plaque FGM n'existe pas en ce qui concerne la surface neutre du point de vue physique et qui est considérée comme un système de coordonnées [18, 19]. La théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement, vu que les composantes de déplacement sont exprimées par série trigonométrique représentée grâce à l'épaisseur de la plaque afin d'élaborer une théorie à deux dimensions et donc donne lieu à des

variations de contrainte de cisaillement transversales telles que les contraintes de cisaillement transversal variant à travers l'épaisseur d'une façon parabolique remplissant les conditions de la surface libre de contrainte de cisaillement. Les exemples numériques montrent que tous les facteurs de contrainte peuvent être calculés avec exactitude par l'approche constitutive d'équation directe. L'efficacité de la théorie actuelle est démontrée et les résultats sont comparés avec des solutions de plaques FGM correspondantes.

Chapitre I
Généralités sur les matériaux
fonctionnellement gradués

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES

I.1. Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, l'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Malgré les avantages que présentent ces matériaux (grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...), ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes interfaciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches [20].

À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués(en anglais : **Functionally Graded Materials** " **FGM** ") dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [21].

I.2. Concept des matériaux FGM

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués(Functionally Graded Materials :FGM) fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales [22]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou discontinuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [23]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la

pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc.

Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [24]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [25].

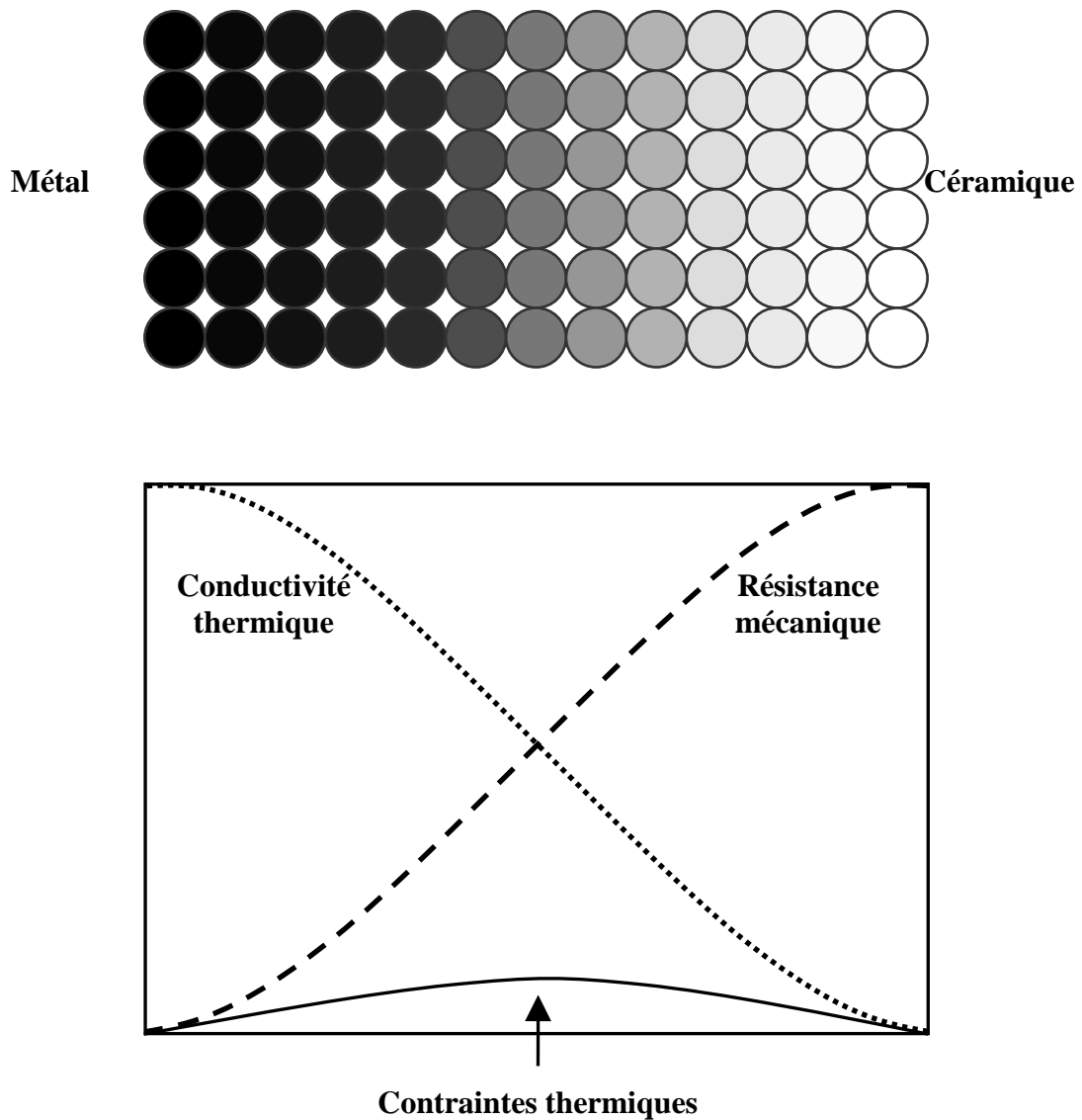


Figure I.1 : Concept des matériaux fonctionnellement gradués[26].

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutal de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

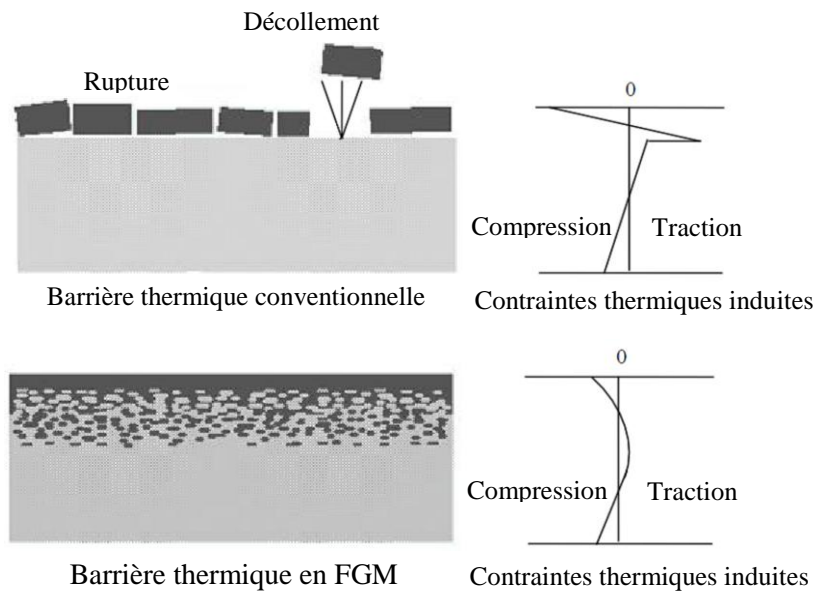


Figure I.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [26].

I.3. Différences entre matériaux à fonctionnellement gradués et matériaux composites traditionnels :

Les matériaux fonctionnellement gradués sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.3

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Éléments constitutifs:</p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ○</p> <p>Fibre ◇*</p>		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [27].

I.4. Historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [28]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [29]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [30].

En 1987, un vaste programme pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques c'est-à-dire des matériaux constituant les parois des engins spatiaux pouvant travailler à des températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C [29].

En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [31].

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques....etc. [31].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [32].

A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie.

La figure I.4 [27] montre les formes de conversion d'énergie visée par le présent projet de recherche. Les énergies solaire et nucléaire sont considérées comme les sources d'énergie en vue d'éventuelles applications extensives.

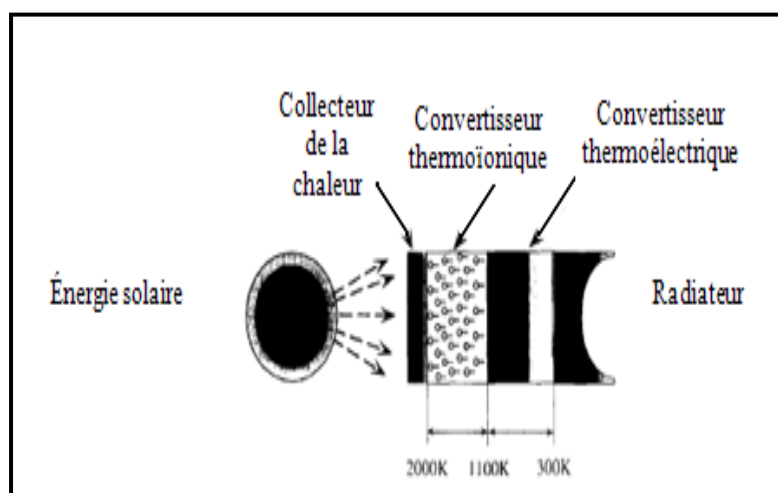


Figure I.4 : Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM [27].

Les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon sont résumés dans le tableau I.2 :

Tableau I.2 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon

Année	Progrès de recherche de FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Köln, (Allemagne).
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	étude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 ^{ème} colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II- phase(1).
1994	3ème colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95),(Sendai).
1996	4ème colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux fonctionnellement gradués

Depuis plus de vingt ans, une partie importante de la recherche concernant les structures en matériaux fonctionnellement gradués a été consacrée à leur fabrication. Une grande variété de méthodes de production a été mise au point ou adaptée en vue de produire ce type de pièces [32].

Les principaux procédés disponibles pour la production des matériaux FGM sont expliqués ci-après :

I.5.1 Coulage en bande (Tape Casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape Casting) à été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuses, dans lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite en enlevant la reliure, et en pressant les produits obtenus à chaud. Le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique [33].

I.5.2 Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [34].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique et de façon industrielle.

I.5.3 Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [35].

I.5.4 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [36].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.6. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.5. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

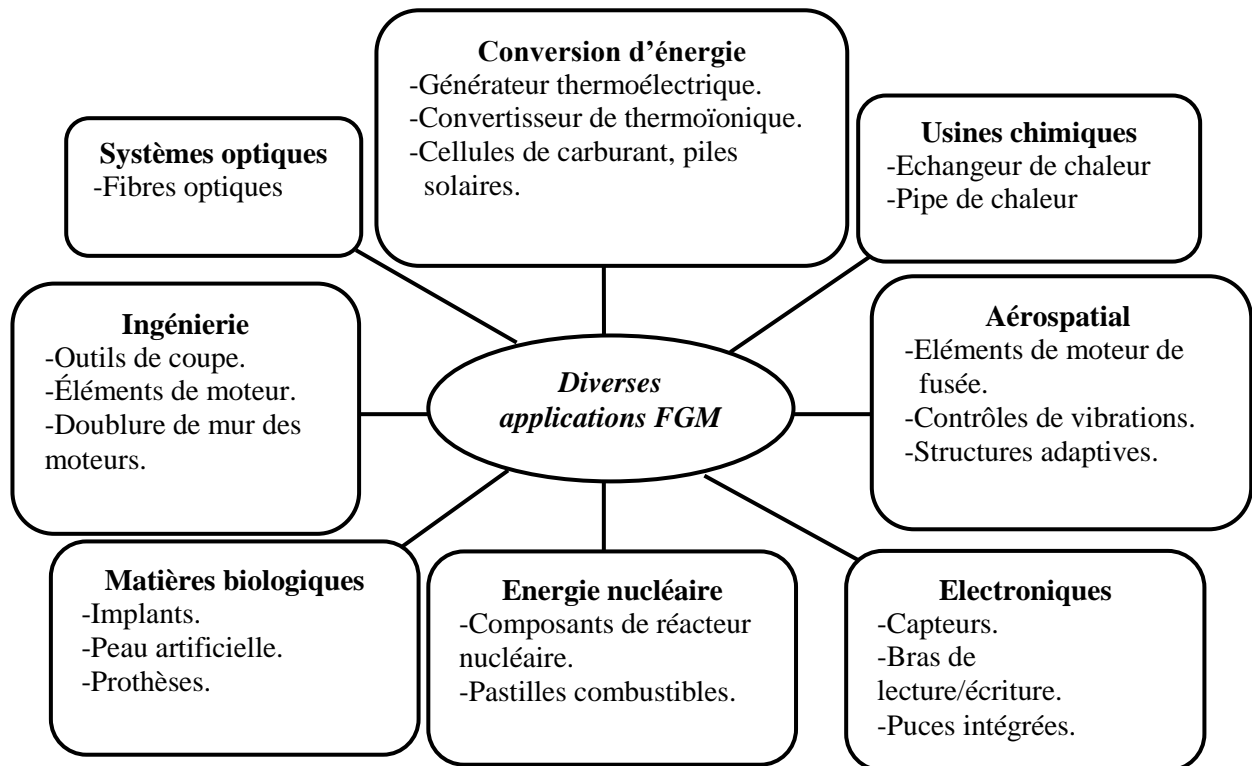


Figure I.5 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

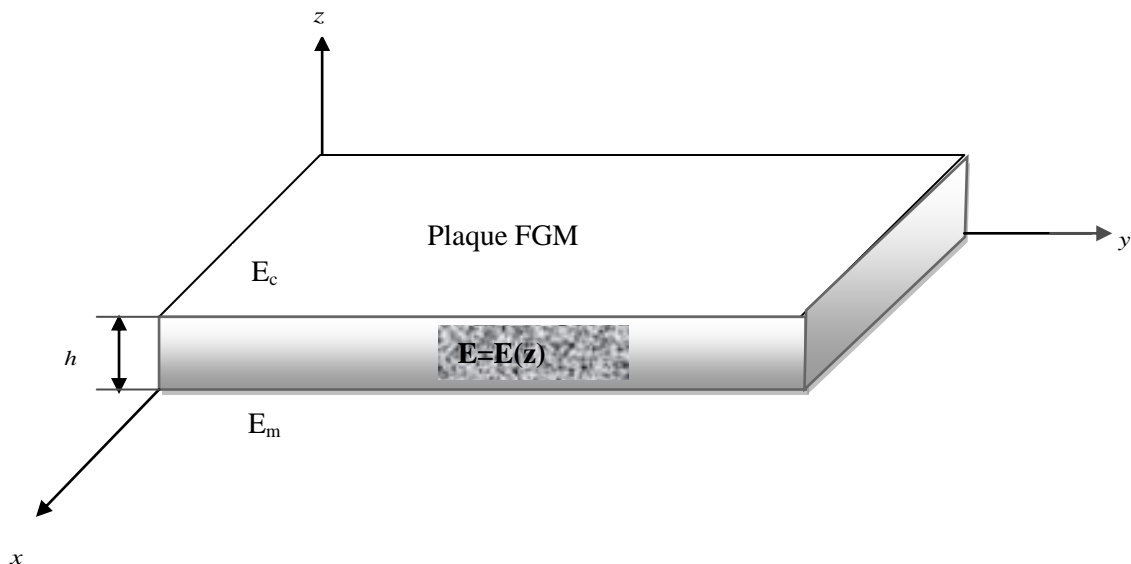


Figure I.6 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau : dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $\nu(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [37] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.7, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

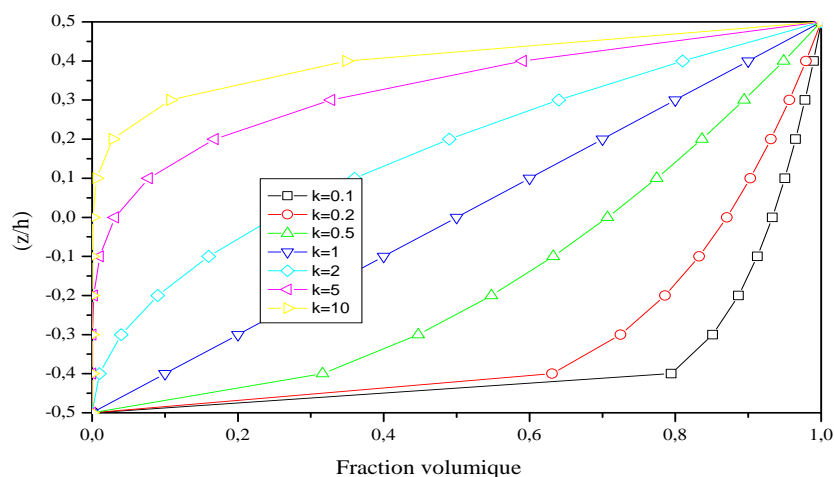


Figure I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [37]. Par conséquent, Chung et chi [38] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

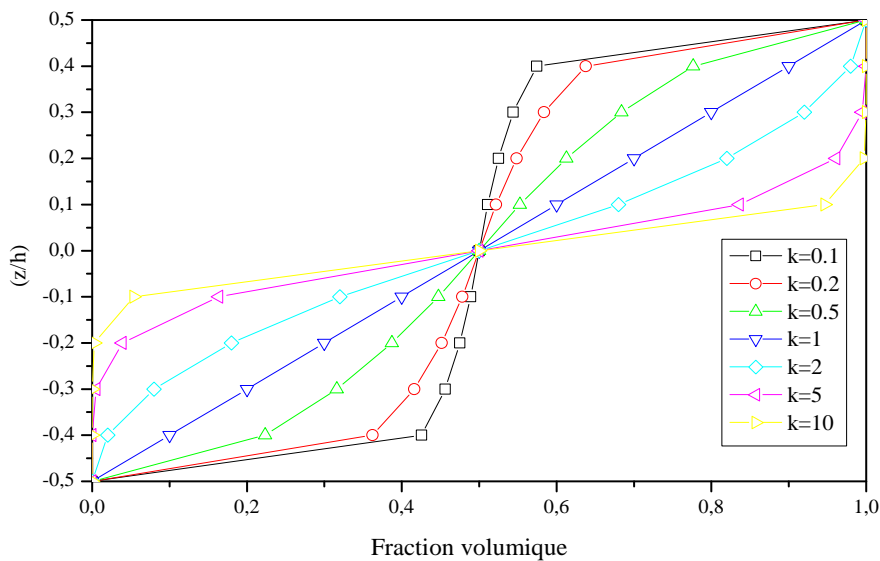


Figure I.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [39] :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (I.5.a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (I.5.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.9.

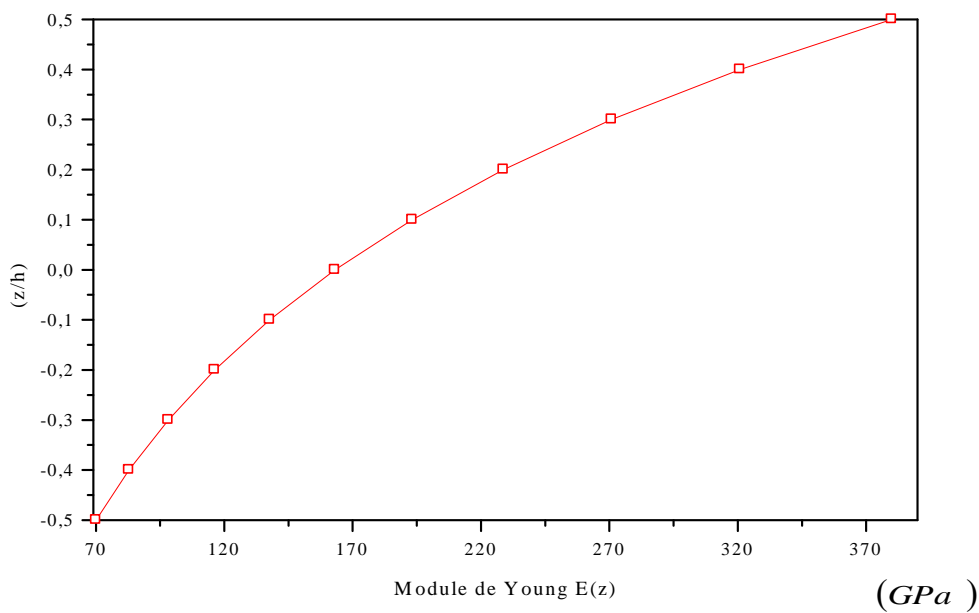


Figure I.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.8. Les modèles analytiques des plaques multicouches en FGM

I.8.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Le modèle classique de Kirchhoff-Love se base sur l'hypothèse que la section transverse de la plaque reste plane et perpendiculaire au plan moyen après déformation [40, 41] (figure I.10). Cela revient à dire que le cisaillement hors plan est supposé négligeable dans ce cas. De plus,

il est supposé que la variation de l'épaisseur de la plaque est négligeable. Ces hypothèses imposent la cinématique suivante:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{I.6.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{I.6.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.6.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

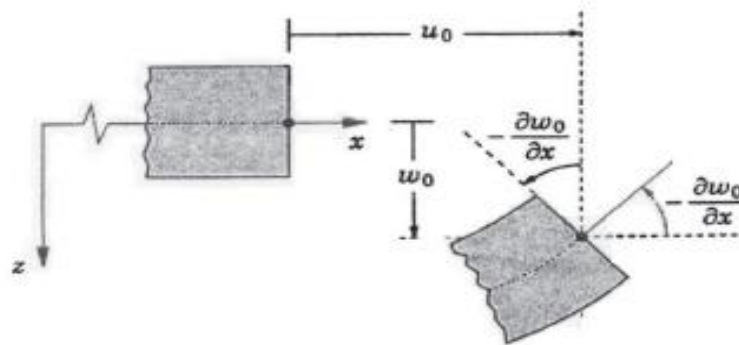


Figure I.10 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy, [6]).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses. L'application du modèle de Kirchhoff-Love aux structures multicouches est souvent désigné comme « Classical Lamination Theory (CLT) ».

I.8.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans (Reissner [42], 1945, Mindlin [43], 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin.

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (\text{I.7.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (\text{I.7.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.7.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie

classique des plaques décrites dans la dernière section par le remplacement $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$,

$$\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

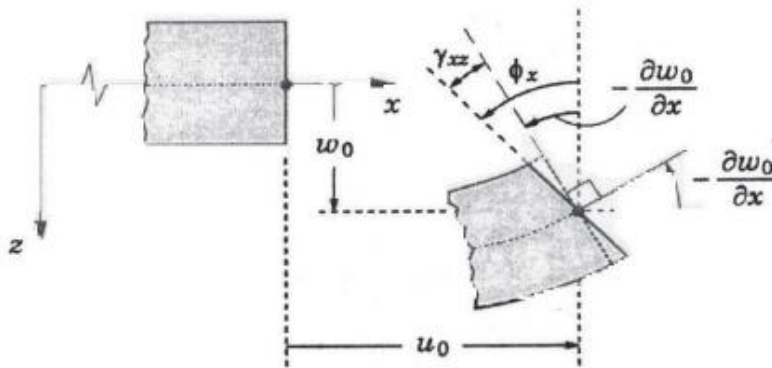


Figure I.11 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy, [44]).

Tout ceci fait que le modèle prédit très mal le comportement en cisaillement transverse et qu'il faut introduire la notion de coefficient correcteur pour améliorer la prise en compte des effets de cisaillement hors plan (Whitney [45], Levinson [46]). Dans le cas des plaques multicouches, le fait que les contraintes de cisaillement transverse sont constantes par couches entraîne des discontinuités de contrainte aux interfaces.

L'application du modèle de Reissner-Mindlin aux structures multicouches est souvent désignée comme « First-order Shear Déformation Theory (FSDT) » car les déformations de cisaillement transverse sont considérées uniformes dans l'épaisseur.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

I.8.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Pour améliorer la mauvaise approximation du cisaillement transverse dans des modèles classiques du premier ordre, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées dans la littérature. La plupart de ces théories sont des approches en déplacement et utilisent un développement en série de Taylor du champ de déplacement sous la forme suivante:

$$\underline{u}(x, y, z) = \underline{u}_0(x, y) + z\underline{\phi}_\alpha(x, y) + z^2\underline{\phi}_\alpha^2(x, y) + \dots + z^n\underline{\phi}_\alpha^n(x, y)$$

Où n détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love $n = 0$. La théorie de Reissner-Mindlin est une théorie du premier ordre avec $n = 1$ pour les déplacements dans le plan et $n = 0$ pour le déplacement normal. La figure I.12 montre une cinématique schématique d'un modèle d'ordre supérieur.

Le modèle proposé par Hildebrand et al. [47] peut être considéré comme la première tentative d'amélioration de la théorie classique des plaques par une théorie d'ordre supérieur avec la prise en compte de la déformation normale. Ce modèle considère la forme suivante pour les déplacements:

$$u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha(x, y) + z\phi_\alpha(x, y),$$

$$u_z(x, y, z) = u_z(x, y) + z\phi_z(x, y) + z^2\varphi_z(x, y),$$

Nelson and Lorch [48] ont proposé un modèle avec neuf champs inconnus pour l'analyse des plaques multicouches. Lo et al. [49, 50] ont étudié l'effet de la déformation normale transverse en utilisant une théorie à onze champs inconnus.

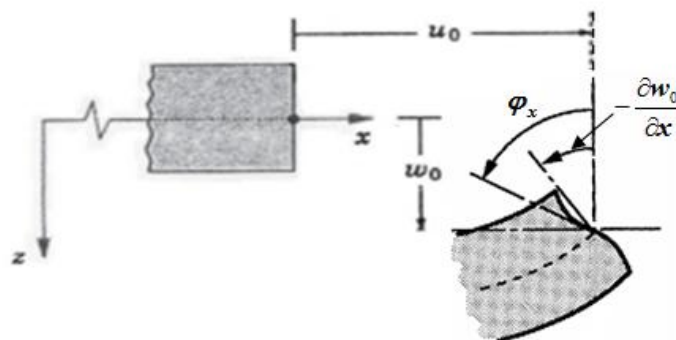


Figure I.12 : Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, [44]).

Il y a d'autres travaux dans la littérature dans lesquels le champ de déplacement est approché de la même manière dans l'épaisseur. Ce type de théories est connu sous le nom de High-order Shear Deformation Theory (HSDT) dans la littérature. Nous avons introduit ici quelques modèles de plaques utilisées pour analyser le comportement des structures épaisses en matériaux fonctionnellement gradués .

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), \quad (\text{I.8.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), \quad (\text{I.8.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{I.8.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaques (CPT) est obtenue en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (Reddy, [44]) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \quad (\text{I.9})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur.

Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [51] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique

sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{I.10})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [51] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{I.11})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Soldatos et al.[52] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{I.12})$$

Mantari et al [53] propose un nouveau modèle sinusoïdale (NSSDT) qui est similaire au modèle de Touratier puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{I.10})$$

I.9. Solutions exactes des plaques

Même si ces solutions ne satisfont pas la définition des modèles de plaque présentée ci-dessus (puisque elles n'admettent aucune approximation sur la description des variables au travers de l'épaisseur de la plaque), il convient de les mentionner puisqu'elles sont souvent utilisées avec les modèles de plaques à titre de comparaison. Par ailleurs, les solutions exactes utilisées pour des plaques en flexion ne reflètent que très rarement les "cas réels". La plupart d'entre elles impliquent des conditions aux limites simplement appuyées et nécessitent un champ

cinématique imposé à la plaque ce qui est difficile à reproduire expérimentalement. Leur importance est cependant cruciale puisque ce sont des méthodes exactes qui permettent le plus souvent d'évaluer la qualité des modèles de plaques, qui eux sont basés sur des hypothèses simplificatrices [54]. Les premières solutions exactes furent données pour des plaques en flexion cylindrique composées de matériaux isotropes. Ainsi en 1877 Lévy [55] donne une solution exacte pour les plaques isotropes rectangulaires en flexion cylindrique. Pour les cas limités aux plaques multicouches rectangulaires simplement appuyées dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la plaque, Pagano [56,57] présente une solution pour le cas statique et Srinivas [58]. Ces solutions font partie des solutions les plus connues et les plus employées encore à ce jour dans la littérature. Par la suite une autre méthode permettant de simuler la flexion des plaques orthotropes avec un empilement de couches symétriques a été présentée par Reddy [59] pour le cas statique et Noor [50] pour le cas dynamique. Pour ces modèles basés sur les équations d'équilibre de la mécanique, aucune approximation n'est effectuée pour l'estimation de la distribution des contraintes et des déformations.

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux fonctionnellement gradués « FGM », l'historique de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles classiques et d'ordre supérieur pour le calcul des plaques minces et épaisses en FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux fonctionnellement gradués permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre II

**Aperçu de recherche bibliographique des
différentes théories pour la modélisation et
l'analyse des matériaux fonctionnellement
gradués**

CHAPITRE II : APERÇU SUR LA RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE DES DIFFÉRENTES THÉORIES POUR LA MODÉLISATION ET L'ANALYSE DES MATÉRIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUÉS

II.1. Introduction

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans l'aérospatiale, mécanique, génie civil, nucléaire et l'automobile en raison de leurs fonctionnalités exceptionnelles telles qu'un ratio élevé de la rigidité et de la résistance de la masse et le faible coût de maintenance. Ces matériaux composites stratifiés classiques présentent une disparité des propriétés mécaniques d'une interface à l'autre en raison de l'agrégation de deux matériaux distincts. En conséquence, la concentration des contraintes se produit habituellement à l'interface. Cela peut conduire à un dommage sous la forme d'une délamination, (à se cisailer dans son épaisseur longitudinalement). Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) ont donc été proposés afin de surmonter ces problèmes. La FGM est le matériau composite avancé qui est constitué de deux ou plusieurs phases constituantes avec une variation continue des propriétés du matériau d'une surface à une autre, et donc éliminer les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés classiques. Le concept des FGM a été proposé en 1984 par des chercheurs japonais [62]. Un exemple typique du FGM est constitué d'un mélange de céramique et d'un métal. L'histoire de la FGM, ainsi que ses applications peuvent être trouvées dans le rapport en matière de JAI et al. [63]. La modélisation et l'analyse de la FGM ont également été examinées par Birmane et Byrd [64].

En général, le comportement des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) plaques/coquilles sous charges mécaniques et thermiques peut être prédit en utilisant l'une des théories en trois dimensions (3d) ou d'autres théories d'élasticité les théories des plaques monocouches (ESL). Les modèles (ESL) sont dérivés de la théorie d'élasticité 3D en faisant des hypothèses adéquates sur la cinématique de la déformation ou d'un état de contrainte à travers l'épaisseur des plaques/ coques [61]. Ces théories d'ELS peuvent tenir compte à la fois du cisaillement et des effets de déformation normale selon le niveau d'hypothèses. Le plus simple est le modèle de la théorie classique des plaques (CPT), également connue sous le nom

de théorie de Kirchoff [65], qui ne tient pas compte du cisaillement et des effets de déformation normale. Ainsi, il n'est approprié que pour les plaques de FG/coquilles minces. La théorie suivante dans la hiérarchie des ESL modèles est la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) développé par Mindlin [66]. La FSDT prend effet de déformation de cisaillement par la voie d'une variation linéaire et des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire. Le facteur de correction de cisaillement est difficile à déterminer car elle ne dépend pas seulement des paramètres géométriques mais aussi du chargement et des conditions aux limites. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction au cisaillement, les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDTs) ont été introduites. Les théories HSDT peuvent être développées en élargissant les composantes de déplacement en séries de puissances de l'épaisseur et de coordonnées. Parmi les théories de déformation de cisaillement HSDTs, la théorie de troisième ordre (TSDT) de Reddy [67] est la plus largement utilisée en raison de sa simplicité et de sa précision. Un examen des théories de déformation de cisaillement pour les plaques en stratifiés isotropes a été réalisé par Shimpi et Ghugal [68] et Khandan et al. [69]. Un examen complet des divers modèles analytiques et numériques pour la prédiction de la flexion du flambement et vibration des plaques FGM relevant des réponses mécaniques et des charges thermiques a été effectué récemment par Swaminathan et al. [70]. Toutefois, aucune documentation n'a été rapportée pour l'examen et l'évolution de diverses théories pour la modélisation et l'analyse des plaques/coques.

L'objectif de ce chapitre est de fournir un examen complet de la documentation des théories existantes pour la modélisation et l'analyse des plaques FGM mettant l'accent principal sur les modèles ESL comme les théories CPT, HSDTs TSDT FSDT, les théories simplifiées et les théories mixtes. En outre, un examen détaillé de la documentation se rapportant à l'élaboration de solutions d'élasticité en 3D et une formulation unifiée est également signalée.

II.2. théories des plaques monocouches "ELS"

II.2.1. Modèle CPT

La théorie classique des plaques CPT est fondée sur l'hypothèse de love-Kirchhoff que les lignes droites restent droites et perpendiculaires au panier intermédiaire après déformation. Ces hypothèses impliquent la disparition du cisaillement et les souches

normales, et par conséquent, négligent les effets de déformation de cisaillement. La CPT est le plus simple modèle des théories ESL et il ne convient qu'aux plaques FGM minces où le cisaillement et la déformation normale des effets sont négligeables.

Feldman et Aboudi [71] ont étudié le flambement élastique de FGM plaques sous chargement en compression uniaxiale en utilisant une combinaison d'approches structurelles et micromécaniques. Les équations dérivées de la CPT ont été analytiquement résolues pour la charge de flambement des plaques FGM avec différentes conditions aux limites. Javaheri et Eslami [72,73] ont employé la CPT pour vérifier le flambement des plaques FGM et leur comportement dans le cadre de quatre types de charges thermiques [72] et charges de compression [73]. Basés sur le CPT, Kiani et al. [74] ont présenté des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous trois différents types de charges thermiques. Ghannadpour et al. [75] ont également examiné le flambement thermique des plaques FGM en utilisant le CPT. Cependant, la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode des éléments finis au lieu des solutions de Navier dans leurs travaux [72]. Le flambement des plaques FGM soumises à la compression non uniforme a été examiné par Mahdavian [76] à l'aide de la CPT et le développement de Fourier. Mohammadi et al. [77] ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FGM avec deux bords opposés et une prise en charge simple des deux arêtes ayant des conditions limites arbitraires (c'est-à-dire Plaque de type Levy). Les équations dérivées de la CPT ont été analytiquement résolues en utilisant l'approche de solution de type Levy.

Yang et Shen [78] ont employé la CPT pour étudier la réponse transitoire des plaques FGM reposant sur une fondation élastique soumise à des charges latérales impulsives. La méthode quadrature semi-analytique différentielle (DQM) et l'approche de superposition modale étaient respectivement utilisées pour déterminer la fréquence naturelle et la réponse transitoire de plaques rectangulaires avec deux bords opposés serrés et les bords restants ayant des conditions limites arbitraires. La charge-déformation non linéaire et les réponses de l'après flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique dans le plan et les charges transversales ont été étudiées par Yanga et Shen [79] en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. Une approche semi-analytique fondée sur la DQM et la procédure de Galerkin a été utilisée pour résoudre les équations. Ghannadpour et Alinia [80] ont également utilisé la CPT avec les hypothèses de Von-Karman pour étudier les réponses

non linéaires de pression transversale des plaques FGM. Toutefois, ils ont utilisé le principe du minimum d'énergie potentielle pour obtenir les solutions analytiques des plaques avec appui simple.

Woo et al. [81] ont étudié la vibration non linéaire de plaques FGM dans un environnement thermique. Les équations non linéaires dérivées de la CPT avec les hypothèses de Von Karman étaient résolues pour les plaques FGM avec des conditions limites arbitraires à l'aide d'une série de méthodes. Hu et Zhang [82] ont également adopté la CPT avec les hypothèses de Von Karman pour effectuer des analyses de stabilité et de vibrations des plaques FGM sous excitation dans le plan. La vibration libre des plaques FGM avec différentes conditions aux limites reposant sur une fondation élastique a été étudiée par Chakraverty et Pradhan [83] à l'aide de la CPT et de la méthode de Rayleigh-Ritz. Chakraverty et Pradhan [84] ont amélioré leurs travaux antérieurs [83] et ont tenu compte de l'effet d'environnement thermique. Ruan et Wang [85] ont étudié la vibration et la stabilité de déplacement des plaques FGM obliques à l'aide de la CPT et DQM.

La CPT a également été utilisée pour analyser les plaques circulaires. Par exemple, Ma et Wang [86] ont eu pour objectif d'enquêter sur le modèle non linéaire de flexion et de comportements après flambement thermique des plaques circulaires en FGM sous charges mécaniques et thermiques. Les équations dérivées dans le cadre du CPT et les hypothèses de Von Karman étaient résolues numériquement à l'aide d'une méthode de tir. Li et al. [87] ont également étudié le comportement post flambement non linéaire des plaques circulaires FGM sous charges mécaniques et thermiques utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. Les premières imperfections géométriques des plaques FGM ont été prises en compte dans leur étude. Allahverdizadeh et al. [88] ont étudié la vibration de l'état stable de plaques circulaires FGM dans les environnements thermiques utilisant la CPT et une approche semi-analytique. Ghomshei et Abbasi [89] ont étudié le flambement thermique axisymétrique des plaques FGM annulaires avec une épaisseur variable soumise à des charges thermiques utilisant à CPT et la méthode des éléments finis.

En outre, la méthode classique des plaques FG était également la plus utilisée de préférence pour les plaques FGM en raison de sa simplicité. Loy et al. [90] ont étudié la vibration des coques FGM cylindriques avec des conditions limites supportées simplement à l'aide de la CPT et de Rayleigh-Ritz méthode. Une approche similaire a été adoptée par Arshad et al. [91] afin d'enquêter sur les caractéristiques des vibrations de coques cylindriques

FGM sous trois différents types de lois de fraction de volume. Les caractéristiques des vibrations de coques cylindriques FGM sous différentes conditions aux frontières étaient examinées par Pradhan et al. [92] à l'aide de la CPT et la méthode de Rayleigh. Ce problème a été réexaminé par Naeem et al. [93] À l'aide de méthode de Ritz. Les vibrations non linéaires forcées des coques doublement courbées peu profondes ont été étudiées par Alijani et al. [94] à l'aide de la CPT avec les hypothèses de Von Karman et la discrétisation Galerkin multi-modal. Du et al. [95] ont étudié la vibration non linéaire de coques cylindriques FGmM sous excitation basée sur la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode multi échelle. Du et Li [96] ont étudié la vibration non linéaire et leur réponse pour les coques tubulaires en FGM dans les environnements thermiques qui suit une approche similaire. Ebrahimi et Najafizadeh [97] ont étudié la vibration libre des coques cylindriques en utilisant la CPT en conjonction avec la quadrature de différentielle généralisée et les méthodes en quadrature intégrale généralisée.

Shen [98-100] a étudié le comportement post flambement de coques cylindriques en FGM sous compression axiale [68] ou [69] pression latérale ou d'une montée de température uniforme [100] À l'aide de la CPT avec les hypothèses de Von Karman. Les deux pré flambement non linéaires de déformation et imperfections géométriques initiaux ont été inclus dans l'analyse post flambement à l'aide d'une théorie des couches limites du flambement. Le chemin d'équilibre post flambement et la charge de flambement ou de la température ont été déterminées en utilisant une technique de perturbation singulière. Woo et al. [101] ont enquêté sur le comportement post flambement de plaques FGM et des coques cylindriques peu profondes sous charges mécaniques et thermiques utilisant la CPT et les hypothèses de Von Karman. Des solutions analytiques ont été obtenues à l'aide d'une de série solutions mixtes. Mirzavand et Eslami [102] ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des coques cylindriques irrégulières FGM sous compression axiale dans les environnements thermiques à l'aide de deux modèles différents pour les imperfections géométriques initiales. Les équations dérivées de la CPT avec les relations cinématiques non linéaires de Sanders ont été résolues pour la charge de flambement en utilisant la méthode Galerkin. Les résultats indiquent que les imperfections géométriques et la température de la dépendance des propriétés des matériaux jouent un rôle majeur en dictant le point de bifurcation de l'irrégularité des coques cylindriques en FGM sous compression axiale.

Le flambement des coques cylindriques en FGM sous une action combinée de charges axiales et latérales et de torsion a été étudié par Huang et al. [103] à l'aide de la CPT en conjonction avec la méthode de Ritz et la méthode des éléments finis. Il est observé que la contribution de la pression latérale au flambement est plus importante que celle de la compression axiale ou torsion, et les contributions de compression axiale et de torsion sont presque les mêmes. Sun et al. [104] ont présenté des solutions analytiques pour le flambement de coques cylindriques irrégulières dans le domaine thermique et mécanique de la CPT et les charges en utilisant la méthode Galerkin. Cheng et al. [105] ont adopté la CPT pour étudier le flambement de coques cylindriques en FGM sous une flexion pure. Le flambement avec comportement élasto-plastique de coques cylindriques en FGM sous une combinaison de compression axiale et pression externe a été étudié par Zhang et al. [106] à l'aide de la CPT et la théorie de déformation. La charge de flambement de plaque FGM simplement appuyée a été obtenue à l'aide de méthode de Galerkin.

Woo et Meguid [107] ont étudié la flexion non linéaire de plaques FGM minces sous charges transversales et un chargement thermique. Les équations dérivées de la CPT avec les hypothèses de Von Karman étaient analytiquement résolues pour la flexion, et le moment de flexion d'une plaque FGM simplement appuyée en utilisant la méthode des séries de Fourier. Le comportement non linéaire de l'imperfection excentriquement raidi d'un panneau FGM reposant sur une fondation élastique a été étudié par Nguyen [108], Nguyen et Tran [109,110] et Nguyen et Pham [111] à l'aide de la CPT et le technique de raidisseur enduite de Lekhnitsky. Nguyen et Tran [112,113] ont effectué l'analyse dynamique non linéaire de l'imperfection des plaques minces en FGM doublement courbées reposant sur une fondation élastique soumises aux charges mécaniques et thermiques utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman.

Il est intéressant de noter que le couplage étirement- flexion existe en plaques FGM du à la variation des propriétés du matériau à travers l'épaisseur. Par conséquent, la surface neutre de la plaque FGM ne coïncide pas avec son milieu. Ce couplage pourrait être éliminé si les équations ont été calculées en se fondant sur la surface neutre. Ces observations ont été confirmées par Zhang et Zhou [114] En reformulant la CPT pour plaques FGM basée sur la surface neutre et par conséquent, obtenir les équations de mouvement sous forme de plaques isotropes. La surface neutre basée sur la CPT a été adoptée par Bodaghi et Saidi [115] Pour étudier le flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous

compression non uniforme. Damanpack et al. [116] ont utilisé la surface neutre basé sur le modèle CPT et la méthode des éléments de frontière pour prédire le comportement de flexion des plaques FGM. Kowal-Michalska et Mania [117] ont également adopté la surface neutre basée sur le modèle de la CPT pour étudier le flambement statique et dynamique des plaques FGM soumis à une action simultanée d'une compression directionnelle et des charges thermiques.

Depuis le couplage de flexion et d'étirement produit les déflexions transversales et les moments de flexion lorsqu'une plaque FGM est soumise à des charges en compression dans le plan. Par conséquent, le flambement de type bifurcation ne se produira pas. Les conditions pour le flambement de type bifurcation prévues par l'action de charges de compression dans le plan ont été examinées par Aydogdu [118]. Il est observé que le flambement de type bifurcation survient lorsque la plaque est complètement serrée. Pour une plaque à bords mobiles, là, le flambement de type bifurcation survient lorsque les charges dans le plan sont appliquées à la surface neutre [118].

II.2.2. Modèle FSDT

La théorie de déformation de cisaillement de premier ordre FSDT a été développée par Mindlin [66] pour l'effet de déformation de cisaillement par l'intermédiaire d'une variation linéaire de déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Il est à noter que la théorie développée par Reissner [119,120] présente elle aussi l'effet de déformation de cisaillement. Toutefois, les deux théories ne sont pas similaires (Reissner avec la théorie de Mindlin). La différence majeure entre les deux théories a été établie par Wang et al. [121] En dérivant les relations de la flexion entre Mindlin et Reissner pour les problèmes généraux des plaques. Depuis la théorie de Reissner est fondée sur l'hypothèse d'une distribution de contraintes de déformation linéaire et une distribution de contrainte de cisaillement parabolique, sa formulation conduira inévitablement à la variation cylindrique n'étant pas nécessairement linéaire à travers l'épaisseur de la plaque [121]. Par conséquent, il serait erroné de se référer à la théorie de Reissner FSDT qui implique une variation linéaire des déplacements à travers l'épaisseur. Une autre différence entre les deux théories est que la contrainte normale qui a été incluse dans la théorie Reissner a été omise dans la théorie de Mindlin [122].

La théorie FSDT a été largement utilisée pour modéliser les plaques en FGM, Praveen et Reddy [123] ont étudié les réponses transitoires non linéaires de plaques FG sous charges

thermiques et mécaniques à l'aide de la méthode des éléments finis et la théorie FSDT avec les hypothèses de Von Karman. Della Croce et Venini [124] ont présenté une étude hiérarchique des éléments finis pour l'analyse de flexion des plaques FGM sous charges mécaniques et thermiques utilisant la théorie FSDT et une formulation variationnelle. Toutefois, le couplage de flexion et d'étirement a été ignoré dans leur travail. Kim et coll. [125] ont enquêté sur le comportement de flexion non linéaire des plaques et coques FGM à l'aide de la théorie FSDT avec une définition complète de la lignée verte tenseur. Basé sur la quasi-formulation conforme, un élément de plaque à quatre nœuds a été élaboré et mis en œuvre dont l'objectif général est un ensemble d'éléments finis dynamique non linéaire XFINAS. Memar Ardestani et al. [126] ont utilisé la FSDT et une reproduction de particules noyaux pour étudier le comportement de flexion de façon concentrique et excentrique pour les plaques FGM renforcées sous charges transversales.

Chen [127] a étudié la vibration non linéaire de plaques FGM soumises à une action combinée des résistances en compression dans le plan initial et de flexion à l'aide de l'FSDT avec les hypothèses de Von Karman. La fréquence non linéaire de plaques avec appui simple a été obtenue à l'aide de la méthode Galerkin en combinaison avec la procédure itérative de Runge-Kutta. La FSDT avec les hypothèses de Von Karman ont été également employées par Alijani et al. [128] pour étudier la vibration non linéaire des plaques FGM simplement appuyées dans les environnements thermiques. La vibration libre des plaques FGM reposant sur une fondation élastique a été étudiée par Fallah et al. [129] à l'aide de la FSDT et une approche semi-analytique qui est fondée sur une combinaison d'une série de puissances infinies et la méthode Kantorovich.

Lanhe [130] et Bouazza et al. [131] ont dérivé des solutions analytiques pour les températures de flambement des plaques FGM simplement appuyées sous deux types de charges thermiques utilisant la FSDT et les solution de Navier. Ganapathi et al. [132] ont employé la FSDT et méthode des éléments finis pour étudier le flambement des plaques obliques sous charges de compression. Yaghoobi Yaghoobi et [133] ont étudié le flambement des plaques sandwich en FGM reposant sur une fondation élastique sous charges thermiques et mécaniques. La FSDT et la méthode des séries de puissances Frobenius ont été adoptées pour calculer la charge critique de flambement des plaques FGM sous différentes conditions aux limites. Le flambement des plaques FGM sous charges mécaniques et thermiques a été

étudié par Zhang et al. [134] à l'aide de la FSDT et de la méthode Krigeage (la méthode d'estimation linéaire) meshless local qui sont basées sur la formulation de Petrov-Galerkin.

Parc et Kim [135] ont adopté la FSDT avec les hypothèses de Von Karman pour étudier le post flambement et la vibration des plaques FGM sous charges thermiques en utilisant la méthode des éléments finis. Le comportement des plaques FGM post flambement sous charges thermiques et mécaniques a été étudié par Wu et al. [136] à l'aide de la FSDT et les polynômes doublement finis de Chebyshev. Ce problème est également étudié par Nguyen et Hoang [137] à l'aide de la méthode de Galerkin et la FSDT en combinaison avec une procédure itérative. Le flambement et le post flambement des plaques sandwich en FGM reposant sur une fondation élastique sous charges mécaniques ont été étudiés par Kiani et Eslami [138] à l'aide de la FSDT avec les hypothèses de Von Karman. L'approche combinée avec monomode technique de Galerkin a été utilisée pour calculer la température critique de flambement et l'équilibre du post flambement des plaques FGM simplement appuyées.

Dai et al. [139] se sont étendu sur la méthode des éléments libres de Galerkin [140] pour les plaques FGM avec des couches piézoélectriques sous charges mécaniques et thermiques basées sur la FSDT. Les résultats montrent que la méthode des éléments libres de Galerkin présente de nombreuses caractéristiques attrayantes comparativement à la méthode des éléments finis. Zhao et al. [141,142], Zhao et Liew [143,144] et Lee et al. [145,146] ont élaboré un modèle sans maillage basé sur la FSDT et les éléments libres de méthode de kpritz. Ce modèle a été appliqué aux différents problèmes des plaques et coques FGM, p. ex. flexion non linéaires géométriquement [144], les vibrations [141], flambement thermique [142], [145] Flexion thermique, post flambement thermique [146] et flambement thermomécanique [143]. La réponse transitoire des plaques et coques en FGM sous charges transversale a été étudiées par Roque et al. [147] à l'aide de la méthode sans maillage et la FSDT et un avec fonctions de base (RBFs radiale). Basés sur la FSDT. Nguyen-Xuan, et al. [148,149] se sont penchés sur la méthode des éléments finis basés sur les bords lissés (ES-FEM) [148] et la méthode des éléments finis basés sur les nœuds lissés (NS-FEM) [89] à la flexion statique, le flambement et l'analyse de vibrations libres des plaques FGM. Valizadeh et al. [150] ont employé la FSDT et l'approche iso géométrique (IGA) pour étudier la flexion, le flambement, la vibration libre et la réponse supersonique des plaques FGM. L'IGA utilise les fonctions de ratio non-uniformité B-spline (NURBS) pour décrire la géométrie complexe des structures et d'atteindre facilement le lissage.

Les solutions analytiques pour l'analyse de vibrations libres des plaques de type Levy reposant sur une fondation élastique ont été proposées par Hosseini-Hashemi et al. [151] à l'aide de la FSDT et les solutions de Levy. Hosseini-Hashemi et al. [152] ont amélioré leurs travaux antérieurs [151] en tenant compte de l'effet du couplage entre l'étirement et les déplacements transversaux. Mohammadi et al. [153] ont obtenu cinq équations d'équilibre par la FSDT dont deux équations indépendantes. Les équations obtenues ont ensuite été résolues pour obtenir la charge de flambement des plaques FGM sous chargement thermique. Cette approche était employée par Saidi et Jomehzadeh [154] pour calculer les solutions de type Levy pour la flexion des plaques FGM soumises à des charges transversales. Yaghoobi et Torabi [155] ont également suivi une approche similaire pour dériver une solution de type prélèvement pour la charge de flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous un chargement thermique.

Yang et al. [156] ont étudié l'influence de la distribution aléatoire des propriétés du matériau et les paramètres de rigidité sur la charge de flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique à l'aide de la FSDT et de la méthode de perturbation. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement dans la FSDT, Nguyen et coll. [157] ont adopté les équations d'équilibre dans le calcul du cisaillement transversal et des forces de cisaillement. Les résultats de l'analyse de flexion statique des plaques FGM simplement appuyées et des panneaux en sandwich en FGM, indiquent que la valeur du facteur de correction de cisaillement des plaques non-homogènes n'est pas la même que celui des plaques homogènes. Prakash et al. [158] ont reformulé la FSDT basée sur la surface neutre pour étudier l'effet de la position de la surface neutre sur la stabilité des plaques non linéaires. Les équations basées sur les hypothèses de Von Karman ont été résolues à l'aide des éléments continus à huit-nœuds C^0 . le concept de la surface neutre basée sur la FSDT a également été adoptée par Singha et al. [159] afin d'étudier le comportement de flexion non linéaire des plaques FGM sous chargement transversal à l'aide de la méthode des éléments finis. Les équations d'équilibre ont été utilisées pour calculer les contraintes de cisaillement transversal, tandis que la méthode énergétique a été adoptée pour dériver les expressions pour le facteur de correction de cisaillement.

En plus des recherches effectuées sur les plaques rectangulaires dans les travaux susmentionnés, la FSDT a été également appliquée aux plaques circulaires et plaques tubulaires. Reddy et al. [160] ont étudié la flexion avec l'effet d'étirement pour l'analyse des

plaques tubulaires en FGM en utilisant la FSDT. Les solutions analytiques pour la flexion, les forces et les moments résultants ont été exprimés en termes de quantités correspondantes aux plaques isotropes basées sur le CPT. Najafizadeh et Eslami [161] ont dérivé les solutions analytiques pour le flambement des plaques tubulaires en FGM ainsi pour les conditions aux limites, les plaques sont simplement appuyées et elles sont soumises à une montée en température uniforme, on a alors une variation de température graduelle à travers l'épaisseur et linéaire le long du rayon. Efraim et Eisenberger [162] ont étudié la vibration libre des plaques FGM annulaires avec une épaisseur variable basée sur la FSDT. Les solutions proposées avec différentes conditions aux limites ont été obtenues à l'aide des éléments exacts et de la méthode de rigidité dynamique. L'analyse de flexion d'un disque rotatif en FGM a été étudiée par Bayat et al. [163] à l'aide de la FSDT et d'une méthode semi-analytique basée sur la FSDT, Naderi et Saidi [164] ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques tubulaires par le découplage des équations. Une approche similaire a été adoptée par Saidi et al. [165] Pour établir des solutions analytiques pour la fréquence naturelle des plaques tubulaires sur la base de la FSDT. Amini et al. [166] ont étudié les effets de la non-linéarité géométrique sur les vibrations libres et les vibrations provoquées des plaques tubulaires basées sur la FSDT avec les hypothèses de Von Karman. Golmakani et Alamatian [167] et Kadkhodayan et Alinaghizadeh [168] ont étudié l'analyse des déformations importantes des plaques circulaires en FGM sous charges transversales à l'aide de la FSDT avec les hypothèses de Von Karman. Xif et al. [169] ont introduit un système efficace pour des solutions pour la vibration libre de plaques FGM circulaires, en forme d'obus et coniques à l'aide de la méthode d'ondelettes de Haar et la FSDT.

La FSDT était également utilisée pour les modèles des coques en FGM. Reddy et Chin [170] ont étudié la réponse dynamique des cylindres et des plaques FGM soumises à deux différents types de charges thermiques utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis. Shahsiah et Eslami [171,172] ont dérivé des solutions analytiques pour le flambement thermique des coques cylindriques en FGM simplement appuyées et soumises à deux types de charges thermiques utilisant la FSDT et les solutions de Navier. Samsam Shariat et Eslami [173] et Mirzavand et al. [174] ont étudié l'influence des imperfections géométriques initiales sur le flambement des plaques et de coques cylindriques en FGM. Les solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques et coques en FGM sous différents types de charges thermiques ont été obtenues en se basant sur la FSDT. Une analyse géométriquement non linéaire des obus en FGM était effectuée par Arciniega et Reddy [175]

à l'aide de la FSDT et la méthode des éléments finis. D'autres études sur le comportement de pliage géométriquement non linéaire pour les obus ont été effectuées par Barbosa et Ferreira [176] et Sheng et Wang [177] à l'aide de la méthode des éléments plaques de Marguerre et la méthode numérique à quatre variables de Runge-Kutta respectivement. Behjat et al. [178] ont étudié la flexion statique, la vibration libre et les réponses transitoires des panneaux cylindriques piézoélectriques en FGM soumises à des charges mécaniques, thermiques et électriques en utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis. La flexion statique et dynamique et les problèmes de vibration libre de panneaux doublement coudés en FGM sous une action combinée des charges mécaniques et thermiques ont été adressés par Kiani et al. [179] à l'aide de la FSDT et d'une double analyse Laplace-transformée de Fourier. Xiang et al. [180] ont adopté la méthode sans maillage et la FSDT pour prédire la fréquence naturelle de coques cylindriques en FGM.

Sheng et Wang [181] ont étudié l'effet de la température sur les vibrations et le flambement de coques cylindriques FGM entourées par un milieu élastique à l'aide de la FSDT en conjonction avec la méthode Bolotin et le mode normal d'extension. Zhang et Hao [182] ont étudié la vibration non linéaire de coques cylindriques en FGM sous une combinaison de charges thermiques et les excitations externes à l'aide de la FSDT et de la méthode Galerkin. Le flambement de coques cylindriques en FGM sous pression externe et la compression axiale a été étudié par Khazaeinejad et al. [183] à l'aide de la FSDT et d'une méthode d'analyse basée sur la FSDT avec les hypothèses de Von Karman, Nguyen et Pham [184] ont étudié la réponse dynamique non linéaire et les caractéristiques des vibrations des coques cylindriques imparfaites en FG avec des raidisseurs excentriques entourés par un milieu élastique. La méthode numérique de Runge-Kutta a été utilisée pour prédire la réponse dynamique de coques cylindriques en FG soumises à des charges mécaniques axiales et transversales d'amortissement. Isvandzibaei et al. [185] ont étudié les caractéristiques des vibrations de coques cylindriques en FGM sous la pression de différents chargements. Les équations dérivées analytiquement de la FSDT sont résolues pour la fréquence naturelle des coques cylindriques sous différentes conditions aux limites à l'aide de la méthode de Ritz. Pradyumna et Nanda [186] ont étudié la réponse transitoire non linéaire géométriquement des panneaux et plaques en FGM dans des environnements thermiques. Le système équations dérivées de la FSDT et les hypothèses de Von Karman étaient résolues en utilisant un système à huit-nœuds C^0 en éléments continus avec 5 degrés de liberté (DOF) par nœud. La réponse

transitoire a été obtenue à l'aide de la méthode Newmark combinée avec le système d'intégration Newton-Raphson (méthode d'itération).

II.2.3. Modèle TSDT

La théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre développée par Reddy [67] pour les composites stratifiés prend compte du cisaillement transversal et de l'effet de déformation et satisfait aux conditions limites (traction zéro sur les surfaces supérieures et inférieures) d'une plaque. Le facteur de correction de cisaillement n'est donc pas nécessaire. Il est à noter que la zone de déplacement de la théorie de Reddy est identique à celle de la théorie de Levinson [187], toutefois, les équations du mouvement des deux théories sont différentes les unes des autres. Cela n'est dû qu'au fait que Levinson [187] a utilisé des équations d'équilibre de variationnelle de la FSDT qui sont incompatibles avec ceux dérivés de l'approche variationnelle de Reddy [67].

Reddy [188] a présenté deux formulations analytiques par éléments finis basées sur la TSDT. Les formulations prennent en compte le couplage thermo-mécanique, pour une dépendance temporelle de type Von Karman et la non linéarité géométrique. Shen [189] a présenté l'analyse non linéaire des charges transversales des plaques FGM dans des environnements thermiques. Les équations d'équilibre basées sur la TSDT avec les hypothèses de Von Karman ont été résolues pour une charge de flexion et pour un chargement d'un moment fléchissant pour les plaques simplement appuyées avec des appuis mobiles ou immobiles à l'aide d'une technique de perturbations mixtes de Galerkin. L'analyse de flexion non linéaire de plaques FGM sous charges thermiques et mécaniques a été réalisée par Yang et Shen [190] à l'aide de la TSDT avec les hypothèses de Von Karman. Une approche perturbatrice multi-paramètres a été utilisée pour obtenir les réponses de flexion des plaques FG avec deux bords opposés avec appuis doubles ou appuis simples et les deux autres bords ayant des conditions limites arbitraires. Yang et al. [191] ont étudié le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des plaques sandwich en FGM sous une charge combinée d'une température uniforme et d, un changement périodique de compression dans le plan à l'aide de la TSDT et d, une méthode semi-analytique. Akbarzadeh et al. [192] ont étudié les réponses statiques et dynamiques des plaques FGM sous des charges latérales à l'aide de la méthode TSDT et des séries de Fourier. Zhang [193] a employé le concept de la surface neutre basée sur la TSDT avec les hypothèses de Von Karman pour étudier la réponse de flexion non linéaire de plaques FGM reposant sur une fondation élastique dans les

environnements thermiques. Les solutions analytiques pour les plaques FGM avec six différentes conditions aux limites ont été obtenues à l'aide de la méthode de Ritz.

Javaheri et Eslami [194] ont dérivé les solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FG simplement appuyées sous quatre types de charges thermiques utilisant la TSDT et les solutions de Navier. Un travail similaire a été effectué par Samsam Shariat et Eslami [195] pour les plaques FGM soumises à trois types de charges mécaniques et deux types de charges thermiques. Heydari et Najafizadeh [196] ont dérivé des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques circulaires en FGM en utilisant la TSDT. Bodaghi et Saidi [197] ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques de type Levy en FGM sous des charges dans le plan. Par l'introduction de quatre nouvelles fonctions, cinq équations dérivées de la TSDT ont été converties en deux équations indépendantes. Ces équations ont été ensuite résolues pour les plaques rectangulaires à l'aide des solutions de Levy. Cette approche a également été adoptée par Saidi et al. [198] pour établir des solutions analytiques pour la déflexion des plaques de type Levy en FGM soumises à des charges transversales. Thai et Kim [199] ont reformulé la TSDT basée sur la surface neutre et les solutions de type Levy dérivée de la charge et ont enquêté sur la sensibilité des imperfections géométriques initiales sur le comportement des plaques FGM post-flambement sous charges mécaniques et thermiques. L'imperfection géométrique initiale est supposée être dans la forme du produit des fonctions trigonométriques et hyperboliques [200].

Les équations basées sur la TSDT et les hypothèses de Von Karman pour le post-flambement étaient résolues pour l'équilibre des plaques FGM pour différentes conditions aux limites à l'aide d'une approche semi-analytique en combinaison avec une procédure d'itération. Shen [201] a étendu son travail antérieur [189] au post-flambement pour l'analyse des plaques FGM simplement appuyées sous une charge thermique. Une technique de perturbation en deux étapes a été utilisée pour calculer la température de flambement et l'équilibre post-flambement. Les résultats révèlent que la dépendance de la température a un effet significatif sur le comportement de post-flambement thermique des plaques FGM. Les résultats montrent également que, pour le cas de la conduction de la chaleur, le chemin post-flambement pour une plaque de géométrie parfaite n'est plus du type de bifurcation. Nguyen et Pham [202] ont étudié le comportement post-flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique, les solutions analytiques pour la charge de flambement thermique des

plaques FGM sous charges mécaniques et thermiques ont été obtenues à l'aide de la méthode de Galerkin et la TSDT.

Kim [203] a enquêté sur les caractéristiques des vibrations de plaques FGM, il a dans un premier temps souligné les environnements thermiques utilisant la TSDT et les équations de Rayleigh-Ritz. Yang et Shen [204] ont employé la TSDT avec les hypothèses de Von Karman pour étudier les caractéristiques des vibrations et de la réponse transitoire pour les plaques FGM dans des environnements thermiques. Le DQM et l'approche de superposition modale ont été utilisés respectivement pour déterminer les caractéristiques des vibrations et les réponses transitoires des plaques FGM avec deux faces opposées serrées et les deux autres bords ayant des conditions limites arbitraires. Huang et Shen [205] ont également examiné la vibration non linéaire et la réponse transitoire de plaques dans les environnements thermiques FG utilisant la TSDT avec les hypothèses de Von Karman. Toutefois, ils ont utilisé une technique de perturbations améliorées pour dériver des solutions analytiques pour les plaques avec appui simple. Basées sur la TSDT et les théories de Hosseini Hashemi et al. [206] et Hasani Baferani et al. [207] les solutions type Levy sont dérivées pour les fréquences naturelles des plaques FGM [206] et les plaques FGM reposant sur une fondation élastique [207].

Ferreira et al. [208,209] ont employé la méthode sans maillage, la TSDT et la méthode RBFs multi quadratique colocalisation pour étudier le comportement de flexion des plaques FGM. Ferreira et al. [210] ont étendu leurs recherches antérieures [208,209] à la vibration libre des plaques FGM. Gulshan Taj et al. [211] ont mis au point un maillage un neuf-noeuds C^0 continu avec sept éléments isoparamétriques d'ordre par nœud pour l'analyse de la flexion des plaques FGM sous charges mécaniques et thermiques utilisant la TSDT. Foroughi et Azhari [212] ont utilisé la TSDT et la méthode des bandes finies avec fonctions spline pour étudier le flambement et la vibration libre des plaques FGM reposant sur une fondation élastique. Tran et al. [213] ont effectué une analyse sur la flexion statique, le flambement et la vibration libre des plaques FGM à l'aide de la TSDT et IGA. Tran et al. [214] ont étendu leurs recherches précédentes [213] au flambement thermique des plaques FGM. La TSDT et IGA ont été également employé par Jari et al. [215] pour étudier la linéarité et non linéarité de la flexion, le flambement et les comportements de vibration libre des plaques FGM sous charges thermiques et mécaniques. La TSDT était aussi plus utilisée de préférence pour les coques en FGM. Shen [216] et Shen et Leung [217] ont effectué l'analyse

post flambement des panneaux cylindriques en FGM dans les environnements thermiques soumis à une compression axiale [216] ou une pression latérale [217]. Les équations sont dérivées de la TSDT avec les hypothèses de Von Karman. Les deux déformations non linéaires de pre-flambement pour les panneaux cylindriques en FGM avec une imperfection géométrique initiale ont été incluses dans l'analyse du post-flambement à l'aide d'une théorie des couches limites de flambement de plaque. La charge de flambement et les équations d'équilibre pour post-flambement ont été déterminées en utilisant une technique de perturbation singulière. Shen [218] et Shen et Noda [219] ont étendu leurs recherches précédentes [216,217] aux coques cylindriques avec actionneurs piézo-électrique. Shen et Liew [220] ont également appliqué les travaux antérieurs [216] aux panneaux cylindriques en FGM avec couches piézoélectriques sous une action combinée de compression axiale de charges électriques et thermiques. Shen et Noda [221] ont fourni des solutions analytiques pour le post-flambement de coques cylindriques en FGM soumises à des charges axiales et radiales dans les environnements thermiques. La formulation était fondée sur la TSDT avec les hypothèses de Von Karman et représentait les deux déformations pré-flambement non linéaire et une imperfection géométrique initiale. Shen [222] a fourni des solutions analytiques pour le post flambement thermique de coques cylindriques en FGM sous la conduction de chaleur qui suit une approche similaire. Shen et al. [223 à 225] ont étudié le comportement post flambement de coques cylindriques FGM entourées par un milieu élastique sous charges mécaniques [223,224] ou charges thermiques [225] à l'aide de la TSDT et une technique de perturbation singulière.

Bagherizadeh et al. [226] ont présenté des solutions analytiques pour la charge critique de flambement des coques cylindriques simplement appuyées entourées par un milieu élastique à l'aide de la méthode de la série de fourrier et la TSDT. Oktem et al. [227] ont présenté des solutions analytiques pour l'analyse de flexion des plaques et coques FGM simplement appuyées et doublement courbées à l'aide de la TSDT et des séries de Fourier. Hoang et Nguyen [228] ont enquêté sur la réponse non linéaire des Panneaux coudés en FGM reposant sur une fondation élastique. Les solutions analytiques pour la courbe de charge-flèche des panneaux simplement appuyées sous charges mécaniques et thermiques ont été fournies à l'aide de la méthode de Galerkin et la TSDT. Nguyen et coll. [229] ont étendu leurs travaux antérieurs [228] pour les coques cylindriques FG entourées par un milieu élastique sous charges mécaniques et thermiques. Kapuria et al. [230] ont mis au point un élément

plaques quadrilatères peu profondes pour l'analyse dynamique des plaques et coques en FGM à l'aide de la TSDT.

II.2.4. Modèles HSDTs

La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDT est modélisée pour les variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou de deux plans (déplacements transversaux) (c'est-à-dire la théorie quasi-3D) à travers l'épaisseur, et par conséquent en mesure les effets de déformation de cisaillement ou de cisaillement et de déformations normale. Les modèles HSDTs peuvent être développés à l'aide de fonctions de forme polynomiale ou une fonction non-polynomiale.

II.2.4.1. Modèles basés sur une fonction polynomiale

Qian et al. [231,232] et Gilhooley et al. [233] ont employé une méthode sans maillage local de Petrov et Galerkin et la méthode quasi-3D de Batra et Vidoli [234] pour étudier la flexion et la vibration des plaques FGM. Cette théorie quasi-3D était également utilisée par Sheikholeslami et Saidi [235] pour étudier la vibration de plaques FGM reposant sur une fondation élastique à l'aide des solutions de Navier. Qian et Batra [236] ont étendu leurs travaux précédents [231] à l'augmentation transitoire de problèmes des plaques FGM sous charges thermiques et mécaniques. Patel et al. [237] ont étudié les caractéristiques de vibration libre de coques cylindriques elliptiques en FGM à l'aide de la théorie quasi-3D et la méthode des éléments finis. Vue la zone de déplacement de la théorie quasi-3D et par les travaux de Lo et al. [238,239] est de 11 inconnues et représente une variation cubique des déplacements dans le plan et une variation quadratique de la cylindrée transversale à travers l'épaisseur. Roque et al. [240] ont étudié le comportement de flexion des plaques FGM à l'aide d'une méthode de colocalisation avec une méthode sans maillage multi quadratique RBFs. La formulation était fondée sur le modèle HSDT de Pandya et Kant [241] avec 7 inconnues et qui tient compte d'une variation cubique des déplacements dans le plan et d, un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur.

Matsunaga [242,243] a développé une théorie quasi-3D pour l'analyse du flambement et de vibration libre des plaques en FG [243] et les coquilles peu profondes [242]. La théorie est fondée sur une série d'expansion de puissance a travers le plan et des déplacements transversaux. Matsunaga a prorogé sa théorie aux problèmes de flambement thermique [244] et aux problèmes de flexion thermique [245] des plaques FGM.

Pradyumna et Bandyopadhyay [246,247] ont élaboré une forme d'éléments continus C^0 de coque avec neuf dofs par noeud pour la vibration libre [246] et l'instabilité dynamique [247] des Panneaux coudés en FGM. La formulation était fondée sur la HSDT de Kant et Khare [248] dans lequel des déplacements dans le plan sont développés sous forme d'une variation des coordonnées de l'épaisseur de cube alors que le déplacement transversal est constant. Alijani et al. [249] ont étudié l'effet de la température sur la vibration géométriquement non linéaire des panneaux doublement coudés sous la variation thermique et harmonique d'excitation. La formulation était fondée sur la HSDT de Amabili et Reddy [250] et la méthode de l'énergie multimodale. Chen et al. [251] ont étudié la vibration libre et le flambement des plaques FGM sous une combinaison d'une distension de contraintes et un effort de flexion pure. Les équations de mouvement basé sur le champ de déplacement de Lo et al. [238,239] sont analytiquement résolus pour la fréquence naturelle et la charge de flambement des plaques FG simplement supportées. Les effets de divers paramètres et contraintes initiales sur la fréquence naturelle et la charge de flambement des plaques FG ont été étudiés. Talha et Singh [252] ont développé une théorie quasi-3D pour l'analyse de flexion statique et de vibration libre des plaques FGM. Le champ de déplacement de leur théorie a été obtenu en modifiant le champ de déplacement de Lo et al. [238,239] pour satisfaire aux conditions limites de traction zéro des surfaces supérieures et inférieures de la plaque. Une méthode neuf-noeuds C^0 continue avec 13 éléments isoparamétriques dofs par noeud a été mise au point pour étudier l'influence du ratio de l'indice d'aspect, l'épaisseur, le volume fraction et les conditions limites sur la flexion et la réponse de vibration libre des plaques FGM. Talha et Singh [253] ont étendu leurs travaux précédents [251] à la vibration thermo-mécanique de plaques FG. Gulshan Taj et al. [254] ont également étendu les travaux antérieurs [251] Pour l'analyse de flexion des plaques sandwich obliques en FG.

Xiang et al. [255] ont proposé une énième théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de vibrations libres de FG et plaques sandwich composites. Le champ de déplacement de leur théorie a été obtenu en modifiant la zone de déplacement de la TSDT pour tenir compte des valeurs polynomiales. La TSDT est donc déduite comme un cas spécifique. Cette théorie a été étendue aux problèmes de flexion des plaques FG [256], aux problèmes de vibration libre des plaques isotropes [257], des plaques sandwich en FGM [258] et des plaques FGm reposant sur une fondation élastique [259]. Xiang et Kang [260] ont évalué diverses théories de déformation de cisaillement à cinq inconnues pour la flexion des plaques FGM à l'aide d'une méthode sans maillage avec cannelure Sobhy RBFs, tandis que

[261] ont évalué diverses théories de déformation de cisaillement à cinq inconnues pour le flambement et vibration libre des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique avec différentes conditions aux limites en utilisant une série de méthodes. Wattanasakulpong et al. [262] ont utilisé la TSDT améliorée de Shi [263] et la méthode de Ritz pour l'analyse de vibrations libres et les problèmes de vibrations forcées des plaques serrées en FG sous les charges thermiques.

Basé sur le champ de déplacement de Lo et al. [238,239], Reddy [264] a développé une HSDT généralisée avec la non linéarité géométrique de Von Karman pour l'analyse thermo-mécanique des plaques FG. Cette théorie a été également employée par Kant et al. [265] pour étudier la flexion statique et les réponses de vibrations libres des plaques FG. Jha et coll. [266 à 269] ont étudié la flexion statique [266,269] et les vibrations libres [267 à 269] des plaques FGM à l'aide d'une théorie quasi-3D de Kant et Manjunatha [270] avec 12 inconnues. Ils ont obtenu des solutions analytiques pour les plaques simplement appuyées à l'aide des solutions de Navier. L'influence des termes d'ordre supérieur dans la zone de déplacement de la fréquence naturelle de plaques FG a également été étudié [267]. Cette théorie quasi-3D a également été employée par Swaminathan et Naveenkumar [271] afin d'étudier la déformation des plaques sandwich en FGM. Natarajan et Manickam [272] ont développé un huit-nœuds C^0 continue avec 13 éléments dofs par nœud pour étudier la flexion et la vibration libre des plaques sandwich FG. La formulation a été basée sur la théorie quasi-3D d'Ali et al. [273]. Ils ont également étudié l'influence des termes d'ordre supérieur dans le champ de déplacement sur l'exactitude de la théorie quasi-3D. Nguyen-Xuan et al. [274] ont présenté une formulation simple et efficace pour les plaques sandwich composites à l'aide d'une théorie de déformation de cisaillement à cinq variables en combinaison avec l'IGA. La flexion statique, le flambement et le comportement vibratoire des plaques rectangulaires et circulaires sous différentes conditions aux limites ont été étudiés.

II.2.4.2. Modèles basés sur une fonction non- polynomiale

la fonction non-polynomiale a été utilisée pour la première fois par Levy [275] avec une fonction sinusoïdale pour élaborer une théorie raffinée pour les plaques épaisses isotropes. La fonction sinusoïdale a été adoptée plus tard par Stein Touratier [276] et [277] pour développer une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale à cinq variables (SSDT) pour les plaques composites stratifiées et isotropes, respectivement. La SSDT a été largement utilisée pour l'étude de la courbure des plaques composites [278 à 280], le

flambement des plaques composites [281], la flexion des plaques sandwich FG [282,283], le flambement et la vibration de plaques sandwich en FGM [284,285], les vibrations de plaques FGM [286], la flexion des plaques FG [287], la flexion thermique de Plaques FG reposant sur une fondation élastique [288], le flambement thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique. Pour les poutres en nano [289], [290] et les plaques en nano composites [291]. Les relations entre la SSDT flexion et la CPT quantités ont été dérivées par Zenkour [292] pour les plaques de type levy en FGM.

Soldatos [293] a d'abord employé une fonction hyperbolique afin de développer une théorie HSDT pour plaques composites stratifiées. Akavci [294,295] a proposé une nouvelle fonction HSDT hyperbolique pour développer une analyse pour la flexion de plaques composites [294] et l'analyse de vibration libre des plaques FGM reposant sur une fondation élastique [295]. Une fonction hyperbolique inverse a été utilisée par Grover et al. [296] pour l'élaboration d'une HSDT pour plaques composites et sandwich. Mahi [297] a récemment développé une HSDT pour plaques composites sandwich basée sur une nouvelle fonction hyperbolique.

La fonction exponentielle a été utilisée pour la première fois par Karama et al. [298] pour l'élaboration d'une HSDT pour poutres composites. Aydogdu [299] a approfondi ses travaux antérieurs [298] de plaques composites. Mantari et al. [300] ont également recouru à la fonction exponentielle pour développer une HSDT pour les coques composites et sandwich. La HSDT de Mantari a été adoptée par Guedes et Soares [301] pour étudier le comportement de flexion des plaques FGM. Fondé sur une nouvelle fonction exponentielle, Mantari et al. [302] ont proposé une nouvelle fonction HSDT pour l'analyse des vibrations de plaques FGM reposant sur une fondation élastique. Une fonction tangentielle était employée par Mantari et al. [303] et Mantari et Guedes Soares [304] ont élaboré une fonction HSDT pour plaques composites isotropes, des plaques sandwich [303] et les plaques FGM [304]. Mantari et al. [305 à 307] ont utilisé des fonctions trigonométriques exponentielles combinées pour développer une HSDT pour plaques composites sandwich [305], [306] les plaques FG et les plaques avec des surfaces doublement courbées [247]. Mantari et Guedes Soares [308,309] ont proposé une combinaison d'une fonction exponentielle et hyperbolique pour développer une HSDT pour plaques isotropes et multicouches [308] et les plaques FGM [309]. Une combinaison d'une fonction tangentielle et une fonction exponentielle a été proposée par Mantari et al. [310] pour l'élaboration d'une HSDT pour plaques FGM. Nguyen et coll. [311]

ont utilisé la combinaison inverse d'une fonction tangentielle et une fonction cubique pour les plaques sandwich en FGM, tandis que Thai et coll. [312] ont usé d'une combinaison inverse d'une fonction tangentielle et des fonctions linéaires pour composites et des plaques sandwich. Thai et coll. [313] ont continué leurs travaux antérieurs [312] pour élaborer une HSDT pour des plaques sandwich en FGM à l'aide de deux nouvelles fonctions trigonométriques.

En outre, les fonctions non-polynomiales ont également été employées pour développer des théories quasi-3D qui comptent tant pour l'effet de cisaillement et de la déformation. Par exemple, Zenkour [314] a employé la fonction sinusoïdale pour développer une théorie quasi-3D pour plaques FG. Mantari et Guedes Soares [315] ont présenté une formulation généralisée dans laquelle de nombreuses théories quasi-3D peuvent être déduites en utilisant des polynômes ou des hybrides ou des fonctions trigonométriques. Mantari et Guedes Soares [316] ont optimisé la théorie quasi-3D sinusoïdale pour l'analyse de la flexion des coques en FGM. Mantari et Guedes Soares [317] ont amélioré leurs travaux antérieurs [313] en incluant l'effet d'étirement de l'épaisseur des plaques FGM.

II .2.5. Théories simplifiées

Il est bien connu que les HSDTs et les théories quasi-3D se sont développées en élargissant le champ des déplacements avec une séries de puissances, mais chaque puissance supplémentaire va induire une autre variable à la théorie. Par conséquent, il est nécessaire de simplifier les HSDTs existantes et les théories quasi-3D pour l'élaboration des théories simples avec moins d'inconnues.

Senthilnathan et al. [318] ont simplifié la TSDT en divisant le déplacement transversal pour la flexion et les composants du cisaillement pour formuler d'autres hypothèses à la TSDT. Par conséquent, le nombre d'inconnues est réduit d'un. En fait, l'idée de cloisonner le déplacement transversal dans la flexion et aux composants du cisaillement a d'abord été proposé par Huffington [319] et plus tard adopté par Krishna Murty [320] (voir [321]). La séparation des déplacements dans la flexion et aux composants du cisaillement a non seulement réduit le nombre d'inconnues, mais il a aussi permis à voir les contributions dues pour le cisaillement et la flexion au total de déplacements.

Senthilnathan et al. [318] ont appliqué la TSDT simplifiée de plaques composites stratifiées et conclu que la simplification est suffisante pour prédire la précision Charge de

flambage de plaques composites stratifiées. L'TSDT simplifiée a été prorogée ultérieurement jusqu'aux plaques FG [322] et FG plaques sandwich [323].

Shimpi [324] a élaboré une théorie de la plaque raffinée (RPT) pour plaques isotropes en divisant les déplacements dans les composants en flexion et en cisaillement. La RPT ne contient que deux inconnues comparées deux à trois inconnues dans le cas de l'TSDT FSDT et, mais c'est une précision suffisante pour prédire les réponses globales de plaques isotropes [324 à 327] et les plaques orthotropiques [328-332]. Kim et coll. [333] se sont étendu sur le RPT de plaques composites stratifiées et modifié le RPT par comptabilité la composante Vulgarisation de la cylindrée transversale. Il a été conclu que le RPT peut prédire exactement la flexion statique, le flambage et les comportements de vibration libre de plaques composites stratifiées [333-336]. Le RPT a également été largement appliqué aux plaques FG [337 à 345], aux plaques FGsandwich [346-348),aux plaques FG avec couches piézoélectriques , aux plaques en nano [349], nanobeams [350,351] et [352]. Thai et Uy [353] ont reformulé le RPT basé sur la surface neutre et dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambage des plaques de type prélèvement FG. Thai et Choi [354] ont travaillé sur l'amélioration de la RPT pour tenir compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur de plaques FG.

À l'aide des hypothèses semblables de Shimpi [324], de nombreux quatre variables la déformation de cisaillement théories ont été développées en utilisant différentes fonctions de forme. Par exemple, Mechab et al. [355] et El Meiche et al. [356] ont proposé une HSDT à quatre inconnues pour plaques FG [295] et FG plaques sandwich [356] à l'aide de fonctions hyperboliques. Merdaci et al. [357], Tounsi et al. [358], Ameer et al. [359] et le thaï et Vo [360] ont développé une –HSDT à quatre inconnues pour plaques sandwich FG [357,358] et plaques FG [359,360] en utilisant la fonction sinusoïdale. Basée sur une fonction tangentielle, Nguyen-Xuan inverse et al. [361] proposé un quatre-HSDT inconnu pour IGA de plaques FG. Thai et Choi [362,363] ont proposé diverses HSDTs à quatre inconnues pour les plaques à l'aide de différentes formes FG fonctions y compris les fonctions cubiques [67], les fonctions sinusoïdales [277], [293]les fonctions hyperboliques et fonctions exponentielles [268]. L'exactitude de ces théories est évaluée pour la résistance à la flexion et les problèmes de vibration libre des plaques FG utilisant à la fois des solutions analytiques [362] et les solutions d'éléments finis [363]. Yaghoobi et Fereidoon [364] ont développé une théorie de déformation de cisaillement simplifié et similaire à la théorie développée par Xiang et al. [255- 259] Pour le flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique soumis à

des charges thermiques. Thai et Choi [365,366] ont simplifié la FSDT pour les plaques FGM [365] et les plaques composites stratifiées [366]. Cette FSDT simplifiée a été utilisée ultérieurement par Yu et al. [367] et Yin et coll. [368] Pour l'irrégularité géométrique initiale des plaques FG et pour la non-linéarité géométrique. Thai et coll. [369] ont également élaboré une autre FSDT simplifiée pour des plaques sandwich à l'aide des hypothèses de Shimpi et al. [370]. Les solutions analytiques pour la flexion, et la charge de flambement et la fréquence naturelle ont été obtenues pour des plaques sous des différentes conditions aux limites à l'aide de la méthode de solutions de Sobhy [261].

En divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et étirement, Thai et Kim [371] ont proposé une théorie quasi-3D à cinq variables pour les plaques à l'aide d'une fonction sinusoïdale. Plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D ont également été proposées à l'aide de différentes fonctions de forme comme fonctions hyperboliques [372 à 375], [376] fonctions sinusoïdales combinées hyperboliques et fonctions exponentielles [377,378] et combinées une fonction hyperboliques et une fonction sinusoïdale [379]. Fondés sur les fonctions trigonométriques, Mantari et Guedes Soares [380,381] ont proposé une théorie quasi-3D simple à quatre variables pour les plaques FG en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal. En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables, Zenkour [382 à 385] a proposé une autre théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FG [382], et les plaques sandwich [383] et des plaques composites stratifiées [384,385] à l'aide d'une fonction hyperbolique. Al Khateeb et Zenkour [386] ont suivi leur œuvres précédentes [382 à 385] afin de proposer théorie quasi-3D à quatre-variables pour plaques FG reposant sur une fondation élastique à l'aide de la fonction sinusoïdale.

II.2.6 Les. Théories mixtes

Mentionnées ci-dessus ses théories sont élaborées à partir des modèles ELS sur le principe de déplacements virtuels (DVP) où les composantes de déplacement sont considérées comme des variables primaires et les composantes de contraintes sont calculés à partir des composantes de déplacement à l'aide des relations contraintes-déplacement. Une autre approche variationnelle, à savoir celle Reissner RMVT (théorème variationnelle mixte), a été proposée par Reissner [387,388] en présupposant deux domaines indépendants pour les déplacements et les contraintes transverses. L'avantage de la RMVT sur le DVP est que la compatibilité des déplacements et de l'équilibre entre deux couches adjacentes peuvent être

"naturellement" satisfaite. C'est la principale raison pour laquelle la RMVT peut être considérée comme un outil puissant pour l'analyse de plaques multicouches.

Murakami [369] a été le premier à appliquer la RMVT pour élaborer une théorie stratifiée mixte de premier ordre et le modèle zig-zag de cylindrée. Basé sur la RMVT Demisi, [390 à 394] a développé une variété de théories stratifiées mixtes dans une série de cinq articles y compris les théories HSDTs de couches par couches [391], [392] et les modèles zig-zag [393]. Tarifs et al. [395] ont proposé une théorie basée sur la RMVT pour la résistance à la flexion et l'analyse de vibration libre des plaques FG. La théorie est basée sur un champ de déplacements qui représente une variation linéaire du déplacement et de la variation de la cylindrée transversale à travers l'épaisseur. Wu et Li [396] ont développé une TSDT basée sur la RMVT pour la flexion et l'analyse des plaques FGM en utilisant la TSDT et le modèle de déplacement couche par couche et les distributions quadratiques de contraintes de cisaillement transversal. Par conséquent, la continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement transversal au niveau des interfaces entre les couches adjacentes sont exactement stratifiées. Une technique de condensation statique a été utilisée pour réduire le nombre d'inconnues à 5, qui est la même que celle de la TSDT basée sur PVD. Il a obtenu des solutions analytiques pour les plaques avec appui simple, et les résultats obtenus ont également été comparés à celles prédites par le modèle basé sur la PVD. Il est constaté que le modèle basé sur la RMVT est légèrement supérieur à celui fondé sur la PVD dans la prédiction de l'ensemble des planchers et plaques FG orthotropes. Basé sur la RMVT et la PVD, Wu et Li [397] ont mis au point des modèles de couches finies pour l'analyse de flexion des plaques en FG multicouches. Dans ces modèles, la plaque a été divisée en un certain nombre de couches finies dans lequel les fonctions trigonométriques et les polynômes de Lagrange étaient utilisés respectivement pour interpoler les variations transversales du champ de variables de chaque couche. Ces modèles ont été étendus par Wu et Chang [398] et Wu et al. [399,400] à la flexion statique [398], vibration libre [399] et le flambement [400] des vérins en composites multicouches et vérins sandwich. Une méthode de colocalisation et une méthode sans maillage de Galerkin ont été développées par Wu et al. [401] et Wu et Chiu [402] à l'aide d'un différentiel pour reproduire l'interpolation du noyau [403] et la RMVT. Ces modèles ont été appliqués à la flexion [401] et la vibration libre [402] pour l'analyse des plaques FG et composites multicouches. Il est constaté que la méthode de colocalisation sans maillage donne de meilleurs résultats que la méthode sans maillage de Galerkin pour le problème de flexion. Toutefois, pour les problèmes de vibration libre, la méthode sans

maillage de Galerkin donne de meilleures performances que la méthode de colocalisation sans maillage. Wu et Yang [404,405] ont étendu leurs recherches précédentes [401,402] aux composite multicouches et coques cylindriques en FGM.

II.3. Théories d'élasticité 3D

L'élaboration de solutions exactes de la théorie d'élasticité 3D est très utile pour évaluer l'exactitude et la validité des modèles ELS. Mian et Spencer [406] ont créé des solutions exactes pour les plaques composites stratifiées. Ootao et Tanigawa [407] ont mis au point des solutions exactes 3D pour des problèmes de contraintes thermiques des plaques simplement appuyées. Cheng et Batra [408] ont dérivé des solutions exactes 3D pour l'analyse de flexion des plaques elliptiques serrées FG sous charges thermiques utilisant une méthode d'expansion asymptotique. Reddy et Cheng [409] ont également adopté la méthode d'expansion asymptotique pour dériver des solutions exactes 3D pour l'analyse de flexion des plaques en FGM simplement appuyées en vertu des charges thermiques. Au lieu d'utiliser la méthode d'expansion asymptotique, Vel et Batra [410] ont adopté une méthode de séries de puissances pour l'exactitude des solutions 3D pour l'analyse de flexion des plaques FGM simplement supportées soumises à des charges thermiques et mécaniques. Vel et Batra [411] ont étendu leurs travaux précédents [410] pour analyser les problèmes de conduction de chaleur transitoire des plaques FGM simplement supportées soumises une variation de température graduelle ou étendre le flux sur les surfaces supérieures et inférieures. Alibeigloo [412] a effectué l'analyse de la flexion des plaques FGM sous charges thermiques et mécaniques. Des solutions exactes 3D pour la température, La contraintes et le déplacement sont obtenues pour les plaques simplement appuyées à l'aide de la méthode de d'état d'espace.

Les solutions exactes 3D pour la flexion statique des plaques ont été dérivées par Kashtalyan [413] et Kashtalyan Woodward et [414]. Des solutions exactes pour les contraintes et les déplacements des plaques simplement supportées sous pression transversale ont été obtenues en utilisant les fonctions de déplacement Plevako. Zenkour [414] a adopté la méthode de l'état d'espace pour dériver les solutions exactes 3D pour la flexion des plaques en FGM simplement appuyées en vertu de la pression transversale. Zhong et Shang [415] ont présenté des solutions exactes 3D pour la flexion de plaques FGM simplement supportées à variations spécifiques de propriétés matérielles avec modèle exponentiel, modèle linéaire et modèle réciproque. Des solutions semi-analytiques pour l'analyse 3D de flexion des plaques

FGM avec différentes conditions aux limites ont été fournies par Zhang et al. [416] à l'aide de l'approche spatiale. Xu et Zhou [417] ont développé les solutions exactes 3D pour l'analyse de flexion des plaques FGM avec variation continue de l'épaisseur. Les expressions pour les déplacements et les contraintes de plaques simplement supportées soumises à des charges transversales ont été obtenues en utilisant la méthode des séries de Fourier. Menshykova et Kashtalyan [418] ont effectué l'analyse de flexion statique 3D de panneaux sandwich avec appui simple avec un noyau sous charges transversales. Woodward et Kashtalyan [419] se sont étendus sur les travaux antérieurs [418] pour les panneaux sandwich simplement supportés soumis à des charges concentrées et réparties. Le comportement de pliage 3D de plaques FGM au point de chargement a été étudié par Abali et al. [420] à l'aide d'une combinaison d'approches analytiques et numériques. L'approche analytique est fondée sur la méthode de la fonction de déplacement, tandis que la modélisation numérique est fondée sur type Galerkin et de la méthode des éléments finis. Yun et al. [421] ont enquêté sur la flexion 3D axisymétrique des plaques circulaires FG soumises à des charges transversales arbitrairement. Des solutions analytiques pour les déplacements, contraintes, forces axiales et des moments de flexion pour plaques simplement appuyées ont été obtenues en utilisant la méthode de déplacement direct. Wen et coll. [422] ont présenté des solutions exactes pour l'analyse de flexion 3D statique et dynamique des plaques FGM à l'aide de la RBFs. Des solutions exactes pour les vibrations 3D provoquées et libres des plaques simplement appuyées en FGM, les plaques étaient étudiées par Vel et Batra [423] à l'aide de la méthode de Séries de puissances. Des solutions exactes pour les fréquences naturelles, les déplacements et les contraintes sont comparées à celles prédites par les modèles ELS. Vel [424] s'est étendu sur les travaux antérieurs [423] pour coque en FGM. Aydogdu et Uymaz [425] ont présenté des solutions 3D exactes pour la vibration libre des plaques FG avec différentes conditions aux limites à l'aide de la méthode Ritz avec les fonctions de déplacement de Chebyshev. Li et al. [426] ont effectué l'analyse 3D de la vibration libre des plaques sandwich avec lames en FG simplement appuyées aux conditions limites. Les fréquences naturelles de deux types de plaques sandwich en FG, à savoir la plaque sandwich avec face et un noyau homogène et la plaque sandwich avec des faces homogènes, sont obtenues à l'aide de la méthode de Ritz avec les polynômes de chebyshev. Amini et al. [427] ont suivi la même méthode de Li et al. [426] pour établir la fréquence naturelle et les formes de mode pour l'analyse de vibration libre 3D de plaques FG reposant sur une fondation élastique avec des conditions limites arbitraires. Lu et coll [428] et Malekzadeh [429] ont

également étudié la vibration libre 3D de plaques FGM reposant sur une fondation élastique, mais ils ont utilisé différentes approches de solutions. Lu et coll. [428] ont adopté la méthode d'état d'espace pour dériver des solutions exactes pour la fréquence naturelle de plaques simplement supportées, tandis que Malekzadeh [429] a utilisé la solution et la série DQM et dérivé des semi-solutions analytiques pour la fréquence naturelle des plaques de type Levy. Le DQM a également été adopté par Malekzadeh et al. [430] pour étudier la réponse de vibration libre 3D des plaques annulaires en FGM compte tenu de l'effet d'environnements thermiques. L'exactitude des solutions 3D pour la vibration libre de plaques rectangulaires en FGM avec différentes conditions limites a également été fournie par Jin et al. [431] à l'aide de la méthode Rayleigh et la méthode Ritz. Reddy et Kant [432] ont présenté une solution analytique pour l'analyse de vibration libre 3D de plaques FG simplement appuyées à l'aide de méthode Power Series.

Yas et Tahouneh [433] ont enquêté sur les réponses de vibration libre 3D des plaques FG annulaires reposant sur une fondation élastique. La théorie d'élasticité 3D et le DQM ont été utilisés pour obtenir la fréquence naturelle de plaques annulaires en FGM avec différentes conditions aux limites. Tahouneh et Yas [434] ont également adopté la théorie d'élasticité 3D et le DQM pour étudier la réponse de vibration libre 3D de plaques annulaire en FGM sous différentes conditions aux limites. Sburlati et Bardella [435] ont présenté les solutions exactes 3D pour la flexion des plaques circulaires FGM soumises à des charges transversales utilisant la fonction Plevako axisymétrique. La vibration libre des caractéristiques de coques cylindriques FG entourées par un milieu élastique a été examinée par Kamarian et al. [436] à l'aide de la théorie d'élasticité 3D et la DQM.

Na et Kim [437] ont étudié le comportement de flambement thermique 3D de plaques FG sous une montée de température linéaire et sinusoïdale à travers l'épaisseur à l'aide d'un élément solide à 18 nœuds. Pour éviter le verrouillage de cisaillement et maintenir la stabilité cinématique pour des structures minces l'hypothèse d'une couche mixte était employée. Na et Kim [438] ont travaillé sur l'amélioration de leurs travaux antérieurs [437] en tenant compte de l'élévation de température dépendant du temps. Na et Kim [439] ont étendu leurs travaux précédents [438] aux plaques sandwich en FG avec des faces homogènes. Na et Kim [440] ont employé la méthode des éléments finis pour étudier le post-flambement thermique 3D de plaques FG sous une augmentation uniforme ou non uniforme de la température. Un élément solide de 18 nœuds fondé sur le théorème de Lagrange a été développé pour tenir compte de

la forte déformation. Les itérations de Newton-Raphson ont été utilisées pour déterminer l'équilibre post-flambement. Na et Kim [441] ont étendu leurs travaux précédents [440] pour étudier la flexion non linéaire 3D de plaques FG soumises à une pression uniforme et aux charges thermiques. Le post-flambement de plaques tabulaires en FGM a été étudié par Asemi et al. [442] à l'aide de la théorie d'élasticité 3D et la méthode des éléments finis. Un élément basé des briques à huit noeuds sur l'entière lignée du tenseur a été développé pour tenir compte de la non linéarité géométrique. Les itérations de Newton-Raphson ont été utilisées pour déterminer l'équilibre post-flambement. Le post-flambement des plaques tubulaires été étudiée par Asemi et al. [442] à l'aide de la théorie d'élasticité 3D et la méthode des éléments finis.

II.4 Formulation unifiée

La formulation unifiée proposée par Carrera [443 à 458] pour structures composites multicouches est un système hiérarchique de formulation qui propose une procédure pour décrire et mettre en œuvre de nombreuses théories de plaque ainsi que des éléments finis de manière unifiée, en se référant à quelques principes fondamentaux. Toutes les théories peuvent facilement être élaborées dans le cadre de la Carrera formulation unifiée (CUF) en élargissant le déplacement de variables dans l'épaisseur. De plus amples informations et d'applications de la CUF peut être trouvées dans les livres rédigés par Carrera et al. [459-461].

La CUF a été abondamment utilisée pour l'analyse de plaques FGM basées sur les PVD ou la RMVT. Par exemple, Carrera et al. [462] ont employé la CUF et le PVD pour développer un modèle cinématique variable pour l'analyse de flexion causée par des charges mécaniques de. Les solutions obtenues par la méthode des éléments finis et analytiquement sont comparés avec les solutions 3D existantes. Brischetto et al. [463] se sont étendus sur la CUF pour l'analyse de la flexion des plaques FGM sous charges thermiques et mécaniques. Les équations dérivées de la PVD sont analytiquement résolues pour les plaques simplement appuyées à l'aide des solutions de Navier. Cinefra et al. [464] ont étendu l'application du la CUF à l'analyse thermique, tandis que Soave [465] a étendu l'application du la CUF à l'analyse de vibration libre des plaques sandwich FG. Brischetto et Carrera [466] se sont étendus sur les recherches précédentes [462] dans le cadre de la RMVT. Les solutions analytiques des plaques simplement supportées sont obtenues à l'aide des solutions de Navier. Brischetto [467] a appliqué les modèles basés sur les PVD [462] et les modèles basés sur les RMVT [466] pour étudier les réponses de flexion des plaques sandwich en FG avec un noyau

en FGM. Carrera et al. [468] ont également étudié la réponse de flexion des plaques sandwich et de coques FG utilisant la CUF avec la PVD basée sur les modèles RMVT. Les résultats des plaques simplement supportées sous pression transversale indiquent que l'utilisation de modèles raffinés est obligatoire pour les structures sandwich FGM puisque les effets de déformations de cisaillement et de la normale sont importants. Carrera et al. [469] ont adopté la CUF et la PVD pour évaluer les effets de la normale dans les plaques et coques en FGM comparant les théories contenant le déplacement transversal constant avec les modèles correspondants ayant au quatrième ordre linéaire les termes de l'expansion dans le sens de l'épaisseur.

Ferreira et al. [470] ont employé la CUF et la PVD pour élaborer une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal pour la flexion statique et l'analyse de vibration libre de lamelles et de coque. La théorie tient compte à la fois des effets de déformation de cisaillement et de la normale en considérant une variation sinusoïdale de tous les déplacements à travers l'épaisseur. Les équations sont résolues pour la flexion et les problèmes de vibration libre en utilisant la méthode de colocalisation avec une méthode sans maillage multiquadratique RBFs. Neves et al. [471,472] ont utilisé l'approche similaire de Ferreira et al. [410] pour étudier l'effet de l'étirement d'épaisseur sur la flexion statique [471,472] et vibration libre [472] et les réponses de plaques FG. Toutefois, leurs formules sont fondées sur une hybride théorie quasi-3D par laquelle les déplacements transversaux sont assumés d'une forme sinusoïdale et de variations quadratiques à travers l'épaisseur. Neves et al. [473,474] ont également fait un travail similaire à l'aide d'une fonction hyperbolique au lieu de la fonction sinusoïdale comme dans leurs travaux antérieurs [472]. Neves et al. [475,476] ont étendu l'application de la CUF et la méthode de colocalisation avec RBFs aux plaques sandwich en FGM [475] et aux coques FGM [476]. L'effet de cisaillement et des déformations normales sont pris en compte en utilisant une théorie quasi-3D avec une variation cubique des déplacements dans le plan et une variation de la cylindrée transversale à travers l'épaisseur.

Cinefra et al. [477] ont combiné la CUF et l'interpolation mixte de composants tensoriels (MITC). Dozio [478] a présente une technique de modélisation capable de prédire précisément la fréquence naturelle des plaques sandwich en FGM avec des conditions aux limites arbitraires. La formulation a été basée sur la combinaison de la CUF et la méthode Ritz. Dozio [479] a employé la CUF et la PVD pour dériver des solutions analytiques pour la

fréquence naturelle des plaques de type Levy sur la base de plusieurs théories quasi-3D. Fazzolari [480] a récemment étudié la CUF et la méthode de Ritz pour l'analyse de vibration libre et le flambement thermique des plaques sandwich en FGM.

II.5. Conclusion

L'élaboration de divers modèles pour la modélisation et l'analyse des plaques et coques FGM a été systématiquement examinée et discutée dans ce chapitre. Basé sur les modèles ELS, la théorie d'élasticité 3D et la formulation unifiée et un grand nombre de modèles de calcul ont été proposés pour prédire la réponse de comportement des plaques et coques en FGM sous charges mécaniques et thermiques. Les points suivants peuvent être décrits dans la présente étude documentaire :

(1) Parmi les modèles ELS, La CPT est largement utilisée pour prédire la réponse non-linéaire et réponses post-flambement des plaques FGM minces. Tous les effets de la température, les premières imperfections géométriques et non-linéarité géométrique peuvent être facilement comprises par la CPT dans son modèle puisque c'est la plus simple entre les modèles ELS. Bien que la CPT ignore les effets de déformation de cisaillement, il peut fournir des prédictions acceptables pour les plaques minces où les effets de cisaillement et de déformations normales sont négligeables.

(2) Parmi les théories de déformation de cisaillement, la TSDT et la FSDT ont été largement utilisées pour la modélisation et l'analyse des plaques FGM. Cela peut être dû au fait que les deux modèles TSDT et FSDT ont été développés depuis longtemps comparativement à d'autres ayant le même nombre d'inconnues.

(3) Un grand nombre de fonctions non-polynomiales basés sur les HSDTs ont récemment été élaborés. Toutefois, ils ne sont pas largement utilisés par comparaison avec la fonction polynomiale basée sur les HSDTs sauf pour le cas de la SSDT. En outre, la plupart des études fondées sur les fonctions non-polynomiales sont limitées aux solutions analytiques de problèmes linéaires. Le développement des modèles numériques basés sur les fonctions non-polynomiales est donc nécessaire pour évaluer pleinement l'exactitude ainsi que l'efficacité de la fonction polynomiale non fondée sur la HSDTs.

(4) Les modèles de calcul basés sur une combinaison de la IGA et les HSDTs simplifiées semblent être très attrayants et prometteurs depuis la IGA peut exactement décrire

la géométrie des structures complexes et, plus important encore, les HSDTs simplifiées contiennent moins d'inconnues. Toutefois, la plupart des modèles basés sur les HSDT simplifiées sont limités aux problèmes linéaires géométriquement. Ainsi, de nouvelles études sur le développement de modèles non linéaires géométriquement devraient être faites pour évaluer pleinement les avantages de la HSDTs simplifiée.

(5) Il est constaté que le relevé de théories développées sur la base de la RMVT sont légèrement supérieures aux théories axées sur les PVD pour prédire les réponses globales de plaques FGM surtout les contraintes transversales puisqu'elles sont considérées comme les principales variables dans les modèles basés sur les RMVT.

(6) La plupart des études actuelles sur l'analyse 3D des plaques et coques FGM sont limitées à des approches analytiques pour le flambement, la déformation linéaire et les problèmes de vibration libre.

Chapitre III

Modèle mathématique

CHAPITRE III : MODELE MATHEMATIQUE

III.1. Introduction

Toute théorie d'un problème de la mécanique des milieux continus, présente comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base du système des équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites sur les bords de la structure, complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Dans ce chapitre, Nous avons développé une nouvelle théorie trigonométrique d'ordre élevé qui inclut l'effet d'étirement « **effet de l'étirement de la plaque dans la direction de l'épaisseur, effect of thickness stretching** »

III.2. Formulation mathématique

On considère une plaque FGM rectangulaire d'épaisseur h , longueur a , et la largeur b , dont les coordonnées cartésiennes sont (x, y, z) . Puisque la condition de symétrie par rapport au plan médian de la plaque n'existe pas dans les plaques fonctionnellement graduées, les équations d'étirement et de flexion sont couplées. Mais si l'origine du système de coordonnées est convenablement sélectionnée à travers l'épaisseur de la Plaque FGM de sorte qu'il soit sur la surface neutre, l'analyse de la plaques FGM peut être facilement traitée avec les théories des plaques isotropes homogènes, parce que les équations d'étirement et de flexion de la plaque ne sont pas couplées. Afin de déterminer la position du point neutre de la surface de plaques FGM, deux différents plans sont considérés comme bases de mesure de z , à savoir, z_{ms} Et z_{ns} Mesurées à partir de la surface médiane et la surface neutre de la plaque, respectivement, comme illustrées dans la Fig.III.1. La fraction volumique de céramique v_c peut être écrite en terme des coordonnées z_{ms} Et z_{ns} . En considérant une distribution de loi de puissance n à travers l'épaisseur, les Fractions volumiques de constituants en céramique v_c , et métal v_m , peuvent être écrites dans la formule suivante :

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^n = \left(\frac{z_{ms} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{III.1})$$

Les propriétés matérielles d'une plaque fonctionnellement graduée non-homogènes peuvent être obtenues par le biais d'une loi de mélange [440]. Ainsi, en utilisant l'éq. (III.1), Les propriétés matérielles d'une plaque fonctionnellement graduée non-homogènes P est une fonction qui dépend de la coordonnée de l'épaisseur, on obtient ainsi l'équation suivante :

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ms} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^n, \quad P_{CM} = P_C - P_M \quad (III.2)$$

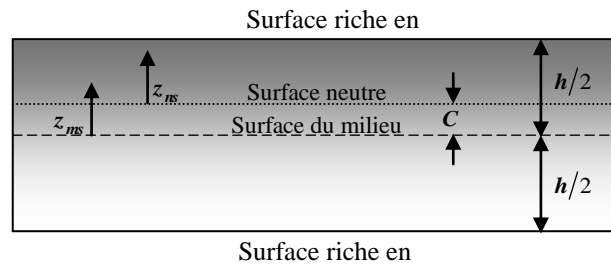


Fig. III.1: La position de la surface médiane et la surface neutre pour une plaque fonctionnellement graduée.

Où P_M Et P_C Sont les propriétés correspondantes du métal et du céramique, respectivement, et n Est un paramètre matériel qui prend la valeur supérieure ou égale à zéro. En outre, le paramètre C Est la distance entre la surface neutre et la surface médiane. Dans le présent travail, nous supposons que le module d'élasticité E est décrit par l'éq. (III.2), tandis que le coefficient de Poisson ν , est considéré comme étant constant à travers l'épaisseur. La position de la surface neutre de la plaque FGM est déterminée de telle façon que le moment statique soit égal à zéro comme suit [438, 439]

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (III.3)$$

En conséquence, la position de la surface neutre peut être obtenue comme suit :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (III.4)$$

Il est clair que le paramètre C devient nul pour les plaques isotropes homogènes, comme prévu.

III.2.1. Hypothèses de base

Les hypothèses de la théorie actuelle sont comme suit :

- (i) L'origine du système cartésien est prise à la surface neutre de la plaque FGM.
- (ii) Les déplacements sont infiniment petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- (iii) Le déplacement transversal w Comprend trois composantes à savoir la composante de flexion w_b , cisaillement w_s , et l'effet d'étirement w_{st} . Les deux premières composantes sont des fonctions de coordonnées x, y seulement le troisième est en fonction de x, y Et z_{ns} .

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + w_{st}(x, y, z_{ns}) \quad (\text{III.5})$$

- (iv) Les déplacements : u est dans la direction de x et v est dans la direction de y , ce qui consistent des composantes d'extension de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.6})$$

Les composantes de flexion u_b Et v_b Sont supposées être semblables à des déplacements donnés par la théorie classique des plaques CPT. Par conséquent, l'expression pour u_b Et v_b Peut être donnée comme suit

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.7})$$

Les composants de cisaillement u_s Et v_s , en conjonction avec w_s , donnent lieu à une variation sinusoïdale des déformations de cisaillement γ_{xz}, γ_{yz} a travers l'épaisseur de la plaque de telle façon que les contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} seront nulles aux faces supérieures et inférieures de la plaque. Par conséquent, l'expression pour u_s Et v_s Peut être donnée comme

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.8})$$

Où

$$f(z_{ns}) = (z_{ns} + C) - \tan \left[\frac{1}{5h} (z_{ns} + C) \right] - \frac{1}{5h} \sec^2 \left(\frac{1}{10} \right) \quad (\text{III.9})$$

Le composant du déplacement w_{st} comprenant l'effet d'étirement peut être donné comme suit :

$$w_{st}(x, y, z_{ns}) = g(z_{ns}) \varphi(x, y) \quad (\text{III.10})$$

Le déplacement supplémentaire φ considère l'effet de la contrainte normale en incluant la fonction $g(z_{ns})$ qui est donnée comme suit

$$g(z_{ns}) = \frac{1}{5h} \left(1 + \tan^2 \left[\frac{1}{5h} (z_{ns} + C) \right] \right) \quad (\text{III.11})$$

III.2.2. Cinématique

Basé sur les hypothèses déjà formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide d'Eqs. (III.5) - (III.11) comme suit :

$$u(x, y, z_{ns}) = u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.12a})$$

$$v(x, y, z_{ns}) = v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.12b})$$

$$w(x, y, z_{ns}) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z_{ns}) \varphi(x, y) \quad (\text{III.12c})$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z_{ns}) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z_{ns}) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z_{ns}) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III.13})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (III.14a)$$

$$\varepsilon_z^0 = \varphi$$

Et

$$g'(z_{ns}) = \frac{dg(z_{ns})}{dz_{ns}} \quad (III.14b)$$

III.2.3. Les équations constitutives :

Les relations contrainte-déformation pour une plaque ayant un comportement élastique linéaire sont écrites sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.15)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement.

Le calcul des constantes d'élasticité C_{ij} dépend du terme ε_z . Si $\varepsilon_z = 0$, alors C_{ij} sont constantes élastiques réduites dans le cas de l'élasticité en contrainte plane :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1 - \nu^2}, \quad C_{12} = \nu C_{11} \quad (III.16a)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z_{ns}) = \frac{E(z_{ns})}{2(1 + \nu)}, \quad (III.16b)$$

Si $\varepsilon_z \neq 0$ (étirement de l'épaisseur), puis c_{ij} Sont les constantes élastiques de l'élasticité tri-dimensionnelle, donnée par :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z_{ns}), \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z_{ns}) \quad (\text{III.17a})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.17b})$$

$$\text{Où } \lambda(z_{ns}) = \frac{\nu E(z_{ns})}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{Et } \mu(z_{ns}) = G(z_{ns}) = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} \quad \text{Sont les coefficients du Lamé}$$

Les modules E et G Et les coefficients d'élasticité C_{ij} Varient à travers l'épaisseur selon Eq. (III.2).

III.2.4. Équations d'équilibre

Le principe de travaux virtuels est ici utilisé pour déterminer les équations d'équilibre.

Le principe peut être déclaré dans la forme analytique suivante :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_A \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dz_{ns} dA - \int_A q \delta (w_b + w_s + w_{st}) dA \\ = & \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ & + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz} + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz} - q \delta (w_b + w_s + w_{st})] dA \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Où q Est la charge transversale; et N , M , et Q Sont les efforts résultantes définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{III.19a})$$

$$N_z = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} \sigma_z g'(z_{ns}) dz_{ns}, \quad (\text{III.19b})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}. \quad (\text{III.19c})$$

En substituant l'Eq. (III.13) dans Eq. (III.15) et les résultats ultérieurs dans Eq. (III.19), les efforts résultants sont obtenus comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^a \\ 0 & D & D^a \\ B^a & D^a & F^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{bmatrix} \varepsilon_z^0, \quad S = A^s \gamma, \quad (III.20a)$$

$$N_z = R^a \varphi + L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^a(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s), \quad (III.20b)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}, \quad (III.21a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}, \quad (III.21b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (III.21c)$$

$$B^a = \begin{bmatrix} B_{11}^a & B_{12}^a & 0 \\ B_{12}^a & B_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^a \end{bmatrix}, \quad D^a = \begin{bmatrix} D_{11}^a & D_{12}^a & 0 \\ D_{12}^a & D_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^a \end{bmatrix}, \quad F^a = \begin{bmatrix} F_{11}^a & F_{12}^a & 0 \\ F_{12}^a & F_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & F_{66}^a \end{bmatrix}, \quad (III.21d)$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}, \quad A^a = \begin{bmatrix} A_{44}^a & 0 \\ 0 & A_{55}^a \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z_{ns}) \\ g'(z_{ns}) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z_{ns}) dz_{ns} \quad (III.21e)$$

Les coefficients de rigidité A_{ij} Et D_{ij}, \dots etc., sont définis comme suit :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{12} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z_{ns}) (1, z_{ns}^2, f(z_{ns}), z_{ns} f(z_{ns}), f^2(z_{ns})) \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{2} \\ \nu \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (III.22a)$$

Et

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (III.22b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} \mu(z_{ns}) [g(z_{ns})]^2 dz_{ns}, \quad (\text{III.22c})$$

L'intégration par partie des expressions dans Eq. (III.18) sont recueillies tout on dégageant les coefficients de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$ Et $\delta \varphi$, pour obtenir les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\ \delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = 0 \\ \delta \varphi : \quad & \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

En substituant l'eq. (III.20) dans Eq. (III.23), les équations d'équilibres peut être exprimées en termes de déplacements ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s, \delta \varphi$) comme suit :

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s + L d_{1\varphi} = 0 \quad (\text{III.24a})$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s + L d_{2\varphi} = 0 \quad (\text{III.24b})$$

$$\begin{aligned} & -D_{11} d_{1111} w_b - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_b - D_{22} d_{2222} w_b - D_{11}^s d_{1111} w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_s \\ & - D_{22}^s d_{2222} w_s + L^a (d_{11}\varphi + d_{22}\varphi) + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.24c})$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s d_{1111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 + B_{22}^s d_{222} v_0 - D_{11}^s d_{1111} w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b \\ & - D_{22}^s d_{2222} w_b - H_{11}^s d_{1111} w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s - H_{22}^s d_{2222} w_s + A_{44}^s d_{11} w_s + A_{55}^s d_{22} w_s \\ & + R (d_{11}\varphi + d_{22}\varphi) + A_{44}^s d_{11}\varphi + A_{55}^s d_{22}\varphi + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.24d})$$

$$L(d_{11}u_0 + d_{22}v_0) - L^a(d_{11}w_b + d_{22}w_s) + (R - A_{44}^s) d_{11} w_s + (R - A_{55}^s) d_{22} w_s + R^a \varphi - A_{44}^s d_{11}\varphi - A_{55}^s d_{22}\varphi = J_1^s (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_2^s \ddot{\varphi} \quad (\text{III.24e})$$

Où d_{ij}, d_{ijl} Et d_{ijlm} Sont les opérateurs de correction différentielle suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.25})$$

III.3. Solution exacte pour une plaque FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type support utilisé. Ici, nous sommes intéressés par les solutions exactes des Eqs. (III.24) pour une plaque FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont appliquées aux bords :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = \varphi = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{À } x = 0, a \quad (\text{III.26a})$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \varphi = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{À } y = 0, b \quad (\text{III.26b})$$

Selon la procédure de la solution de Navier Nous supposons les solutions suivantes pour u_0 , v_0 , w_b , w_s Et φ Qui satisfont les conditions aux limites fournies dans Eq. (III.26),

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , W_{smn} Et Φ_{mn} Sont des paramètres arbitraires à être déterminés, et $\lambda = m\pi/a$ Et $\mu = n\pi/b$.

La charge transversale q Est également développée par la série de Fourier :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.28})$$

Pour le cas d'une charge répartie sinusoïdale, nous avons

$$m = n = 1 \quad \text{Et } q_{11} = q_0 \quad (\text{III.29})$$

Où q_0 Représente l'intensité de la charge au niveau du centre de la plaque.

Substituant les Eqs. (III.27) et (III.28) dans Eq. (III.24), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Dans laquelle:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{14} &= \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{15} &= L\lambda \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{25} &= L\mu \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4) \\ a_{35} &= -L^a(\lambda^2 + \mu^2) \\ a_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2) \\ a_{45} &= -(A_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R(\lambda^2 + \mu^2)) \\ a_{55} &= -(A_{44}^s\lambda^2 + A_{55}^s\mu^2 + R^a) \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

III.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement en flexion des plaques fonctionnellement graduées « FGM » en utilisant une nouvelle théorie trigonométrique d'ordre élève avec prise en compte de la déformation normale « **effect of thickness stretching** ».

En dissociant le déplacement transversal $w(x, y, z)$ en trois composants à savoir : la flèche pure de la plaque $w_b(x, y)$, la flèche induite par l'effet de la déformation de cisaillement $w_s(x, y)$ et de la flèche due à « l'effet **Stretching** » $w_{st}(x, y, z)$, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est réduit à seulement cinq inconnus, contrairement au autres théories.

Les études paramétriques présentées dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant aux résultats obtenus par la présente théorie avec les résultats de la littérature à savoir : les autres théories d'ordre élevé avec la prise en compte de la déformation normale ε_z et celles obtenues par la théorie d'élasticité trigonométrique.

Chapitre IV

Résultats et discussions

CHAPITRE VI : RESULTATS ET DISCUSSION

IV.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement statique de la flexion de la plaque fonctionnellement graduée FGM simplement appuyée. La théorie utilisée est basée sur le modèle hyperbolique de déformation de cisaillement à cinq variables avec la prise en compte de la déformation normale ε_z « Thickness Stretching Effect ».

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est seulement cinq, tandis que six ou plus pour le cas des autres théories de déformation de cisaillement qui prennent en compte la déformation normale ε_z . La théorie présentée est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

On suppose que les propriétés matérielles (le module de Young, masse volumique) de la plaque sandwich en FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs configurations de plaques sandwich sont utilisées en tenant compte ou non de la symétrie de la plaque, de la nature de la couche centrale (Cœur rigide ou souple) et de l'épaisseur de chaque couche.

IV.2 Analyse des résultats

Les résultats sont présentés pour la plaque simplement appuyée sous chargement transversale bi-sinusoidale d'intensité q . L'analyse statique a été effectuée en utilisant l'aluminium (surface inférieure, Al) et de l'alumine (surface supérieure, Al₂O₃). Le module de Young et le coefficient de Poisson, sont pour l'aluminium : 70 GPa, 0.3, et pour l'alumine : 380 GPa, 0,3, respectivement. Pour plus de commodités, les quantités à dimensionnelles suivantes sont utilisées :

$$\bar{z}_{ms} = \frac{z_{ms}}{h}, \quad \bar{w} = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}_{ms}\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{aq_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}_{ms}\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \bar{z}_{ms}\right)$$

$$, \quad \bar{\sigma}_z = \sigma_z\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \bar{z}_{ms}\right)$$

La figure VI.2 présente la variation de paramètre non-dimensionnel : c/h Par rapport au paramètre matériel n de la plaque fonctionnellement graduée Al/Al₂O₃. Il peut être observé lorsque le paramètre matériel du FGM devient zéro (entièrement en céramique) ou à l'infini (entièrement métallique); la surface neutre coïncide avec la surface médiane, comme prévu.

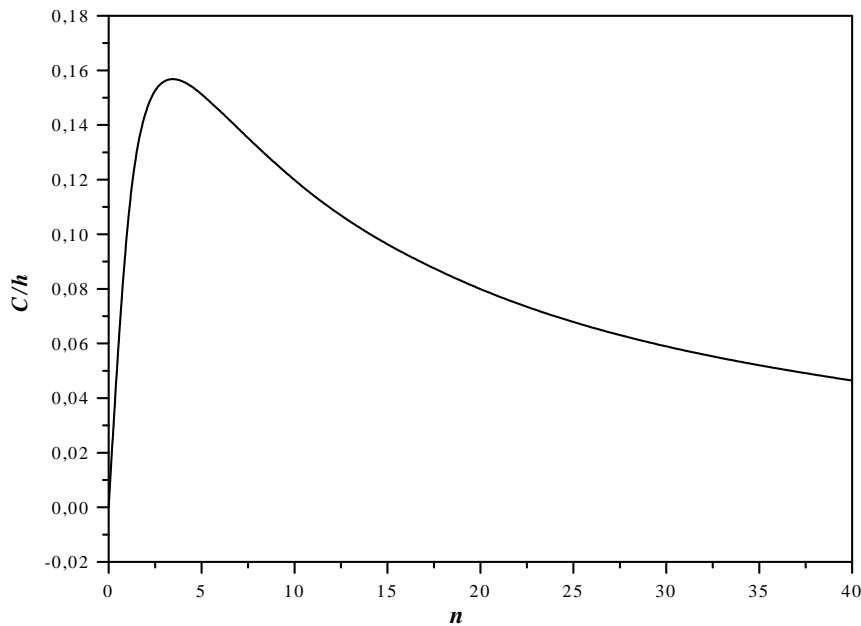


Fig IV. 1 : Variation de la position de la surface neutre par rapport au paramètre matériel n .

Le tableau VI.1 contient des quantités non dimensionnelles de déplacements transversaux et des contraintes normales de plaques FGM pour différentes valeurs de ratio a/h d'épaisseur, et le paramètre matériel n . La présente théorie avec $\varepsilon_z \neq 0$ Est comparée avec les solutions analytiques données par Carrera et al. [21], la théorie sinusoïdale quasi-3D de déformation de cisaillement Neves et al. [16], la théorie classique des plaques (CPT) [16], et la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) [16].

Tableau VI.1 : Effet de la déformation normale ε_z Sur la contrainte longitudinale $\bar{\sigma}_x$ Et le déplacement \bar{w} pour plaque carrée en FG.

n	Théorie	ε_z	$\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/3)$			$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$		
			a/h = 4	a/h = 10	a/h = 100	a/h = 4	a/h = 10	a/h = 100
1	CPT [16]	0	0.8060	2.0150	20.150	0.5623	0.5623	0.5623
	FSDT K = 5/6 [16]	0	0.8060	2.0150	20.150	0.7291	0.5889	0.5625
	Neves et al [16]	$\neq 0$	0.5925	1.4945	14.969	0.6997	0.5845	0.5624
	Carrera et al [21]	$\neq 0$	0.6221	1.5064	14.969	0.7171	0.5875	0.5625
	Présent	$\neq 0$	0.5866	1.4568	14.562	0.6919	0.5695	0.5462
4	CPT [16]	0	0.6420	1.6049	16.049	0.8281	0.8281	0.8281
	FSDT K = 5/6 [16]	0	0.6420	1.6049	16.049	1.1125	0.8736	0,828
	Neves et al [16]	$\neq 0$	0.4404	1.1783	11.932	1.1178	0.8750	0.8286
	Carrera et al [21]	$\neq 0$	0.4877	1.1971	11.923	1.1585	0.8821	0.8286
	Présent	$\neq 0$	0.4361	1.1335	11.409	1.09902	0.8424	0.7934
10	CPT [16]	0	0.4796	1.1990	11.990	0.9354	0.9354	0.9354
	FSDT K = 5/6 [16]	0	0.4796	1.1990	11.990	1.3178	0.9966	0.9360
	Neves et al [16]	$\neq 0$	0.3227	1.1783	11.932	1.3490	0.8750	0.8286
	Carrera et al [21]	$\neq 0$	0.1478	0.8965	8.9077	1.3745	1.0072	0.9361
	Présent	$\neq 0$	0.3203	0.8515	8.6050	1.3362	0.9818	0.9139

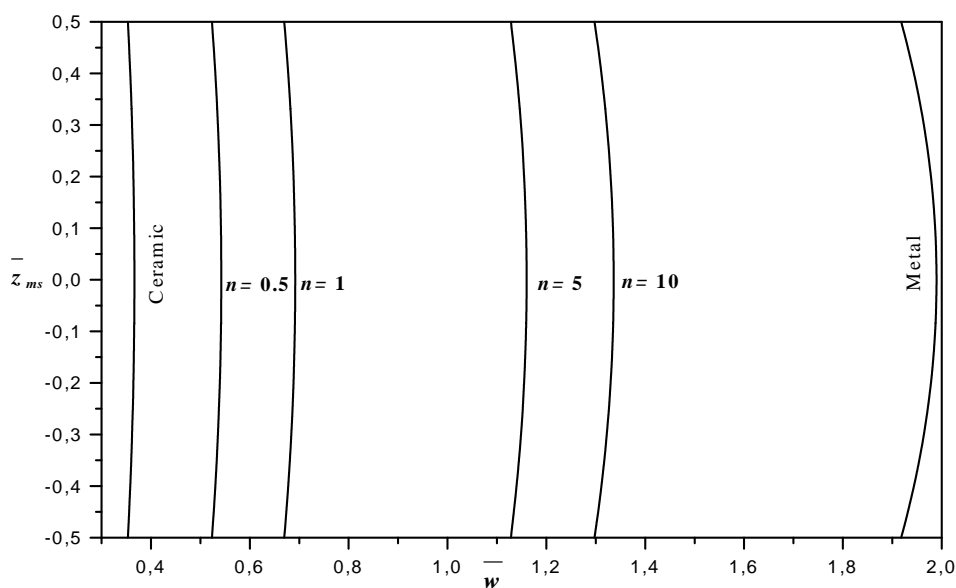


Fig IV.2 : le déplacement transversal, \bar{w} , à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FG ($a/h = 4$) pour différentes valeurs du paramètre matériel n .

On peut observer que le déplacement et les contraintes non dimensionnelles prévues par la nouvelle théorie trigonométriques d'ordre élevé avec l'effet d'étirement sont presque identiques à ceux générés par la théorie sinusoïdale quasi-3D de Neves et al. [16]. La présente théorie donne de très bons résultats proches de ceux des théories qui considèrent l'effet d'étirement de l'épaisseur, et s'écarte clairement de ces théories qui négligent ε_z , en particulier pour les plaques très épaisses. Il convient de noter que la présente théorie comporte cinq variables contre six ou plus dans d'autres théories de déformation en cisaillement quasi-3D.

Dans les figures VI.3 et VI.7, nous présentons l'évolution des contraintes et des déplacements à travers la direction de l'épaisseur pour différentes valeurs du paramètre matériel n .

La figure VI.3 montre que le déplacement transversal \bar{w} des plaques métalliques est plus grand que la valeur correspondante aux plaques céramiques. En général, le déplacement transversal augmente avec l'augmentation du paramètre matériel n cela peut être expliqué par le fait que l'augmentation du paramètre matériel n rend la plaque plus souple.

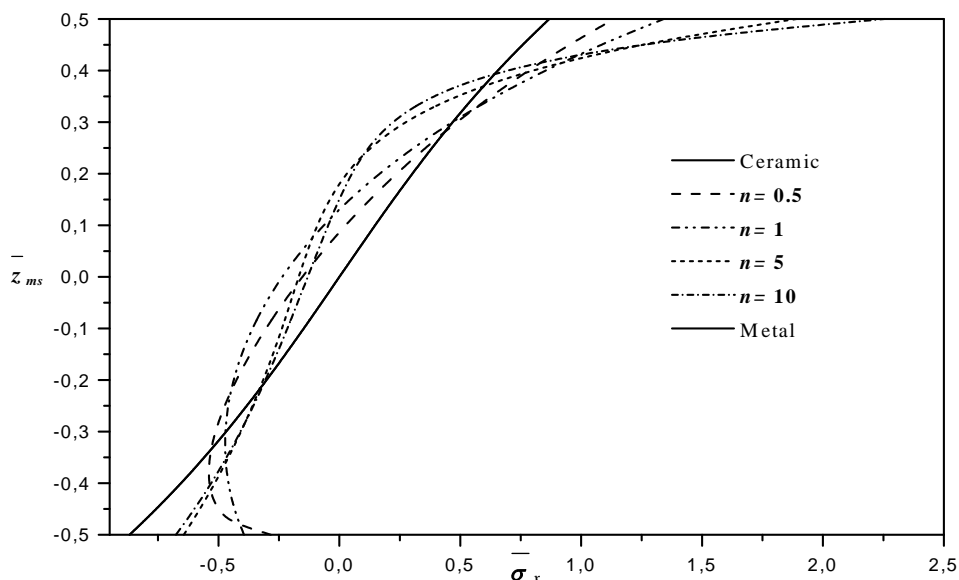


Fig IV. 3 : La variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ À travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a / h = 4$) pour différentes valeurs du paramètre matériel n .

Dans la figure VI.4, on constate que la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ est dans un état de traction dans la surface supérieure et dans un état de compression dans la surface inférieure. La plaque

céramique homogène ($n = 0$) ou plaque métallique ($n \rightarrow \infty$) donne des contraintes maximales de compression de la surface inférieure et des contraintes minimales de traction dans la surface supérieure de la plaque.

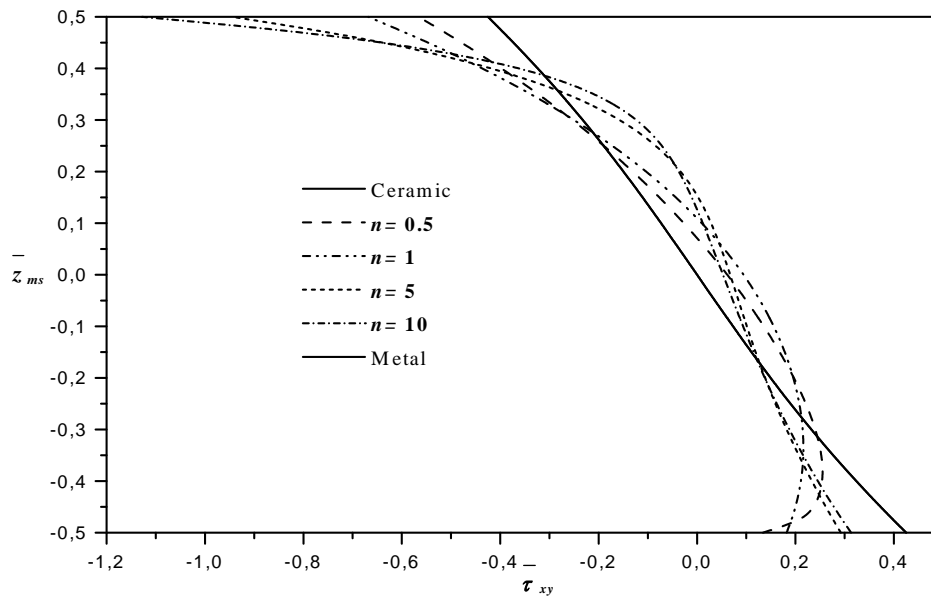


Fig IV.4 : La variation de la contrainte tangentielle dans le plan $\bar{\tau}_{xy}$ À travers l'épaisseur d'une plaque en FG carrée ($a/h = 4$) pour différentes valeurs du paramètre matériel n .

La figure IV.5 montre que la contrainte tangentielle plane $\bar{\tau}_{xy}$ est dans un état de traction dans la surface inférieure et dans un état de compression dans la surface supérieure des plaques FGM. La plaque céramique homogène ($n = 0$) ou plaque métallique ($n \rightarrow \infty$) donne une contrainte tangentielle maximale de traction dans la surface inférieure et une contrainte tangentielle minimale de compression dans la surface supérieure de la plaque de FGM.

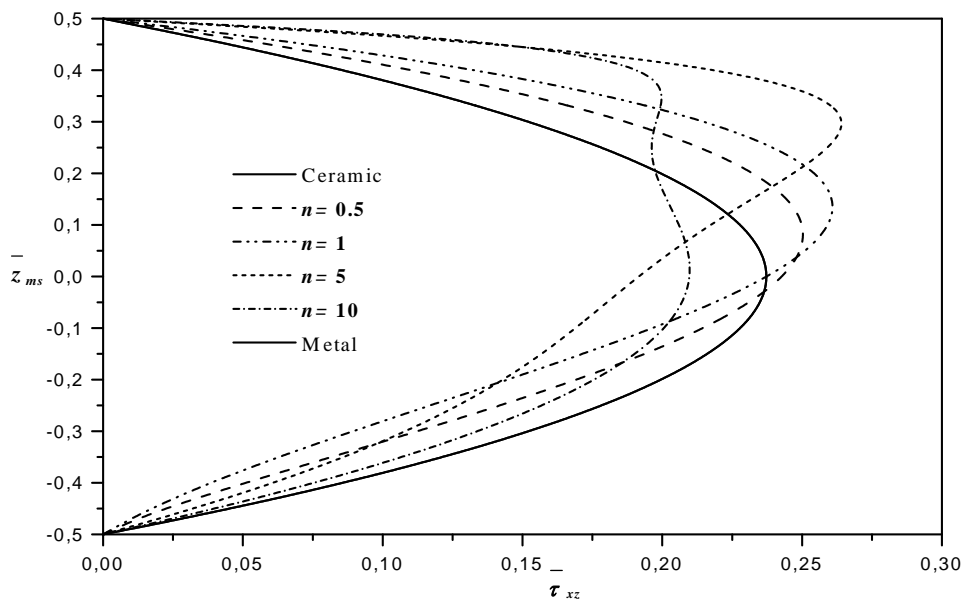


Fig VI. 5 : La variation de la contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ À travers l'épaisseur d'une plaque carrés en FGM ($a/h = 4$) pour différentes valeurs du paramètre matérielle n .

Dans la figure VI.6, nous avons présente les distributions de la contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque.

On constate que les distributions des contraintes de cisaillement transversal des plaques FG ne sont pas paraboliques comme dans le cas de plaques homogène en métal ou en céramique. Cela est due à la non symétrie de la distribution de la matière à travers l'épaisseur.

Dans la figure VI. 7, nous présentons l'évolution de la contrainte normale transversale $\bar{\sigma}_z$ À travers la direction de l'épaisseur pour différentes valeurs des paramètres matérielle n . Comme on peut le voir sur la Fig. VI.7, la composante normale transversale $\bar{\sigma}_z$ Ne peut pas être négligée dans le présent problème. Cela est dû à l'effet de l'étirement d'épaisseur qui est significatif dans l'évaluation des composantes de stress dans le sens transversal.

Il est important de noter que les contraintes ($\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\tau}_{xz}$ Et $\bar{\sigma}_z$) pour une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que pour une plaque entièrement en métallique. C'est parce que la plaque pour ces deux cas est complètement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité.

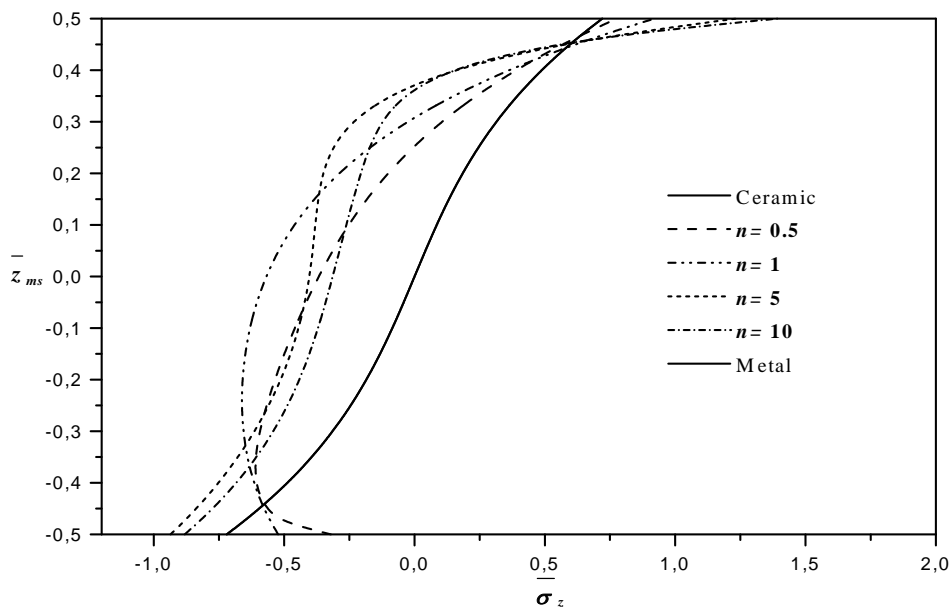


Fig IV. 6 : La variation de la contrainte normale transversale $\bar{\sigma}_z$ à travers l'épaisseur d'une plaque FG carrée ($a/h = 4$) pour différentes valeurs des paramètres matériels n .

IV.3. Conclusion

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement normale basée sur la position de la surface neutre pour l'analyse de la flexion de plaques composites avancées est présentée. Cette théorie prend en compte l'effet d'étirement et l'effet de déformation de cisaillement ne nécessite pas un facteur de correction de cisaillement. En divisant le déplacement transversal en flexion, cisaillement et composants d'étirement, le nombre d'inconnues des équations d'équilibre de la théorie actuelle est réduit à 5 contre six ou plus inconnues dans d'autres théories. Fondée sur la théorie de plaque actuelle et le concept de la surface neutre, les équations d'équilibre sont tirées du principe de travaux virtuels. L'exactitude du présent modèle est vérifiée en le comparant avec les solutions existantes et on a observé une excellente concordance. On peut dire que la présente théorie est non seulement précise mais également efficace dans la prédiction de déplacements et des contraintes à la fois pour plaques FGM homogènes.

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Cette thèse présente les activités de recherche liées à l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses en matériaux composites avancés « FGM ». La principale problématique qui est traitée correspond à l'étude de l'influence de la prise en compte de la déformation normale ($\varepsilon_z \neq 0$) sur la réponse de la plaque sandwich en flexion. Une nouvelle théorie d'ordre élevé avec prise en compte de « **Thickness Stretching Effect** » est réalisée par l'introduction d'une distribution trigonométrique sur l'épaisseur, le champ de déplacements a été développé pour le calcul du comportement mécanique des plaques en FGM.

La formulation proposée est variationnelle et repose sur le principe d'Hamilton. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Des solutions analytiques à l'aide du calcul formel sont proposées et comparées avec des solutions exactes de la littérature qui prennent en compte la déformation normale ($\varepsilon_z \neq 0$).

En dissociant le déplacement transversal $w(x, y, z)$ en trois composants à savoir : la flèche pure de la plaque $w_b(x, y)$, la flèche induite par l'effet de la déformation de cisaillement $w_s(x, y)$ et de la flèche due à l'effet d'étirement $w_{st}(x, y, z)$, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie proposée est réduit à seulement cinq inconnues, contrairement aux autres théories dont le nombre d'inconnues est six ou plus dans le cas où on prend en compte l'effet d'étirement.

Toutes les études comparatives ont montré que la flèche et les contraintes obtenues par la présente théorie ($\varepsilon_z \neq 0$) (cinq inconnues) et la théorie exacte d'élasticité (3D) et les théories l'ordre élevé de déformation de cisaillement avec ($\varepsilon_z \neq 0$) sont presque identiques. Cela indique que les hypothèses de la théorie proposée peuvent conduire à des résultats précis et peuvent ainsi améliorer le coût du calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM, en raison de la réduction du nombre d'inconnues de la théorie.

On peut conclure que l'inclusion de « **l'effet d'étirement** » augmente la rigidité de la plaque FGM, et, par conséquent, conduit à une réduction des déplacements dans la plaque, donc une caractéristique importante est souhaitable dans la conception structurelle.

Enfin, on peut dire que la présente théorie trigonométrique de déformation de cisaillement avec la prise en compte de « **l'effet d'étirement** » est non seulement précise, mais fournit également une approche facilement réalisable pour la simulation du comportement statique des structures en matériaux fonctionnellement gradués.

En perspective, il est prévu d'appliquer le nouveau modèle d'ordre élevé à cinq variables avec la prise en compte de l'effet d'étirement pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux fonctionnellement gradués sous la combinaison des différents types de chargements (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles constitutives des matériaux dus à la température.

Finalement, ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans la thématique du développement de nouvelles théories de plaques et poutres pour le calcul des structures en matériaux FGM soumis à des différents types de sollicitations.

Références bibliographiques

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Yamanouchi M, Koizumi M, Hirai T, Shiota I. In: Proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials, Sendai, Japan; 1990.
- [2] Koizumi M. The concept of FGM. *Ceram Trans Funct Grad Mater* 1993; 34: 3–10.
- [3] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech* 1945;12(2):69–72.
- [4] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J Appl Mech* 1951;18(1):31–8.
- [5] Yang J, Liew KM, Kitipornchai S. Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates. *Compos Sci Technol* 2005;65(7-8):1165–75.
- [6] Naderi A, Saidi AR. Exact solution for stability analysis of moderately thick functionally graded sector plates on elastic foundation. *Compos Struct* 2011;93(2):629–38.
- [7] Mena, R., Tounsi, A., Mouaici, F., Mechab, I., Zidi, M., Adda Bedia, E.A. (2012). « Analytical solutions for static shear correction factor of functionally graded rectangular beams. » *Mechanics of Advanced Materials and Structures.*, 19(8), 641 – 652.
- [8] Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Meth Eng* 2000;47(1-3):663–84.
- [9] Zenkour AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2006;30(1):67–84.
- [10] Zenkour AM. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Int J Mech Sci* 2009;51(11–12):869–80.
- [11] Akavci SS. Buckling and free vibration analysis of symmetric and antisymmetric laminated composite plates on an elastic foundation. *J Reinf Plast Compos* 2007;26(18):1907–19.
- [12] Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Fekrar A, Ait Atmane H, Adda Bedia EA. Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Mech Compos Mater* 2010;46(4):425–34.
- [13] Ait Atmane H, Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia EA. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int J Mech Mater Des* 2010;6(2):113–21.
- [14] E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefra, M. Soave, Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Compos B* 42, 123–133 (2011).
- [15] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge, C.M.M. Soares, Bending of FGM plates by a sinusoidal plate formulation and collocation with radial basis functions, *Mech Res Commun* 38, 368–371 (2011).
- [16] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge, C.M.M. Soares, A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Compos B* 43, 711–725 (2012).

- [17] A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge, C.M.M. Soares, A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Compos Struct* 94, 1814–1825 (2012).
- [18] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (In press) 2013.
- [19] Zhang, D.G., Zhou, Y.H. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comput. Mater. Sci.* 2008; 44, 716 – 720.
- [20] Navid Saeedi. Une approche très efficace pour l’analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues, PhD thesis, Université de Paris Est, France, 2012.
- [21] C. Baron., S. Naili, Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [22] Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Kuroishi N. Method of producing a functionally gradient material. U.S. Patent 4571099, 1988.
- [23] Kawasaki A., Watanabe R. Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramics International*, 8842(95):73–83, 1997.
- [24] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.
- [25] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,1986.
- [26] Houari MSA, Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [27] Koizumi. M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan
- [28] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [29] M. Koizumi, FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4. 1997.
- [30] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [31] H. Okamura, State of the art of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [32] Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003.
- [33] Zeng Y., Jiang D., Watanabe T., Fabrication and Properties of Tape-Cast Laminated and Functionally Gradient Alumina–Titanium Carbide Materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 83 (12): 2999–3003, 2000.
- [34] A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.

- [35] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, 1990.
- [36] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 129-34, 1990.
- [37] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J. Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [38] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [39] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [40] G. Kirchhoff. *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schiebe*. *Z Angew Math*, 40:51–88, 1850.
- [41] A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, Cambridge, 4th edition, 1927.
- [42] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*; 12 (2): 69-77, 1945.
- [43] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.
- [44] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [45] J. M. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *Journal of Applied Mechanics*, 40:302–304, 1973.
- [46] M. Levinson. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7:343–350, 1980.
- [47] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. N°:1833*, 1949.
- [48] R. B. Nelson and D. R. Lorch. A refined theory for laminated orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 41:177–183, 1974.
- [49] K. H. Lo, R. M. Christensen, and E. M. Wu. A higher-order theory of plate deformation. part I: Homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44:663–668, 1977a.
- [50] K. H. Lo, R. M. Christensen, and E. M. Wu. A higher-order theory of plate deformation. part II: Laminated plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44:669–676, 1977b.
- [51] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [52] K. P. Soldatos and T. Timarci. A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25:165–171, 1993.

- [53] J. L. Mantari, A. S. Oktem, and C. Guedes Soares. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43:1489–1499, 2012.
- [54] CASTEL A, Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants. Thèse de Doctorat, l'Université de Bourgogne, France, 2013.
- [55] Maurice LÉVY. « Memoire sur la theorie des plaques elastique planes ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3.3 (1877), p. 219–306.
- [56] N. J. PAGANO. « Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending ». en. In : *Journal of Composite Materials* 3.3 (juil. 1969), p. 398–411. ISSN : 0021- 9983, 1530-793X.
- [57] N. J. PAGANO. « Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates ». en. In : *Journal of Composite Materials* 4.1 (jan. 1970), p. 20–34. ISSN : 0021-9983, 1530-793X.
- [58] S. SRINIVAS et A.K. RAO. « Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates ». In : *International Journal of Solids and Structures* 6.11 (nov. 1970), p. 1463–1481. ISSN : 0020-7683.
- [59] K. J. REDDY, K. VIJAYAKUMAR et K. S. NAGARAJA. « New approach for the analysis of flexure of symmetric laminates ». In : *AIAA Journal* 29.11 (nov. 1991), p. 1960–1966. ISSN : 0001-1452, 1533-385X.
- [60] Ahmed K. NOOR et W. Scott BURTON. « Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates ». In : *Journal of Applied Mechanics* 59.4 (1992), p. 868. ISSN : 00218936.
- [61] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC Press; 2004.
- [62] Koizumi M. FGM activities in Japan. *Compos B Eng* 1997;28(1):1–4.
- [63] Jha DK, Kant T, Singh RK. A critical review of recent research on functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;96:833–49.
- [64] Birman V, Byrd LW. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Appl Mech Rev* 2007;60(5):195–216.
- [65] Kirchhoff VG. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *J Die Reine Angew Math* 1850;1850(40):51–88.
- [66] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J Appl Mech* 1951;18(1):31–8.
- [67] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 1984;51:745–52.
- [68] Ghugal YM, Shimpi RP. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *J Reinf Plast Compos* 2002;21(9):775–813.
- [69] Khandan R, Noroozi S, Sewell P, Vinney J. The development of laminated composite plate theories: a review. *J Mater Sci* 2012;47(16):5901–10.
- [70] Swaminathan K, Naveenkumar DT, Zenkour AM, Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates-A state-of-the-art review. *Compos Struct* 2015;120:10–31.
- [71] Feldman E, Aboudi J. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Compos Struct* 1997;38(1):29–36.

- [72] Javaheri R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA J* 2002;40(1):162–9.
- [73] Javaheri R, Eslami MR. Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM – J Appl Math Mech* 2002;82(4):277–83.
- [74] Kiani Y, Bagherizadeh E, Eslami MR. Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions). *ZAMM – J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech* 2011;91(7):581–93.
- [75] Ghannadpour SAM, Ovesy HR, Nassirnia M. Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. *Comput Struct* 2012;108–109:93–9.
- [76] Mahdavian M. Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading. *J Solid Mech* 2009;1(3):213–25.
- [77] Mohammadi M, Saidi AR, Jomehzadeh E. Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Appl Compos Mater* 2010;17(2):81–93.
- [78] Yang J, Shen HS. Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Compos Struct* 2001;54(4):497–508.
- [79] Yanga J, Shen HS. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non-Linear Mech* 2003;38(4):467–82.
- [80] Alinia MM, Ghannadpour SAM. Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates. *Compos Struct* 2009;88(3):354–9.
- [81] Woo J, Meguid SA, Ong LS. Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J Sound Vib* 2006;289(3):595–611.
- [82] Hu Y, Zhang X. Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate. *Mech Based Des Struct Mach* 2011;39(3):367–77.
- [83] Chakraverty S, Pradhan KK. Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method. *Int J Appl Mech* 2014;6(4):1450043.
- [84] Chakraverty S, Pradhan KK. Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. *Aerosp Sci Technol* 2014;36:132–56.
- [85] Ruan M, Wang ZM. Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material. *J Vib Control* 2014. <http://dx.doi.org/10.1177/1077546314563967>.
- [86] Ma LS, Wang TJ. Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings. *Int J Solids Struct* 2003;40(13–14):3311–30.
- [87] Li SR, Zhang JH, Zhao YG. Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection. *Thin-Walled Struct* 2007;45(5):528–36.
- [88] Allahverdizadeh A, Naei MH, Nikkhah Bahrami M. Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates. *J Sound Vib* 2008;310(4–5):966–84.
- [89] Ghomshei M, Abbasi V. Thermal buckling analysis of annular FGM plate having variable thickness under thermal load of arbitrary distribution by finite element method. *J Mech Sci Technol* 2013;27(4):1031–9.
- [90] Loy CT, Lam KY, Reddy JN. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *Int J Mech Sci* 1999;41(3):309–24.

- [91] Arshad SH, Naeem MN, Sultana N. Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 2007;221(12):1483–95.
- [92] Pradhan SC, Loy CT, Lam KY, Reddy JN. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Appl Acoust* 2000;61(1):111–29.
- [93] Naeem MN, Arshad SH, Sharma CB. The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 2010;224(1):43–54.
- [94] Alijani F, Amabili M, Karagiozis K, Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *J Sound Vib* 2011;330(7):1432–54.
- [95] Du C, Li Y, Jin X. Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Struct* 2014;78:26–36.
- [96] Du C, Li Y. Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Compos Struct* 2013;102:164–74.
- [97] Ebrahimi MJ, Najafizadeh MM. Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells. *Appl Math Model* 2014;38(1):308–24.
- [98] Shen HS. Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Compos Sci Technol* 2002;62(7–8):977–87.
- [99] Shen HS. Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Eng Struct* 2003;25(4):487–97.
- [100] Shen HS. Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties. *Int J Solids Struct* 2004;41(7):1961–74.
- [101] Woo J, Meguid SA, Liew KM. Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells. *Acta Mech* 2003;165(1–2):99–115.
- [102] Mirzavand B, Eslami MR. Thermoelastic stability analysis of imperfect functionally graded cylindrical shells. *J Mech Mater Struct* 2008;3(8):1561–72.
- [103] Huang H, Han Q, Feng N, Fan X. Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined loads. *Mech Adv Mater Struct* 2011;18(5):337–46.
- [104] Sun J, Xu X, Lim CW. Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined thermal and compressive loads. *J Therm Stresses* 2014;37(3):340–62.
- [105] Cheng W, Wang ZG, Long SC. Theory analysis of functionally graded materials cylindrical shell buckling under pure bending. *Appl Mech Mater* 2014;580:2928–31.
- [106] Zhang Y, Huang H, Han Q. Buckling of elastoplastic functionally graded cylindrical shells under combined compression and pressure. *Compos B Eng* 2015;69:120–6.
- [107] Woo J, Meguid SA. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Int J Solids Struct* 2001;38(42):7409–21.
- [108] Nguyen DD. Nonlinear dynamic response of imperfect eccentrically stiffened FGM double curved shallow shells on elastic foundation. *Compos Struct* 2013;99:88–96.
- [109] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear postbuckling of imperfect eccentrically stiffened P-FGM double curved thin shallow shells on elastic foundations in thermal environments. *Compos Struct* 2013;106:590–600.

- [110] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened FGM cylindrical panels on elastic foundation subjected to mechanical loads. *Eur J Mech A Solids* 2014;46:60–71.
- [111] Nguyen DD, Pham TT. Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic–metal–ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression. *Compos Struct* 2014;110:200–6.
- [112] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear dynamic analysis of imperfect functionally graded material double curved thin shallow shells with temperature-dependent properties on elastic foundation. *J Vib Control* 2013. <http://dx.doi.org/10.1177/1077546313494114>.
- [113] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear stability analysis of double-curved shallow FGM panels on elastic foundations in thermal environments. *Mech Compos Mater* 2012;48(4):435–48.
- [114] Zhang DG, Zhou YH. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comput Mater Sci* 2008;44(2):716–20. 80 H.-T. Thai, S.-E. Kim / *Composite Structures* 128 (2015) 70–86
- [115] Bodaghi M, Saidi AR. Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation. *Arch Appl Mech* 2011;81(6):765–80.
- [116] Damanpack AR, Bodaghi M, Ghassemi H, Sayehbani M. Boundary element method applied to the bending analysis of thin functionally graded plates. *Latin Am J Solids Struct* 2013;10:549–70.
- [117] Kowal-Michalska K, Mania R. Static and dynamic thermo-mechanical buckling loads of functionally graded plates. *Mech Mech Eng* 2013;17(1):99–112.
- [118] Aydogdu M. Conditions for functionally graded plates to remain flat under inplane loads by classical plate theory. *Compos Struct* 2008;82(1):155–7.
- [119] Reissner E. On bending of elastic plates. *Q Appl Math* 1947;5(1):55–68.
- [120] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech* 1945;12(2):69–72.
- [121] Wang CM, Lim GT, Reddy JN, Lee KH. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. *Eng Struct* 2001;23(7):838–49.
- [122] Panc V. *Theories of elastic plates*. Springer; 1975.
- [123] Praveen GN, Reddy JN. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *Int J Solids Struct* 1998;35(33):4457–76.
- [124] Della Croce L, Venini P. Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2004;193(9):705–25.
- [125] Kim KD, Lomboy GR, Han SC. Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element. *J Compos Mater* 2008;42(5):485–511.
- [126] Memar Ardestani M, Soltani B, Shams S. Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method. *Compos Struct* 2014;112:231–40.
- [127] Chen CS. Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate. *Compos Struct* 2005;68(3):295–302.
- [128] Alijani F, Bakhtiari-Nejad F, Amabili M. Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments. *Nonlinear Dyn* 2011;66(3):251–70.

- [129] Fallah A, Aghdam MM, Kargarnovin MH. Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method. *Arch Appl Mech* 2013;83(2):177–91.
- [130] Lanhe W. Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Compos Struct* 2004;64(2):211–8.
- [131] Bouazza M, Tounsi A, Adda-Bedia EA, Megueni A. Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. *Comput Mater Sci* 2010;49(4):865–70.
- [132] Ganapathi M, Prakash T, Sundararajan N. Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads. *J Eng Mech* 2006;132(8):902–5.
- [133] Yaghoobi H, Yaghoobi P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. *Meccanica* 2013;48(8):2019–35.
- [134] Zhang LW, Zhu P, Liew KM. Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method. *Compos Struct* 2014;108:472–92.
- [135] Park JS, Kim JH. Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates. *J Sound Vib* 2006;289(1–2):77–93.
- [136] Wu TL, Shukla KK, Huang JH. Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Compos Struct* 2007;81(1):1–10.
- [137] Nguyen DD, Hoang VT. Mechanical and thermal postbuckling of sheardeformable FGM plates with temperature-dependent properties. *Mech Compos Mater* 2010;46(5):461–76.
- [138] Kiani Y, Eslami MR. Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation. *Arch Appl Mech* 2012;82(7):891–905.
- [139] Dai KY, Liu GR, Han X, Lim KM. Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method. *Comput Struct* 2005;83(17–18):1487–502.
- [140] Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Methods Eng* 1994;37(2):229–56.
- [141] Zhao X, Lee YY, Liew KM. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J Sound Vib* 2009;319(3–5):918–39.
- [142] Zhao X, Lee Y, Liew K. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2009;90(2):161–71.
- [143] Zhao X, Liew KM. An element-free analysis of mechanical and thermal buckling of functionally graded conical shell panels. *Int J Numer Methods Eng* 2011;86(3):269–85.
- [144] Zhao X, Liew KM. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2009;198(33):2796–811.
- [145] Lee YY, Zhao X, Liew KM. Thermoelastic analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Smart Mater Struct* 2009;18(3):035007.
- [146] Lee YY, Zhao X, Reddy JN. Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2010;199(25–28):1645–53.
- [147] Roque CMC, Ferreira AJM, Neves AMA, Fasshauer GE, Soares CMM, Jorge RMN. Dynamic analysis of functionally graded plates and shells by radial basis functions. *Mech Adv Mater Struct* 2010;17(8):636–52.
- [148] Nguyen-Xuan H, Tran LV, Nguyen-Thoi T, Vu-Do HC. Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method. *Compos Struct* 2011;93(11):3019–39.

- [149] Nguyen-Xuan H, Tran LV, Thai CH, Nguyen-Thoi T. Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing. *Thin-Walled Struct* 2012;54:1–18.
- [150] Valizadeh N, Natarajan S, Gonzalez-Estrada OA, Rabczuk T, Bui TQ, Bordas SPA. NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: Static bending, vibration, buckling and flutter. *Compos Struct* 2013;99:309–26.
- [151] Hosseini-Hashemi S, Rokni Damavandi Taher H, Akhavan H, Omid M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Appl Math Model* 2010;34(5):1276–91.
- [152] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int J Mech Sci* 2011;53(1):11–22.
- [153] Mohammadi M, Saidi AR, Jomehzadeh E. A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 2010;224(9):1831–41.
- [154] Saidi AR, Jomehzadeh E. On the analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 2009;223(9).
- [155] Yaghoobi H, Torabi M. Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions. *J Therm Stresses* 2013;36(9):869–94.
- [156] Yang J, Liew KM, Kitipornchai S. Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates. *Compos Sci Technol* 2005;65(7):1165–75.
- [157] Nguyen TK, Sab K, Bonnet G. First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Compos Struct* 2008;83(1):25–36.
- [158] Prakash T, Singha MK, Ganapathi M. Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates. *Comput Mech* 2009;43(3):341–50.
- [159] Singha MK, Prakash T, Ganapathi M. Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load. *Finite Elem Anal Des* 2011;47(4):453–60.
- [160] Reddy JN, Wang CM, Kitipornchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *Eur J Mech A Solids* 1999;18(2):185–99.
- [161] Najafizadeh M, Eslami M. First-order-theory-based thermoelastic stability of functionally graded material circular plates. *AIAA J* 2002;40(7):1444–50.
- [162] Efraim E, Eisenberger M. Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates. *J Sound Vib* 2007;299(4–5):720–38.
- [163] Bayat M, Sahari BB, Saleem M, Ali A, Wong SV. Bending analysis of a functionally graded rotating disk based on the first order shear deformation theory. *Appl Math Model* 2009;33(11):4215–30.
- [164] Naderi A, Saidi AR. An analytical solution for buckling of moderately thick functionally graded sector and annular sector plates. *Arch Appl Mech* 2011;81(6):809–28.
- [165] Saidi AR, Baferani AH, Jomehzadeh E. Benchmark solution for free vibration of functionally graded moderately thick annular sector plates. *Acta Mech* 2011;219(3–4):309–35.

- [166] Amini MH, Soleimani M, Altafi A, Rastgoo A. Effects of geometric nonlinearity on free and forced vibration analysis of moderately thick annular functionally graded plate. *Mech Adv Mater Struct* 2012;20(9):709–20.
- [167] Golmakani ME, Alamatian J. Large deflection analysis of shear deformable radially functionally graded sector plates on two-parameter elastic foundations. *Eur J Mech A Solids* 2013;42:251–65.
- [168] Alinaghizadeh F, Kadkhodayan M. Investigation of nonlinear bending analysis of moderately thick functionally graded material sector plates subjected to thermomechanical loads by the GDQ method. *J Eng Mech* 2014;140(5):04014012.
- [169] Xie X, Jin G, Ye T, Liu Z. Free vibration analysis of functionally graded conical shells and annular plates using the Haar wavelet method. *Appl Acoust* 2014;85:130–42.
- [170] Reddy JN, Chin CD. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *J Therm Stresses* 1998;21(6):593–626.
- [171] Shahsiah R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell. *J Therm Stresses* 2003;26(3):277–94.
- [172] Shahsiah R, Eslami MR. Functionally graded cylindrical shell thermal instability based on improved Donnell equations. *AIAA J* 2003;41(9):1819–26.
- [173] Samsam Shariat BA, Eslami MR. Effect of initial imperfections on thermal buckling of functionally graded plates. *J Therm Stresses* 2005;28(12):1183–98.
- [174] Mirzavand B, Eslami MR, Shahsiah R. Effect of imperfections on thermal buckling of functionally graded cylindrical shells. *AIAA J* 2005;43(9):2073–6.
- [175] Arciniega RA, Reddy JN. Large deformation analysis of functionally graded shells. *Int J Solids Struct* 2007;44(6):2036–52.
- [176] Barbosa JAT, Ferreira AJM. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates and shells. *Mech Adv Mater Struct* 2009;17(1):40–8.
- [177] Sheng GG, Wang X. Non-linear response of functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads. *J Therm Stresses* 2011;34(11):1105–18.
- [178] Behjat B, Sadighi M, Armin A, Abbasi M, Salehi M. Static, Dynamic and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric panels using finite element method. *J Intell Mater Syst Struct* 2009;20(13):1635–46.
- [179] Kiani Y, Shakeri M, Eslami MR. Thermoelastic free vibration and dynamic behaviour of an FGM doubly curved panel via the analytical hybrid Laplace–Fourier transformation. *Acta Mech* 2012;223(6):1199–218.
- [180] Xiang S, Chen Y, Kang G. Local collocation method for prediction of natural frequency of functionally graded cylindrical shells. *Mech Adv Mater Struct* 2014. <http://dx.doi.org/10.1080/15376494.2014.884658>.
- [181] Sheng GG, Wang X. Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium. *J Reinf Plast Compos* 2007;27(2):117–34.
- [182] Zhang W, Hao YX. Nonlinear dynamic of functionally graded cylindrical shells under the thermal mechanical loads. *Int Mech Eng Congr Exp* 2009:331–6.
- [183] Khazaeinejad P, Najafzadeh MM, Jenabi J, Isvandzibaei MR. On the buckling of functionally graded cylindrical shells under combined external pressure and axial compression. *J Pressure Vessel Technol* 2010;132(6):064501.

- [184] Nguyen DD, Pham TT. Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable imperfect eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations. *Aerosp Sci Technol* 2015;40:115–27.
- [185] Isvandzibaei MR, Jamaluddin H, Hamzah RIR. Vibration analysis of supported thick-walled cylindrical shell made of functionally graded material under pressure loading. *J Vib Control* 2014. 1077546314538297.
- [186] Pradyumna S, Nanda N. Geometrically nonlinear transient response of functionally graded shell panels with initial geometric imperfection. *Mech Adv Mater Struct* 2012;20(3):217–26.
- [187] Levinson M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mech Res Commun* 1980;7(6):343–50.
- [188] Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Methods Eng* 2000;47(1–3):663–84.
- [189] Shen HS. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. *Int J Mech Sci* 2002;44(3):561–84.
- [190] Yang J, Shen HS. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Compos B Eng* 2003;34(2):103–15.
- [191] Yang J, Liew KM, Kitipornchai S. Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory. *Comput Mech* 2004;33(4):305–15.
- [192] Akbarzadeh AH, Zad SH, Eslami MR, Sadighi M. Mechanical behaviour of functionally graded plates under static and dynamic loading. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 2011;225(2):326–33.
- [193] Zhang DG. Nonlinear bending analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on two-parameter elastic foundations. *Arch Appl Mech* 2014;84(1):1–20.
- [194] Javaheri R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. *J Therm Stresses* 2002;25(7):603–25.
- [195] Samsam Shariat BA, Eslami MR. Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Compos Struct* 2007;78(3):433–9.
- [196] Najafizadeh MM, Heydari HR. Higher-order theory for buckling of functionally graded circular plates. *AIAA J* 2007;45(6):1153–60.
- [197] Bodaghi M, Saidi AR. Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory. *Appl Math Model* 2010;34(11):3659–73.
- [198] Saidi AR, Bodaghi M, Atashipour SR. Levy-type solution for bendingstretching of thick functionally graded rectangular plates based on thirdorder shear deformation theory. *Mech Adv Mater Struct* 2012;19(8):577–89.
- [199] Thai HT, Kim SE. Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation. *Int J Mech Sci* 2013;75:34–44.
- [200] Yang J, Liew KM, Kitipornchai S. Imperfection sensitivity of the post-buckling behavior of higher-order shear deformable functionally graded plates. *Int J Solids Struct* 2006;43(17):5247–66.
- [201] Shen HS. Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties. *Int J Mech Sci* 2007;49(4):466–78.
- [202] Nguyen DD, Pham HC. Nonlinear postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on elastic foundations using higher order shear deformation plate theory in thermal environments. *Compos Struct* 2013;100:566–74.

- [203] Kim YW. Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib* 2005;284(3–5):531–49.
- [204] Yang J, Shen HS. Vibration characteristics and transient response of sheardeformable functionally graded plates in thermal environments. *J Sound Vib* 2002;255(3):579–602.
- [205] Huang XL, Shen HS. Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *Int J Solids Struct* 2004;41(9–10):2403–27.
- [206] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR. Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closedform procedure. *Compos Struct* 2011;93(2):722–35.
- [207] Hasani Baferani A, Saidi AR, Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Compos Struct* 2011;93(7):1842–53.
- [208] Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Martins PALS. Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Compos Struct* 2005;69(4):449–57.
- [209] Ferreira AJM, Roque CMC, Jorge RMN, Fasshauer GE, Batra R. Analysis of functionally graded plates by a robust meshless method. *Mech Adv Mater Struct* 2007;14(8):577–87.
- [210] Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Jorge RMN. Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. *Compos Struct* 2006;75(1–4):593–600.
- [211] Gulshan Taj MNA, Chakrabarti A, Sheikh AH. Analysis of functionally graded plates using higher order shear deformation theory. *Appl Math Model* 2013;37(18-19):8484–94.
- [212] Foroughi H, Azhari M. Mechanical buckling and free vibration of thick functionally graded plates resting on elastic foundation using the higher order B-spline finite strip method. *Meccanica* 2014;49(4):981–93.
- [213] Tran LV, Ferreira AJM, Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory. *Compos B Eng* 2013;51:368–83.
- [214] Tran LV, Thai CH, Nguyen-Xuan H. An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elem Anal Des* 2013;73:65–76.
- [215] Jari H, Atri HR, Shojaee S. Nonlinear thermal analysis of functionally graded material plates using a NURBS based isogeometric approach. *Compos Struct* 2015;119:333–45.
- [216] Shen HS. Postbuckling analysis of axially loaded functionally graded cylindrical panels in thermal environments. *Int J Solids Struct* 2002;39(24):5991–6010.
- [217] Shen HS, Leung A. Postbuckling of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels in thermal environments. *J Eng Mech* 2003;129(4):414–25.
- [218] Shen HS. Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments. *Compos Sci Technol* 2005;65(11–12):1675–90.
- [219] Shen HS, Noda N. Postbuckling of pressure-loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments. *Compos Struct* 2007;77(4):546–60.
- [220] Shen HS, Liew K. Postbuckling of axially loaded functionally graded cylindrical panels with piezoelectric actuators in thermal environments. *J Eng Mech* 2004;130(8):982–95.
- [221] Shen HS, Noda N. Postbuckling of FGM cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environments. *Int J Solids Struct* 2005;42(16–17):4641–62.

- [222] Shen HS. Thermal postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells with temperature-dependent properties. *Mech Adv Mater Struct* 2007;14(6):439–52.
- [223] Shen HS. Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *Int J Mech Sci* 2009;51(5):372–83.
- [224] Shen HS, Yang J, Kitipornchai S. Postbuckling of internal pressure loaded FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *Eur J Mech A Solids* 2010;29(3):448–60.
- [225] Shen HS. Thermal postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. *J Eng Mech* 2013;139(8):979–91.
- [226] Bagherizadeh E, Kiani Y, Eslami MR. Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation. *Compos Struct* 2011;93(11):3063–71.
- [227] Oktem AS, Mantari JL, Soares CG. Static response of functionally graded plates and doubly-curved shells based on a higher order shear deformation theory. *Eur J Mech A Solids* 2012;36:163–72.
- [228] Hoang VT, Nguyen DD. Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations and subjected to mechanical and thermal loading conditions. *Appl Math Model* 2014;38(11–12):2848–66.
- [229] Nguyen DD, Pham TT, Nguyen DT, Hoang TV. Nonlinear buckling of higher deformable S-FGM thick circular cylindrical shells with metal–ceramic–metal layers surrounded on elastic foundations in thermal environment. *Compos Struct* 2015;121:134–41.
- [230] Kapuria S, Patni M, Yasin MY. A quadrilateral shallow shell element based on the third-order theory for functionally graded plates and shells and the inaccuracy of rule of mixtures. *Eur J Mech A Solids* 2015;49:268–82.
- [231] Qian LF, Batra RC, Chen LM. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Compos B Eng* 2004;35(6):685–97.
- [232] Qian LF, Batra RC, Chen LM. Free and forced vibrations of thick rectangular plates using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless Petrov–Galerkin (MLPG) method. *Comp Model Eng Sci* 2003;4(5):519–34.
- [233] Gilhooley DF, Batra RC, Xiao JR, McCarthy MA, Gillespie Jr JW. Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Compos Struct* 2007;80(4):539–52.
- [234] Batra RC, Vidoli S. Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle. *AIAA J* 2002;40(1):91–104.
- [235] Sheikholeslami SA, Saidi AR. Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory. *Compos Struct* 2013;106:350–61.
- [236] Qian LF, Batra RC. Transient thermoelastic deformations of a thick functionally graded plate. *J Therm Stresses* 2004;27(8):705–40.
- [237] Patel BP, Gupta SS, Loknath MS, Kadu CP. Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory. *Compos Struct* 2005;69(3):259–70.

- [238] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates. *J Appl Mech* 1977;44(4):663–8. 82 H.-T. Thai, S.-E. Kim / *Composite Structures* 128 (2015) 70–86
- [239] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A high-order theory of plate deformation part 2: laminated plates. *J Appl Mech* 1977;44(4):669–76.
- [240] Roque CMC, Ferreira AJM, Jorge RMN. A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory. *J Sound Vib* 2007;300(3):1048–70.
- [241] Pandya BN, Kant T. Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations. *Int J Solids Struct* 1988;24(12):1267–86.
- [242] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory. *Compos Struct* 2008;84(2):132–46.
- [243] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos Struct* 2008;82(4):499–512.
- [244] Matsunaga H. Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory. *Compos Struct* 2009;90(1):76–86.
- [245] Matsunaga H. Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. *Compos Struct* 2009;87(4):344–57.
- [246] Pradyumna S, Bandyopadhyay JN. Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. *J Sound Vib* 2008;318(1–2):176–92.
- [247] Pradyumna S, Bandyopadhyay J. Dynamic instability of functionally graded shells using higher-order theory. *J Eng Mech* 2010;136(5):551–61.
- [248] Kant T, Khare RK. A higher-order facet quadrilateral composite shell element. *Int J Numer Methods Eng* 1997;40(24):4477–99.
- [249] Alijani F, Amabili M, Bakhtiari-Nejad F. Thermal effects on nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shells using higher order shear deformation theory. *Compos Struct* 2011;93(10):2541–53.
- [250] Amabili M, Reddy JN. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Int J Non-Linear Mech* 2010;45(4):409–18.
- [251] Chen CS, Hsu CY, Tzou GJ. Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory. *J Reinf Plast Compos* 2009;28(10):1215–34.
- [252] Talha M, Singh BN. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl Math Model* 2010;34(12):3991–4011.
- [253] Talha M, Singh BN. Thermo-mechanical induced vibration characteristics of shear deformable functionally graded ceramic–metal plates using finite element method. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 2011;225(1):50–65.
- [254] Gulshan Taj MNA, Chakrabarti A, Talha M. Bending analysis of functionally graded skew sandwich plates with through-the thickness displacement variations. *J Sandwich Struct Mater* 2014;16(2):210–48.
- [255] Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS. A nth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos Struct* 2011;93(11):2826–32.
- [256] Xiang S, Kang G. A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates. *Eur J Mech A Solids* 2013;37:336–43.

- [257] Xiang S, Kang G, Xing B. A n th-order shear deformation theory for the free vibration analysis on the isotropic plates. *Meccanica* 2012;47(8):1913–21.
- [258] Xiang S, Kang G, Yang M, Zhao Y. Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Compos Struct* 2013;96:226–31.
- [259] Xiang S, Kang G, Liu Y. A n th-order shear deformation theory for natural frequency of the functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct* 2014;111:224–31.
- [260] Xiang S, Kang G. Static analysis of functionally graded plates by the various shear deformation theory. *Compos Struct* 2013;99:224–30.
- [261] Sobhy M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Compos Struct* 2013;99:76–87.
- [262] Wattanasakulpong N, Prusty GB, Kelly DW. Free and forced vibration analysis using improved third order shear deformation theory for functionally graded plates under high temperature loading. *J Sandwich Struct Mater* 2013;15(5):583–606.
- [263] Shi G. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *Int JSolids Struct* 2007;44(13):4399–417.
- [264] Reddy JN. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *Int J Aerosp Lightweight Struct* 2011;1(1):1–21.
- [265] Kant T, Jha DK, Singh RK. A higher-order shear and normal deformation functionally graded plate model: some recent results. *Acta Mech* 2014;225(10):2865–76.
- [266] Jha DK, Kant T, Singh RK. Stress analysis of transversely loaded functionally graded plates with a higher order shear and normal deformation theory. *J Eng Mech* 2013;139(12):1663–80.
- [267] Jha DK, Kant T, Singh RK. Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects. *Compos Struct* 2013;96:799–823.
- [268] Jha DK, Kant T, Singh RK. Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nucl Eng Des* 2012;250:8–13.
- [269] Jha DK, Kant T, Srinivas K, Singh RK. An accurate higher order displacement model with shear and normal deformations effects for functionally graded plates. *Fusion Eng Des* 2013;88(12):3199–204.
- [270] Kant T, Manjunatha BS. An unsymmetric FRC laminate C_0 finite element model with 12 degrees of freedom per node. *Eng Comput* 1988;5(4):300–8.
- [271] Swaminathan K, Naveenkumar DT. Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates – analytical solutions. *Eur J Mech A Solids* 2014;47:349–61.
- [272] Natarajan S, Manickam G. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elem Anal Des* 2012;57:32–42.
- [273] Ali JSM, Bhaskar K, Varadan TK. A new theory for accurate thermal/mechanical flexural analysis of symmetric laminated plates. *Compos Struct* 1999;45(3):227–32.
- [274] Nguyen-Xuan H, Thai CH, Nguyen-Thoi T. Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory. *Compos B Eng* 2013;55:558–74.
- [275] Levy M. Memoire sur la theorie des plaques elastiques planes. *J Math Pures Appl* 1877:219–306.
- [276] Stein M. Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA J* 1986;24(9):1537–44.

- [277] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991;29(8):901–16.
- [278] Zenkour AM. Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory. *Acta Mech* 2004;171(3–4):171–87.
- [279] Zenkour AM. Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading. *Compos Struct* 2004;65(3):367–79.
- [280] Ferreira A, Roque C, Jorge R. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Comput Struct* 2005;83(27):2225–37.
- [281] Zenkour AM. Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories. *J Eng Math* 2004;50(1):75–93.
- [282] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 1-deflection and stresses. *Int J Solids Struct* 2005;42(18–19):5224–42.
- [283] Zenkour AM, Alghamdi NA. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mech Adv Mater Struct* 2010;17(6):419–32.
- [284] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 2-buckling and free vibration. *Int J Solids Struct* 2005;42(18–19):5243–58.
- [285] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Compos Struct* 2010;93(1):93–102.
- [286] Zenkour AM. On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory. *Int J Struct Stab Dyn* 2005;5(02):279–97.
- [287] Zenkour AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2006;30(1):67–84.
- [288] Zenkour AM. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Int J Mech Sci* 2009;51(11–12):869–80.
- [289] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory. *J Therm Stresses* 2011;34(11):1119–38.
- [290] Thai HT, Vo TP. A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *Int J Eng Sci* 2012;54:58–66.
- [291] Thai HT, Vo TP, Nguyen TK, Lee J. A nonlocal sinusoidal plate model for micro/nanoscale plates. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 2014;228(14):2652–60.
- [292] Zenkour AM. Exact relationships between classical and sinusoidal theories for FGM plates. *Mech Adv Mater Struct* 2012;19(7):551–67.
- [293] Soldatos KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech* 1992;94(3):195–220.
- [294] Akavci SS. Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates. *Mech Compos Mater* 2010;46(2):215–26.
- [295] Akavci SS. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Compos Struct* 2014;108:667–76.
- [296] Grover N, Maiti DK, Singh BN. A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. *Compos Struct* 2013;95:667–75.

- [297] Mahi A, Bedia EAA, Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Appl Math Model* 2014.[http:// dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045](http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045).
- [298] Karama M, Afaq KS, Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int J Solids Struct* 2003;40(6):1525–46.
- [299] Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2009;89(1):94–101.
- [300] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higherorder shear deformation theory. *Compos Struct* 2011;94(1):37–49.
- [301] Mantari JL, Guedes Soares C. Static response of advanced composite plates by a new non-polynomial higher-order shear deformation theory. *Int J Mech Sci* 2014;78:60–71.
- [302] Mantari JL, Granados EV, Guedes Soares C. Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation. *Compos B Eng* 2014;66:407–19.
- [303] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *Int J Solids Struct* 2012;49(1):43–53.
- [304] Mantari JL, Guedes Soares C. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Compos Struct* 2012;94(6):1991–2000.
- [305] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Compos B Eng* 2012;43(3):1489–99.
- [306] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Compos Struct* 2012;94(2):714–23.
- [307] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higherorder shear deformation theory. *Compos B Eng* 2012;43(8):3348–60.
- [308] Mantari JL, Guedes Soares C. Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory. *Compos Struct* 2012;94(8):2640–56.
- [309] Mantari JL, Guedes Soares C. Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates. *Compos Struct* 2013;96:545–53.
- [310] Mantari JL, Bonilla EM, Guedes Soares C. A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates. *Compos B Eng* 2014;60:319–28.
- [311] Nguyen VH, Nguyen TK, Thai HT, Vo TP. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Compos B Eng* 2014;66:233–46.
- [312] Thai CH, Ferreira AJM, Bordas SPA, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. *Eur J Mech A Solids* 2014;43:89–108.
- [313] Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Comput Struct* 2014;141:94–112.

- [314] Zenkour AM. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2007;77(4):197–214.
- [315] Mantari JL, Guedes Soares C. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos Struct* 2012;94(8):2561–75.
- [316] Mantari JL, Guedes Soares C. Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells. *Compos B Eng* 2014;56:126–36.
- [317] Mantari JL, Guedes Soares C. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Compos B Eng* 2013;45(1):268–81.
- [318] Senthilnathan NR, Chow ST, Lee KH, Lim SP. Buckling of shear-deformable plates. *AIAA J* 1987;25(9):1268–71.
- [319] Huffington NJ. Response of elastic columns to axial pulse loading. *AIAA J* 1963;1(9):2099–104.
- [320] Krishna Murty AV. Flexure of composite plates. *Compos Struct* 1987;7(3):161–77.
- [321] Reddy JN. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *Int J Non-Linear Mech* 1990;25(6):677–86.
- [322] Thai HT, Kim SE. A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;96:165–73.
- [323] Hamidi A, Zidi M, Houari MSA, Tounsi A. A new four variable refined plate theory for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading. *Compos B Eng* 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.03.021>.
- [324] Shimpi RP. Refined plate theory and its variants. *AIAA J* 2002;40(1):137–46.
- [325] Shimpi RP, Patel HG. Free vibrations of plate using two variable refined plate theory. *J Sound Vib* 2006;296(4):979–99.
- [326] Thai HT, Choi DH. Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates. *Appl Math Model* 2013;37(18–19):8310–23.
- [327] Thai HT, Park M, Choi DH. A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation. *Int J Mech Sci* 2013;73:40–52.
- [328] Thai HT, Kim SE. Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates. *Int J Mech Sci* 2012;54(1):269–76.
- [329] Shimpi RP, Patel HG. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *Int J Solids Struct* 2006;43(22):6783–99.
- [330] Kim SE, Thai HT, Lee J. Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory. *Thin-Walled Struct* 2009;47(4):455–62.
- [331] Thai HT, Kim SE. Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Compos Struct* 2011;93(7):1738–46.
- [332] Thai HT, Kim SE. Levy-type solution for free vibration analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Appl Math Model* 2012;36(8):3870–82.
- [333] Kim SE, Thai HT, Lee J. A two variable refined plate theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2009;89(2):197–205.
- [334] Thai HT, Choi DH. Finite element formulation of a refined plate theory for laminated composite plates. *J Compos Mater* 2014;48(28):3521–38.

- [335] Thai HT, Kim SE. Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. *Int J Mech Sci* 2010;52(4):626–33.
- [336] Tran LV, Thai CH, Le HT, Gan BS, Lee J, Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of laminated composite plates based on a four-variable refined plate theory. *Eng Anal Boundary Elem* 2014;47:68–81.
- [337] Mechab I, Atmane HA, Tounsi A, Belhadj HA. A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates. *Acta Mech Sin* 2010;26(6):941–9.
- [338] Ahmed Houari MS, Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Adda Bedia EA. Twovariable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J Therm Stresses* 2011;34(4):315–34.
- [339] Benachour A, Tahar HD, Atmane HA, Tounsi A, Ahmed MS. A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient. *Compos B Eng* 2011;42(6):1386–94.
- [340] Thai HT, Choi DH. A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Compos Sci Technol* 2011;71(16):1850–8.
- [241] Thai HT, Choi DH. An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2012;36(3):1008–22.
- [342] Thai HT, Choi DH. A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation. *Compos B Eng* 2012;43(5):2335–47.
- [343] Thai HT, Park T, Choi DH. An efficient shear deformation theory for vibration of functionally graded plates. *Arch Appl Mech* 2013;83(1):137–49.
- [344] Bouiadjra MB, Ahmed Houari MS, Tounsi A. Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory. *J Therm Stresses* 2012;35(8):677–94.
- [345] Thai HT, Choi DH. Levy solution for free vibration analysis of functionally graded plates based on a refined plate theory. *KSCE J Civil Eng* 2014;18(6):1813–24.
- [346] Abdelaziz HH, Atmane HA, Mechab I, Boumia L, Tounsi A, Abbas ABE. Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory. *Chin J Aeronaut* 2011;24(4):434–48.
- [347] Hadji L, Atmane HA, Tounsi A, Mechab I, Bedia EA. Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory *Appl Math Mech* 2011;32(7):925–42.
- [348] Bourada M, Tounsi A, Houari MSA. A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *JSandwich Struct Mater* 2012;14(1):5–33.
- [349] Rouzegar J, Abad F. Free vibration analysis of FG plate with piezoelectric layers using four-variable refined plate theory. *Thin-Walled Struct* 2015;89:76–83.
- [350] Malekzadeh P, Shojaee M. Free vibration of nanoplates based on a nonlocal two-variable refined plate theory. *Compos Struct* 2013;95:443–52.
- [351] Narendar S. Buckling analysis of micro-/nano-scale plates based on twovariable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects. *Compos Struct* 2011;93(12):3093–103.
- [352] Thai HT. A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams. *Int J Eng Sci* 2012;52:56–64.
- [353] Thai HT, Uy B. Levy solution for buckling analysis of functionally graded plates based on a refined plate theory. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci* 2013;227(12):2649–64.
- [354] Thai HT, Choi DH. Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates. *Compos B Eng* 2014;56:705–16.

- [355] Mechab I, Mechab B, Benaissa S. Static and dynamic analysis of functionally graded plates using four-variable refined plate theory by the new function. *Compos B Eng* 2013;45(1):748–57.
- [356] El Meiche N, Tounsi A, Ziane N, Mechab I, Adda Bedia EA. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *Int J Mech Sci* 2011;53(4):237–47.
- [357] Merdaci S, Tounsi A, Houari MSA, Mechab I, Hebali H, Benyoucef S. Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates. *Arch Appl Mech* 2011;81(11):1507–22.
- [358] Tounsi A, Houari MSA, Benyoucef S, Adda Bedia EA. A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerosp Sci Technol* 2013;24(1):209–20.
- [359] Ameer M, Tounsi A, Mechab I, El Bedia A. A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations. *KSCE J Civil Eng* 2011;15(8):1405–14.
- [360] Thai HT, Vo TP. A new sinusoidal shear deformation theory for bending buckling, and vibration of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2013;37(5):3269–81.
- [361] Nguyen-Xuan H, Tran LV, Thai CH, Kulasegaram S, Bordas SPA. Isogeometric analysis of functionally graded plates using a refined plate theory. *Compos B Eng* 2014;64:222–34.
- [362] Thai HT, Choi DH. Efficient higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates. *Arch Appl Mech* 2013;83(12):1755–71.
- [363] Thai HT, Choi DH. Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates. *Finite Elem Anal Des* 2013;75:50–61.
- [364] Yaghoobi H, Fereidoon A. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: an assessment of a 84 H.-T. Thai, S.-E. Kim / *Composite Structures* 128 (2015) 70–86 simple refined nth-order shear deformation theory. *Compos B Eng* 2014;62:54–64.
- [365] Thai HT, Choi DH. A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;101:332–40.
- [366] Thai HT, Choi DH. A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2013;106:754–63.
- [367] Yu TT, Yin S, Bui TQ, Hirose S. A simple FSDT-based isogeometric analysis for geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates. *Finite Elem Anal Des* 2015;96:1–10.
- [368] Yin S, Hale JS, Yu T, Bui TQ, Bordas SPA. Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates. *Compos Struct* 2014;118:121–38.
- [369] Thai HT, Nguyen TK, Vo TP, Lee J. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *Eur J Mech A Solids* 2014;45:211–25.
- [370] Shimpi RP, Patel HG, Arya H. New first-order shear deformation plate theories. *J Appl Mech* 2007;74(3):523–33.
- [371] Thai HT, Kim SE. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;99:172–80.
- [372] Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates. *Acta Mech* 2014;225(3):951–64.
- [373] Hebali H, Tounsi A, Houari M, Bessaim A, Bedia E. New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *J Eng Mech* 2014;140(2):374–83.

- [374] Bessaim A, Houari MS, Tounsi A, Mahmoud S. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J Sandwich Struct Mater* 2013;15(6):671–703.
- [375] Bennoun M, Houari MSA, Tounsi A. A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mech Adv Mater Struct* 2014. <http://dx.doi.org/10.1080/15376494.2014.984088>.
- [376] Mantari JL, Guedes Soares C. A trigonometric plate theory with 5-unknowns and stretching effect for advanced composite plates. *Compos Struct* 2014;107:396–405.
- [377] Mantari JL, Granados EV. Thermoelastic analysis of advanced sandwich plates based on a new quasi-3D hybrid type HSDT with 5 unknowns. *Compos B Eng* 2015;69:317–34.
- [378] Belabed Z, Ahmed Houari MS, Tounsi A, Mahmoud SR, Anwar Bég O. An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Compos B Eng* 2014;60:274–83.
- [379] Mantari JL, Granados EV, Hinojosa MA, Guedes Soares C. Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Compos Struct* 2014;118:455–71.
- [380] Mantari JL, Soares CG. A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates. *Acta Mech* 2014. <http://dx.doi.org/10.1007/s00707-014-1192-3>.
- [381] Mantari JL, Guedes Soares C. Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates. *Compos Struct* 2014;109:231–9.
- [382] Zenkour AM. A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2013;37(20–21):9041–51.
- [383] Zenkour AM. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. *J Sandwich Struct Mater* 2013;15(6):629–56.
- [384] Zenkour AM. Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory. *Compos Struct* 2015;122:260–70.
- [385] Zenkour AM. Simplified theory for hygrothermal response of angle-ply composite plates. *AIAA J* 2014;52(7):1466–73.
- [386] Al Khateeb SA, Zenkour AM. A refined four-unknown plate theory for advanced plates resting on elastic foundations in hygrothermal environment. *Compos Struct* 2014;111:240–8.
- [387] Reissner E. On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory. *Int J Numer Methods Eng* 1986;23(2):193–8.
- [388] Reissner E. On a certain mixed variational theorem and a proposed application. *Int J Numer Methods Eng* 1984;20(7):1366–8.
- [389] Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *J Appl Mech* 1986;53(3):661–6.
- [390] Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part I: governing equations. *Compos Struct* 2009;87(1):1–11.
- [391] Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part II: layerwise theories. *Compos Struct* 2009;87(1):12–22.

- [392] Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part III: advanced mixed high order shear deformation theories. *Compos Struct* 2009;87(3):183–94.
- [393] Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part IV: Zig-zag theories. *Compos Struct* 2009;87(3):195–205.
- [394] Demasi L. Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part V: results. *Compos Struct* 2009;88(1):1–16.
- [395] Fares ME, Elmarghany MK, Atta D. An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates. *Compos Struct* 2009;91(3):296–305.
- [396] Wu CP, Li HY. An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates. *Compos Struct* 2010;92(10):2591–605.
- [397] Wu CP, Li HY. The RMVT-and PVD-based finite layer methods for the threedimensional analysis of multilayered composite and FGM plates. *Compos Struct* 2010;92(10):2476–96.
- [398] Wu CP, Chang YT. A unified formulation of RMVT-based finite cylindrical layer methods for sandwich circular hollow cylinders with an embedded FGM layer. *Compos B Eng* 2012;43(8):3318–33.
- [399] Wu CP, Fan TY, Li HY. Reissner’s mixed variational theorem-based finite cylindrical layer methods for the three-dimensional free vibration analysis of sandwich circular hollow cylinders with an embedded functionally graded material layer. *J Vib Control* 2014;20(8):1199–223.
- [400] Wu CP, Peng ST, Chen YC. RMVT-and PVD-based finite cylindrical layer methods for the three-dimensional buckling analysis of multilayered FGM cylinders under axial compression. *Appl Math Model* 2014;38(1):233–52.
- [401] Wu CP, Chiu KH, Wang YM. RMVT-based meshless collocation and elementfree Galerkin methods for the quasi-3D analysis of multilayered composite and FGM plates. *Compos Struct* 2011;93(2):923–43.
- [402] Wu CP, Chiu KH. RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates. *Compos Struct* 2011;93(5):1433–48.
- [403] Wang YM, Chen SM, Wu CP. A meshless collocation method based on the differential reproducing kernel interpolation. *Comput Mech* 2010;45(6):585–606.
- [404] Wu CP, Yang SW. RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the approximate 3D analysis of multilayered composite and FGM circular hollow cylinders. *Compos B Eng* 2011;42(6):1683–700.
- [405] Wu CP, Yang SW. A semi-analytical element-free Galerkin method for the 3D free vibration analysis of multilayered FGM circular hollow cylinders. *J Intell Mater Syst Struct* 2011;22(17):1993–2007.
- [406] Mian MA, Spencer A. Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials. *J Mech Phys Solids* 1998;46(12):2283–95.
- [407] Ootao Y, Tanigawa Y. Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating. *J Therm Stresses* 1999;22(1):35–55.
- [408] Cheng ZQ, Batra RC. Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate. *Compos B Eng* 2000;31(2):97–106.
- [409] Reddy JN, Cheng ZQ. Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. *Eur J Mech-A/Solids* 2001;20(5):841–55.

- [410] Vel SS, Batra RC. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA J* 2002;40(7):1421–33.
- [411] Vel SS, Batra RC. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *Int J Solids Struct* 2003;40(25):7181–96.
- [412] Alibeigloo A. Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates. *Compos Struct* 2010;92(1):113–21.
- [413] Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates. *Eur J Mech A Solids* 2004;23(5):853–64.
- [414] Woodward B, Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates. *Eur J Mech A Solids* 2011;30(5):705–18.
- [415] Zhong Z, Shang E. Closed-form solutions of three-dimensional functionally graded plates. *Mech Adv Mater Struct* 2008;15(5):355–63.
- [416] Zhang H, Jiang J, Zhang Z. Three-dimensional elasticity solutions for bending of generally supported thick functionally graded plates. *Appl Math Mech* 2014;35:1467–78.
- [417] Xu Y, Zhou D. Three-dimensional elasticity solution of functionally graded rectangular plates with variable thickness. *Compos Struct* 2009;91(1):56–65.
- [418] Kashtalyan M, Menshykova M. Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core. *Compos Struct* 2009;87(1):36–43.
- [419] Woodward B, Kashtalyan M. 3D elasticity analysis of sandwich panels with graded core under distributed and concentrated loadings. *Int J Mech Sci* 2011;53(10):872–85.
- [420] Abali BE, Völlmecke C, Woodward B, Kashtalyan M, Guz I, Müller WH. Threedimensional elastic deformation of functionally graded isotropic plates under point loading. *Compos Struct* 2014;118:367–76.
- [421] Yun W, Rongqiao X, Haojiang D. Three-dimensional solution of axisymmetric bending of functionally graded circular plates. *Compos Struct* 2010;92(7):1683–93.
- [422] Wen PH, Sladek J, Sladek V. Three-dimensional analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Methods Eng* 2011;87(10):923–42.
- [423] Vel SS, Batra RC. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib* 2004;272(3–5):703–30.
- [424] Vel SS. Exact elasticity solution for the vibration of functionally graded anisotropic cylindrical shells. *Compos Struct* 2010;92(11):2712–27.
- [425] Uymaz B, Aydogdu M. Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *J Reinf Plast Compos* 2007;26(18):1847–63.
- [426] Li Q, Iu VP, Kou KP. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib* 2008;311(1–2):498–515.
- [427] Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct* 2009;18(8):085015.
- [428] Lu CF, Lim CW, Chen WQ. Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations. *Mech Adv Mater Struct* 2009;16(8):576–84.
- [429] Malekzadeh P. Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct* 2009;89(3):367–73.

- [430] Malekzadeh P, Shahpari S, Ziaee H. Three-dimensional free vibration of thick functionally graded annular plates in thermal environment. *J Sound Vib* 2010;329(4):425–42.
- [431] Jin G, Su Z, Shi S, Ye T, Gao S. Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Compos Struct* 2014;108:565–77.
- [432] Reddy K, Kant T. Three-dimensional elasticity solution for free vibrations of exponentially graded plates. *J Eng Mech* 2014;140(7):04014047.
- [433] Yas MH, Tahouneh V. 3-D Free vibration analysis of thick functionally graded annular plates on Pasternak elastic foundation via differential quadrature method (DQM). *Acta Mech* 2012;223(1):43–62.
- [434] Tahouneh V, Yas M. Semianalytical solution for three-dimensional vibration analysis of thick multidirectional functionally graded annular sector plates under various boundary conditions. *J Eng Mech* 2014;140(1):31–46.
- [435] Sburlati R, Bardella L. Three-dimensional elastic solutions for functionally graded circular plates. *Eur J Mech A Solids* 2011;30(3):219–35.
- [436] Kamarian S, Sadighi M, Shakeri M, Yas MH. Free vibration response of sandwich cylindrical shells with functionally graded material face sheets resting on Pasternak foundation. *J Sandwich Struct Mater* 2014;16(5):511–33.
- [437] Na KS, Kim JH. Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials. *Compos B Eng* 2004;35(5):429–37.
- [438] Na KS, Kim JH. Three-dimensional thermomechanical buckling of functionally graded materials. *AIAA J* 2005;43(7):1605–12.
- [439] Na KS, Kim JH. Three-dimensional thermomechanical buckling analysis for functionally graded composite plates. *Compos Struct* 2006;73(4):413–22.
- [440] Na KS, Kim JH. Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method. *Finite Elem Anal Des* 2006;42(8–9):749–56.
- [451] Na KS, Kim JH. Nonlinear bending response of functionally graded plates under thermal loads. *J Therm Stresses* 2006;29(3):245–61.
- [442] Asemi K, Salehi M, Akhlaghi M. Post-buckling analysis of FGM annular sector plates based on three dimensional elasticity graded finite elements. *Int J Non-Linear Mech* 2014;67:164–77.
- [443] Carrera E. A class of two-dimensional theories for anisotropic multilayered plates analysis. *Atti Della Accademia Delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali* 1995;19:1–39.
- [444] Carrera E. C_{z0} requirements-models for the two dimensional analysis of multilayered structures. *Compos Struct* 1997;37(3):373–83.
- [455] Carrera E. Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plates analysis. *AIAA J* 1998;36(5):830–9.
- [446] Carrera E. Mixed layer-wise models for multilayered plates analysis. *Compos Struct* 1998;43(1):57–70.
- [447] Carrera E. Layer-wise mixed models for accurate vibrations analysis of multilayered plates. *J Appl Mech* 1998;65(4):820–8.
- [448] Carrera E. Multilayered shell theories accounting for layerwise mixed description, part 2: numerical evaluations. *AIAA J* 1999;37(9):1117–24.

- [449] Carrera E. Multilayered shell theories accounting for layerwise mixed description, part I. Governing equations. *AIAA J* 1999;37(9):1107–16.
- [450] Carrera E. A Reissner's mixed variational theorem applied to vibration analysis of multilayered shell. *J Appl Mech* 1999;66(1):69–78.
- [451] Carrera E. A study of transverse normal stress effect on vibration of multilayered plates and shells. *J Sound Vib* 1999;225(5):803–29.
- [452] Carrera E. Transverse normal stress effects in multilayered plates. *J Appl Mech* 1999;66(4):1004–12.
- [453] Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Compos Struct* 2000;50(2):183–98.
- [454] Carrera E. Single-vs multilayer plate modelings on the basis of reissner's mixed theorem. *AIAA J* 2000;38(2):342–52.
- [455] Carrera E. A priori vs. a posteriori evaluation of transverse stresses in multilayered orthotropic plates. *Compos Struct* 2000;48(4):245–60.
- [456] Carrera E. An assessment of mixed and classical theories for the thermal stress analysis of orthotropic multilayered plates. *J Therm Stresses* 2000;23(9):797–831.
- [457] Carrera E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Appl Mech Rev* 2001;54(4):301–29.
- [458] Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch Comput Methods Eng* 2003;10(3):215–96.
- [459] Carrera E, Giunta G, Petrolo M. *Beam structures: classical and advanced theories*. John Wiley & Sons; 2011.
- [460] Carrera E, Brischetto S, Nali P. *Plates and shells for smart structures: classical and advanced theories for modeling and analysis*. John Wiley & Sons; 2011.
- [461] Carrera E, Cinefra M, Petrolo M, Zappino E. *Finite element analysis of structures through unified formulation*. John Wiley & Sons; 2014.
- [462] Carrera E, Brischetto S, Robaldo A. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *AIAA J* 2008;46(1):194–203.
- [463] Brischetto S, Leetsch R, Carrera E, Wallmersperger T, Kröplin B. Thermomechanical bending of functionally graded plates. *J Therm Stresses* 2008;31(3):286–308.
- [464] Cinefra M, Carrera E, Brischetto S, Belouettar S. Thermo-mechanical analysis of functionally graded shells. *J Therm Stresses* 2010;33(10):942–63.
- [465] Cinefra M, Soave M. Accurate vibration analysis of multilayered plates made of functionally graded materials. *Mech Adv Mater Struct* 2011;18(1):3–13.
- [466] Brischetto S, Carrera E. Advanced mixed theories for bending analysis of functionally graded plates. *Comput Struct* 2010;88(23):1474–83.
- [467] Brischetto S. Classical and mixed advanced models for sandwich plates embedding functionally graded cores. *J Mech Mater Struct* 2009;4(1):13–33.
- [468] Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. Refined and advanced models for multilayered plates and shells embedding functionally graded material layers. *Mech Adv Mater Struct* 2010;17(8):603–21.

- [469] Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Compos B Eng* 2011;42(2):123–33.
- [470] Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Polit O. Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations. *Compos B Eng* 2011;42(5):1276–84.
- [471] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN, et al. Bending of FGM plates by a sinusoidal plate formulation and collocation with radial basis functions. *Mech Res Commun* 2011;38(5):368–71.
- [472] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN, et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos B Eng* 2012;43(2): 711–25.
- [473] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2012;94(5): 1814–25.
- [474] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Jorge RMN, Soares CMM. Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions. *ZAMM – J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech* 2012;92(9):749–66.
- [475] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos B Eng* 2013;44(1):657–74.
- [476] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations. *Eur J Mech A Solids* 2013;37:24–34.
- [477] Cinefra M, Carrera E, Della Croce L, Chinosi C. Refined shell elements for the analysis of functionally graded structures. *Compos Struct* 2012;94(2): 415–22.
- [478] Dozio L. Natural frequencies of sandwich plates with FGM core via variable kinematic 2-D Ritz models. *Compos Struct* 2013;96:561–8.
- [479] Dozio L. Exact free vibration analysis of Levy FGM plates with higher-order shear and normal deformation theories. *Compos Struct* 2014;111:415–25.
- [480] Fazzolari FA. Natural frequencies and critical temperatures of functionally graded sandwich plates subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Compos Struct* 2015;121:197–210.