

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DJILLALI LIABES  
SIDI BEL ABBES

Laboratoire Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics



FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

THESE DE DOCTORAT 3ème Cycle  
Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

M<sup>me</sup> : TAIBI Fatima Zohra

Intitulé de la thèse

## Analyse Thermomécanique des Plaques Composites

Soutenu le :24 /05 /2015 Composition du jury :

ADDA BEDIA El Abbas	Pr	UDL SBA	Président
BENYOUCEF Samir	MCA	UDL SBA	Directeur de thèse
BACHIR BOUIADJRA Mohamed	MCA	UDL SBA	Examineur
FEKRAR Abdelkader	MCA	UDL SBA	Examineur
HOUARI Mohammed Sid Ahmed	MCA	U de Mascara	Examineur
KACI Abdelhakim	MCA	U DE SAIDA	Examineur

Année universitaire 2014-2015

# **Remerciements**

## **Remerciement**

Le présent travail a été effectué au laboratoire des matériaux et hydrologie(LMH) à la faculté des sciences de l'ingénieur de l'université Djillali Liabes de Sidi bel Abbés.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur S.Benyoucef, maître de conférence de l'université Djillali Liabes, directeur de cette thèse. Je lui suis très reconnaissant pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée tout au long de l'étude, ses conseils éclairés, pour sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont beaucoup aidé à achever ce travail dans des conditions favorables.

Je suis reconnaissant envers Monsieur E.Adda Bedia, professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés pour m'avoir accueilli chaleureusement dans son laboratoire, qui a aussi favorisé le déroulement de cette thèse en associant sympathie et professionnalisme. Mr E.Adda Bedia a eu le mérite de juger ce document car son jugement est d'une valeur intrinsèque dans ce domaine.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs : B.Bouiadja, A.Fekrar maître de conférence à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés, M.S.A.Houari maître de conférence à l'université Université de Mascara et A.Kaci Houari maître de conférence à l'université de Saida qui ont accepté de participer au jury et qui ont bien voulu juger mon travail.

Je remercie de tout mon cœur mon mari, ma famille, qui a su me donner sans cesse son soutien moral au cours de ma vie pour rendre possible mes études et par conséquent, cette thèse de Doctorat.

Merci à tous mes collègues de travail et à mes amis pour leur motivation et leur amitié que m'ont apportées. Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres du laboratoire des matériaux et hydrologie, doctorants ou permanents, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma personnalité et que leur contribution a apporté un soutien scientifique important à ce travail.

## المخلص

يتناول هذا العمل السلوك الحراري الميكانيكي للصفائح المركبة المصنوعة من المواد المتدرجة الخاصة تستريح على أسس مرنة من نوع وينكلرو بسترناك .بقسمة الازاحة العرضية إلى جزئين الانحناء والقص ، عدد المجاهيل التي تحكم معادلات النظرية الحالية منخفض، وبالتالي يجعلها سهلة للاستخدام فهي لا تتطلب معامل تصحيح القص، ويثير الاختلاف إجهاد القص العرضي بحيث إجهاد قص عرضي تختلف في الطريقة القطعي عبر سمك تلبية إجهاد القص ظروف سطح مجانا .واعتمدت قانون توزيع الطاقة للخصائص الميكانيكية لنموذج الاختلاف المستمر من الخصائص من تلك التي مكون واحد لتلك التي من جهة أخرى .وجوه الصفيحة المركبة مصنوعة من مواد موحدة الخواص، مكونين (السيراميك والمعادن)متغيرا التوزيع وفق السمك اما ا طبقة الأساسية لا تزال متجانسة ومصنوعة من مادة معدنية موحدة الخواص،تستعرض عدة أنواع للصفائح المركبة غير المتناظرة وتستمد المعادلات التي تحكم وشروط الحدود باستخدام مبدأ نزوح الافتراضية .يتم عرض النتائج العددية للنظرية الحالية بسيطة القص تشوه لإظهار تأثير التوزيع المادي والمعلومات الأساس على الانحرافات والضغوط .وتقدم مجموعة واسعة من النتائج للاستجابة السكونية للصفائح المركبة المصنوعة تحت تأثير الأحمال الحرارية الميكانيكية .

كلمات البحث :الاستجابة للانحناء، المواد المتدرجة الخاصة،الصفائح المركبة، استجابة المواد المتدرجة، لوحات ساندويتش، وتأثير الميكانيكية الحرارية، أسس مرنة.

# Résumé

## Résumé

---

### Résumé :

Ce travail traite du comportement thermo-mécanique de déformation en cisaillement déformable classés plaques sandwich en matériaux à gradient de propriétés appuyée sur un sol élastique. En divisant le déplacement transversal en parties de flexion et de cisaillement, le nombre d'inconnues et équations gouvernant de la présente théorie est réduite, et par conséquent, elle est simple à utiliser. La présente théorie variationnellement cohérent, ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, et donne naissance à un cisaillement transversal de telle sorte que les contraintes de cisaillement transversales varient de manière hyperbolique à travers l'épaisseur (la contrainte de cisaillement doit satisfaire les conditions de surface libre). Les faces de plaque sandwich sont réalisées en diffusion isotrope, à deux constituants (céramique-métal) à travers l'épaisseur du matériel. La couche centrale est toujours homogène et constituée d'un matériau métallique isotrope. Plusieurs types de plaques sandwich non symétriques sont présentés. Les équations régissant et conditions aux limites sont calculées en utilisant le principe des déplacements virtuels. Les résultats numériques de la théorie actuelle de déformation de cisaillement sont présentés pour montrer l'effet de la distribution du matériel et des paramètres de base sur les flexions et les contraintes. Plusieurs résultats sont présentés pour la réponse statique de plaques sandwich sous une charge thermo-mécaniques.

# **Abstract**



# Abstract

---

## Abstract

This work deals with the thermo-mechanical deformation behaviour of shear deformable functionally graded sandwich plates resting on a two-parameter (Pasternak model) elastic foundation. By dividing the transverse displacement into bending and shear parts, the number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and hence, makes it simple to use. The presented theory is variationally consistent, does not require shear correction factor, and gives rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary in hyperbolic manner across the thickness satisfying shear stress free surface conditions. A power-law distribution for the mechanical characteristics is adopted to model the continuous variation of properties from those of one component to those of the other. The sandwich plate faces are made of isotropic, two-constituent (ceramic–metal) material distribution through the thickness. The core layer is still homogeneous and made of an isotropic metal material. Several kinds of nonsymmetric sandwich plates are presented. The governing equations and boundary conditions are derived using the principle of virtual displacements. Numerical results of the present simple shear deformation theory are presented to show the effect of material distribution and foundation parameters on the deflections and stresses. A wide variety of results is presented for the static response of sandwich plates under thermo-mechanical loads.

*Keywords:* Bending response, Functionally graded material, Sandwich plates, Thermomechanical effect, Elastic foundations .

# **Table des Matières**

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction Générale ..... 1

## **Chapitre I : généralités sur les matériaux à gradient de propriétés**

<u>I.1. Introduction</u> .....	4
<u>I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés</u> .....	4
<u>I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés</u> .....	7
<u>I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés</u> .....	9
<u>I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)</u> .....	9
<u>I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)</u>	
<u>I.4.3. Compaction sèche des Poudres</u>	
<u>I.4.4. Projection plasma</u> .....	10
<u>I.4.5. Frittage et Infiltration</u> .....	11
<u>I.4.6. Dépot par Electrophorèse</u> .....	11
<u>I.4.7. C.V.D et P.V.D.</u> .....	11
<u>I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés</u> .....	11
<u>I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM</u> .....	12
<u>I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM</u> : .....	13
<u>I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM</u> .....	14
<u>I.6.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM</u> :.....	15
<u>I.8. Conclusion</u> .....	16

## **Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques**

II.1.Introduction .....	17
II.2.historique: .....	17
<u>II.3. Généralité</u> .....	17
<u>II.4.Approche monocouche équivalente</u> : .....	18
<u>II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)</u> .....	18
<u>II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)</u> .....	19
<u>II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)</u> .....	

## **Chapitre III : Investigation sur les travaux réalisés sur les structures en F.G.M**

<u>III.1. Introduction</u> .....	26
<u>III.2. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés</u> .....	28
<u>III.3. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés</u> .....	31
<u>III.4. Analyse des contraintes et des déformations des structures en FGM sous</u> .....	31
<u>différents types de chargement</u> .....	31

## **Chapitre IV: Modèle théorique pour l'analyse du comportement thermomécanique des plaques sandwiches FGM sur fondation élastique**

<u>IV.1. Introduction</u> .....	35
<u>IV.2. Formulation théorique</u> .....	35
<u>IV.2.1. Configuration géométrique</u> .....	35
<u>IV.2.2. Propriétés des matériaux</u> .....	36
<u>IV.2.2.1. Plaque sandwich en FGM</u> .....	36
<u>Plaque sandwich en FGM (1-0-1)</u> .....	37
<u>Plaque sandwich en FGM (1-1-1)</u> .....	37
<u>Plaque sandwich en FGM (1-2-1)</u> .....	37
<u>Plaque sandwich en FGM (2-1-2)</u> .....	37

<u>Plaque sandwich en FGM (2-2-1)</u> .....	37
<u>IV.3. La théorie d'ordre élevé à deux variables</u> .....	39
<u>IV.3.1. Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à deux variables</u> .....	39
<u>IV.3.2. Cinématique et équations constitutives</u> .....	40
<u>IV.3.3. Les contraintes</u> .....	41
<u>IV.3.4. Détermination des équations d'équilibre</u> .....	42
<u>IV.3.5. Détermination des coefficients de rigidité</u> .....	43
<u>IV.3.6. Formulation des équations différentielles</u> .....	45
<u>IV.3.7. Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM sur fondation élastique :</u> .....	47
<u>IV.4. Conclusion</u> .....	50
<b>Chapitre V:Résultat et discussion</b>	
<u>V.1. Introduction</u> .....	51
<u>V. 2. Résultats numériques et discussions</u> .....	51
<u>V.3. Conclusion</u> .....	68
Conclusion général .....	69
Références bibliographique .....	71

# **Liste Des Tableaux**

## CHAPITRE I

**Tableau I.1:** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal..... 6

## CHAPITRE V

**Tableau V.1 :** la flèche adimensionnel  $\hat{w}$  des plaques carrées ( $a/h=10$ ) .....52

**Tableau V.2 :** contrainte de cisaillement transversale adimensionnel  $\overline{\tau_{xz}}(0)$  des plaques carrées ( $a/h=10$ ).....53

**Tableau V.3 :** Contrainte normale adimensionnel  $\overline{\sigma_x}(h/2)$  des plaques carrées ( $a/h=10$ ).....54

**Tableau V.4:** Effet de la fraction volumique et des paramètres de fondation élastique sur le centre de la flèche adimensionnel d'une plaque sandwich en FGM ( $a = 10h, b = 2a, q_0 = 100, T = 0$ ).....56

**Tableau V.5 :** Effet de la fraction volumique et des paramètres de fondation élastique sur le centre de la flèche adimensionnel d'une plaque sandwich en FGM ( $a = 10h, b = 2a, q_0 = 100, T_1=T_3=0, T_2=10$ ).....57

**Tableau V. 6:** Effets du rapport ( $a/h$ ) et les paramètres de fondation élastique sur la flèche adimensionnel ( $\overline{w}$ ) des plaque sandwiches carrées en FGM ( $k= 2$ ) ( $q_0 = 100, T_1=0, T_2= T_3=10$ ).....58

**Tableau V.7:** Effets du rapport ( $a/h$ ) et les paramètres de fondation élastique sur la contrainte adimensionnel des plaque sandwiches carrées en FGM ( $k= 2$ ) ( $q_0 = 100, T_1=0, T_2= T_3=10$ ).....59

# Liste Des Figures



**CHAPITRE I :**

**Figure I.1 :** Concept des matériaux à gradient de propriétés.....6

**Figure I.2 :** Protection thermique. ....7

**Figure I.3 :** Principe de la méthode coulage en bande (L. Lostec, 1997).....9

**Figure I.4 :** Les principaux domaines d’application des FGM.....12

**Figure I.5 :** Géométrie d’une plaque en FGM.....13

**Figure I.6 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....14

**Figure I.7:** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....15

**Figure I.8 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....16

**CHAPITRE II :**

**Figure II.1 :** Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (J.N. Reddy, 1997 ).....19

**Figure II.2 :** Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (J.N. Reddy, 1997 ).....20

**Figure II.3:** Illustration de la plaque d’ordre élevé (J.N. Reddy, 1997 ).....21

**CHAPITRE III :**

**Figure III.1 :** Variation de la fraction volumique des matériaux constituants dans la direction de l’épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés (H. M. Yin. et al., 2004.)..24

**Figure III.2:** Une microstructure de squelette d’un matériau FGM (S. S.Vel., R.C. Batra, 2002).....24

**Figure III.3 :** Comparaison de module de Young effectif d’un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et al (H. M. Yin. et al., 2004.) et le modèle de Mori-Tanaka.....27

**Figure III.4 :** Comportement non linéaire d’une plaque FGM soumises à un chargement transverse ( J. Woo., S.A. Meguid, 2001).....30

**Figure III. 5:** Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en FGM soumise à un chargement thermo-mécanique (J. Yang, J., H.-S. Shen, 2003).....31

**Figure III.6 :** Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM (Si3N4/SUS304) (J.-S. Park., J.-H. Kim, 2005). .....31

**CHAPITRE IV :**

**Figure IV.1:** Géométrie d'une plaque sandwich en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.....36

**Figure IV.2 :** Plaque sandwich en FGM sur fondation élastique .....36

**Figure IV.3 :** Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de  $k$  et les différentes configurations de plaques sandwiches: (a) Plaque sandwich en FGM (1-0-1),(b) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (c) Plaque sandwich en FGM (1-2-1),(d) Plaque sandwich en FGM (2-1-2) et (e) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).....38

**CHAPITRE V :**

**Figure V.1** Effet du paramètre du module Winkler sur le centre de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques sandwichées carrées en FGM ( $k = 2$ ) pour différent rapport ( $a/h$ ) avec  $K_I = 10, q_0 = 100, T_1 = 0$  et  $T_2 = T_3 = 10$ , plaque sandwich (1-1-1).....61

**Figure V.2** Effet du paramètre du module Pasternak sur la flèche adimensionnelle( $\bar{w}$ ) des plaques sandwich carrées en FGM ( $k= 2$ ) pour différent rapport  $:a/h$  avec  $K_0 = 10, q_0 = 100, T_1 = 0, T_2= T_3 = 10$ , plaque sandwich(1-1-1).....61

**Figure V.3** Effet de la charge thermique  $T_3$  sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques sandwich carrées en FGM ( $k= 2$ ) pour différent rapport  $: a/h$  avec  $k_0 = 100, K_I = 10, q_0 = 100, T_1 = 0$  and  $T_2 = 10$ , plaque (1-1-1) .....62

**Figure V.4** Effet du paramètre du module Winkler sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich carrée en FGM ( $k = 2$ ) pour différent rapport  $:a/b$  avec  $k_1 = 10, q_0 = 100, T_1 = 0, T_2= T_3 = 10$ , plaque sandwich (1-1-1).....63

**Figure V.5** Effet du paramètre du module Pasternak sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich carrée en FGM ( $k= 2$ ) pour différent rapport  $a/h$  avec  $k_0 = 10, q_0 = 100, T_1 = 0, T_2= T_3 = 10$ , plaque(1-1-1).....63

**Figure V.6** Effet de la charge thermique sur la flèche adimensionnelle des plaques sandwiches en FGM ( $k = 2$ ) en fonction du rapport  $a/b$ .....64

- Figure V.7** Variation de contrainte axiale adimensionnelle ( $\overline{\sigma_x}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM (k =2) pour différentes valeurs de  $K_1$  (paramètre du module de cisaillement Pasternak).....65
- Figure V.8** Variation de la contrainte axiale adimensionnelle ( $\overline{\sigma_x}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM (k =2) pour différentes valeurs du  $K_0$  (paramètre du module de cisaillement Winkler).....65
- Figure V.9** Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnel ( $\overline{\tau_{xy}}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM(k =2) pour différentes valeurs de  $K_1$ .....66
- Figure V.10** Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnel ( $\overline{\tau_{xy}}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM (k =2) pour différentes valeurs de  $K_0$ .....67
- Figure V.11** Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnel ( $\overline{\tau_{xz}}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM(k =2) pour différentes valeurs du paramètre du module Winkler  $K_0$ .....68

# **Liste Des Notations**

## Liste des notations

$G$	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$E_c$	Module de Young de la céramique
$E_m$	Module de Young du métal
$\nu$	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$k$	Paramètre du matériau
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Epaisseur de la plaque
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions x, y et z
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z,
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\Psi'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\Psi''(z)$	La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement

$\delta W_{in}$	Travail virtuel intérieur
$\delta W_{ext}$	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_{xy}$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$S_x, S_y, S_{xy}$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Effort de cisaillement
$Q_{xz}, Q_{yz}$	Effort de cisaillement
$\partial$	Dérivée partielle
$i$ et $j$	Sont des nombres naturels.
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$A_{ij}^a$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$B_{ij}^a$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$D_{ij}^a$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$F_{ij}^a$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$T(x,y,z)$	Chargement thermique
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés

{ }

Vecteur colonne

[ ]

Matrice

# **Introduction Générale**



## **Introduction générale :**

Une avancée de matériaux composites appelés matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont reçu une considération appréciable dans la conception de l'ingénierie structurelle, en particulier lorsque les matériaux sont soumis à très forte charge thermique. La propriété de matériau du FGM peut être adaptée pour atteindre les exigences spécifiques à l'utilisation du génie différente pour obtenir l'avantage des propriétés de la matière individuelle. Ceci est possible grâce à la composition du matériau de la FGM change de manière séquentielle selon une direction privilégiée. L'applicabilité de ce matériau est qu'il élimine le problème d'interface en raison du changement compétent et continue des propriétés matérielles d'une surface à l'autre ( Koizumi M. 1993;Koizumi M. ,1997) .Cela a attiré beaucoup de chercheurs à comprendre les mécanismes des structures de FGM.

Parmi les différentes constructions structurelles, les types de structures sandwich sont couramment utilisés dans les véhicules aérospatiaux, en raison de ses exceptionnelle rigidité à la flexion, faible poids spécifique, d'excellentes caractéristiques de vibration et de bonnes propriétés de fatigue. Types composite stratifié de constructions sont, en général, adoptés dans des structures sandwich. Toutefois, en raison du changement brusque dans les propriétés du matériau d'une couche à l'autre, la variation de la distribution de la contrainte tangentielle est importante à l'interface plaque de surface-âme. En outre, la réponse de ces composites stratifiés dépend des caractéristiques de liaison. En revanche, le sandwich en FGM peut atténuer la grande variation dans la distribution de la contrainte tangentielle, en raison de la variation progressive des propriétés des matériaux à l'interface de surface-âme. En effet, les avantages considérables offerts par les matériaux à gradient de propriétés (FGM) par rapport aux matériaux traditionnels et la nécessité de surmonter les défis techniques impliquant des environnements à haute température ont incité une utilisation accrue des structures sandwich, et l'incorporation dans leur construction de FGM que des feuilles de faces.

Les plaques posées sur fondations élastiques ont été largement étudiées pour modéliser divers problèmes constructifs pendant les dernières décennies. Pour décrire les interactions de la plaque avec sa fondation, les scientifiques ont proposé divers modèles de base.

Le modèle le plus simple concernant la base élastique est le modèle de Winkler, qui considère la base comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre ressorts, ayant comme inconvénient une flèche discontinue sur la surface d'interaction de la plaque. Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak (Pasternak, 1954) qui a tenu compte des

interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre dépendant.

Dès lors, le modèle de Pasternak a été largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions(structures-bases).

La déformation thermo-mécanique des structures en FGM ont attiré l'attention de nombreux chercheurs au cours des dernières années dans différentes applications d'ingénierie qui comprennent la conception de structures aéronautiques, les composants du moteur thermique et les centrales nucléaires etc. L'objectif principal de ce travail est de développer une théorie simple d'ordre supérieur de la déformation de cisaillement pour l'analyse de la réponse thermo-mécanique des plaques sandwich en FGM sous sollicitation de flexion ,reposant sur fondations élastiques. La théorie actuelle ne possède que quatre inconnues et quatre équations, mais il satisfait aux conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans avoir besoin de facteurs de correction de cisaillement. Le domaine de la théorie proposée de déplacement est choisi en fonction d'un déplacement transversal constante et la variation hyperbolique de déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. La partition du déplacement transversal dans les parties de flexion et de cisaillement conduit à une réduction dans le nombre d'inconnues et des équations qui régissent, et donc la théorie simple à utiliser. La fondation élastique est modélisée comme deux paramètres fondation Pasternak. Les équations aux dérivées partielles relatives sont réduites à un ensemble d'équations différentielles ordinaires couplées dans le sens de l'épaisseur, qui sont ensuite résolus par l'utilisation des solutions de Navier pour plaques rectangulaires sur appuis simples. Des résultats numériques pour les flèches et les contraintes sont étudiées.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres :

le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leur domaine d'application. Dans le deuxième chapitre, nous rappelons ensuite les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement thermomécanique des structures en « FGM ».

Le troisième chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les structures en matériaux à gradient de propriétés en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation du modèle théorique pour analyse du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en utilisant la théorie d'ordre supérieur à deux variables.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à des applications numériques réalisées sur les plaques sandwiches en FGM ; avec une variation arbitraire des propriétés matérielles (Module de Young et coefficient de dilatation thermique). Afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement thermomécanique des plaques sous sollicitation de flexion tout en étudions l'évolution de la flèche, les contraintes normales et tangentielles en utilisant les divers modèles des plaques épaisses .

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés sous un chargement thermomécanique reposant sur une fondation élastique.

# **CHAPITRE I**

## **Généralités sur Les Matériaux à Gradient de Propriétés**

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété

---

## I.1. Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material " F.G.M "*).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques (Z. Zhong., T. Yu, 2007). La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé.

Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales (C. Baron., S. Naili,2008).

## I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'ya aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique (M. Koizumi, 1992).

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation les matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (K. Kokini., Y. Takeuchi, 1990). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

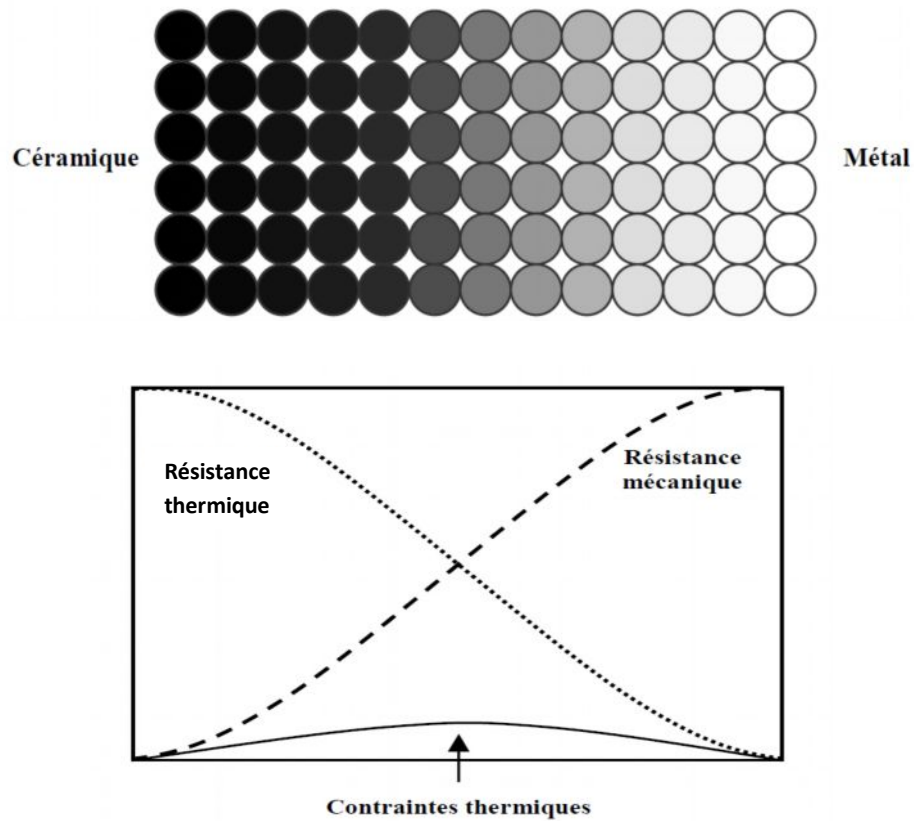
La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

**Tableau I.1:** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (P. Boch. et al., 1986).

## Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété



**Figure I.1** : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

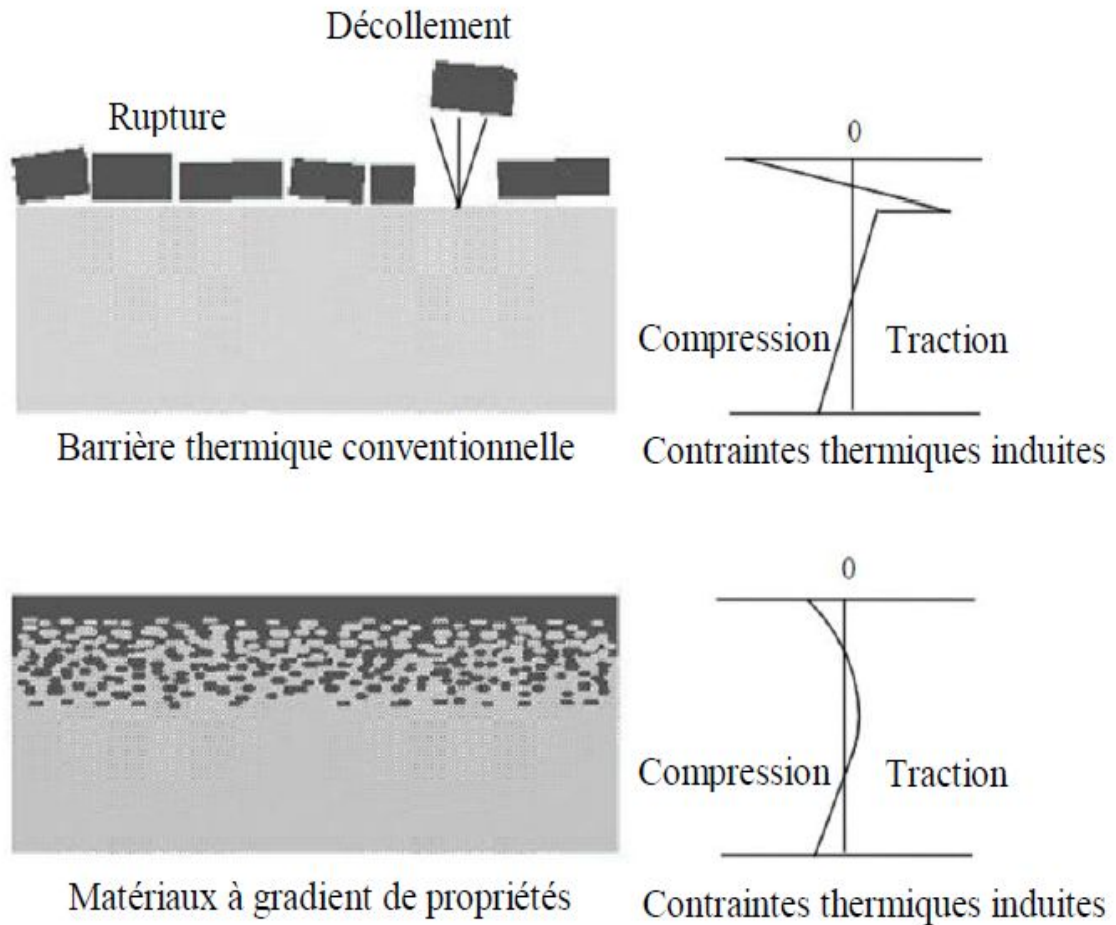


Figure I.2 : Protection thermique.

### I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (M. Koizumi, 1992). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique (M. Koizumi, 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques (T. K. Nguyen et al., 2007).

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des



## Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété

---

contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet ( M. Koizumi,1997).Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques ( M. Koizumi, 1992).

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches ( H. Okamura, 1991).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, constructions ( H. Okamura, 1991).Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété

structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

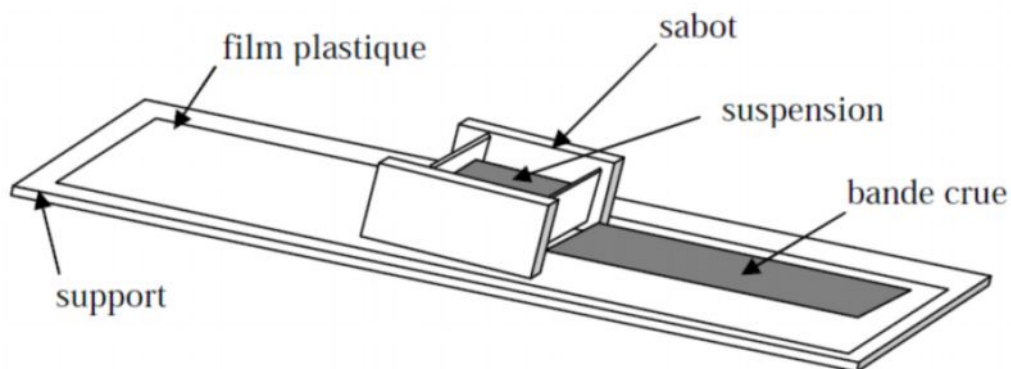
## I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être établi en divisant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

### I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande ( L. Lostec, 1997). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I.3 :** Principe de la méthode coulage en bande ( L. Lostec, 1997).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler ( R. E.

# **Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété**

---

Mistler, 1973); soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (P. Boch. Et al.,1986).

## **I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique ( J.S. Moya et al., 1992.);-ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

## **I.4.3. Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier.

Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale ( A Bishop. Et al, 1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

## **I.4.4. Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la

## **Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété**

---

compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique ( H.D. Steffens. et al., 1990).

### **I.4.5. Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (M. Takahashi. et al., 1990). Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

### **I.4.6. Dépôt par Electrophorèse**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des FGM peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [Abdizadeh H, 1997]

### **I.4.7. C.V.D et P.V.D.**

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P.V.D. peuvent être utilisées pour façonner un FGM sur des substrats de formes compliquées.

## **I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés**

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.4. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau.

Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

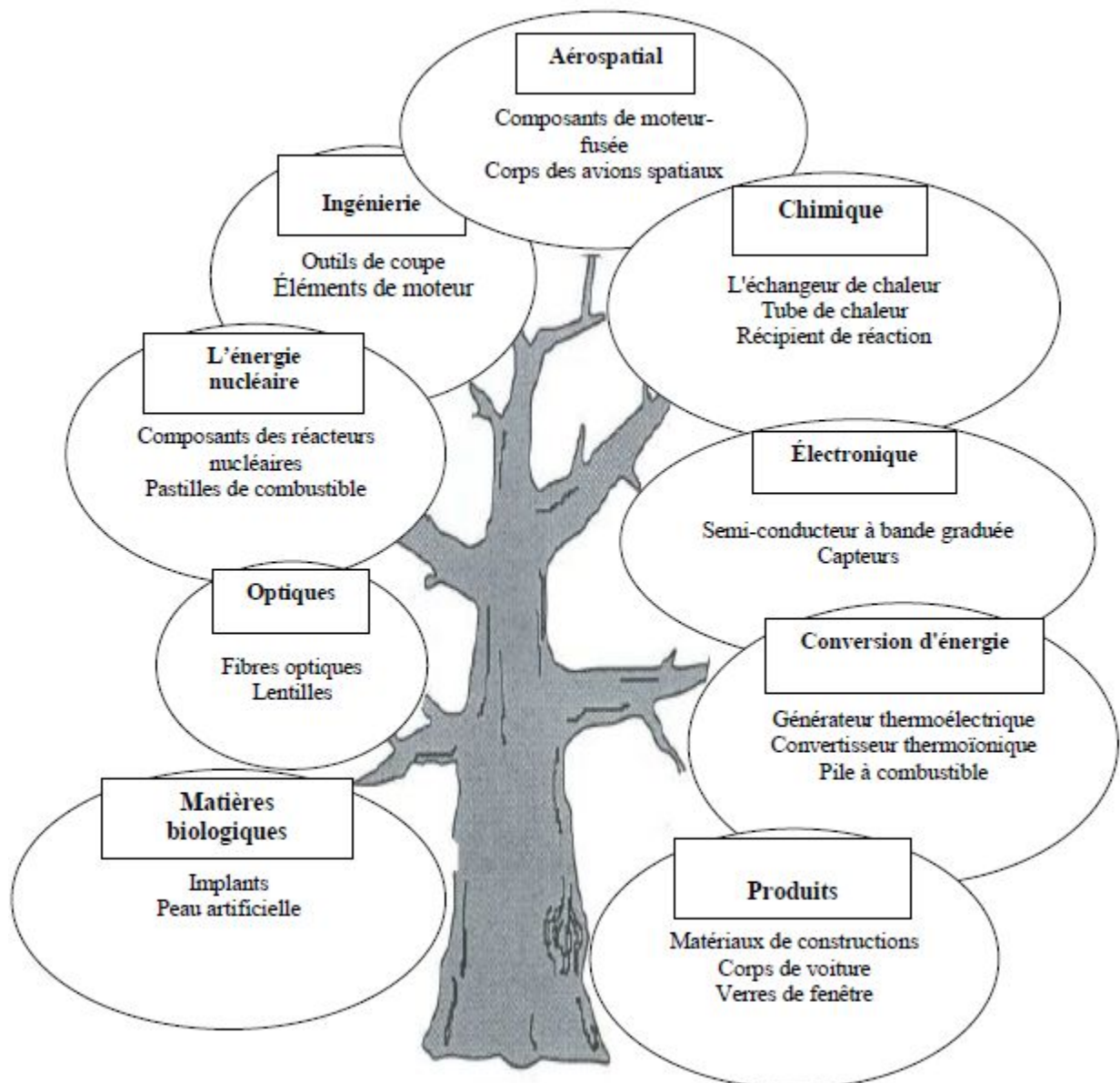


Figure I.4 : Les principaux domaines d'application des FGM.

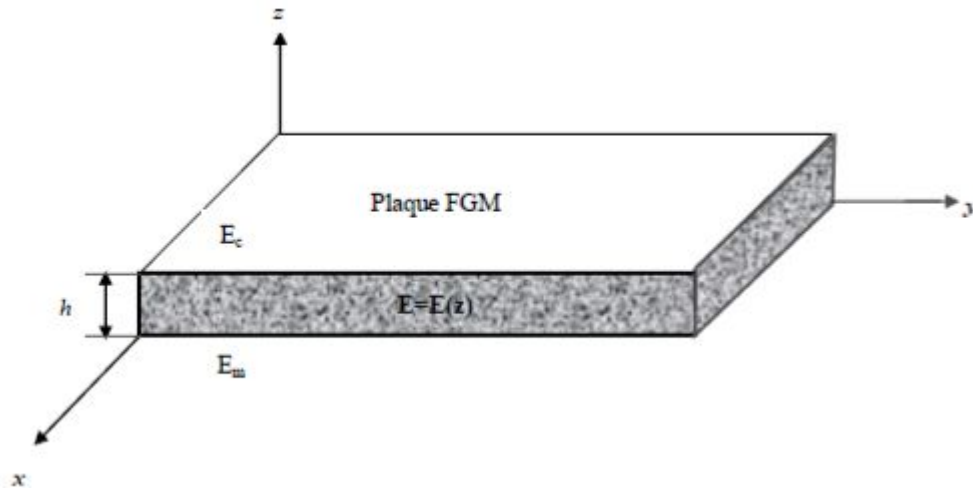
## I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Figure I.5 :** Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E=E(z), \nu=\nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

## I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

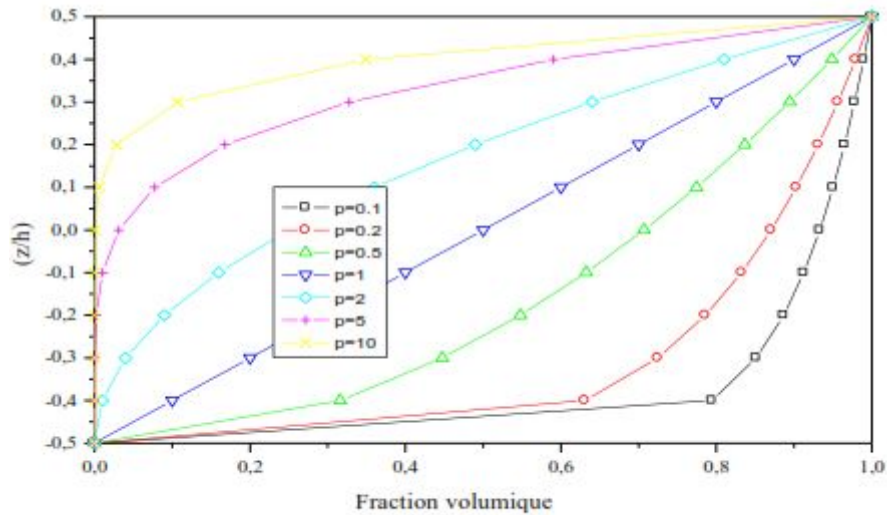
$$V(z) = \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où

$k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges ( G. Bao., L. Wang, 1995) :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z=-h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z=h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .



**Figure I.6 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

## I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement ( G. Bao., L. Wang, 1995). Par conséquent, Chung et chi (Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$



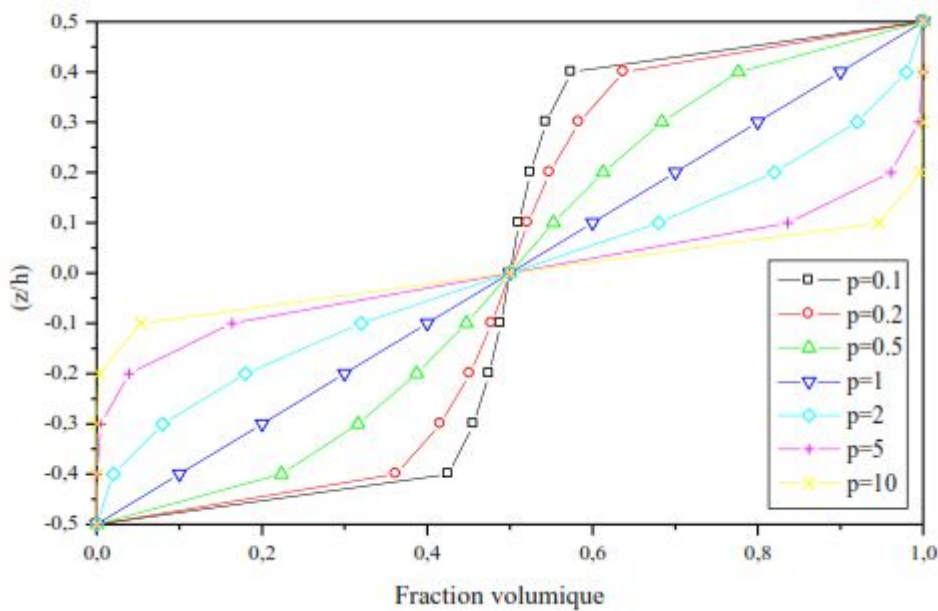
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)



**Figure I.7:** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.6.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, ( F. Delale., F. Erdogan, 1983):

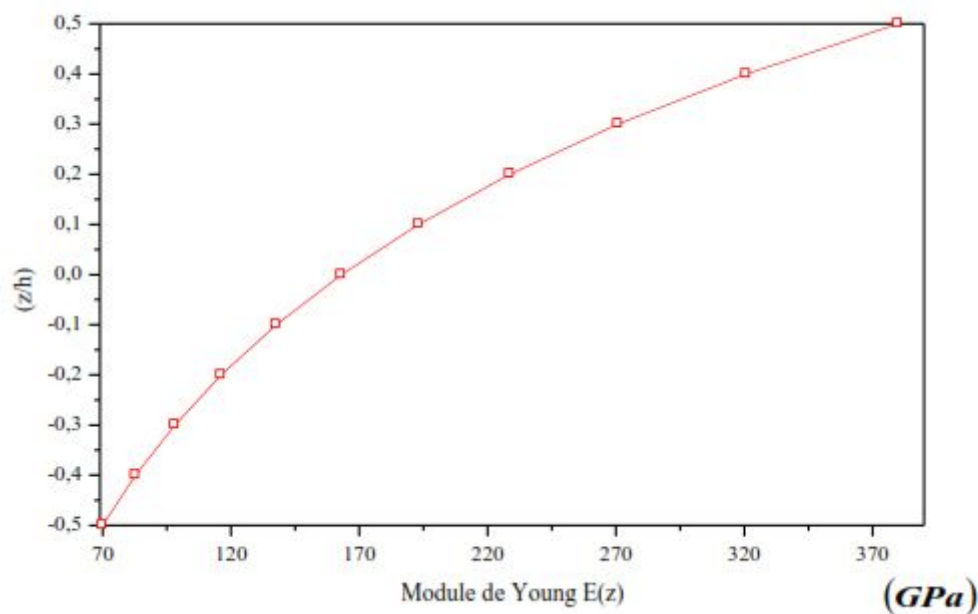


## Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété

$$E(z) = E_2 e^{B\left(z + \frac{h}{2}\right)} \quad (I.5.a)$$

$$\text{Avec} \quad B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (I.5.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.8.



**Figure I.8 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

### I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

## **CHAPITRE II**

### **Rappel sur Les Théories Des Plaques**

# Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques

---

## II.1- Introduction

La théorie des plaques permet de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. Quatre classes d'équations dans un modèle de mécanique des solides, y compris la théorie des plaques, comportant :

Les équations du mouvement ;

Relations déformations-déplacements (et rotations) ;

Loi de comportement les relations de contrainte-déformations ;

Et les équations de compatibilité.

Dans ce chapitre nous allons présenter les principales hypothèses de théories des plaques utilisées dans cette étude.

## II.2- Historique

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

## II.3. Généralité :

Une plaque est un solide tridimensionnel dont une des dimensions, appelée «épaisseur», est petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques. Ce solide particulier comporte généralement un plan de symétrie en  $z=0$  (plan Oxy) appelé «surface de référence» ou «surface moyenne» de la plaque.

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans (A. K. Noor & W. S. Burton, 1989 ; R. K. Kapania & S. Raciti, 1989 ; T. Kant & K. Swaminathan, 2000 ; E. Carrera, 2000) des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque. L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues.

L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple. Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord

## Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques

libre droit, plaque trouée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

Approche monocouche équivalente.

Approche par couche.

Approche développement asymptotique.

### II.4. Approche monocouche équivalente :

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Rissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaque à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinées.

Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

#### II.4.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II-1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger (S.P. Timoshenko., S. Woinowsky-Krieger, 1959), Reddy (J.N. Reddy, 1997 ; J.N. Reddy, 1999.),

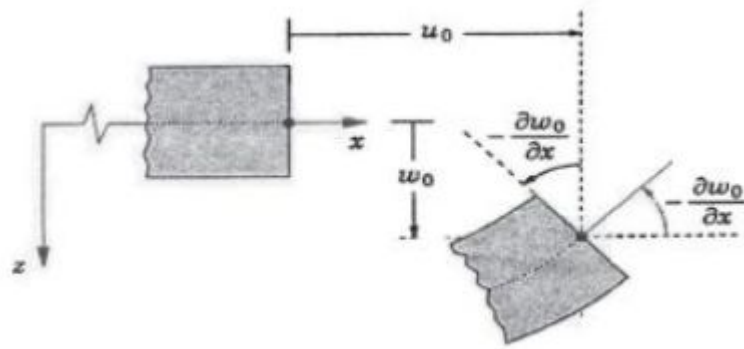
En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z=0$ ).



**Figure II.1 :** Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (J.N. Reddy, 1997 ).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

### II.4.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans ( E. Reissner, 1945), Mindlin ( R.D. Mindlin, 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger ( S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, 1959), Reddy (J.N. Reddy, 1997 ; J.N. Reddy, 1999.).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.2.b})$$

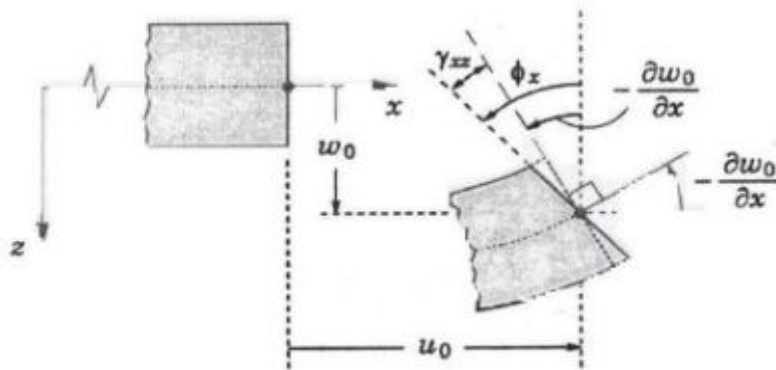
$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.2.c})$$

Avec :  $( u_0, v_0, w_0 )$  et  $( \phi_x, \phi_y )$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

## Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

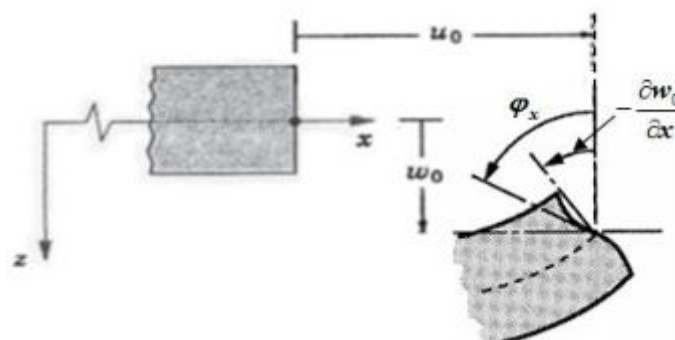


**Figure II.2 :** Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (J.N. Reddy, 1997 ).

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### II.4.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al , 1949); Naghdi ( P. M. Naghdi, 1957) ; Reissner( E. Reissner, , 1975); Reddy (J.N. Reddy, 1984) ; Kant et Swaminathan (T. Kant., K. Swaminathan, , 2002). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.



## Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques

**Figure II.3:** Illustration de la plaque d'ordre élevé (J.N. Reddy, 1997)

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{II.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{II.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3.c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\varphi_x, \varphi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement

$$\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$\Psi(\mathbf{z})$  une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant  $\Psi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ .

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) (J.N. Reddy, 1997 ; J.N. Reddy, 1999) sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier ( M. Touratier, 1991). propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \quad (\text{II.5})$$

## Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques

---

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. (M. Karama et al., 2003) est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = z e^{-\left(\frac{z}{h}\right)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. (H. Ait Atmane et al, 2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right) - z}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.7})$$



## **CHAPITRE III**

# **Investigation Sur Les Travaux Réalisés Sur Les Structures en F.G.M**

### III.1. Introduction

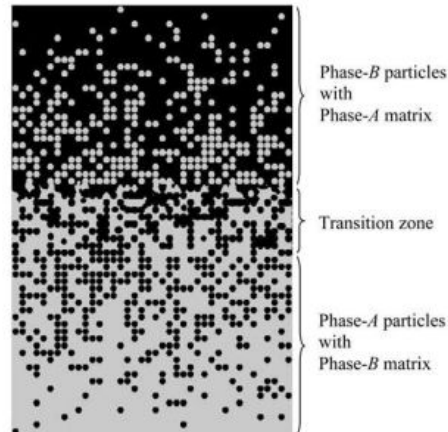
Ce chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment. Divers espaces pour les différents aspects des FGM sont reflétés dans ce chapitre. Ils comprennent l'homogénéisation des particules FGM, les problèmes de transfert de chaleur, analyse des contraintes, de la stabilité et l'analyse dynamique des structures en FGM.

Les matériaux à gradient de propriétés sont des matériaux composites formés de deux ou plusieurs phases constitutives avec une composition variable et continue dans l'espace. Ils possèdent un certain nombre d'avantages qui les rendent intéressant dans des applications potentielles, une réduction importante des contraintes dans le plan et à travers l'épaisseur, une meilleure répartition des contraintes résiduelles, des propriétés thermiques améliorées, une grande ténacité, et une réduction du facteur d'intensité de contrainte. Un certain nombre de revues traitant les divers aspects des FGM ont été publiés ces dernières années (Z. Zhong., T. Yu, 2007 ; M. Koizumi, 1992 ; M. Karama., K.S. Afaq et al., 2003 ; Suresh, S., and Mortensen, A.,1998).). Les colloques internationaux sur les FGM ont également mis en lumière les recherches les plus récentes sur ces matériaux, leur fabrication, la compréhension de leur comportement mécanique, leurs propriétés thermiques, et leurs applications ( O. Van der Biest. et al., 2004).

Actuellement, les FGM sont généralement associées à des particules composites où la fraction volumique des particules varie dans une ou plusieurs directions de l'espace.

L'un des avantages de la variation continue de la fraction volumique des phases constitutives est l'élimination de la discontinuité des contraintes qui est souvent rencontrées dans les composites stratifiés et sandwichs, et en conséquence, éviter les problèmes liés aux délaminages et à la rupture. Les FGM peuvent être développés en utilisant des couches renforcées de fibres avec une fraction volumique de fibres qui varie à travers l'épaisseur de la structure, on obtient une optimisation des propriétés de l'ensemble ou une optimisation de la réponse de la structure vis -à-vis des types des chargements appliqués ( M. Bouremana. Et al. , 2009). Si les particules de matériaux composites peuvent être localement isotropes, ils sont hétérogènes à cause de la variation spatiale des fractions de volume des phases constitutives. Un exemple de ce matériau est illustré dans la figure III.1 (H. M. Yin. Et al., 2004).

où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope.



**Figure III.1 :** Variation de la fraction volumique des matériaux constitutifs dans la direction de l'épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés (H. M. Yin. et al., 2004.).

Une FGM peut également avoir une microstructure de squelette comme le montre la figure III.2 ( S. S.Vel., R.C. Batra, 2002).



**Figure III.2:** Une microstructure de squelette d'un matériau FGM (S. S.Vel., R.C. Batra, 2002).

Un matériau FGM peut avoir des architectures différentes qui se traduisent par un comportement orthotrope. Un FGM peut comprendre plus de deux phases constitutives. Nemat-Alla a analysé un matériau FGM constitué de deux phases différentes (céramique et métallique) dont la fraction volumique varie dans le sens de l'épaisseur selon une loi de puissance ( M. Nemat-Alla,2003) . Il est à noter que la distribution de la matière dans des structures à gradient de propriétés peut être conçue pour diverses caractéristiques spatiales. Un matériau FGM représente un composite à particule avec une distribution prescrite des fractions volumiques des phases constitutives.

Plusieurs chercheurs utilisent une variation par couches de la fraction volumique des particules de la céramique, c.-à-dire., des couches (céramique/métal) quasi-homogène.

D'autre part, plusieurs chercheurs supposent que la fraction volumique de céramique peut être représentée par une fonction de lois de puissance suivant l'épaisseur de coordonner ( $z$ ) :

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k \quad \frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.1})$$

Où  $h$  est l'épaisseur de la structure, et  $k$  est un exposant de la fraction volumique (paramètre de matériau). En conséquence, la distribution du module d'élasticité pour un FGM isotrope et son coefficient de Poisson peut être définie en termes de constantes de matériau des phases constitutives basées sur une approche d'homogénéisation choisie.

Le présent chapitre se concentre sur plusieurs aspects qui sont importants pour le développement et la conception des structures en matériaux à gradient de propriétés.

Il comprend les approches d'homogénéisation des matériaux FGM, les problèmes de transfert de chaleur dans les structures en FGM et le comportement mécanique de ces structures sous différents types de chargements, statiques, dynamiques, y compris les chargements thermiques.

#### III.2. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le volume). Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure. Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique de la structure.

L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à la l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur

exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques les plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes. Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker (J. R. Zuiker, , 1995).a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent et les modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations fraction volumique.

Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finie des FGM a été également présentée dans les références (T. Reuter. Et al.,1997). Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme).

Récemment, Cho et ha (J. R. Cho., D.Y. Ha, 2001) ont comparée la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de WakashimaTsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal (R. Pal, 2005)ne se rapporte pas aux matériaux à gradient de propriétés, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogène mais globalement hétérogènes.

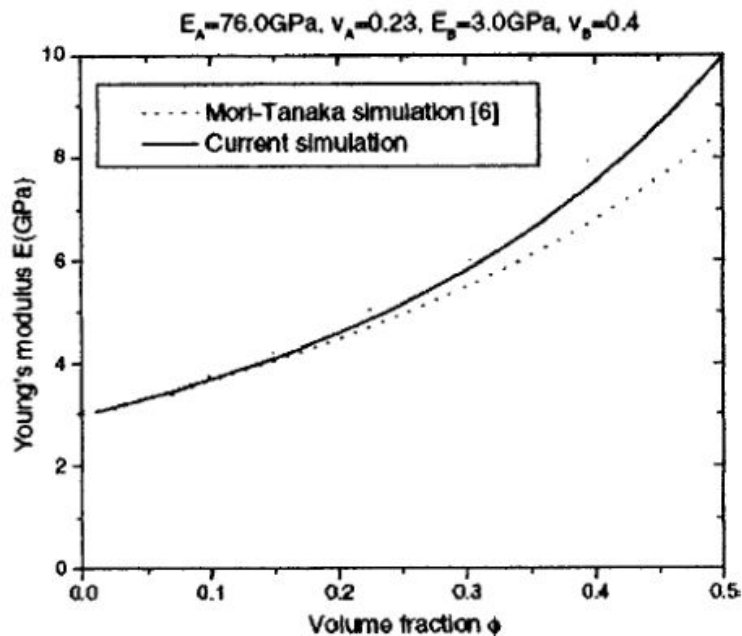
Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible.

Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant en compte l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publié (H. M. Yin. et al., 2004.).Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégré entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique

effective des propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations.

Comme il est montré dans figure III.3, pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al (H. M. Yin. et al., 2004.) et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%.

En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérées exactes. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.



**Figure III.3 :** Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développée par Yin et al (H. M. Yin. et al., 2004.) et le modèle de Mori-Tanaka.

### III.3. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique de post-traitement dues au déséquilibre thermique entre les matériaux constitutifs. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages

initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macromécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Jin ( Z.-H. Jin, 2002).a présenté une solution analytique du problème de transfert de chaleur transitoire dans une bande en FGM avec les propriétés matérielles variables dans l'épaisseur dont les surfaces sont soudainement refroidis à des températures différentes. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes. Le transfert de chaleur transitoire dans un FGM épais soumis à une source non uniforme de la chaleur volumétrique a été étudié par Ootao et Tanigawa (Y. Ootao.,Y. Tanigawa, 2004) où les deux la distribution de la température et les contraintes ont été trouvés. Le problème a été résolu par Sladek et al (J. Sladek. Et al., 2003) en utilisant la méthode de Galerkin des éléments en frontière pour un certain nombre de configurations comme un cube FGM en 3D soumis à un régime de flux de chaleur prescrits et un cylindre avec une température constante appliquée sur la sa surface.

#### **III.4. Analyse des contraintes et des déformations des structures en FGM sous différents types de chargement**

Sankar et Tzeng ( B. V. Sankar., J.T. Tzeng, 2002) ont obtenu les solutions exactes pour la distribution des contraintes thermiques dans une poutre en FGM avec une variation exponentielle des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Sankar (B. V. Sankar, 2001) a également étudié une poutre en FGM soumise à une charge transversale sinusoïdale appliquée sur l'une de ces surfaces. Les solutions exactes d'élasticité pour les contraintes et les déformations ont été comparées avec les résultats obtenus par la théorie classique des poutres (EulerBernouli).

Les résultats montrent que la théorie classique de poutre donne des résultats acceptables si la poutre élancée. Les concentrations de contraintes dans les poutres courtes ne peuvent pas être traitées par théorie classique de poutre. Les contraintes dépendront de la manière de l'application de la charge. Les concentrations de contraintes qui se produit sur la surface de chargement est plus élevée dans une poutre en FGM par rapport une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface la plus dure, et vice versa, elles sont plus petites par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface souple de la poutre.

Cela reflète le fait que la gradation des propriétés peut être bénéfique ou nuisible tout dépend des conceptions spécifiques.

Les problèmes de la vibration libre, la propagation d'onde, et le comportement mécanique dans les poutres en FGM en utilisant le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement ont été résolus en utilisant la méthode des éléments finis développée pour la loi de puissance et d'autres variantes alternatives de propriétés élastiques et thermiques dans la direction de l'épaisseur (A. Chakraborty. Et al.,2003). Le problème thermo élastique pour une poutre en FGM avec la variation exponentielle des propriétés matérielles dans l'épaisseur et soumise à une distribution non-uniforme de chaleur par convection a été examinée par Chin et Yen ( H.K. Ching., S.C. Yen, 2006) en utilisant un maillage locales par la méthode de Petrov-Galerkin.

La réponse statique d'une plaque épaisse rectangulaire en FGM a été étudiée par Reddy [18] en utilisant la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement. Reddy et Cheng (J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, 2001) ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques. La solution exacte du problème tridimensionnel pour l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion d'une plaque en FGM rectangulaire simplement appuyée a été présentée par Vel et Batra [50] où les propriétés matérielles à travers l'épaisseur étaient supposées suivre une loi de puissance pour des fractions de volume de matériau. Les approches d'homogénéisations utilisées dans l'article ont inclus le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent. La plaque a été modélisée par les théories de premier ordre et troisième ordre de déformation de cisaillement. La solution d'élasticité 3D de la flexion pour les contraintes dans une plaque simplement appuyée en FGM avec une variation exponentielle de module d'élasticité à travers l'épaisseur et un coefficient de Poisson constant a été présentée par Kashtalyan ( M. Kashtalyan, 2004) qui a employé la méthode de Plevako développée en 1971 pour analyser les milieux isotropes non homogènes.

Chi et Chang (Chi, S. H., Chung, 2006) ont publié les solutions analytiques de la flexion pour une plaque FGM mince rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge transversale en supposant que le coefficient de Poisson est constant, tandis que le module d'élasticité change sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM), et sigmoïdes (S-FGM).

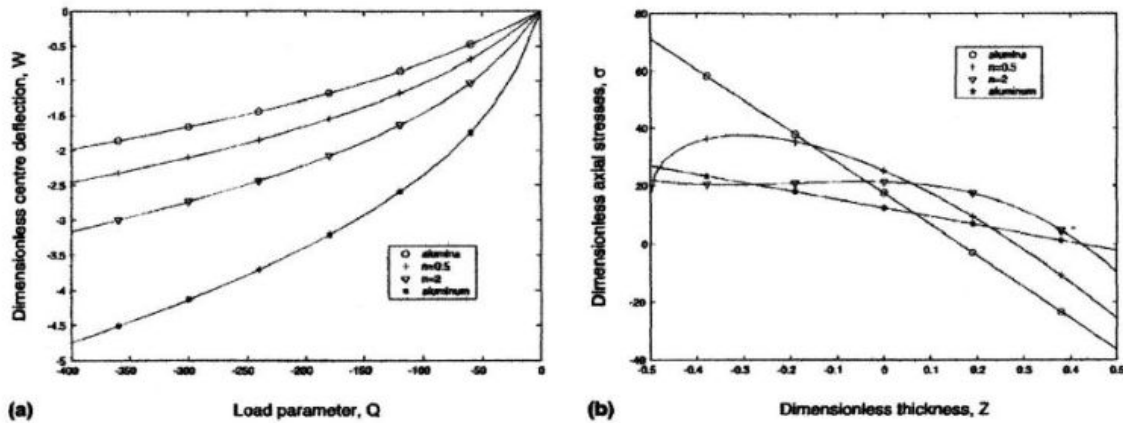
Zenkour ( A.M. Zenkour, 2005 ;A.M. Zenkour, 2005).

a étudié les problèmes de la flexion, flambement et la vibration libre des plaques sandwiches en FGM (céramique/métal). Les résultats ont été obtenus par la théorie classique des plaques,



la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement, et la version « sinusoïdale » de la théorie de déformation de cisaillement.

Analyse des déformations suivant une non linéarité géométrique des plaques et des coques en FGM soumises à des chargements transversales a été présentée par Woo et Meguid ( J. Woo., S.A. Meguid, 2001).



**Figure III.4 :** Comportement non linéaire d'une plaque FGM soumise à un chargement transverse ( J. Woo., S.A. Meguid, 2001).

Une comparaison des contraintes et des flèches maximales dans des plaques entièrement en céramique et en métal, et en FGM est montrée sur la Figure III.4. On remarque que la flèche dans une plaque FGM, pour une faible valeur de paramètre de matériau ( $n = 2$ ) est plus petite que celle de la plaque entièrement en céramique. Par ailleurs, la distribution des contraintes dans les plaques isotropes en métal ou en céramique est une fonction linéaire dans l'épaisseur, elle devient non linéaire dans le cas d'une plaque en FGM, ce qui reflète une distribution non uniforme des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Cette observation reflète le potentiel souligné précédemment pour une meilleure adaptation des structures FGM par rapport à leurs homologues en composites traditionnelles ou homogènes.

Tarn ( J.-Q. Tarn, 2001) a étudié l'évolution des déplacements, des contraintes et de la température dans un cylindre anisotrope soumis à des diverses combinaisons de chargement, thermique, mécanique ou thermomécanique. La solution exacte a été obtenue pour le cas où les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur selon une loi de puissance en considérant le cas où le chargement thermique ou le flux de chaleur sont appliqués sur la surface du cylindre.

L'analyse de l'instabilité au flambement des plaques FGM sous chargement mécanique ou thermique a été étudiée par Javaheri et Eslami (R. Javaheri., M.R. Eslami, 2002).

Na et Kim ( K.-S. Na., J.-H. Kim, 2004) ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le problème de l'instabilité au flambement en 3D sous une charge thermique, ils ont montré que la distribution sinusoïdale et linéaire de la température à travers l'épaisseur ne reflète pas la répartition réelle de la température dans une plaque FGM.

Le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été résolu par Yang et al. (J. Yang et al. ,2005) qui ont considéré que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de la fondation sont des variables aléatoires indépendantes. L'analyse de la non-linéarité géométrique plaques épaisses soumises à des charges thermiques et / ou mécanique utilisant la version nonlinéaire de la théorie d'ordre supérieur de Reddy a été étudiée par Shen et al( J. Yang, J., H.-S. Shen, 2003). Un exemple de cette analyse est illustré sur la Figure III.5, où les conditions aux limites sont indiquées pour avoir un effet profond sur la flèche de la plaque FGM pour différentes conditions aux limites soumise à un effet simultané de la température et du chargement mécanique.

La théorie globale à deux dimensions de déformations d'ordre supérieur a été employée par Matsunaga (H. Matsunaga , 2009) pour le flambement des plaques FGM sous un chargement thermique. Zhao et al. ( X. Zhao., YY. Lee., K.M. Liew, 2009) ont présenté l'analyse mécanique et thermique de flambement des plaques FGM (céramique/métal) en utilisant la théorie des plaques de premier ordre, en utilisant la méthode de Ritz. En outre, Fuchiyama et Noda ( T. Fuchiyama., N. Noda, 1995) ont étudié le flambement d'une plaque FGM (ZrO<sub>2</sub>/Ti-6Al-4V) sous un chargement thermique.

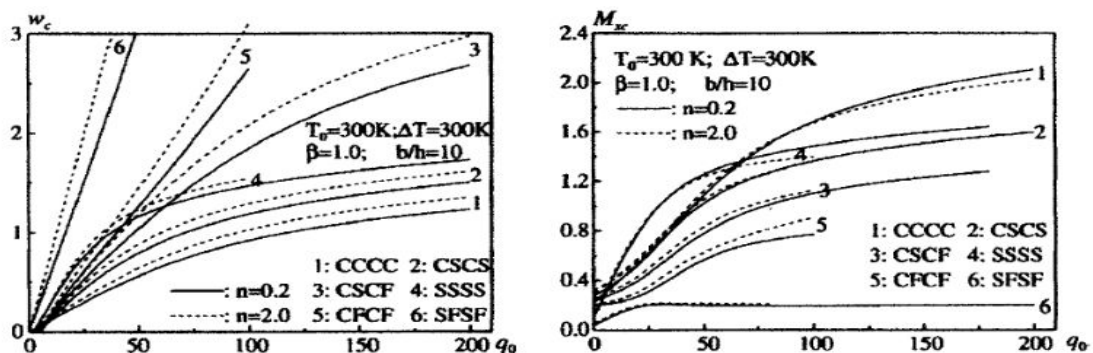


Figure III. 5: Effet des conditions aux limites sur la flexion des plaques carrées en

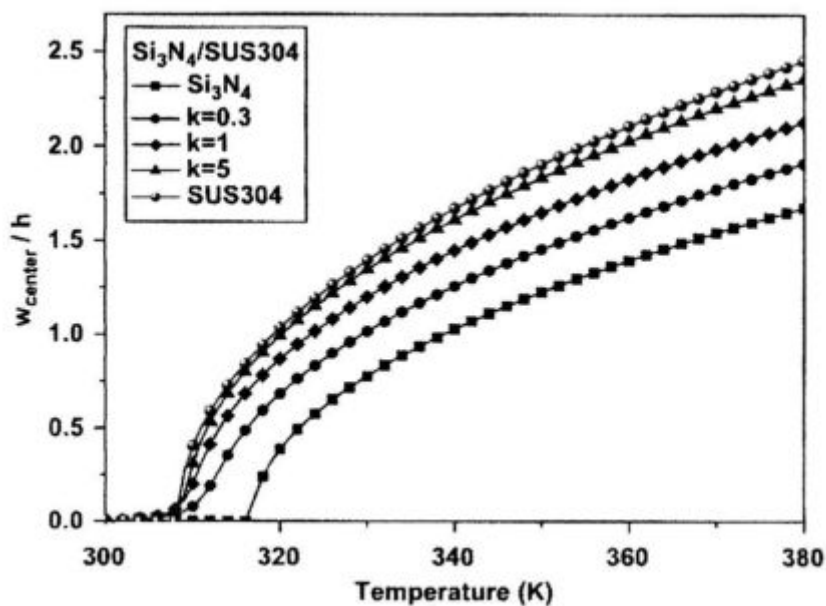
FGM soumise à un chargement thermo-mécanique (J. Yang, J., H.-S. Shen, 2003).

Zenkour et Sobhy ( A.M. Zenkour., M. Sobhy, 2010) ont utilisée la version sinusoïdale de déformation de cisaillement pour étudier le flambement des plaques sandwichs en FGM.

Une étude récente publiée par Park et Kim ( J.-S. Park., J.-H. Kim, 2005).

contient une analyse par éléments finis du de l'instabilité thermique au flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant la non-linéarité géométrique.

Un exemple d'une réponse de l'instabilité thermique en post-flambement d'une plaque simplement appuyée en FGM est illustré dans la figure III.6.



**Figure III.6 :** Flambement sous un chargement thermique d'une plaque FGM ( $Si_3N_4/SUS304$ ) (J.-S. Park., J.-H. Kim, 2005).

Le problème de plaques posées sur fondations élastiques est souvent rencontré dans l'analyse des fondations de structures de bâtiments, routes et chemins de fer, et des structures géotechniques ( Morfidis K.,2010) . Le modèle de base élastique plus simple et la plus fréquemment utilisée est celle de Winkler ( Winkler E.,1867), qui est généralement considéré comme un modèle paramétrique unique. Les caractéristiques de déformation transversales de la fondation élastique sont définies au moyen de ressorts en continu et linéaires rapprochés qui fournissent une résistance en proportion directe avec la flèche de la plaque. De nombreuses formulations des équations d'équilibre statique et dynamique de poutres sur le type de fondation élastique Winkler sont rencontrées dans la littérature (voir par exemple (

Al-Hosani K. et al.1999; Lee H.P. 1998.Liew et al. (Liew K.M.et al.,1996) ont déterminé la réponse statique de la plaque rectangulaire sur la fondation de Winkler en utilisant la méthode de quadrature différentielle.

Le défaut de la formulation de Winkler est l'incompatibilité de comportement en raison de la discontinuité des déplacements de la limite de la zone de surface uniformément chargée (Ugurlu B.,et al,2008). Pour ajouter l'influence de l'effet de cisaillement de la fondation à côté des ressorts verticaux, Pasternak ( Pasternak P.L. ,1954).a introduit une couche de cisaillement de telle sorte qu'il constitue un élément vertical incompressible et il se déforme uniquement par la force de cisaillement transversal. La réponse d'analyse de courbure de plaques épaisses en FGM reposant sur deux paramètres de fondations élastiques basés sur la théorie 3-D d'élasticité a été présentée par Huang et al.( Huang Z.Y. et al. 2008) . Zenkour (Zenkour, A.M. 2009) a présenté une analyse thermo-mécanique de plaques en FGM sur fondations élastiques. Boudarba et al.(Boudarba et al.2013) ont étudié la réponse de flexion thermomécanique de plaques FGM reposant sur des bases élastiques en utilisant une théorie trigonométrique raffinée de déformation de cisaillement. Yaghoobi et Yaghoobi ( Yaghoobi, H., Yaghoobi, 2013) ont proposé une enquête analytique sur l'analyse de flambage des plaques sandwich symétriques avec feuilles de surface en FGM reposant sur une fondation élastique,et ce à base de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement de premier ordre et soumis à des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques. Said et al (Abderrahmane Said et al., 2013) étudie la réponse des plaques à gradient de propriété (FGM) sous sollicitation de flexion et reposant sur fondation élastique. Nedri et al [34] [34] Nedri, K. et al.,2014) a étudié la vibration libre des plaques composites stratifiés sur des bases élastiques. Kiani et al. [35] [35] Y Kiani et al.,2011) ont proposé une enquête analytique sur l'instabilité des plaques sandwich en FGM avec la fondation élastique et soumis à un chargement thermo-mécanique. La dérivation d'équations est basé sur la théorie des plaques de premier ordre et les relations non linéaires contrainte-déplacement.

#### III.5. Conclusion

### **Chapitre III : Investigation sur les travaux réalisés sur les structures en F.G.M**

---

Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM ont été présentés dans ce chapitre. En raison de vaste champ qui se développe rapidement sur les FGM, ces conclusions ne peuvent pas englober toutes les directions et les tendances importantes. Néanmoins, ils reflètent certaines des observations des auteurs sur la base des recherches publiées et leur propre analyse.

En conclusion, les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

## **CHAPITRE IV**

### **Modèle théorique pour l'analyse du comportement thermomécanique des plaques sandwiches FGM sur fondation élastique**

## IV.1. Introduction

L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Ce chapitre est consacré à la modélisation du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriétés « FGM » sur fondation élastique en utilisant la théorie raffinée.

Nous accordons une grande considération dans notre étude aux plaques sandwiches en FGM sur fondation élastique dont les couches (supérieure et inférieure) sont en FGM et la couche centrale est en matériau homogène.

On suppose que les propriétés matérielles (module de Young et le coefficient de dilatation thermique) de la plaque sandwich varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de la loi de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants. Plusieurs configurations des plaques sandwiches sont utilisées en tenant compte ou non de la symétrie de la plaque et l'épaisseur de chaque couche.

## IV.2. Formulation théorique

### IV.2.1. Configuration géométrique

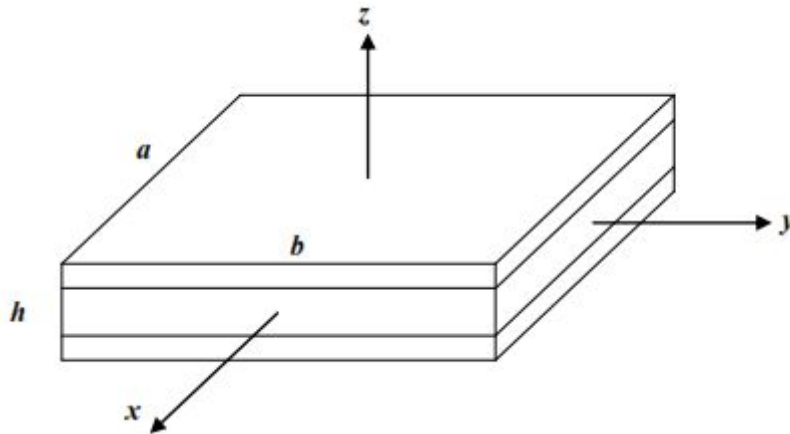
Considérons une plaque sandwich en matériau à gradient de propriétés composée de trois couches microscopiquement hétérogènes ayant les dimensions représentées dans la figure IV.1. Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à  $z = \pm h/2$ , et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

La plaque est composée de trois couches, à savoir, « **couche 1** », « **couche 2** » et « **couche 3** » de la partie basse à la partie haute.

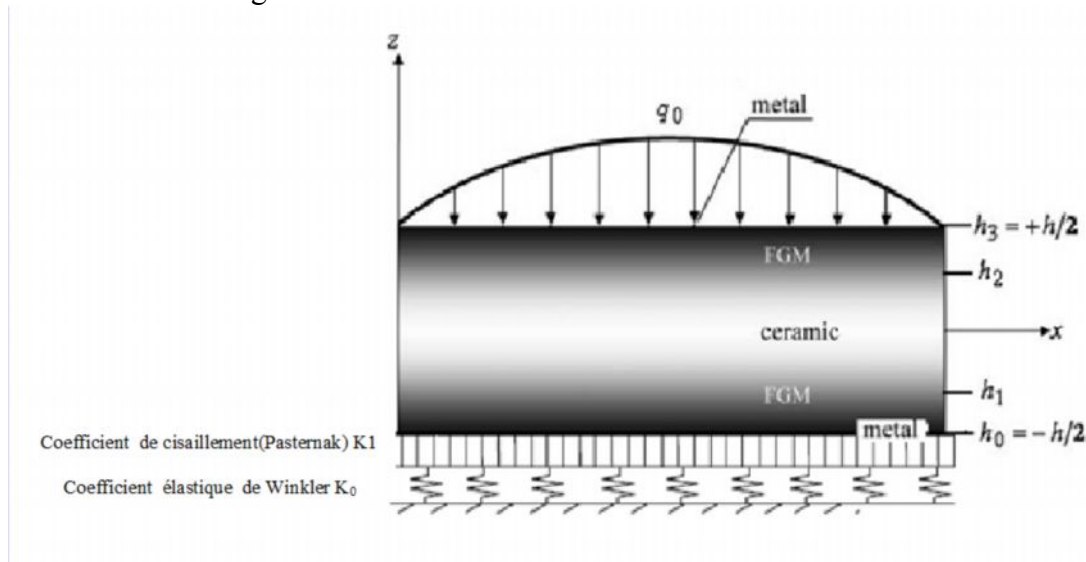
Les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sont respectivement,  $h_0 = -h/2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3 = h/2$ .

Le rapport d'épaisseur de chaque couche de bas en haut est désigné par la combinaison de trois chiffres, à savoir : (1-0-1), (2-1-2), (2-2-1)... et ainsi de suite...

Le type de plaques sandwiches utilisés dans notre étude est illustré dans la figure IV.2.



**Figure IV.1:** Géométrie d'une plaque sandwich en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.



**Figure IV.2 :** Plaque sandwich en FGM sur fondation élastique

## IV.2.2. Propriétés des matériaux

### IV.2.2.1. Plaque sandwich en FGM

La fraction volumique  $V^{(n)}$  à travers l'épaisseur des couches (supérieure et inférieure) de la plaque sandwich suit une simple fonction de la loi de puissance, tandis qu'elle égale l'unité dans la couche centrale de la plaque. Elle est définie par :

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad h_0 \leq z \leq h_1 \quad (\text{IV.1.a})$$

$$V^{(2)} = 1, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \quad (\text{IV.1.b})$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad h_2 \leq z \leq h_3 \quad (\text{IV.1.c})$$



Où  $k$  est un paramètre de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.  $k$  est appelé aussi l'indice matériel. La couche centrale de la plaque est indépendante de la valeur  $k$  puisque cette couche est entièrement en céramique. Cependant, lorsque la valeur  $k$  prend la valeur de zéro, on obtient une plaque entièrement en céramique. La plaque sandwich est symétrique par rapport au plan moyen ( $z=0$ ). La figure IV.3 montre la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur pour les différentes configurations des plaques sandwiches de notre étude avec  $k = 0.01, 0.2, 0.5, 2, 5$ .

#### **Plaque sandwich en FGM (1-0-1)**

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique, et est constituée de seulement deux couches en FGM d'épaisseurs égales (figure VI.3.a). C.-à-d., la couche isotrope centrale en céramique est absente :  $h_1=h_2=0$ .

#### **Plaque sandwich en FGM (1-1-1)**

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et se compose de trois couches d'épaisseurs égales (figure VI.3.b). Dans ce cas, nous avons:  $h_1=-h/6, h_2 = h/6$ .

#### **Plaque sandwich en FGM (1-2-1)**

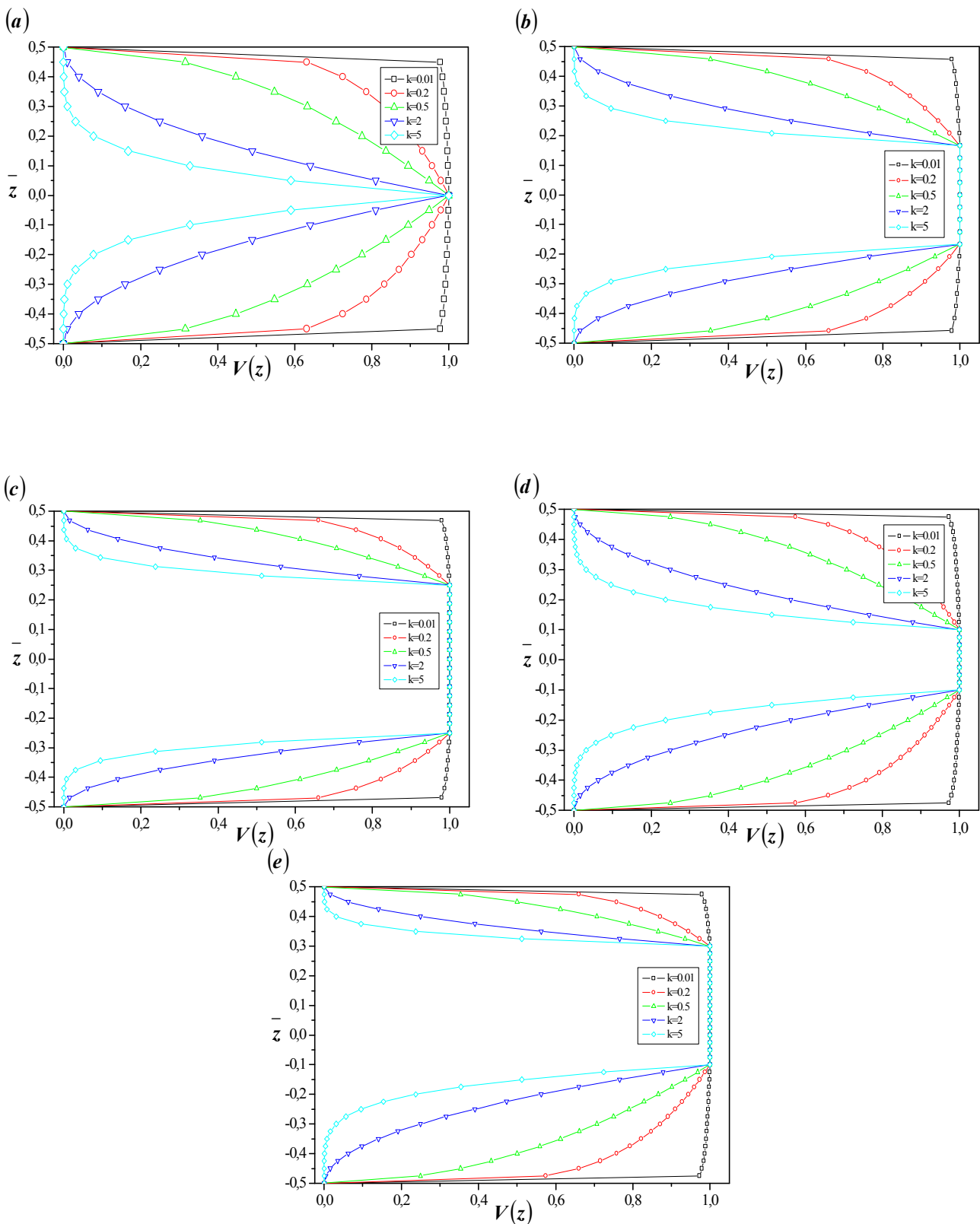
Comme il est montré dans la figure IV.3.c, la plaque est symétrique. On y trouve l'épaisseur de la couche centrale égale à la somme des épaisseurs des deux couches (supérieure et inférieure). Ainsi,  $h_1=-h/4, h_2 = h/4$ .

#### **Plaque sandwich en FGM (2-1-2)**

Dans ce type de sandwich, la plaque est également symétrique, l'épaisseur de la couche centrale est égale à la moitié de l'épaisseur des deux couches supérieure et inférieure. Ainsi,  $h_1= -h/10, h_2= h/10$ .

#### **Plaque sandwich en FGM (2-2-1)**

Dans ce cas, la plaque est asymétrique, l'épaisseur de la couche centrale est identique à celle de la couche inférieure, alors qu'elle est le double de la couche supérieure (Figure IV.3.e). Nous avons :  $h_1= -h/10, h_2= 3h/10$ ,



**Figure IV.3 :** Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de  $k$  et les différentes configurations de plaques sandwiches: (a) Plaque sandwichée en FGM (1-0-1), (b) Plaque sandwichée en FGM (1-1-1), (c) Plaque sandwichée en FGM (1-2-1), (d) Plaque sandwichée en FGM (2-1-2) et (e) Plaque sandwichée en FGM (2-2-1). (Houari M.S.A., 2011)

Delale et Erdogan (F. Delale., F. Erdogan, 1983) ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Alors, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque sandwich est constant dans tous points de la plaque.

Les propriétés mécaniques et thermiques de la plaque sandwich en FGM sont déterminées à partir de la fraction volumique  $V^{(n)}$  des matériaux constituants .

Cependant, le module d'élasticité  $E(z)$  et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha(z)$  à tout point de la plaque sont donnés par la loi de mélange (A.M. Zenkour., M. Sobhy, 2010 ; M.S.A. Houari. Et al. 2011) :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (IV.2)$$

$P^{(n)}$  est la propriété matérielle effective de la couche  $n$  de la plaque sandwich en FGM.

$P_m$  et  $P_c$  sont respectivement les propriétés correspondantes au métal et au céramique de la plaque sandwich.

### IV.3. La théorie d'ordre élevé à deux variables

#### IV.3.1. Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à deux variables

(i) Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur  $h$  de la plaque, par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.

(ii) La composante du déplacement transversale ( $w$ ) peut être dissociée en deux termes (équation IV.3) : le premier ( $w_b$ ) représente la partie de la flèche pure de la plaque, tel que la dérivé de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale, le second terme ( $w_s$ ), représente la flèche induit par l'effet de la déformation en cisaillement de la section transversale. Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées  $x, y$  seulement et s'écrivent comme suit :

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (IV.3)$$

(iii) La contrainte transversale normale  $\sigma_z$  est négligeable en comparaison au deux contraintes dans le plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

(iv) Les déplacements  $u$  dans la direction ( $x$ ) et  $v$  dans la direction ( $y$ ) se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements  $u$  et  $v$  dans les directions ( $x$ ) et ( $y$ ) respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$\mathbf{u} = u_0 + u_b + u_s, \quad \mathbf{v} = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{IV.4})$$

Les premières composantes  $u_0$  et  $v_0$  représentent les déplacements en membrane.

Les deuxièmes composante  $u_b$  et  $v_b$ , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Les expressions des composantes  $u_b$  et  $v_b$  sont donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{IV.5})$$

Les troisièmes composantes sont les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$ , elles donnent lieu, en collaboration avec  $w_s$ , une variation parabolique de déformations en cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ , et donc a une variation parabolique des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ , sont nulles aux deux facettes (supérieure et inférieure) de la plaque. Les expressions des composantes  $u_s$  et  $v_s$  sont donnée comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{IV.6})$$

### IV.3.2. Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations (IV.7.a) - (IV.7.c) comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{IV.7.a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{IV.7.b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{IV.7.c})$$

Où

La fonction  $f(z)$  est appelée fonction de cisaillement.

$$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (\text{IV.8})$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit:

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation. (IV.7), soit:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x^b \\ \mathbf{k}_y^b \\ \mathbf{k}_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x^s \\ \mathbf{k}_y^s \\ \mathbf{k}_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{g}(z) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz}^s \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x^b \\ \mathbf{k}_y^b \\ \mathbf{k}_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x^s \\ \mathbf{k}_y^s \\ \mathbf{k}_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz}^s \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

$$\text{et} \quad \mathbf{g}(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.11})$$

### IV.3.3. Les contraintes

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un FGM isotrope peut être déterminée par la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\tau}_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & 0 \\ \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x - \boldsymbol{\alpha T} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y - \boldsymbol{\alpha T} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{yz} \\ \boldsymbol{\tau}_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{yz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{IV.12})$$

où  $(\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\tau}_{xy}, \boldsymbol{\tau}_{yz}, \boldsymbol{\tau}_{zx})$  et  $(\boldsymbol{\varepsilon}_x, \boldsymbol{\varepsilon}_y, \boldsymbol{\gamma}_{xy}, \boldsymbol{\gamma}_{yz}, \boldsymbol{\gamma}_{yx})$  sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. En utilisant la loi des mélanges définis dans l'équation (IV.3), les coefficients de rigidité  $\mathbf{Q}_{ij}$ , sont exprimées par :

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{22} = \frac{\mathbf{E}(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.13.a})$$

$$\mathbf{Q}_{12} = \frac{\nu \mathbf{E}(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.13.b})$$

$$\mathbf{Q}_{44} = \mathbf{Q}_{55} = \mathbf{Q}_{66} = \frac{\mathbf{E}(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.13.c})$$

#### IV.3.4. Détermination des équations d'équilibre

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites, le principe des travaux virtuels est appliqué, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail virtuel de tous les efforts (intérieurs et extérieurs) est nulle pour tout champ virtuel. Ce principe peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} (q - f_e) \delta w d\Omega = 0 \quad (IV.14)$$

Où  $\Omega$  est la surface supérieure de la plaque, et  $f_e$  est la densité de la force de réaction de la fondation.

Pour le modèle de la fondation Pasternak:

$$f_e = K_0 w - K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (IV.15)$$

Où  $K_0$  est le module de réaction du sol de fondation (coefficient élastique de la fondation) et  $K_1$  et  $K_2$  sont les modules de cisaillement de la plate-forme (raideur de la fondation de la couche de cisaillement). Si la fondation est homogène et isotrope, nous obtiendrons  $K_1 = K_2$ . Si la rigidité de la fondation de la couche de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient une fondation Winkler

En remplaçant les déformations virtuelles par leurs expressions, ensuite, en introduisant les efforts globaux et en faisant l'intégration par partie, on obtient :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega - \int_{\Omega} (q - f_e) \delta w d\Omega = 0 \quad (IV.16)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (IV.17.a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz. \quad (IV.17.b)$$

où  $h_n$  et  $h_{n-1}$  sont les coordonnées supérieure et inférieure de la n-ième couche suivant l'épaisseur z.

L'équation (IV.16) devant être vérifiée quels que soient les déplacements virtuels  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$  cinématiquement admissibles, on en déduit les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
 \delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - f_e + q = 0 \\
 \delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - f_e + q = 0
 \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Les conditions aux limites sur les bords  $x=0$  et  $x=a$ ,  $y=0$  et  $y=b$ , qui peuvent être exprimées soit en déplacement soit en force :

Sur  $x=0$  et  $x=a$

$u$  ou  $N_x$

$v$  ou  $N_{xy}$

$$w_b \text{ ou } \frac{\partial M_x^b}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial y}$$

$$w_s \text{ Ou } \frac{\partial M_x^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} - S_{xz}^s$$

$S_{yz}^s$

$$\frac{\partial w_b}{\partial x} \text{ Ou } M_x^b$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial y} \text{ Ou } M_{xy}^b$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} \text{ Ou } M_x^s$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial y} \text{ Ou } M_{xy}^s$$

sur  $y=0$  et  $y=b$

$u$  ou  $N_{xy}$

$v$  ou  $N_y$

$$w_b \text{ ou } \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_y^b}{\partial y}$$

$$w_s \text{ Ou } \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_y^s}{\partial y} -$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial x} \text{ Ou } M_{xy}^b \tag{IV.19}$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial y} \text{ Ou } M_y^b$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} \text{ Ou } M_{xy}^s$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial y} \text{ Ou } M_y^s$$

### IV.3.5. Détermination des coefficients de rigidité

En reportant les équations (IV.9) et (IV.12) dans l'équation (IV.17), on obtient les expressions suivantes :

des résultantes en membrane  $N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t$ , en flexion pure  $M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t$ ,

en flexion supplémentaire dû au cisaillement  $M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t$ , et en cisaillement pure

$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t$  :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (IV.20)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (IV.21.a)$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \quad (IV.21.b)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (IV.21.c)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (IV.21.d)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (IV.21.e)$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (IV.21.f)$$

Où:

$A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc., sont les coefficients de rigidité de la plaque et sont représentés par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu^{(n)} \\ \frac{1-\nu^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} dz, \quad (IV.22.a)$$

et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (IV.22.b)$$



$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{IV.22.c})$$

Les résultantes en membrane,  $N_x^T = N_y^T$ , des moments de flexion,  $M_x^{bT} = M_y^{bT}$  et des moments additionnel de cisaillement  $M_x^{sT} = M_y^{sT}$  dues aux chargements thermiques sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{IV.23.a})$$

Généralement, la forme de la variation du champ de température dans l'épaisseur de la plaque est le résultat de la solution d'un problème de conduction thermique. Cette température calculée se révèle être un polynôme non linéaire de variable  $(z)$ , souvent d'une forme transcendante (Tungikar and Rao,1994). Dans le cas d'une structure multicouche épaisse, la variation du champ de température est besoin d'une description par couche (E. Carrera, 2002), avec une forme du champ de déplacement à ordre élevé (approche par couche), afin de saisir le profil de température obtenue avec la solution d'un problème de transfert de chaleur par conduction.

Cependant, la variation du champ de température à travers l'épaisseur de la plaque est prise sous la forme suivante :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\Psi(z)}{h} T_3(x, y), \quad (\text{IV.23.b})$$

où  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont les chargements thermiques. Dans le cadre de la présente théorie d'ordre élevé à deux variables, nous prenons :

$$\Psi(z) = z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (\text{IV.24})$$

#### IV.3.6. Formulation des équations différentielles

Substituant les équations (IV.10),(IV.11) , (IV.20) dans une autre( IV.18), nous obtenons le système d'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b \\ - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s = p_1, \end{aligned} \quad (\text{IV.25.a})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = p_2, \quad (IV.25.b)$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s = p_3 \quad (IV.25.c)$$

$$B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s = p_4 \quad (IV.25.d)$$

où

où  $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}^t$  est un vecteur de force généralisée,  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (IV.26.a)$$

Les composantes du vecteur de force généralisée  $\{p\}$  sont donnés par

$$p_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial N_y^T}{\partial y}, \quad p_3 = f_e + q - \frac{\partial^2 M_x^{bT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{bT}}{\partial y^2}, \quad p_4 = f_e + q - \frac{\partial^2 M_x^{sT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sT}}{\partial y^2} \quad (IV.26.b)$$

Les expressions des contraintes en fonction des déplacements sont obtenues, en reportant les relations (IV.9),(IV.10) et (IV.11) dans l'expression (IV.12), on obtient

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) - f(z) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) - (1 + \nu) \alpha(z) T \right] \quad (IV.27.a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x \partial y} \right] \quad (IV.27.b)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (IV.27.c)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (IV.27.d)$$

### IV.3.7. Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM sur fondation élastique :

La recherche de solutions analytiques des problèmes des structures composites multicouches sous diverses conditions aux limites fait appel à la résolution d'équations aux dérivées partielles classiques et linéaires à coefficients constants.

Les conditions aux limites pour la présente théorie s'écrivent:

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^s = M_x^b = 0 \text{ à } x=0,a. \quad (\text{IV.28.a})$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ à } y=0,b \quad (\text{IV.28.b})$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement thermo-mécanique de la flexion des plaques sandwiches en FGM sur fondation élastique simplement appuyées. Elle peut alors être recherchée en écrivant les déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w_b$ ,  $w_s$  ainsi que les chargements thermique  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions de chargement thermique et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV.29})$$

Où  $\lambda = \pi / a$ ,  $\mu = \pi / b$ ,  $q_0$ ,  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_2$  et  $\bar{T}_3$  sont des constantes.

Et

Après la procédure de solution Navier, nous préconisons la forme de solution suivante pour  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_b$  et  $w_s$  qui satisfait les conditions aux limites

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 30})$$

Où

$U, V, W_b$  et  $W_s$  sont des paramètres arbitraires représentant l'amplitude de chacun des termes dans les séries pour la solution de Navier déterminés sous la condition que la solution de l'équation (IV.30) doit vérifier l'équation (IV.25) On obtient l'opérateur suivant :

$$[C]\{\Delta\}=\{F\}$$

Où  $\{\Delta\}=\{U, V, W_b, W_s\}^t$  et  $[C]$  c'est une matrice symétrique donnée par

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

Avec

$$C_{11}=-\left(A_{11}\lambda^2+A_{66}\mu^2\right)$$

$$C_{12}=-\lambda\mu\left(A_{12}+A_{66}\right)$$

$$C_{13}=\lambda\left(B_{11}\lambda^2+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\mu^2\right)$$

$$C_{14}=\lambda\left(B_{11}^S\lambda^2+\left(B_{12}^S+2B_{66}^S\right)\mu^2\right)$$

$$C_{22}=-\left(A_{66}\lambda^2+A_{22}\mu^2\right)$$

(IV.32)

$$C_{23}=\mu\left(\left(B_{12}+2B_{66}\right)\lambda^2+B_{22}\right)\mu^2$$

$$C_{24}=\mu\left(\left(B_{12}^S+2B_{66}^S\right)\lambda^2+B_{22}^S\right)\mu^2$$

$$C_{33}=-\left(D_{11}\lambda^4+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\lambda^2\mu^2+D_{22}\mu^4+K_0+K_1\lambda^2+K_1\mu^2\right)$$

$$C_{34}=-\left(D_{11}^S\lambda^4+2\left(D_{12}^S+2D_{66}^S\right)\lambda^2\mu^2+D_{22}^S\mu^4+K_0+K_1\lambda^2+K_1\mu^2\right)$$

$$C_{44}=-\left(H_{11}^S\lambda^4+2\left(H_{12}^S+2H_{66}^S\right)\lambda^2\mu^2+H_{22}^S\mu^4+A_{55}^S\lambda^2+A_{44}^S\mu^2+K_0+K_1\lambda^2+K_1\mu^2\right)$$

Les composantes du vecteur de force généralisée  $\{F\}=\{F_1, F_2, F_3, F_4\}^t$  sont donnés par :

$$F_1=\lambda\left(A^T T_1+B^T T_2+a B^T T_3\right)$$

$$F_2 = \mu(A^T T_1 + B^T T_2 + {}^a B^T T_3) \quad (IV.33)$$

$$F_3 = -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2)(B^T T_1 + D^T T_2 + {}^a D^T T_3)$$

$$F_4 = -q_0 - h(\lambda^2 + \mu^2)({}^S B^T T_1 + {}^S D^T T_2 + {}^a F^T T_3)$$

Ou

$$\{A^T, B^T, D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^n(z)}{1-\nu} \alpha^n(z) \{1, \bar{z}, \bar{z}^2\} dz \quad (IV.34)$$

$$\{{}^a B^T, {}^a D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^n(z)}{1-\nu} \alpha^n(z) \bar{\psi}(z) \{1, \bar{z}\} dz$$

$$\{{}^S B^T, {}^S D^T, {}^a F^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^n(z)}{1-\nu} \alpha^n(z) \bar{f}(z) \{1, \bar{z}, \bar{\psi}(z)\} dz$$

Avec  $\bar{z} = \frac{z}{h}$ ,  $\bar{f}(z) = \frac{f(z)}{h}$  et  $\bar{\psi}(z) = \frac{\psi(z)}{h}$

Substituant l'équation (IV.29) et (IV.30) dans la relation(IV.32), on peut obtenir les expressions des contraintes en terme de module de Young et les paramètres arbitraires  $U$ ,  $V$ ,  $W_b$  et  $W_s$  comme suit :

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{1-\nu^2} [-(\lambda U + \nu \mu V) + z(\lambda^2 + \nu \mu^2) W_b + f(z)(\lambda^2 + \nu \mu^2) W_s - (1 + \nu) \alpha(z) (\bar{T}_1 + \bar{z} \bar{T}_2 + \bar{\Psi}(z) \bar{T}_3)] \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \quad (IV.35.a)$$

$$\sigma_y = \frac{E(z)}{1-\nu^2} [-(\nu \lambda U + \mu V) + z(\nu \lambda^2 + \mu^2) W_b + f(z)(\nu \lambda^2 + \mu^2) W_s - (1 + \nu) \alpha(z) (\bar{T}_1 + \bar{z} \bar{T}_2 + \bar{\Psi}(z) \bar{T}_3)] \sin(\lambda x) \cos(\mu y), \quad (IV.35.b)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g(z) W_s \lambda \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (IV.35.c)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g(z) W_s \mu \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \quad (IV.35.d)$$

#### **IV.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons analysé le comportement thermo-mécanique des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriétés « FGM » sous sollicitation de flexion et reposant sur fondation élastique, en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables. Le nombre des inconnues dans la présente théorie est quatre seulement alors que d'autre cas, cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories.

# **CHAPITRE V**

## **Résultat et Discussion**

**V.1. Introduction :**

L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique des plaques sandwiches à gradient de propriété (FGM) sous sollicitation de flexion et reposant sur fondation élastique, et ce en utilisant la théorie raffiné à quatre variables.

**V. 2. Résultats numériques et discussions :**

Les valeurs de référence sont prises en tant que  $E_0 = 1\text{GPa}$  et  $\alpha_0 = 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ . Pour illustrer le problème de l'analyse thermomécanique structurelle, une variété de résultats numériques sous forme de tableaux et de graphes explicites seront présentés dans ce qui suit.

Les modules de Young et les coefficients de dilatation thermique, de la céramique et du métal sont :

Métal (Titanium, Ti-6Al-4V):  $E_M = 66.2\text{GPa}$ ;  $\nu = 1/3$ ;  $\alpha_M = 10.3 \times (10^{-6}/^\circ\text{C})$ .

Céramique (Zirconium, ZrO<sub>2</sub>):  $E_C = 117.0\text{GPa}$ ;  $\nu = 1/3$ ;  $\alpha_C = 7.11 \times (10^{-6}/^\circ\text{C})$ .

Les résultats sont présentés sous formes adimensionnelles. Il s'agit respectivement du déplacement transversal et des contraintes normales et tangentielles :

$$\bar{w} = \frac{10^2 D}{a^4 q_0} w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{10^2 q_0} \sigma_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{10 q_0} \tau_{xy} \left( 0, 0, -\frac{h}{3} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = -\frac{1}{10 q_0} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$$

$$\text{Avec: } k_0 = \frac{a^4}{D} K_0, \quad k_1 = \frac{a^2}{D} K_1 \text{ où } D = E_c h^3 / [12(1-\nu^2)]$$

Des résultats numériques sont reportés dans les tableaux (V-1-V-7 ) et ce pour différentes théories de plaques. En outre, des résultats supplémentaires de la présente théorie sont tracés dans les figures (V-1-V-12).

**Le premier exemple** sert à vérifier l'exactitude de la théorie actuelle et de prédire les réponses de flexion d'une plaque sandwich en FGM.



**Tableau V- 1** la flèche adimensionnelle  $\hat{w}$  des plaques carrées ( $a/h=10$ ).

p	Théorie	Type de Plaque				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	TSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	FSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Huu- Tai Thai el al.(2014)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Présente théorie	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606
1	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3235	0.3062	0.2919	0.2808	0.2709
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3236	0.3063	0.2920	0.2809	0.2709
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3248	0.3075	0.2930	0.2817	0.2717
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.3237	0.3064	0.2920	0.2809	0.2710
	Présente théorie	0.3236	0.3063	0.2920	0.2808	0.2709
2	SSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.3732	0.3522	0.3328	0.3161	0.3026
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3734	0.3523	0.3329	0.3162	0.3026
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3751	0.3541	0.3344	0.3174	0.3037
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.3737	0.3526	0.3330	0.3163	0.3027
	Présente théorie	0.3734	0.3524	0.3329	0.3162	0.3026
5	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.4091	0.3916	0.3713	0.3495	0.3347
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.4093	0.3918	0.3715	0.3496	0.3348
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.4112	0.3942	0.3736	0.3512	0.3363
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.4101	0.3927	0.3720	0.3501	0.3350
	Présente théorie	0.4094	0.3919	0.3715	0.3496	0.3348
10	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.4175	0.4037	0.3849	0.3492	0.3412
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.4177	0.4041	0.3855	0.3622	0.3482
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.4192	0.4066	0.3879	0.3640	0.3500
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.3988	0.3894	0.3724	0.3492	0.3361
	Présente théorie	0.4178	0.4042	0.3856	0.3622	0.3482

## Chapitre V: Résultat et discussion

**Tableau V- 2** Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle  $\overline{\tau_{xz}}(0)$  des plaques carrées  
(a/h=10)

p	Théorie	Type de Plaque				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.2462	0.2462	0.2462	0.2462	0.2462
	TSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.2386	0.2386	0.2386	0.2386	0.2386
	FSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.1910	0.1910	0.1910	0.1910	0.1910
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387
	Présente théorie	0.2322	0.2322	0.2322	0.2322	0.2322
1	SSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.2991	0.2777	0.2681	0.2668	0.2600
	TSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.2920	0.2710	0.2612	0.2595	0.2526
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.2610	0.2432	0.2326	0.2276	0.2206
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.2566	0.2593	0.2602	0.2582	0.2593
	Présente théorie	0.2860	0.2654	0.2553	0.2534	0.2464
2	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3329	0.2942	0.2781	0.2763	0.2654
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3262	0.2884	0.2719	0.2694	0.2583
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.2973	0.2675	0.2508	0.2432	0.2326
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.2552	0.2617	0.2650	0.2624	0.2655
	Présente théorie	0.3205	0.2833	0.2666	0.2636	0.2524
5	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3937	0.3193	0.2915	0.2890	0.2715
	TSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.3863	0.3145	0.2864	0.2827	0.2651
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3454	0.2973	0.2721	0.2610	0.2460
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.2468	0.2576	0.2649	0.2627	0.2694
	Présente théorie	0.3798	0.3103	0.2820	0.2773	0.2598
10	SSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	0.4415	0.3364	0.2953	0.2967	0.2768
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.4321	0.3324	0.2957	0.2908	0.2690
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	0.3728	0.3132	0.2830	0.2700	0.2526
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	0.2419	0.2534	0.2627	0.2611	0.2698
	Présente théorie	0.4237	0.3283	0.2917	0.2856	0.2639

## Chapitre V: Résultat et discussion

**Tableau V- 3** Contrainte normale a dimensionnelle  $\bar{\sigma}_x(h/2)$  des plaques carrées (a/h=10)

p	Théorie	Type de Plaque				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	2.0545	2.0545	2.0545	2.0545	2.0545
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	2.0499	2.0499	2.0499	2.0499	2.0499
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.9757	1.97576	1.9757	1.97576	1.97576
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758
	Présente théorie	2.0477	2.0477	2.0477	2.0477	2.0477
1	SSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	1.5820	1.4986	1.4289	1.3234	1.3259
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.5792	1.4959	1.4261	1.3206	1.3231
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.5325	1.4517	1.3830	1.2775	1.2810
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	1.5324	1.4517	1.3830	1.2775	1.2810
	Présente théorie	1.5838	1.5003	1.4295	1.3213	1.3246
2	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.8245	1.7241	1.6303	1.4739	1.4828
	TSDT(Zenkour, A.M., 2005a)	1.8217	1.7214	1.6275	1.4710	1.4799
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.7709	1.6750	1.5824	1.4253	1.4358
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	1.7709	1.6750	1.5824	1.4253	1.4358
	Présente théorie	1.8295	1.7299	1.6346	1.4735	1.4838
5	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.9957	1.9155	1.8184	1.6148	1.6411
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.9927	1.9130	1.8158	1.6118	1.6381
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.9358	1.8648	1.7699	1.5640	1.5931
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	1.9358	1.8648	1.7699	1.5640	1.5931
	Présente théorie	2.0001	1.9251	1.8271	1.6164	1.6454
10	SSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	2.0336	1.9731	1.8815	1.6198	1.6485
	TSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	2.0303	1.9713	1.8838	1.6666	1.7042
	FSDT (Zenkour, A.M., 2005a)	1.9678	1.9217	1.8375	1.6165	1.6584
	Huu- Tai Thai el al. (2014)	1.9678	1.9216	1.8375	1.6160	1.6587
	Présente théorie	2.0343	1.9838	1.8966	1.6700	1.7128

Dans les tableaux (V-1) à (V-3), on présente les résultats de la flèche adimensionnelle du plan médian, de la contrainte adimensionnelle de cisaillement transversal et de la contrainte adimensionnelle normale pour une plaque rectangulaire sandwich en FGM, carrés et moyennement épaisse respectivement.

L'âme de la plaque sandwich FGM est faite de zircone ( $ZrO_2$ ) avec un module de Young et coefficient de Poisson de 151 GPa et 0,3 respectivement. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de références (Zenkour, A.M., 2005a) et (Huu-Tai Thai et al.2014)

On constate une légère différence entre les résultats, cela est dû aux différentes approches utilisées pour prédire la réponse de la plaque sandwich en FGM. Mais, en général, une bonne concordance entre les résultats est trouvée.

*Le deuxième exemple* sert à prouver la validité de cette théorie raffinée des plaques à quatre variables. Les comparaisons sont faites entre les résultats obtenus à partir de la théorie actuelle, ceux obtenus de la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdale et de la théorie d'ordre supérieur comme indiqué dans les tableaux (V- 4 à V-7).

Il est à constater que les présents résultats sont en accord avec les résultats publiés pour des plaques sandwich en FGM simplement appuyées.

## Chapitre V: Résultat et discussion

**Tableau V-4-** Effet de la fraction volumique et des paramètres de fondation élastique sur le centre de la flèche adimensionnelle d'une plaque sandwich en FGM ( $a = 10h$ ,  $b = 2a$ ,  $q_0 = 100$ ,  $T = 0$ ).

Plaque	k	Théorie	$K_0=0, K_1=0$	$K_0=100, K_1=0$	$K_0=0, K_1=100$	$K_0=100, K_1=100$
1-0-1	0	SPT	0.6812917	0.4052192	0.08365223	0.07719472
		HPT	0.6813293	0.4052325	0.08365279	0.07719520
		Présente	0.6813082	0.4052251	0.08365248	0.07719493
	0.5	SPT	0.8866086	0.4699483	0.08610040	0.07927480
		HPT	0.8867094	0.4699766	0.08610135	0.07927561
		Présente	0.8867390	0.4699852	0.08610156	0.07927592
	1	SPT	1.003002	0.5007494	0.08708175	0.08010599
		HPT	1.003176	0.5007929	0.08708307	0.08010710
		Présente	1.003264	0.5008147	0.08708373	0.08010766
	2	SPT	1.109485	0.5259506	0.08781348	0.08072476
		HPT	1.109768	0.5260141	0.08781525	0.08072625
		Présente	1.109938	0.5260525	0.08781631	0.08072715
5	SPT	1.180434	0.5413757	0.08823321	0.08107933	
	HPT	1.180796	0.5414518	0.08823524	0.08108103	
	Présente	1.181016	0.5414982	0.08823646	0.08108206	
3-1-3	0.5	SPT	0.8684790	0.4648053	0.08592621	0.07912711
		HPT	0.8685717	0.4648319	0.08592711	0.07912788
		Présente	0.8685960	0.4648390	0.08592735	0.07912805
	2	SPT	1.080555	0.5193590	0.08762779	0.08056781
		HPT	1.080828	0.5194220	0.08762959	0.08056932
		Présente	1.080997	0.5194611	0.08763069	0.08057026
2-1-2	0.5	SPT	0.8603069	0.4624542	0.08584553	0.07905869
		HPT	0.8603925	0.4624790	0.08584637	0.07905942
		Présente	0.8604107	0.4624843	0.08584644	0.07905954
	2	SPT	1.065975	0.5159670	0.08753070	0.08048573
		HPT	1.066229	0.5160264	0.08753241	0.08048717
		Présente	1.066384	0.5160629	0.08753345	0.08048806
1-1-1	0.5	SPT	0.8389148	0.4562010	0.08562766	0.07887386
		HPT	0.8389764	0.4562193	0.08562829	0.07887441
		Présente	0.8389775	0.4562196	0.08562835	0.07887450
	2	SPT	1.024104	0.5059542	0.08723781	0.08023803
		HPT	1.024285	0.5059984	0.08723914	0.08023915
		Présente	1.024387	0.5060232	0.08723988	0.08023988

## Chapitre V: Résultat et discussion

**TableauV- 5 :** Effet de la fraction volumique et des paramètres de fondation élastique sur le centre de la flèche adimensionnelle d'une plaque sandwich en FGM ( $a = 10h$ ,  $b = 2a$ ,  $q_0 = 100$ ,  $T_1 = T_3 = 0$ ,  $T_2 = 10$ )

Plaque	k	théorie	$K_0=0, K_1=0$	$K_0=100, K_1=0$	$K_0=0, K_1=100$	$K_0=100, K_1=100$
1-0-1	0	SPT	1.524152	0.9065365	0.1871427	0.1726962
		HPT	1.524190	0.9065384	0.1871382	0.1726921
		Présente	1.524169	0.9065374	0.1871406	0.1726943
	0.5	SPT	1.926231	1.021002	0.1870603	0.1722312
		HPT	1.926304	1.020986	0.1870482	0.1722199
		Présente	1.926313	1.020974	0.1870433	0.1722154
	1	SPT	2.120627	1.058724	0.1841152	0.1693664
		HPT	2.120773	1.058705	0.1840986	0.1693510
		Présente	2.120839	1.058691	0.1840896	0.1693426
	2	SPT	2.287865	1.084561	0.1810799	0.1664622
		HPT	2.288128	1.084541	0.1810583	0.1664421
		Présente	2.288283	1.084526	0.1810449	0.1664296
	5	SPT	2.393845	1.097875	0.1789314	0.1644238
		HPT	2.394201	1.097856	0.1789072	0.1644012
		Présente	2.394417	1.097845	0.1788923	0.1643874
3-1-3	0.5	SPT	1.893048	1.013149	0.1872958	0.1724756
		HPT	1.893111	1.013133	0.1872841	0.1724646
		Présente	1.893111	1.013118	0.1872793	0.1724601
	2	SPT	2.241522	1.077367	0.1817766	0.1671312
		HPT	2.241769	1.077345	0.1817544	0.1671106
		Présente	2.241917	1.077328	0.1817403	0.1670975
2-1-2	0.5	SPT	1.877825	1.009416	0.1873783	0.1725643
		HPT	1.877880	1.009399	0.1873670	0.1725538
		Présente	1.877873	1.009386	0.1873625	0.1725498
	2	SPT	2.217342	1.073266	0.1820731B	0.1674188
		HPT	2.217565	1.073243	0.1820517	0.1673989
		Présente	2.217696	1.073225	0.1820381	0.1673863
1-1-1	0.5	SPT	1.837326	0.9991354	0.1875349	0.1727433
		HPT	1.837353	0.9991174	0.1875255	0.1727346
		Présente	1.837326	0.9991025	0.1875225	0.1727319
	2	SPT	2.145962	1.060204	0.1828029	0.1681350
		HPT	2.146105	1.060179	0.1827853	0.1681188
		Présente	2.146174	1.060160	0.1827747	0.1681089

## Chapitre V: Résultat et discussion

**Tableau V-6:** Effets du rapport (a/h) et les paramètres de fondation élastique sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques sandwich carrées en FGM ( $k=2$ ) ( $q_0 = 100, T_1=0, T_2= T_3=10$ )

Plaque	K	Théorie	K <sub>0</sub> =0, K <sub>1</sub> =0			K <sub>0</sub> =100, K <sub>1</sub> =0			K <sub>0</sub> =0, K <sub>1</sub> =100			K <sub>0</sub> =100, K <sub>1</sub> =100		
			a/h=5	10	20	a/h=5	10	20	a/h=5	10	20	a/h=5	10	20
1-0-1	1	SPT	5.423642	1.641053	0.6956824	3.734812	1.173420	0.5022719	0.5464189	0.1850845	0.08088404	0.5226103	0.1771234	0.07741799
		HPT	5.423893	1.641150	0.6957085	3.733786	1.173396	0.5022813	0.5459374	0.1850501	0.08088214	0.5221480	0.1770903	0.07741611
		Présente	5.423964	1.641194	0.6957212	3.733213	1.173382	0.5022855	0.5456821	0.1850325	0.08088109	0.5219026	0.1770732	0.07741516
	2	SPT	5.734698	1.749885	0.7534383	3.826500	1.214639	0.5283140	0.5288591	.1804318	0.08005720	0.5056076	0.1725899	0.07658943
		HPT	5.7534827	1.750065	0.7535468	3.825129	1.214615	0.5283285	0.5282195	0.1803852	0.08005454	0.5049920	0.1725450	0.07658675
		Présente	5.735954	1.750174	0.7535092	3.824303	1.214600	0.5283378	0.5278306	0.1803571	0.08005289	0.5046192	0.1725179	0.07658525
3-1-3	1	SPT	5.330141	1.609978	0.6804604	3.703138	1.160029	0.4948901	0.5510573	.1859876	0.08099118	0.5271146	0.1780113	0.07753093
		HPT	5.330216	1.610056	0.6804837	3.702080	1.160002	0.4948986	0.5505799	0.1859538	0.08098926	0.5266555	0.1779786	0.07752906
		Présente	5.330148	1.610089	0.6804955	3.701463	1.159983	0.4949021	0.5503241	0.1859362	0.08098828	0.5264092	0.1779616	0.07752813
	2	SPT	5.646032	1.719454	0.7379332	3.807014	1.203358	0.5213966	0.5359193	0.1816500	0.08023024	0.5124238	0.1737765	0.07676410
		HPT	5.646558	1.719613	0.7379744	3.805538	1.203325	0.5214105	0.5352551	0.1816021	0.08022743	0.5117852	0.1737303	0.5117852
		Présente	5.646855	1.71971	0.7380003	3.804597	1.20330	0.5214192	0.5348366	0.181571	0.08022569	0.5113833	0.1737013	0.07675978
2-1-2	1	SPT	5.284438	1.594908	0.6731644	3.685814	1.153268	0.4912824	0.5526873	0.1863415	0.08102769	0.5287047	0.1783612	0.07757090
		HPT	5.284415	1.594973	0.6731853	3.684774	1.153238	0.4912894	0.5522310	0.1863093	0.08102583	0.5282655	0.1783303	0.07756914
		Présente	5.284267	1.594998	0.6731952	3.684164	1.15321	0.4912925	0.5519905	0.1862928	2.429491	0.5280342	0.1783143	0.07756818
	2	SPT	5.598306	1.703239	0.7297816	3.792804	1.196904	0.5176659	0.5384794	0.1821568	0.08029978	0.5149035	0.1742723	0.07683555
		HPT	5.598665	1.703379	0.7298193	3.791351	1.196870	0.5176784	0.5378384	0.1821106	0.08029711	0.5142872	0.1742278	0.07683300
		Présente	5.598836	1.703462	0.7298427	3.790412	1.196846	0.5176857	0.5374359	0.1820819	0.08029549	0.5139009	0.1742001	0.7683138
1-1-1	1	SPT	5.156058	1.552924	0.6530754	3.633021	1.133731	0.4811414	0.5559039	0.1871330	0.08108988	0.5318648	0.1791508	0.07764478
		HPT	5.155757	1.552951	0.6530885	3.632077	1.133697	0.4811457	0.5555325	0.1871074	0.08108839	0.5315083	0.1791261	0.07764335
		Présente	5.155389	1.552945	0.6530922	3.631529	1.133673	0.4811464	0.5553608	0.1870962	0.08108780	0.5313427	0.1791154	0.07764274
	2	SPT	5.453189	1.654496	0.7056235	3.741931	1.176390	0.5063096	0.5438442	0.1833770	0.08045384	0.5201225	0.1754728	0.07699782
		HPT	5.453078	1.654571	0.7056493	3.740621	1.176348	0.5063177	0.5433188	0.1833398	0.08045168	0.5196173	0.1754369	0.07699575
		Présente	5.452873	1.654606	0.7056628	3.739777	1.176319	0.5063220	0.5430045	0.1833179	0.08045038	0.5193162	0.1754158	0.07699454

## Chapitre V: Résultat et discussion

**Tableau V-7:** Effets du rapport (a/h) et des paramètres de fondation élastique sur la contrainte adimensionnelle des plaque sandwich carrées en FGM ( $k=2$ ) ( $q_0 = 100$ ,  $T_1=0$ ,  $T_2=T_3=10$ )

Plaque	k	Théorie	$K_1=0, K_2=0$			$K_1=100, K_2=0$			$K_1=0, K_2=100$			$K_1=100, K_2=100$		
			$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
1-0-1	1	SPT	-0,1103573	4.269072	-0,2887178	-0,3116513	3.096625	0.04798293	-0,7370816	0.6186885	0.7595943	-0,7405086	0.5987285	0.7653265
		HPT	-0,1104459	4.269153	-0,2812689	-0,3116335	3.096640	0.04699315	-0,7367357	0.6191642	0.7405999	-0,7401593	0.5992112	0.7461861
		Présente	-0,1105227	4.269232	-0,2749404	-0,3116192	3.096643	0.04612938	-0,7364776	0.6193062	0.7244560	-0,739899	0.5993558	0.7299184
	2	SPT	-0,0622284	4.551750	-0,3104017	-0,292782	3.208591	0.06804995	-0,7375602	0.6144726	0.7653641	-0,7416393	0.5936413	0.8048434
		HPT	-0,0623141	4.551846	-0,3034753	-0,2927578	3.208598	0.06647567	-0,7378614	0.6141017	0.7810413	-0,7412355	0.5944333	0.7864585
		Présente	-0,0623908	4.551937	-0,2974985	-0,2927379	3.208594	0.06511804	-0,7375602	0.6144726	0.7653641	-0,7409318	0.5948100	0.7706716
3-1-3	1	SPT	-0,1239949	4.189161	-0,277876	-0,3177956	3.060143	0.04079350	-0,7373339	0.6160514	0.7306455	-0,7407694	0.5960367	0.7362949
		HPT	-0,1240826	4.189231	-0,2705475	-0,3177805	3.060162	0.04012697	-0,736998	0.6165316	0.7125160	-0,7404303	0.5965241	0.7180214
		Présente	-0,1241574	4.189305	-0,2643454	-0,3177678	3.060173	0.03952717	-0,7367466	0.6166913	0.6971192	-0,7401768	0.5966868	0.7025027
	2	SPT	-0,0753812	4.475040	-0,2908803	-0,2980482	3.177169	0.05806093	-0,7388589	0.6077893	0.7488546	-0,742256	0.5879891	0.7541779
		HPT	-0,0754649	4.475109	-0,2843545	-0,2980262	3.177192	0.05697980	-0,7384688	0.6086391	0.7324729	-0,7418621	0.5888496	0.7376774
		Présente	-0,0755402	4.475184	-0,2787527	-0,2980086	3.177201	0.05602560	-0,7381727	0.6090915	0.7183973	-0,7415633	0.5893088	0.723500
2-1-2	1	SPT	-0,1306517	4.150081	-0,2745316	-0,320887	3.041805	0.03766268	-0,7373893	0.6153433	0.7211808	-0,740827	0.5953174	0.7268218
		HPT	-0,1307402	4.150145	-0,2671339	-0,3208733	3.041825	0.03713013	-0,737061	0.6157951	0.7031429	-0,7404954	0.5957759	0.7086392
		Présente	-0,1308154	4.150213	-0,2608914	-0,3208612	3.041840	0.03663995	-0,736815	0.6159367	0.6878485	-0,7402472	0.5959197	0.6932223
	2	SPT	-0,0824931	4.433367	-0,2851026	-0,3010271	3.159448	0.05380536	-0,7389913	0.6063791	0.7330130	-0,7423942	0.5865421	0.7382908
		HPT	-0,0825795	4.433424	-0,278504	-0,3010069	3.159475	0.05291575	-0,7386108	0.6071980	0.7168938	-0,7420102	0.5873717	0.7220518
		Présente	-0,0826525	4.433497	-0,2728704	-0,3009895	3.159493	0.05211893	-0,7383215	0.6076363	0.7030792	-0,7417185	0.5878154	0.7081354
1-1-1	1	SPT	-0,1492757	4.040592	-0,2686892	-0,3297958	2.989004	0.02970586	-0,7374355	0.6143681	0.7035247	-0,7408728	0.5943439	0.7092065
		HPT	-0,1493661	4.040652	-0,2609289	-0,3297839	2.989034	0.02949509	-0,7371295	0.6146968	0.6852125	-0,7405641	0.5946772	0.6907412
		Présente	-0,1494431	4.040717	-0,2544308	-0,329774	2.989054	0.02926864	-0,7369009	0.6147491	0.6697680	-0,7403335	0.5947304	0.6751686
	2	SPT	-0,1040527	4.306738	-0,2754986	-0,3104364	3.103586	0.04303010	-0,739089	0.6046704	0.7046057	-0,7425009	0.5847792	0.7098716
		HPT	-0,1041433	4.306786	-0,2683342	-0,3104188	3.103627	0.04259217	-0,7387414	0.6053168	0.6882167	-0,7421502	0.5854338	0.6933549
		Présente	-0,1042201	4.306838	-0,2623098	-0,3104047	3.103649	0.04216635	-0,738477	0.6056344	0.6743091	-0,7418835	0.5857556	0.6793393



## Chapitre V:Résultat et discussion

---

Ces tableaux contiennent la flèche adimensionnelle au centre de la plaque sandwich en FGM soumise à des charges mécaniques et thermiques sur fondation élastique (à un ou deux paramètres). Les flèches sont considérées pour différentes valeurs de la fraction volumique " $k$ " et pour différents types de plaques sandwichs en FGM.

La valeur du rapport  $a/h$  (rapport d'épaisseur) est prise égale à 10 et  $q_0 = 100$  pour tous les tableaux.

Il est à noter que les flèches adimensionnelles du centre augmentent avec l'accroissement du paramètre de matériau (indice matériel)  $k$ .

De plus, il peut être démontré que la flèche diminue avec l'existence des fondations élastiques. L'inclusion du paramètre de fondation Winkler donne des résultats supérieures comparativement avec l'inclusion de paramètres de cisaillement de Pasternak.

Egalement, tous les déplacements sont en baisse avec l'existence des fondations élastiques.

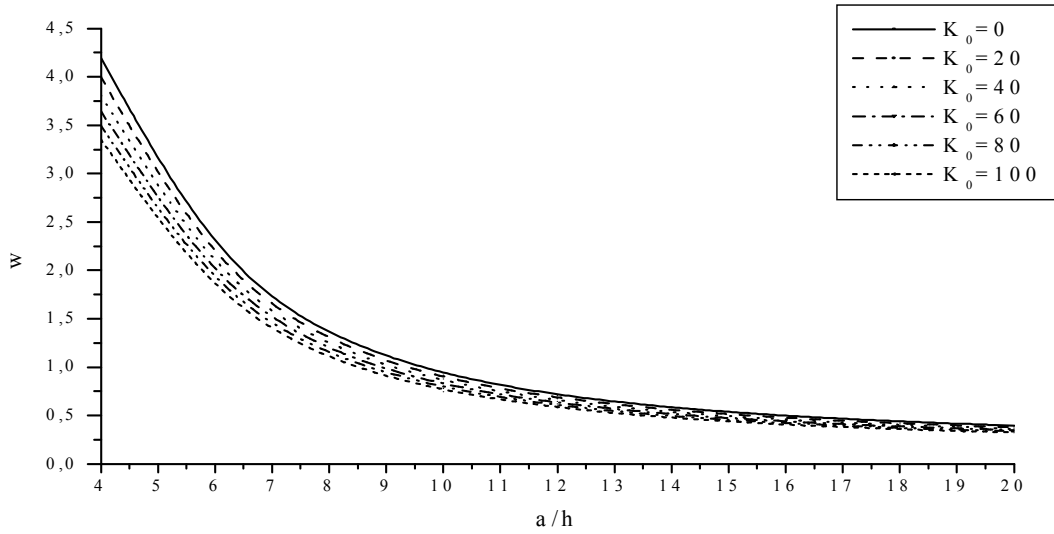
D'après les résultats présentés dans les tableaux (V- 4 à V- 7), il convient de noter que la théorie présentée donne lieu seulement quatre équations ce qui rend l'effort de calcul beaucoup plus faible par rapport à la SPT (théorie de la plaque sinusoïdale) et la HPT (théorie des plaques d'ordre élevé) qui ont cinq inconnus.

Il peut être conclu que la théorie actuelle n'est pas seulement précise, mais aussi très simple pour prédire la réponse à la flexion thermomécanique de plaques sandwichs en FGM reposant sur une fondation élastique à un ou deux paramètres.

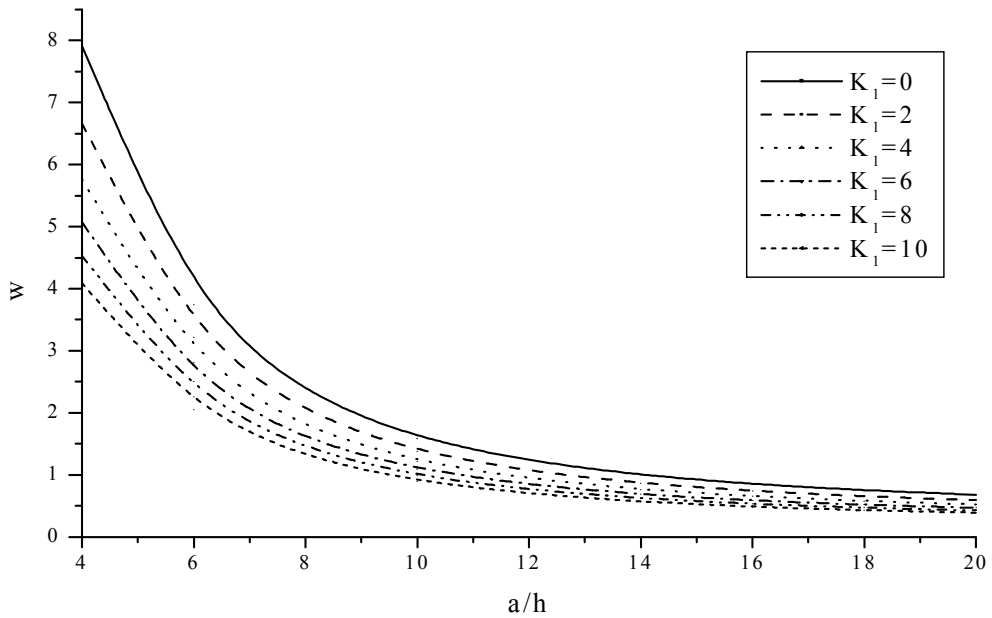
Le tableau (V-7) présente les effets de la fraction volumique en fonction de l'indice  $k$  et les paramètres de la fondation élastique sur les contraintes adimensionnelles axiales, la contrainte de cisaillement transversale et ce pour différentes configurations de plaques sandwichs carrées.

Une fois de plus, la plaque est soumise à une charge mécanique sur sa surface supérieure et une charge thermique variable à travers son épaisseur. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux prédits par la SPT et la HPT. Une très bonne concordance entre les différents résultats est constatée.

Les résultats révèlent aussi que la présence d'une fondation élastique fait augmenter les contraintes.



**Figure V.1** Effet du paramètre du module Winkler sur le centre de la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques sandwich carrées en FGM ( $k = 2$ ) pour différent rapport ( $a/h$ ) avec  $K_I = 10$ ,  $q_0 = 100$ ,  $T_1 = 0$  et  $T_2 = T_3 = 10$ , plaque sandwich (1-1-1)



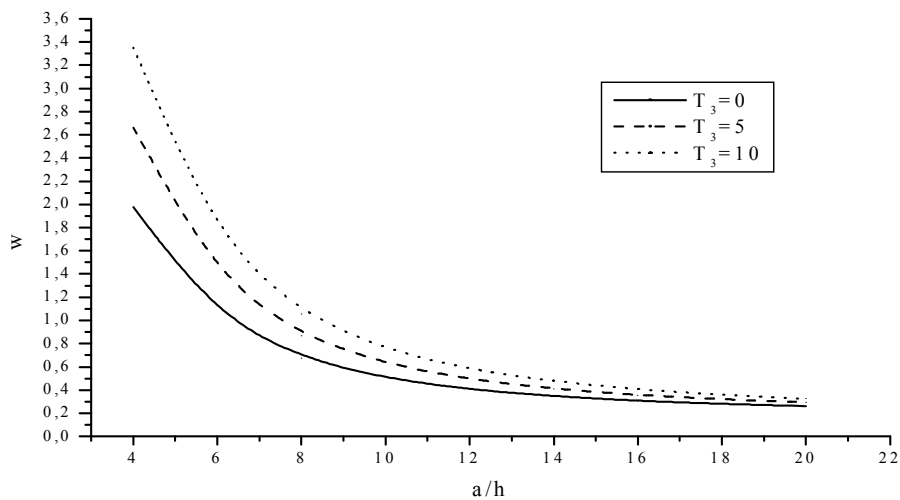
**Figure V.2** Effet du paramètre du module Pasternak sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques sandwich carrées en FGM ( $k=2$ ) pour différent rapport :  $a/h$  avec  $K_0 = 10, q_0 = 100, T_1 = 0, T_2 = T_3 = 10$ , plaque sandwich(1-1-1)

Les figures (V-1 et V-2) montrent la variation de la flèche du centre en fonction du rapport ( $a/h$ ) pour une plaque sandwich carré en FGM (1-1-1). Aussi, l'effet de la rigidité de base est illustré sur ces figures.

On suppose, à moins d'indication contraire, que  $k = 2, T_1 = 0, T_2 = T_3 = 10$  et  $q_0 = 100$ .

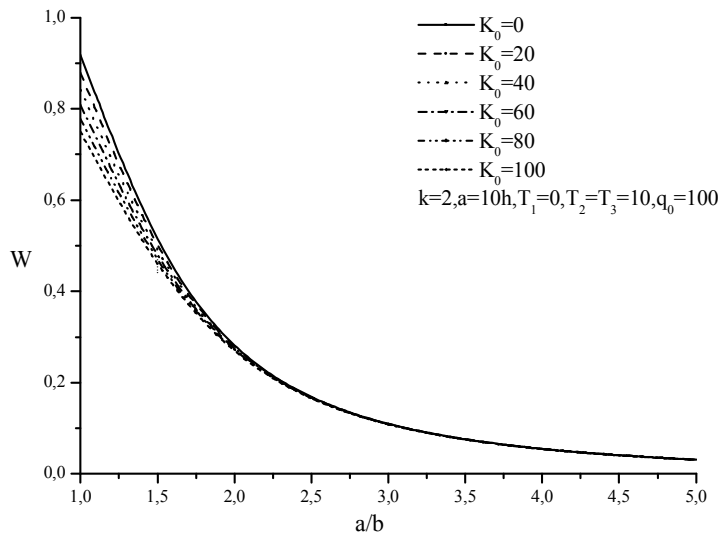
On peut observer que les flèches de la plaque sandwiches en FGM diminuent quand  $a/h$  augmente. Dans le cas contraire : D'après la figure(V- 1), on voit que lorsque le paramètre du module Winkler augmente la flèche du centre de la plaque sandwiches en FGM diminue. Cette tendance à la baisse est attribuée à la raideur du moyen élastique.

La même conclusion peut être tirée de la figure (V-2). Autrement dit, l'augmentation du paramètre Pasternak conduit à une réduction de la flèche de la plaque sandwich en FGM.

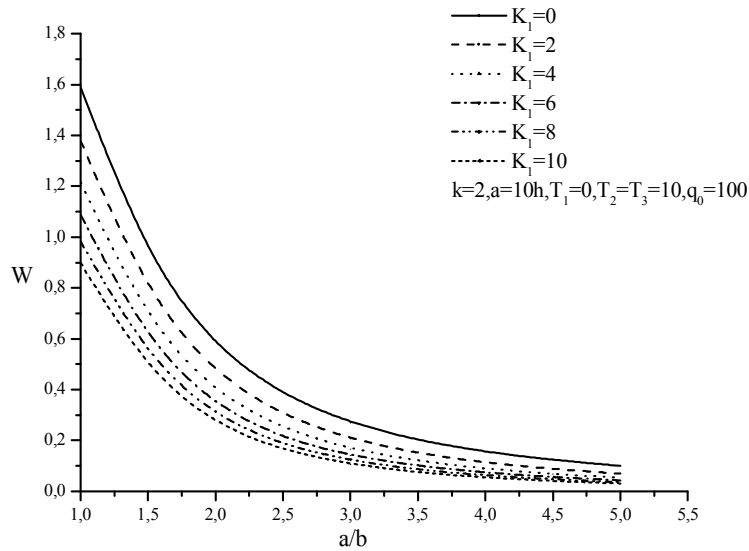


**Figure V.3** Effet de la charge thermique  $T_3$  sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) des plaques sandwich carrées en FGM ( $k=2$ ) pour différent rapport :  $a/h$  avec  $k_0 = 100, K_1 = 10, q_0 = 100, T_1 = 0$  and  $T_2 = 10$ , plaque (1-1-1)

Dans la figure (V- 3), nous avons tracé l'effet du champ  $T_3$  de température sur la flèche au centre. Le paramètre de fondation élastique est  $K_0 = 100$  et  $K_1 = 10$ . D'après cette figure, on peut voir que l'augmentation de la température entraîne une augmentation de la flèche.



**Figure V.4** Effet du paramètre du module Winkler sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich carrée en FGM ( $k = 2$ ) pour différent rapport  $a/b$  avec  $k_1 = 10$ ,  $q_0 = 100$ ,  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = T_3 = 10$ , plaque sandwich (1-1-1)



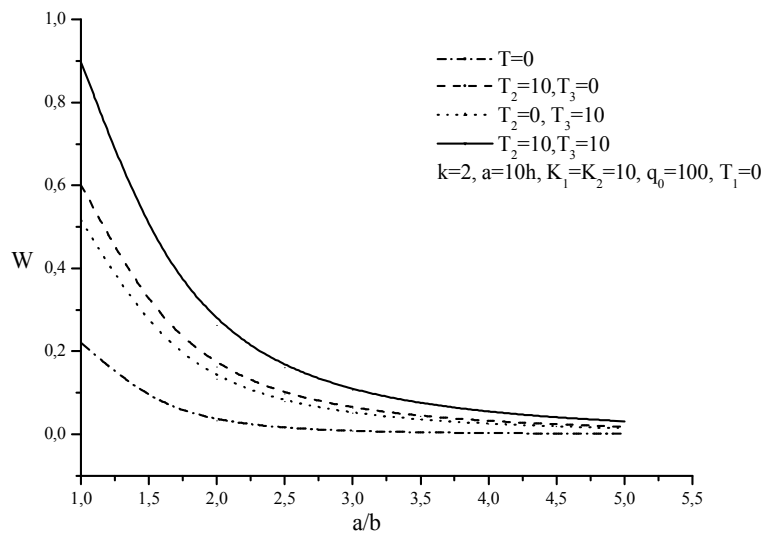
**Figure V.5** Effet du paramètre du module Pasternak sur la flèche adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque sandwich carrée en FGM ( $k = 2$ ) pour différent rapport  $a/h$  avec  $k_0 = 10$ ,  $q_0 = 100$ ,  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = T_3 = 10$ , plaque (1-1-1)

Les figures (V-4) et (V-5) montrent la variation de la flèche avec le rapport  $a/b$ .

De ces figures, il est clair que les valeurs plus élevées de rapport  $a/b$  entraînent une réduction des valeurs de la flèche. En outre, l'effet de la fondation élastique est également représenté sur ces figures.

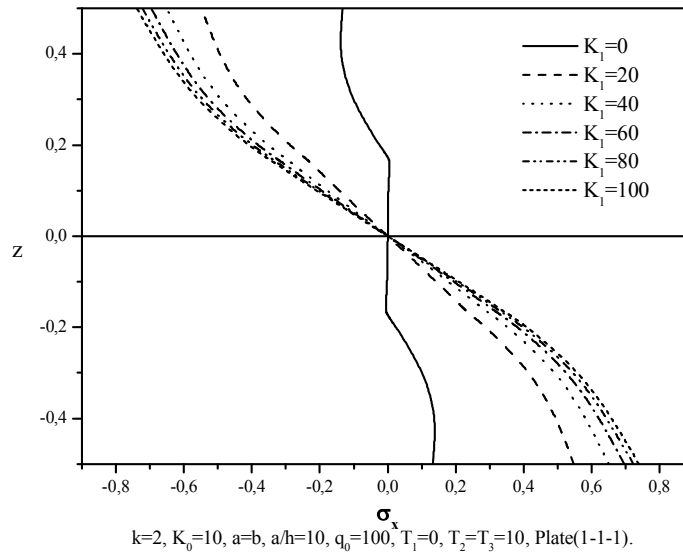
Dans la figure V-4, on voit que le paramètre du module Winkler a peu d'effet sur la valeur de la flèche.

Cependant, sur la figure (V-5) l'augmentation du paramètre du module de cisaillement conduit à une diminution de la flèche au centre.

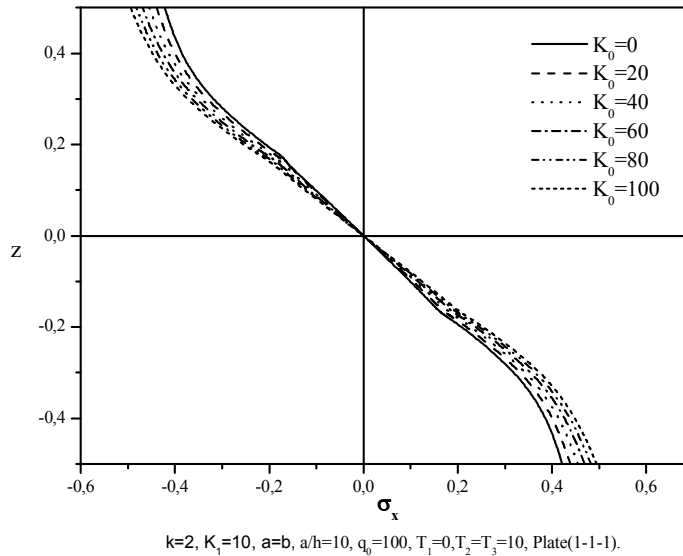


**Figure V.6** Effet de la charge thermique sur la flèche adimensionnelle des plaques sandwiches en FGM ( $k = 2$ ) en fonction du rapport  $a/b$ .

La figure (V-6), quant à elle ; montre l'effet du rapport  $a/b$  sur la flèche adimensionnelle du centre de la plaque sandwich en FGM (1-1-1) et ( $k=2$ ). L'effet des sollicitations mécaniques et thermiques est pris en considération. La flèche est plus grande pour les plaques soumises à une charge thermique. La déformation diminue à mesure que  $a/b$  augmente. Pour les plaques de FGM soumises à une charge thermique, la flèche peut être stable pour toutes les valeurs de  $a/b \geq 5$ .



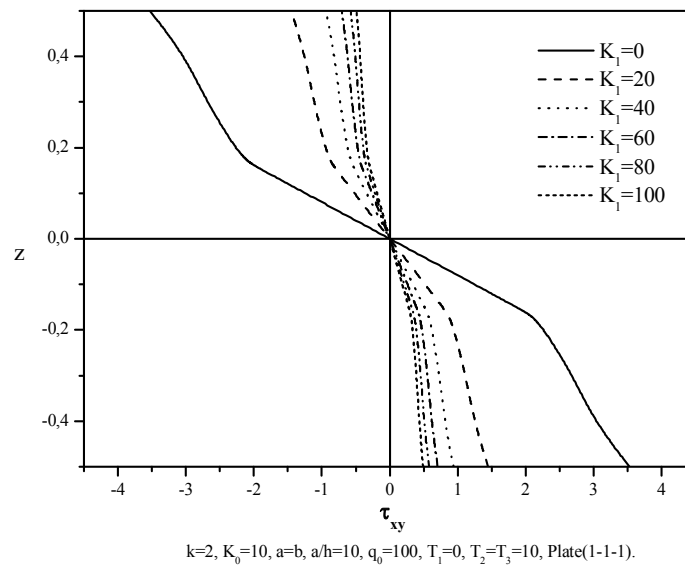
**Figure V.7** Variation de contrainte axiale adimensionnelle ( $\overline{\sigma_x}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM ( $k=2$ ) pour différentes valeurs de  $K_1$  (paramètre du module de cisaillement Pasternak)



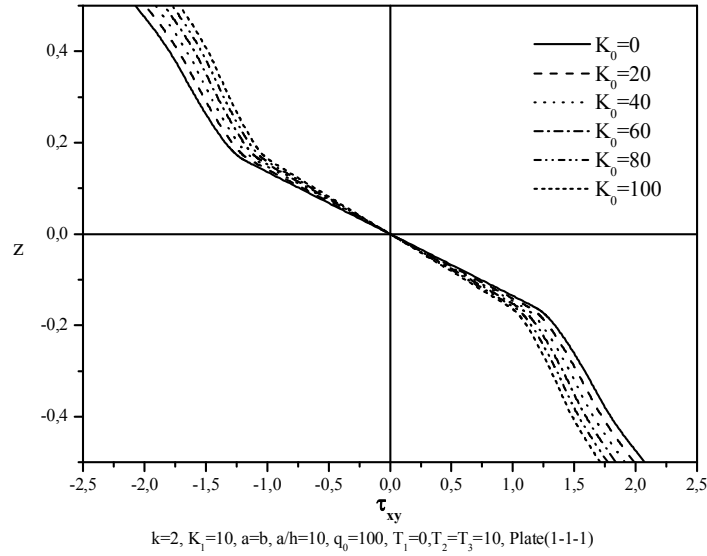
**Figure V.8** Variation de la contrainte axiale adimensionnelle ( $\overline{\sigma_x}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM ( $k=2$ ) pour différentes valeurs du  $K_0$  (paramètre du module de cisaillement Winkler)

Les figures (V-7) et (V-8) contiennent la contrainte axiale suivant l'épaisseur de la plaque rectangulaire sandwich en FGM ( $k = 2$ ) sous les charges mécaniques et thermiques. Comme il est exposé dans ces figures, les contraintes maximales de compression se produisent à un point sur la surface supérieure ; les contraintes de traction maximales se produisent bien sûr à un point sur la surface inférieure de la plaque sandwich en FGM.

Egalement, il peut être observé à partir de ces figures que la base élastique a un effet significatif sur les valeurs maximales de la contrainte axiale. On observe que la contrainte normale augmente progressivement avec  $K_1$  ou  $K_0$ . Cependant, l'effet de paramètre du module Pasternak est plus important que le paramètre du module Winkler.



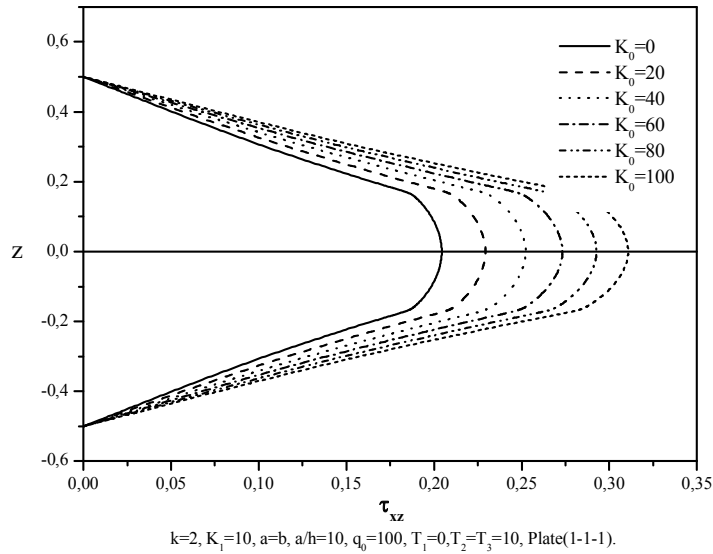
**Figure V.9** Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnel ( $\overline{\tau_{xy}}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM( $k = 2$ ) pour différentes valeurs de  $K_1$ .



**Figure V.10** Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnel ( $\overline{\tau_{xy}}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM ( $k=2$ ) pour différentes valeurs de  $K_0$

Les figures (V-9) et (V-10) représentent la variation suivant l'épaisseur de la contrainte de cisaillement transversale pour ( $k=2$ ). Pour la plaque sandwich rectangulaire en FGM (1-1-1), il apparaît claire que le paramètre du module Pasternak a un effet significatif sur la variation de cette contrainte comparativement à celui de Winkler.





**Figure V.11** Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnel ( $\overline{\tau_{xz}}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM ( $k=2$ ) pour différentes valeurs du paramètre du module Winkler  $K_0$

Sur la figure (V-11), nous avons tracé la distribution de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque (1-1-1) sandwich en FGM ( $k=2$ ). Ces résultats montrent que la variation des contraintes est très sensible à la variation de la valeur de paramètre du module Winkler.

En effet, la variation de la contrainte de cisaillement n'est pas parabolique à travers l'épaisseur, et ces contraintes augmentent avec l'augmentation du paramètre de fondation de Winkler.

### V.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement thermo-mécanique de la flexion des plaques épaisses sandwiches en FGM par l'utilisation d'une théorie raffinée à quatre variables.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les flèches et les contraintes dues au chargement thermo-mécanique obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus) sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermo-mécanique de la flexion des plaques FGM reposant sur fondation élastique.

# **Conclusion Générale**

## Conclusion Générale

---

### Conclusion Générale

Les structures sandwiches en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Dans l'application de technologie, cette caractéristique représente beaucoup d'avantages et permet de choisir des paramètres de matériau appropriés pour faire les plaques en matériaux à gradient de propriétés être sûres dans l'intégrité structurale une fois soumise à champ de température élevé.

Dans ce travail de recherche, l'analyse thermomécanique des plaques sandwich rectangulaires en FGM reposant sur fondation de deux paramètres sous sollicitation de flexion a été présenté. Une nouvelle théorie de plaque raffinée à quatre variables a été développée. Contrairement à toute autre théorie, la théorie présentée ne donne lieu qu'à quatre équations résultant de l'effort computationnel beaucoup plus faible en comparaison avec les autres théories d'ordre supérieur dans la littérature ayant plus nombre d'équations régissant. L'exactitude de la théorie actuelle est déterminée par comparaison avec d'autres théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur où un excellent accord a été observé dans tous les cas. En outre, les influences des paramètres de la plaque comme l'indice de loi de puissance, rapport d'aspect, les coefficients de rigidité de la fondation et chargement thermomécanique sur la contrainte et la flèche de la plaque rectangulaire en FGM ont été complètement étudiées. En conclusion, on peut dire que la théorie proposée est simple et précis dans la résolution de la flexion statique et thermique, flambage, comportements des plaques rectangulaires fonctionnellement gradués reposant sur une fondation élastique.

En perspective, il est prévu d'appliquer le nouveau modèle d'ordre élevé à deux variables pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés reposant sur fondation élastique sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte les changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

## **Conclusion Générale**

---

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis des chargements thermo-mécanique.

# **Bibliographie**

## Bibliographie

---

### **Bibliographie:**

Abderrahmane Said, Mohammed Ameer, Abdelmoumen Anis Bousahla, Abdelouahed Tounsi "A new simple hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates resting on winkler-pasternak elastic foundations", *Int. J. Comput. Methods* (2013).

Abdizadeh H, élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tri - couches à base d'alumine » thèse de doctorat INSAde Lyon 1997 212 p

H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010.

Al-Hosani K., Fadhil S., El-Zafrany A. Fundamental solution and boundary element analysis of thick plates on Winkler foundation. *Comput. Struct.* 70 (1999) 325–336.

G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J. Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.

C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.

A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.

P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub>Laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 ( 8):191-192,1986.

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations. *Steel and Composite Structures*, **14**(1), 85 – 104, (2013).

M. Bouremana., A. Tounsi., A. Kaci., I. Mechab., Controlling thermal deformation by using composite materials having variable fiber volume fraction.

## Bibliographie

---

Materials & Design; 30(7): 2532-2537, 2009.

E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. Composite structures, vol. 50, pages 183,198, 2000.

E. Carrera, Temperature profile influence on layered plates response considering classical and advanced theories, AIAA J; 40: 419–427, 2002.

A. Chakraborty., S. Gopalakrishnan.,J.N. Reddy, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, Int. J. Mech. Sci; 45 (3) : 519–539,2003.

H.K. Ching., S.C. Yen, Transient thermoelastic deformation of 2-d functionally graded beams under nonuniformly convective heat supply, Compos. Struct; 73 (4): 381–393, 2006.

J. R. Cho., D.Y. Ha, Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials, Mater. Sci. Eng., A; 302 (2): 187–196, 2001.

F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614, 1983.

T. Fuchiyama., N. Noda, Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material. JSAE Rev; 16 (3):263–8, 1995.

F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.

M.S.A. Houari., S. Benyoucef., I. Mechab., A. Tounsi., E.A. Adda Bedia, Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates, Journal of Thermal Stresses; 34(4):315–334,2011.

Huang Z.Y., Lu C.F., Chen W.Q. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. Compos. Struct. 85 (2008) 95–104..

## Bibliographie

---

Huu-Tai Thai , Trung-Kien Nguyen, Thuc P. Vo, Jaehong Lee “Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory” *European Journal of Mechanics A/Solids* 45 (2014) 211e225.

K. R. Jagtap, Achchhe Lal a & B. N. Singh. "Thermomechanical Elastic Post-Buckling of Functionally Graded Materials Plate with Random System Properties", *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* Volume 14, Issue 3, 2013, 175-194.

R. Javaheri., M.R. Eslami, Buckling of functionally graded plates under in plane compressive loading, *ZAMM*, 82 (4): 277–283, 2002. [1] Koizumi M. The concept of FGM, *Proceedings of the Second International symposium on FGM*, 34: 3–10, 1993.

R. Javaheri., M.R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded plates based on higher-order theory, *J. Therm. Stresses*; 25 (7): 603–625, 2002.

R. Javaheri., M.R. Eslami, Thermoelastic buckling of rectangular plates made of functionally graded materials, *AIAA J*; 40 :162–169,2002.

Z.-H. Jin, An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material,” *Int. Commun. Heat Mass Transfer*; 29 (7): 887–895. 2002.

T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.

T. Kant & K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65,75, 2000.

R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear e\_ects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.



## Bibliographie

---

M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.

M. Kashtalyan, Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates,” *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864, 2004.

Y Kiani, E Bagherizadeh, M. R. Eslami "Thermal and mechanical buckling of sandwich plates with FGM face sheets resting on the Pasternak elastic foundation", *Proc. IMechE Vol. 226 Part C: J. Mechanical Engineering Science* (2011), 32-41.

Koizumi M. FGM activities in Japan, *Composites Part B*, 28: 1–4, 1997.

Koizumi M., Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.

K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.

Lee H.P. Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass. *Appl. Acoust.* 55 (1998) 203–215.

Liew K.M., Han J.-B., Xiao Z.M., Du H. Differential quadrature method for Mindlin plates on Winkler foundations. *Int. J. Mech. Sci.* 38 (1996) 405–421.

L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l’université de Limoges, 1997.

H. Matsunaga, Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory. *Compos Struct*; 90 (1): 76–86, 2009.

R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.

## Bibliographie

---

R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, 1973.

Morfidis K. Vibration of Timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. *Comput. Struct.* 88 (2010) 294–308.

J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.)

P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380, 1957

K.-S. Na., J.-H. Kim, 2004, Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials, *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437, 2004.

Nedri, K.; El Meiche, N.; Tounsi, A. “Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundations by Using a Refined Hyperbolic Shear Deformation Theory” *Mechanics of Composite Materials* Volume: 49 Issue: 6 Pages: 629-640 Published: JAN 2014.

M. Nemat-Alla, Reduction of thermal stresses by developing two- dimensional functionally graded materials, *Int. J. Solids Struct*; 40 (26): 7339–7356, 2003,

T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007

A. K. Noor & W. S. Burton. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1,12, 1989.

H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9, 1991.

Y. Ootao., Y. Tanigawa, Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply, *Compos. Struct*; 63 (2) : 139–146, 2004.

R. Pal, New Models for Effective Young’s modulus of particulate composites, *Composites, Part B*; 36 (6-7): 513–523. 2005.

## Bibliographie

---

J.-S. Park., J.-H. Kim, Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates, *J. Sound Vib*; 289 (25-28): 77–93, 2005.

Pasternak P.L. On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants. Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, Moscow, USSR, 1954 (in Russian).

J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, 1984.

J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.),

J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841–855, 2001.

E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502, 1975.

E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*;12 (2): 69-77, 1945.

T. Reuter., G. J. Dvorak., V. Tvergaard, Micromechanical models for graded composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*; 45 (8) : 1281–1302,1997.

B. V. Sankar, An elasticity solution for functionally graded beams, *Compos. Sci. Technol*; 61 (5):689–696, 2001

B. V. Sankar., J.T. Tzeng, Thermal stresses in functionally graded beams, *AIAA J*; 40 (6): 1228–1232, 2002.

## Bibliographie

---

Suresh, S., and Mortensen, A., Fundamentals of Functionally Graded Materials, IOM Communications, London, 1998.

Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, 2003.

J. Sladek., V. Sladek., Ch. Zhang, Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, Comput. Mater. Sci; 28 (3-4): 494–504, 2003.

H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, 1990.

M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 129-34, 1990.

J.-Q. Tarn, Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, Int. J. Solids Struct; 38 (46-47): 8189– 8206, 2001.

S.P. Timoshenko., S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells. McGrawHill, New York, 1959.

M. Touratier, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916, 1991.

V. B. Tungikar., K. M. Rao, Three dimensional exact solution of thermal stresses in rectangular composite laminates, Compos. Struct; 27 (4): 419–427, 1994.

## Bibliographie

---

Ugurlu B., Kutlu A., Ergin A., Omurtag M.H. Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid. *J. Sound Vib.* 317 (2008) 308–328..

O. Van der Biest., M. Gasik., J. Vleugels eds, *Functionally graded materials VIII (FGM 2004)*, Proceedings of the eighth international symposium on multifunctional and functionally graded materials, materials science forum, vols. 492–493, trans tech publications ltd, uetikon-Zuerich, Switzerland.

S. S.Vel., R.C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates, *AIAA J*; 40 (7): 1421–1433, 2002.

Winkler E. *Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit*. Dominicus, Prague, 1867.

J. Woo., S.A. Meguid, Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421, 2001.

Yaghoobi, H., Yaghoobi, P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach. *Meccanica* (2013) 48: 2019-2035

J. Yang, J., H.-S. Shen, Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115, 2003.

J. Yang, J., K. M. Liew., S. Kitipornchai, Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, *Compos. Sci. Technol*; 65 (78):1165–1175, 2005.

H. M. Yin., Z.L. Sun., G.H. Paulino, Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Mater*; 52 (12):3535–3543, 2004.

## Bibliographie

---

A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflections and stresses, *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5224–5242, 2005.

A.M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2- Buckling and free vibration, *Int. J. Solids Struct*; 42 (18-19): 5243–5258, 2005.

Zenkour AM, Alghamdi NA. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J Mater Sci* 43:2574–2589, (2008).

A.M. Zenkour., M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Compos Struct*; 93 (1):102–93, 2010.

Zenkour, A.M. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Inter. J. of Mech. Sci.*, **51**(11-12), 869-880 (2009).

X. Zhao., YY. Lee., K.M. Liew, Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Compos Struct*; 90 (2): 161–71, 2009.

Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.

J. R. Zuiker, Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variations,” *Composites Eng*, 5 (7): 807–819, 1995.