MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MÉMOIRE

présenté en vu d'obtenir le grade de Magister,intitulé :
"***Mécanique Des Solides et Des Structures*** "
par

KETTAF Fatima Zohra

Approche Analytique Pour L'Évaluation Des Températures Critiques De Flambement Dans Les Structures En Composites

soutenu en Octobre 2012 devant le jury composé de :

Président :	E.A. Adda Bedia	Professeur	SBA
Encadreur :	M.Benguediab	Professeur	SBA
Examinateur :	A.Tounsi	Professeur	SBA
Examinateur :	M.Elajrami	Maître de Conférence	SBA
Examinateur :	K.H.Berrahou	Professeur	SBA

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mon encadreur le Professeur Mohamed BENGUEDIAB d'avoir accepté de m'encadrer, pour m'avoir confié un sujet aussi intéressant et d'actualité, pour sa disponibilité et son soutien pendant les moments difficiles.J'ai beaucoup appris de sa grande culture scientifique et il a réussi à me faire connaître la discipline mécanique qui reste un domaine assez vaste.

Je remercie vivement le Professeur A. TOUNSI qui s'est montré très disponible et à l'écoute de mes idées et mes questions malgré ses charges et d'avoir la gentillesse d'apporter généreusement son aide.

Je remercie le Professeur E.A. ADDA BEDIA pour m'avoir bien accueilli dans son laboratoire LM H et d'avoir accepté de présider le jury.

J'adresse mes remerciements à Messieurs les professeurs A.Tounsi , K.H.Berrahou et le Dr M.Elajrami d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

J'exprime ma gratitude à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce travail.

Dedicated with Love to My Family...

Approche Analytique Pour l'Évaluation Des Températures Critiques De Flambement Dans Les Structures En Composites

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale **1**

1 Généralités sur les Matériaux Composites **3**

1.1 Définition 4
1.2 Développement historique 4
1.3 Avantages et inconvénients 5
1.4 Définitions géométriques et physiques 6
1.4.1 Type de matériau 6
1.4.2 Homogénéité 6
1.4.3 Hétérogénéité ou Inhomogénéité 6
1.4.4 Isotropie 7
1.4.5 Anisotropie / Orthotropie 7
1.5 Types et classification des matériaux composites 7
1.6 Les constituants des matériaux composites 9
1.6.1 Les Matrices 9
1.6.2 Les renforts 11
1.6.3 L'interface 13
1.7 Architecture des matériaux composites 13
1.7.1 Monocouches 13
1.7.2 Stratifiées 13
1.7.3 Sandwichs 13
1.7.4 Autres architectures 14
1.8 Monocouches et Stratifiés : *caractéristiques, configurations, analyse micromécanique et macromécanique* 14
1.9 Lois de comportement des composites 16
1.9.1 Matériau anisotrope 17
1.9.2 Matériau monoclinique 17
1.9.3 Matériau orthotrope 17

1.9.4 Matériau unidirectionnel 18
1.9.5 Matériau isotrope 18
1.10 Application des matériaux composites 18
1.11 Conclusion 20
Bibliographie 20

2 Phénomène du Voilement 21
2.1 Historique de ce phénomène 22
2.2 Qu'est-ce que le flambement ? 23
2.3 Qu'est-ce que le voilement ? 23
2.4 Comment se produit le voilement ? 23
2.5 Comparaison entre Flambement et Voilement 24
2.6 Conditions aux limites[6] 25
2.6.1 Encastrement 26
2.6.2 Simplement appuyé 26
2.6.3 Libre 26
2.7 Comportement de voilement et post-voilement des plaques rectangulaire minces et parfaites 27
2.7.1 Compression dans la direction x avec les bords chargés simplement appuyés 27
2.7.2 Compression dans la direction x avec les bords chargés encastrés 30
2.7.3 Compression dans les deux directions 31
2.7.4 Compression dans la direction x variant linéairement 32
2.7.5 Cisaillement 32
2.7.6 Combinaison entre compression et cisaillement 33
2.8 Conclusion 33
Bibliographie 34

3 Théories Des Plaques 36
3.1 Définition d'une plaque 36
3.2 Historique du développement des théories des plaques 37
3.3 Les équations de mouvement d'une plaque 40
3.4 Hypothèses cinématiques 41
3.5 Théorie classique des plaques 42
3.6 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre 43
3.7 Limitation de la CPT et la FSDT 44
3.8 Théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé 45
3.9 Limitation de la CPT, FSDT et HSDT 46
3.10 Théories comprenant les déformations dans la direction transversale . 47
3.11 Conclusion 47
Bibliographie 48

4 Analyse Statique du Voilement des Plaques Stratifiées 52
4.1 Fonctions de Déplacement 53
4.2 Relations Déformation-Déplacement 53
4.3 Relations Contrainte-Déformation 54
4.4 Résultantes et Moments 55
4.5 Equations d'équilibre 56
4.6 Résultats et Discussions 57
4.7 Conclusion 64
Bibliographie 65

Conclusion générale et perspectives 67

TABLE DES FIGURES

1.1 Phases d'un matériau composite. 4
1.2 Observations macroscopiques (A,B) et microscopiques (a,b) pour une couche unidirectionnelle. 6
1.3 Classification des systèmes de matériaux composites. 7
1.4 Différentes familles des matrices. 9
1.5 Différents matériaux des renforts. 11
1.6 Construction d'un stratifiée. 13
1.7 Matériau composite Sandwich. 14
1.8 Stratifié multidirectinnel avec un système de référence fixe. 14
1.9 Différents starges d'observation et types d'analyse d'un matériau composite 15
1.10 Modèle d'un composite unidirectionnel transversalement chargé . . . 16
1.11 Schéma d'un matériau orthotrope de révolution. 18

2.1 Voilement d'une plaque. 23
2.2 Courbes charge-déplacement. 25
2.3 Plaque comprimée dans une seule direction. 27
2.4 La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque simplement appuyée.[19] 28
2.5 La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque avec des bords longitudinaux encastrés.[19] 29
2.6 La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque avec un bord longitudinal encastré et l'autre simplement appyué.[19] 29
2.7 La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque avec un bord longitudinal encastré et l'autre libre.[19] 29
2.8 La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque avec un bord longitudinal libre et l'autre simplement appyué.[19] 30
2.9 Plaque comprimée dans les deux directions. 31
2.10 Plaques simplement appuyées en cisaillement.[17] 33

2.11 Plaques encastrées en cisaillement.[3] 33

3.1 Schéma d'une plaque. 37
3.2 Cinématique de la déformation en fonction de la théorie classique des plaques. 42
3.3 Cinématique de Reissner-Mindlin. 43
3.4 Cinématique de la théorie d'ordre élevé. 45

4.1 les paramètres géométriques et le système de coordonnées de la plaque. 53
4.2 Température critique VS a/b 62
4.3 Température critique VS a/b en utilisant différentes théories 62
4.4 $\frac{N^T}{N_{cr}}$ pour une plaque carrée 62
4.5 Température critique VS $E1/E2$ 63
4.6 Température critique VS $\alpha 2/\alpha 1$ 63
4.7 Température critique VS nombre de chouches. 64

LISTE DES TABLEAUX

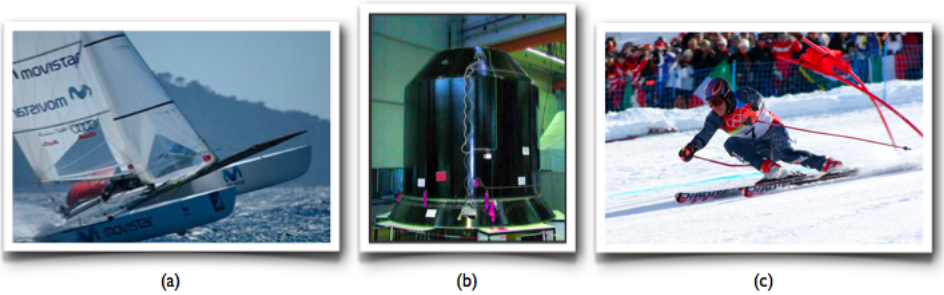
1.1 Types des matériaux composites. 9

4.1 Propriétés des matériaux 61
4.2 Température critique de voilement pour une plaque simplement appuyée 61
4.3 Comparaison et convergence des températures critiques minimales des plaques orthotropes et isotropes monocouche. 64

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dès son apparence, l'homme a toujours essayé d'améliorer ces conditions de vie en assurant le confort, la facilité, la sécurité, l'économie. Ce développement a touché tous différents domaines en particulier les matériaux :
L'homme a débuté par l'utilisation des choses comme telles sont en nature, puis ses exigences l'ont conduit à découvrir de nouvelles méthodes pour créer de nouveaux matériaux (ex : les alliages). Pour combler ces besoins, il lui nécessite d'augmenter la résistance et alléger les structures, il a pu combiner deux matériaux ou plus en ayant un résultat plus performant d'où naissent les matériaux composites.
On sait tous que chose n'est parfaite aux yeux des chercheurs ; ce nouveau natif n'a pas pu les contenter, car soit il est moins résistant, difficile à mettre en oeuvre, couteux, non conducteur... Donc la recherche actuelle se base sur la recherche d'un matériau idéal qui n'aurait pas les faiblesses des métaux (*recherche menée par L'Agence d'exploration aérospatiale japonaise*), matériau à base de matière première issue de ressources renouvelables ex : base de fibres de cellulose (*recherche faite par Rhodia*)...
Les matériaux composites permettent d'atteindre des niveaux de performances inégalés. En effet, ils possèdent une structure géométrique spécialement conçue pour leur conférer des propriétés que leurs constituants élémentaires ne possèdent pas individuellement, et leur permettre de remplir de nombreuses fonctions techniques. Pour tirer le meilleur parti de leurs capacités, les composites sont généralement conçus en même temps que les pièces qu'ils constituent. La frontière entre le produit et le matériau est donc plus floue qu'avec les matériaux traditionnels, ce qui implique de profonds changements dans la conception des produits industriels.
Les matériaux composites suscitent un intérêt croissant de la part de nombreux secteurs industriels, et leur emploi tend à se généraliser.
Cet engouement s'explique principalement par la faible masse volumique des composites qui, par ailleurs, possèdent des propriétés physico-chimiques intéressantes (mécaniques, thermiques, chimiques...) ; cela permet un allègement considérable des structures qui entraîne, dans le cas du transport aérien, une réduction de la consommation de carburant et des émissions de polluants. Le secteur aéronautique n'est d'ailleurs

pas le seul à s'intéresser de près à ces matériaux : l'industrie nautique, ferroviaire, spatiale, le bâtiment, les sports et loisirs fourmillent eux aussi de nouvelles applications.



Quelques applications des matériaux composites : (a) un catamaran, (b) le support de la charge utile d'Ariane 5 (c) des skis de compétition.

Comme toutes autres structures, les structures en composite sont aussi objet de se déformer suite à différentes combinaisons de chargement, ce qui induit à différents phénomènes tels que le gauchissement, flambement/voilement, le déversement
Dans ce mémoire on s'intéresse au flambement : un phénomène qui se produit lorsque la répartition et la quantité des contraintes dépasse un certain niveau critique ; ces contraintes ont plusieurs origines :

- Des origines thermiques où un matériau est soumis à des variations de température.
- Des origines mécaniques quand un matériau subit une déformation plastique hétérogène.

Dans notre études on s'intéresse particulièrement au voilement thermique -*puisqu'on va étudier une plaque en composite*- et à l'évaluation des températures critiques qui en sont la cause. Ce phénomène peut être rencontré en espace lorsque un engin se trouve où le rayonnement solaire peut générer de la chaleur suffisante pour provoquer de grandes déformations.
L'étude des différents paramètres influençant ce phénomène est présente, tels que le **module de young**, le **coefficient de dilatation thermique**, le **rapport** entre les **dimensions** de la plaque, le **nombre des couches** ainsi que leurs **orientation**. Une étude comparative entre plusieurs théories est faite.
Notre travail est structuré comme suit :

- Premièrement ; on commence par des généralités sur les matériaux composites en décrivant leurs Lois de comportement, types et classification.
- Deuxièmement ; on va décrire le phénomène de voilement en expliquant comment il se produit et le comportement des plaques rectangulaire minces et parfaites sous l'effet de différents types de chargement.
- Le troisième chapitre est consacré à la théorie des plaques, on montre les diverses théories proposées en faisant la comparaison.

- Le dernier chapitre présente l'analyse statique du voilement des plaques stratifiées et les résultats obtenus.
- Enfin, ce mémoire se termine par une conclusion et des perspectives sont proposées

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

L'industrie désire dans un grand nombre de problèmes concevoir des structures présentant un rapport performance-poids le plus élevé possible. Pour obtenir cela, elle recherche des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques maximales. Tous ces matériaux présentent un défaut majeur, ils sont fragiles et donc cassants ; un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure ; on n'obtient donc pas la résistance théorique espérée. Si ces mêmes matériaux sont fabriqués sous forme de fibres, leurs résistances pratiques sont augmentées considérablement. L'exemple le plus connu est celui du verre. Une plaque de verre casse facilement ; par contre, un ensemble de fibres de verre résiste à une contrainte de traction de l'ordre de 3000 MPa, soit deux fois la résistance d'un acier très haute résistance. Cela tient au fait que :

- la probabilité d'avoir un défaut est plus faible sur une fibre que sur une plaque.
- un défaut dans une fibre n'entraîne que la rupture de celle-ci ; le défaut ne se propage pas.

Pour utiliser pratiquement ces fibres, il est nécessaire de les lier par une matrice. La matrice a un rôle mécanique important ; en traction elle retransmet l'effort d'une fibre cassée vers d'autres fibres ; en compression elle stabilise les fibres en flambage.
Un tel matériau constitué de deux phases distinctes (fibres assemblées par une matrice) est hétérogène. L'analyse de son comportement et la prévision de ses propriétés vont faire intervenir les caractéristiques de la matrice, celles des fibres, des problèmes d'interface et des conditions de fabrication. En effet, les propriétés mécaniques des composites sont très dépendantes des fibres employées : nature, répartition, taux, longueurs, diamètres, ensimages (Les propriétés sont élevées uniquement dans la direction des fibres. Pour réaliser des structures soumises à des efforts multiaxiaux, il

est nécessaire d'orienter cet élément de base suivant des directions déterminées en fonction des sollicitations)... Toutefois, les propriétés électriques, chimiques, photochimiques, thermiques sont largement affectées par celles de la matrice.

1.1 Définition

Une structure en composite est un système matériel constitué par deux ou plusieurs phases sur une échelle macroscopique, dont les performances et les propriétés mécaniques sont conçues pour être supérieures à celles des matériaux constitutifs agissant de manière indépendante. L'une des phases est généralement discontinue, plus rigides et plus forte et appelée renfort, tandis que la phase moins rigide, plus faible et continue est appelée matrice. Parfois, en raison des interactions chimiques ou d'autres effets de transformation, une phase supplémentaire, appelée interphase, existe entre les renforts et la matrice. Les propriétés d'un matériau composite dépendent des propriétés des constituants, la géométrie et la distribution des phases. Un des paramètres les plus importants est la fraction volumique (ou poids) de renfort, ou taux volumique des fibres. La distribution de renfort détermine l'homogénéité ou uniformité du système matériel, ainsi que leur géométrie et orientation affectent l'anisotropie du système.

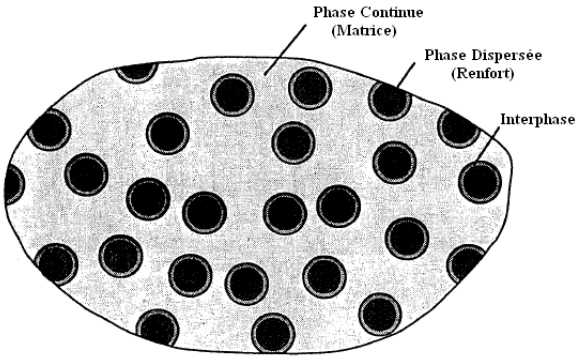


FIG. 1.1 – Phases d'un matériau composite.

Les phases du système composite ont des rôles différents qui dépendent du type et de l'application du matériau composite. Dans le cas des matériaux composites de faibles à moyennes propriétés, le renfort, généralement sous la forme de fibres courtes ou des particules, offre une certaine rigidité, mais seulement locale, du matériau. La matrice, d'autre part, est le support de charge principale constituant et régissant les propriétés mécaniques du matériau. Dans le cas des matériaux composites de haute performance structurelle, le renfort généralement sous fibres continues est le squelette du matériau qui détermine sa rigidité et résistance dans le sens des fibres. La phase matrice fournit une protection et un support pour les fibres sensibles et un transfert des contraintes locales d'une fibre à une autre. L'interphase, bien que de petite

taille, peut jouer un rôle important dans le contrôle des mécanismes de défaillance, la ténacité et l'ensemble du comportement contrainte-déformation du matériau.

1.2 Développement historique

Historiquement, la notion de renfort fibreux est très ancienne. Il ya des références bibliques à des briques d'argile de paille renforcés dans l'Égypte ancienne. Des barres de fer ont été utilisées pour renforcer la maçonnerie au XIXe siècle, conduisant à l'élaboration de l'acier-béton (béton armé). Résine phénolique renforcée avec des fibres d'amiante a été introduite au début du XXe siècle. Le premier bateau en fibre de verre a été fait en 1942 ; des matières plastiques renforcées ont également été utilisées dans les aéronefs et les composants électriques à ce moment. L'enroulement filamentaire a été inventé en 1946 et incorporée dans des applications de missiles dans les années 1950. Les premières fibres de Bore et de Carbone haute résistance ont été introduites dans les années 1960, avec des applications de matériaux composites avancés à des composants d'avions en 1968. Des composites à matrice métallique tels que le Bore/Aluminium ont été introduits en 1970. DuPont a développé le Kevlar (Aramide) en 1973. A partir de la fin des années 1970, les applications des matériaux composites étaient largement développées pour envelopper les avions, l'automobile, les équipements de sport et les industries biomédicales. Les années 1980 ont été marquées par une augmentation significative de l'utilisation des fibres à modules élevés. Depuis les années 90, l'accent est mis sur le développement des matériaux composites à matrice métallique et à matrice céramique, ainsi que les composites carbone/carbone, pour des applications à haute température. les applications des composite comprennent les conduites souterraines et des conteneurs, bateaux, véhicules terrestres, des aéronefs et des structures aérospatiales, composantes d'automobile, des équipements sportifs, les produits biomédicaux et de nombreux autres produits conçus pour avoir des performances mécaniques élevées et/ou la stabilité de l'environnement couplé avec un faible poids.[2]

1.3 Avantages et inconvénients

Les Composites ont des avantages uniques par rapport aux matériaux monolithiques, comme :

- haute résistance,
- haute rigidité,
- longue durée de vie de fatigue,
- faible densité,
- meilleure tenue au feu,
- insensibilité aux produits chimiques couramment utilisés dans la mécanique,
- adaptabilité à la fonction prévue de la structure.

Une amélioration supplémentaire peut être réalisée en :
- résistance à la corrosion,
- résistance à l'usure,
- apparence,
- stabilité thermique,
- isolation thermique,
- conductivité thermique,
- isolation acoustique,
- tenue aux chocs et aux impacts,
- problèmes d'assemblage.
- coûts prohibitifs.

La base de la performance supérieure structurelle des matériaux composites se situe dans la haute résistance spécifique et de haute rigidité spécifique et dans le caractère anisotrope et hétérogène du matériau. Ce dernier fournit au système composite plusieurs degrés de liberté pour une configuration optimale du matériau.

1.4 Définitions géométriques et physiques

1.4.1 Type de matériau

En fonction du nombre de ses constituants ou ses phases, un matériau est appelé **monophasé** (ou monolithique), **biphasé** (ou à deux phases), **triphasé**, ou **multiphasé**. Les différentes phases d'un composite ont des propriétés physiques et mécaniques et des dimensions caractéristiques distinctes beaucoup plus grandes que les dimensions des molécules ou des grains.

1.4.2 Homogénéité

Un matériau est appelé **homogène** si ses propriétés sont les mêmes à chaque point ou sont indépendantes de l'emplacement. Le concept d'homogénéité est associé à un volume caractéristique et à la définition des propriétés concernées. Selon le volume observé, le matériau peut être homogène ou moins homogène. Si une faible variabilité existe d'un point à l'autre à l'échelle macroscopique, le matériau est considéré comme **quasi-homogène**.

1.4.3 Hétérogénéité ou Inhomogénéité

Un matériau est hétérogène ou inhomogène si ses propriétés varient d'un point à un autre ou dépendent de la localisation. Comme dans le cas ci-dessus, le concept d'hétérogénéité est associé à un volume ou à une échelle caractéristique. Quand cette échelle diminue, le même matériau peut être considéré comme homogène, quasi-homogène ou

hétérogène.

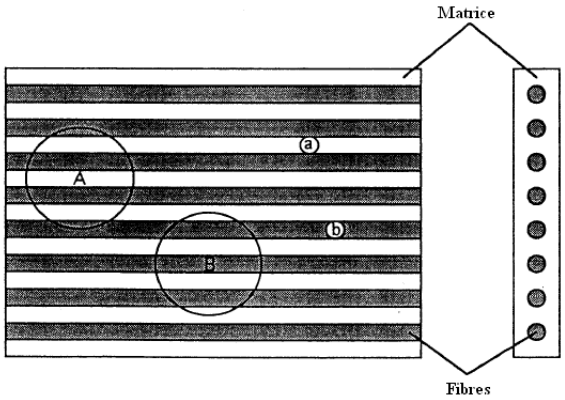


Fig. 1.2 – Observations macroscopiques (A,B) et microscopiques (a,b) pour une couche unidirectionnelle.

Dans la figure 1.2 par exemple, le matériau est considéré comme homogène et anisotrope à l'échelle macroscopique, car il a une composition semblable à différents endroits (A et B), mais ses propriétés varient avec l'orientation. Sur une échelle microscopique, le matériau est hétérogène et isotrope, ayant des propriétés différentes mais indépendantes de l'orientation (a et b).

1.4.4 Isotropie

De nombreuses propriétés des matériaux, tels que la rigidité, la résistance, la dilatation thermique et la conductivité thermique, sont associées à une direction. Un matériau est isotrope lorsque ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions ou sont indépendantes de l'orientation des axes de référence.

1.4.5 Anisotropie / Orthotropie

Un matériau est anisotrope lorsque ses propriétés en un point varie avec la direction ou dépendent de l'orientation des axes de référence. Si les propriétés du matériau selon une direction quelconque sont les mêmes que ceux dans une direction symétrique par rapport à un plan, alors ce plan est défini comme un plan de symétrie du matériau. Un matériau peut avoir zéro, un, deux, trois ou nombre infini de plans de symétrie à travers un point. Un matériau sans aucun plan de symétrie est appelée anisotrope général (ou aeolotropic). A l'autre extrémité, un matériau isotrope a un nombre infini de plans de symétrie.
Dans les matériaux composites on trouve des matériaux orthotropes, c'est à dire, les matériaux ayant au moins trois plans perpendiculaires de symétrie. Les intersections de ces plans définissent trois axes perpendiculaires, appelées axes principaux de symétrie.

1.5 Types et classification des matériaux composites

Les matériaux composites à deux phases sont classés en trois grandes catégories selon le type, la géométrie et l'orientation de la phase de renforcement, comme l'illustre la figure 1.3.

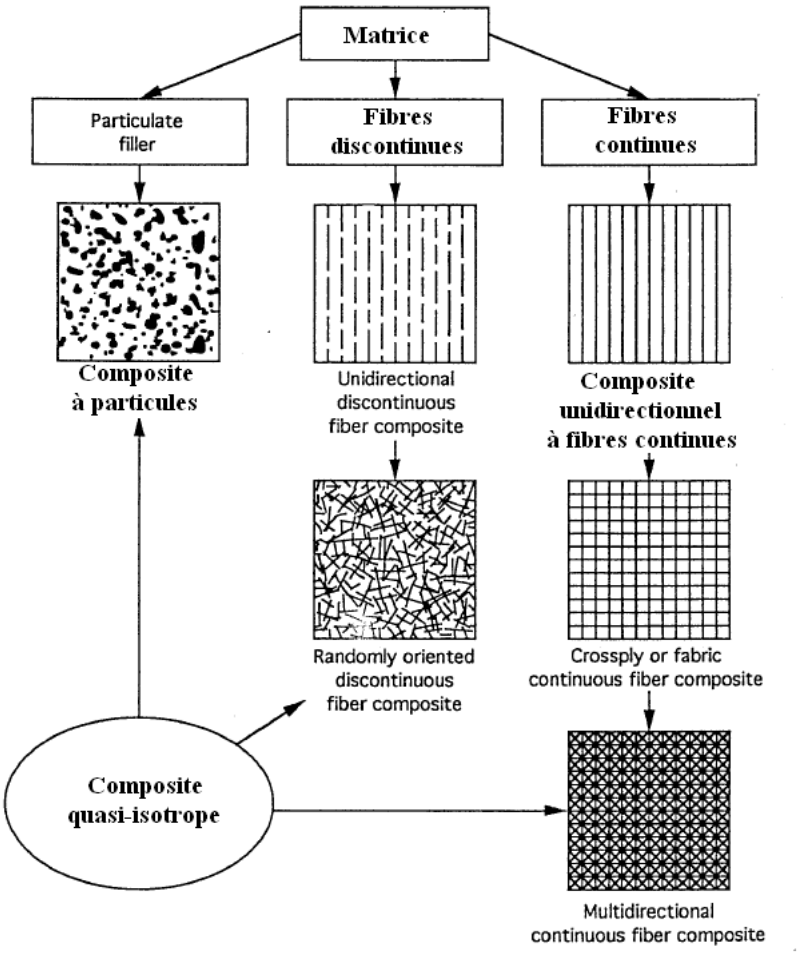


Fig. 1.3 – Classification des systèmes de matériaux composites.

Composites à particules sont constituées de particules de différentes tailles et formes dispersées de façon aléatoire dans la matrice. La raison de la distribution aléatoire des particules est que ces composites peuvent être considérées comme quasi-homogène sur une échelle plus grande que la taille des particules et de l'espacement. Les composites à particules peuvent être constitués de particules non métalliques dans des matrices non métalliques (béton, verre renforcé avec des écailles de mica, les polymères renforcés par des particules fragiles au caoutchouc) ; particules métalliques dans des matrices non métalliques (Particules d'aluminium en caoutchouc polyuréthane utilisés) ; particules métalliques dans des matrices métallique (particules de plomb dans les alliages de cuivre pour améliorer l'usinabilité), et des particules non

métalliques dans des matrices métalliques (silicium des particules de carbure de aluminium, le $SiCp$/Al).
Des composites à fibres discontinues ou courtes contiennent des courtes fibres comme phase de renforcement. Ces fibres courtes, qui peuvent être assez longues par rapport au diamètre, peuvent être soit orientées le long d'un sens ou orientées au hasard. Dans le premier cas, le matériau composite a tendance à être nettement anisotrope ou, plus précisément, orthotrope, alors que dans le second il peut être considéré comme quasi-isotrope.
Des composites à fibres continues sont renforcées par de longues fibres continues et sont les plus efficaces du point de vue de la rigidité et la résistance. Les fibres continues peuvent être toutes parallèles (unidirectionnel composite à fibres continues), peuvent être orientées à angle droit les uns aux autres (nappes croisées ou tissées à fibres continues), ou peuvent être orientées selon plusieurs directions (multidirectionnel composite à fibres continues). Dans ce dernier cas, pour certain nombre de direction des fibres et de distribution de fibres, le composite peut être caractérisé comme un matériau quasi-isotrope.
Les composites renforcé par des fibres peuvent être classés en grandes catégories en fonction de la matrice utilisée : polymère, métal, céramique, carbone (tableau 1.1).

Type de matrice	Fibre	matrice
Polymère	Verre E Verre S Carbone (graphite) Aramide (Kevlar) Bore	Epoxy Polyimide Polyester thermoplastiques PEEK, Polysulfone...
Métal	Bore Borsic Carbone (graphite) Carbure de Silicium Alumine	Aluminium Magnesium Titanium Cuivre
Céramique	Carbure de Silicium Alumine S nitrure de silicium	Carbure de Silicium Alumine Verre-Céramique nitrure de silicium
Carbon	Carbon	Carbon

Tab. 1.1 – Types des matériaux composites.

En plus des types discutés ci-dessus, il y'a les composites stratifiés. Il s'agit de couches minces de différents matériaux liés entre eux, tels que les bi-métaux, les métaux plaqués, les contreplaqués et le formica.

1.6 Les constituants des matériaux composites

1.6.1 Les Matrices

Pour lier les fibres ensemble, on utilise généralement des matrices qui se classent comme suit (figure 1.4)

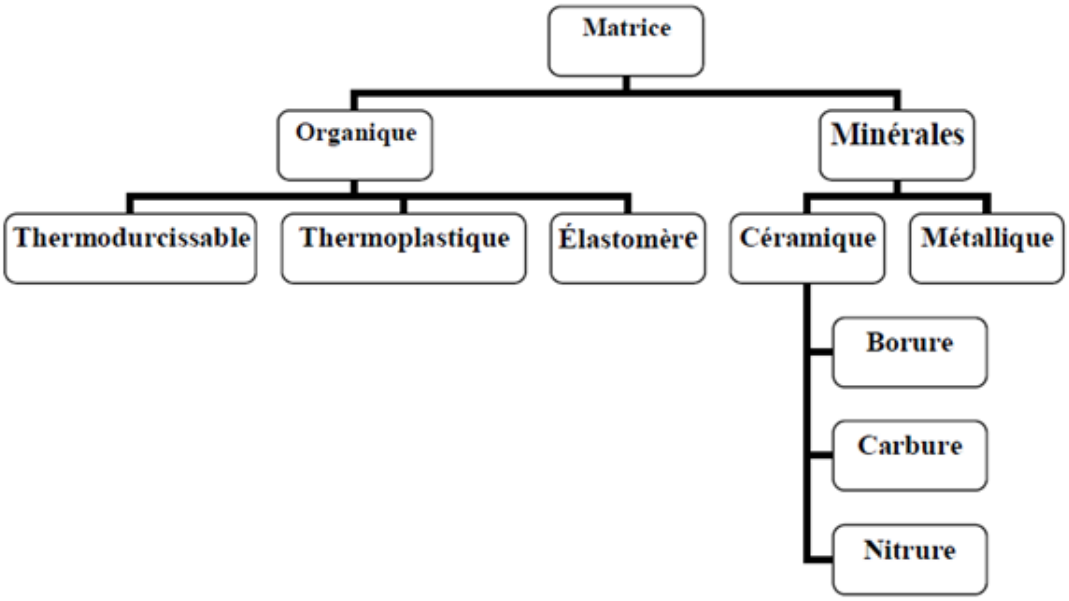


Fig. 1.4 – Différentes familles des matrices.

La matrice est l'un des constituants de base des matériaux composites, elle a pour rôle de :

- donner la forme désirée au produit,
- assurer la cohésion des fibres renforts pour une meilleure homogénéisation de l'ensemble,
- répartir les charges mécaniques et les contraintes encaissées,
- apporter la tenue chimique de la structure,
- protéger les renforts vis-à-vis du milieu extérieur (chocs thermiques ou mécaniques).

Les matrices les plus souvent fréquentées sont :

Résines thermodurcissables

Une résine thermodurcissable est une formulation de différents produits appartenant essentiellement à la chimie organique, qui possède la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à un état solide.

- Résine polyester : elle présente un bon accrochage sur les fibres, un prix réduit, mais a un retrait important et une tenue réduite à la chaleur humide.

- Résine phénolique : ayant de moins bonnes propriétés mécaniques que les résines époxydes, elle n'est utilisée que lorsqu'il y a des exigences vis-à-vis de la tenue au feu (toxicité).
- Résine polyimide : d'un emploi relativement difficile, elle a l'avantage de garder de bonnes caractéristiques sur un large intervalle de température (de$-100 + 260^oC$).
- Résine époxyde : c'est la plus utilisée dans l'industrie aéronautique. Elle présente un bon accrochage sur les fibres, un faible retrait au moulage (de l'ordre de 0,5%) et de bonnes propriétés mécaniques. Elle garde d'excellentes caractéristiques jusqu'à une température de (170^oC).

Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques présentent la propriété de passer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux. Elles présentent plusieurs avantages provenant directement de leur définition :

- mise en oeuvre rapide par thermosoudage.
- possibilité de retransformation ; il est possible de créer des semi-produits (tôle par exemple) qui seront transformables à chaud.

Elles ont, de plus, une meilleure ténacité que les résines thermodurcissables. Elles devraient donc permettre d'améliorer la tenue au choc des composites.
Les résines thermoplastiques avaient au départ deux graves défauts : une faible tenue en température et peu de résistance aux solvants.
De nouveaux produits ont été étudiés pour pallier ces défauts :

- les polyéthersulfones (PES) ;
- les polyétherimides (PEI) ;
- les polyéther-éthercétones (PEEC).

L'imprégnation de fibres à l'aide de ces produits est assez complexe et leur rigidité à température ambiante rend assez difficile le drapage des pièces. Il faut remarquer que l'industrialisation n'en est qu'à son début et l'on peut penser que ces résines auront un développement important.

Matrices métalliques

Malgré une densité (par rapport à l'eau) importante, elles présentent des propriétés intéressantes pour la réalisation de pièces soumises à des frottements.
Seule la voie aluminium et fibres de bore a été étudiée de façon précise et les résultats obtenus ont été moins bons que prévus. Il ne faut pas confondre ces composites composés de fibres longues, et ayant un pourcentage important de fibres, avec les matériaux métalliques renforcés par des renforts discontinus. Dans ce dernier cas, on obtient principalement une augmentation du module d'élasticité.

1.6.2 Les renforts

Les renforts peuvent être utilisés sous différentes formes : particules ou fibres. Une particule ne possède aucune dimension privilégiée, elle est utilisée généralement pour améliorer certaines propriétés des matériaux comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait...etc.
Les fibres se présentent sous plusieurs formes : soit des fibres continues ou discontinues (fibres coupées, fibres courtes etc), et c'est leur arrangement et leur orientation qui permettent de moduler les propriétés mécaniques des matériaux composites.

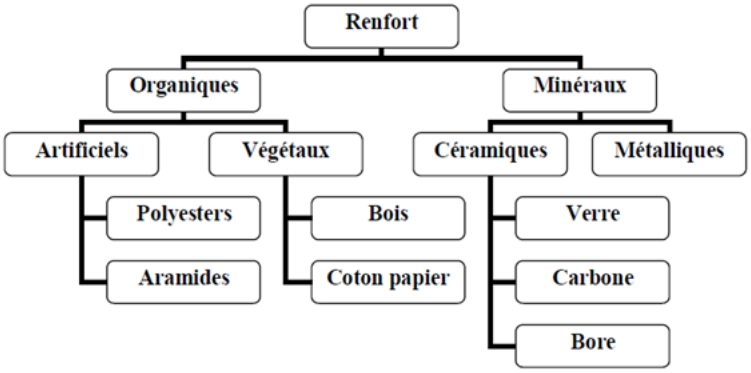


Fig. 1.5 – Différents matériaux des renforts.

La figure 1.5 présente les familles des renforts, parmi les plus utilisées on peut citer :

Fibres de verre

Elles sont fabriquées par étirage rapide de baguettes de verre de quelques dixièmes de millimètre de diamètre, sortant d'une filière chauffée par l'effet de Joule.
L'étirage peut être produit suivant les deux méthodes suivantes :

- le procédé mécanique, dénommé Silionne, dans lequel l'étirage est réalisé par la traction due à l'enroulement du fil sur une broche tournant à grande vitesse ; on obtient des fils continus ;
- le procédé pneumatique, dénommé Verranne, dans lequel l'étirage est produit par entraînement des fibres sous l'action d'un jet d'air sous pression ; on obtient des fibres de faible longueur.

Seul le premier procédé permet d'obtenir des matériaux présentant des caractéristiques mécaniques élevées. Il existe, dans chaque procédé, suivant les compositions chimiques, plusieurs types de verre dont les propriétés caractéristiques sont les suivantes :

- verre E : usage général, bonnes propriétés électriques ;
- verre D : hautes propriétés diélectriques ;
- verre C : bonne résistance chimique ;

– verres R ou S : haute résistance mécanique.

La fibre de verre R et S a une résistance mécanique élevée et une rigidité moyenne. Sa densité relativement élevée par rapport aux autres fibres explique sa position assez moyenne lorsqu'on la compare du point de vue des propriétés spécifiques aux autres fibres. Il ne faut cependant pas oublier que c'est la fibre la moins chère du marché.

Fibres de carbone

Elles peuvent être réalisées par carbonisation de fibres polyacrylonitriles (PAN). Le précurseur est oxydé à une température de lordre de 300^oC puis ensuite chauffé en atmosphère neutre.

Les propriétés mécaniques dépendent de la température de fabrication. Le module de Young augmente régulièrement avec la température tandis que la résistance en traction atteint un pic pour une température de l'ordre de 1500^oC, puis décroît si l'on continue à augmenter la température de fabrication. On obtient ainsi des fibres haute résistance, haut module, et même très haut module.

Les fibres de carbone sont des fibres conductrices, de masse volumique faible, ayant de très bonnes propriétés mécaniques et un coefficient de dilatation négatif.

Fibres de bore

La fabrication de ces fibres est réalisée par un dépôt en phase vapeur du bore sur un filament de tungstène.

Ces fibres chères ont de très bonnes caractéristiques mécaniques. Leur utilisation se restreint au profit des fibres de carbone.

Fibres aramides

Ces fibres sont des polyamides aromatiques. Elles présentent une masse volumique très faible, de très bonnes caractéristiques spécifiques en traction, un coefficient de dilatation négatif. Elles ont l'inconvénient d'avoir une faible résistance en compression, une forte reprise d'humidité et d'être sensibles aux rayons ultraviolets.

1.6.3 L'interface

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Ces produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

1.7 Architecture des matériaux composites

1.7.1 Monocouches

Les monocouches ou nappes (*lamina*), sont des couches planes (ou incurvées) de fibres unidirectionnelles ou tissées dans une matrice. Ils représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

1.7.2 Stratifiées

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.
Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

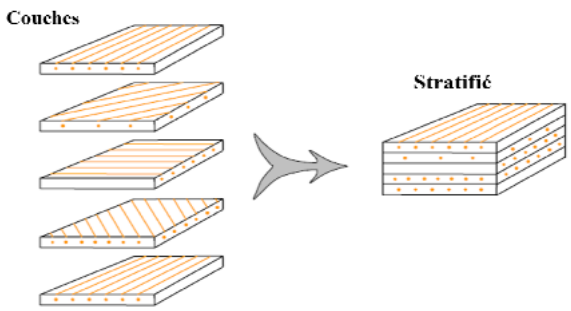


Fig. 1.6 – Construction d'un stratifiée.

1.7.3 Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou coeur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté.
Une telle structure présente en flexion des rapports résistance/masse et rigidité/masse très importants et c'est un excellent isolant thermique.

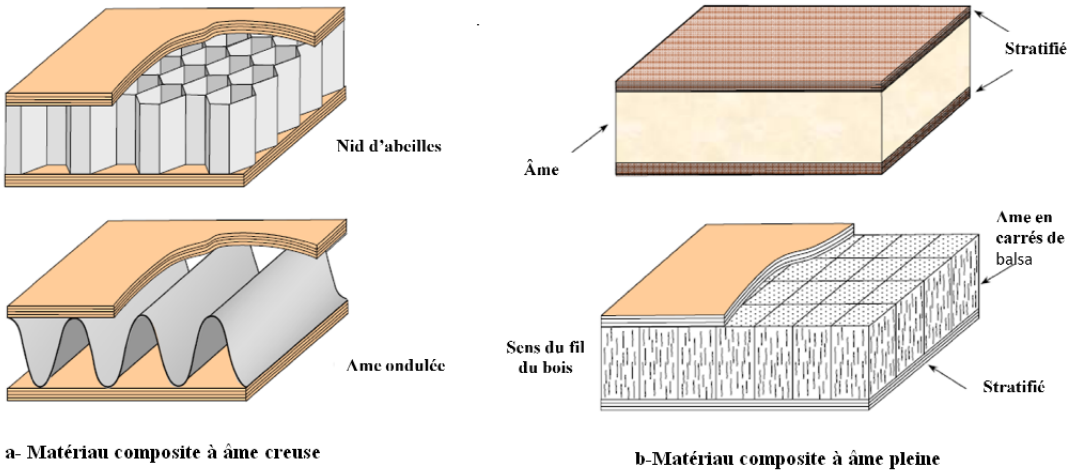


Fig. 1.7 – Matériau composite Sandwich.

1.7.4 Autres architectures

En plus des structures citées ci-dessus, on trouve aussi :

- *Les plaques renforcées* : elles sont constituées de résines ou matrices dans les quelles sont introduits des renforts de types : fibres courtes, billes pleines ou creuses, poudre métallique ou de graphite, ces renforts permettent d'augmenter le module d'élasticité de 2 à 5 fois. Et le comportement mécanique de ces matériaux peut être homogénéisé et son étude est ramenée à celle d'un matériau usuel isotrope.
- *composites volumiques* : ils ont été introduits pour des besoins spécifiques de l'aéronautique, ils sont élaborés à partir de tissage volumique. Ces matériaux sont très onéreux, ils permettent d'obtenir des caractéristiques mécaniques très élevées avec un comportement sensiblement isotrope en volume.

1.8 Monocouches et Stratifiés : *caractéristiques, configurations, analyse micromécanique et macromécanique*

Les monocouches (ou nappes) peuvent être de diverses épaisseur et se composent de différents matériaux. Étant donné que les axes principaux diffèrent de pli à un autre ; il est plus commode d'analyser le stratifié à l'aide d'un système commun fixe de coordonnées (x, y, z) ; comme indiqué la figure 1.8. L'orientation d'une nappe donnée est donnée par l'angle entre l'axe de référence x et l'axe principal de la nappe (orientation des fibres), mesurée dans une direction anti-horaire sur le plan (xy).

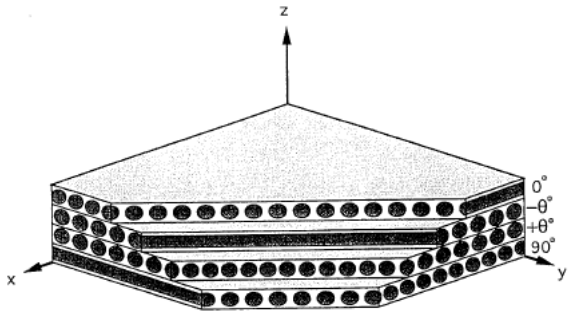


FIG. 1.8 – Stratifié multidirectinnel avec un système de référence fixe.

Composite stratifié contenant plis de deux ou plusieurs types de matériaux sont appelés **composite hybride**(*hybrid composite*) et, plus spécifiquement, **entre couches composites hybride**(*interply hibrid composites*). Par exemple, un stratifié peut être constitué de couches unidirectionnelles verre /époxy, carbone / époxy et aramide / époxy empilées dans un ordre spécifié. Dans certains cas, il peut être avantageux de mêler différents types de fibres, tels que le verre et le carbone ou l'aramide et le carbone, au sein de la même couche unidirectionnelle. Ces composites sont appelés **composites intraply hybrides**(*intraply hybrid composites*). Bien sûr, on pourrait combiner les couches intraply hybrides avec d'autres couches à partir d'un composite hybride entre couches-intraply(*intraply-interply hybrid composite*).
Les stratifiés sont désignés de manière indiquant le nombre, le type, l'orientation et la séquence d'empilement des couches. La configuration du stratifié indiquant la composition de ses couches est appelé **drapage**(*lay-up*). La configuration indiquant, en plus de la composition de couche, l'emplacement exact ou la séquence des différentes couches est appelé **la séquence d'empilage**(*stacking sequence*). Voici quelques exemples de désignations des stratifiés :

unidirectional 6-ply :	$[0/0/0/0/0/0]=[0]_6$
Crossply symmetric :	$[0/90/90/0]=[0/90]_s$
	$[0/90/0]=[0/\bar{9}0]_s$
angle-ply symmetric :	$[45/\text{-}45/\text{-}45/45]=[\pm 45]_s$
	$[30/\text{-}30/30/\text{-}30/\text{-}30/30/\text{-}30/30]=[\pm 30]_{2s}$
angle-ply asymmetric :	$[30/\text{-}30/30/\text{-}30/30/\text{-}30/30/\text{-}30]=[\pm 30]_4$
multi directional :	$[0/45/\text{-}45/\text{-}45/45/0]=[0/\pm 45]_s$
	$[0/0/45/\text{-}45/0/0/0/0/\text{-}45/45/0/0]=[0_2/\pm 45/0_2]_s$
	$[0/15/\text{-}15/15/\text{-}15/0]=[0/\pm 15/\pm 15/0]_T = [0/(\pm 15)_2/0]_T$
hybrid :	$[0^K/0^K/45^C/-45^C/90^G/-45^C/45^C/0^K/0^K]_T = [0_2^K/\pm 45^C/\bar{9}0^G]_s$

ou les sympboles signifient :
le nombre : nombre de couches
s : symmétrique

T : total
¯:montre que ce stratifié est symmétrique par rapport à l'axe de cette couche
Dans le cas des stratifiés hybrides, les lettres signifient le matériau constituant les fibres de la couche (K :Kevlar, C : Carbon, G : Verre).
Les matériaux composites peuvent être visualisés et analysés à différents niveaux et sur des différentes échelles, en fonction des caractéristiques particulières et les comportements à l'étude. Un diagramme schématisant les différents niveaux d'examen et les types d'analyse correspondant est montré dans la figure 1.9.

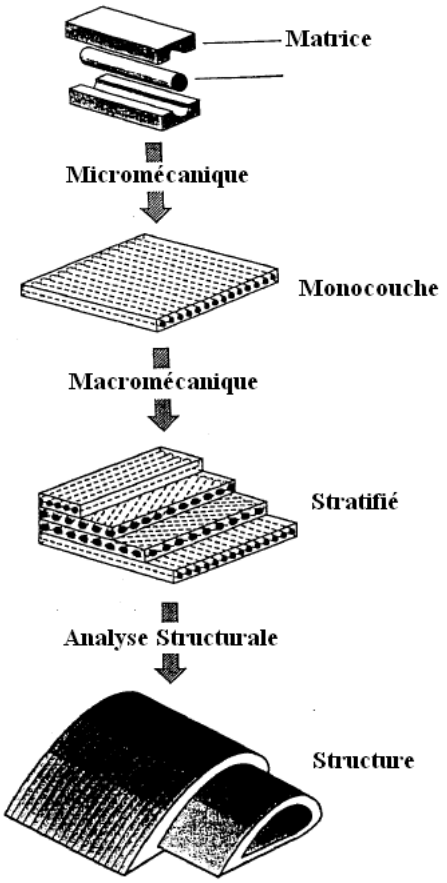


Fig. 1.9 – Différents starges d'observation et types d'analyse d'un matériau composite

Au niveau du constituant l'échelle d'observation est de l'ordre du diamètre des fibres, la taille des particules, ou des interstices de la matrice entre les renforts. Micromécanique est l'étude des interactions des constituants de ce niveau microscopique. Il traite l'état de déformation et de contrainte des constituants et les fissures locales, tels que la fatigue de la matrice (traction, compression, cisaillement), la fatigue des fibres (traction, flambage, fractionnement), et la fatigue de l'interface / interphase (décollement). Un exemple des distributions de contrainte complexes sur la section transversale d'un composite unidirectionnel transversalement chargée est illustré sur

la figure 1.10. Micromécanique est en particulier important dans l'étude des propriétés telles que la résistance, la ténacité et la duré de vie en fatigue, qui sont fortement influencés par les caractéristiques locales. Micromécanique permet également la prévision du comportement en moyenne au niveau des plis en fonction des propriétés des constitutifs et des conditions locales.

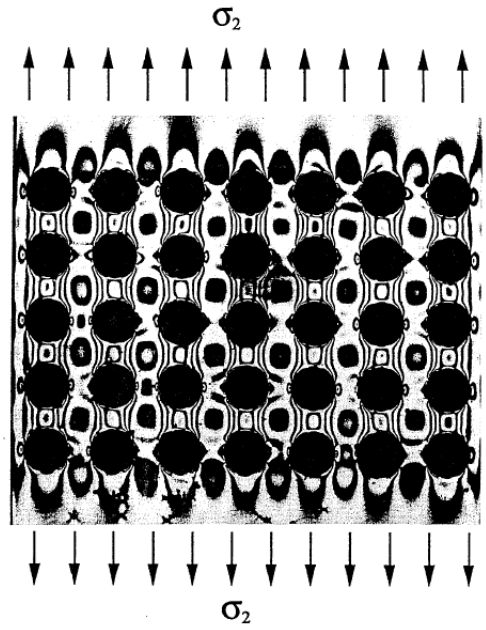


Fig. 1.10 – Modèle d'un composite unidirectionnel transversalement chargé

Au niveau des couches, il est généralement plus rapide de considérer le matériau homogène, mais anisotrope, et utiliser les propriétés moyennes dans l'analyse. Ce type d'analyse est appelée macromécanique et considère la couche unidirectionnelle comme un matériau quasi homogène anisotrope avec ses propres propriétés moyennes de rigidité et de résistance. Les critères de rupture peuvent être exprimés en termes de contraintes moyennes et des résistances globales de la couche sans prendre en compte aucun mécanisme particulier de fissure locale. Cette approche est recommandée dans l'étude de l'élastique globale ou comportement viscoélastique des structures en composites ou des stratifiés, ce qui suppose une continuité dans le matériau.
Au niveau du stratifié, l'analyse macromécanique est appliqué sous la forme de la théorie des stratifiés traitant le comportement global en fonction des propriétés des couches et des séquences d'empilement. Enfin, au niveau du composant ou de la structure, les méthodes d'analyse tel que la méthode des éléments finis couplées avec la théorie des stratifiés donne le comportement global de la structure ainsi que l'état de contrainte dans chaque pli.[3]

1.9 Lois de comportement des composites

La relation d'élasticité linéaire reliant la matrice de rigidité à celle de déformation peut s'écrire sous la forme :$\sigma = C \cdot \epsilon$ Ou matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_{11} & \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{13} & \mathrm{C}_{14} & \mathrm{C}_{15} & \mathrm{C}_{16} \\ \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{22} & \mathrm{C}_{23} & \mathrm{C}_{24} & \mathrm{C}_{25} & \mathrm{C}_{26} \\ \mathrm{C}_{13} & \mathrm{C}_{23} & \mathrm{C}_{33} & \mathrm{C}_{34} & \mathrm{C}_{35} & \mathrm{C}_{36} \\ \mathrm{C}_{14} & \mathrm{C}_{24} & \mathrm{C}_{34} & \mathrm{C}_{44} & \mathrm{C}_{45} & \mathrm{C}_{46} \\ \mathrm{C}_{15} & \mathrm{C}_{25} & \mathrm{C}_{35} & \mathrm{C}_{45} & \mathrm{C}_{55} & \mathrm{C}_{56} \\ \mathrm{C}_{16} & \mathrm{C}_{26} & \mathrm{C}_{36} & \mathrm{C}_{46} & \mathrm{C}_{56} & \mathrm{C}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$

Cette loi est appelée loi de HOOKE généralisée, elle introduit une matrice de rigidité symétrique constituée -dans le cas général- de 21 constantes de rigidité C_{ij}.

1.9.1 Matériau anisotrope

Ou matériau triclinique, c'est un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie, et la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes.

1.9.2 Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan (e1, e2) plan de symétrie du matériau. La loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_{11} & \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{13} & 0 & 0 & \mathrm{C}_{16} \\ \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{22} & \mathrm{C}_{23} & 0 & 0 & \mathrm{C}_{26} \\ \mathrm{C}_{13} & \mathrm{C}_{23} & \mathrm{C}_{33} & 0 & 0 & \mathrm{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_{44} & \mathrm{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_{45} & \mathrm{C}_{55} & 0 \\ \mathrm{C}_{16} & \mathrm{C}_{26} & \mathrm{C}_{36} & 0 & 0 & \mathrm{C}_{66} \end{bmatrix}$$

1.9.3 Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

1.9.4 Matériau unidirectionnel

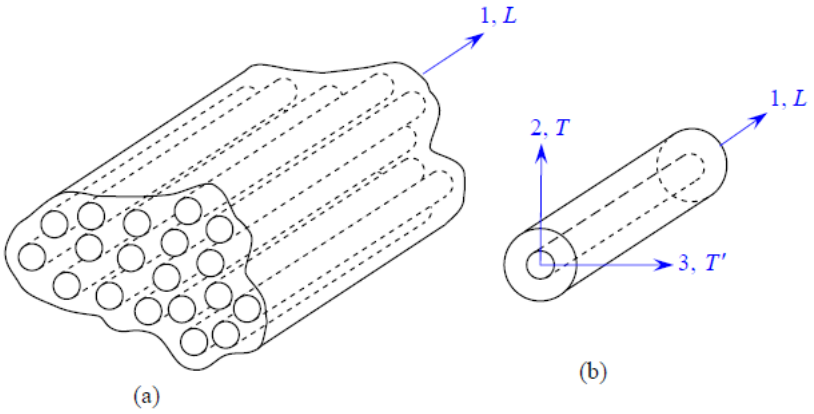


Fig. 1.11 – Schéma d'un matériau orthotrope de révolution.

C'est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e1, ou c'est un matériau orthotrope avec un axe de révolution (orthotrope de révolution), la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

1.9.5 Matériau isotrope

C'est un matériau qui ne possède aucune direction privilégiée et ses propriétés sont indépendantes du choix de l'axe de référence. Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux. La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

1.10 Application des matériaux composites

En raison de leurs coûts de traitement relativement faibles, les composites à matrice polymère et à matrice de ciment sont les types les plus populaires de composite. Les composites à matrice Polymère avec un renfort de fibres continues sont largement utilisés pour les structures légères, comme les cellules. Les composites à matrice polymère avec des particules de métal (par exemple, des particules d'argent) sont utilisés pour les interconnexions électriques. Les composites à matrice caoutchouc renforcée par des particules de carbone noir sont utilisés pour les pneus d'automobile. Les composites à matrice de ciment sous la forme de béton sont largement utilisés pour les infrastructures civiles. Les composites à matrice métallique, à matrice de carbone et à matrice céramique sont moins fréquents, mais ils ont aussi leurs marchés particuliers. Les composites à matrice métallique connu sous le nom de cermets (ce qui signifie combinaison : céramique-métal) qui contiennent une fraction volumique faible des particules céramique sont utilisées dans les outils de coupe tels que les perceuses. Ils sont également utilisés dans les résistances et autres composants électroniques qui ont besoin de résister à des températures élevées.
Composites à matrice métallique contenant des fibres de carbone continues sont utilisées comme matériaux de structure. Cependant, cette application structurelle fait face à une concurrence sévère de la part des alliages métalliques avancés qui sont beaucoup moins chers.
Les composites à matrice carbone sont utilisés à haute température pour les structures légères bien qu'ils souffrent de la tendance de carbone à s'oxyder en présence d'oxygène à des températures à environ 700 ° C. Le marché des composites carbone-carbone est principalement lié à l'aéronautique : les tuyères de fusées et les freins de l'avion. D'autres applications incluent : les éléments chauffants du four, les composants d'engins spatiaux et d'avions, les échangeurs thermiques, les composants de moteurs aérobies hypersoniques.
Les applications biomédicales comprennent des implants (par exemple, les hanches, les valves cardiaques, la peau et les dents), des dispositifs chirurgicaux et de diagnostic, des stimulateurs cardiaques (dispositifs connectés par des fils électriques à la paroi du cur, ce qui permet le contrôle électrique du rythme cardiaque), des dispositifs pour l'équipement d'exercice pour les handicapés, emballage pharmaceutique

(pour la libération contrôlée du médicament dans le corps par exemple) et l'instrumentation d'analyse et de diagnostic chimique (tels que l'équipement d'analyse de sang et l'urine). Les implants sont particulièrement difficiles, car ils doivent être faits de matériaux qui sont biocompatibles (compatible avec des fluides tels que le sang), résistant à la corrosion, résistant à l'usure, résistance à la fatigue, et qui sont en mesure de maintenir ces propriétés sur des dizaines d'années.
Composites à matrice céramique sont plus attrayants que les composites à matrice carbone pour les applications à haute température, en raison de la tendance beaucoup plus faible pour les céramiques à oxyder. Des exemples des matrices céramiques comprennent du carbure de silicium (SiC) et le nitrure de silicium (Si3N4), qui peuvent résister à des températures allant jusqu'à environ 1.700 ° C. Au-dessus de 1.700 ° C, ces céramiques peuvent s'oxyder en présence d'oxygène et devenir dioxyde de silicium (SiO2). Les composites à matrice céramique renforcée de fibres de céramiques sont connues comme les composites céramique-céramique. Il est préférable que la fibre et la matrice sont les mêmes dans la composition pour qu'il n'y a pas de décalage CTE entre eux, pour des raisons de résistance à la fatigue thermique. Un exemple d'un composite céramique-céramique est le composite SiC-SiC. Cependant, la technologie des composites à matrice céramique n'est pas assez mature pour la mise en uvre, en raison à la fois de performance et de coût.[1]

1.11 Conclusion

- Les matériaux composites offrent des options de conception illimitées.
- La sélection du type de matrice et fibre est essentielle dans le processus de conception.
- Les structures peuvent être produites avec des propriétés spécifiques pour répondre aux exigences d'utilisation finale.

Bibliographie

[1] Deborah D. L. Chung , « Composite Materials : Science and Applications » 2nd edition Springer (2010)

[2] Isaac M. Daniel and Ori Ishai, « Engineering Mechanics of Composite Materials », Oxford university press (1994)

[3] Robert M. Jones, « Mechanics of Composite Materials » second edition (1999)

CHAPITRE 2

PHÉNOMÈNE DU VOILEMENT

Lorsque l'on tient compte des déplacements des points d'une structure pour écrire les équations d'équilibre, les déplacements ne sont plus des fonctions linéaires des forces appliquées. Il peut même arriver que les déplacements deviennent très grands sous l'action de forces extérieures finies. Il est indispensable, pour le constructeur, de connaître les conditions dans lesquelles l'équilibre élastique d'une structure est stable. Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élancement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques. Normalement, on considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, mais qui peut aussi être la température (flambement thermique) ou d'autres phénomènes. Pour chaque valeur de N, il n'existe qu'une configuration hors flambement. Dans les problèmes classiques de flambement, le système est stable si N est assez petit et devient instable quand N est grand. La valeur de N pour laquelle le système cesse d'être stable est appelée : valeur critique N_{cr}. Plus généralement, il faut déterminer :

- les configurations d'équilibre de la structure sous les chargements imposés,
- celles parmi ces configurations qui sont stables,
- la valeur critique des chargements et les conséquences sur le comportement qu'ont ces niveaux de charge.

Dans ce chapitre, on considère quelques résultats de base qui existent dans la littérature relatifs au voilement et post-voilement des plaques rectangulaires, minces et parfaites. En utilisant un traitement tout à fait exhaustif, on va considérer toute les combinaisons de chargement et les conditions d'appuis possibles en se basant sur les

cas les plus courants et les combinaisons qui devraient se révéler plus utiles en termes d'expériences.

2.1 Historique de ce phénomène

Les problèmes du flambement et post-flambement représentent une classe particulière de la bifurcation phénomènes ; la longue histoire de la théorie de flambement des structures commence par les études réalisées par Euler[12] en 1744 de la stabilité des poutres flexibles comprimées.
Bien que Von Karman[23] a formulé les équations pour le voilement des plaques minces, linéairement élastiques qui portent son nom en 1910, une théorie générale du voilement des structures élastiques n'a pas été mis en avant jusqu'à ce que Koiter[24], [25], [26] a écrit sa thèse en 1945, selon laquelle le fait que la présence de défauts pourrait donner lieu à des réductions significatives de la charge critique nécessaire pour flamber une structure particulière.
Les théories générales de bifurcation et de stabilité proviennent dans les études mathématiques de Poincaré[8], Lyapunov[1] et Schmidt[5], comme outils mathématique de base, les théorèmes des fonctions inverses et implicites, qui peuvent être utilisés pour fournir une justification rigoureuse de la asymptotique et la perturbation de type expansions qui dominent les études de flambage et après flambage des structures.
Les comptes de l'approche mathématique moderne de la théorie de bifurcation, y compris flambage et après flambage théorie, peuvent être retrouvés dans de nombreux textes, notamment ceux de Keller et Antman[9], Sattinger[4], Iooss et Joseph[7], Chow et Hale[21] et Golubitsky et Schaeffer[13],[14]. Parmi les articles remarquables qui traitent spécifiquement le flambage et après flambage théorie sont celles de Potier-Ferry[18], Budiansky[2] et Hutchinson[10] (dans le domaine de élasto-plastique).
Certains travaux les plus récents dans le domaine de la théorie de la bifurcation sont très sophistiqués et profonds à partir d'un point de vue mathématique, par exemple, le travail de Golubitsky et Schaeffer[13],[14], cité ci-dessus,ainsi que[15] et [16], ou il a employé la théorie des singularités pour les cartes, une excroissance de la théorie des catastrophes de Thom[20].
En plus des problèmes de flambage et après flambage des structures et, en particulier, les problèmes spécifiques liés au voilement des plaques minces, des idées générales qui sous-tendent la bifurcation et la théorie de la stabilité non linéaire ont été utilisées pour étudier les problèmes de dynamique des fluides liés aux instabilités de flux visqueux ainsi que de branchement des problèmes dans le transfert de chaleur non linéaire, la super-conductivité, la théorie de la réaction chimique, et de nombreux autres domaines de la physique-mathématique.

2.2 Qu'est-ce que le flambement ?

Le flambement est en fait une sollicitation composée de compression et de flexion, mais dont l'étude est différente de la flexion composée parce que les méthodes sont différentes et que le flambement est un phénomène rapidement destructif. En effet, dans le cas du flambement, les déformations ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées. De même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations et, dans certains cas, de grandes déformations peuvent être causées par des accroissements de charge infimes. Tous ces phénomènes sont connus sous le nom d'instabilité élastique. Le risque de flambement d'un élément étant lié aux dimensions de cet élément, on dit que flambement est un phénomène d'instabilité de forme.
Considérons une pièce élancée, soumettons la à un effort normal de compression centré. On observe successivement deux types de sollicitation :

- Pour un effort N inférieur à une limite N_c, la pièce est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit. Ou la valeur N_c de l'effort de compression à partir de laquelle se produit le flambement s'appelle charge critique d'Euler.
- Lorsque N atteintN_c, la pièce fléchit brusquement et se rompt très vite. On observe que **le flambement se produit suivant un axe perpendiculaire à l'axe du moment quadratique le plus faible.**

2.3 Qu'est-ce que le voilement ?

Généralement, le flambement des plaques est connu sous le nom du voilement. On peut le définir comme suit : «*Le voilement est un phénomène d'instabilité relatif aux plaques minces sollicitées dans leur plan*».
Comme dans le cas du flambement, les déformations ne peuvent plus être négligées et ne sont plus proportionnelles au chargement extérieur. La géométrie de la plaque ainsi que ses dimensions influent gravement sur le voilement.

2.4 Comment se produit le voilement ?

Considérons une plaque rectangulaire de dimensions$a$, et d'épaisseur t constante, appuyée sur son pourtour, et admettons que cette plaque est parfaitement plane. Soumettons-la à une compression uniforme selon les deux bords opposés de largeur b (figure 2.1).

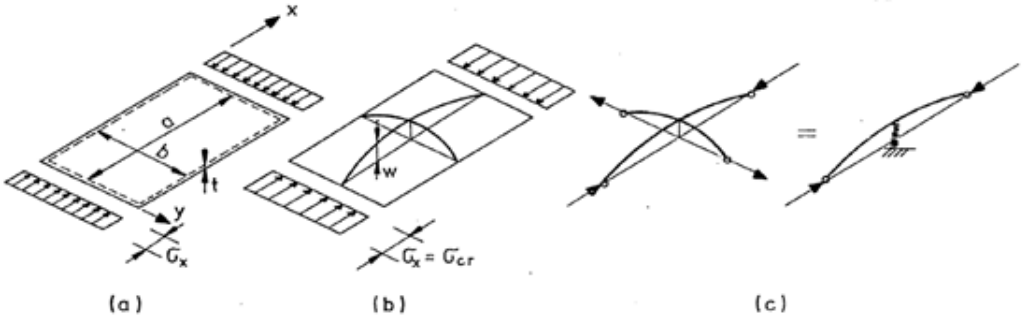


Fig. 2.1 – Voilement d'une plaque.

Pour une faible valeur de la contrainte de compression σ_x tout déplacement imposé w de la plaque hors de son plan disparait lorsque la cause engendrant ce déplacement est supprimée et la plaque reprend son état initial d'équilibre avec configuration parfaitement plane.
Pour un cetain niveau de contrainte $\sigma_x = \sigma_{cr}$, dite contrainte critique de voilement élastique, la plaque peut rester dans sa position déformée après suppression de la cause ayant suscité le déplacement. La plaque reste cloquée et on constate donc qu'à ce niveau de contrainte la plaque est dans un état d'équilibre indifférent (figure 2.1b). Tant la position plane non voilée et la position cloquée ou voilée constituent deux états d'équilibre.
Tout donne donc à penser que, comme pour le flambement des colonnes ; une plaque plane comprimée reste parfaitement plane jusqu'à une charge dite charge critique de voilement, pour laquelle elle peut prendre subitement une configuration d'équilibre déformée. On aurait ainsi un phénomène de voilement par bifurcation de l'équilibre.
Une plaque qui atteint sa charge critique de voilement prend une déformée de voilement, qui a pour effet d'avoir fait flamber les fibres comprimées tout en ayant allongé les fibres perpendiculaires aux précédentes (figure 2.1c). Dès lors, les fibres transversales tendues jouent dès ce moment le rôle d'une fondation élastique pour les fibres comprimées, rôle qui ne peut être assuré que si la plaque a préalablement voilé. Elles sont le siège de contraintes membranaires qui se développeront avec une intensité d'autant plus grande que la configuration des appuis leur assurera un meilleur ancrage. Il faut donc que les bords non chargés de la plaque soient au moins simplement appuyée. Un appui simple avec empêchement de déplacement dans le plan de la plaque ou un encastrement sont des configurations encore plus propices à l'apparition des contraintes membranaires.

2.5 Comparaison entre Flambement et Voilement

On peut donc considérer que le voilement est aux plaques, éléments de structure dont deux dimensions sont grandes vis-à-vis la troisième, et que le flambement est aux colonnes, dont une seule dimension est nettement supérieur aux deux autres.

Cependant, contrairement au flambement, le voilement élastique d'une plaque plane n'est pas synonyme de ruine de celle-ci. Une colonne atteignant sa charge critique de flambement prend une déformation transversale subite et le raccourcissement de la colonne se produit à charge décroissante.

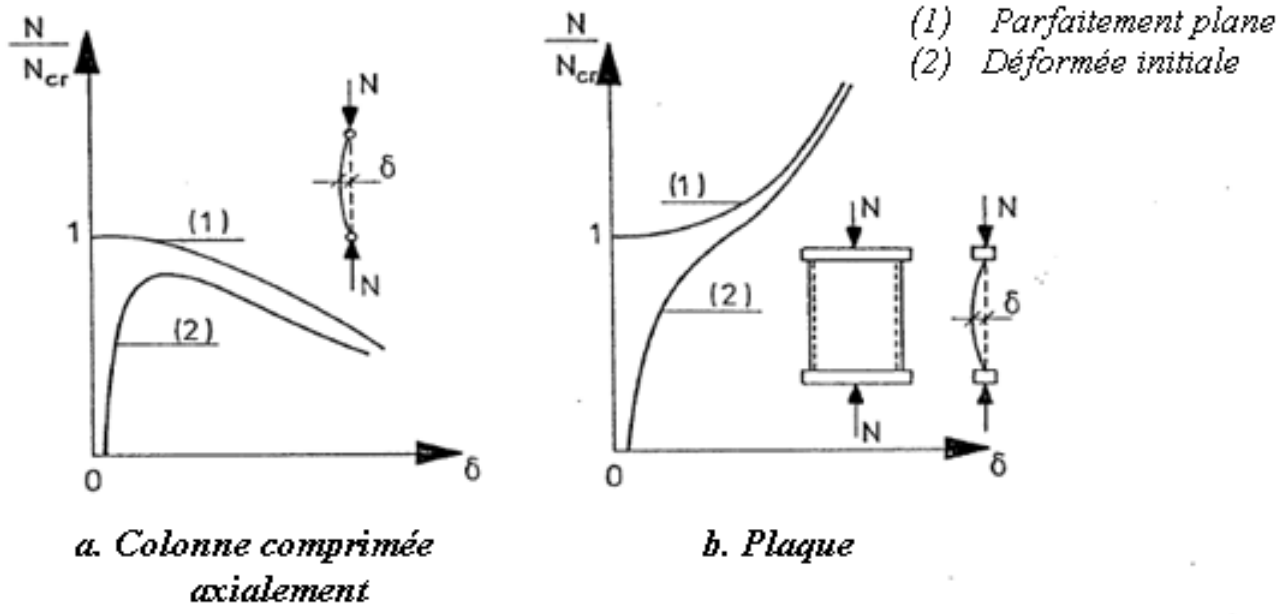


FIG. 2.2 – Courbes charge-déplacement.

Lors du voilement d'une plaque, les contraintes de membrane tendent à la stabiliser ; cela explique qu'une plaque puisse supporter une charge supérieure à la charge critique de voilement avant d'atteindre la ruine proprement dite. Le comportement d'une plaque idéalement plane à l'état non contraint se compose donc, dans un diagramme charge-déplacement transversal, d'une droite coïncidant avec l'axe des ordonnées jusqu'à la charge critique N_{cr}, puis au-delà, d'une courbe croissante à concavité vers le haut, se raccordant tangentiellement à l'horizontal d'ordonnée $N = N_{cr}$. Ce comportement est schématisé à la figure 2.2 en regard de celui d'une colonne comprimée axialement.

2.6 Conditions aux limites[6]

On considère une plaque mince et linéairement élastique occupant une région Ω dans le plan (x, y) avec des frontières lisses $\partial\Omega$. $\partial\Omega$ est l'union d'un nombre fini de pièces ou de morceaux, par exemple, un rectangle.
On désigne par $\vec{n}$ l'unité normale à la surface en n'importe quel point arbitraire et $\vec{t}$ la tangente à la surface aussi à n'importe quel point. La dérivé sur $\partial\Omega$ dans la direction

de la normale sera donnée par $\dfrac{\partial}{\partial n}$; tandis que celle dans la direction de la tangente sera donnée par $\dfrac{\partial}{\partial s}$.
En ce qui concerne la géométrie générale de la figure, et indépendamment de si nous avons affaire à une symétrie isotrope ou orthotrope, ces trois ensembles de conditions aux limites conduisent aux exigences suivantes sur $\partial\Omega$:
Cas d'encastrement

$$w = 0 \; et \; \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \;\; sur \quad \partial\Omega \tag{2.1}$$

Cas d'appuis simple

$$w = 0 \; et \; M_n = 0 \;\; sur \quad \partial\Omega \tag{2.2}$$

Cas libre

$$M_n = 0 \; et \; Q_n + \frac{\partial M_{tn}}{\partial s} \;\; sur \quad \partial\Omega \tag{2.3}$$

où M_n est le moment de flexion sur $\partial\Omega$ dans la direction normale à $\partial\Omega$, M_{tn} est le moment de torsion sur $\partial\Omega$, et Q_n est la force de cisaillement associée à la direction normale à $\partial\Omega$.
Dans ce qui suit, on prend pour $\partial\Omega$ le rectangle occupant $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$.

2.6.1 Encastrement

Dans ce cas, en conséquence de 2.1, on a :

$$\begin{aligned} w(0,y) &= 0 \;,\; 0 \leq y \leq b \\ w(a,y) &= 0 \;,\; 0 \leq y \leq b \\ w(x,0) &= 0 \;,\; 0 \leq x \leq a \\ w(x,b) &= 0 \;,\; 0 \leq x \leq a \end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned} w_{,x}(0,y) &= 0 \;,\; 0 \leq y \leq b \\ w_{,x}(a,y) &= 0 \;,\; 0 \leq y \leq b \\ w_{,y}(x,0) &= 0 \;,\; 0 \leq x \leq a \\ w_{,y}(x,b) &= 0 \;,\; 0 \leq x \leq a \end{aligned} \tag{2.5}$$

Où , disigne la dérivée.

2.6.2 Simplement appuyé

Dans ce cas on a tout d'abord toutes les conditions 2.4 car $w = 0$ sur $\partial\Omega$. La condition $M_n = 0$ se traduit par : $M_x = o$ pour $x = 0,\ x = a,\ 0 \leq y \leq b$ et $M_y = 0$ pour $y = 0,\ y = b,\ 0 \leq x \leq a$, où, après remplacement et simplification :

$$\begin{aligned}
&w_{,xx}(0,y) + \nu w_{,yy}(0,y) = 0\ ,\ 0 \leq y \leq b \\
&w_{,xx}(a,y) + \nu w_{,yy}(0,y) = 0\ ,\ 0 \leq y \leq b \\
&w_{,yy}(x,0) + \nu w_{,xx}(x,0) = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a \\
&w_{,yy}(x,b) + \nu w_{,xx}(x,b) = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.6.3 Libre

Si tous les quatre côtés de la plaque sont libres, on a les relations 2.6 puisque $M_n = 0$. la deuxième condition de 2.3 se traduit comme :

$$\begin{aligned}
&Q_{xz} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}|_{x=0} = 0\ ,\ 0 \leq y \leq b \\
&Q_{xz} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}|_{x=a} = 0\ ,\ 0 \leq y \leq b \\
&Q_{yz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}|_{y=0} = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a \\
&Q_{yz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}|_{y=b} = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a
\end{aligned} \tag{2.7}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
&M_{yx,x} + M_{x,x} - Q_{xz} = 0 \\
&M_{xy,y} + M_{y,y} - Q_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&M_{x,x} + 2M_{yx,y}|_{x=0} = 0\ ,\ 0 \leq y \leq b \\
&M_{x,x} + 2M_{yx,y}|_{x=a} = 0\ ,\ 0 \leq y \leq b \\
&M_{y,y} + 2M_{xy,x}|_{y=0} = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a \\
&M_{y,y} + 2M_{xy,x}|_{y=b} = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Ou bien, on aura l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}
&w_{,xxx}(0,y) + (2-\nu)w_{,xyy}(0,y) = 0\ ,\ 0 \leq y \leq b \\
&w_{,xxx}(a,y) + (2-\nu)w_{,xyy}(0,y) = 0\ ,\ 0 \leq y \leq b \\
&w_{,yyy}(x,0) + (2-\nu)w_{,xxy}(x,0) = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a \\
&w_{,yyy}(x,b) + (2-\nu)w_{,xxy}(x,b) = 0\ ,\ 0 \leq x \leq a
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.7 Comportement de voilement et post-voilement des plaques rectangulaire minces et parfaites

On considère une plaque rectangulaire présentant un comportement élastique linéaire, supposée être mince et sans imperfections, c'est-à-dire :

- La plaque est initialement parfaitement plane.
- Il n'ya pas de déformation initiale
- La plaque est sollicitée par des forces agissant rigoureusement dans son plan moyen

On va présenter, pour les cas les plus courants, les résultats pour le voilement d'une plaque rectangulaire occupant la région dans le plan x, y définie par $0 \leq x \leq a, 0 \leq y =\leq b$.

2.7.1 Compression dans la direction x avec les bords chargés simplement appuyés

Dans ce cas, la situation représentée sur la figure 2.3 s'applique avec $\sigma_{xx} = \lambda, \lambda \geqslant 0$, le long des bords à $x = 0$ et $x = a$, également, la première paire de conditions aux limites dans 2.6 s'appliquent, le long de ces bords, avec $w = 0$ le long $x = 0$ et $x = a$ pour $0 \leq y \leq b$.

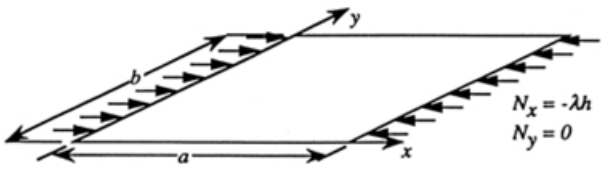


Fig. 2.3 – Plaque comprimée dans une seule direction.

L'équation régissant l'équilibre d'une plaque isotrope déformée d'épaisseur constante est la suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\lambda h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

Avec :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.12}$$

La contrainte critique vaut :

$$\sigma_{cr} = K\frac{\pi^2 D}{b^2 h} \tag{2.13}$$

Les bords $y = 0$, $y = b$ simplement appuyés

Dans ce second fait, les conditions b4 et b6 s'appliquent également le long de ces bords. Nous supposons, en raison de la nature du chargement, et les conditions de simple support le long des bords chargés, que la plaque flambe en m demi-ondes sinusoïdales dans le sens de chargement, ce qui conduit, tout naturellement, à une solution du problème 2.11 de la forme :

$$w(x, y) = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{2.14}$$

Avec :

$$f(y) = A_1 \cosh \alpha y + A_2 \sinh \alpha y + A_3 \cos \beta y + A_4 \sin \beta y \tag{2.15}$$

Posons $\phi = \dfrac{a}{b}$, de l'équation 2.13 on déduit :

$$K = m^2 \phi^{-2} + m^{-2} \phi^2 + 2 \tag{2.16}$$

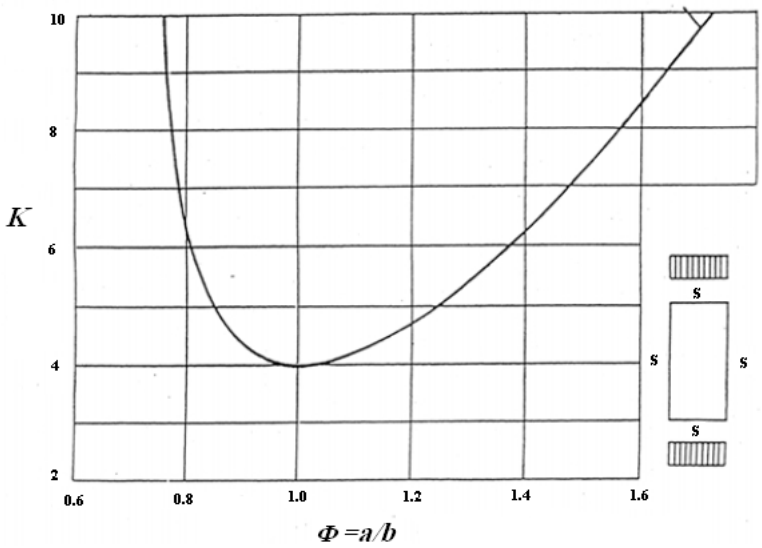


FIG. 2.4 – La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque simplement appuyée.[19]

les bords $y = 0$, $y = b$ encastrés

On va combiner les conditions d'appuis simples (bords chargés) et d'encastrement (bords non chargés), la solution de 2.11 et la fonction $f(y)$ sont les même du cas a, et l'imposition des conditions aux limites le long des quatre bords conduit au système :

$$\begin{aligned}
(A_1 + A_3) \sin \frac{m\pi x}{a} &= 0 \\
(pA_2 + qA_4) \sin \frac{m\pi x}{a} &= 0 \\
(A_1 \cosh p + A_2 \sinh p + A_3 \cos q + A_4 \sin q) \sin \frac{m\pi x}{a} &= 0 \\
(A_1 \sinh p + A_2 \cosh p + A_3 \sin q + A_4 \cos q) \sin \frac{m\pi x}{a} &= 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Est le coefficient K vaut :

$$K = \phi^{-2} + \frac{16}{3}\phi^2 + \frac{8}{3} \tag{2.18}$$

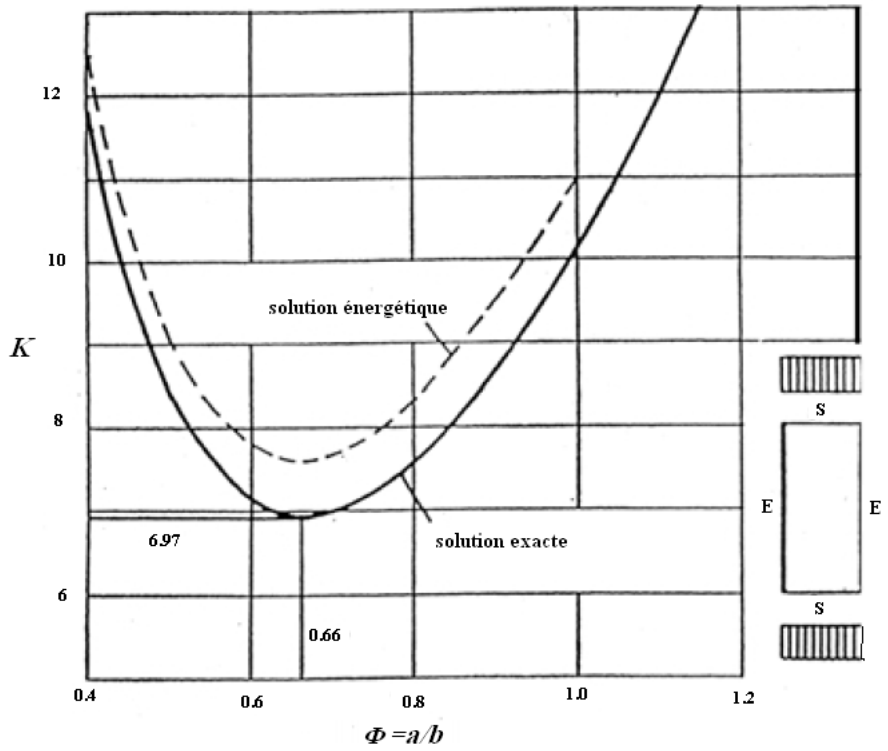


Fig. 2.5 – La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque avec des bords longitudinaux encastrés.[19]

Le bord $y = 0$ encastré et le bord $y = b$ simplement appyué

Ces conditions conduisent à l'équation caractéristique :

$$(r^2 + s^2)(s \sinh p \cos q - p \cosh q \sin p) = 0 \tag{2.19}$$

La variation du coefficient K est montrée sur la figure 2.6

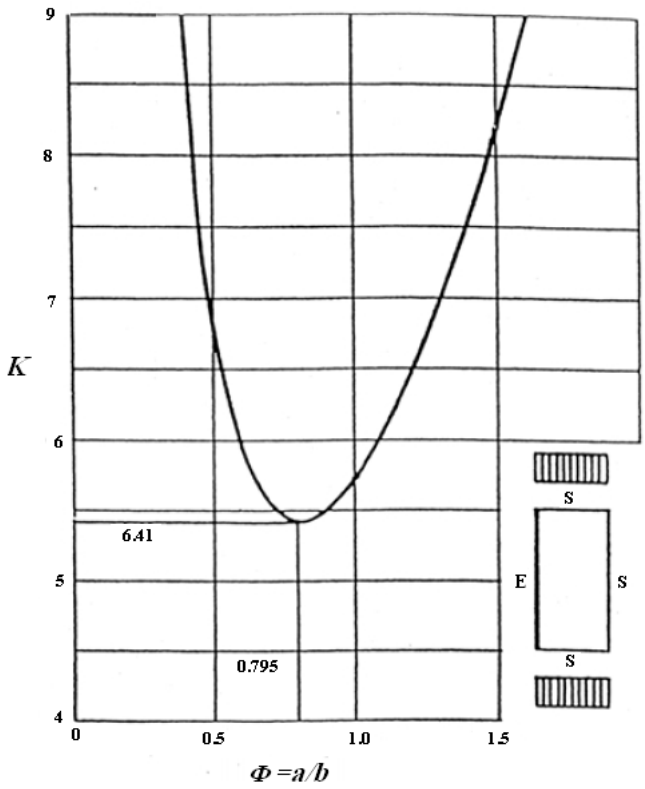


FIG. 2.6 – La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque avec un bord longitudinal encastré et l'autre simplement appyué.[19]

Le bord $y = 0$ encastré et le bord $y = b$ libre

En utilisant la même expression de la fonction w comme nous l'avons employé dans les cas précédent, nous constatons que les $A_i, i = 1, ..., 4$, doivent satisfaire :

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= 0 \\ pA_2 + qA_4 &= 0 \\ A_1 r^2 \cosh p + A_2 r^2 \sinh p - A_3 s^2 \cos q - A_4 s^2 \sin q &= 0 \\ A_1 p s^2 \sinh p + A_2 p s^2 \cosh p + A_3 q r^2 \sin q - A_4 q^2 r^2 \cos q &= 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Cela conduit à :

$$K = \phi^{-2} + \frac{\pi}{16(3\pi - 8)}\phi^2 + \frac{\pi - 4\nu}{2(3\pi - 8)} \tag{2.21}$$

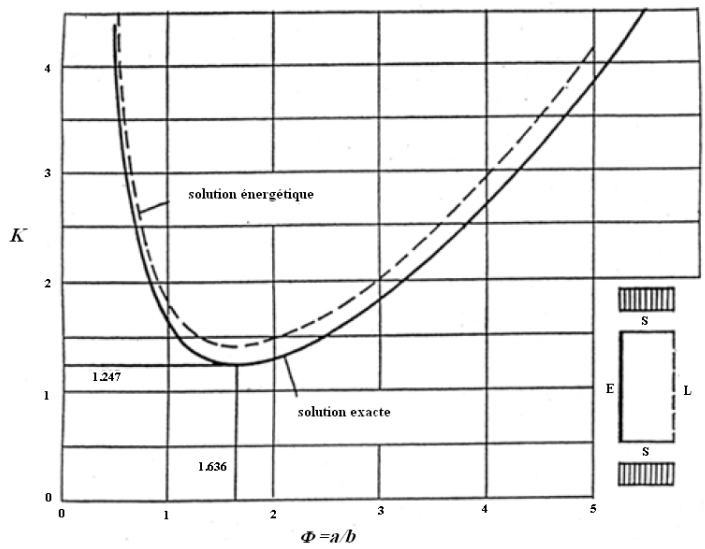


Fig. 2.7 – La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque avec un bord longitudinal encastré et l'autre libre.[19]

Le bord $y = 0$ simplement appyué et le bord $y = b$ libre

Avec la même forme générale de w, on trouve :

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= 0 \\ r^2 A_1 - s^2 A_3 &= 0 \\ A_1 r^2 \cosh p + A_2 r^2 \sinh p - A_3 s^2 \cos q + A_4 s^2 \sin q &= 0 \\ A_1 p s^2 \sinh p + A_2 p s^2 \cosh p + A_3 q r^2 \sin q - A_4 q r^2 \cos q &= 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

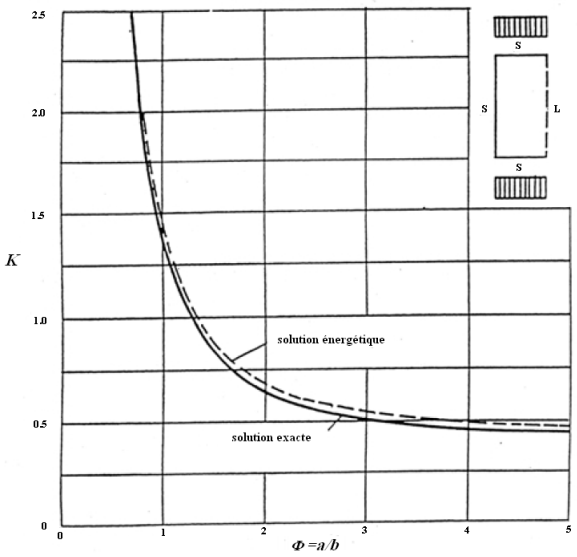


Fig. 2.8 – La courbe $K \sim \phi$ pour une plaque avec un bord longitudinal libre et l'autre simplement appyué.[19]

2.7.2 Compression dans la direction x avec les bords chargés encastrés

En x = 0 et x = a, pour 0 = y = b, les premières paires des conditions dans 2.4 et 2.5 s'appliquent.

Les bords $y = 0$, $y = b$ simplement appuyés

On suppose maintenant que la plaque flambe en des demi-ondes sinusoïdales dans la direction transversale de telle sorte que la fonction propre a la forme :

$$w(x, y) = f(x) \sin \frac{\pi y}{b} \tag{2.23}$$

En remplaçant 2.23 dans 2.11, on trouve :

$$f(x) = A_1 \cos \alpha x + A_2 \cos \beta x + A_3 \sin \alpha x + A_4 \sin \beta x \tag{2.24}$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi\phi}{2a}(\sqrt{K} + \sqrt{K-4}) \\ \beta &= \frac{\pi\phi}{2a}(\sqrt{K} - \sqrt{K-4}) \end{aligned} \tag{2.25}$$

les bords $y = 0$, $y = b$ encastrés

Dans ce cas, w vaut :

$$w = \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{(nk_m + mt_n) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\pi^4 D[(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2]^2 - \frac{m^2\pi^2\lambda h}{a^2}} \tag{2.26}$$

2.7.3 Compression dans les deux directions

La situation est représenté sur la figure 2.9 :

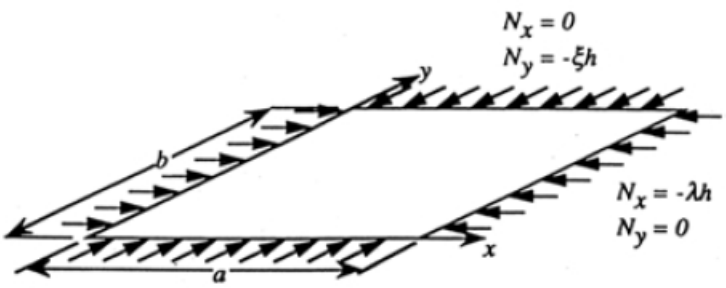


FIG. 2.9 – Plaque comprimée dans les deux directions.

L'équation régissant l'équilibre s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{h}{D}(\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \tag{2.27}$$

Les quatre bords simplement appuyés

La valeur de w égale :

$$w(x,y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{2.28}$$

Dans ce cas, la substitution dans 2.27 produit :

$$D[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}]^2 = \frac{h}{\pi^2}[\lambda \frac{m^2}{a^2} + \xi \frac{n^2}{b^2}] \tag{2.29}$$

On définit le coefficient de voilement K_x, qui est relative à la compression dans la direction x, par :

$$K_x = \frac{[\frac{m^2}{\phi^2} + n^2]^2}{[\frac{m^2}{\phi^2} + \frac{\xi n^2}{\lambda}]} \tag{2.30}$$

Ce coefficient prend sa valeur minimale quand $m = n = 1$:

$$K_{xmin} = 4(1 - \frac{\xi}{\lambda}) \tag{2.31}$$

Les quatre bords encastrés

Pour ces conditions, w égale :

$$w(x,y) = \frac{1}{4} A(1 - \cos \frac{2\pi x}{a})(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}) \tag{2.32}$$

En utilisant la fonction 2.32, Timoshenko[22] a montré que :

$$\lambda + \phi^2 \xi = \frac{\pi^2 D}{b^2 h}[4\phi^{-2} + 4\phi^2 + \frac{8}{3}] \tag{2.33}$$

Le coefficient de voilement sera :

$$K_x = \frac{4\phi^{-2} + 4\phi^2 + \frac{8}{3}}{1 + \frac{\xi}{\lambda}\phi^2} \tag{2.34}$$

2.7.4 Compression dans la direction x variant linéairement

"Il n'ya pas de solutions analytiques exactes à un problème de stabilité de plaque lorsque le chargement de bord n'est pas uniforme"[19]
Pour ce cas, on va supposer :

$$\sigma_{xx} = \lambda(1 - \frac{c}{b}y), \quad c \geq 0 \tag{2.35}$$

Les quatre bords simplement appuyés

Dans ce cas, la flèche sera :

$$w(x,y) = \sin_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi x}{a} \sum A_n \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{2.36}$$

Les bords $x = 0$ et $x = a$ simplement appuyés et les bords $y = 0$ et $y = b$ encastrés

D'après PS. Bulson[19] on a :

$$w(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{2.37}$$

Ce problème a été résolu par Nolke[11] :

$$\begin{aligned} f(y) = \sum_{n=1}^{\infty}{}_n(\cos \frac{pny}{b} + \cosh \frac{pny}{b}) + B_n(\cos \frac{pny}{b} + \cosh \frac{pny}{b}) \\ +C_n(\sin \frac{pny}{b} + \sinh \frac{pny}{b}) + D_n(\sin \frac{pny}{b} + \sinh \frac{pny}{b})\} \end{aligned} \tag{2.38}$$

2.7.5 Cisaillement

L'équation différentielle partielle correspondante qui régit le problème de voilement, dans ce cas, est :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{\xi h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.39}$$

Les quatre bords simplement appuyés

Le mode de voilement s'écrit sous la forme

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{2.40}$$

Une approximation garphique raisonable est montrée sur la figure 2.10, la relation parabolique est donnée par :

$$K = 5.34 + 4\phi^{-2} \ , \quad \phi \geqslant 1 \tag{2.41}$$

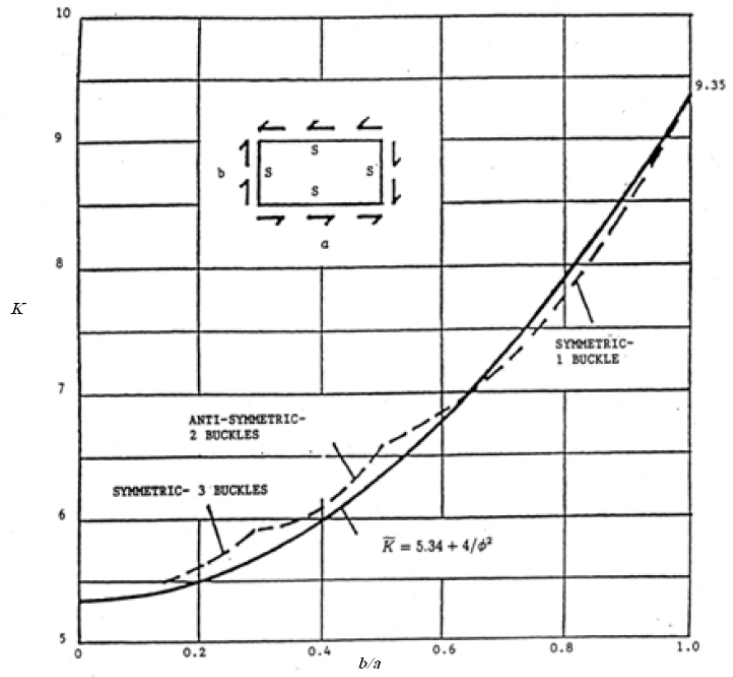


Fig. 2.10 – Plaques simplement appuyées en cisaillement.[17]

Les quatre bords encastrés

Ce cas a été analysé par Budiansky et Connor[3] et leurs résultats sont affichés dans la figure 2.11 ; le graphique peut être courbe ajustée par la relation parabolique :

$$K = 8.98 + 5.6\phi^{-2} \ , \quad \phi\, 1 \tag{2.42}$$

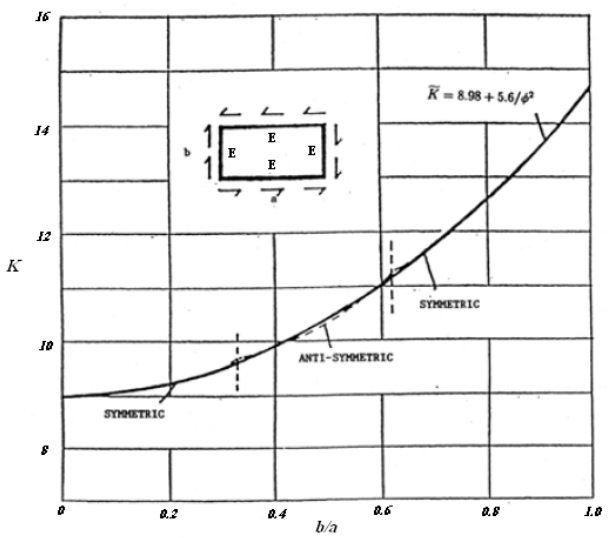


Fig. 2.11 – Plaques encastrées en cisaillement.[3]

2.7.6 Combinaison entre compression et cisaillement

On suppose une plaque simplement appuyée soumise à des forces de cisaillement sur les quatre bords de la plaque, et la compression dans la direction x, l'équation aux dérivées partielles régissant le voilement initial est :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{h}{D}(\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\xi \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}) \tag{2.43}$$

L'énergie de déformation de flexion est calculée comme dans le cas de cisaillement pur, tandis que le travail effectué par des forces externes est :

$$T = -4\xi h \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_{mn}A_{pq}\ mnpq}{(m^2-p^2)(q^2-n^2)} + \frac{\pi\lambda hb}{8a}\sum m^2 A_{mn}^2 \tag{2.44}$$

2.8 Conclusion

Pour des éléments en compression tels que les plaques, la charge critique est la valeur limite correspondant à l'apparition de la flèche.
Les différentes combinaisons de chargement ainsi les conditions de bords influent nettement sur le voilement. Alors, il est évident que la charge critique de voilement dépend du mode et de l'intensité de sollicitation de la plaque : compression, flexion, cisaillement ou combinaison de sollicitations supplémentaires.
D'après ce qu'on a abordé dans ce chapitre, on déduit que plus la plaque est maintenue sur son pourtour plus sa résistance au voilement accrue. De ce fait, une plaque encastrée présente une charge critique plus élevée que celle d'une autre simplement appuyée, tout comme la poutre bi-encastrée a une charge critique de flambement plus élevées qu'une poutre bi-articulée.
La connaissance de l'état de notre structure et des facteurs qui y influent nous permettent de faire une bonne analyse et avoir des résultats performants. introp

Bibliographie

[1] A. Liapunov, Problème Général de la Stabilité du Mouvement, Princeton University Press, 1947.

[2] B. Budiansky, Theory of Buckling and Post-Buckling Behavior of Elastic Structures, in Advances in Applied Mechanics, vol. 14, Academic Press, N.Y., 1974, 1-65.

[3] B. Budiansky and R.W. Connor, Buckling Stresses of Clamped Rectangular Flat Plates in Shear, N.A.C.A. Tech. Note No. 1559, 1948.

[4] D.H. Sattinger, « Topics in Stability and Bifurcation Theory », Lecture Notes in Math., 309, Springer-Verlag, N.Y., 1973.

[5] E. Schmidt, Zur Theorie der Linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Math. Ann., 65, 1908, 370-379.

[6] Frederick Bloom Douglas coffin, "Hand book of thin plates buckling and post-buckling", Chapman Hall/CRC, 2001.

[7] G. Iooss and D.D. Joseph, « Elementary Stability and Bifurcation Theory », UTM, Springer-Verlag, 1980.

[8] H. Poincaré, Sur léquilibre dune masses fluide animée dun mouvement de rotation, Acta Math, 7, 1885, 259- 380.

[9] J.B. Keller and S.S. Antman, « Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems », Benjamin, N.Y., 1969.

[10] J.W. Hutchinson, Plastic Buckling, in Advances in Applied Mechanics, Academic Press, N.Y., 1974, 67-145.

[11] K. Nolke, Der Baningenieur, 17, 1936, 111.

[12] L. Euler, Additamentum I de curvis elasticis, methodus inveniendi lineas curvas maximi minimiui proprietate gaudentes, Bousquent, Lausanne, in Opera Omnia I, 24, 1744, 231-297.

[13] M. Golubitsky and D.G Schaeffer, « Singularities and Groups in Bifurcation Theory », vol. 1, Springer-Verlag, N.Y., 1984.

[14] M. Golubitsky and D.G Schaeffer, « Singularities and Groups in Bifurcation Theory », vol. 2, Springer-Verlag, N.Y., 1988.

[15] M. Golubitsky and D.G Schaeffer, A Theory for Imperfect Bifurcation via Singularity Theory, Comm. Pure Appl. Math, 32, 1979, 21-98.

[16] M. Golubitsky and D.G Schaeffer, Imperfect Bifurcation in the Presence of Symmetry, Comm. Math Phys., 67, 1979, 205-232.

[17] M. Stein and J. Neff, Buckling Stresses of Simply Supported Rectangular Flat Plates in Shear, N.A.C.A. Tech. Note. No. 1222, 1947.

[18] Potier-Ferry, Foundations of Elastic Postbuckling Theory, of Lecture Notes in Physics, vol. 288, Springer-Verlag, N.Y. 1987, 1-82.

[19] P.S. Bulson, « The Stability ofFlat Plates », American Elsevier, N.Y., 1969.

[20] R.Thom, « Structural Stability and Morphogenesis », Benjamin, Reading, Mass. 1975.

[21] S-N. Chow and J.K. Hale, « Methods of Bifurcation Theory, Springer-Verlag », N.Y., 1982.

[22] S.P. Timoshenko and J.M. Gere, « Theory ofElastic Stability », 2nd ed., McGraw-Hill, N.Y., 1961.

[23] T. Von Karman, Festigkeitsprobleme im Maschinenbau,in Encylop¨adie der Mathematischen Wissenschaften IV/4C, 1910, 311-385.

[24] W.T. Koiter, Over de Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht, Thesis, Delft : H.J. Paris, Amsterdam, 1945. English translation issued as Technical Report AFFDL-TR- 70-25, Air Force Flight Dynamics Lab, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1970.

[25] W.T. Koiter, « Elastic Stability », Z.f.W., 9, 1985, 205-210.

[26] W.T. Koiter, « Elastic Stability and Post-Buckling Behavior », in Nonlinear Problems, (Ed. R. Langer), Univ. Wisconsin Press, Madison, 1963.

CHAPITRE 3

THÉORIES DES PLAQUES

Dans la plupart des applications structurelles, les structures composites peuvent être idéalisées comme des poutres, des plaques ou des coquilles. L'analyse est réduite d'un problème d'élasticité tridimensionnel à un problème unidimensionnel ou bidimensionnel sur la base de certaines hypothèses simplificatrices qui peuvent être faites parce que la structure est mince. Ce chapitre présente les hypothèses de base formulées dans le développement de plusieurs théories de la plaque couramment utilisés. Les hypothèses simplificatrices font face à diverses façons de rapprocher la déformation transversale normale et les déformations transversales de cisaillement. La connaissance des éléments de base de ces théories structurelles est nécessaire pour le développement des modèles mathématiques pour la modélisation de l'impact.
L'équilibre des plaques élastiques planes et, plus particulièrement, la mise en équation de ce problème, ont fait l'objet de travaux bien connus tels que ceux de LAGRANGE, de POISSON, de KIRCHHOFF, de M. BOUSSINESQ, de M. MAURICE LEVY, etc. Non seulement les méthodes employées par ces différents auteurs sont très diverses, mais les résultats eux-mêmes n'ont pas toujours été concordants.

3.1 Définition d'une plaque

Une plaque désigne un solide dont l'épaisseur h, mesurée sur z de part et d'autre du plan moyen, est petite devant les deux autres dimensions disposées dans le plan (x,y)

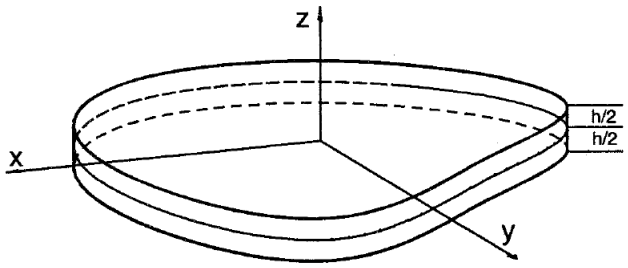


Fig. 3.1 – Schéma d'une plaque.

3.2 Historique du développement des théories des plaques

La première impulsion à des énoncés mathématiques des problèmes des plaques, a probablement été faite par Euler[32], qui en 1776 a effectué une analyse des vibrations libres des plaques.
Le physicien allemand Chladni[14] a découvert les différents modes de vibrations libres. Dans des expériences sur des plaques horizontales, il a utilisé une poudre uniformément répartie, qui a formé des motifs réguliers après l'induction des vibrations.
J.Bernoulli[25] a tenté de justifier théoriquement les résultats de ces expériences acoustiques. La solution de Bernoulli a été basée sur le travail précédent résultant de la théorie d'Euler-D.Bernoulli des poutres. J. Bernoulli[25] a présenté une plaque en tant que système de bandes perpendiculaires entre elles à angle droit par rapport à l'autre, chaque bande considérée fonctionnant comme une poutre.
La mathématicienne française Germain[46] a développé une équation différentielle des plaques qui manquait le terme de gauchissement ; pour ce travail, elle a eue un prix par l'Académie parisienne en 1816. Lagrange[27], étant l'un des examinateurs de ce travail, a corrigé les résultats de Germain (1813) en ajoutant le terme manquant ; ainsi, il était la première personne à présenter l'équation générale des plaques correctement.
Cauchy[3] et Poisson[44] ont été les premiers à formuler le problème de la plaque en flexion sur la base d'équations générales de la théorie de l'élasticité. En développant toutes les grandeurs caractéristiques en série de puissances de la distance à partir d'une surface moyenne, ils ont conservé seulement les termes du premier ordre.
En 1829, Poisson[44] élargi avec succès l'équation des plaques Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous une charge statique. Dans cette solution la rigidité D à la flexion de plaque a été fixée à un terme constant. Poisson[44] a également suggéré la mise en place de trois conditions aux limites pour n'importe quel point sur une frontière libre. Les conditions aux limites obtenues par Poisson et la question sur le nombre et la nature de ces les conditions avaient été l'objet de nombreuses controverses et ont fait l'objet d'autres études.

La première théorie satisfaisante de flexion des plaques est associé à Navier[11], qui a estime l'épaisseur de la plaque dans l'équation générale des plaques en fonction de la rigidité D. Il a également introduit un procédé exact qui transforme l'équation différentielle en expression algébrique par l'utilisation des séries trigonométriques de Fourier.
En 1850, Kirchhoff[21] a publié une thèse importante sur la théorie des plaques minces. Dans cette thèse, Kirchhoff[21] a déclaré deux indépendantes hypothèses de base qui sont maintenant largement acceptés dans la théorie des plaques de flexion et sont connus comme des hypothèses de Kirchhoff. En utilisant ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié l'énergie fonctionnelle de la théorie de l'élasticité 3D pour les plaques pliées. En exigeant que ce soit à l'arrêt, il a obtenu l'équation Germain-Lagrange et l'équation d'Euler. Il a également marqué qu'il existe seulement deux conditions aux limites sur un bord de plaque. Les autres contributions importantes de Kirchhoff sont la découverte de l'équation des fréquences des plaques et l'introduction des méthodes de déplacement virtuel dans la solution des problèmes des plaques. La théorie de Kirchhoff a contribué la clarté physique de la théorie des plaques en flexion et de la promotion de son utilisation généralisée dans la pratique.
Lord Kelvin (Thomson) et Tait[33] ont prévu un aperçu supplémentaire relative aux conditions aux limites en convertissant les moments de torsion le long des bords d'une plaque en des forces de cisaillement. Ainsi, les bords sont soumis à seulement deux forces : cisaillement et le moment.
Le livre de Kirchhoff a été traduit par Clebsch[1]. Cette traduction contient de nombreux commentaires précieux faits par de Saint-Venant ; le plus important étant l'extension de l'équation différentielle de Kirchhoff des plaques minces, qui a examiné, d'une manière mathématiquement correct, l'action combinée de flexion et de traction. Saint-Venant a également souligné que la série proposée par Cauchy[3] et Poisson[44] comme règle générale est divergente.
La solution de plaques rectangulaires, avec deux supports parallèles simplement appuyés et les deux autres supports arbitraires, a été résolue avec succès par Levy[35] dans la fin du XIXème siècle.
A la fin du XIXème et le début du XXème siècle, les constructeurs ont changé leurs méthodes de construction en remplaçant le bois par l'acier structurel. Ce changement de matériaux de construction a été extrêmement fructueux dans le développement des théories de la plaque diverses. Les scientifiques russes ont apporté une contribution significative à l'architecture navale en étant les premiers à remplacer les anciennes traditions commerciales par les théories mathématiques des solides. En particulier, Krylov[7] et son étudiant Bubnov[24] qui ont largement contribué à la théorie des plaques minces en flexion avec des rigidités extensionnelles. Bubnov a proposé une nouvelle méthode d'intégration des équations différentielles de l'élasticité et il a composé des tableaux de déviations maximales et de moments de flexion maximaux pour des plaques avec différentes propriétés. Puis, Galerkin[9] a développé cette méthode

et l'a appliqué à l'analyse des plaques en flexion.
Timoshenko[47][48] a apporté une contribution significative à la théorie et l'application de l'analyse des plaques en flexion. Parmi les nombreuses importantes contributions de Timoshenko on trouve les solutions de plaques circulaires envisageant des grands déplacements et la formulation des problèmes de stabilité élastiques. Timoshenko et Woinowsky-Krieger[50] ont publié une monographie fondamentale qui représentait une analyse approfondie des différents problèmes des plaques en flexion. Des études approfondies dans le domaine de la théorie des plaques en flexion et de ses diverses applications ont été réalisées par ces scientifiques exceptionnels : Hencky[22], Huber[37], Von Karman[51][52], Nadai[4], Foppl[2].
Les équations générales pour les grands déplacements dans les plaques minces ont été simplifiées par Föppl qui a utilisé la fonction des contraintes agissant dans le plan médian de la plaque. La forme définitive de l'équation de la théorie des grands déplacements, cependant, a été développée par Von Karman. Il a également étudié le comportement post voilement des plaques.
Les bases de la théorie générale de plaques anisotropes ont été développées par Gehring[18] et Boussinesq[26]. Lekhnitskii[45] a apporté une contribution essentielle au développement de la théorie et l'application de l'analyse des plaques anisotropes linéaires et non linéaires.
Le développement de l'industrie aéronautique moderne a fourni une autre forte impulsion vers plus rigoureuses enquêtes analytiques de problèmes des plaques : Plaques soumises à des forces dans le plan, le comportement post flambement et les problèmes de vibration, des plaques raidies, etc, ont été analysés par divers scientifiques et ingénieurs.
E.Reissner[16] a développé une théorie rigoureuse des plaques qui prend en compte les déformations provoquées par les forces de cisaillement transversales.
Dans l'ancienne Union soviétique, les oeuvres de Volmir[8] et Panov[13] ont été consacrées essentiellement à la solution des problèmes de la flexion non linéaire des plaques.
L'équation dune plaque rectangulaire mince soumise à des forces de compression directes Nx a d'abord été obtenue par Navier[11]. Le problème de voilement d'une plaque simplement appuyée soumise à des forces de compression directes et constantes agissant dans des directions 1 et 2 a d'abord été résolu par Bryan[20] en utilisant la méthode de l'énergie. Cox[23], Hartmann[19]etc, ont présenté des solutions de divers problèmes de voilement pour des plaques rectangulaires minces en compression, tandis que Dinnik[6], Nadai[5], Meissner[15]etc, ont complété le problème de voilement pour des plaques circulaires comprimés.
La première solution exacte du problème des vibrations libres des plaques rectangulaires, dont deux côtés opposés sont simplement appuyés, a été réalisée par Voight[54]. Ritz[55] a utilisé le problème de vibration libre d'une plaque rectangulaire avec des bords libres pour démontrer sa célèbre méthode d'étendre le principe de Rayleigh pour obtenir des bornes supérieures sur les fréquences de vibration. Poisson[44] a

analysé l'équation des vibrations libres des plaques circulaires. Les monographies par Timoshenko et Young[49], Den Hartog[30], Thompson[56]...etc, contiennent une analyse complète et des considérations de conception de vibrations libres et forcées de plaques de différentes formes. L'application des approximations de Kirchhoff-Love a conduit à la théorie classique des stratifiées en plaques. Dans ces développements, la déformation de cisaillement est considérée comme assez faible, par rapport aux autres déformations, pour être négligeable.
Quelques années plus tard, la prise en compte des effets du cisaillement transversal par Reissner-Mindlin[17][41], a permis de construire une théorie dite de premier ordre en déformation de cisaillement. La déformation de cisaillement dans l'épaisseur doit, en principe, varier au moins de façon quadratique avec une contrainte de cisaillement nulle aux niveaux des surfaces externes de la plaque. Pour satisfaire ces conditions, des théories de déformation de cisaillement dordre élevé ont été introduites comme celles proposées par Reddy[29] ou Touratier[38].
La tendance récente dans le développement des théories des plaques est caractérisée par une forte dépendance aux modernes ordinateurs à grande vitesse et le développement des méthodes numériques, ainsi que par l'introduction des plus rigoureuses théories en ce qui concerne divers effets physiques, types de chargement etc.

3.3 Les équations de mouvement d'une plaque

Les équations de mouvement d'une plaque sont obtenues par l'intégration des équations du mouvement pour un solide élastique tridimensionnel. Les définitions des résultantes de force et moment sont introduits dans le calcul et les équations obtenues sont valables pour toutes les trois théories considérées ici. Les équations du mouvement pour le solide élastique linéaire sont les suivants :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + q_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + q_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + q_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

En intégrant les deux côtés par z, les forces résultantes sont :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{pmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \tag{3.2}$$

Et les forces de cisaillement transversales égalent à :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_{xz} \\ \mathrm{Q}_{yz} \end{pmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz \tag{3.3}$$

Les moments de flexion et de torsion valent :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M}_x \\ \mathrm{M}_y \\ \mathrm{M}_{xy} \end{pmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz \tag{3.4}$$

Après substitution on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} z dz \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + m_y &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} z dz \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.4 Hypothèses cinématiques

La théorie des plaques classique (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) peuvent être dérivées à partir de deux hypothèses de base.
La première hypothèse (H1) est que la contrainte transversale normale est égale à zéro :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{3.6}$$

Ce qui implique que le déplacement transversal w est indépendant de z ou
$w = w_0(x, y)$.
La deuxième hypothèse (H2) concerne la variation de déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Différentes hypothèses sont réalisés : dans la théorie classique des plaques (CPT) les contraintes de cisaillement transversales sont supposées être zéro ; dans la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) elles sont supposées constantes à travers l'épaisseur de la plaque ; dans la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) les contraintes de cisaillement transversales sont supposées variées de façon parabolique à travers l'épaisseur et nulles sur les surfaces supérieure et inférieure.

3.5 Théorie classique des plaques

Dans ce qui suit, nous montrons comment la supposition que les déformations normales transversales sont négligeables conduit à ce qu'on appelle les hypothèses cinématiques de la théorie classique des plaques à partir de laquelle nous tirons les relations déformation-déplacement, les relations de comportement et les équations de mouvement.

Cinématique de la déformation

Lorsque les déformations de cisaillement transversales sont négligés ($\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$), les équations 3.1 donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \; et \; \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.8}$$

Qui, après intégration, donnent des relations cinématiques pour la théorie classique des plaques (CPT)

$$u = u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad v = v_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial y}, \; w = w_0(x, y) \tag{3.9}$$

Où u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements de la surface de référence (plan xy). Les équations 3.9 expriment le concept selon lequel un segment de droite d'abord normale à la surface de référence reste perpendiculaire à la surface après une déformation. Souvent, cette déclaration est prise comme point de départ pour la CPT, qui est aussi appelé la théorie de plaque Love-Kirchhoff. La cinématique de la CPT est illustrée à la figure 3.2. Avec ces hypothèses, les déformations sont :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{3.10}$$

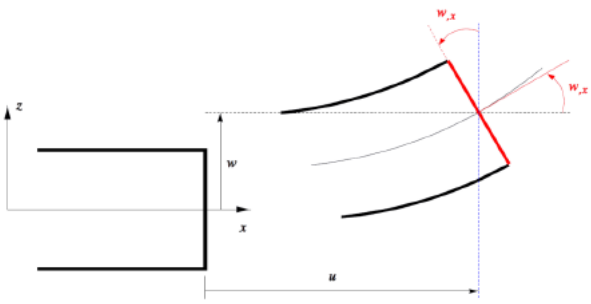


Fig. 3.2 – Cinématique de la déformation en fonction de la théorie classique des plaques.

Dans cette théorie, les déformations de cisaillement transversales sont considérées comme négligeables, et les déformations correspondantes sont fixées à zéro. Cependant, les forces de cisaillement Q_x et Q_y ne sont pas égales à zéro, même si à partir de leur définition (équation 3.3), il semblerait qu'ils devraient être nulles si les déformations correspondantes sont uniformément zéro. Cela est parfois appelé le paradoxe de la théorie classique des poutres ou des plaques.

3.6 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) également appelée la théorie des plaques de Mindlin est basée sur les hypothèses que les déformations de cisaillement transversales sont constantes, ce qui conduit à une cinématique particulière de la déformation. Les équations constitutives et la dérivation des équations du mouvement en fonction des variables de déplacement sont discutées.

Cinématique de la déformation

Avec la FSDT, les contraintes de cisaillement transversales sont supposées constantes à travers l'épaisseur, mais pas nécessairement nulles.

$$\begin{aligned}\epsilon_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x(x,y,t)\\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y(x,y,t)\end{aligned} \tag{3.11}$$

Après intégration, les déplacements en plan peuvent être écrits comme :

$$U = u_0 - z(-\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}), \quad V = v_0 - z(-\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) \tag{3.12}$$

Les quantités $\phi_x et \phi_y$ sont les rotations de segment de ligne d'abord perpendiculaire au plan moyen et qu'ils sont différents de$\frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}U &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + z\phi_x\\ V &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + z\phi_y\\ W &= w_0\end{aligned} \tag{3.13}$$

Les équations 3.13 déclarent que, les segments perpendiculaires à la surface de référence restent droites, mais pas nécessairement normales à la surface de référence après déformation.

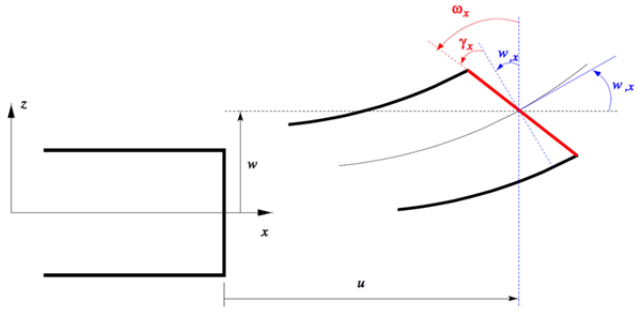


FIG. 3.3 – Cinématique de Reissner-Mindlin.

Cette théorie des plaques est souvent appelée la théorie des plaques de Reissner-Mindlin depuis qu'elle a été développée par Reissner[16] (1945) et Mindlin[41] (1951). Elle peut être considérée comme une extension du travail de Timoshenko (1921) qui était le premièr à examiner à la fois les effets de la déformation de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres.

3.7 Limitation de la CPT et la FSDT

La CPT néglige la déformation de cisaillement dans ses hypothèses cinématiques. La FSDT suppose que des contraintes de cisaillement restent constantes à travers l'épaisseur. Ce ne peut être qu'une approximation car nous savons que sur les surfaces supérieure et inférieure les contraintes de cisaillement seront généralement nulles. Ensuite, la question devient : quelle est la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque ?

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_{11} & \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{22} & \mathrm{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{C}_{13} & \mathrm{C}_{23} & \mathrm{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

Supposant que les équations constitutives du champ de déplacement de la FSDT (équations 3.13) impliquent que, lors des déformations de flexion ($u_0 = v_0 = 0$), les contraintes sont :

$$\sigma_{xx} = zC_{11}(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + zC_12(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})$$
$$\sigma_{xy} = zC_{66}(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}) \tag{3.15}$$

Pour l'élasticité linéaire, l'équilibre dans la direction x est régie par :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{3.16}$$

La substitution l'équation 3.15dans l'équation 3.16 donne :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = z[C_{11}(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}) + C_{12}(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial xy} - \frac{\partial^3 w}{\partial xy^2}) + C_{66}(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial xy} - 2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2})] \tag{3.17}$$

L'expression à l'intérieur des parenthèses ne dépend pas de z si les C_ij sont constants à travers l'épaisseur. Par conséquent, pour un matériau qui est homogène à travers l'épaisseur, l'intégration de l'équation 3.17 par rapport à z donne :

$$\sigma_{xz} = \sigma^0_{xz} + z^2 f(x, y, t) \tag{3.18}$$

Autrement dit, la contrainte de cisaillement transversale σ_{xz} suit une distribution parabolique. Elle se compose d'un terme constant $\sigma^0_x z$ plus le terme z^2. Ainsi, lorsque les propriétés des matériaux restent constantes à travers l'épaisseur, ϵ_{xz} et ϵ_{yz} suivent, à la fois, une distribution parabolique à travers l'épaisseur.
Plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé, y compris la RSDT qui est discutées dans la section suivante, supposent que la déformation de cisaillement suit une répartition des contraintes parabolique à travers l'épaisseur.

3.8 Théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement des modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$ .Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (figure 3.4) :

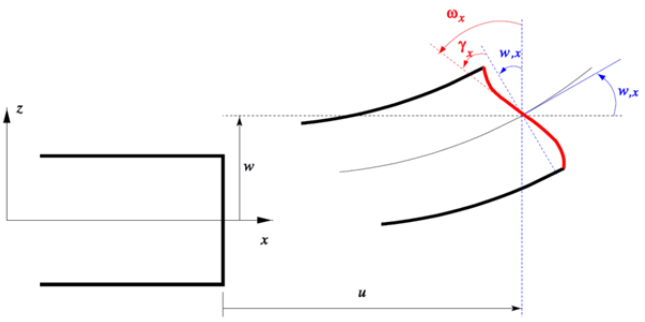


Fig. 3.4 – Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

L'approche d'Ambartsumyan[42] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2}(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}) \tag{3.19}$$

L'approche de Reissner, Panc[53] et Kaczkowsk[43]i, avec :

$$f(z) = \frac{5}{4}z(1 - \frac{4z^2}{3h^2}) \tag{3.20}$$

L'approche de Levinson[36], Murthy[39] et Reddy[29] Avec :

$$f(z) = z(1 - \frac{4z^2}{3h^2}) \tag{3.21}$$

L'approche de Touratier[38] avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \cdot \sin(\frac{\pi z}{h}) \tag{3.22}$$

L'approche de Afaq[31] avec :

$$f(z) = z \cdot e^{-2(\frac{z}{h})^2} \tag{3.23}$$

L'approche de Aydogdu[34] avec :

$$f(z) = z \cdot \alpha^{\frac{-2(\frac{z}{h})^2}{\ln(\alpha)}}, \ \alpha \geqslant 0 \tag{3.24}$$

L'approche de Mantari[28] avec :

$$f(z) = \sin(\frac{\pi z}{h})e^{\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi z}{h})} + \frac{1}{2}\frac{\pi z}{h} \tag{3.25}$$

Cinématique de la déformation

Reddy[29] (1984) a présenté une théorie de la déformation de cisaillement des plaques dans laquelle les contraintes de cisaillement transversales varient parabolique. En plus des hypothèses H1 et H2, les contraintes de cisaillement transversales sont supposées suivre une variation parabolique à travers l'épaisseur ($e_{xz} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2, e_{yz} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$) et à disparaître sur les surfaces supérieure et inférieure. Par conséquent, cela conduit aux relations cinématiques suivantes :

$$\begin{aligned} U &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + z(1 - 4\frac{z^2}{h^2})\phi_x \\ V &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + z(1 - 4\frac{z^2}{h^2})\phi_y \\ W &= w_0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

3.9 Limitation de la CPT, FSDT et HSDT

Les trois théories plaques les plus couramment utilisés sont tous basés sur l'hypothèse que la contrainte dans le sens transversal est négligeable.

$$0 = C_{13}\epsilon_{xx} + C_{23}\epsilon_{yy} + C_{33}\epsilon_{zz} \tag{3.27}$$

De l'équation 3.14, nous voyons que, en raison de l'effet de poison, la déformation normale transversale calculée à partir n'est pas zéro même si la contrainte transversale normale est égal à zéro. Pour la FSDT, en utilisant l'équation 3.13 :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = z[C_{13}(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}) + C_{13}(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y})]/C_{33} \tag{3.28}$$

Par conséquent, la déformation normale transversale devrait varier linéairement à travers l'épaisseur. Si les propriétés du matériau restent constantes à travers l'épaisseur, l'intégration de l'équation 3.28 par rapport à z donne :

$$W = w_0 + z^2\psi_z(x, y, t) \tag{3.29}$$

Le déplacement transversal est constitué d'un terme constant w_0 et le terme z^2 multiplié par une fonction de x, y et t. Le déplacement transversal devrait varier en fonction de l'équation 3.29 dans un certain nombre de théories d'ordre supérieur.

3.10 Théories comprenant les déformations dans la direction transversale

Plusieurs théories permettent une déformation dans la direction transversale. Dans la théorie présentée par Reissner[17] (1944), on suppose que des déformations planes et à la flexion sont découplés :

$$\begin{aligned} U &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + z(1 - 4\frac{z^2}{h^2})\phi_x + z^3\psi_x \\ V &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + z(1 - 4\frac{z^2}{h^2})\phi_y + z^3\psi_y \\ W &= w_0 + z^2\psi_z(x, y, t) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Hanna et Leissa[40] (1994) ont commencé avec la même hypothèse cinématique et ont exigé que les déformations de cisaillement transversales disparaissent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. De cette façon,ψ_x etψ_y peuvent être exprimées en termes des autres variables et les déplacements peuvent être écrits comme :

$$\begin{aligned} U &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} + z(1 - 4\frac{z^2}{h^2})\phi_x + \frac{z^3}{3}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ V &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} + z(1 - 4\frac{z^2}{h^2})\phi_y + \frac{z^3}{3}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ W &= w_0 + z^2\psi_z(x, y, t) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Prenant$\psi_z = 0$ dans l'équation 3.30, nous retrouvons les hypothèses cinématiques faites par Pandya et de Kant[10] (1988). La même théorie a été utilisée par Roque et al[12] (2007).
De plus en plus les facteurs de complication sont pris en compte, les théories deviennent plus complexes et les équations se compliquent davantage.

3.11 Conclusion

Ce chapitre fournit une introduction aux trois théories des plaques les plus couramment utilisées. La dérivation des équations du mouvement a souligné les points communs entre les théories et leurs différences fondées sur diverses hypothèses faites. D'autres théories de la plaque telles que « la théorie couche par couche" ou « zig-zag" sont également disponibles, mais ne sont pas abordées ici.
Ces diverses théories décrites dans ce chapitre sont utilisées dans la modélisation des impacts à faible vitesse sur les structures composites. Par conséquent, il est important de se familiariser avec ces théories lorsque l'on étudie la réponse à l'impact dynamique. La formulation des théories des poutres et les théories des coques suit l'évolution des théories de la plaque d'assez près afin que le contenu de ce chapitre devrait être utile à la compréhension de ces différentes théories.

Bibliographie

[1] A. Clebsch, « Theorie de lÉlasticité des Corps Solides", Avec des Notes Entendues de Saint-Venant, Dunod, Paris, pp. 687706 (1883).

[2] A. Foppl, « Vorlesungen uber technische Mechanik", vols 1 and 2, 14th and 15th edns, Verlag R., Oldenburg, Munich (1944, 1951).

[3] A.L. Cauchy, « Sur léquilibre le mouvement dune plaque solide», Exercices Math, vol. 3, p. 328 (1828).

[4] A. Nadai, « Die formanderungen und die spannungen von rechteckigen elastischen platten", Forsch a.d. Gebiete d Ingeineurwesens, Berlin, Nos. 170 and 171 (1915).

[5] A. Nadai, « Uber das ausbeulen von kreisformigen platten", Zeitschr VDJ, No. 9,10 (1915).

[6] A.N. Dinnik, « A stability of compressed circular plate", Izv Kiev Polyt In-ta (1911) (in Russian).

[7] A.N. Krylov, « On stresses experienced by a ship in a sea way", Trans Inst Naval Architects, vol. 40, London, pp. 197209 (1898).

[8] A.S. Volmir, « Flexible Plates and Shells", Gos. Izd-vo Techn.-Teoret. Lit-ry, Moscow (1956) (in Russian).

[9] B.G.Galerkin," Thin Elastic Plates", Gostrojisdat, Leningrad (1933) (in Russian).

[10] B.N. Pandya and T. Kant, "Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations", International Journal of Solids and Structures 24 : 419-451 (1988).

[11] C.L.M.H. Navier," Bulletin des Sciences de la Société Philomathique de Paris" (1823).

[12] C.M.C. Roque, A.J.M. Ferreira and R.M.N. Jorge", "A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory", Journal of Sound and Vibration 300 (3-5) : 1048-1070 (2007).

[13] D.Yu. Panov," On large deflections of circular plates", Prikl Matem Mech, vol. 5, No. 2, pp. 4556 (1941) (in Russian).

[14] E.F. Chladni," Die Akustik", Leipzig (1802).

[15] E. Meissner," Uber das knicken kreisformigen scheiben", Schweiz Bauzeitung, 101, pp. 87 89 (1933).

[16] E. Reissner," The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J Appl Mech Trans ASME, vol. 12, pp. A69A77 (1945).

[17] E. Reissner," On the theory of bending of elastic plates". Journal of Mathematical Physics, 23, pp. 184-191 (1944).

[18] F. Gehring," Vorlesungen uber Mathematieche Physik", Mechanik, 2nd edn, Berlin (1877).

[19] F. Hartmann," Knickung, Kippung, Beulung", Springer-Verlag, Berlin (1933).

[20] G.N. Bryan," On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane", Proc London Math Soc, 22, 5467 (1981)

[21] G.R. Kirchhoff," Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem scheibe, J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik", vol. 40, pp. 5188 (1850).

[22] H. Hencky," Der spanngszustand in rechteckigen platten (Diss.)", Z Andew Math und Mech, vol. 1 (1921).

[23] H.L. Cox," Buckling of Thin Plates in Compression", Rep. and Memor., No. 1553,1554, (1933).

[24] I.G. Bubnov," Theory of Structures of Ships", vol. 2, St . Petersburg (1914).

[25] J. Bernoulli," Essai théorique sur les vibrations de plaques élastiques rectangulaires et libers", Nova Acta Acad Petropolit, vol. 5, pp. 197219 (1789).

[26] J. Boussinesq," Complements anne étude sur la théorie de léquilibre et du mouvement des solides élastiques", J de Math Pures et Appl , vol. 3, ses. t.5 (1879).

[27] J.L. Lagrange," Ann Chim", vol. 39, pp. 149207 (1828).

[28] J.L. Mantari, A.S. Oktem and C. Guedes Soares, "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates", Composite : Part B, doi : 10.1016/j.compositesb.2011.07.017 (2011).

[29] J.N. Reddy, " A simple higher-order theory for laminated composite plates ", Journal of Applied Mechanics 51, pp 745-752 (1984).

[30] J.P. Den Hartog," Mechanical Vibrations", 4th edn, McGraw-Hill, New York (1958).

[31] K.S. Afaq, "Développement dun nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord", PhD thesis, Universite Toulouse III - Paul Sabatier (2003).

[32] L. Euler," De motu vibratorio tympanorum", Novi Commentari Acad Petropolit, vol. 10, pp. 243260 (1766).

[33] Lord Kelvin and P.G.Tait," Treatise on Natural Philosophy", vol. 1, Clarendon Press, Oxford (1883).

[34] Metin Aydogdu, "A new shear deformation theory for laminated composite plates", Composite Structures, Volume 89, Issue 1, Pages 94-101, ISSN 0263-8223, 10.1016/j.compstruct.2008.07.008 (June 2009).

[35] M. Levy," Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes", J Math Pure Appl, vol 3, p. 219 (1899).

[36] M. Levinson, An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", Mechanics Research Communication, vol. 7, pages 343-350 (1980).

[37] M.T. Huber," Probleme der Static Techish Wichtiger Orthotroper Platten", Warsawa (1929).

[38] M. Touratier, "An efficient standard plate theory", International Journal of Engineering Science, (29) :901-916 (1991).

[39] M.V.V. Murthy, "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate", Rapport technique, NASA (1981).

[40] N.F. Hanna and A.W. Leissa, "A higher order shear deformation theory for the vibration of thick plates", Journal of Sound and Vibration 170 (4) : 545-555 (1994).

[41] R.D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", Journal of Applied Mechanics 73 :31-38 (1951).

[42] S.A. Ambartsumyan, "Theory of anisotropic plate", Technomic Publishing Co (1969).

[43] S.A. Kaczkowski, " Plyty. Obliczenia statyczne (Disc. static calculations)", Arkady, 2 edition (1980).

[44] S.D. Poisson," Mémoire sur léquilibre et le mouvement des corps élastique", Mem Acad Sci, vol. 8, p. 357 (1829).

[45] S.G. Lekhnitskii," Anisotropic Plates (English translation of the original Russian work)", Gordon and Breach, New York (1968).

[46] S. Germain," Remarques sur la nature, les bornes et létendue de la question des surfaces élastiques et équation général de ces surfaces", Paris (1826).

[47] S.P. Timoshenko," On large deflections of circular plates", Mem Inst Ways Commun, 89 (1915).

[48] S.P. Timoshenko," Sur la stabilité des systèmes élastiques", Ann des Points et Chaussees,vol. 13, pp. 496566 ; vol. 16, pp. 73132 (1913).

[49] S.P. Timoshenko and D.H. Young," Vibration Problems in Engineering", John Wiley and Sons., New York (1963).

[50] S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger," Theory of Plates and Shells", 2nd edn, McGraw-Hill, New York (1959).

[51] T. Von Karman," Fesigkeitsprobleme in Maschinenbau", Encycl der Math Wiss, vol. 4, pp. 348351 (1910).

[52] T. Von Karman, Ef Sechler and L.H. Donnel," The strength of thin plates in compression", Trans ASME, vol. 54, pp. 5357 (1932).

[53] V. Panc, "Theories of elastic plates", Noordho, Leyden, Netherlands (1975).

[54] W. Voight," Bemerkungen zu dem problem der transversalem schwingungen rechteckiger platten", Nachr. Ges (Gottingen), No. 6, pp. 225230 (1893).

[55] W. Ritz," Theorie der transversalschwingungen, einer quadratischen platte mit frein ra ndern", Ann Physic, Bd., 28, pp. 737786 (1909).

[56] W.T. Thompson," Theory of Vibrations and Applications", Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey (1973).

CHAPITRE 4

ANALYSE STATIQUE DU VOILEMENT DES PLAQUES STRATIFIÉES

Les matériaux composites renforcés par des fibres ont été largement utilisés dans les industries aéronautique et du transport en raison de leur haut rapport résistance/ poids. De nombreuses recherches ont été menées pour une meilleure compréhension des réponses mécaniques de ces matériaux à des charges appliquées. Cependant, peu de choses ont été rapportées sur le voilement des plaques composites stratifiées en raison de changements de température. La littérature publiée sur le voilement thermique de ce type de matériel est plutôt sommaire. Biswa[11] a résolu les problèmes thermiques de voilement impliquant des plaques orthotropes. Des problèmes similaires pour des plaques anti-symétriques et symétriques ont été résolus par Tauchert and Huang[12] . Une formulation plus générale a été proposée par Chen and Chen[8]. Cependant, la plupart des oeuvres publiées sur des plaques minces a été basée sur la théorie classique des plaques et l'effet de cisaillement transversal n'a pas été inclus dans la formulation. Dans ce chapitre, les équations d'équilibre sont obtenues et employées pour calculer les charges critiques thermo-élastiques de voilement pour une plaque orthotrope rectangulaire. Pour déduire ces équations, on a utilisé les relations non linéaires déformation-déplacement (Von Karman[13]). Pour introduire le cisaillement transversal, les composants de déplacement U et V sont approximés par des expressions d'ordre élevé. En plus de la fonction $f(z)$ du 3eme degré utilisé par A.Mossavarali and M.R.Eslami[2] et L.X.Sun and T.R.Hsu[9], ce document comprend d'autres formes de la fonction $f(z)$ et fait la comparaison entre les résultats obtenus.

4.1 Fonctions de Déplacement

On considère une plaque symétrique rectangulaire de dimensions $(a * b)$, dont le plan moyen $(x, y, 0)$ est le plan de symétrie de la plaque pour la géométrie et le chargement. La présente étude est effectuée dans le cadre des petites perturbations dont le matériau constitutif est considéré linéaire élastique et orthotrope.
Pour la théorie concernant les fonctions polynomiales d'ordre élevé pour la déformation des plaques, les composants du déplacement dans les directions x, y et z peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0 - z \cdot \varphi_x(x,y) + z^2 \cdot \psi_x(x,y) + z^3 \cdot \phi_x(x,y) \\ V(x,y,z) &= v_0 - z \cdot \varphi_y(x,y) + z^2 \cdot \psi_y(x,y) + z^3 \cdot \phi_y(x,y) \\ W(x,y,z) &= w_0 - z \cdot \varphi_z(x,y) + z^2 \cdot \psi_z(x,y) + z^3 \cdot \phi_z(x,y) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Où x,y et z sont les coordonnées cartésiennes comme c'est illustré sur la figure 4.1 :

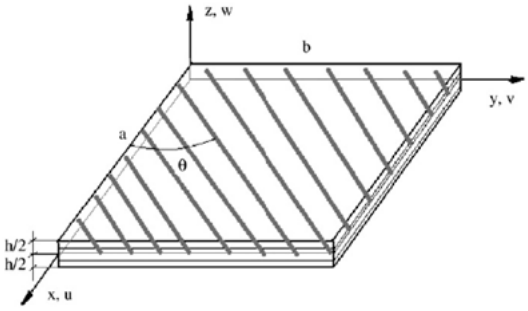


FIG. 4.1 – les paramètres géométriques et le système de coordonnées de la plaque.

Le nombre de termes utilisé dans l'équation 4.1 dépend de la précision requise de la solution. Dans notre cas, on considère que W est indépendant de z, et que les autres composants U et V sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0 - z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \cdot \varphi_x(x,y) \\ V(x,y,z) &= v_0 - z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + f(z) \cdot \varphi_y(x,y) \\ W(x,y,z) &= w_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Où u_0, v_0 et w_0 désignent respectivement les déplacements correspondant au plan moyen suivant les direction x, y et z. La fonction $f(z)$ est attribuée selon la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. φ_x et φ_y sont les rotations autour de la normale au plan moyen suivant les direction x et y respectivement.

4.2 Relations Déformation-Déplacement

Pour la présente analyse, une plaque rectangulaire mince d'épaisseur constante h a été prise en considération. La relation Déformation- Déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2 \\
\epsilon_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\
\epsilon_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} \\
\epsilon_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Où ϵ_{xx} et ϵ_{yy} sont les déformations normales ; ϵ_{xy}, ϵ_{xz} et ϵ_{yz} sont les déformations de cisaillement. On peut aussi écrire le tenseur de déformation sous la forme :

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_0\} + z\{K\} + f(z)\{\varphi\}$$
$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Ou :

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}\}$$

$$\{\epsilon_0\} = \{\epsilon_{xx0}, \epsilon_{yy0}, \epsilon_{xy0}\} = \{\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\}$$

$$\{K\} = \{K_x, K_y, K_{xy}\} = \{-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\}$$

$$\{\partial\varphi\} = \{\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\}$$

4.3 Relations Contrainte-Déformation

La relation Contrainte-Déformation, pour chaque couche prise séparément, peut être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_{11} & \mathrm{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{Q}_{12} & \mathrm{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \epsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

Ou Q_{ij} sont les constantes de rigidité exprimées dans les directions principales du matériau (un axe suivant la direction des fibres et les deux autres étant orthogonaux). Les coefficients linéaires de dilatation thermique sont représontés par α_1 et α_2, et ΔT désigne l'élevation de la température dans la plaque.
On obtient les contraintes dans le plan du stratifié par transformation des coordonées :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \epsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \epsilon_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix}_k \tag{4.5}$$

ou :

$$\{\sigma\}_k = \left[\bar{Q}\right]_k (\{\epsilon\} - \{\alpha\} \Delta T)_k$$

4.4 Résultantes et Moments

les résultantes de contrainte N_{ij}, M_{ij}, P_{ij} et Q_{ij} sont données par :

$$\left(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{M}_x \\ \mathrm{M}_y \\ \mathrm{M}_{xy} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{P}_x \\ \mathrm{P}_y \\ \mathrm{P}_{xy} \end{pmatrix} \right) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} (1, z, f(z))\, dz$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Q}_{xz} \\ \mathrm{Q}_{yz} \end{pmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz \tag{4.6}$$

N_{ij} représentent les résultantes par unité de longueur de plaque respectivement des contraintes normales suivant x et suivant y et des contraintes de cisaillement dans le plan (x,y). De même, Q_{ij} sont les résultantes en cisaillement définies par unité de longueur du stratifié. Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y, respectivement ; et la composante M_{xy} est le moment de torsion, et les P_{ij} représentes les efforts d'ordre élevé.

$$\{N\} = [A]\{\epsilon_0\} + [B]\{K\} + [E]\{d\varphi\} - [N_T]$$

$$\{M\} = [B]\{\epsilon_0\} + [D]\{K\} + [F]\{d\varphi\} - [M_T]$$

$$\{P\} = [E]\{\epsilon_0\} + [F]\{K\} + [H]\{d\varphi\} - [P_T]$$

$$\{Q\} = [D_\tau]\{d\varphi\} - [Q_T] \tag{4.7}$$

(4.8)

Dans les expressions précédantes, les coefficients A, B, D, E, F, H et D_τ désignent la raideur de la plaque, ces coefficients peuvent être définis comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, D_{ij\tau}) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} \left[1, z, z^2, f(z), zf(z), (f(z))^2, (\frac{\partial f(z)}{\partial z})^2\right]$$

Les forces thermiques et les moments thermiques sont deduits de façon similaire :

$$\{N_T\} = (N_{xT}, N_{yT}, N_{xyT}) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q] \{ \alpha\} \Delta T dz$$

$$\{M_T\} = (M_{xT}, M_{yT}, M_{xyT}) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q] \{ \alpha\} \Delta T z dz$$

$$\{P_T\} = (P_{xT}, P_{yT}, P_{xyT}) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q] \{ \alpha\} \Delta T f(z) dz \tag{4.8}$$

4.5 Equations d'équilibre

L'application pratique de la méthode d'équilibre se heurte à de sérieux obstacles mathématiques pour déterminer les charges de voilement des plaques de géométrie complexe et des conditions aux limites mixtes. Dans ces circonstances, la possibilité d'obtenir une solution rigoureuse devient très douteuse et, en pratique, impossible. Par conséquent, l'utilisation de la méthode de l'énergie peut être très avantageuse.
Nous allons appliquer le critère de l'énergie $\Delta U = 0$ à l'analyse de voilement des plaques.
L'expression simplifiée de ΔU a la forme suivante :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int \int_V \int (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) dV \tag{4.9}$$

En introduisant l'equation 4.3 et intégrant sur l'apaisseur de la plaque$h$, on obtient l'expression suivante :

$$\int_0^b (N_x u_0 - M_x \frac{\partial w}{\partial x} + (\frac{\partial M_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + 2(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y})w_0 + N_{xy} v_0 + P_x \phi_x + P_{xy} \phi_y) dy$$
$$+ \int_0^a (N_y v_0 - M_y \frac{\partial w}{\partial y} - 2M_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + (\frac{\partial M_y}{\partial y} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y})w_0 + N_{xy} u_0 + P_y \phi_y + P_{xy} \phi_x) dx$$
$$= \int_0^b \int_0^a [(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y})u_0 + (\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y})v_0 + (\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial xy} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} N_x\right)}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial y} N_{xy}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{y} N_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} N_{xy}\right)}{\partial y})w_0 + (\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - Q_{xz})\phi_x$$
$$+ (\frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} - Q_{yz})\phi_y] dx dy \tag{4.10}$$

On sait que le côté droit de l'égalité égale à 0[3], alors les équations d'équilibre seront exprimées de la manière suivante :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{y} = 0$$
$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial xy} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} N_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial y} N_{xy}\right)}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{y} N_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} N_{xy}\right)}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0$$
$$\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - Q_{yz} = 0 \tag{4.11}$$

4.6 Résultats et Discussions

On considère une plaque symétrique rectangulaire cross-ply de dimenssions (axb), les coefficients de raideur suivants sont égaux à zéro :

$$\mathrm{B}_{ij} = E_{ij} = 0 A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = 0$$

$$\mathrm{A}_{45} = D_{45} = F_{45} = H_{45} = D_{45\tau} = 0$$

On doit spécifier la fonction $f(z)$ qui est en relation avec la variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit $f(z)$ va prendre plusieurs formes :

CPT : $f(z) = 0$

FSDT : $f(z) = z$

RSDT[6] : $f(z) = z\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)$

TSDT[10] : $f(z) = \frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$

HSDT[5] : $f(z) = \sin(\frac{\pi z}{h})e^{\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi z}{h})} + \frac{1}{2}\frac{\pi z}{h}$

La plaque est supposée simplement appuyée et les déplacements suivant les directions x et y sont empêchés, par conséquent, les conditions aux limites sont :

à $x = 0$ et $x = a$:
$w(0,y) = w(a,y) = v(0,y) = v(a,y) = \varphi_y(0,y) = \varphi_y(a,y) = M_x(0,y) = M_x(a,y) = P_x(0,y) = P_x(a,y) = 0$

à $y = 0$ et $y = b$:
$w(x,0) = w(x,b) = v(x,0) = v(x,b) = \varphi_y(x,0) = \varphi_x(x,b) = M_y(x,0) = M_y(x,b) = P_y(x,0) = P_y(x,b) = 0$

Les composantes du déplacement pour une plaque orthotrope rectangulaire satisfaisant les conditions d'apuis simples sont considérées par :

$$u = u_{mn}\cos\alpha_m x \sin\beta_n y$$

$$v = v_{mn}\sin\alpha_m x a \cos\beta_n y$$

$$w = w_{mn}\sin\alpha_m x a \sin\beta_n y$$

$$\varphi_x = \varphi_{xmn}\cos\alpha_m x \sin\beta_n y$$

$$\varphi_y = \varphi_{ymn}\sin\alpha_m x \cos\beta_n y \tag{4.12}$$

ou $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$ et $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$.

On considère dans un premier temps que la température est uniforme, ce qui conduit à :

$$N_{xT} = (A_{11}\alpha_x + A_{12}\alpha_y)\,\Delta T$$

$$N_{yT} = (A_{12}\alpha_x + A_{22}\alpha_y)\,\Delta T$$

En introduisant l'equation 4.-3 dans l'equation 4.5 on obtient :

$$[K_{ij}]\,(u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \varphi_{xmn}, \varphi_{ymn})^T = 0 \tag{4.13}$$

Ou $[K_{ij}]$ est une matrice symétrique de composants suivants :

$K_{11} = \alpha_m^2 A_{11} + \beta_n^2 A_{66}$
$K_{12} = \alpha_{mn}\,(A_{12} + A_{66})$
$K_{13} = 0$
$K_{14} = 0$
$K_{15} = 0$
$K_{22} = \alpha_m^2 A_{66} + \beta_n^2 A_{22}$
$K_{23} = 0$
$K_{24} = 0$
$K_{25} = 0$
$K_{33} = \alpha_m^4\,(H_{11} + D_{11} - 2F_{11}) + \beta_n^4\,(H_{22} + D_{22} - 2F_{22}) + \alpha_m^2 D_{44\tau} + \beta_m^2 D_{55\tau} + 2\alpha_m^2\beta_n^2\,((H_{12} + 2H_{66})$
$+ (D_{12} + 2D_{66}) - 2\,(F_{12} + 2F_{66}) - (\alpha_m^2\,(A_{11}\alpha_x + A_{12}\alpha_y) + \beta n^2\,(A_{12}\alpha_x + A_{22}\alpha_y))\,\Delta T$
$K_{34} = \alpha_m^3\,(H_{11} - F_{11}) + \alpha_m D_{44\tau} + \alpha_m\beta_n^2\,((H_{12} + 2H_{66}) - (F_{12} + 2F_{66}))$
$K_{35} = \beta_n^3\,(H_{22} - F_{22}) + \beta_n D_{55\tau} + \alpha_m\beta_n^2\,((H_{12} + 2H_{66}) - (F_{12} + 2F_{66}))$
$K_{44} = \alpha_m^2 H_{11} + \beta_n^2 H_{66} + D_{44\tau}$
$K_{55} = \alpha_m^2 H_{66} + \beta_n^2 H_{22} + D_{55\tau}$
$K_{45} = \alpha_{mn}\,(H_{12} + H_{66})$

L'équation (4.13) a une sulution si $|K_{ij}| = 0$, de cette condition on peut tirer la valeur critique de ΔT qui vaut :

$$\Delta T = K_{33} - \frac{\delta}{(A_{11}\alpha_x + A_{12}\alpha_y)\,\alpha_m^2 + (A_{12}\alpha_x + A_{22}\alpha_y)\,\beta_n^2} \tag{4.14}$$

$$\text{Où : } \delta = \frac{K_{34}\,(K_{34}K_{55} - K_{35}K_{45}) - K_{35}\,(K_{34}K_{45} - K_{44}K_{35})}{K_{44}K_{55} - K_{45}^2}$$

Dans le cas qui suit, on considère une variation linéaire de la température à travers l'épaisseur de la plaque :

$$T(z) = \Delta T \frac{(z + \frac{h}{2})}{h}$$

Les efforts termiques valent :

$$N_{xT} = (A_{11}\alpha_x + A_{12}\alpha_y)\,\frac{\Delta T}{2}$$
$$N_{yT} = (A_{12}\alpha_x + A_{22}\alpha_y)\,\frac{\Delta T}{2}$$

En utilisant la même méthode précédente, la valeur de ΔT est égale à :

$$\Delta T = K_{33} - \frac{\delta}{(A_{11}\alpha_x + A_{12}\alpha_y)\,\frac{\alpha_m^2}{2} + (A_{12}\alpha_x + A_{22}\alpha_y)\,\frac{\beta_n^2}{2}} \tag{4.15}$$

Résultats Numériques

Dans ce qui suit, on va présenter les résultats numériques pour le cas d'une plaque orthotope symétrique, en indiquant l'influence du cisaillement transversal, l'orientation des fibres et le nombre de couches sur la température du voilement.
Premièrement, on considère cross-ply de 8 chouches et on fait l'étude pour deux types de matériau (tableau 4.1) :

	Matériau	
Propréties	AS4/3501-6	T300/5208
$E_1\,(Gpa)$	142	181
$E_2\,(Gpa)$	10.3	10.3
$G_{12}\,(Gpa)$	7.2	7.17
ν_{12}	0.27	0.28
$\alpha_1\,(\mu/^0C)$	-0.9	0.02
$\alpha_2\,(\mu/^0C)$	27	22.5

Tab. 4.1 – Propriétés des matériaux

Dans le tableau 4.2, on fait une comparaison du présent résultat avec d'autres obtenus précédemment :

Séquence	$\Delta T_{cr}\,(^0F)$				
d'empilement	Shi and al.[14]	L-C.Shiau and al.[7]	Present		Différence
$[0/90/0/90]_s$	12.26	12.2610	SSDT	11.3073	0.07
			HSDT	11.2493	0.08

Tab. 4.2 – Température critique de voilement pour une plaque simplement appuyée

Les figures 4.2a et 4.2b montrent le tracé de la température critique de voilement en fonction du rapport a/b pour une plaque rectangulaire simplement appuyée avec différentes orientations des fibres ($[90_2/0_2]_s$,$[(90/0)_2]_s$, $[(0/90)_2]_s$, $[0_2/90_2]_s$) en utilisant deux types de matériaux. Les courbes montrent que l'augmentation du rapport a/b conduit à la décroissance de T_{cr} jusqu'à stabilisation(pour $a/b > 3$). On remaque aussi que l'empilement des couches influe sur la forme des courbes :
la température critique de flambement des plaques $[(0/90)_2]_s$ et $[0_2/90_2]_s$ décroit de façon intense. . D'autre part, L'effet du rapport a/b sur la température critique pour les plaques $[90_2/0_2]_s$ et $[(90/0)_2]_s$ est mineur.
En outre, il est intéressant de noter que les températures critiques de voilement des plaques en AS4/3501-6 sont plus élevées que ceux en T300/5208. Pour le stratifié AS4/3501-6 soumis à une élévation de température, la force de tension est générée par le coefficient de dilatation thermique négatif ce qui permet à la plaque d'épuisé la capacité de support de charge relativement lentement. Par conséquent, la température critique de la plaque stratifiée AS4/3501-6 est supérieure. Ces résultats sont

qualitativement identques avec ceux fournis par L-C.Shiau et al[7], ou des plaques orthotropiques ont été étudiées en utilisant la théorie classique des plaques (CPT).

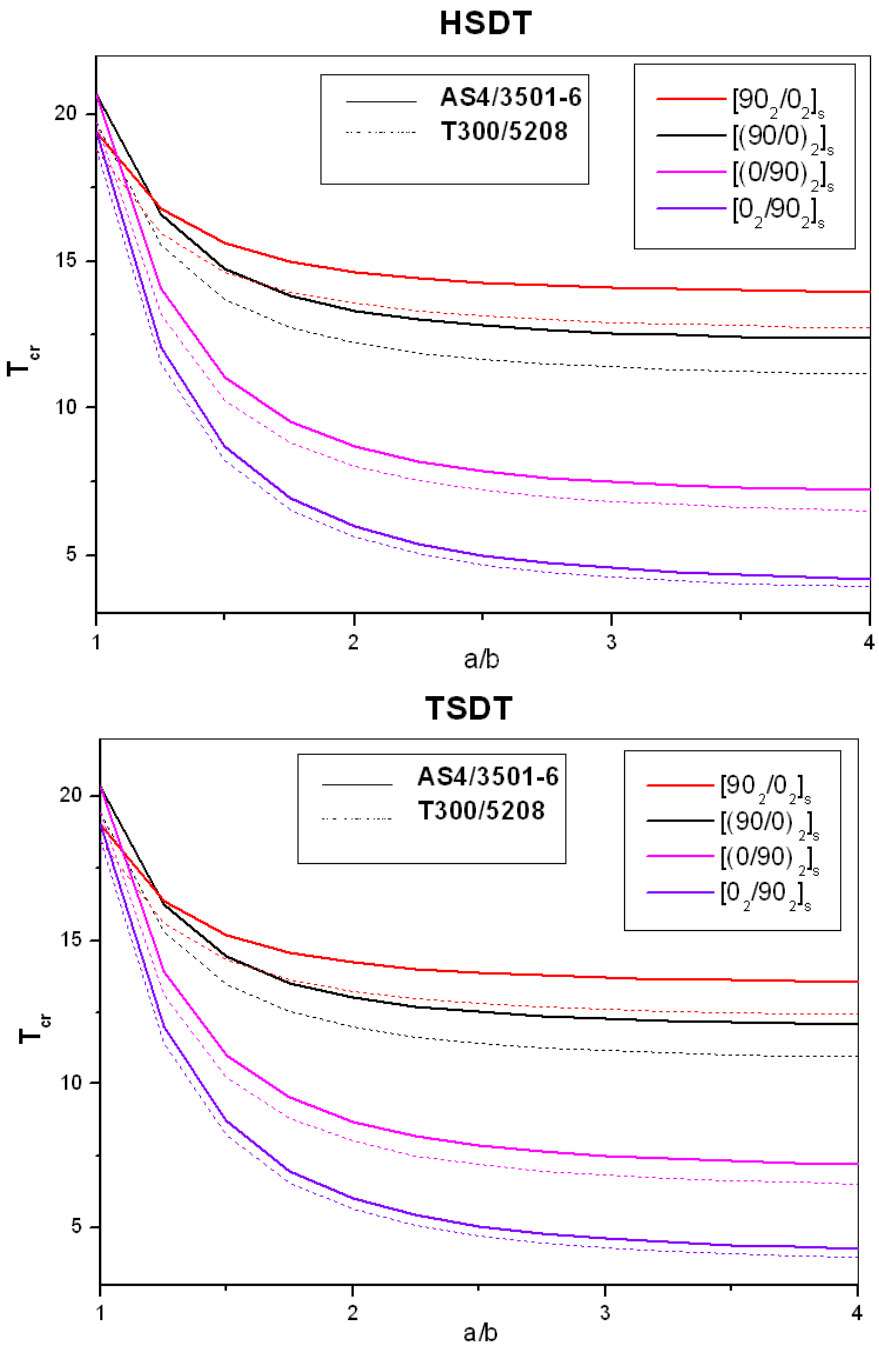


Fig. 4.2 – Température critique VS a/b

On a étudié la variation de T_{cr} en fonction du rapport a/b en utilisant 5 théories, la figure 4.3 présente une comparaison entre les valeurs obtenues.

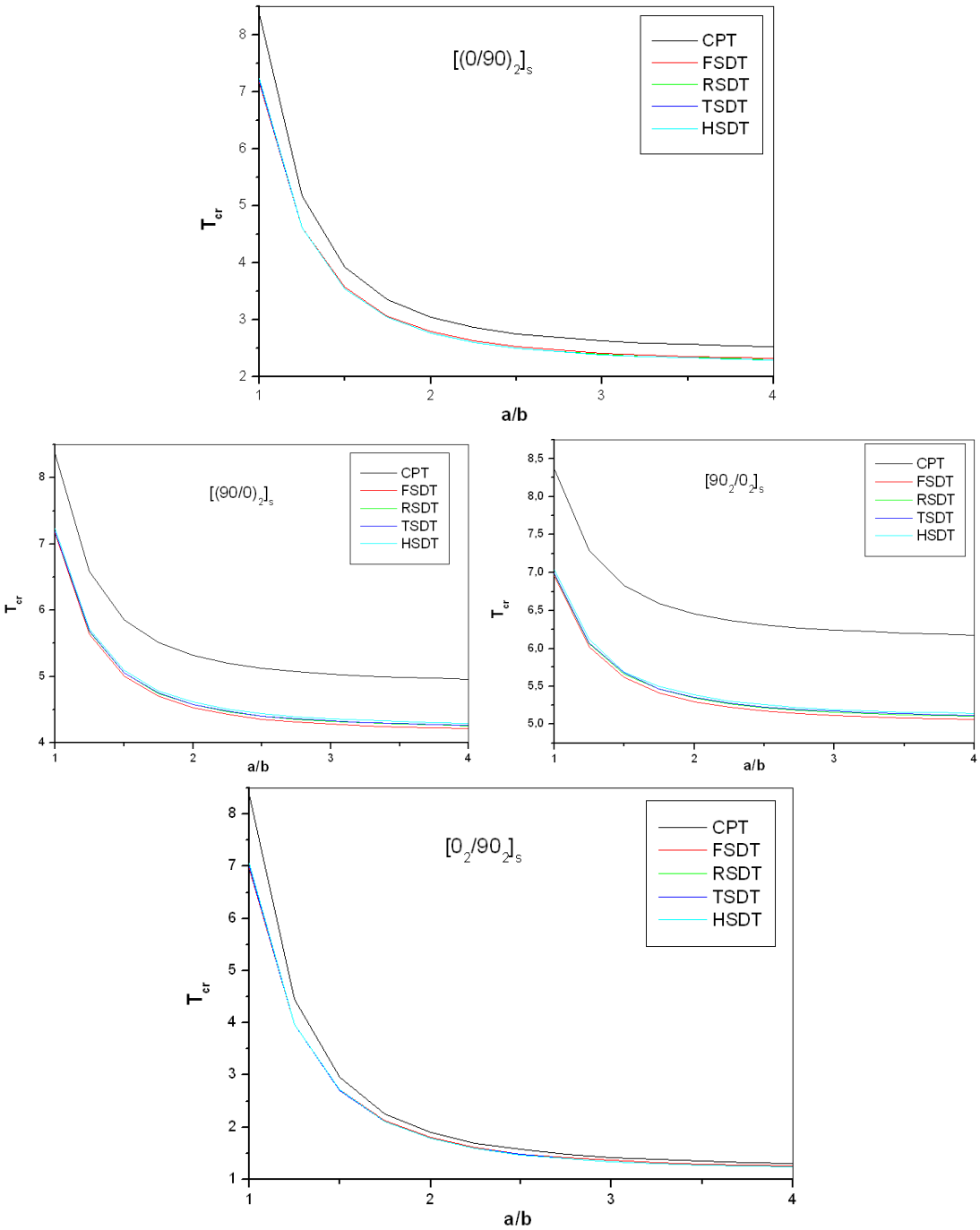


Fig. 4.3 – Température critique VS a/b en utilisant différentes théories

Pour la figure 4.3, on remarque que l'augmentation du rapport a/b conduit à la décroissance de la température critique jusqu'à stabilisation correspondant à $a/b > 3$. Les résultats donnés par les théories prenant en compte le cisaillement transversal sont proches, tandis que ceux fournis par la théorie classique des plaques (CPT) sont plus élevés.

Deuxièmement, on considère cross-ply de 4 chouches ([0/90/90/0]) et on trace les

courbes suivantes. Le matériau constituant cette plaque est T300/5208.

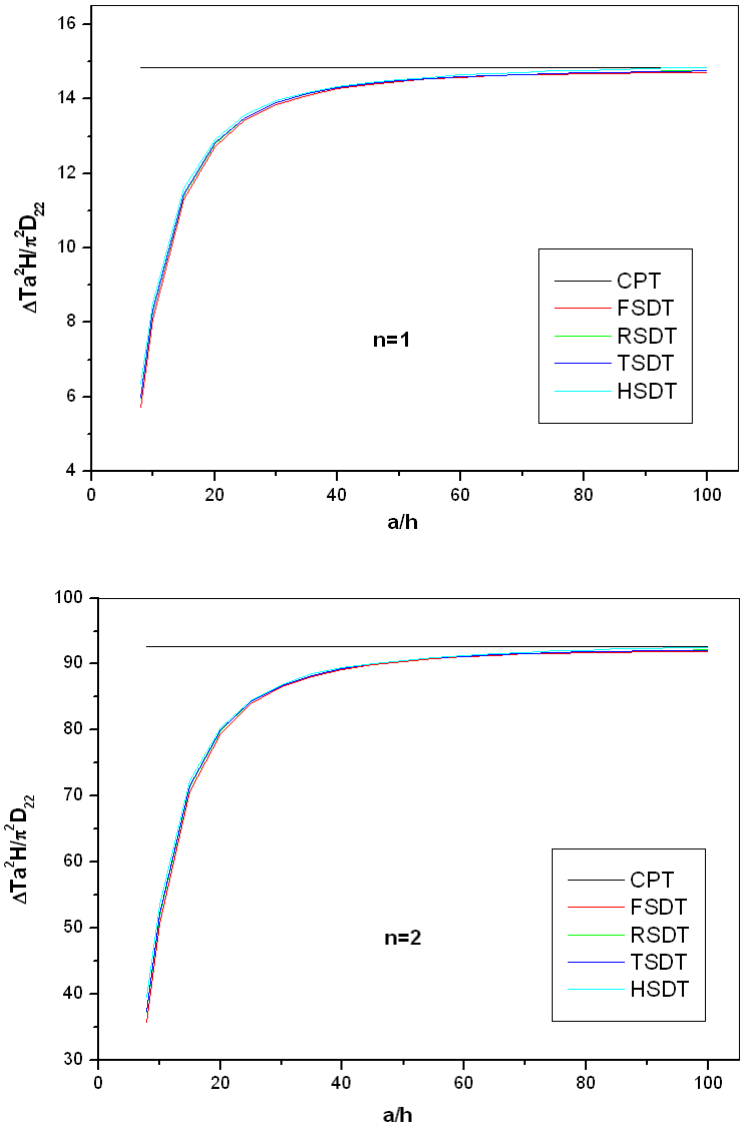


Fig. 4.4 – $\frac{N^T}{N_{cr}}$ pour une plaque carrée

La figure 4.4 montre $\dfrac{N^T}{N_{cr}}$ d'une plaque carrée en fonction du rapport a/h pour deux modes ($n = 1$ et $n = 2$), l'augmentation de n entraine une augmentation significative du rapport $\frac{N^T}{N_{cr}}$. On remarque que l'augmentation du rapport a/h induit à une croissance de $\frac{N^T}{N_{cr}}$, à l'exception de la théorie classique des stratifiés (CPT) dans laquelle ce rapport reste fixe, cela est du à la négligence du cisaillement transverse. On a fait une comparaison entre les différentes théories qui ont donné des valeurs -en quelque sorte- proches. Ces résultats sont identiques aux résultats de L.X.Sun and T.R.Hsu[9].

On a tracé la courbe de la température critique de voilement en fonction du rapport $E1/E2$ (figure 4.5), on remarque une relation inverse entre la température et $E1/E2$.

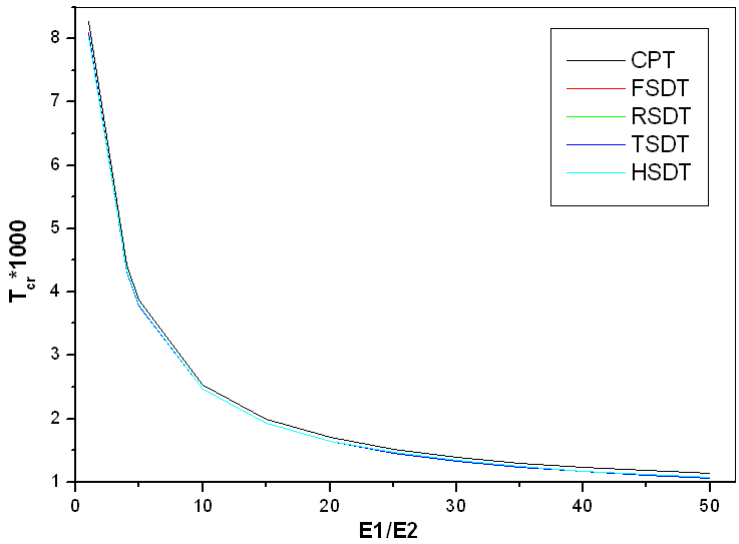


FIG. 4.5 – Température critique VS $E1/E2$

Dans un premier temps, la température décroît fortement à mesure que le rapport augmente, puis, à partir de la valeur 20, la pente de la courbe diminue. Les 5 théories ont donné des résultats proches.

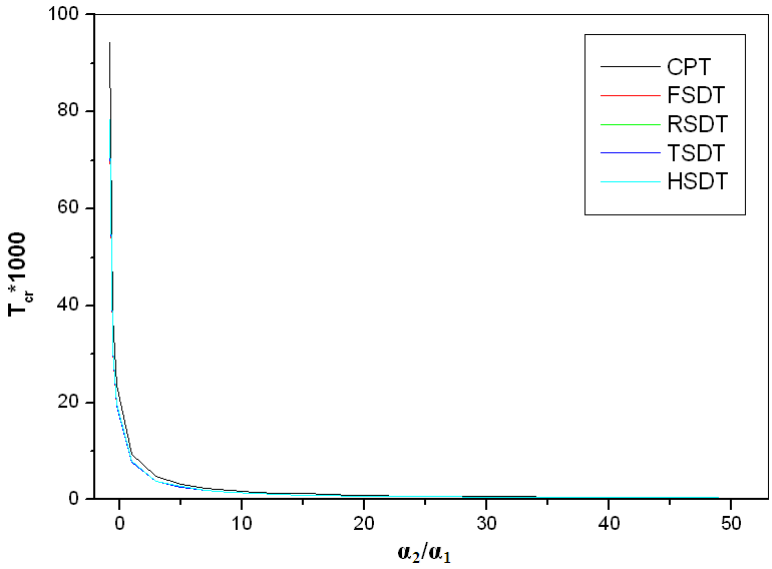


FIG. 4.6 – Température critique VS $\alpha 2/\alpha 1$

D'après la figure 4.6, on constate que l'augmentation du rapport $\alpha 2/\alpha 1$ se succède

par une réduction de la température critique de voilement. Pour des valeurs négatives du rapport, la température critique prend des valeurs supérieures c'est par ce que - comme noté précédemment- la force de tension générée par le coefficient de dilatation thermique négatif permet à la plaque d'épuisé lentement la capacité de support de charge.

Pour l'étude paramétrique du cas suivant, les propriétés du matériau des couches individuelles sont prises comme suit :
$E1/E2 = 15$; $G12/E2 = G13/E2 = 0.5$; $G23/E2 = 0.3356$; $\nu 12 = 0.3$; $\alpha 1/\alpha 0 = 0.015$; $\alpha 2/\alpha 0 = 1$;
Où $\alpha 0$ est un facteur de normalisation pour les coefficients de dilatation thermique.
On a fait une comparaison entre la température critique du voilement d'une plaque carré orthotrope monocouche et une plaque isotrope avec : $E1 = E2$, $\alpha 1 = \alpha 2 = \alpha 0$ et $\nu = 0.3$ avec les résultats obtenus par Noor and Burton[1] et H. Matsunaga[4] (tableau 4.3).
Pour le cas de monocouche, la température minimale d'une plaque orthotrope correspond au mode ($n = 1$, $m = 2$), tandis que pour une plaque isotrope, elle correspond au 1^{er}mode.

	a/h	Noor and Burton[1]	H. Matsunaga[4]	Present
ORTHO	2	–	0.2798	0.2968
	10/3	0.2057	0.2066	0.2054
	4	0.1777	0.1781	0.1732
	5	0.1463	0.1438	0.1367
	20/3	0.1029	0.1030	0.0964
	10	$0.5782\ 10^{-1}$	$0.5782\ 10^{-1}$	$0.5113\ 10^{-1}$
	20	$0.1739\ 10^{-1}$	$0.1739\ 10^{-1}$	$0.1664\ 10^{-1}$
	100	$0.7463\ 10^{-3}$	$0.7463\ 10^{-3}$	$0.7254\ 10^{-3}$
ISO	2	–	0.1258	0.1365
	10/3	$0.7193\ 10^{-1}$	$0.7199\ 10^{-1}$	$0.7911\ 10^{-1}$
	4	$0.5600\ 10^{-1}$	$0.5602\ 10^{-1}$	$0.6154\ 10^{-1}$
	5	$0.3990\ 10^{-1}$	$0.3991\ 10^{-1}$	$0.4372\ 10^{-1}$
	20/3	$0.2468\ 10^{-1}$	$0.2468\ 10^{-1}$	$0.2691\ 10^{-2}$
	10	$0.1183\ 10^{-1}$	$0.1183\ 10^{-1}$	$0.1282\ 10^{-1}$
	20	$0.3109\ 10^{-2}$	$0.3109\ 10^{-2}$	$0.3353\ 10^{-2}$
	100	$0.1264\ 10^{-3}$	$0.1264\ 10^{-3}$	$1361\ 10^{-3}$

Tab. 4.3 – Comparaison et convergence des températures critiques minimales des plaques orthotropes et isotropes monocouche.

L'influence de la séquence d'empilement des couches sur la température critique se traduit sur la figure 4.7. La plaque est carrée simplement appuyée pour le premier mode de voilement ($m = 1, n = 1$) avec le nombre de couche K [0/90/0/90/0/90/0/....].

Pour un petit nombre de couche, la température critique est influée largement par le nombre de couche et la séquence d'empilement. D'autre part, pour un grand nombre de couche, la température critique approche à une valeur constante. On peut noter que l'effet d'anisotropie sera stable à mesure que le nombre de couche augmente, et la plaque sera analysée avec moins de difficultés.

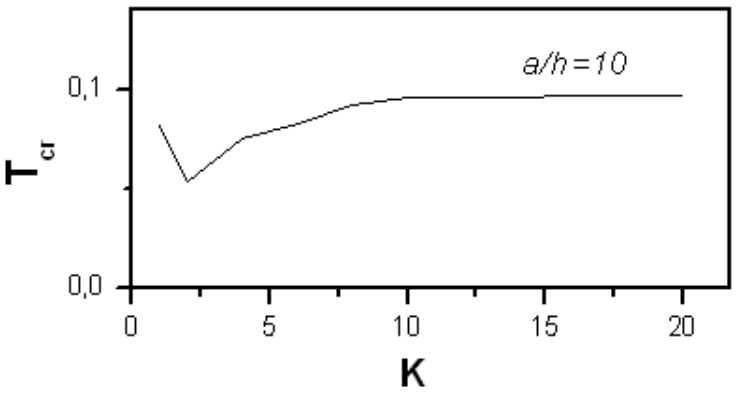


FIG. 4.7 – Température critique VS nombre de chouches.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude du comportement thermique du voilement des plaques stratifiées a été faite.
La relation non linéaire contrainte-déplacement d'ordre élevé des plaques a été prise en considération. Les modes du voilement thermique des cross-ply avec différents rapports ($E1/E2$, a/b, a/h, $\alpha 2/\alpha 1$), orientation des fibres et nombre de couches ont été étudiés.
Les résultats numériques indiquent que la déformation due au cisaillement transversal a un effet significatif sur le comportement thermique de voilement des plaques simplement appuyées.

Bibliographie

[1] A.K. Noor and W.S. Burton, "Three-dimensional solutions for the thermal buckling and sensitivity derivatives of temperature-sensitive multilayered angle-ply plates", J Appl Mech ;59(4) :84856 (1992).

[2] A. Mossavarali and M.R. Eslami, "Thermoelastic buckling of orthotropic plates based on higher-order displacement field". Sharif University of Technology (2001).

[3] Eduard Ventsel and Theodor Krauthammer, "Thin Plates and Shells : Theory, Analysis, and Applications", New York (2001)

[4] H. Matsunaga, "Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory", Composite Structures 68 439454 (2005).

[5] J.L. Mantari, A.S. Oktem and C. Guedes Soares, "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates", Composite : Part B, doi : 10.1016/j.compositesb. 2011.07.017 (2011).

[6] J.N. Reddy, " A simple higher-order theory for laminated composite plates", Journal of Applied Mechanics 51, pp 745-752 (1984).

[7] Le-Chung Shiau, Shih-Yao Kuo and Cheng-Yuan Chen, "Thermal buckling behavior of composite laminated plates", Composite Structures 92, pp 508514 (2009).

[8] L.W. Chen and L.Y. Chen, Thermal buckling of laminated composite plates. J.Therm. Stresses 10 (1987).

[9] L.X. Sun and T.R. Hsu, "Thetmal buckling of laminated composite plates with transverse shear deformation", Composite Structure Vol. 36, No. 5, pp. 883-889 (1990).

[10] M. Touratier, "An efficient standard plate theory", International Journal of Engineering Science, (29) :901-916 (1991).

[11] P. Biswa, " Thermal buckling of orthotropic plate", J. appl. Mech. 43, 1976.

[12] T.R. Tauchert and N.N. Huang, "Thermal buckling and postbuckling behavior of antisymmetric angle-ply laminates" (1986).

[13] T. Von Karman, Festigkeitsprobleme im Maschinenbau,in Encylop¨adie der Mathematischen Wissenschaften IV/4C, 1910, 311-385.

[14] Y. Shi , R.Y.Y. Lee and C. Mei , "Thermal postbuckling of composite plates using the finite element modal coordinates method", J Therm Stress ;22(6) :595614 (1999).

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Les plaques et les coques sont largement utilisées dans la confection des structures mécaniques. Une raison importante en est leur grande légèreté doublée dans certaines configurations d'une résistance mécanique importante (structures creuses, lamellaires ou en nid d'abeille. . .). Elles permettent ainsi de réaliser dans l'industrie des structures robustes de moindre poids. Pourtant, malgré plus de deux siècles d'existence et des implications très diverses, l'élasticité des plaques recèle encore de nombreuses zones d'ombres.

Dans le cadre de ce travail, on a fait une étude analytique sur le comportement de voilement et poste voilement des plaques stratifiées. L'étude est basée sur les trois théories des plaques les plus couramment utilisées en soulignant les points communs ainsi que les différences fondées sur l'hypothèse d'introduire ou de négliger le cisaillement transverse.

L'étude est faite sur des cross-ply en manipulant plusieurs paramètres tels que les dimensions, le module de Young, le coefficient de dilatation thermique, le nombre des couches et leur orientation. Les résultats obtenus sont de grande qualité comparables avec ceux de la littérature.

En perspective, nous envisageons dans la partie analytique, d'étudier d'autres problèmes que le flambement et d'en combiner plusieurs ; et d'introduire d'autre matériaux tels que les matériaux hybrides.

Les motivations et les intérêts de ces travaux nécessitent une étude expérimentale pour que le choix des différentes approches et des paramètres soit concret donnant ainsi une illusion aux chercheurs d'entamer de nouvelles études.