N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabes-Sidi Bel Abbès

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Thèse de doctorat

Spécialité : Système Dynamique et Application

Présentée par

LADRANI Fatima Zohra

Étude qualitative des solutions d'équations différentielles sur les échelles de temps

Soutenue le 16/02/2016 devant le jury composé de :

Pr. BENCHOHRA Mouffak	UDL Sidi Bel Abbes	Président
Pr. BELMEKI Mohamed	Université de Saida	Examinateur
Pr. OUAHAB Abdelghani	UDL Sidi Bel Abbes	Examinateur
Dr. Oumansour Abderrahmane	UDL Sidi Bel Abbes	Examinateur
Pr. HAMMOUDI Ahmed	Centre Universitaire Ain Témouchent	Encadreur

Année Universitaire : 2015 – 2016

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance à mon encadreur, le Professeur A. hammoudi, pour le sujet qu'il m'a proposé et pour ses conseils précieux durant toutes ces années. Je le remercie surtout pour ses qualités humaines et scientifiques qui m'ont permis de réaliser ce travail. Merci pour tout.

Je remercie le Professeur M. Benchohra qui a honoré ce travail en acceptant de présider le jury.

Je remercie les Professeurs A. Ouahab, M. Belmeki et A. Oumansour pour m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je tiens à remercier toute ma famille, parents, frères et soeurs, en particulier ma maman pour m'avoir donné tout son amour, son affection et son instruction. C'est pour tout cela je lui dédie ce manuscrit.

Je remercie mon mari Amine pour son amour, sa confiance, ses conseils et surtout sa patience.

Enfin, j'adresse aussi des remerciements à mes amis (ies) universitaires et extra-universitaires.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des échelles de temps est un nouveau secteur des mathématiques qui unifient et prolongent l'analyse discrète et continue, elle a été présenté par Stefan Hilger en 1988 dans Ph.D [25].

Beaucoup de résultats que l'on rencontre dans l'étude des équations différentielles et de différence restent valable dans le cas des échelles de temps. En outre, le calcul dans les échelles de temps est une source riche d'étude des problèmes intéressants qui n'ont aucun équivalent normal dans le cas continu ou discret. Actuellement, l'étude des équations dynamiques est un champ large dans les mathématiques pures et appliquées sur l'existence et l'unicité des solutions. Les mathématiques appliquées soulignent l'importance de la justification rigoureuse du comportement qualitatif des solutions (oscillation, périodicité, stabilité, etc.).

La théorie de l'oscillation comme partie de la théorie qualitative d'équations dynamiques a été développée rapidement ces dix dernières années sur l'échelle de temps.

Notre thèse se compose de quatre chapitres.

Chapitre I :

Il consiste en un rappel des principales définitions et propriétés sur la théorie de l'échelle de temps utilisées dans la suite du travail.

Chapitre II :

Il s'agit dans ce chapitre d'étudier le comportement asymptotique d'une équation différentielle non linéaire du troisième ordre sur l'échelle de temps

$$\left(q\left(\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right)^{\beta}\right)^{\Delta}(t)+f(t,x(t))=0, \qquad t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{1}$$

Ce problème a été initié par L. Erab, A. Peterson et S.H. Saker [12] dans son papier de 2005 dans le cas que où f est linéaire et $\gamma=\beta=1$. Ensuite, beaucoup d'auteurs ont étudié des problèmes similaires, voir par exemple
R. P. Agarwal, M. Bohner, S. Tang, T. Li et C. Zhang [18] ont étudié le comportement asymptotique de l'équation semi linéaire d'ordre trois

$$\left(a\left(\left(rx^{'}\right)^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}(t)+p\left(t\right)x^{\gamma}\left(t\right)=0, \qquad t\in\left[t_0,+\infty\right).$$

T. Li, C. Zhang, B. Baculikova et J. Dzurina [38] ont étudié le comportement asymptotique de l'équation dynamique semi linéaire d'ordre trois

$$\left(a\left(x^{''}\right)^{\alpha}\right)^{'}+q\left(t\right)x^{\alpha}\left(t\right)=0, \qquad t\in\left[t_0,+\infty\right).$$

T. Li, Z. Han, S. Sun et Y. Zhao [41] ont étudié le comportement asymptotique pour l'équation dynamique à retard du troisième ordre sur l'échelle de temps

$$\left(a\left(\left(rx^{\Delta}\right)^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)+f\left(t,x\left(\tau\left(t\right)\right)\right)=0, \qquad t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}.$$

L'équation dynamique (1) elle généralise toute les équations ci-dessus.

Chapitre III :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'oscillation pour une équation différentielle non linéaire du quatrième degré sur les échelles de temps de type :

$$\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^3}(t)+q\left(t\right)\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)+f\left(t,x\left(\tau\left(t\right)\right)\right)=0, \qquad t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{2}$$

Ce problème généralise tous les problèmes considérés par S.R. Grace, M.Bohner et S.Sun [30]. T. Li, E. Thandapani et S. Tang [42]. Ce travail a fait l'objet d'une publication [10].

Chapitre IV :

Dans ce chapitre, on étudiera l'oscillation pour une équation différentielle non linéaire d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sur l'échelle de temps de type :

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t) + f\left(t, x^{\alpha}(t)\right) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{3}$$

avec $n \geq 3$.

Notre but ici est d'établir quelques nouveaux critères de l'oscillation pour l'équation (3) qui généralise [36, 37]. Ce travail est soumis pour publication.

Mots clés :

Les échelles de temps, Equation différentielle ordinaire, Théorie de l'oscillation.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons quelques définitions de base concernant les calculs sur les échelles de temps. La plupart de ces résultats seront énoncés sans preuve. Les preuves peuvent être consultées dans [15] et [16].

1.1 Calculs sur les échelles de temps

Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble fermé non vide de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, i.e. les nombres entiers relative, les entiers naturels sont des exemples des échelles de temps.

Définition 1.1.1. *Soit* $\mathbb{T}$ *Une échelle de temps. Pour* $t \in \mathbb{T}$*, on définit l'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par :*

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

et l'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par :*

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Par convention, on suppose : $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ *(i.e* $\sigma(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* t*)* $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ *(i.e* $\rho(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un minimum* t*).*

Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, nous définisons la fonction $f^{\sigma} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Les définitions ci-dessus pour l'opérateur de saut avant et l'opérateur de saut arrière prêtent à la classification des points dans une échelle de temps.

Définition 1.1.2. *Soit $t \in \mathbb{T}$. Si $\sigma(t) = t$ et $t \neq \sup \mathbb{T}$, alors t est dense à droite. Si $\sigma(t) > t$, alors t est dispersé à droite. De même, si $\rho(t) = t$ et $t \neq \inf \mathbb{T}$, alors t est dense à gauche, et si $\rho(t) < t$, alors t est dispersé à gauche. Si un point t dispersé à droite et dispersé à gauche, nous dirons que t est un point isolé.*

Définition 1.1.3. *La fonction de granulation $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ est définie par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

La fonction de granulation en arrière $\upsilon : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ est définie par :

$$v(t) = t - \rho(t).$$

Définition 1.1.4. *Si $\sup \mathbb{T} = m$ tel que m est dispersé à gauche, alors on définit $\mathbb{T}^k := \mathbb{T} \setminus \{m\}$; si nom $\mathbb{T}^k := \mathbb{T}$.*

Exemple 1.1.1. *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, nous avons $\sigma(t) = t = \rho(t)$ et $\mu(t) = 0$.*
Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, nous avons $\sigma(t) = t + 1$, $\rho(t) = t - 1$ et $\mu(t) = 1$.

Exemple 1.1.2. *Soit h un nombre réel positif fixé. On définit l'échelle de temps $h\mathbb{Z}$ par :*

$$h\mathbb{Z} := \{hz : z \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \cdots\}.$$

Ici,

$$\sigma(t) = t + h, \qquad \rho(t) = t - h, \qquad \text{et} \qquad \mu(t) = h.$$

Exemple 1.1.3. *Soit q un nombre réel fixé tel que $q > 1$. On définit l'échelle de temps $\overline{q^{\mathbb{Z}}}$ par :*

$$\overline{q^{\mathbb{Z}}} = \{q^z : z \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} = \left\{\cdots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, \cdots\right\} \cup \{0\}.$$

Ici,

$$\sigma(t) = qt, \qquad \rho(t) = \frac{t}{q}, \qquad et \qquad \mu(t) = (q-1)t.$$

1.2 Différentiabilité et dérivées partielles

1.2.1 Différentiabilité

Maintenant nous considérons une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et on définit la delta dérivée de la façon suivante.

Définition 1.2.1. *Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$. On dira que f est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t où*

$$\left| f^{\sigma}(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|, \qquad \textit{pour tout } s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^{\Delta}(t)$ la Δ-différentiable de f en t. Si f est Δ-différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$ alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la Δ-différentiable de f sur $\mathbb{T}^k$.

Rappelons quelques propriétés de la delta dérivées qui sont utilisées dans ce travail.

Théorème 1.2.1. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.*
2. *Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est Δ-différentiable en t et*
$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$
3. *Si t est dense à droite, alors f est Δ-différentiable en t si et seulement si,*
$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et est finie. Dans ce cas,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4. Si f est Δ-différentiable en t, alors

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Théorème 1.2.2. *Soient $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ des fonctions Δ-différentiables et soit $t \in \mathbb{T}^k$. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

(i) La somme $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) Pour α constante, $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) Le produit $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t) g(t) + f^{\sigma}(t) g^{\Delta}(t) \\ &= f(t) g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t) g^{\sigma}(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

(iv) Si $g(t) g^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est Δ-différentiable en t et

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t) g(t) - f(t) g^{\Delta}(t)}{g^{\sigma}(t) g(t)}. \tag{1.2}$$

Exemple 1.2.1.

1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{R}$ est un point dense à droite,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^{'}(t).$$

2. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{Z}$ est un point isolé,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

3. Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, alors pour tout $t \in \mathbb{T}^k = h\mathbb{Z}$ est un point isolé,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \Delta_h f(t).$$

Enfin, nous présentons la propriété de la composée $(f \circ g)^{\Delta}$, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Elle a été démontrée par Christian Pötzsche en 1988.

Théorème 1.2.3. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$différentiable. Alors $f \circ g$ est $\Delta-$différentiable et on a la formule suivante :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t). \tag{1.3}$$

1.2.2 Dérivées partielles

On introduit la Δ-dérivée partielle pour les fonctions de plusieurs variables sur les échelles de temps.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soient $(\mathbb{T}_i)_{i \in [1,n] \cap \mathbb{Z}}$ des échelles de temps, on note

1. $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \times \cdots \times \mathbb{T}_n = \{t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) : t_i \in \mathbb{T}_i, \quad \text{pour tout } i \in [1,n] \cap \mathbb{Z}\}$,
2. $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}_1^k \times \mathbb{T}_2^k \times \cdots \times \mathbb{T}_n^k$,
3. $\sigma_i(t_i) = \inf\{s \in \mathbb{T}_i : s > t_i\}$, pour tout $i \in [1,n] \cap \mathbb{Z}$,
4. $\rho_i(t_i) = \sup\{s \in \mathbb{T}_i : s < t_i\}$, pour tout $i \in [1,n] \cap \mathbb{Z}$,
5. $f^{\sigma_i}(t) = f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, \sigma_i(t_i), \cdots, t_n)$, pour tout $i \in [1,n] \cap \mathbb{Z}$,
6. $f^{s_i}(t) = f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, s_i, \cdots, t_n)$, pour tout $i \in [1,n] \cap \mathbb{Z}$.

Définition 1.2.2. *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La $\Delta-$dérivée partielle de f par rapport à $t_i \in \mathbb{T}_i^k$ est définie par :*

$$\frac{\partial f\left(t_1, \ldots, t_n\right)}{\Delta_i t_i} = \lim_{\substack{s_i \longrightarrow t_i \\ \sigma_i(t_i) \neq s_i}} \frac{f^{\sigma_i}\left(t\right) - f^{s_i}\left(t\right)}{\sigma_i\left(t_i\right) - s_i},$$

si elle existe et est finie.
On notera $\frac{\partial f\left(t_1, \ldots, t_n\right)}{\Delta_i t_i}$ par l'un des symboles suivants :

$$\frac{\partial f\left(t\right)}{\Delta_i t_i}, \quad \frac{\partial f}{\Delta_i t_i}\left(t\right), \quad f_{t_i}^{\Delta_i}\left(t\right), \quad f^{\Delta_i}\left(t\right).$$

Définition 1.2.3. *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f\left(t\right)}{\Delta_i t_i}$ existent pour tout $i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$, on peut aussi considérer la delta dérivée partielle du second ordre*

$$\frac{\partial^2 f\left(t\right)}{\Delta_i t_i \Delta_j t_j} = f_{t_i t_j}^{\Delta_i \Delta_j}\left(t\right) = \left(f_{t_i}^{\Delta_i}\right)_{t_j}^{\Delta_j}\left(t\right) \qquad \text{pour tout } i, j \in [1, n] \cap \mathbb{Z}.$$

Les delta dérivés partielles d'ordre supérieur sont définies de manière similaire.

Exemple 1.2.2. *Soit f la fonction définié sur $\mathbb{T} = \mathbb{R} \times h\mathbb{Z}$, avec $h > 0$ par :*

$$f\left(t, s\right) = t^4 s^2, \qquad \text{pour tout } \left(t, s\right) \in \mathbb{T}.$$

Alors

$$\frac{\partial f\left(t, s\right)}{\Delta_1 t} = 4t^3 s^2,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f\left(t, s\right)}{\Delta_2 s} &= \frac{f\left(t, s + h\right) - f\left(t, s\right)}{h} \\ &= t^4 \frac{\left(s + h\right)^2 - s^2}{h} \\ &= t^4\left(2s + h\right). \end{aligned}$$

1.3 Intégration

Naturallement, les calculs sur les échelles de temps ne sera pas complet sans l'introduction de la Δ-intégrabilité. Nous définissons alors les fonctions qui sont intégrables et pour cela nous présentons les concepts suivants :

Définition 1.3.1. *Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régulière si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Définition 1.3.2. *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$. On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par :*

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont $\Delta-$différentiables et ses $\Delta-$dérivées sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ sera noté par :

$$\mathcal{C}^1_{rd} = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.3.1. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est continue, alors f est rd-continue.*
2. *Si f est rd-continue, alors f est régulière.*
3. *L'opérateur de saut avant σ est rd-continue.*
4. *Si f est rd-continue ou régulière, alors f^σ c'est ainsi.*
5. *Soit f continue. Si $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est rd-continue ou réguliére, alors $f \circ g$ est également rd-continue ou régulière respectivement.*

Définition 1.3.3. *Une fonction continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est pré-différentiable avec domaine différentiabilité D, tel que $D \subset \mathbb{T}^k$, $\mathbb{T}^k \backslash D$ est compatible et ne contient les point dispersé à droite dans $\mathbb{T}$ et f est $\Delta-$différentiable pour tout $t \in D$.*

Le Théorème suivant garantit l'existence de pré-antidérivée.

Théorème 1.3.2. *Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ régulière. Alors il existe une fonction F pré-différentiable avec de domaine D telle que*

$$F^\Delta(t) = f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in D.$$

Définition 1.3.4. *Soit une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *régulière. Toute fonction* F *donnée dans le Théorème 1.3.2 s'appelle pré-antidérivée de* f.

Définition 1.3.5. *Une fonction* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est appelée antidérivée de* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *si*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.3.6. *Soit une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *régulière. Nous définissons l'intégrale de Cauchy par :*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = F(b) - F(a), \qquad \textit{pour tout } a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.3.7. *Supposons que* $\sup \mathbb{T} = \infty$. *L'intégrale impropre est définie par :*

$$\int_a^{\infty} f(t)\,\Delta t = \lim_{b \longrightarrow \infty} \int_a^b f(t)\,\Delta t.$$

Le théorème suivant fournit les propriétés pour les fonctions delta intégrales.

Théorème 1.3.3. *Si* $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *alors*

1. $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t;$
2. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t))\,\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t;$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t;$
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t;$
5. $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$
6. *Si* $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a, b) \cap \mathbb{T}$, *alors*

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t;$$

7. *Si* $f(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [a,b] \cap \mathbb{T}$*, alors* $\int\limits_a^b f(t)\Delta t \geq 0$.

Théorème 1.3.4. *Si* $a, b \in \mathbb{T}$ *et* $f, g \in \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$*, alors*

$$\int\limits_a^b f^\sigma(t) g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int\limits_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t.$$

Théorème 1.3.5. *Soient* $a, b \in \mathbb{T}$ *et* $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

1. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$*, alors*

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \int\limits_a^b f(t)dt,$$

où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.

2. *Si* $[a,b] \cap \mathbb{T}$ *ne contient que des points isolés, alors*

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t \in [a,b)} \mu(t) f(t).$$

3. *Soient* $a, b \in h\mathbb{Z}$ *tels que* $b > a$*, et* $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$*, alors*

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{k=\frac{b}{h}-1} h f(kh).$$

Exemple 1.3.1. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *et si* $t \in \mathbb{Z}$ *tel que* $t > 1$ *et* $a \neq 1$*, alors*

$$\int\limits_0^t a^s \Delta s = \sum_{k=0}^{k=t-1} a^k = \frac{a^t - 1}{a - 1}.$$

Exemple 1.3.2. *Si* $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}}$*, avec* $q > 1$*, alors*

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^\infty \frac{1}{t^2}\Delta t &= \lim_{b \longrightarrow \infty} \int\limits_1^b \frac{1}{t^2}\Delta t \\
&= \lim_{b \longrightarrow \infty} \sum_{t \in [1;b)} \frac{\mu(t)}{t^2} \\
&= (q-1) \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=n-1} q^{-k} = q.
\end{aligned}$$

1.4 Fonctions exponentielle

Dans cette section, nous définissons une fonction importante sur une échelle de temps qui généralise la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e_p(., t_0)$.

Définition 1.4.1. *Soit $h > 0$, on définit les nombres complexes de Hilger par :*

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h} \right\}.$$

et l'axe imaginaire de Hilger

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < Imz \leq \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Pour $h = 0$, on pose par définition $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Définition 1.4.2. *On dit que la fonction $p : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est régressive si*

$$1 + \mu(t) p(t) \neq 0, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

On note l'espace des fonctions rd-continues régressives par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

On munit cet ensemble de l'addition définie pour tous $p, q \in \mathcal{R}$ par :

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t) p(t) q(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Le groupe $(\mathcal{R}, \oplus)$ est dit groupe régressif. Le conjugué de chaque élément p du groupe $\mathcal{R}$ noté par $\ominus p$ est donnée par :

$$(\ominus p)(t) = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t) p(t)}, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.4.3. *Pour $h \geq 0$, la transformation cylindrique $\xi_h : \mathbb{C}_h \longrightarrow \mathbb{Z}_h$ est définie par :*

$$\xi_h(z) := \begin{cases} \frac{1}{h} \ln(1 + hz) & si\ h \neq 0, \\ z & si\ h = 0. \end{cases}$$

L'inverse de transformation cylindrique $\xi_h^{-1} : \mathbb{Z}_h \longrightarrow \mathbb{C}_h$ est définie par :

$$\xi_h^{-1}(z) := \begin{cases} \frac{\exp(hz) - 1}{h} & si\ h \neq 0, \\ z & si\ h = 0. \end{cases}$$

Définition 1.4.4. *Soit $p \in \mathcal{R}$, la fonction exponentielle généralisée $e_p : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par la formule :*

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\left(p\left(\tau\right)\right)\Delta\tau\right), \qquad \textit{pour tout } t,s \in \mathbb{T}.$$

Théorème 1.4.1. *Soient $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{T}$. Alors la solution unique du problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} y^{\Delta}\left(t\right) = p\left(t\right) y\left(t\right); \\ y\left(t_0\right) = y_0. \end{cases}$$

est donné par :

$$y\left(t\right) = y_0 e_{p(t)}\left(t,t_0\right).$$

Proposition 1.4.1. *Soient $p,q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, $t,s,\tau \in \mathbb{T}^k$, la fonction exponentielle généralisée de l'échelle de temps vérifit les propriétés suivantes :*

1. *Propriété de semi-groupe $e_p\left(t,s\right) = e_p\left(t,\tau\right) e_p\left(\tau,s\right)$.*
2. *$e_p\left(\sigma\left(t\right),s\right) = \left(1+\mu\left(t\right)p\left(t\right)\right) e_p\left(t,s\right)$.*
3. *$e_p\left(s,t\right) = \dfrac{1}{e_p\left(t,s\right)} = e_{\ominus p}\left(t,s\right)$.*
4. *$e_p\left(t,s\right) e_q\left(t,s\right) = e_{p\oplus q}\left(t,s\right)$.*
5. *$\dfrac{e_p\left(t,s\right)}{e_q\left(t,s\right)} = e_{p\ominus q}\left(t,s\right)$.*
6. *La fonction $e_p\left(.,s\right)$ est Δ-différentiable en t et $\left(e_p\left(.,s\right)\right)^{\Delta}\left(t\right) = p(t)e_p\left(t,s\right)$.*

Exemple 1.4.1. *Soit $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ pour $h > 0$. Soit $\alpha \in \mathcal{R}$ une constante, i.e.*

$$\alpha \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{1}{h}\right\}.$$

Tous les point dans l'échelle de temps $h\mathbb{Z}$ sont dispersés à droite et nous avons

$$\begin{aligned} e_\alpha(t,0) &= \exp\left(\frac{1}{h}\int_0^t \ln\left(1+\alpha h\right)\Delta\tau\right) \\ &= \exp\frac{1}{h}\ln\left(1+\alpha h\right)t \\ &= \left(1+\alpha h\right)^{\frac{t}{h}}. \end{aligned}$$

1.5 Polynômes généralisés

Nous commençons par donner la définition des polynômes généralisés sur les échelles de temps.

Définition 1.5.1. *[15] Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions $h_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :*

$$h_k(t,s) := \begin{cases} 1, & si\ k = 0 \\ \int_s^t h_{k-1}(\tau, s)\,\Delta\tau, & si\ k \geq 1 \end{cases}, \ pour\ tout\ t, s \in \mathbb{T}.$$

Exemple 1.5.1. *Si en prend $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on a*

$$h_k(t,s) = \frac{(t-s)^k}{k!}, \qquad pour\ tout\ t, s \in \mathbb{R} \quad et \quad pour\ k \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1.5.1. *[15] Pour tout $t, s \in \mathbb{T}$ et $k \in \mathbb{N}$, les fonctions h_k satisfont*

$$h_k^{\Delta_t}(t,s) := \begin{cases} 0, & si\ k = 0 \\ h_{k-1}(t,s), & si\ k \geq 1 \end{cases}, \ pour\ tout\ t, s \in \mathbb{T}^k.$$

Lemme 1.5.1. *[36] Si $n \in \mathbb{N}$, t_1, $t \in \mathbb{T}$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$,alors*

$$\int_{t_1}^{t} \int_{t_1}^{s_{n+1}} \cdots \int_{t_1}^{s_2} f(s_1)\,\Delta s_1 \Delta s_2 \cdots \Delta s_{n+1} = \int_{t_1}^{t} h_n(t, \sigma(s))\, f(s)\,\Delta s.$$

1.6 Définition de l'oscillation

Soit une échelle de temps $\mathbb{T}$ et soit $a, b \in \mathbb{T}$, tel que $a < b$. On note

$$[a, +\infty)_{\mathbb{T}} := [a, +\infty) \cap \mathbb{T},$$
$$[a, b)_{\mathbb{T}} := [a, b) \cap \mathbb{T},$$
$$[a, b]_{\mathbb{T}} := [a, b] \cap \mathbb{T}.$$

Nous définissons l'oscillation des solutions et nous donnons un exemple simple.

Définition 1.6.1. *On dit qu'une fonction $f : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ est éventuellement positive, si il existe $t_0 \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que*

$$f(t) > 0, \qquad pour\ tout\ t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Définition 1.6.2. *On dit qu'une fonction* $f : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *est éventuellement négative, si il existe* $t_0 \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *tel que*

$$f(t) < 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Définition 1.6.3. *On dit qu'une fonction* $f : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *est oscillante sur* $[a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *si elle est ni éventuellement positive ni éventuellement négative. Elle est dite non oscillante dans le cas contraire.*

Exemple 1.6.1. *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$x^{(2)}(t) + x(t) = 0, \qquad \textit{pour } t \in [0, +\infty)_{\mathbb{R}}.$$

Elle a une solution $x(t) = \sin(t)$ *oscillante.*

Nous considérons quelques lemmes qui seront utilisés dans cette thèse.

Lemme 1.6.1. *[26] Soient* A, λ *et* B *des constantes strictement positives. Nous avons alors l'inégalité suivante*

$$Bx - Ax^{1+\frac{1}{\lambda}} \leq \frac{\lambda^{\lambda} B^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+1} A^{\lambda}}, \qquad \textit{pour } x \geq 0. \tag{1.4}$$

Lemme 1.6.2. *[36] Si* $n \in \mathbb{N}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ *et* $f \in \mathcal{C}_{rd}^{n}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *alors les propriétés suivants sont vraies.*

1. $\liminf_{t\to\infty} f^{\Delta^n}(t) > 0 \implies \lim_{t\to\infty} f^{\Delta^k}(t) = \infty$ *pour tout* $k \in [0, n)_{\mathbb{Z}}$.
2. $\limsup_{t\to\infty} f^{\Delta^n}(t) < 0 \implies \lim_{t\to\infty} f^{\Delta^k}(t) = -\infty$ *pour tout* $k \in [0, n)_{\mathbb{Z}}$.

Nous donnons le lemme de Kiguradze's.

Lemme 1.6.3. *[36] Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $f \in \mathcal{C}_{rd}^{n}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *et* $\sup \mathbb{T} = +\infty$. *Supposons que* f *est positive ou négative et* f^{Δ^n} *n'est pas identiquement nulle et est négative ou positive sur* $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, *pour* $t_0 \in \mathbb{T}$. *Alors il existe* $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *et* $m \in [0, n)_{\mathbb{Z}}$ *tels que* $(-1)^{n-m} f(t) f^{\Delta^n}(t) \geq 0$ *est vérifié pour tout* $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, *avec*

(i) $f(t) f^{\Delta^j}(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ *et pour* $j \in [0, m)_{\mathbb{Z}}$,

(ii) $(-1)^{m+j} f(t) f^{\Delta^j}(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ *et pour* $j \in [m, n)_{\mathbb{Z}}$.

Lemme 1.6.4. *[36] Soient* $f \in \mathcal{C}^1_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+\right)$ *et* $\lambda > 0$. *Alors*

$$f^{\Delta} (f^{\sigma})^{-\lambda} \leq \frac{\left(f^{1-\lambda}\right)^{\Delta}}{1-\lambda} \leq f^{\Delta} f^{-\lambda}, \quad \textit{sur } [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{1.5}$$

Chapitre 2

Comportement asymptotique de la solution d'une équation différentielle non linéaire du troisième ordre sur les échelles de temps

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le comportement asymptotique de toute solution de l'équation différentielle non-linéaires d'ordre trois.
On supposera que le probléme (2.1) admet au moins une solution dans l'espace $\mathcal{C}_{rd}^{3}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$.

$$\left(q\left(\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right)^{\beta}\right)^{\Delta}(t)+f(t,x(t))=0, \qquad t\in[t_0,+\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{2.1}$$

dans l'échelle de temps $\mathbb{T}$, avec β,γ sont de la forme $\beta=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$, $\gamma=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ où β_1, β_2, γ_1, γ_2 impairs positifs, $\beta\gamma\geq 1$.

$p, q : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ sont des fonctions rd-continue et où f satisfait les conditions suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue,

$(\mathcal{H}_2)$ $f(t, -x) = -f(t, x)$ pour tout $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, $x \in \mathbb{R}$,

$(\mathcal{H}_3)$ Il existe une fonction $r : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ positive et rd-continue telle que

$$\frac{f(t, x)}{x^{\gamma\beta}} \geq r(t), \qquad \text{pour tout } t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \ x \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{2.2}$$

2.2 Cas où l'équation (1) admet une solution non oscillante

Dans cette section, nous supposons que l'équation (2.1) admet une solution éventuellement positive (le raisonnement reste valable si elle est éventuellement négative).

Lemme 2.2.1. *Soit x une solution de l'équation* (2.1) *et*

$$\int_{t_0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{q(s)} \right\}^{\frac{1}{\beta}} \Delta s = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{p(s)} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s = +\infty. \tag{2.3}$$

Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$\left[p \left(x^{\Delta} \right)^{\gamma} \right]^{\Delta} (t) > 0, \qquad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{2.4}$$

Démonstration.
Soit x une solution éventuellement positive de l'équation (2.1).
Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.
D'après (2.2) on a

$$\left\{ q \left[\left(p \left(x^{\Delta} \right)^{\gamma} \right)^{\Delta} \right]^{\beta} \right\}^{\Delta} (t) = -f(t, x(t)) \leq -r(t)\, x^{\beta\gamma}(t) \leq 0, \qquad t \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Montrons que $\left[p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right]^{\Delta}(t) > 0$, pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.

Supposons le contraire c'est-à-dire, il existe $t_2 \in [t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$\left[p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right]^{\Delta}(t_2) < 0.$$

Puisque la fonction $q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}$ est décroissante sur $[t_1, +\infty)_{\mathbb{T}}$, alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}(t) \leq \frac{-M}{q(t)}, \qquad \text{pour tout } t \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{2.5}$$

Par intégration de (2.5) entre t_2 à t, on trouve

$$p(t)(x^{\Delta})^{\gamma}(t) \leq p(t_2)(x^{\Delta})^{\gamma}(t_2) - \int_{t_2}^{t} \left\{\frac{M}{q(s)}\right\}^{\frac{1}{\beta}} \Delta s.$$

D'après (2.3), on déduit que $p(t)(x^{\Delta})^{\gamma}(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers$+\infty$.

Donc il existe $t_3 \in [t_2, +\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$p(t)(x^{\Delta})^{\gamma}(t) \leq -1, \qquad \text{pour tout } t \in [t_3, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Par intégration de cette formule entre t_3 à t, on trouve

$$x(t) \leq x(t_3) - \int_{t_3}^{t} \left\{\frac{1}{p(s)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s, \qquad \text{pour tout } t \in [t_3, +\infty)_{\mathbb{T}}.$$

D'après (2.3) $x(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

D'ou la contradiction.

Alors $\left[p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right]^{\Delta}(t) > 0$, pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$. □

Remarque 2.2.1. *Soit x une solution de l'équation (2.1) et (2.3) vérifiée, alors il y a seulement deux cas possibles c'est-à-dire, pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, avec $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ suffisamment grand :*

1. $x(t) > 0$, $x^{\Delta}(t) > 0$ *et* $\left[p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right]^{\Delta}(t) > 0$,
2. $x(t) > 0$, $x^{\Delta}(t) < 0$ *et* $\left[p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right]^{\Delta}(t) > 0$.

Lemme 2.2.2. *Soit x une solution de l'équation* (2.1) *et qui satisfait le cas* (1) *de la remarque 2.2.1, alors*

$$\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\beta\gamma} \geq \left(\phi\left(t,t_1\right)\right)^{\beta} q\left(t\right) \left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\left(t\right), \qquad \textit{pour tout } t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{2.6}$$

avec

$$\phi\left(t,t_1\right) := \frac{1}{p\left(t\right)} \int_{t_1}^{t} \left\{\frac{1}{q(s)}\right\}^{\frac{1}{\beta}} \Delta s. \tag{2.7}$$

Démonstration.

Si $x^{\Delta}(t) > 0$, pour tout $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, de l'équation (2.1) on déduit que la fonction $q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}$ est strictement décroissante sur $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} p\left(t\right)\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\left(t\right) &= p\left(t\right)\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\left(t_1\right) + \int_{t_1}^{t} (p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma})^{\Delta}(s)\Delta s \\ &\geq \int_{t_1}^{t} \left(\left\{\frac{1}{q(s)}\right\}^{\frac{1}{\beta}} \left\{q\left(s\right)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\left(s\right)\right\}^{\frac{1}{\beta}}\right) \Delta s \\ &\geq \left\{q\left(t\right)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\left(t\right)\right\}^{\frac{1}{\beta}}\left(t\right)\phi\left(t,t_1\right)p\left(t\right). \end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. □

Lemme 2.2.3. *Soit x une solution de l'équation* (2.1) *et qui satisfait le cas* (2) *de la remarque 2.2.1, telle que*

$$\int_{t_1}^{\infty} r(t)\Delta t = \infty. \tag{2.8}$$

Alors

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} x(t) = 0. \tag{2.9}$$

Démonstration.

Satisfaisant le cas (2) de la remarque 2.2.1.

Alors $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} x(t)=b\geq 0$, supposons que $b>0$, de (2.1) et (2.2) nous déduisons :

$$\begin{aligned}\left\{q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\right\}^{\Delta}(t) &= -f\left(t,x(t)\right)\\ &\leq -r(t)x^{\gamma\beta}(t)\\ &\leq -r(t)b^{\gamma\beta}.\end{aligned}$$

Par intégration de l'inégalité ci-dessus de t_1 à t, nous obtenons

$$q\left(t\right)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}(t)\leq q\left(t_1\right)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}(t_1)-b^{\gamma\beta}\int\limits_{t_1}^{t} r(s)\Delta s,$$

ce qui implique que

$$\lim_{t\to+\infty} q\left(t\right)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}(t)=-\infty.$$

D'ou la contradiction. $\square$

2.3 Comportement asymptotique pour l'équation (1)

Maintenant, nous établissons quelques conditions suffisantes pour que toute solution x de (2.1) soit oscillante sur $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ou convergente.
Pour la simplification, on note

$$d_{+}\left(t\right):=\max\left\{0,d\left(t\right)\right\},$$

et

$$\xi_{\alpha}:=\frac{\alpha^{\alpha}}{\left(\alpha+1\right)^{\alpha+1}},\qquad \text{pour tout } \alpha>0.$$

Théorème 2.3.1. *Supposons que* (2.3) *est vérifiée. S'il existe une fonction* $\delta:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^{+}$ *telle que* $\delta\in\mathcal{C}^{1}_{rd}\left(\mathbb{T},\mathbb{R}\right)$ *et pour tout* $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *grand,* $t_2\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ *et si*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{m}}\int\limits_{t_2}^{t}\left(t-s\right)^{m}\left\{r(s)\delta(s)-\xi_{\beta\gamma}\frac{\left(\delta_{+}^{\Delta}(s)\right)^{\beta\gamma+1}}{\left(\delta(s)\right)^{\beta\gamma}\left(\phi\left(s,t_1\right)\right)^{\beta}}\right\}\Delta s=\infty,\tag{2.10}$$

avec $m \geq 0$ et $\phi\left(.,t_1\right)$ est définit dans le lemme 2.2.2.
Alors toute solution de (2.1) *est oscillante sur* $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ *ou converge.*

Démonstration.
Supposons le contraire, que x est une solution non oscillante de (2.1). Supposons que x est une solution éventuellement positive de l'équation (2.1), la substitution $y=-x$ transforme l'équation (2.1) en une équation de la même forme. On a alors deux cas, si x^{Δ} éventuellement positive, alors il existe $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x^{\Delta}(t)>0$, pour tout $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.
Nous définissons la fonction w par :

$$w\left(t\right):=\delta(t)\frac{q\left(t\right)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\left(t\right)}{x^{\gamma\beta}(t)},\qquad t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}\,. \tag{2.11}$$

Alors $w\left(t\right)>0$ et de (1.1) et (1.2) nous obtenons

$$\begin{aligned}
w^{\Delta}\left(t\right) &= \frac{\delta\left(t\right)}{x^{\gamma\beta}\left(t\right)}\left\{q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\right\}^{\Delta}\left(t\right)+\left[\frac{\delta\left(t\right)}{x^{\gamma\beta}\left(t\right)}\right]^{\Delta}q^{\sigma}(t)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\left(\sigma\left(t\right)\right)\\
&= \frac{-\delta\left(t\right)}{x^{\gamma\beta}\left(t\right)}f\left(t,x(t)\right)+\left\{\frac{\delta^{\Delta}\left(t\right)x^{\gamma\beta}\left(t\right)-\delta\left(t\right)\left(x^{\gamma\beta}\left(t\right)\right)^{\Delta}}{x^{\beta\gamma}\left(t\right)x^{\beta\gamma}\left(\sigma(t)\right)}\right\}q^{\sigma}(t)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\left(\sigma\left(t\right)\right)\\
&\leq -r(t)\delta\left(t\right)+\frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)}w^{\sigma}\left(t\right)-q^{\sigma}(t)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\left(\sigma\left(t\right)\right)\frac{\delta(t)\left(x^{\beta\gamma}(t)\right)^{\Delta}}{x^{\beta\gamma}(t)x^{\beta\gamma}(\sigma(t))}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Par le théorème 1.2.3, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\left(x^{\beta\gamma}(t)\right)^{\Delta} &= \beta\gamma\int_0^1\left[hx^{\sigma}\left(t\right)+(1-h)x\left(t\right)\right]^{\beta\gamma-1}x^{\Delta}\left(t\right)dh\\
&\geq \beta\gamma\int_0^1\left[hx^{\sigma}\left(t\right)\right]^{\beta\gamma-1}x^{\Delta}\left(t\right)dh=x^{\beta\gamma-1}\left(\sigma(t)\right)x^{\Delta}(t). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

D'après (2.12) et (2.13) nous avons

$$\begin{aligned}
w^{\Delta}(t) &\leq -r(t)\delta(t) + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)} w^{\sigma}(t) - q^{\sigma}(t)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}(\sigma(t))\frac{\delta(t)\, x^{\Delta}(t)}{x^{\beta\gamma}(t)\, x(\sigma(t))} \\
&\leq -r(t)\delta(t) + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)} w^{\sigma}(t) - \\
&\quad q^{\sigma}(t)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}(\sigma(t))\frac{\delta(t)\left(\phi(t,t_1)\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{x^{\beta\gamma}(t)\, x(\sigma(t))}\left(q(t)\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}(t)\right)^{\frac{1}{\beta\gamma}}.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}$ est strictement décroissante sur $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, alors

$$\left\{q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\right\}^{\sigma}(t) \leq \left\{q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\right\}(t), \qquad \text{pour tout } t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Donc,

$$w^{\Delta}(t) \leq -r(t)\delta(t) + \frac{\delta_{+}^{\Delta}(t)}{\delta^{\sigma}(t)} w^{\sigma}(t) - \delta(t)\left\{\phi(t,t_1)\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\left\{\frac{w^{\sigma}(t)}{\delta^{\sigma}(t))}\right\}^{1+\frac{1}{\beta\gamma}}. \tag{2.14}$$

D'après le lemme 1.6.1, nous avons

$$w^{\Delta}(t) \leq -r(t)\delta(t) + \xi_{\beta\gamma}\frac{\left(\delta_{+}^{\Delta}(t)\right)^{\beta\gamma+1}}{\delta^{\beta\gamma}(t)\left(\phi(t,t_1)\right)^{\beta}}. \tag{2.15}$$

Nous déduisons que

$$(t-s)^{m} w^{\Delta}(t) \leq -\left\{r(t)\delta(t) - \xi_{\beta\gamma}\frac{\left(\delta_{+}^{\Delta}(t)\right)^{\beta\gamma+1}}{\delta^{\beta\gamma}(t)\left(\phi(t,t_1)\right)^{\beta}}\right\}(t-s)^{m}. \tag{2.16}$$

D'autre part, pour $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ fixé, on définit la fonction φ_t par :

$$\varphi_t(s) = (t-s)^{m}, \qquad \text{pour tout } s \in [t_1,t)_{\mathbb{T}}.$$

Alors φ_t est Δ-différentiable et φ_t^{Δ} est donnée par :

$$\varphi_t^{\Delta}(s) = \begin{cases} -m(t-s)^{m-1}, & \text{si } \sigma(s) = s, \\ \dfrac{1}{\mu(s)}\left((t-\sigma(s))^{m} - (t-s)^{m}\right), & \text{si } \sigma(s) \neq s. \end{cases}$$

Avec $m > 0$. On déduit que

$$\varphi_t^{\Delta}(s) \leq 0, \qquad \text{pour } s \in [t_1,t)_{\mathbb{T}}.$$

Par intégration de (2.16) entre t_2 à t, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{t_2}^{t} (t-s)^m \left\{ r(s)\delta(s) - \xi_{\beta\gamma} \frac{\left(\delta_+^{\Delta}(s)\right)^{\beta\gamma+1}}{\delta^{\beta\gamma}(s)\left(\phi(s,t_1)\right)^{\beta}} \right\} \Delta s &\leq -\int_{t_2}^{t} (t-s)^m w^{\Delta}(s)\,\Delta s \\
&\leq -\left[(t-s)^m w(s)\right]_{t_2}^{t} + \int_{t_2}^{t} \varphi_t^{\Delta}(s)\, w^{\sigma}(s)\,\Delta s \\
&\leq (t-t_2)^m w(t_2).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{t^m} \int_{t_2}^{t} (t-s)^m \left\{ r(s)\delta(s) - \xi_{\beta\gamma} \frac{\left(\delta_+^{\Delta}(s)\right)^{\beta\gamma+1}}{\left(\delta(s)\right)^{\beta\gamma}\left(\phi(s,t_1)\right)^{\beta}} \right\} \Delta s \leq \left(\frac{t-t_2}{t}\right)^m w(t_2).$$

d'où la contradiction de (2.10) pour t grand.

Si x^{Δ} est éventuellement négative, alors x est converge vers une limite finie car la fonction x est décroissante et minorée par 0. $\square$

Exemple 2.3.1. *On considère l'équation dynamique suivante sur l'échelle de temps* $\overline{2^{\mathbb{Z}}}$.

$$\left\{ \left[\left(t (x^{\Delta})^5 \right)^{\Delta} \right]^{\frac{1}{3}} \right\}^{\Delta} (t) + t^{-2} x(t) = 0, \qquad \text{pour tout } t \in [1, +\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}. \tag{2.17}$$

Ici,

$$q(t) = 1, \quad p(t) = t, \quad \gamma = 5, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad f(t,x) = t^{-2}x \quad \text{et} \quad r(t) = t^{-2}.$$

Il est clair que (2.3) *est vérifiée.*

$$\phi(t,t_1) = \frac{t-t_1}{t}, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, +\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}.$$

Soit $\delta(t) = t$, *de* (2.10) *nous avons*

$$\int_{t_2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s} - \eta \frac{s^{\frac{1}{3}}}{s^{\frac{5}{3}} (s-t_1)^{\frac{1}{3}}} \right\} \Delta s = \sum_{n=n_2}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{\eta}{2^{\frac{n}{3}} \left(2^n - 2^{n_1}\right)^{\frac{1}{3}}} \right\} = +\infty.$$

Avec $\eta \in (0,1)$.

Alors toute solution de (2.17) *est oscillante sur* $\overline{2^{\mathbb{Z}}}$ *ou converge .*

Corollaire 2.3.1. *Supposons que* (2.3) *est vérifiée pour tout* $t_2 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *grand et si*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t^m} \int_{t_2}^{t} (t-s)^m \, r(s) \Delta s = \infty, \tag{2.18}$$

avec $m \geq 0$.

Alors toute solution de (2.1) *est oscillante sur* $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ *ou converge.*

Exemple 2.3.2. *On considère l'équation dynamique suivante sur l'échelle de temps continue* $\mathbb{T} = [1, \infty)$

$$\left((x'(t))^3 \right)'' + t x^3(t) = 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [1, \infty). \tag{2.19}$$

Ici

$$p(t) = q(t) = 1, \quad \gamma = 3, \quad \beta = 1, \quad f(t,x) = t x^3 \quad \textit{et} \quad r(t) = t.$$

Il est clair que (2.3) *est vérifiée.*

Alors, le corollaire 2.3.1 donne

$$\int_1^{\infty} r(t) \, \Delta t = \int_1^{\infty} t \Delta t = \infty.$$

Ce qui signifie que toute solution de (2.19) *est oscillante sur* $\mathbb{T}$ *ou converge.*

Soit $\mathbb{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ définit par :

$$\mathbb{D} := \{(t,s) \in \mathbb{T}^2 : t > s \geq t_1\}.$$

Soit $H : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes

a) H est continue sur $\mathbb{D}$,

b) $\exists t_1 \in \mathbb{T}$, $H(t,t) = 0$, pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$,

c) $H(t,s) > 0$, pour tout $(t,s) \in \mathbb{D}$,

d) H est $\Delta-$dérivable par rapport à s.

Remarque 2.3.1. *Nous pouvons prendre par exemple,*

$$H(t,s) = (t-s)^m, \qquad \textit{pour tout } (t,s) \in \mathbb{D},$$

avec $m > 0$.

Théorème 2.3.2. *Supposons que* (2.3) *est vérifiée. S'il existe une fonction* $\delta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ *telle que* $\delta \in \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *et* $H : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, *pour tout* $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *grand,* $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, *si*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_2)} \int_{t_2}^{t} \left\{ r(s)\delta(s)H(t, s) - \xi_{\beta\gamma} \frac{(v_+(s, t)\delta^\sigma(s))^{\beta\gamma+1}}{(\phi(s, t_1))^\beta (\delta(s)H(t, s))^{\beta\gamma}} \right\} \Delta s = \infty, \tag{2.20}$$

et

$$v(s, t) = \frac{\delta_+^\Delta(s)}{\delta^\sigma(s)} H(t, s) + H^{\Delta s}(t, s), \qquad \textit{pour tout } (t, s) \in \mathbb{D},$$

où $\phi(., t_1)$ *est définit dans le lemme 2.2.2.*

Alors toute solution de (2.1) *est oscillante sur* $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ *ou converge.*

Démonstration.

Supposons le contraire, que x une solution non oscillante de (2.1). Nous pouvons supposer que x est une solution éventuellement positive de l'équation (2.1) ; la substitution $y = -x$ transforme l'équation (2.1) en une équation de la même forme.

On a deux cas :

Si x^Δ est éventuellement positive, alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x^\Delta(t) > 0$, pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.

Par l'inégalité (2.14), on obtient

$$r(s)\delta(s)H(t, s) \leq -w^\Delta(s)H(t, s) + \frac{\delta_+^\Delta(s)}{\delta^\sigma(s)} w^\sigma(s)H(t, s) - \delta(s)\{\phi(s, t_1)\}^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{w^\sigma(s)}{\delta^\sigma(s)} \right\}^{1+\frac{1}{\beta\gamma}} H(t, s). \tag{2.21}$$

Par intégration de la formule (2.21) entre t_2 à t, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{t} r(s)\delta(s)H(t, s)\Delta s \quad &\leq \quad w(t_2)H(t, t_2) \\ &+ \int_{t_2}^{t} \left\{ v(s, t)w^\sigma(s) - \delta(s)\{\phi(s, t_1)\}^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{w^\sigma(s)}{\delta^\sigma(s)} \right\}^{1+\frac{1}{\beta\gamma}} H(t, s) \right\} \Delta s. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Par l'inégalité (1.4), on a

$$\frac{1}{H(t,t_2)}\int\limits_{t_2}^{t}\left\{r(s)\delta\left(s\right)H(t,s)-\xi_{\beta\gamma}\frac{\left(v_+(s,t)\delta^{\sigma}(s)\right)^{\beta\gamma+1}}{\left(\phi\left(s,t_1\right)\right)^{\beta}\left(\delta(s)H(t,s)\right)^{\beta\gamma}}\right\}\Delta s\leq w(t_2),$$

lorsque t est assez grand , on a la contradiction par (2.20). $\square$

Théorème 2.3.3. *Supposons que* (2.3) *est vérifiée. Soit* δ *définie dans le théorème 2.3.1 telle que* (2.10) *soit vérifiée. si*

$$\int\limits_{t_1}^{\infty}\left(\frac{\varphi(s)}{p(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta s=\infty,\qquad \psi(\tau):=\int\limits_{\tau}^{\infty}r(s)\Delta s<\infty, \tag{2.23}$$

et

$$\varphi\left(s\right):=\int\limits_{s}^{\infty}\left(\frac{\psi(\tau)}{q(\tau)}\right)^{\frac{1}{\beta}}\Delta\tau<\infty. \tag{2.24}$$

Alors toute solution de (2.1) *est oscillante sur* $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ *ou converge vers zéro.*

Démonstration.

De la preuve du théorème 2.3.1, chaque solution de l'équation (2.1) est oscillante sur $[t_1,\infty)$ ou $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}x\left(t\right)$ existe. D'autre part, supposons que $x^{\Delta}(t)<0$, pour $t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$. Alors $x(t)$ est décroissante et $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}x(t)=b\geq 0$ existe.

Supposons que $b>0$.

Par intégration de la formule (2.2) entre t à ∞, on obtient

$$\begin{aligned}\int\limits_{t}^{\infty}r(s)x^{\beta\gamma}(s)\Delta s &\leq \int\limits_{t}^{\infty}f\left(s,x(s)\right)\Delta s\\ &= -\lim_{s\longrightarrow\infty}\left\{q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\right\}(s)+\left\{q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\right\}(t)\\ &\leq \left\{q\left[\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\right]^{\beta}\right\}(t)\,.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Par (2.25) et comme $x(t)>b$, on a

$$b^{\gamma}\left(\frac{\psi(t)}{q(t)}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leq\left[p\left(x^{\Delta}\right)^{\gamma}\right]^{\Delta}(t). \tag{2.26}$$

Par intégration de la dernière inégalité entre s à t, avec t tend vers $+\infty$, on trouve

$$b\left(\frac{\varphi(t)}{p(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq -x^{\Delta}(t), \qquad \text{pour } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{2.27}$$

Par intégration l'inégalité (2.27) entre t_1 à t, nous avons

$$b\int_{t_1}^{t}\left(\frac{\varphi(s)}{p(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s \leq x(t_1), \qquad \text{pour } t \text{ assez grand.}$$

Cet résultat donne la contradiction de (2.23). □

Remarque 2.3.2. *Si on prend* $\mathbb{T} = \overline{2^{\mathbb{Z}}}$, *soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha > 1$, *on a*

$$\int_{\tau}^{\infty} s^{-\alpha}\Delta s = \frac{\tau^{-\alpha+1}}{1-2^{-\alpha+1}}, \qquad \textit{pour tout } \tau \in \overline{2^{\mathbb{Z}}}. \tag{2.28}$$

Si $\alpha \leq 1$, *on a*

$$\int_{\tau}^{\infty} s^{-\alpha}\Delta s = +\infty, \qquad \textit{pour tout } \tau \in \overline{2^{\mathbb{Z}}}. \tag{2.29}$$

Exemple 2.3.3. *On considère l'équation dynamique* (2.17).

Par (2.28) *et* (2.29), *nous avons*

$$\psi(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} s^{-2}\Delta s = \frac{2}{\tau}, \qquad \textit{pour tout } \tau \in \overline{2^{\mathbb{Z}}},$$

et

$$\varphi(s) = 8\int_{s}^{\infty} \tau^{-3}\Delta\tau = \frac{32}{3s^2}, \qquad \textit{pour tout } s \in \overline{2^{\mathbb{Z}}},$$

où φ, ψ *sont définis dans le thérème 2.3.3.*

Alors

$$\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{\varphi(s)}{p(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s = \left(\frac{32}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \int_{t_1}^{\infty} s^{-\frac{3}{5}}\Delta s = +\infty.$$

Du Théorème 2.3.3, on déduit que toute solution de (2.17) *est oscillante ou converge vers zéro.*

Chapitre 3

Oscillation pour une équation différentielle non linéaire du quatrième ordre sur les échelles de temps

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'oscillation pour une équation différentielle d'ordre quatre.

3.1 Introduction

Il y a beaucoup d'articles étudiant l'oscillation de l'équation ordinaire d'ordre quatre où titre d'exemple :
S. R. Grace, M. Bohner et S. Sun [30] ont étudié l'oscillation de l'équation suivante

$$x^{\Delta^4}(t) + q(t)\, x^{\lambda}(t) = 0.$$

T. Li et E.Thandapani et S. Tang [42] ont étudié l'oscillation pour l'équation dynamique à retard du quatrième ordre sur l'échelle de temps

$$\left(r\left(x^{\Delta^3}\right)\right)^{\Delta}(t) + p(t)\, x(\tau(t)) = 0.$$

Y. Qi et J. Yu [45] ont étudié l'oscillation de l'équation semi-linéaire

$$x^{\Delta^4}(t) + p(t)\, x^{\gamma}(\tau(t)) = 0.$$

R. P. Agarwal, M. Bohner, T. Li et C.Zhang [20] ont étudié l'oscillation de l'équation dynamique semi linéaire d'ordre quatre sur l'échelle de temps

$$\left(r\left(x^{\Delta^3}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t) + p(t)\left(x^{\Delta^3}\right)^{\gamma}(t) + q(t)\, x^{\gamma}(\tau(t)) = 0.$$

Dans ce chapitre on donne quelques critères d'oscillation pour l'équation dynamique non-linéaire d'ordre quatre qui généralise toute les équations ci-dessus :

$$\left(p(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta^3}(t) + q(t)\left(p(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t) + f(t, x(\tau(t))) = 0. \tag{3.1}$$

sur une échelle de temps $\mathbb{T}$, avec α de la forme $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ où α_1, α_2 impairs positifs. On impose les conditions suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et vérifiant

$$xf(t,x) > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$(\mathcal{H}_2)$ Il existe une fonction $r : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ rd-continue, telle que

$$\frac{f(t,x)}{x^{\alpha}} \geq r(t), \qquad \text{pour tout } t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$(\mathcal{H}_3)$ Les fonctions p et q sont à valeurs réelles et sont rd-continues positives définies sur $\mathbb{T}$, telles que

$$1 - q(t)\,\mu(t) \neq 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

$(\mathcal{H}_4)$ La fonction $\tau : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ est rd-continue, telle que

$$\tau(t) \leq t, \quad \text{pour } t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty.$$

On supposera que le problème (3.1) admet au moins une solution dans l'espace $\mathcal{C}^4_{rd}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$.

3.2 Cas où l'équation (2) admet une solution non oscillante

Nous présentons le lemme suivant qui donne les propriétés de la solution éventuellement positive x de l'équation (3.1).

Lemme 3.2.1. *Supposons que x est une solution éventuellement positive de* (3.1) *et*

$$\int_{t_0}^{\infty} e_{-q(t)}(t,t_0)\,\Delta t = \int_{t_0}^{\infty} \left\{\frac{1}{p(t)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \Delta t = \infty, \tag{3.2}$$

alors, il y a seulement deux cas possibles, pour tout $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ avec $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ suffisamment grand :

1. $x^{\Delta}(t) > 0, \quad (p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t) > 0, \quad (p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t) > 0,$
2. $x^{\Delta}(t) > 0, \quad (p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t) < 0, \quad (p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t) > 0.$

Démonstration.
Soit x une solution éventuellement positive de (3.1).
Alors il existe $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$ et $x(\tau(t)) > 0$ pour tout $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.
Par (3.1), nous avons

$$\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^3}(t) + q(t)\left(p(x^{\Delta})^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t) = -f(t,x(\tau(t))) < 0, \quad \text{pour } t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.3}$$

De (3.3), on obtient

$$\left(\frac{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}}{e_{-q}(.,t_0)}\right)^{\Delta}(t) = \frac{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^3}(t) + q(t)\,(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t)}{e^{\sigma}_{-q}(t,t_0)} < 0.$$

Donc $\dfrac{\left\{p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right\}^{\Delta^2}}{e_{-q}(.,t_0)}$ est décroissante sur $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.
Alors $(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}, (p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}$ et x^{Δ} sont de signe constant pour t assez grand.
Montrons que $(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(t) > 0$ pour $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.
Supposons le contraire, alors il existe une constante $c > 0$ et $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ tels que

$$(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(t) \leq -c e_{-q}(t,t_0), \qquad t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_2 à t, nous obtenons

$$(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t) \leq (p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t_2) - c\int_{t_2}^{t} e_{-q}(s,t_0)\,\Delta s,$$

ce qui implique que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t) = -\infty.$$

Alors,

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t) = -\infty.$$

Ce qui signifie qu'il existe une constante $m>0$ et $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ tels que

$$x^{\Delta}(t) \leq -\left(\frac{m}{p(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad t\in[t_3,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Intégrons la dernière inégalité entre t_3 à t, nous obtenons

$$x(t) \leq x(t_3) - \int_{t_3}^{t}\left(\frac{m}{p(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s.$$

Ceci donne que $\lim_{t\longrightarrow\infty} x(t) = -\infty$, d'ou la contradiction.
Si $(p(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\alpha})^{\Delta} > 0$, alors $x^{\Delta}(t) > 0$ car $(p(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\alpha})^{\Delta^2} > 0$.
Si $(p(t)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\alpha})^{\Delta} < 0$, alors $x^{\Delta}(t) > 0$ car $x(t) > 0$. □

Lemme 3.2.2. *Supposons que x est une solution éventuellement positive de* (3.1) *satisfaisant le cas* (1) *du Lemme 3.2.1. Alors*

$$(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t) \geq (t-t_1)(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(t), \qquad t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.4}$$

S'il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}^1_{rd}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^+\right)$ et $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ tels que

$$\phi(t) - \phi^{\Delta}(t)(t-t_1) \leq 0, \qquad t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{3.5}$$

alors $\dfrac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)}{\phi(t)}$ est une fonction décroissante sur $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$, et

$$\phi(t)\,p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t) \geq (p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)\int_{t_2}^{t}\phi(s)\,\Delta s, \qquad t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.6}$$

Et s'il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}_{rd}^{1}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^{+}\right)$ *et* $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ *tels que*

$$\phi(t)\,\psi(t) - \psi^{\Delta}(t)\int_{t_2}^{t}\phi(s)\,\Delta s \le 0, \qquad t \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{3.7}$$

alors $\dfrac{p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)}{\psi(t)}$ *est une fonction décroissante sur* $[t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$, *et*

$$x(t) \ge x^{\Delta}(t)\left\{\frac{p(t)}{\psi(t)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_3}^{t}\left\{\frac{\psi(s)}{p(s)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s := R(t,t_3)\,x^{\Delta}(t), \quad t \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.8}$$

Démonstration.

Soit x une solution éventuellement positive de (3.1).

Comme $(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t) > 0$, $(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(t) > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t) &\ge \int_{t_1}^{t}(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(s)\Delta s\\ &\ge (p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(t)\,(t-t_1).\end{aligned}$$

De (3.4) et (3.5) on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}}{\phi}\right)^{\Delta}(t) &= \frac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(t)\phi(t) - (p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)\,\phi^{\Delta}(t)}{\phi(t)\,\phi^{\sigma}(t)}\\ &\le \frac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)}{\phi(t)\,\phi^{\sigma}(t)}\left\{\frac{\phi(t)}{t-t_1} - \phi^{\Delta}(t)\right\} \le 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\dfrac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)}{\phi(t)}$ est une fonction décroissante sur $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$.

Alors

$$\begin{aligned}p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t) &= p(t_2)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t_2) + \int_{t_2}^{t}\frac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(s)}{\phi(s)}\phi(s)\,\Delta s\\ &\ge \frac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)}{\phi(t)}\int_{t_2}^{t}\phi(s)\,\Delta s.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\left(\frac{p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}}{\psi}\right)^{\Delta}(t) &= \frac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)\psi\left(t\right)-p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)\,\psi^{\Delta}\left(t\right)}{\psi\left(t\right)\psi^{\sigma}\left(t\right)} \\ &\leq \frac{p\left(t\right)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)}{\psi\left(t\right)\psi^{\sigma}\left(t\right)}\left\{\frac{\phi\left(t\right)\psi\left(t\right)}{\displaystyle\int_{t_2}^{t}\phi\left(s\right)\Delta s}-\psi^{\Delta}\left(t\right)\right\}\leq 0.\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{p\left(t\right)\left(x^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\alpha}}{\psi\left(t\right)}$ est une fonction décroissante sur $[t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ et

$$\begin{aligned}x\left(t\right) &\geq \int_{t_3}^{t}\left\{\frac{p\left(s\right)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(s)}{\psi\left(s\right)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\psi\left(s\right)}{p\left(s\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s \\ &\geq \left\{\left(\frac{p\left(t\right)}{\psi\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_3}^{t}\left(\frac{\psi\left(s\right)}{p\left(s\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s\right\}x^{\Delta}\left(t\right).\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 3.2.1. *Dans le lemme 3.2.2, nous pouvons prendre par exemple*

$$\phi\left(t\right):=\left(t-t_1\right)\qquad et\qquad \psi\left(t\right):=\int_{t_2}^{t}\left(s-t_1\right)\Delta s. \tag{3.9}$$

Les fonctions ϕ et ψ vérifient les conditions (3.5) *et* (3.7).

3.3 Théorèmes d'existence de l'oscillation pour l'équation (2)

Dans cette section, nous établissons quelques conditions suffisantes qui garantissent que chaque solution x de (3.1) oscille sur $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$.

Pour la simplification, on note

$$Td\left(t\right):=\frac{d^{\sigma}\left(t\right)}{d\left(t\right)},$$

et

$$Q_{\alpha}^{d}(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \geq 1, \\ Td^{\alpha-1}(t), & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

3.3.1 Théorème d'oscillation pour l'équation (2) pour $\alpha > 0$

Théorème 3.3.1. *Supposons* (3.2) *est vérifiée et qu'il existe une fonction positive* $\delta \in \mathcal{C}_{rd}^{1}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *telle que pour tout* $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *assez grand,* $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$*,* $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ *et* $t_4 \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$*, on a*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\int_{t_4}^{t} \delta^{\sigma}(s)\, r(s)\, k(s,t_3) - \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta^{\Delta}(s)}{\delta(s)} - q(s)\frac{T\delta(s)}{T\phi(s)}\right\}^{2}\frac{\delta(s)\, T\phi(s)}{T\delta(s)}\Delta s = \infty, \tag{3.10}$$

où ϕ *et* ψ *sont définies dans le lemme 3.2.2, et*

$$k(t,t_3) := \frac{1}{\psi(\tau(t))\,\phi^{\sigma}(t)}\left\{\int_{t_3}^{\tau(t)}\left\{\frac{\psi(s)}{p(s)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s\right\}^{\alpha}\int_{t_3}^{\tau(t)}\phi(s)\,\Delta s.$$

S'il existe des fonctions positives $\theta, \lambda \in \mathcal{C}_{rd}^{1}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *telles que*

$$\frac{\lambda(t)}{\xi(t,t_1)} - \lambda^{\Delta}(t) \leq 0, \qquad t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{3.11}$$

avec

$$\xi(t,t_1) := (p(t))^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_1}^{t}\left\{\frac{1}{p(s)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s,$$

et

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\int_{t_3}^{t}\theta^{\sigma}(s)\, c(s) - \frac{\left[\theta^{\Delta}\right]_{+}^{\alpha+1}(s)\, T\lambda^{\alpha^2}(s)\, p(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}\left(Q_{\alpha}^{\lambda}\right)^{\alpha}(s)\, T\theta^{\alpha}(s)\,\theta^{\alpha}(s)}\Delta s = \infty, \tag{3.12}$$

avec

$$c(t) := \frac{1}{T\lambda^{\alpha}(t)}\int_{t}^{\infty}\left\{\int_{v}^{\infty} r(u)\,\frac{\lambda^{\alpha}(\tau(u))}{\lambda^{\alpha}(u)}\Delta u\right\}\Delta v.$$

Alors la solution de (3.1) *est oscillante.*

Démonstration.

Supposons que (3.1) admet une solution x non oscillante sur $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$.

Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$ et $x(\tau(t)) > 0$ pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.

Supposons d'abord que x satisfait (1) dans le lemme 3.2.1.

Nous définissons la fonction ω_1 par :

$$\omega_1(t) := \delta(t) \frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)}, \qquad t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.13}$$

Alors $\omega_1(t) > 0$ pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ et

$$\omega_1^{\Delta}(t) = \delta^{\Delta}(t) \frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)} + \delta^{\sigma}(t) \left\{ \frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}} \right\}^{\Delta}(t),$$

ce qui implique que

$$\omega_1^{\Delta}(t) = \delta^{\Delta}(t) \frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)} + \delta^{\sigma}(t) \frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^3}(t)}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta\sigma}(t)} - \frac{\delta^{\sigma}(t)\left(\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)\right)^2}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta\sigma}(t)}. \tag{3.14}$$

Comme $\dfrac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)}{\phi(t)}$ est une fonction décroisante, nous avons

$$\frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta\sigma}(t)} \geq \frac{\phi(t)}{\phi^{\sigma}(t)}. \tag{3.15}$$

De (3.13), (3.1) et de la dernière inégalité, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\omega_1^{\Delta}(t) &\leq \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)}\omega_1(t) - \delta^{\sigma}(t) \frac{q(t)\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta\sigma}(t)} - \frac{\delta^{\sigma}(t)\, r(t)\, x^{\alpha}(\tau(t))}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta\sigma}(t)} - \frac{T\delta(t)}{\delta(t)\, T\phi(t)}\omega_1^2(t) \\
&\leq \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)}\omega_1(t) - q(t)\, T\delta(t) \frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta\sigma}(t)}\omega_1(t) - \frac{\delta^{\sigma}(t)\, r(t)\, x^{\alpha}(\tau(t))}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta\sigma}(t)} - \frac{T\delta(t)}{\delta(t)\, T\phi(t)}\omega_1^2(t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Substituons (3.15) dans (3.16), on trouve

$$\omega_1^{\Delta}(t) \leq \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)}\omega_1(t) - q(t) \frac{T\delta(t)}{T\phi(t)}\omega_1(t) - \frac{\delta^{\sigma}(t)\, r(t)\, x^{\alpha}(\tau(t))}{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta\sigma}(t)} - \frac{T\delta(t)}{\delta(t)\, T\phi(t)}\omega_1^2(t). \tag{3.17}$$

De (3.6), (3.8) et comme $\dfrac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)}{\phi(t)}$ est une fonction décroisante, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{x^{\alpha}(\tau(t))}{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta\sigma}(t)} &= \frac{x^{\alpha}(\tau(t))}{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta}(\tau(t))}\frac{(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(\tau(t))}{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta\sigma}(t)} \\ &\geq \frac{1}{\psi(\tau(t))\phi^{\sigma}(t)}\left\{\int_{t_3}^{\tau(t)}\left\{\frac{\psi(s)}{p(s)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s\right\}^{\alpha}\int_{t_3}^{\tau(t)}\phi(s)\,\Delta s \\ &= k(t,t_3). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Substituons (3.18) dans (3.17), on obtient

$$\omega_1^{\Delta}(t) \leq -\delta^{\sigma}(t)\,r(t)\,k(t,t_3) + \left\{\frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)} - q(t)\frac{T\delta(t)}{T\phi(t)}\right\}\omega_1(t) - \frac{T\delta(t)}{\delta(t)\,T\phi(t)}\omega_1^2(t).$$

Soit

$$B(t) := \left\{\frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)} - q(t)\frac{T\delta(t)}{T\phi(t)}\right\} \quad \text{et} \quad A(t) := \frac{T\delta(t)}{\delta(t)\,T\phi(t)}.$$

De l'inégalité suivante

$$By - Ay^2 \leq \frac{B^2}{4A}, \qquad A > 0,\ B \in \mathbb{R}, \tag{3.19}$$

nous obtenons

$$\omega_1^{\Delta}(t) \leq -\delta^{\sigma}(t)\,r(t)\,k(t,t_3) + \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)} - q(t)\frac{T\delta(t)}{T\phi(t)}\right\}^2\frac{\delta(t)\,T\phi(t)}{T\delta(t)}.$$

Intégrant la dernière l'inégalité entre t_4 à t, nous obtenons

$$\int_{t_4}^{t}\delta^{\sigma}(s)\,r(s)\,k(s,t_3) - \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta^{\Delta}(s)}{\delta(s)} - q(s)\frac{T\delta(s)}{T\phi(s)}\right\}^2\frac{\delta(s)\,T\phi(s)}{T\delta(s)}\Delta s \leq \omega_1(t_4) - \omega_1(t) \leq \omega_1(t_4).$$

Ce qui donne la contradiction avec (3.10).

Supposons que x satisfait le cas (2) dans le lemme 3.2.1.

Soit

$$\omega_2(t) := \theta(t)\frac{p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)}{x^{\alpha}(t)}, \qquad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.20}$$

Alors $\omega_2(t) > 0$ pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ et

$$\omega_2^{\Delta}(t) = \theta^{\Delta}(t)\frac{p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)}{x^{\alpha}(t)} + \theta^{\sigma}(t)\frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))} - \theta^{\sigma}(t)\frac{p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)\left(x^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))\,x^{\alpha}(t)}. \tag{3.21}$$

Comme $x^{\Delta}(t) > 0$ et $(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t) < 0$, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &\geq \int_{t_1}^{t}\left(p(s)\left(x^{\Delta}(s)\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left\{\frac{1}{p(s)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s \\ &\geq x^{\Delta}(t)\,(p(t))^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_1}^{t}\left\{\frac{1}{p(s)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\Delta s \\ &= \xi(t,t_1)\,x^{\Delta}(t). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\Delta}(t) &= \frac{x^{\Delta}(t)\,\lambda(t) - x(t)\,\lambda^{\Delta}(t)}{\lambda(t)\,\lambda^{\sigma}(t)} \\ &\leq \frac{x(t)}{\lambda(t)\,\lambda^{\sigma}(t)}\left\{\frac{\lambda(t)}{\xi(t,t_1)} - \lambda^{\Delta}(t)\right\} \leq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Par conséquent $\dfrac{x}{\lambda}$ est une fonction décroisante sur $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ et

$$\frac{x(t)}{x^{\sigma}(t)} \geq \frac{\lambda(t)}{\lambda^{\sigma}(t)}, \qquad \frac{x(\tau(t))}{x(t)} \geq \frac{\lambda(\tau(t))}{\lambda(t)}. \tag{3.24}$$

Du théorème 1.2.3, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \left(x^{\alpha}\right)^{\Delta}(t) &= \alpha x^{\Delta}(t)\int_{0}^{1}\left[hx(t) + (1-h)\,x^{\sigma}(t)\right]^{\alpha-1}dh \\ &\geq \alpha Q_{\alpha}^{\lambda}(t)\,x^{\Delta}(t)\,x^{\alpha-1}(t). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Substituons (3.25) dans (3.21), nous avons

$$\begin{aligned} \omega_2^{\Delta}(t) \leq\; &\theta^{\Delta}(t)\frac{p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)}{x^{\alpha}(t)} + \theta^{\sigma}(t)\frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))} \\ &- \alpha Q_{\alpha}^{\lambda}(t)\,\theta^{\sigma}(t)\frac{p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha+1}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))\,x(t)}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

D'autre part, par (3.1), on a

$$\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(s)-\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)+\int_t^s r(u)\left(x(\tau(u))\right)^{\alpha}\Delta u\leq 0.$$

Comme $x^{\Delta}>0$ et de (3.24), on obtient

$$\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(s)-\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)+x^{\alpha}(t)\int_t^s r(u)\frac{\lambda^{\alpha}(\tau(u))}{\lambda^{\alpha}(u)}\Delta u\leq 0.$$

Lorsque s tend vers ∞ dans la dernière l'inégalité, nous déduisons que

$$\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta^2}(t)\geq x^{\alpha}(t)\int_t^{\infty} r(u)\frac{\lambda^{\alpha}(\tau(u))}{\lambda^{\alpha}(u)}\Delta u.$$

Par conséquent,

$$-\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(s)+\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)+x^{\alpha}(t)\int_t^s\left\{\int_v^{\infty} r(u)\frac{\lambda^{\alpha}(\tau(u))}{\lambda^{\alpha}(u)}\Delta u\right\}\Delta v\leq 0.$$

Alors

$$\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)+x^{\alpha}(t)\int_t^{\infty}\left\{\int_v^{\infty} r(u)\frac{\lambda^{\alpha}(\tau(u))}{\lambda^{\alpha}(u)}\Delta u\right\}\Delta v\leq 0.$$

Par (3.24), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\left(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}\right)^{\Delta}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))} &\leq -\frac{x^{\alpha}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))}\int_t^{\infty}\left\{\int_v^{\infty} r(u)\frac{\lambda^{\alpha}(\tau(u))}{\lambda^{\alpha}(u)}\Delta u\right\}\Delta v\\ &\leq -\left\{\frac{\lambda(t)}{\lambda^{\sigma}(t)}\right\}^{\alpha}\int_t^{\infty}\left\{\int_v^{\infty} r(u)\frac{\lambda^{\alpha}(\tau(u))}{\lambda^{\alpha}(u)}\Delta u\right\}\Delta v\\ &= -c(t). \qquad (3.27)\end{aligned}$$

Substituons (3.20), (3.24) et (3.27) dans (3.26), nous avons

$$\omega_2^{\Delta}(t)\leq-\theta^{\sigma}(t)c(t)+\theta^{\Delta}(t)\frac{p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha}(t)}{x^{\alpha}(t)}-\alpha Q_{\alpha}^{\lambda}(t)\theta^{\sigma}(t)\frac{p(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha+1}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))x(t)}.$$

Donc

$$\omega_2^{\Delta}(t) \leq -\theta^{\sigma}(t)\, c(t) + \frac{\left(\theta^{\Delta}\right)_{+}(t)}{\theta(t)}\omega_2(t) - \frac{\alpha Q_{\alpha}^{\lambda}(t)\, T\theta(t)}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, p^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, T\lambda^{\alpha}(t)}\omega_2^{1+\frac{1}{\alpha}}(t).$$

D'après le lemme 1.6.1, nous avons

$$\omega_2^{\Delta}(t) \leq -\theta^{\sigma}(t)\, c(t) + \frac{\left[\theta^{\Delta}\right]_{+}^{\alpha+1}(t)\, T\lambda^{\alpha^2}(t)\, p(t)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}\left(Q_{\alpha}^{\lambda}\right)^{\alpha}(t)\, T\theta^{\alpha}(t)\, \theta^{\alpha}(t)}.$$

En intégrant la dernière l'inégalité entre t_3 à t, nous obtenons

$$\int_{t_3}^{t} \theta^{\sigma}(s)\, c(s) - \frac{\left[\theta^{\Delta}\right]_{+}^{\alpha+1}(s)\, T\lambda^{\alpha^2}(s)\, p(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}\left(Q_{\alpha}^{\lambda}\right)^{\alpha}(s)\, T\theta^{\alpha}(s)\, \theta^{\alpha}(s)}\Delta s \leq \omega_2(t_3) - \omega_2(t) \leq \omega_2(t_3).$$

Ce qui donne la contradiction par (3.12). □

Remarque 3.3.1. *Dans le théorème 3.3.1, nous pouvons prendre par exemple*

$$\lambda(t) = \int_{t_1}^{t} \left\{\frac{1}{p(s)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.28}$$

La fonction λ est satisfait la condition (3.11)*.*

3.3.2 Théorème d'oscillation pour l'équation (2) pour $\alpha \geq 1$

Théorème 3.3.2. *Supposons que* (3.2) *est vérifiée et $\alpha \geq 1$. S'il existe des fonctions positives $\eta, m \in \mathcal{C}_{rd}^{1}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ suffisamment grand , $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ et $t_4 \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ tels que*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \int_{t_4}^{t} \eta^{\sigma}(s)\, r(s)\, \frac{m^{\alpha}(\tau(s))}{m^{\alpha}(\sigma(s))} - \frac{1}{4\alpha}E^2(s)\, F(s, t_3)\, \Delta s = \infty, \tag{3.29}$$

et

$$\frac{m(t)}{R(t, t_3)} - m^{\Delta}(t) \leq 0, \qquad t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}, \tag{3.30}$$

où ϕ et ψ sont définies dans le lemme 3.2.2, et

$$F(t, t_3) := \frac{p(t)\, \phi(t)\, \eta^2(t)\, T m^{\alpha}(t)}{(t - t_3)\, \eta^{\sigma}(t)\, R^{\alpha-1}(t, t_3)} \left\{\int_{t_3}^{t} \phi(s)\, \Delta s\right\}^{-1},$$

$$E(t) := \frac{\eta^{\Delta}(t)}{\eta(t)} - q(t)\frac{T\eta(t)}{Tm^{\alpha}(t)}.$$

S'il existe des fonctions positives $\theta, \lambda \in \mathcal{C}^1_{rd}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *telles que* (3.12) *soit vérifiée Alors* (3.1) *est oscillante.*

Démonstration.

Supposons que (3.1) admet une solution x non oscillante sur $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$.

Alors il existe $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$ et $x(\tau(t)) > 0$ pour $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.

Supposons d'abord que x satisfait (1) dans le lemme 3.2.1.

Nous définissons la fonction ω_3 par :

$$\omega_3(t) := \eta(t)\frac{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t)}{x^{\alpha}(t)}, \qquad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{3.31}$$

Alors $\omega_3(t) > 0$ pour $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, et

$$\omega_3^{\Delta}(t) = \eta^{\Delta}(t)\frac{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t)}{x^{\alpha}(t)} + \eta^{\sigma}(t)\frac{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^3}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))} - \eta^{\sigma}(t)\frac{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t)(x^{\alpha})^{\Delta}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))\,x^{\alpha}(t)}. \tag{3.32}$$

Substituons (3.1) dans (3.32), nous avons

$$\begin{aligned}
\omega_3^{\Delta}(t) \leq\ & \eta^{\Delta}(t)\frac{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t)}{x^{\alpha}(t)} - \eta^{\sigma}(t)\frac{q(t)(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))} \\
& -\eta^{\sigma}(t)r(t)\frac{x^{\alpha}(\tau(t))}{x^{\alpha}(\sigma(t))} - \eta^{\sigma}(t)\frac{(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t)(x^{\alpha})^{\Delta}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))\,x^{\alpha}(t)}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

De (3.8) et (3.30), on obtient

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\Delta}(t) \leq \frac{x(t)}{m^{\sigma}(t)\,m(t)}\left\{\frac{m(t)}{R(t,t_3)} - m^{\Delta}(t)\right\} \leq 0.$$

Alors $\dfrac{x}{m}$ est une fonction décroisante sur $t \in [t_4,\infty)_{\mathbb{T}}$, et

$$\frac{x(t)}{x^{\sigma}(t)} \geq \frac{m(t)}{m^{\sigma}(t)}, \qquad \frac{x(\tau(t))}{x^{\sigma}(t)} \geq \frac{m(\tau(t))}{m^{\sigma}(t)}. \tag{3.34}$$

Par (3.25), on a

$$(x^{\alpha})^{\Delta}(t) \geq \alpha x^{\Delta}(t)\,x^{\alpha-1}(t). \tag{3.35}$$

Par les inégalités (3.4), (3.6) , (3.8) et (3.35), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(x^{\alpha})^{\Delta}(t) &\geq \alpha R^{\alpha-1}(t,t_3)\left(x^{\Delta}(t)\right)^{\alpha} \\
&\geq \alpha\frac{R^{\alpha-1}(t,t_3)}{\phi(t)\,p(t)}(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta}(t)\int_{t_3}^{t}\phi(s)\,\Delta s \\
&\geq \alpha(t-t_3)\frac{R^{\alpha-1}(t,t_3)}{\phi(t)\,p(t)}(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(t)\int_{t_3}^{t}\phi(s)\,\Delta s \\
&\geq \frac{\alpha\eta^2(t)\,Tm^{\alpha}(t)}{\eta^{\sigma}(t)\,F(t,t_3)}(p\left(x^{\Delta}\right)^{\alpha})^{\Delta^2}(t)\,. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Substituons (3.36) et (3.31) dans (3.33), nous obtenons

$$\omega_3^{\Delta}(t)\leq\frac{\eta^{\Delta}(t)}{\eta(t)}\omega_3(t)-T\eta(t)\frac{q(t)\,x^{\alpha}(t)}{x^{\alpha}(\sigma(t))}\omega_3(t)-\eta^{\sigma}(t)\,r(t)\frac{x^{\alpha}(\tau(t))}{x^{\alpha}(\sigma(t))}-\frac{\alpha Tm^{\alpha}(t)\,x^{\alpha}(t)\,\omega_3^2(t)}{F(t,t_3)\,x^{\alpha}(\sigma(t))}. \qquad (3.37)$$

Par (3.34), nous avons

$$\begin{aligned}
\omega_3^{\Delta}(t) &\leq \frac{\eta^{\Delta}(t)}{\eta(t)}\omega_3(t)-\frac{T\eta(t)}{Tm^{\alpha}(t)}q(t)\,\omega_3(t)-\eta^{\sigma}(t)\,r(t)\frac{m^{\alpha}(\tau(t))}{m^{\alpha}(\sigma(t))}-\frac{\alpha}{F(t,t_3)}\omega_3^2(t) \\
&\leq -\eta^{\sigma}(t)\,r(t)\frac{m^{\alpha}(\tau(t))}{m^{\alpha}(\sigma(t))}+E(t)\,\omega_3(t)-\frac{\alpha}{F(t,t_3)}\omega_3^2(t)\,.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité (3.19), on obtient

$$\omega_3^{\Delta}(t)\leq-\eta^{\sigma}(t)\,r(t)\frac{m^{\alpha}(\tau(t))}{m^{\alpha}(\sigma(t))}+\frac{1}{4\alpha}E^2(t)\,F(t,t_3)\,.$$

Intégrons la dernière inégalité entre t_4 à t, on trouve

$$\int_{t_4}^{t}\eta^{\sigma}(s)\,r(s)\frac{m^{a}(\tau(s))}{m^{\alpha}(\sigma(s))}-\frac{1}{4\alpha}E^2(s)\,F(s,t_3)\,\Delta s\leq\omega_3(t_4)-\omega_3(t)\leq\omega_3(t_4)\,.$$

Contradiction avec (3.29).

La preuve de cas (2) est identique le cas (2) dans le théorème 3.3.1. □

Remarque 3.3.2. *Si l'échelle de temps est $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, dans ce cas on a*

$$Td=Q_{\alpha}^{d}=1.$$

3.4 Exemple

Dans cette partie considérons l'exemple d'application de théorèmes.

Exemple 3.4.1. *Considérons l'équation différentielle semi-linéaire suivante*

$$\left(\sqrt[3]{x'}\right)^{(3)}(t)+\frac{1}{t}\left(\sqrt[3]{x'}\right)^{(2)}(t)+t^{-\frac{7}{3}}\sqrt[3]{x(t)}=0,\quad t\in[1,\infty)_{\mathbb{R}}. \tag{3.38}$$

Ici,

$$\alpha=\frac{1}{3},\quad p(t)=1,\quad r(t)=t^{-\frac{7}{3}},\quad q(t)=\frac{1}{t}\quad et\quad \tau(t)=t.$$

Soit

$$\phi(t)=t-t_1,\ \psi(t)=\int_{t_2}^{t}(s-t_1)\,ds,\ \lambda(t)=t-t_1\ et\ \delta(t)=\theta(t)=1.$$

Alors (3.2), (3.5) *et* (3.7) *sont vérifiées et*

$$k(t,t_3)\geq\eta t^{\frac{4}{3}},\qquad pour\ t\ assez\ grand,$$

$$r(t)\,k(t,t_3)-\frac{1}{4}q^2(t)\geq\frac{\eta}{t}-\frac{1}{4t^2},\qquad pour\ t\ assez\ grand,$$

avec $\eta\in(0,1)$*.*

Donc (3.10) *est vérifiée.*

D'autre part, nous avons $\lambda(t,t_1)=t-t_1$*, alors* (3.11) *vérifiée*

$$c(t)=\tfrac{9}{4}t^{-\frac{1}{3}}.$$

Donc, (3.12) *vérifiée.*

Le Théorème 3.3.1 implique que la solution de l'équation (3.38) *est oscillante.*

Chapitre 4

Oscillation pour une équation différentielle non linéaire d'ordre n sur les échelles de temps

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'oscillation de toute solution de l'équation dynamique non-linéaire d'ordre n.

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^{2}}(t)+f\left(t,x^{\alpha}\left(t\right)\right)=0,\qquad t\in\left[t_{0},+\infty\right)_{\mathbb{T}}, \tag{4.1}$$

sur une échelle de templs $\mathbb{T}$ avec $\sup\mathbb{T}=\infty$, $n\in[3,+\infty)_{\mathbb{Z}}$ et n pair. Avec α,γ sont de la forme $\alpha=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\gamma=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ où α_1, α_2, γ_1, γ_2 impairs positifs, tels que f et a satisfont les conditions suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ $f:\mathbb{T}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue,

$(\mathcal{H}_2)$ $f\left(t,-x\right)=-f(t,x)$ pour tout $t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $x\in\mathbb{R}$,

$(\mathcal{H}_3)$ Il exist une fonction $r:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}^{+}$ rd-continu, tel que

$$\frac{f\left(t,x\right)}{x}\geq r(t),\qquad\text{pour tout } t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}\,,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}\,. \tag{4.2}$$

$(\mathcal{H}_4)$ $a : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction Δ-différentiable telle que

$$a^{\Delta}(t) \geq 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

On supposera que le probléme (4.1) admet au moins une solution dans l'espace $\mathcal{C}^n_{rd}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$.

4.2 Cas où l'équation (3) admet une solution non oscillante

Lemme 4.2.1. *Supposons que x est une solution éventuellement positive de* (4.1) *et*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{a(t)} = \lambda \in \mathbb{R}^*_+. \tag{4.3}$$

Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$\left(a \left(x^{\Delta^{n-2}} \right)^{\gamma} \right)^{\Delta}(t) > 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{4.4}$$

Démonstration.
Supposons que x est une solution éventuellement positive de (4.1), alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$, pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.
Par (4.1), en déduit que la fonction $\left(a \left(x^{\Delta^{n-2}} \right)^{\gamma} \right)^{\Delta}$ est décroissante sur $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.
Montrons que

$$\left(a \left(x^{\Delta^{n-2}} \right)^{\gamma} \right)^{\Delta}(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Supposons le contraire, alors il existe une constante $M > 0$ et $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ tels que

$$\left(a \left(x^{\Delta^{n-2}} \right)^{\gamma} \right)^{\Delta}(t) \leq -M, \qquad \text{pour tout } t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{4.5}$$

Par intégration de (4.5) entre t_2 à t, on obtient

$$\left(x^{\Delta^{n-2}} \right)^{\gamma}(t) \leq \frac{-Mt + \xi}{a(t)}, \qquad \text{pour tout } t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

où ξ est une constante.

On peut choisir $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$-Mt + \xi \leq -\frac{M}{2}t, \qquad \text{pour tout } t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Par conséquent,

$$\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t) \leq -\frac{M}{2}\frac{t}{a(t)}, \qquad \text{pour tout } t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Puisque (4.3) est vérifiée, alors $x^{\Delta^{n-2}}(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Par le lemme 1.6.2, en déduit que $x(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.

D'où la contradiction. Donc la formule (4.4) est vérifiée. □

Lemme 4.2.2. *Supposons que x est une solution éventuellement positive de* (4.1) *et* (4.3) *est vérifiée, si de plus*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{a(t)} \int_t^{\infty} r(s)\,\Delta s = \infty. \tag{4.6}$$

Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$x^{\Delta^{n-2}}(t) > 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{4.7}$$

Démonstration.

Supposons que x est une solution éventuellement positive de (4.1).

Par (4.4), en déduit qu'il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que x^{Δ^k} sont de signe constant sur $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, pour $k \in [1, n-1)_{\mathbb{Z}}$.

Supposons que $y(t) = x^{\Delta^{n-2}}(t) < 0$, pour tout $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.

Par la formule (1.1), on a

$$(a(y)^{\gamma})^{\Delta}(t) = a^{\Delta}(t)(y(t))^{\gamma} + a^{\sigma}(t)(y^{\gamma})^{\Delta}(t) > 0, \quad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{4.8}$$

Par $(\mathcal{H}_4)$, on obtient

$$(y^{\gamma})^{\Delta}(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Du théorème 1.2.3, on a

$$\left(y^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)=\gamma y^{\Delta}(t)\int_{0}^{1}\left(hy(t)+(1-h)\,y^{\sigma}(t)\right)^{\gamma-1}dh>0,\quad \text{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{4.9}$$

Alors

$$y^{\Delta}(t)=x^{\Delta^{n-1}}(t)>0,\qquad \text{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Le lemme de Kiguradze's 1.6.3 implique qu'il existe $m\in\{1,\ldots,n-2\}$ tel que (i) et (ii) sont vérifiées.

Donc il existe $t_2\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, tel que $x^{\Delta}(t)\geq 0$, pour tout $t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ et par conséquent, il existe une constante $c>0$, telle que

$$x(t)>c\ ,\qquad \text{pour tout } t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

D'après l'équation (4.1) on déduit que la fonction $\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}$ est décroissante sur $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.

Pour tout $t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, on a

$$\begin{aligned} a(t)\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t) &\geq \xi+\int_{t_1}^{t}\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(s)\,\Delta s \\ &\geq \xi+\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)\,(t-t_1). \end{aligned} \tag{4.10}$$

où ξ est une constante.

Par (4.2), on a

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t)\leq -r(t)\,x^{\alpha}(t),\qquad \text{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{4.11}$$

En intégrant de (4.11) entre t à ∞, nous obtenons

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)\geq\int_{t}^{\infty}r(s)\,x^{\alpha}(s)\,\Delta s,\qquad \text{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t) &\geq \frac{\xi}{a(t)}+\frac{t-t_1}{a(t)}\int_t^{\infty} x^{\alpha}(s)\,r(s)\,\Delta s \qquad (4.12)\\
&\geq \frac{\xi}{a(t)}+\frac{c^{\alpha}(t-t_1)}{a(t)}\int_t^{\infty} r(s)\,\Delta s, \qquad \text{pour tout } t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}.
\end{aligned}
$$

On peut choisir $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$
\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t) \geq \frac{\xi}{a(t)}+\frac{c^{\alpha}t}{2a(t)}\int_t^{\infty} r(s)\,\Delta s, \qquad \text{pour tout } t\in[t_3,\infty)_{\mathbb{T}}. \qquad (4.13)
$$

Par (4.6), on a

$$
\lim_{t\to+\infty} x^{\Delta^{n-2}}(t) = +\infty.
$$

D'où la contradiction. □

Lemme 4.2.3. *Supposons que x est une solution éventuellement positive de* (4.1) *et* (4.3), (4.6) *sont vérifiées.*
Alors il existe $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$
x^{\Delta^k}(t) > 0, \qquad \textit{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}} \quad \textit{et} \quad \textit{pour tout } k\in[1,n-1)_{\mathbb{Z}}. \qquad (4.14)
$$

Démonstration.
Le lemme 4.2.2 implique que les fonctions x^{Δ^k} sont de signe constant sur $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, pour $k \in [1,n-1)_{\mathbb{Z}}$.
Par l'inégalité (4.12), on obtient

$$
x^{\Delta^{n-2}}(t) \geq \left\{\frac{\xi}{a(t)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \text{pour tout } t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}.
$$

Avec $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ et $\xi > 0$.
De (4.3), on déduit que

$$
\lim_{t\to+\infty} x^{\Delta^{n-2}}(t) \geq (\xi\lambda)^{\frac{1}{\gamma}} > 0.
$$

Par le lemme 1.6.2, on déduit que $x^{\Delta^k}(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$, pour $k \in [1, n-2)_{\mathbb{Z}}$.

Par conséquent, les fonctions x^{Δ^k} sont éventuellement positives. Donc (4.14) est vérifiée. $\square$

Lemme 4.2.4. *Supposons que x est une solution éventuellement positive de* (4.1) *et* (4.3), (4.6) *sont vérifiées.*

S'il existe des fonctions $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-2} \in \mathcal{C}^1_{rd}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ telles que $A_1, A_2, \cdots A_{n-2}$ sont des fonctions définies par :

$$A_1(t, t_1) := \left\{\frac{a(t)}{\phi_1(t)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \int_{t_1}^{t} \left\{\frac{\phi_1(s)}{a(s)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \Delta s, \qquad \textit{pour } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}},$$

et

$$A_k(t, t_1) := \frac{1}{\phi_k(t)} \int_{t_1}^{t} \phi_k(s) \Delta s, \quad \textit{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}} \textit{ et pour } k \in [2, n-1)_{\mathbb{Z}},$$

avec $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$.

D'autre part, supposons que

$$\phi_1(t) - \phi_1^{\Delta}(t)(t - t_1) \leq 0, \qquad \textit{pour } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}, \tag{4.15}$$

et

$$\phi_k(t) - \phi_k^{\Delta}(t) A_{k-1}(t, t_1) \leq 0, \quad \textit{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}} \textit{ et pour } k \in [2, n-1)_{\mathbb{Z}}. \tag{4.16}$$

Alors

$$x^{\Delta^k}(t) \geq E_k(t, t_1) x^{\Delta^{n-2}}(t), \quad \textit{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}} \textit{ et pour } k \in [0, n-2)_{\mathbb{Z}}, \tag{4.17}$$

avec

$$E_k(t, t_1) := \prod_{m=1}^{m=n-k-2} A_m(t, t_1), \qquad \textit{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Démonstration.

Supposons que x est une solution éventuellement positive de (4.1).

De (4.10) et (4.15) on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}}{\phi_1}\right)^{\Delta}(t) &= \frac{\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)\,\phi_1(t)-\phi_1^{\Delta}(t)\,a(t)\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(t)}{\phi_1(t)\,\phi_1^{\sigma}(t)} \\ &\leq \frac{\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)}{\phi_1(t)\,\phi_1^{\sigma}(t)}\left(\phi_1(t)-\phi_1^{\Delta}(t)(t-t_1)\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\dfrac{a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}}{\phi_1}$ est une fonction décroissante sur $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.

Alors

$$\begin{aligned}x^{\Delta^{n-3}}(t) &\geq \int_{t_1}^{t}\left\{\frac{\phi_1(s)}{a(s)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{a(s)\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}(s)}{\phi_1(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta s \\ &\geq A_1(t,t_1)\,x^{\Delta^{n-2}}(t), \quad \text{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

De (4.16), on obtient l'inégalité suivante

$$x^{\Delta^{k-1}}(t) \geq A_{n-k-1}(t,t_1)\,x^{\Delta^{k}}(t), \qquad \text{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}} \text{ et pour } k\in[1,n-1)_{\mathbb{Z}}. \tag{4.19}$$

Par (4.19) on conclue (4.17). □

4.3 Théorèmes d'existence de l'oscillation pour l'équation (3)

Dans cette section, nous établissons quelques conditions suffisantes qui garantissent que toute solution x de (4.1) est oscillante sur $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$.

4.3.1 Théorème d'oscillation pour l'équation (3) pour $\alpha > \gamma$

Théorème 4.3.1. *Supposons que* (4.3), (4.6) *sont vérifiées et* $\alpha > \gamma$ *et que pour tout* $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *assez grand , tel que*

$$\int_{t_1}^{\infty} E_1(t, t_1) \left(\frac{t - t_1}{a(t)} \int_{\sigma(t)}^{\infty} r(u) \Delta u \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta t = \infty, \tag{4.20}$$

avec $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-2}$, $E_1(., t_1)$ *sont définis dans le lemme 4.2.4.*
Alors toute solution de l'équation (4.1) *est oscillante.*

Démonstration.
Supposons le contraire, que x est une solution non oscillante de (4.1).
Supposons que x est une solution éventuellement positive de l'équation (4.1), la substitution $y = -x$ transforme l'équation (4.1) en une équation de la même forme.
Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$ pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.
De (4.12), on obtient

$$x^{\Delta^{n-2}}(t) \geq \left(\frac{t - t_1}{a(t)} \int_{t}^{\infty} r(s) x^{\alpha}(s) \Delta s \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Par le lemme 4.2.4, nous avons

$$x^{\Delta}(t) \geq \left(\frac{t - t_1}{a(t)} \int_{t}^{\infty} r(s) x^{\alpha}(s) \Delta s \right)^{\frac{1}{\gamma}} E_1(t, t_1), \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Il est clair que $x^{\Delta}(t) > 0$, pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$, alors

$$x^{\Delta}(t) x^{\frac{-\alpha}{\gamma}}(\sigma(t)) \geq \left(\frac{t - t_1}{a(t)} \int_{\sigma(t)}^{\infty} r(s) \Delta s \right)^{\frac{1}{\gamma}} E_1(t, t_1), \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

D'après le lemme 1.6.4, on trouve

$$\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \left(x^{1 - \frac{\alpha}{\gamma}} \right)^{\Delta}(t) \geq \left(\frac{t - t_1}{a(t)} \int_{\sigma(t)}^{\infty} r(s) \Delta s \right)^{\frac{1}{\gamma}} E_1(t, t_1), \quad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{4.21}$$

Par intégration de (4.21) entre t_1 à t et lorsque t tend vers $+\infty$, on a

$$\int_{t_1}^{\infty} E_1(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t)}\int_{\sigma(t)}^{\infty} r(s)\,\Delta s\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Delta t \leq -\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}x^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}(t_1).$$

Ce qui donne la contradiction avec (4.20). $\square$

4.3.2 Théorème d'oscillation pour l'équation (3) pour $\alpha = \gamma$

Théorème 4.3.2. *Soit* (4.3), (4.6) *vérifiées et* $\alpha = \gamma \geq 1$. *Supposons qu'il existe une fonction positive* $\delta \in \mathcal{C}^1_{rd}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *telle que pour tout* $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ *suffisamment grands, tels que*

$$\int_{t_2}^{\infty} \delta(t)\,r(t) - \xi_\gamma\frac{\left(\delta_+^{\Delta}(t)\right)^{\gamma+1}a(t)}{\delta^\gamma(t)\,E_1^\gamma(t,t_1)(t-t_1)}\Delta t = \infty, \tag{4.22}$$

où $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{n-2}$, $E_1(.,t_1)$ *sont définis dans le lemme 4.2.4.*
Alors la solution de l'équation (4.1) *est oscillante.*

Démonstration.
Supposons le contraire, que x est une solution non oscillante de (4.1).
Alors il existe $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$ pour $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$.
Nous définissons la fonction w par :

$$w(t) = \delta(t)\,\frac{\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}(t)}{x^\gamma(t)}, \qquad t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Alors $w(t) > 0$ pour $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ et par (4.11) on a

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &\leq -\delta(t)\,r(t) + \frac{w^\sigma(t)}{\delta^\sigma(t)}x^\gamma(\sigma(t))\left\{\frac{\delta^{\Delta}(t)\,x^\gamma(t) - \delta(t)\,(x^\gamma)^{\Delta}(t)}{x^\gamma(t)\,x^\gamma(\sigma(t))}\right\} \\ &\leq -\delta(t)\,r(t) + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta^\sigma(t)}w^\sigma(t) - w^\sigma(t)\,\frac{\delta(t)\,(x^\gamma)^{\Delta}(t)}{\delta^\sigma(t)\,x^\gamma(t)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Du théorème 1.2.3, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\left(x^{\gamma}(t)\right)^{\Delta} &= \gamma x^{\Delta}(t)\int_{0}^{1}\left(hx\left(t\right)+(1-h)x^{\sigma}\left(t\right)\right)^{\gamma-1}dh \\ &\geq x^{\Delta}(t)x^{\gamma-1}\left(t\right). \qquad (4.24)\end{aligned}$$

Substituons (4.24) dans (4.23), nous trouvons

$$w^{\Delta}\left(t\right)\leq-\delta\left(t\right)r\left(t\right)+\frac{\delta^{\Delta}\left(t\right)}{\delta^{\sigma}\left(t\right)}w^{\sigma}\left(t\right)-w^{\sigma}\left(t\right)\frac{\delta\left(t\right)x^{\Delta}\left(t\right)}{\delta^{\sigma}\left(t\right)x\left(t\right)}. \qquad (4.25)$$

Par le lemme 4.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}x^{\Delta}\left(t\right) &\geq \frac{E_{1}\left(t,t_{1}\right)}{\left(a\left(t\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}}\left[a\left(t\right)\left(x^{\Delta^{n-2}}\left(t\right)\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\geq E_{1}\left(t,t_{1}\right)\left[\frac{t-t_{1}}{a\left(t\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}\left[\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta}\left(t\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\geq E_{1}\left(t,t_{1}\right)x^{\sigma}\left(t\right)\left(\frac{t-t_{1}}{a\left(t\right)\delta^{\sigma}\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(w^{\sigma}\left(t\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}.\end{aligned}$$

Comme la fonction x est croissante sur $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$, alors

$$x^{\Delta}\left(t\right)\geq E_{1}\left(t,t_{1}\right)x\left(t\right)\left(\frac{t-t_{1}}{a\left(t\right)\delta^{\sigma}\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(w^{\sigma}\left(t\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \qquad (4.26)$$

Substituons (4.26) dans (4.25), nous avons

$$w^{\Delta}\left(t\right)\leq-\delta\left(t\right)r\left(t\right)+\frac{\delta_{+}^{\Delta}\left(t\right)}{\delta^{\sigma}\left(t\right)}w^{\sigma}\left(t\right)-\frac{\delta\left(t\right)E_{1}\left(t,t_{1}\right)}{\delta^{\sigma}\left(t\right)}\left(\frac{t-t_{1}}{a\left(t\right)\delta^{\sigma}\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(w^{\sigma}\left(t\right)\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

D'après le lemme 1.6.1, on obtient

$$w^{\Delta}\left(t\right)\leq-\delta\left(t\right)r\left(t\right)+\xi_{\gamma}\frac{\left(\delta_{+}^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\gamma+1}a\left(t\right)}{\delta^{\gamma}\left(t\right)E_{1}^{\gamma}\left(t,t_{1}\right)\left(t-t_{1}\right)}.$$

Intégrant la dernière inégalité entre t_2 à t, on trouve

$$\int_{t_{2}}^{t}\delta\left(s\right)r\left(s\right)-\frac{\xi_{\gamma}\left(\delta_{+}^{\Delta}\left(s\right)\right)^{\gamma+1}a\left(s\right)}{\delta^{\gamma}\left(s\right)E_{1}^{\gamma}\left(s,t_{1}\right)\left(s-t_{1}\right)}\Delta s\leq w\left(t_{2}\right)-w\left(t\right)\leq w\left(t_{2}\right).$$

Ce qui donne la contradiction par (4.22).

$\square$

4.3.3 Théorème d'oscillation pour l'équation (3) pour $\alpha < \gamma$

Théorème 4.3.3. *Soit* (4.3), (4.6) *vérifiées et* $\gamma > \alpha$. *Supposons qu'il existe une fonction positive* $\delta \in \mathcal{C}_{rd}^{1}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *telle que pour tout* $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *suffisamment grand on a*

$$\int_{t_1}^{\infty} \delta^{\sigma}(t)\, r(t)\, E_0^{\alpha}(t, t_1) \left(\frac{t - t_1}{a(t)\, \delta(t)} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \Delta t = \infty, \tag{4.27}$$

avec

$$\delta^{\Delta}(t) \leq 0, \qquad \text{pour } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}},$$

où $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-2}$, $E_0(., t_1)$ *sont définis dans le lemme 4.2.4.*
Alors la solution de l'équation (4.1) *est oscillante.*

Démonstration.

Supposons le contraire, que x est une solution non oscillante de (4.1).
Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ tel que $x(t) > 0$ pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.
Nous définissons la fonction w par :

$$w(t) = \delta(t) \left(a \left(x^{\Delta^{n-2}} \right)^{\gamma} \right)^{\Delta}(t), \qquad \text{pour } t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

Alors $w(t) > 0$ pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ et par (4.2), on a

$$w^{\Delta}(t) \leq -\delta^{\sigma}(t)\, r(t)\, x^{\alpha}(t). \tag{4.28}$$

Par le lemme 4.2.4, nous avons

$$\begin{aligned} x(t) &\geq E_0(t, t_1)\, x^{\Delta^{n-2}}(t) \\ &\geq E_0(t, t_1) \left(\frac{t - t_1}{a(t)\, \delta(t)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} w^{\frac{1}{\gamma}}(t). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Substituons (4.29) dans (4.28), on trouve

$$-w^{\Delta}(t)\, w^{\frac{-\alpha}{\gamma}}(t) \geq \delta^{\sigma}(t)\, r(t)\, E_0^{\alpha}(t, t_1) \left(\frac{t - t_1}{a(t)\, \delta(t)} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Par le lemme 1.6.4 nous avons

$$-\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\left(w^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\right)^{\Delta}(t) \geq \delta^{\sigma}(t)\, r(t)\, E_0^{\alpha}(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t)\,\delta(t)}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

En intégrant la dernière inégalité entre t_1 à t, on trouve

$$\int_{t_1}^{t} \delta^{\sigma}(s)\, r(s)\, E_0^{\alpha}(s,t_1)\left(\frac{s-t_1}{a(s)\,\delta(s)}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\Delta s \leq \frac{\gamma}{\gamma-\alpha} w^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}(t_1),$$

pour t assez grand. Ce résultat donne la contradiction avec (4.27). $\square$

4.4 Application

Remarque 4.4.1. *Dans le lemme 4.2.4, nous pouvons prendre par exemple*

$$\phi_k(t) := \begin{cases} t-t_1 & \text{si } k=1, \\ \int_{t_1}^{t} B(s)\,\Delta s, & \text{si } k=2, \\ \int_{t_1}^{t} \phi_{k-1}(s)\,\Delta s, & \text{si } k\in[3,n-1)_{\mathbb{Z}}, \end{cases} \quad, \text{ pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Avec

$$B(t) := \left\{\frac{t-t_1}{a(t)}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \text{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Dans ce cas on a

$$A_k(t,t_1) := \begin{cases} \frac{1}{B(t)}\int_{t_1}^{t} B(s)\,\Delta s & \text{si } k=1, \\ \frac{\int_{t_1}^{t} h_{k-1}(t,\sigma(s))\, B(s)\,\Delta s}{\int_{t_1}^{t} h_{k-2}(t,\sigma(s))\, B(s)\,\Delta s} & \text{si } k\in[2,n-1)_{\mathbb{Z}}, \end{cases} \quad, \text{ pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Les fonctions $(\phi_k)_{k\in[2,n-1)_{\mathbb{Z}}}$ *satisfont alors les conditions* (4.15) *et* (4.16).

Donc

$$\begin{aligned}
E_1(t,t_1) &= \prod_{m=1}^{m=n-3} A_m(t,t_1) = A_1(t,t_1)\prod_{m=2}^{m=n-3} A_m(t,t_1) \\
&= \frac{1}{B(t)}\int_{t_1}^{t} B(s)\,\Delta s \prod_{m=2}^{m=n-3} \frac{\int_{t_1}^{t} h_{m-1}(t,\sigma(s))\,B(s)\,\Delta s}{\int_{t_1}^{t} h_{m-2}(t,\sigma(s))\,B(s)\,\Delta s} \\
&= \frac{1}{B(t)}\int_{t_1}^{t} h_{n-4}(t,\sigma(s))\,B(s)\,\Delta s, \ \textit{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$E_0(t,t_1) = \frac{1}{B(t)}\int_{t_1}^{t} h_{n-3}(t,\sigma(s))\,B(s)\,\Delta s, \qquad \textit{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \quad (4.31)$$

Les corollaires suivants donnent des conditions suffisantes pour que toute solution de l'équation (4.1) soit oscillante.

Corollaire 4.4.1. *Soit* (4.3), (4.6) *vérifiées et* $\alpha > \gamma$. *Supposons que pour* $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *assez grand, tel que*

$$\int_{t_1}^{\infty} R(t)\,H_{n-4}(t,t_1)\,\Delta t = \infty, \quad (4.32)$$

Avec

$$R(t) := \left(\int_{\sigma(t)}^{\infty} r(u)\,\Delta u\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \textit{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}. \quad (4.33)$$

et

$$H_k(t,t_1) := \int_{t_1}^{t} h_k(t,\sigma(s))\,B(s)\,\Delta s, \quad \textit{pour tout } t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Alors toute solution de l'équation (4.1) *est oscillante.*

Corollaire 4.4.2. *Soit* (4.3), (4.6) *vérifiées et* $\alpha = \gamma \geq 1$.

Supposons qu'il existe une fonction positive $\delta \in \mathcal{C}^1_{rd}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$ *telle que pour tout* $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ *suffisamment grands, tels que*

$$\int_{t_2}^{\infty} \delta(t)\, r(t) - \xi_\gamma \frac{\left(\delta^{\Delta}_{+}(t)\right)^{\gamma+1}}{\left(\delta(t)\, H_{n-4}(t,t_1)\right)^{\gamma}} \Delta t = \infty. \tag{4.34}$$

Alors toute solution de l'équation (4.1) *est oscillante.*

Corollaire 4.4.3. *Soit* (4.3), (4.6) *vérifiées et* $\gamma > \alpha$. *Supposons qu'il existe une fonction positive* $\delta \in \mathcal{C}^1_{rd}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}\right)$ *telle que pour tout* $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *suffisamment grand, tel que*

$$\int_{t_1}^{\infty} r(t)\, \delta^{\sigma}(t)\, \delta^{\frac{-\alpha}{\gamma}}(t) \left(H_{n-3}(t,t_1)\right)^{\alpha} \Delta t = \infty, \tag{4.35}$$

avec

$$\delta^{\Delta}(t) \leq 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

Alors toute solution de l'équation (4.1) *est oscillante.*

Exemple 4.4.1. *On considère l'équation différentielle d'ordre n suivante :*

$$x^{\Delta^n}(t) + t^{-\frac{3}{2}} x^{\alpha}(t) = 0, \quad t \in [1,\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}. \tag{4.36}$$

Avec $n \in [3,\infty)_{\mathbb{Z}}$ *et n pair.*

Ici $a(t) = 1$, $r(t) = t^{-\frac{3}{2}}$, $\gamma = 1$ *et* $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} > 1$, *tel que* α_1, α_2, *impairs positifs.*

On a

$$\int_{t}^{\infty} r(u)\, \Delta u \geq \frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad \textit{pour tout } t \in \overline{2^{\mathbb{Z}}}.$$

Il est clair de voir que (4.3), (4.6) *sont vérifiées.*

Soit

$$\phi_k(t) := h_k(t,t_1), \qquad \textit{pour tout } t \in [1,\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}} \quad \textit{et} \quad \textit{pour } k \in [1,n-1)_{\mathbb{Z}}.$$

Alors (4.16) *et* (4.15) *sont vérifiées.*

Pour tout $k \in [1,n-1)_{\mathbb{Z}}$, *nous avons*

$$A_k(t,t_1) = \frac{h_{k+1}(t,t_1)}{h_k(t,t_1)}, \qquad \textit{pour tout } t \in [1,\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}} \ \textit{et pour } k \in [1,n-1)_{\mathbb{Z}}.$$

Alors

$$E_1(t,t_1)\left(\frac{t-t_1}{a(t)}\int\limits_{\sigma(t)}^{\infty} r(u)\,\Delta u\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geq \frac{h_{n-2}(t,t_1)}{\sqrt{t}}, \qquad \textit{pour tout } t\in[1,\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}\,.$$

Du Théorème 4.3.1, on déduit que toute solution x de l'équation (4.36) *est oscillante.*

Bibliographie

[1] A. Benaissa cherif, A. Hammoudi, F. Z. Ladrani, Density problems in $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ space. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 1(2) July 2013, pp. 178-187.

[2] A. Douglas and S.H. Saker, Interval oscillation criteria for forced Emden-Fowler functional dynamic equations with oscillatory potential. SCIENCE CHINA Mathematics, March 2013 Vol. 56 No. 3, pp 561-576.

[3] B. Jackson, Partial dynamic equations on time scales ; Journal of Computational and Applied Mathematics 186 (2006) 391–415.

[4] B. B.kov, J. Dzǔurina, Oscillation theorems for higher order neutral differential equations. Applied Mathematics and Computation 219 (2012) 3769-3778.

[5] B. Karpuz, Sufficient conditions for the oscillation and asymptotic beaviour of higher-order dynamic equations of neutral type. Applied Mathematics and Computation 221 (2013) 453–462.

[6] C. Zhang, S. H. Saker and T. Li, Oscillation of third-order neutral dynamic equations on time scales. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B : Applications et Algorithms 20 (2013) 333-358.

[7] C.Zhanga, R.P. Agarwal , M. Bohner, T. Li, New results for oscillatory behavior of even-order half-linear delay differential equations. Applied Mathematics Letters 26 (2013) 179–183.

[8] D.X. Chen, Oscillation and Asymptotic Behavior of Solutions of Certain Third-Order Nonlinear Delay Dynamic Equations. Theoretical Mathematics et Applications, vol.3, no.1, 2013, 19-33.

[9] E. Thandapani1, V. Piramanantham, S. Pinelas, Oscillation theorems of fourth order nonlinear dynamic equations on time scales, International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 76 No. 4 (2012), 455-468.

[10] F.Z. Ladrani, A. Hammoudi, and A.Benaissa Cherif, Oscillation theorems for fourth-order nonlinear dynamic equations on time scales. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 3(2) July 2015, pp. 46-58.

[11] H. A. Agwa, A. M. M. Khodier and H. A. Hassan, Oscillation of Second-Order Nonlinear Delay Dynamic Equations on Time Scales. Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume 2011, Article ID 863801, 15 pages.

[12] L.Erab, A. Peterson, S.H.Saker, Asymptotic behavior of solution of third-order non linear dynamic equation on time scales. Journal of Computational and Applied Mathematics 181(2005) 92-102.

[13] L.Erbe, A.Peterson, S. H. Saker. Hille and Nehari type criteria for third dorder dynamic equations. J. Math. Anal. Appl. 329(2007), 112–131.

[14] L.Erbe, T.S.Hassan and A.C.Peterson, Oscillation criteria for nonlinear damped dynamic equations on time scales. Appl. Math. Comput. 203, 343–357 (2008).

[15] M. Bohner, A.C.Peterson, Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. Birkäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[16] M. Bohner, A.C. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[17] M .Tamer , Behavior of solutions of a third-order dynamic equation on time scales. Senel Journal of Inequalities and Applications 2013.

[18] R. P. Agarwal, M. Bohner, S. Tang, T. Li, C. Zhang, Oscillation and asymptotic behavior of third-order nonlinear retarded dynamic equations. Applied Mathematics and Computation 219 (2012) 3600–3609.

[19] R. P. Agarwal , M.Bohner , T. Li , C. Zhang, A new approach in the study of oscillatory behavior of even-order neutral delay differential equations. Applied Mathematics and Computation 225 (2013) 787–794.

[20] R. P. Agarwal, M. Bohner, T. Li and C.Zhang, Oscillation Theorems for Fourth-Order Half-Linear Delay Dynamic Equations with Damping. Medite. J. Math. Volume 2013.

[21] R. P. Agarwal, M. Bohner and S. H. Saker, Oscillation of second order delay dynamic equations, Canadian Applied Mathematics Quarterly, Volume 13, Number 1, Spring 2005.

[22] R.P. Agarwal, D. O'regan et S. H. Saker ; Oscillation criteria for non-linear perturbed dynamic equations of second-order on time scales ; J. Appl. Math. & computing vol. 20(2006), no. 1 - 2, pp. 133 - 147.

[23] R. J. Higgins, Oscillation theory of dynamic equations on time scales ; University of Nebraska at Lincoln (2008).

[24] R.J. Higgins, Some Oscillation Results for Second-Order Functional Dynamic Equations ; Advances in Dynamical Systems and Applications ISSN 0973-5321, Volume 5, Number 1, pp. 87–105 (2010)

[25] S. Hilger, Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math., 18 (1990) 18-56.

[26] S.H.Saker, Oscillation criteria of second-order half-linear dynamic equations on time scales, Journal of Computational and Applied Mathematics 177(2005) 375-387.

[27] S. H. Saker, Oscillation of Second-Order Forced Non linear Dynamic Equations on Time Scales, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2005, No. 23, 1-17.

[28] S. H. Saker, Oscillation of second-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales, Journal of Computational and Applied Mathematics 187 (2006) 123-141.

[29] S.H.Saker, Oscillatory behavior of a certain class of Second-order nonlinear perturbed dynamic Equations on time scales ; J. Korean Math. Soc. 47 (2010), No. 4, pp. 659-674.

[30] S. R. Grace, M. Bohner and S. Sun, Oscillation of fourth-order dynamic equations. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 39 (4) (2010), 545 – 553.

[31] S. Saker, Oscillation Theory of Dynamic Equations on Time Scales, Second and Third Orders, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010.

[32] S. Tang, T. Li and, E. Thandapani, Oscillation Theorems for Second-Order Half-Linear Advanced Dynamic Equations on Time Scales ; Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume 2011, Article ID 840569, 16 pages.

[33] S.H. Saker, Oscillatory behavior of a certain class of Second-order nonlinear perturbed dynamic Equations on time scales, J. Korean Math. Soc. 47 (2010), No. 4, pp. 659-674.

[34] S.H. Saker, Oscillation Theory of Delay Differential and Difference Equations, Second and Third Orders, VDM Verlag Dr. Muller 2010.

[35] S.R.Grace, R. P. Agarwal, S. Pinelas, On the oscillation of fourth-order superlinear dynamic equations on time Scales. Dynamic Systems and Applications 20(2011)45-54.

[36] S. R. Grace, On the Oscillation of nth Order Dynamic Equations on Time-Scales. Mediterr. J. Math. 10 (2013), 147–156.

[37] S R. Grace, On the oscillation of higher order dynamic equations, Journal of Advanced Research (2013) 4, pp 201-204.

[38] T. Li, C. Zhang, B. Baculikova, J. Dzurina, On the oscillation of third-order quasi-linear delay differential equations. Tatra Mt. Math. Publ 48(2011), 117-123.

[39] T. Sun, H. Xi et X Peng, Asymptotic Behavior of Solutions of Higher-Order Dynamic Equations on Time Scales. Advances in Difference EquationsVolume 2011, Article ID 237219, 14 pages.

[40] T. Li, Z. HAN, c ying sun, Oscillation criteria for third-order nonlinear Delay dynamic equations on time scales, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 3 Issue 1(2011), Pages 52-60.

[41] T. Li, Z. Han, S. Sun and Y. Zhao, Oscillation Results for Third Order Nonlinear Delay Dynamic Equations on Time Scales. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 34(3) (2011), 639–648.

[42] T. Li, E.Thandapani and S. Tang. Oscillation theorems for fourth-order delay dynamic equations on time scales. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 3 Issue 3(2011), Pages 190-199.

[43] V. Lakshmikantham, S. Sivasundaram and B. Kaymakcalan, Dynamic Systems on Mesure Chains, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[44] X. Wu, T.Sun, H. Sxi and C. Chen, Oscillation criteria for fourth-order nonlinear dynamic equations on time Scales. Abstract and Applied Analsis, Volume 2013, Article ID 740568, 11 pages.

[45] Y. QI and J. YU, Oscillation criteria for fourth-order nonlinear delay dynamic equations. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2013 (2013), No. 79, pp. 1-17.

[46] Y. Shi, Oscillation criteria for nth order nonlinear neutral differential equations. Applied Mathematics and Computation 235 (2014) 423–429.

[47] Z. Han, T. Li, S. Sun and C. Zhang, Oscillation Behavior of Third-Order Neutral Emden-Fowler Delay Dynamic Equations on Time Scales, Advances in Difference Equations Volume 2010, Article ID 586312, 23 pages.

Résumé

Ce travail est organisé en trois parties.
La première partie consiste à étudier de l'oscillation de la solution de l'équation différentielle d'ordre trois sur les échelles de temps de la forme

$$(q((p(x^{\Delta})^{\gamma})^{\Delta})^{\beta})^{\Delta}(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}. \qquad (E_1)$$

Elle généralise le travail de [12], [38], [41] et [18].
Dans la seconde partie on s'intéresse aux solutions oscillantes de l'équation différentielle du quatrième ordre sur les échelle de temps du type

$$(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^3}(t) + q(t)\,(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t) + f(t, x(\tau(t))) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}. \quad (E_2)$$

Dans la dernière partie, on généralise à l'ordre supérieur et on étudie l'équation différentielle suivante

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t) + f(t, x^{\alpha}(t)) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}, \qquad (E_3)$$

avec $n \geq 3$.
Nous établissons des théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour que toute solution des équations différentielles (E_1) ou (E_2) ou (E_3) soit oscillante ou convergente.

Summary

This work is organised of three parts.

The first part consists to study the oscillation of the solution of the third order differential equation on the time scales of the type :

$$(q((p(x^{\Delta})^{\gamma})^{\Delta})^{\beta})^{\Delta}\,(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}\,. \tag{E_1}$$

It generalizes the work of [12], [38], [41] and [18].

In the second part, we are interested in the oscillation of the solution of the fourth order differential equation on the time scales of the type

$$(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^3}\,(t) + q\,(t)\,(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t) + f\,(t, x\,(\tau\,(t))) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}\,. \tag{E_2}$$

In the last part, we generalize to the superior order. We study the following differential equation

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t) + f\,(t, x^{\alpha}\,(t)) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}\,, \tag{E_3}$$

with $n \geq 3$.

We formulate theorems which give sufficient conditions so that all solution of differential equation (E_1) or (E_2) or (E_3) are oscillating or converging.

ملخص :

يَنقَسِم هَذَا العَمَل الَى ثَلَاث اجزَاء مُهِمة

الجُزء الَاوَل نَدرُس فِيهِ تَذَبذب المُعادَلة التَفَاضليَة من الدَرجَة الثَالِثة في المقَايِيس الزَمَنية المعُطَاة كَمَا يلي :

$$(q((p(x^{\Delta})^{\gamma})^{\Delta})^{\beta})^{\Delta}\,(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}. \qquad (E_1)$$

امَا في الجُزء الثَاني نَدرُس فِيهِ تَذَبذب المُعادَلة التَفَاضليَة من الدَرجَة الرَابِعة في المقَايِيس الزَمَنية المعُرَفَة كَمَا يلي :

$$(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^3}\,(t) + q\,(t)\,(p(x^{\Delta})^{\alpha})^{\Delta^2}(t) + f\,(t, x\,(\tau\,(t))) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}. \quad (E_2)$$

امَا في الجُزء الَاخيرَ نعَمم في دَرجَة المُعادَلة التَفَاضليَة في المقَايِيس الزَمَنية المعُرَفَة كَمَا يلي :

$$\left(a\left(x^{\Delta^{n-2}}\right)^{\gamma}\right)^{\Delta^2}(t) + f\,(t, x^{\alpha}\,(t)) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}. \qquad (E_3)$$

كُلَ النَظريَاتِ التي وَجَدنَهَا هي مِن اجَل شروط كَافيَة لِلحُصول علَى انَ كُلَ حُلول المُعادَلَات التَفَاضليَة السَابِقَة مُتَذَبذبة او مُتَقَارِبة.