

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE SIDI BEL ABBES  
FACULTE DES SCIENCE DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de Magister  
Spécialité : Génie Mécanique  
Option : Comportement Mécanique des structures  
Présenté par Mr :

BENDINE KOUIDER

---

---

*Contrôle actif de vibration par les  
Matériaux piézoélectriques*

---

---

Soutenu Décembre 2012 devant la commission d'examen :

- |   |                                  |                                    |                  |
|---|----------------------------------|------------------------------------|------------------|
| ➤ | <b>Pr. BOUKHOLDA F. BENALLAL</b> | Professeur U. Sidi-Bel-Abbès       | <b>Président</b> |
| ➤ | <b>Dr. BELABBES. B</b>           | M.de conférences U. Sidi-Bel-Abbès | <b>Encadreur</b> |
| ➤ | <b>Pr. BOUNAZEF MOKHTAR</b>      | Professeur U. Sidi-Bel-Abbès       | <b>Examineur</b> |
| ➤ | <b>Dr. REFASSI KADDOUR</b>       | M.de conférences U. Sidi-Bel-Abbès | <b>Examineur</b> |
| ➤ | <b>Dr. YOUNES MIMOUN</b>         | M.de conférences U. Sidi-Bel-Abbès | <b>Examineur</b> |





# Remerciement

---

## *Remerciement*

Arrivé au terme de la rédaction de ce mémoire, il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma gratitude et mes remerciements à tous ceux qui, par leur enseignement, leur soutien et leurs conseils, m'ont aidé à sa réalisation.

Ma gratitude va d'abord à mon directeur de mémoire Monsieur **B. Belabbes** qui m'a honoré de sa confiance et encadrement de ce travail avec intérêt et disponibilité.

Je tiens à remercier plus particulièrement le professeur **Gregorie Tacka** qui m'a apporté son aide efficace dans le choix des techniques les plus performances et dans l'analyse des résultats obtenus.

J'adresse mes sincères remerciements à messieurs les professeurs **Boukholda F.Benallal, Bounazef. M, Reffasi. K** et **Younes. M** qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

Mes mots vont aussi vers mes amis, dont leur sourire restera éternellement gravé dans ma mémoire en souvenir des instants magiques et intenses que nous avons vécus ensemble.

Les dernières lignes sont réservées à mes parents, à mes frères et à ma sœur, vous m'avez Apporte amour, réconfort et paix depuis toutes ces années. Je ne sais comment vous dire toute la gratitude que je peux avoir et toujours l'éternel même mot, "Merci !". Ma mère & mon père, vous êtes les meilleurs parents qu'un être humain peut avoir dans sa vie. Enfin merci à tous ceux dont je n'ai pas cité le nom mais que je n'oublie pas pour autant.

---

## *Résumé*

Les matériaux piézo-électriques permettent la transformation des contraintes électriques en contraintes mécaniques et vice-versa. Ils sont utilisés comme contrôleurs ou capteurs dans l'industrie. L'analyse du comportement des matériaux piézo-électriques réside en plus de son intérêt propre, l'utilisation de ces matériaux dans des structures dont on veut contrôler soit la forme, soit les modes de vibrations. Le contrôle actif des structures constitue un sujet d'un intérêt capital pour ce mémoire.

L'intérêt de ces études est multiple. D'un point de vue plus général, le besoin de stabilité des structures devient de plus en plus important avec le développement des technologies liées aux télécommunications et micro - techniques. Les structures flexibles sont la seule solution d'un point de vue théorique en mesure d'assurer la stabilité. L'objectif de cette recherche consiste à modéliser l'effet de couplage mécanique-électrique et à estimer la forme des structures adaptatives pour le contrôle actif.

Nous proposons un exemple d'application du modèle d'une poutre avec un couple actionneur/capteur piézo-céramique collé et destiné à l'étude du contrôle des vibrations. Le modèle dynamique de la poutre est d'abord présenté analytiquement selon le formalisme d'Euler Bernoulli. Les trois premières formes modales et les fréquences propres de la poutre sont réalisées de manière analytique et calculées par le logiciel Matlab. Les résultats de ce modèle ont été présentés en 4<sup>ème</sup> chapitre. Pour une application éventuelle du contrôle, l'analyse de cette structure par le logiciel d'élément fini ANSYS est employée pour extraire les formes modales et les fréquences propres.

Afin d'évaluer en temps réel la forme de cette structure flexible, un programme Matlab a été développé pour déterminer les réponses d'une poutre encastree dans des conditions de chargement statique et des conditions aux limites avec et sans control actif. On note que les résultats obtenus par cette méthode sont conformes et montre l'efficacité du control actif.

## *Abstract*

Piezoelectric materials allow the transformation of electric constraints into mechanical constraints and vice versa. They are used as controllers or sensors in the industrial field. The analysis of the behavior of piezoelectric materials lays within the use of these materials in structures whose form or modes of vibration are to be controlled.

The need for these studies is crucial. From a general point of view, the need for stability of structures has become increasingly important with the development of technologies related to Telecommunications and micro-techniques. Flexible structures are the only means to achieve the requisite stability in the face of diverse situations. The objective of this research is to model the effect of electro-mechanical coupling and to estimate the shape of the adaptive structures for active control.

---

We suggest a model of a cantilever beam with bonded piezoceramic actuator and sensor for the study of vibration control. The flexible beam dynamic model is first derived analytically according to the Euler Bernoulli Beam Theory. The first three mode shapes and natural frequencies of the beam are constructed analytically by using Matlab. The model behavior was presented in 4<sup>th</sup> chapter. The analysis of structures in commercial FEA software ANSYS is used to extract the mode shape and the frequency.

In order to evaluate at real time the shape of the flexible structures, a Matlab algorithm was developed to determine the response of the cantilever beam under a static loads and boundary conditions. The results obtained were good and proof the efficacies of the active control. The results also, show that the algorithm makes it possible to correctly estimate the structures.



## Table des matières

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| <i>Introduction générale</i> ..... | 17 |
|------------------------------------|----|

### *Chapitre I*

|   |    |
|---|----|
| I.1 Introduction .....                                    | 19 |
| I.2 La piézoélectrique.....                               | 19 |
| I.2.a Effet piézoélectrique direct.....                   | 19 |
| I.2.b effet piézoélectrique inverse.....                  | 19 |
| I.2.c L'origine de l'effet piézoélectrique.....           | 19 |
| I.3 Mécanismes piézoélectrique.....                       | 20 |
| I.4 Application.....                                      | 21 |
| I.4.1 Sources de haute tension .....                      | 21 |
| I.4.2 Capteurs.....                                       | 21 |
| I.4.3 Actionneurs .....                                   | 22 |
| I.4.4 Fréquence d'horloge .....                           | 22 |
| I.5 Contrôle actif.....                                   | 23 |
| I.5.a les équations de base de la piézoélectrique .....   | 25 |
| I.5.b Relations fondamentales de piézoélectrique .....    | 29 |
| I.5.c Définition des constantes piézoélectriques.....     | 31 |
| I.5.d Coefficient de couplage.....                        | 34 |
| I.6 Température de Curie et transition de phase.....      | 36 |
| I.7 Matériaux piézoélectriques.....                       | 36 |
| I.7.1 Cristaux piézoélectriques non ferroélectriques..... | 36 |
| I.7.2 Le quartz et ses isotopes.....                      | 36 |
| I.7.3 Les cristaux "lithium" .....                        | 37 |
| I.7.4 Cristaux ferroélectriques pérovskites.....          | 37 |
| I.7.5 Céramiques PZT.....                                 | 39 |
| I.7.6 Monocristaux pérovskites.....                       | 39 |
| I.8 Avantage des matériaux piézoélectriques.....          | 41 |
| I.9 inconvénients des matériaux piézoélectriques.....     | 41 |

### *Chapitre II*

|   |    |
|---|----|
| Introduction .....                                  | 44 |
| II.1 Gouvernabilité et observabilité.....           | 44 |
| II.1.1 Gouvernabilité ou contrôlabilité d'état..... | 44 |

|   |    |
|---|----|
| II.1.2 Observabilité.....   | 44 |
| II.2 Méthodes de contrôle actif.....  | 45 |
| II.2.1 Principes fondamentaux de contrôle actif.....                        | 45 |
| II.2.2 contrôle par rétroaction (feedback) .....                            | 45 |
| II.2.2.1 Principe de rétroaction (feedback).....                            | 45 |
| II.2.2.2 Contrôle linéaire quadratique.....                                 | 46 |
| II.2.2.3 contrôle modal.....  | 47 |
| II.2.2.3.a Filtrage modal et construction du vecteur d'état modal.....      | 48 |
| II.2.2.3.b synthèse modale.....   | 49 |
| II.2.2.3.c Gain modaux .....  | 49 |
| II.2.2.4 contrôleurs Proportionnel-Intégrale-Dérivé (PID).....              | 49 |
| II.2.2.4.a Régulateur PID .....   | 50 |
| II.2.2.4.a.1 Principe général.....  | 50 |
| II.2.2.4.a.2 Réglage d'un PID.....  | 51 |
| II.2.2.4.b Régulateur PI.....   | 52 |
| II.2.2.4.b.1 Structure d'un PI.....   |    |
| II.2.3 contrôle par anticipation (feedforward) .....                        | 53 |
| II.2.3.1 Algorithme LMS.....  | 54 |
| II.2.3.2 contrôle actif utilisant l'algorithme LMS à référence filtrée..... | 55 |
| II.2.3.3 Identification du chemin secondaire.....                           | 56 |
| II.2.3.4 Mise en œuvre du contrôle actif.....                               | 56 |
| II.2.3.5 Algorithme LMS récursif.....                                       | 57 |
| II.3 Avantages et désavantages des stratégies de contrôle.....              | 57 |

### *Chapitre III*

|  |    |
|--|----|
| III. Introduction.....   | 60 |
| III.1 Représentation de variable d'état.....                     | 60 |
| III.2 Cas générale d'un système amorti.....                      | 61 |
| III.3 La fréquence naturelle et la forme modale.....             | 62 |
| III.4 Relation d'orthogonalité.....                              | 63 |
| III.5 Cas d'un système présentant un amortissement diagonal..... | 63 |
| III.6 Cas d'un système d'amortissement proportionnel.....        | 64 |
| III.7 Fonction de transfert .....                                | 65 |
| III.8 Les propriétés de fonction de transfert.....               | 66 |

---

|  |    |
|--|----|
| III.9 Modélisation analytique .....            | 66 |
| III.10 Cas de l'actionneur.....                | 67 |
| III.11 Cas du capteur laminé .....             | 71 |
| III.12 Filtrage modale.....                    | 72 |
| III.13 Contrôle de vibration d'une poutre..... | 73 |
| III.14 Modèle d'état initial d'une poutre..... | 74 |
| III.14.a Actionneur.....                       | 75 |
| III.14.b Capteur .....                         | 75 |
| III.14.c La fonction de transfert :.....       | 78 |
| III.14.c.1 Avec l'actionneur.....              | 78 |
| III.14.c.2 Avec capteur.....                   | 77 |
| III.15 modèle par variable d'état.....         | 77 |

## *Chapitre VI*

|   |    |
|---|----|
| VI.1 Introduction.....                      | 80 |
| VI.2 Description du modèle.....             | 80 |
| VI.2.a Modèle de la poutre .....            | 81 |
| IV.3.Application d'une force statique ..... | 84 |
| VI.3.Modélisation avec Ansys.....           | 85 |
| VI.4.Développement du modèle actif.....     | 89 |
| VI.5.1 1er Cas.....                         | 90 |
| VI.5.2 2 <sup>ème</sup> Cas.....            | 94 |
| VI.6 Conclusion .....                       | 97 |

|   |     |
|---|-----|
| <b><i>Conclusion générale</i></b> ..... | 100 |
|---|-----|

### ***Annexes***

|   |     |
|---|-----|
| Annexe I : Création du modèle avec Ansys 11.0.....                              | 103 |
| Annexe II : Les formes modales et les fréquences propres avec Matlab 7.4.0..... | 109 |
| Annexe III : Création du des Matrices de Variable d'état avec Matlab 7.4.0..... | 113 |
| Annexe IV : Création de la fonction de transfert avec Matlab 7.4.0.....         | 114 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| <b><i>Bibliographie</i></b> ..... | 116 |
|-----------------------------------|-----|

---

## Liste des figures

|   |    |
|---|----|
| Figure I.1 : effet piézoélectrique direct et effet inverse.....   | 20 |
| Figure I.2 : Maille élémentaire de type pérovskite de formule générale ABO <sub>3</sub> . A gauche : structure cubique non polarisée (phase para électrique au-dessus de la température de Curie) ; à droite : structure tétragonale polarisée (phase ferroélectrique en-dessous de la température de Curie)..... | 21 |
| Figure I.3 : un ranger des différents transducteurs commerciaux (la pièce de leuro c'est une référence de taille) .....   | 22 |
| Figure I.4 : Dispositif de contrôle actif de vibrations d'un empennage d'avion (a) détails, (b) dispositif général (documents ACX - NASA).....  | 23 |
| Figure I.5 : Dispositif de contrôle actif du bruit à l'intérieur du fuselage. (Document Vibration & Acoustiques Laboratoires, Virginia Tech).....   | 23 |
| Figure I.6: Suspension active d'un vélo tout-terrain (a) vue générale, (b) détails (documents ACX – K2).....  | 24 |
| Figure I.7 : interactions entre les grandeurs physiques .....   | 26 |
| Figure I.8 : Arrangement d'un piézoélectrique transducteur pour d <sub>31</sub> mesurer.....  | 31 |
| Figure I.9 : création d'une tension électrique.....   | 32 |
| Figure I.10 : circuit ouvert d'un transducteur piézoélectrique sous une force a la direction 1...32   |    |
| Figure I.11 : transducteur piézoélectrique subi a une charge électrique.....  | 33 |
| Figure. I.12 : Structure pérovskite de type ABO <sub>3</sub> .....  | 38 |
| Figure. I.13 : Phase cubique (à gauche), quadratique (au centre) et rhomboédrique (à droite) de la structure pérovskite.....  | 38 |
| Figure I.14 : Diagramme de phase du PZT.....  | 39 |
| Figure II.1 : principe de base d'un dispositif de contrôle actif.....   | 45 |
| Figure II.2 : Principe de contrôle modal.....   | 47 |
| Figure II.3 : Construction de vecteur d'état.....   | 47 |
| Figure II.4 : Schéma d'un PID parallèle.....  | 49 |
| Figure II.4.a : Schéma d'un PID parallèle en bloc simulink.....   | 49 |
| Figure II.5 : Réponse d'un procédé stable.....  | 51 |
| Figure II.6 : schéma d'un PI.....   | 52 |
| Figure II.7 : Principe de fonctionnement du contrôle par anticipation.....  | 52 |
| Figure II.8 : contrôle adaptatif par anticipation.....  | 53 |

---

|   |    |
|---|----|
| Figure II.9 : Filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (RIF).....  | 54 |
| Figure II.10 : Principe de l'algorithme LMS.....  | 54 |
| Figure II.11 : Algorithme LMS utilisé en identification de processus.....   | 55 |
| Figure II.12 : Algorithme x-LMS monovoie appliqué au contrôle actif.....  | 56 |
| Figure II.13 : dispositif de contrôle actif utilisant l'algorithme RLMS monovoie .....  | 55 |
| Figure III.1 : diagramme de block d'une équation d'état.....  | 60 |
| Figure.III.2 : profil des déformations dans une poutre piézo-électrique flexion, (a) profil d'Euler-Bernoulli, (b) profil à déformation uniforme dans les couches piézo-électrique..... | 66 |
| Figure III.3 : Poutre instrumentée par un pair de piezo-laminés pseudo-colocalisés.....   | 67 |
| Figure III.4 : Equilibre local d'un segment de poutre.....  | 68 |
| Figure III.5 (a) un film actionneur de piézo-électrique avec une largeur constante $b_p$ . (b) changement de dirivative $b'_p(x)$ on $x_0$ .....  | 69 |
| Figure III.6 : (a) un film de capteur piézo-électrique connecté a un amplificateur de courant, (b) amplificateur de charge.....   | 70 |
| Figure III.7 : filtre modal pour une poutre des déférentes conditions aux limites : (a) poutre encastéré, (b) appuis simple.....  | 72 |
| Figure III.8 : modèle de poutre étudié.....   | 73 |
| Figure III.9 : Moment d'actionneur.....   | 74 |
| Figure VI.1 : poutre encastéré libre.....   | 81 |
| Figures VI.2 : les modes propres de poutre.....   | 82 |
| Figures VI.3 : visualisation de vibrations.....   | 83 |
| Figures VI.4 : vibrations libres de poutre à chaque instant t avec Matlab.....  | 83 |
| Figures VI.5 : vibration libres de poutre a chaque instant t (3D) avec Matlab.....  | 84 |
| Figure IV.6: les différents angles de vue du modèle de poutre avec les patches piézoélectriques (annexe I ANSYS ®) .....  | 86 |
| Figure IV.7: l condition aux limites de modèle (ANSYS®).....  | 86 |
| Figure IV.8: la forme modale N°=1 (ANSYS®).....   | 87 |
| Figure IV.9: la forme modale N°=2 (ANSYS®).....   | 87 |
| Figure IV.10: la forme modale N°=3 (ANSYS®).....  | 88 |
| Figure VI.11 : Modèle de poutre utilisé.....  | 90 |
| Figure IV.12 : Poutre avec un transducteur piézoélectrique fixé au voisinage de l'encastrement....  | 90 |
| Figure IV.13.a : réponse en boucle ouvert (déplacement) avec Ansys.....   | 91 |

|  |    |
|--|----|
| Figure IV.13.b : réponse en boucle ouvert (déplacement) avec Matlab.....                 | 91 |
| Figure VI.13.c : réponse détailler en boucle ouvert (déplacement) avec Matlab.....       | 91 |
| Figure VI.14 : réponse en boucle fermé avec control (déplacement).....                   | 91 |
| Figure VI.15: tension de control.....  | 92 |
| Figure VI.16 : tension de sortie sans control.....                                       | 92 |
| Figure VI.17 : la tension de sortie avec control.....                                    | 93 |
| Figure VI.18 : Déplacement avec et sans contrôle (1er Cas).....                          | 93 |
| Figure IV.19 : Poutre avec un transducteur piézoélectrique fixé au milieu du poutre..... | 94 |
| Figure VI.20 : réponse en boucle fermé avec control (déplacement).....                   | 95 |
| Figure VI.15: tension de control.....  | 95 |
| Figure VI.16 : tension de sortie sans control.....                                       | 95 |
| Figure VI.17 : la tension de sortie avec control.....                                    | 96 |
| Figure VI.17 : Déplacement avec et sans contrôle (2 <sup>ème</sup> Cas).....             | 96 |

---

## *Liste des Tables*

|  |    |
|--|----|
| Table I.1 : Application des matériaux piézoélectrique (D'après UCHINO [5]).....          | 25 |
| Table I.2 : Composantes des tenseurs des déformations et des contraintes [4].....        | 28 |
| Table I.3 : unités caractéristiques des matériaux piézoélectriques.....                  | 34 |
| Table I.4 : Différents modes de vibration associée à la forme géométrique.....           | 35 |
| Table I.4 : Caractéristiques principales de quelques matériaux piézoélectriques.....     | 41 |
| Table II.1 : comparaison des stratégies de contrôle.....                                 | 57 |
| Table VI.1 : propriété de la poutre.....   | 79 |
| Table VI.2 : propriété de plaquette piézoélectrique.....                                 | 79 |
| Table VI.3 : Comparaison des fréquences propres obtenue par Matlab et celle d'Ansys..... | 88 |

---

## *Nomenclatures*

S : Déformation

T : Contrainte mécanique

s : Compliance, souplesse

C : Rigidité

$\Phi$  : Potentiel électrique

E : Champ électrique

Q : Charge électrique

D : Induction ou (déplacement) électrique

$\varepsilon_0$  : Permittivité électrique

$\beta$  : Imperméabilité électrique

d : Constante reliant la contrainte et induction D à E constante

e : Constante reliant la déformation S et l'induction D à E constante

g : Constante reliant la contrainte T et le champ E à D constante

h : Constante reliant la déformation S et la champ E à D constante

V : La tension électrique

F : la force mécanique

k : Coefficient de couplage

x(t) : Vecteur d'état

u(t) : Vecteur de contrôle

y(t) : Vecteur de sortie

A : Matrice d'état

B : Matrice d'entrée

C : Matrice de sortie

G : Matrice de gouvernabilité

O : Matrice de contrôlabilité

H : Matrice de gain (méthode feedback classique)

J : Fonction de performance

Q et R : Les matrices de pondération

P : la solution de matrice de Riccati

$k_p, k_i$  et  $k_d$  : Les gains de contrôleur PID

G : matrice de gain (Lqr)

e (t) : Erreur de contrôle

---

$q(t)$  : Vecteur de contrôle généralisé

$M$  : Matrice des masses

$C$  : Matrice d'amortissement

$K$  : Matrice de rigidité

$X_i$  : Vecteur de forme modale

$\rho_p$  : La masse volumique de la poutre

$A_p$  : La section de la poutre

$E_p$  : Module de Young de la poutre

$w_{in}$  : Pulsation propre de la poutre

$\xi_i$  : Coefficient d'amortissement modal

$x_a$  : Position d'actionneur

$x_s$  : Position de capteur

$h_p$  : Epaisseur de la poutre

$h$  : Epaisseur de la plaque piézoélectrique

$b_p$  : La largeur de la poutre

$b_s$  : La largeur de la plaque piézoélectrique

$I$  : Moment d'inertie

$l_p$  : La longueur de la poutre

---



## *Introduction Générale*

La plupart des conceptions mécaniques sont soumises à différents niveaux de vibration provenant de sources variées. De nos jours, presque toute nouvelle conception mécanique est sujette à une étude détaillée de sa susceptibilité à la vibration. Ces vibrations sont généralement indésirables. Le concepteur doit trouver la façon ou le moyen adéquat afin d'atténuer ou rendre quasi statique l'effet de ces vibrations. Les méthodes conventionnelles d'atténuation de vibration consistant à amortir la perturbation par des techniques passives s'avèrent peu efficaces en basses fréquences. Dans ce contexte, on trouve les méthodes de contrôle dites active, le principe de ces techniques est de générer un champ interférant avec le champ de la perturbation. Le champ superposé doit donc être identique à celui de la perturbation en termes d'amplitude mais de phase opposée pour chacune des fréquences concernées. Et pour le contrôle actif, on a besoins des capteurs et des actionneurs couplés à un calculateur et capable de réagir aux stimuli extérieur. Parmi les nombreux types de matériaux que l'on peut trouver dans la nature, les matériaux piézoélectriques présentent des caractéristiques remarquables. Grace à leur aptitude de conversion électromécanique et à leur faible encombrement, l'utilisation de transducteurs piézoélectriques ouvre la porte à un vaste choix d'applications en contrôle active de vibration. Nous nous intéressons au cours de cette étude à la modélisation et à la simulation du contrôle active de vibration par matériaux piézoélectriques avec les logiciels Matlab et Ansys. Le travail est organisé en 4 chapitres.

Le premier chapitre définit les matériaux piézoélectriques qui montrent d'indéniables qualités en termes d'encombrement et de masse, et s'attache à rassembler les principes fondamentaux nécessaires à la compréhension des phénomènes mises en jeu, ainsi de décrire les lois comportementales de ces matériaux et les différentes applications sont présentés.

Le deuxième chapitre introduit les méthodes principales du contrôle actif, nous définissons au cours de cette étude les différentes stratégies utilisées. En particulier, nous examinons le contrôle par anticipation (feedforward control) et le contrôle modal par rétroaction (feedback control).

Le troisième chapitre est consacré à l'introduction des outils modernes de modélisations des structures contrôlées par des matériaux piézoélectriques. En particulier nous examinons l'exemple d'une poutre encastree.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de la simulation d'une étude détaillée du contrôle actif de vibration d'une poutre encastree utilisant des capteurs et des actionneurs piézoélectriques avec un contrôleur de type LQR et utilisant les logiciels Matlab 7.0 et Ansys 11.0.



## I.1 Introduction

La piézoélectricité a depuis lors trouvé un large champ d'applications dans le domaine de l'ingénierie électromécanique : les matériaux piézoélectriques sont notamment utilisés comme transducteurs électromécaniques tels que les sondes échographiques, les capteurs, les actionneurs, les micros positionneurs, ... récemment, les matériaux piézoélectriques ont également été appliqués aux concepts des structures actives et adaptatives.

Ce chapitre est consacré à éclairer le phénomène piézoélectriques et décrit les lois comportementales de ces matériaux

## I.2 La piézoélectricité

Etymologiquement, le préfixe « piezo » provient du grec et signifie presser ou serrer. La piézoélectricité est la faculté de certains matériaux à se charger électriquement lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique, c'est l'effet piézoélectrique direct. Ainsi l'application d'un champ électrique à ces matériaux donne lieu à une déformation, c'est l'effet piézoélectrique inverse.

L'effet piézoélectrique ne peut s'observer que dans certains corps non-conducteurs, possédant une anisotropie cristalline, par séparation du barycentre des charges positives et négatives, sous l'effet de la déformation.

### I.2.a Effet piézoélectrique direct

L'application d'une force mécanique sur un matériau piézoélectrique crée une polarisation macroscopique. Cette polarisation est responsable du caractère piézoélectricité et poly électricité. (Capteur).

### I.2.b Effet piézoélectrique inverse

L'électrostriction est la déformation d'un matériau lors de l'application d'un champ électrique. Elle se caractérise par une déformation proportionnelle au carré du champ appliqué. (Actionneur).

### I.2.c L'origine de l'effet piézoélectrique

L'effet piézoélectrique est dû à la nature de la structure cristalline. Ainsi dans les cristaux non Centro-symétriques, l'application d'une contrainte mécanique déplace les barycentres des charges positives et négatives faisant apparaître un moment dipolaire. Figure I.2

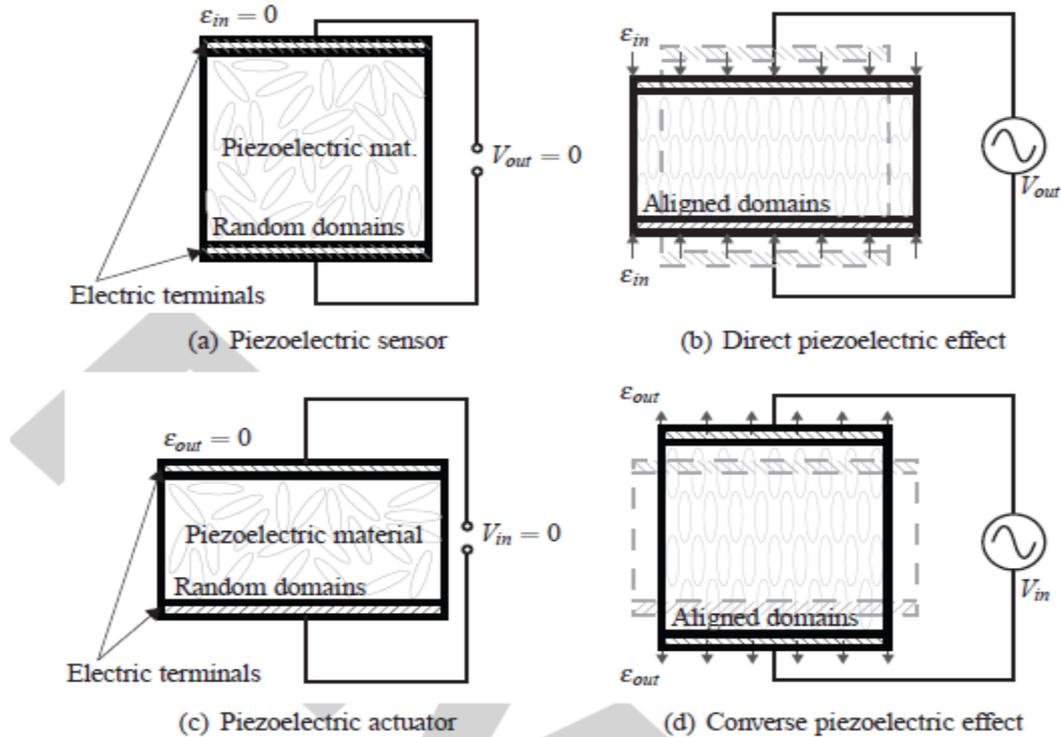


Figure I.1 : Effet piézoélectrique direct et effet inverse [11]

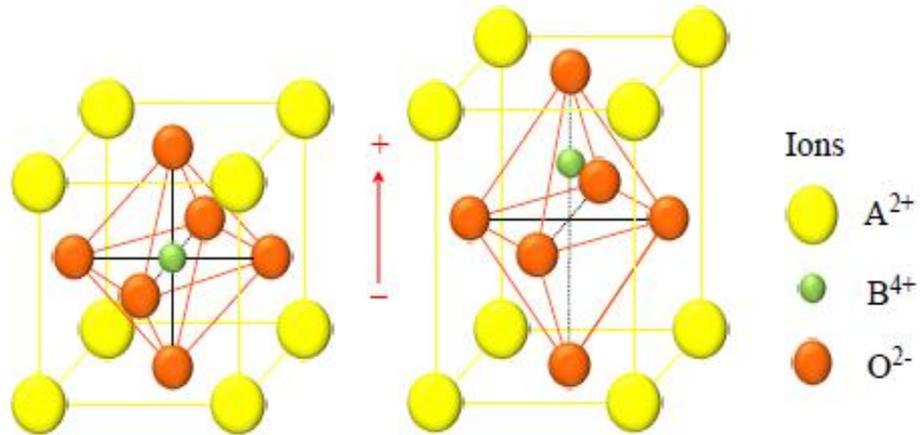


Figure I.2 : Maille élémentaire de type pérovskite de formule générale  $ABO_3$ . A gauche : structure cubique non polarisée (phase para électrique au-dessus de la température de Curie); à droite : structure tétragonale polarisée (phase ferroélectrique en-dessous de la température de Curie)

### I.3 Mécanismes piézoélectrique

Dans de tels cristaux au repos, les charges électriques sont séparées, mais symétriquement distribuées. Le cristal reste donc électriquement neutre. Quand une pression agit, l'asymétrie des charges génère une tension. Par exemple, un quartz de  $1 \text{ cm}^3$  soumis à une force de  $2 \text{ KN}$  peut produire environ  $12\,500 \text{ V}$ . On a là donc un capteur de pression.

L'effet piézoélectrique inverse fait que, lorsqu'on applique un champ électrique, une force importante est créée (de l'ordre de la dizaine de MN), causant un déplacement de quelques nanomètres.

La première application fut le sonar Paul Langevin. D'autres applications suivirent (montre à quartz, capteurs, actuateurs).

## **I.4 Application**

Les champs d'application sont assez nombreux :

### **I.4.1 Sources de haute tension**

Les applications les plus courantes sont l'allume-gaz et le briquet " électronique ". L'effet piézoélectrique direct du quartz permet de générer des tensions, de l'ordre du kilovolt, supérieures à la tension de claquage de l'air 30 kV/cm. Sur des électrodes proches de quelques millimètres, une étincelle de décharge se forme qui est mise à profit pour allumer le gaz du briquet ou de la gazinière.

Un transformateur piézoélectrique est un multiplicateur de tension alternative. Contrairement au transformateur classique qui utilise un couplage magnétique, le couplage mis à profit est acoustique. Par effet piézoélectrique inverse, une tension d'excitation permet de générer une contrainte alternative dans une barre d'un matériau fortement piézoélectrique (une céramique PZT par exemple). Cette tension est appliquée à l'aide d'électrodes situées sur une des deux extrémités de la barre. Cette contrainte permet la mise en vibration de la totalité de la barre, la fréquence est choisie pour correspondre à une fréquence de résonance. Par effet piézoélectrique direct, une tension plus forte est récupérée par des électrodes situées sur la deuxième extrémité de la barre. Cette tension peut être 1000 fois plus élevée.

### **I.4.2 Capteurs**

La particularité de l'effet piézoélectrique est la génération de fortes contraintes pour des petits déplacements. Il est donc un candidat idéal pour les applications basées sur la détection de pression :

- capteurs de pression, notamment pour l'automobile (pression des pneus) et l'aéronautique (pression dans les tuyères) ;
- capteurs sonores (microphones et en particulier microphones de contact) ;
- microbalance piézoélectrique ;
- batterie électronique (musique);
- détecteurs de mouvements du corps (jambes, respiration,...) dans les laboratoires de sommeil.

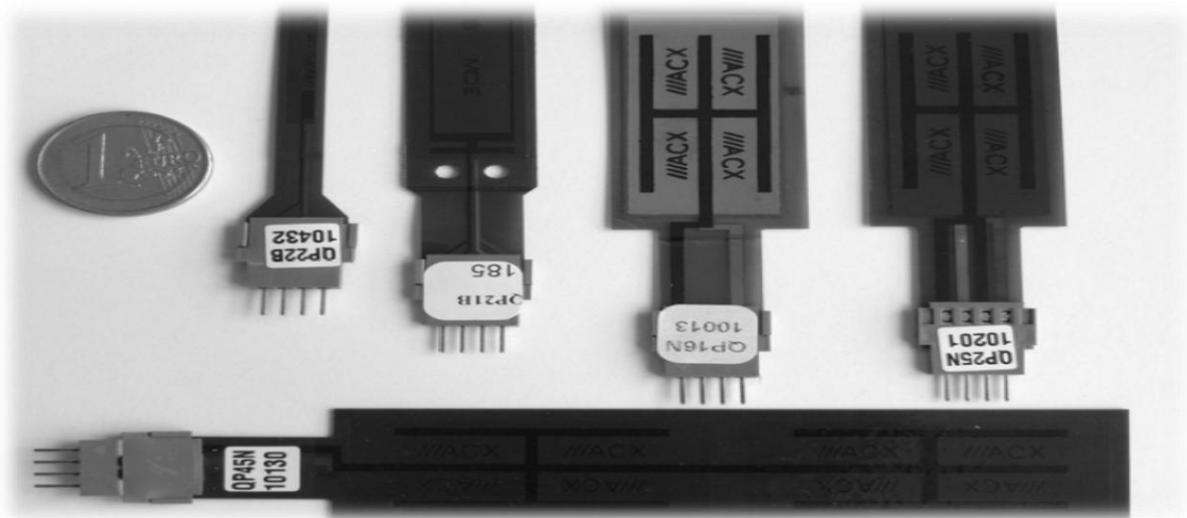
L'effet piézoélectrique peut aussi être mis à profit dans des applications plus évoluées tels que les capteurs inertiels (accéléromètre à lame vibrante, gyromètre de Coriolis) qui peuvent être utilisés

dans une centrale à inertie.

### I.4.3 Actionneurs

Les déplacements très faibles produits par les cristaux piézoélectriques en font des micromanipulateurs idéaux mis à profit dans différentes applications :

- microscopie à balayage : le microscope à force atomique et le microscope à effet tunnel emploient la piézoélectricité pour piloter le balayage de la surface sondée ;
- application opto-acoustique : par micro-positionnement piézoélectrique de miroir, l'ajustement de la longueur de la cavité de laser peut être pilotée pour optimiser la longueur d'onde du faisceau ;
- moteurs piézoélectriques : utilisés dans les systèmes autofocus d'appareils photographiques, dans les mécanismes de vitre électrique de voiture, et en général dans les applications où la taille réduite de ces moteurs répond à des contraintes volumiques ;
- haut-parleurs ;
- optique adaptative en astronomie : des actionneurs piézoélectriques sont utilisés pour déformer un miroir afin de corriger les effets de la turbulence atmosphérique.



**Figure I.3 :** Différents transducteurs commerciaux (la pièce de 1 euro c'est une référence de taille)  
[11]

### I.4.4 Fréquence d'horloge

Une vibration piézoélectrique stable (peu de dérive avec les changements de température et au cours du temps), permet de réaliser des références de temps exploitables électroniquement. Les horloges à quartz utilisent la résonance d'un diapason en quartz pour générer les impulsions régulières de l'horloge.

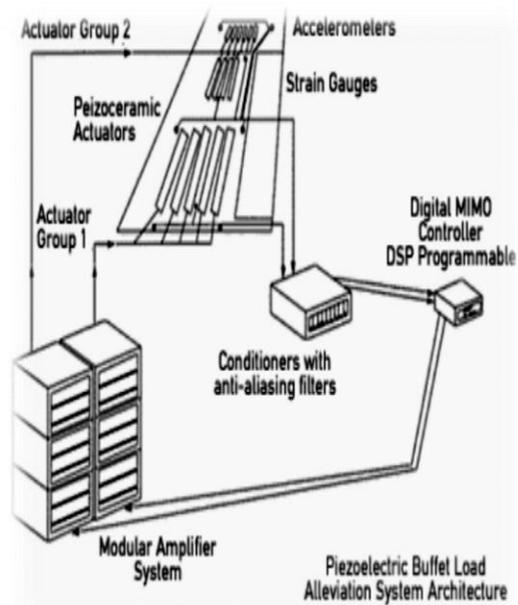
Dans les émetteurs et récepteurs radio ou dans les ordinateurs, un quartz règle la fréquence

horloge avec un multiplicateur de fréquence pour atteindre les mégahertz ou les gigahertz. [25]

### I.5 Contrôl actif



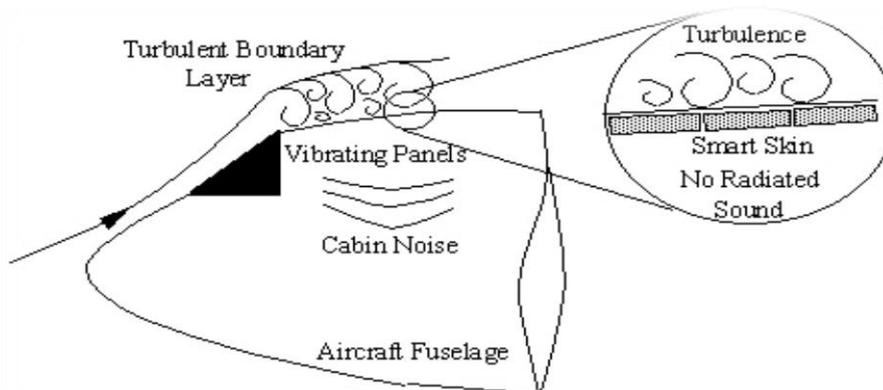
(a)



(b)

**Figure 1.4 :** Dispositif de contrôle actif de vibrations d'un empennage d'avion (a) détails, (b) dispositif général (documents ACX - NASA) [5]

Les figures I.4 (a) et (b) présentent les travaux qui sont menés sur le contrôle actif des premiers modes de flexion et de torsion d'un empennage de F18, en utilisant des transducteurs piézo-électriques comme capteurs et comme actionneurs.

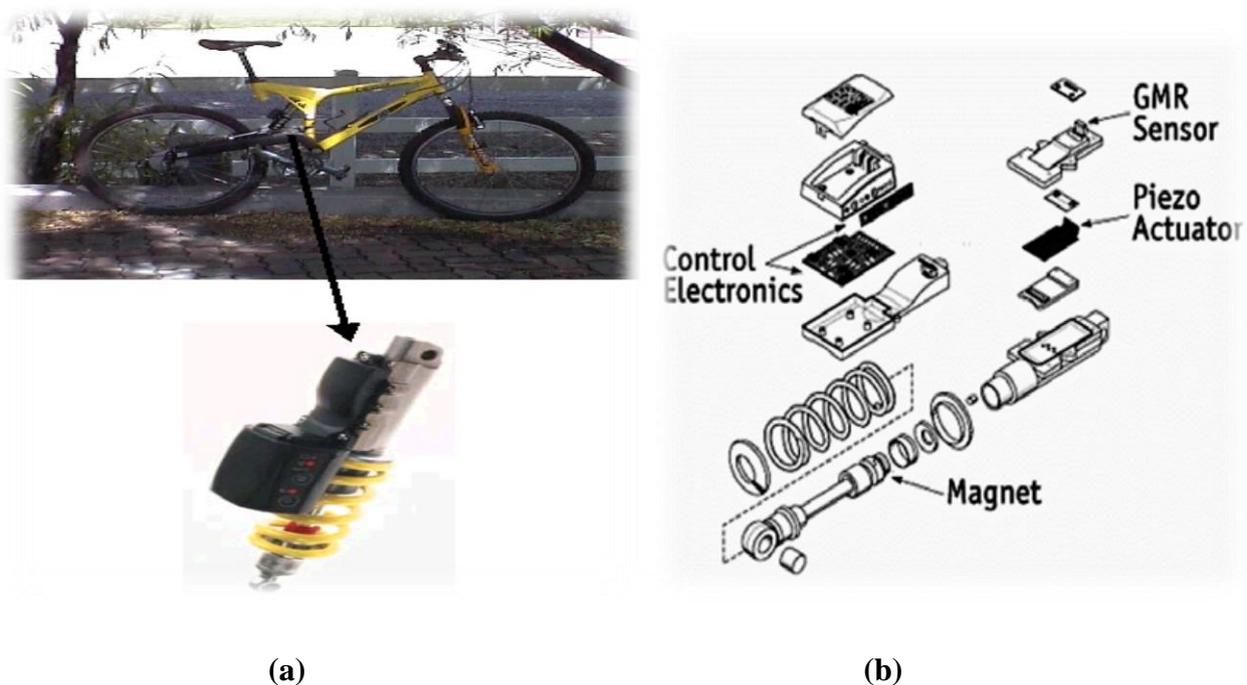


**Figure 1.5 :** Dispositif de contrôle actif du bruit à l'intérieur du fuselage. (Document Vibration & Acoustiques Laboratoires, Virginia Tech)[5]

Une autre application est la suppression du bruit à l'intérieur du fuselage d'un avion. Dans ce cas, les sources de bruit proviennent des turbulences engendrées par l'écoulement d'air autour de l'avion ainsi que de la transmission directe, par chemin mécanique, des vibrations induites par les moteurs. Certains modes du fuselage engendrent un bruit significatif en basses fréquences à

l'intérieur de l'avion. Un dispositif à l'étude (voir figure 1.5) utilise des microphones comme capteurs et des couches piézoélectriques couplées au fuselage comme actionneurs structuraux.

Les vélos tout-terrains sont conçus pour supporter une multitude de chocs et de vibrations en traversant différents types de terrains accidentés. Avec les suspensions classiques, l'utilisateur doit lui-même ajuster la dureté de l'amortissement en fonction du type de terrain qu'il va principalement rencontrer : une suspension souple pour un terrain fort accidenté et pour une vitesse lente afin de dissiper un maximum d'énergie, une suspension ferme en montée ou à vitesse rapide afin d'éviter de dissiper trop d'énergie cinétique. L'usage d'une suspension semi active permet de s'affranchir des limites imposées par le pré réglage de la suspension. Les figures 1.6 présentent une suspension active, commercialement disponible, qui, en fonction du type de terrain rencontré, règle automatiquement l'ouverture du passage de fluide dissipatif au moyen d'une valve commandée par un actuateur piézoélectrique. [25]



**Figure 1.6 :** Suspension active d'un vélo tout-terrain (a) vue générale, (b) détails (Documents ACX – K2). [5]

Le tableau 1.1 résume les différents domaines de développements des actuateurs piézoélectriques aux Etats-Unis, au Japon et en Europe. Il est intéressant de noter que la taille des structures piézoélectriques tend à croître aux Etats-Unis et, inversement, à se miniaturiser au Japon.

|             |            |       |        |
|-------------|------------|-------|--------|
| application | Etats-Unis | Japon | Europe |
|-------------|------------|-------|--------|

|                        |  |   |  |
|------------------------|--|---|--|
| Type d'application     | suppression des vibrations                   | Mini-moteur<br>Positionneurs  | Mini-moteur<br>Positionneurs<br><br>suppression des vibrations |
| Domaine d'application  | Structures spéciales<br>Véhicules militaires | Equipement de bureau<br>Vidéo-photo<br>Outillage de précision<br><br>Automobile | Aéronautique<br><br>Automobile                                 |
| Taille des actionneurs | ↑ (30cm)                                     | ↓ (1cm)   | Intermédiaire (10cm)   |

**Table I.1 :** Application des matériaux piézoélectrique (D'après UCHINO [5])

### I.5.a les équations de base de la piézoélectrique

Les propriétés thermiques, électriques et mécaniques des cristaux et autres céramique Piézo-électriques sont régies par un ensemble de grandeurs physiques telles que la température, l'entropie, le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations, le champ électrique et l'induction électrique. Les principales relations existantes entre ces différentes quantités permettent de mettre en exergue trois types de phénomène physique : la piézoélectricité, la pyroélectricité et la thermo élasticité. La figure I.7 résume succinctement les interactions entre les quantités susnommées. Les sommets du triangle intérieur symbolisent les variables extensives et ceux du triangle extérieur représentent les variables intensives. Cependant, en pratique, les couplages thermomécaniques et thermoélectriques sont faibles dans les matériaux communément employées. En toute rigueur, il faudrait tenir compte de l'effet de la température sur les propriétés piézo-électriques de ces derniers. D'un point de vue thermodynamique, cela nécessiterait d'apporter une précision quant au caractère adiabatique ou isotherme de la transformation subie par le matériau. Cette distinction est rarement prise en considération. Par conséquent dans la suite de l'étude, le choix de considérer les coefficients intervenant dans les équations constitutives de la piézo-électricité comme des constantes isothermes est retenu. [4]

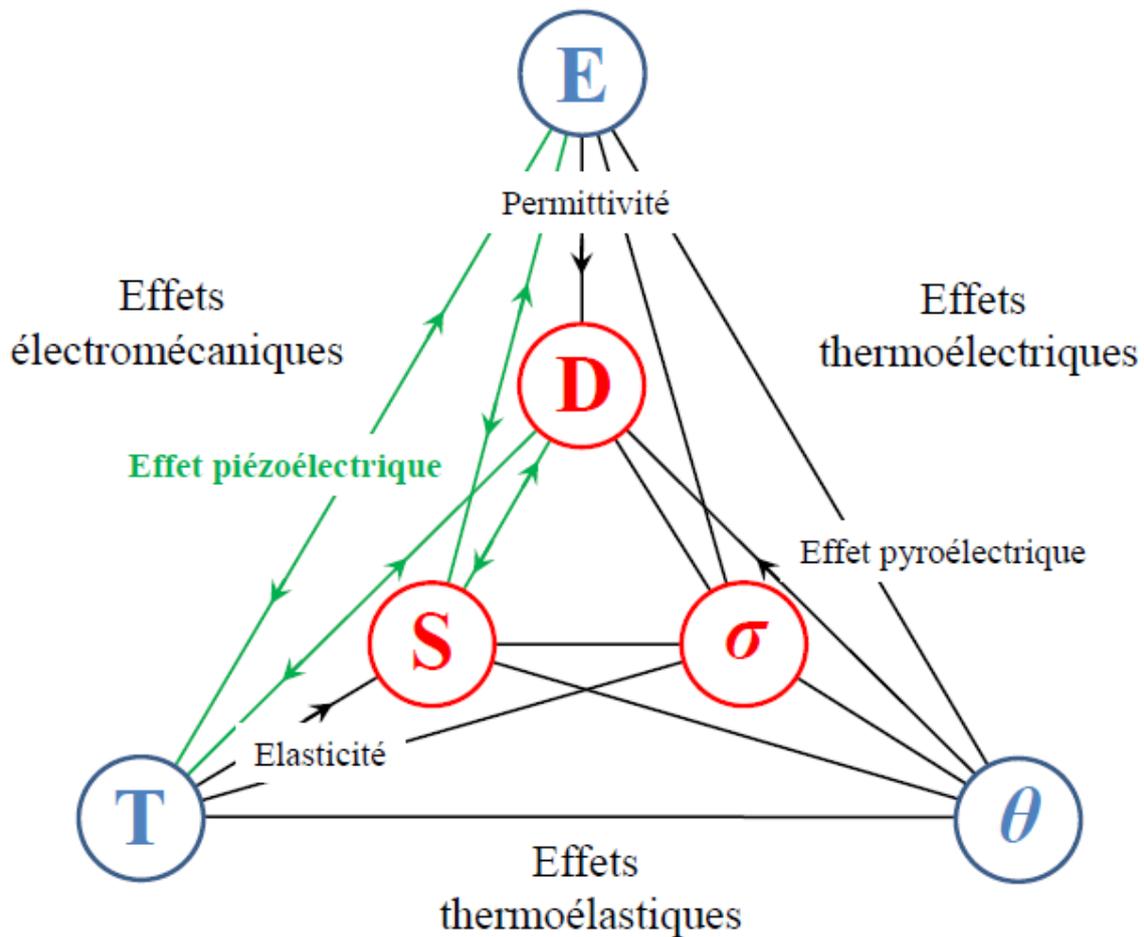


Figure I.7 : Interactions entre les grandeurs physiques

Afin de décrire localement le comportement d'un compose piézo-électrique, plusieurs couples de variables indépendantes sont envisageables. En effet, si les tenseurs des contraintes T et des déformations S peuvent indifféremment être choisis pour remplir le rôle de variable indépendante mécanique, opter pour le champ électrique E ou l'induction électrique D en tant que variable indépendante électrique est tout aussi arbitraire. Par conséquent, le paramétrage repose a priori sur quatre couples de variables indépendantes : (S;D), (T;E), (T;D) ou (S;E). Afin d'établir les équations constitutives de la piézo-électricité, convenons par exemple de travailler avec le couple de variables extensives (S;D). La fonction énergétique appropriée est alors l'énergie libre volumique F, forme quadratique linéaire du tenseur des déformations et du vecteur déplacement électrique, qui s'exprime comme suit :

$$F(S, D) = \frac{1}{2}\{S\}^T[C^D]\{S\} - \{S\}^T[h]^T\{D\} + \frac{1}{2}\{D\}^T[\beta^S]\{S\} \quad \text{I.1}$$

Ou  $[C^D]$ ,  $[h]$  et  $[\beta^S]$  désignent respectivement la matrice des rigidités à déplacement électrique constant, la matrice des constantes de couplage piézoélectrique et la matrice des impermittivités à déformation fixée. A noter que toutes les constantes intervenant dans la définition de ces matrices sont des quantités isothermes. En outre, l'expression de cette énergie libre volumique présente, en plus des contributions d'origine purement élastique et électrique, un terme mêlant le tenseur des déformations et le vecteur déplacement électrique synonyme de couplage électro élastique et

représentatif de la part d'énergie convertie. Cette énergie libre volumique peut se réécrire :

$$F(S, D) = \frac{1}{2} C_{\lambda\mu}^D S_\lambda S_\mu - h_{i\lambda} S_\lambda D_i + \frac{1}{2} \beta_{ij}^S D_i D_j \text{ pour } \begin{cases} (\lambda, \mu) \in \{1, \dots, 6\}^2 \\ (i, j) \in \{1, \dots, 3\}^2 \end{cases} \quad 1.2. a$$

La différentielle exacte de F à température constante s'écrit :

$$dF = \{T\}^T \{dS\} + \{E\}^T \{dD\} = T_\lambda dS_\lambda + E_i dD_i \quad 1.2. b$$

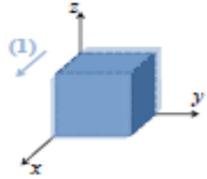
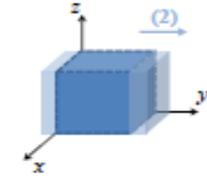
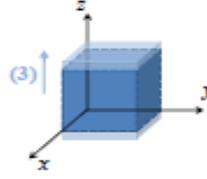
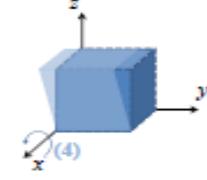
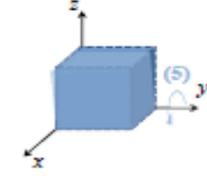
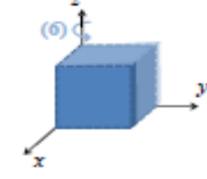
Par conséquent, les équations de la piézoélectricité s'obtiennent par simple dérivation en termes de variables (S;D) de l'énergie libre volumique donnée par la relation (1.2) de sorte que :

$$\begin{cases} T_\lambda = \left( \frac{\partial F}{\partial S_\lambda} \right)_{\theta, D} = C_{\lambda\mu}^D S_\mu - h_{i\mu} D_i \\ E_i = \left( \frac{\partial F}{\partial S_\lambda} \right)_{\theta, S} = h_{i\mu} S_\lambda + \beta_{ij}^S D_j \end{cases} \quad 1.3$$

Ces dernières peuvent se réécrire sous la forme tensorielle suivante :

$$\begin{cases} \{T\} = [C^D]\{S\} - [h]^T\{D\} \\ \{E\} = -[h]^T\{S\} + [\beta^S]\{D\} \end{cases} \quad 1.4$$

Les relations constitutives de la piézoélectricité sont fonctions du couple de variables indépendantes, choix relatif à la modélisation de l'application souhaitée (capteur ou actionneur). Le tableau I.3 indique les notations adoptées.

| Composantes tensorielles ( $S_{ij}, T_{ij}$ )<br>( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) | Notation de Voigt ( $S_\lambda, T_\lambda$ )<br>$\lambda \in \{1, \dots, 6\}$ | Dénomination usuelle de la transformation | Déformation de la géométrie de référence  |
|---|---|---|---|
| $(S_{11}, T_{11})$  | $(S_1, T_1)$  | Tension normale d'axe ( $Ox$ )            |    |
| $(S_{22}, T_{22})$  | $(S_2, T_2)$  | Tension normale d'axe ( $Oy$ )            |    |
| $(S_{33}, T_{33})$  | $(S_3, T_3)$  | Tension normale d'axe ( $Oz$ )            |    |
| $(2S_{23}, T_{23})$   | $(S_4, T_4)$  | Cisaillement autour de l'axe ( $Ox$ )     |   |
| $(2S_{13}, T_{13})$   | $(S_5, T_5)$  | Cisaillement autour de l'axe ( $Oy$ )     |  |
| $(2S_{12}, T_{12})$   | $(S_6, T_6)$  | Cisaillement autour de l'axe ( $Oz$ )     |  |

**Table I.2 :** Composantes des tenseurs des déformations et des contraintes [4]

Les équations suivantes pour chaque couple de variables issues de la différentielle de la potentielle thermodynamique associent : Potentiel thermodynamique

$$F = \frac{1}{2} \{S\}^T [C^D] \{S\} - \{S\}^T [h]^T \{D\} + \frac{1}{2} \{D\}^T [\beta^S] \{S\} \tag{I.5}$$

Différentielle exacte

$$dF = \{T\}^T \{dS\} + \{E\}^T \{dD\} = T_\lambda dS_\lambda + E_i dD_i \tag{I.6}$$

Equations piézoélectriques associées

$$T_{ij} = C_{ijkl}^d \cdot S_{kl} + h_{kij}^t \cdot D_k \tag{I.7.a}$$

$$E_i = \beta_{ikl}^S \cdot D_k - hS_{kl} \quad I.7.b$$

Potentiel thermodynamique

$$G = \frac{1}{2}\{T\}^T [s^E] \{T\} - \{T\}^T [d]^T \{E\} + \frac{1}{2}\{E\}^T [\varepsilon^T] \{E\} \quad I.8$$

Différentielle exacte

$$dG = -\{S\}^T \{dT\} + \{D\}^T \{dE\} = S_\lambda dT + D_i dE_i \quad I.9$$

Equations piézoélectriques associées

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{il}^t E_l \quad I.10.a$$

$$D_k = d_{kj} T_j + \varepsilon_{il}^T E_l \quad I.10.b$$

Potentiel thermodynamique

$$G_1 = -\frac{1}{2}\{T\}^T [s^D] \{T\} - \{T\}^T [g]^T \{D\} + \frac{1}{2}\{D\}^T [\beta^T] \{D\} \quad I.11$$

Différentielle exacte

$$dG_1 = -\{S\}^T \{dT\} + \{E\}^T \{dD\} = -S_\lambda dT_\lambda + E_i dD_i \quad I.12$$

Equations piézoélectriques associées

$$S_i = s_{ij}^D T_j + g^t D \quad I.12.a$$

$$E_i = \beta^T \cdot D_k - gT_{kl} \quad I.12.b$$

Potentiel thermodynamique

$$G_2 = -\frac{1}{2}\{S\}^T [C^E] \{S\} - \{S\}^T [e]^T \{E\} + \frac{1}{2}\{E\}^T [\varepsilon^T] \{E\} \quad I.13$$

Différentielle exacte

$$dG_2 = -\{T\}^T \{dS\} + \{D\}^T \{dE\} = -T_\lambda dS_\lambda + D_i dE_i \quad I.14$$

Equations piézoélectriques associées

$$T_{ij} = C_{ijkl}^E \cdot \varepsilon_{kl} - e_{kij} \cdot E_k \quad I.15.a$$

$$D_i = e_{ikl} \cdot \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k \quad I.15.b$$

### I.5.b Relations fondamentales de piézoélectrique

Les équations de définition, appelée aussi constitutives [3], [4] de la piézoélectricité ont été données, nous allons donner ici les écritures détaillées des différentes constantes et des relations existant entre elles. Cela nous conduira naturellement à la définition du coefficient de couplage.

Sous formes matricielle, les équations de définition de la piézoélectrique sont données par les deux relations suivantes :

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{il}^t E_l \quad I.16$$

$$D_k = d_{kj} T_j + \varepsilon_{il}^T E_l \quad I.17$$

S et D sont respectivement la déformation et l'induction résultant de l'application de la

contrainte T et du champ électrique E. les indices i et j varient de 1 à 6 alors que les indices l et k varient de 1 à 3. De plus,  $d_{il}^t$  signifie qu'il faut considérer la matrice transposée de la matrice des constantes piézoélectriques d.

Les matrices des permittivités  $\varepsilon_{ii}^T$  et des constantes élastique  $S_{ij}^E$ , sont carrées et symétriques. Elles possèdent, respectivement, 2 et 5 termes indépendants pour un matériau céramique piézoélectrique. Ces deux matrices ont la forme suivante :

$$\varepsilon^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \quad I.18$$

Et

$$S^E = \begin{bmatrix} S_{11}^E & S_{12}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ S_{21}^E & S_{22}^E & S_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ S_{23}^E & S_{32}^E & S_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^E \end{bmatrix} \quad I.19$$

Avec

$$S_{66}^E = 2(S_{11}^E + S_{12}^E).$$

Les deux matrices précédentes sont, respectivement, de dimensions 3×3 et 6×6. Les matrices des permittivités à induction constante et les matrices des imperméabilités à contrainte ou déformation constante ont le même nombre de termes que la matrice des permittivités à champ constant (I.18). De même, les souplesses à déformation constante et les rigidités à champ constant ou à induction constante ont la même structure et le même nombre de terme que la matrice des souplesses à champ constant (I.19). Si on appelle I la matrice unité, entre ces diverses matrices il existe les relations suivantes :

$$C^E S^E = S^E C^E = I \quad I.20$$

$$C^D S^D = S^D C^D = I \quad I.21$$

De plus, les relations de passage des constantes élastiques et des souplesses à champ et à induction constante déduites des équations de définition sont :

$$C^D = C^E + e^t \beta^S e \quad I.22$$

$$S^D = S^E - d^t \beta^T d \quad I.23$$

Les imperméabilités sont liées aux permittivités par les relations

$$\varepsilon^T \beta^T = I \quad I.24$$

$$\varepsilon^S \beta^S = I \quad I.25$$

Avec

$$\varepsilon^S = \varepsilon^T - d e^E d^t \quad I.26$$

Remarquons que les matrices des permittivités étant généralement diagonales, les matrices des

impermeabilités sont aussi diagonales et un terme d'une matrice est l'inverse du terme correspondant de l'autre matrice.

La matrice piézoélectrique  $d$ , et les matrices qui provient de celle-ci ( $e$ ,  $g$  et  $h$ ), sont de dimensions  $3 \times 6$  et possèdent seulement 3 termes indépendants soit :

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I.27}$$

Une matrice carrée symétrique étant identique à sa transposée et le transposé d'un produit de matrice étant égal au produit des transposées pris dans l'ordre inverse, les différentes constantes piézoélectriques  $d$ ,  $e$ ,  $g$  et  $h$  se déduisent des constantes élastiques et des permittivités par les relations suivantes :

$$e = dC^E \quad et \quad e^t = C^E d^t \quad \text{I.28}$$

$$g = \beta^T d \quad et \quad g^t = d^t \beta^T \quad \text{I.29}$$

$$h = \beta^S e \quad et \quad h^t = \beta^S d^t \quad \text{I.30}$$

$$d = eS^E \quad et \quad d^t = S^E e^t \quad \text{I.31}$$

Dans les relations précédentes tous les termes sont des matrices

### I.5.c Définition des constantes piézoélectriques

La constante de charge  $d$  traduit la proportionnalité entre la contrainte et l'induction à champ électrique.

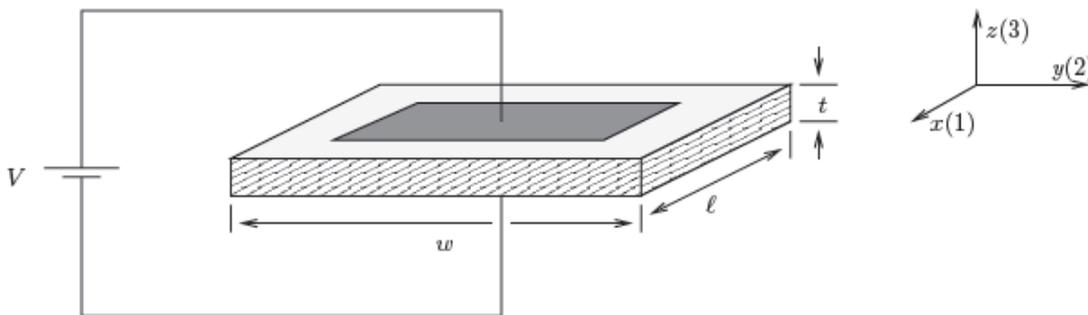


Figure I.8 : Arrangement d'un piézoélectrique transducteur pour mesurer  $d_{31}$

Lorsque toutes les contraintes extérieures sont constantes, dans la figure I.8 un voltage  $V$  est appliqué sur le transducteur piézoélectrique dans la direction 3. Ce voltage génère un champ électrique.

$$E_3 = \frac{V}{t} \quad \text{I.32}$$

Qui déforme le transducteur. On pratique

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{I.33}$$

Et

$$\Delta l = \frac{d_{31}Vl}{t} \tag{I.34}$$

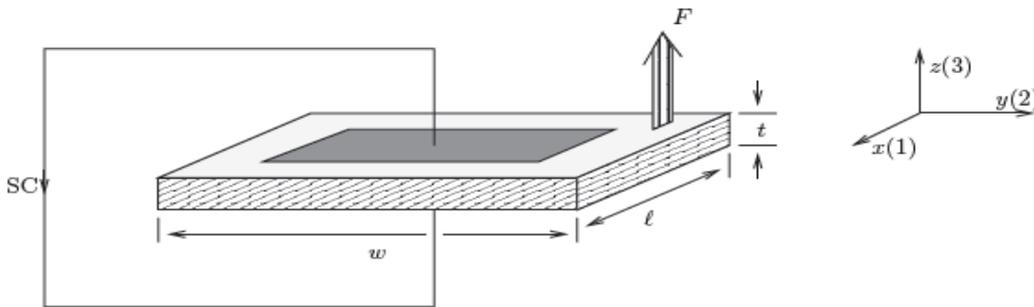
La constante piézoélectrique  $d_{31}$  est négative. Cela est due à, l'application de tension électrique positive générera une déformation positive dans la direction 3.

Une autre interprétation de  $d_{ij}$  est le rapport de charge de court-circuit par unité de surface suivante entre l'électrode connectée perpendiculaire à la direction j est la déformation appliquée dans la direction i. Comme nous montre la figure I.9, lorsque la force F est appliquée sur le transducteur, dans la direction 3, elle génère la contrainte suivante :

$$T_3 = \frac{F}{lw} \tag{I.35}$$

On obtient

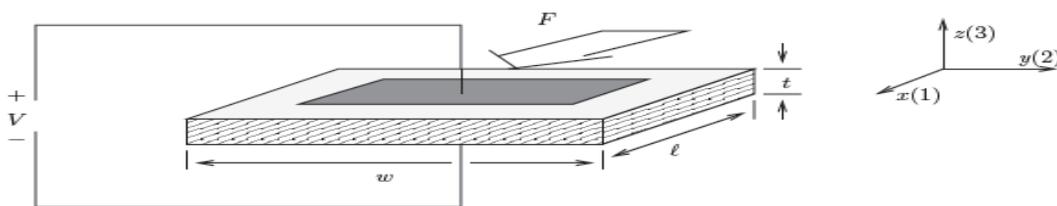
$$q = d_{33}F \tag{I.36}$$



**Figure I.9** : Création d'une tension électrique

La constante de tension g traduit la proportionnalité entre la contrainte mécanique et le champ électrique à déplacement électrique nul ou constant. Dans la figure I.10 la force F appliquée, génère un voltage :

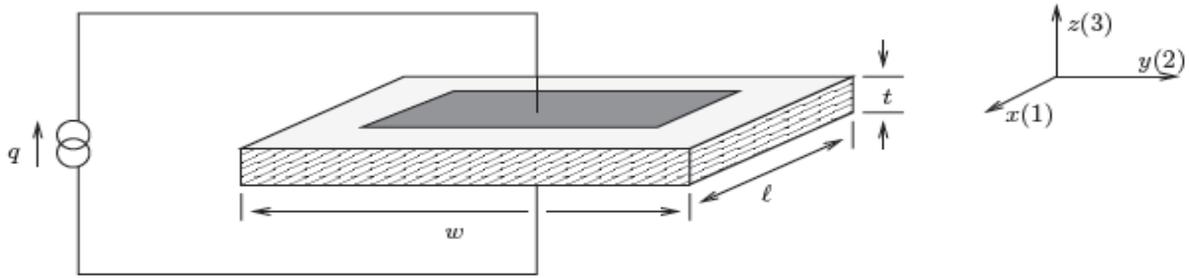
$$V = \frac{g_{31}F}{w} \tag{I.37}$$



**Figure I.10** : Circuit ouvert d'un transducteur piézoélectrique sous une force à la direction 1

Une autre interprétation de  $g_{31}$  est le rapport de contrainte développé sur l'axe j à la charge déposée perpendiculairement à l'électrode à l'axe i. dans la figure I.11, si une charge électrique Q est déposée sur la surface d'électrode, l'épaisseur de l'élément piézoélectrique sera changée par :

$$\Delta l = \frac{g_{31}Q}{w} \tag{I.38}$$



**Figure I.11** : Transducteur piézoélectrique subi une charge électrique

La constante piézoélectrique  $h$  traduit la proportionnalité entre la déformation et le champ électrique à déplacement électrique nul ou constant.

La constante piézoélectrique  $e$  traduit la proportionnalité entre la déformation et le déplacement électrique à champ électrique nul ou constant.

| Matrice         | Notion            | Définition                                | unité       |
|-----------------|-------------------|---|-------------|
| Mécanique       | $[s^E]$           | Souplesse à E constante                   | $m^2N^{-1}$ |
|                 | $[s^D]$           | Souplesse à D constante                   | $m^2N^{-1}$ |
|                 | $[C^E]$           | Rigidité à E constante                    | $N/m^2$     |
|                 | $[C^D]$           | Rigidité à D constante                    | $N/m^2$     |
| Piézoélectrique | $[d]$             | Matrice reliant {T} à {D} à {E} constante | $CN^{-1}$   |
|                 | $[e]$             | Matrice reliant {S} à {D} à {E} constante | $Cm^{-2}$   |
|                 | $[g]$             | Matrice reliant {T} à {E} à {D} constante | $VmN^{-1}$  |
|                 | $[h]$             | Matrice reliant {S} à {E} à {D} constante | $NC^{-1}$   |
| Diélectrique    | $[\varepsilon^S]$ | Permittivité à {S} constant               | $Fm^{-1}$   |
|                 | $[\varepsilon^T]$ | Permittivité à {T} constant               | $Fm^{-1}$   |
|                 | $[\beta^S]$       | impermittivité à {S} constant             | $mF^{-1}$   |
|                 | $[\beta^T]$       | impermittivité à {T} constant             | $mF^{-1}$   |

**Table I.3 :** Unités caractéristiques des matériaux piézoélectriques

**I.5.d Coefficient de couplage [6]**

Les coefficients de couplage électromécanique mesurent la capacité d'un matériau piézoélectrique à convertir l'énergie électrique emmagasinée en énergie mécanique et réciproquement. Ils sont généralement notés k et sont compris en 0 et 1. Un matériau piézoélectrique idéal à un coefficient de couplage unitaire (k=1), au contraire un matériau passif (non piézoélectrique) à un coefficient de couplage nul (k=0). La définition du coefficient de couplage en accord avec les normes [IRE] est donnée par :

$$k = \frac{E_m}{\sqrt{E_e E_d}} \tag{I.39}$$

Avec :

- $E_m$  : l'énergie d'interaction, ou mutuelle, élasto-diélectrique

- $E_e$  : l'énergie élastique.
- $E_d$  : l'énergie diélectrique

La forme de l'échantillon conditionne l'expression du coefficient de couplage résultant. Il existe ainsi plusieurs coefficients de couplages :

- $k_{33}$  pour la vibration longitudinale suivant la direction de polarisation d'un cylindre.
- $k_{31}$  pour la vibration transversale (perpendiculaire à la direction de polarisation)
- $k_p$  pour la vibration radiale d'un disque mince.
- $k_t$  pour la vibration de l'épaisseur des pièces minces selon la direction de polarisation.
- $k_{15}$  pour la vibration en cisaillement.

Ces différents coefficients sont définis dans le tableau suivant. La nature du mode dépend des dimensions de l'échantillon, de la direction du champ d'excitation  $E$  et du vecteur polarisation  $P$ .

| Mode de vibration        | Forme géométrique | L : longueur,<br>I : largeur,<br>H : épaisseur,<br>D : diamètre | Coefficient de couplage                                       |
|--------------------------|-------------------|---|---|
| Mode transversale        |                   | H, I < L/5  | $k_{31} = \frac{d_{31}}{\sqrt{S_{11}^E \epsilon_{33}^T}}$     |
| Mode radial              |                   | D < 10 H  | $k_p = k_{31} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}}}$ |
| Mode en épaisseur        |                   | D < 10 H  | $k_t = \frac{e_{33}}{\sqrt{C_{33}^D \epsilon_{33}^S}}$        |
| Mode longitudina<br>l    |                   | D < L/2.5   | $k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{S_{33}^E \epsilon_{33}^T}}$     |
| Mode de cisaillemen<br>t |                   | L < 3.5 (H, I)  | $k_{15} = \frac{d_{15}}{\sqrt{S_{55}^E \epsilon_{11}^T}}$     |

Table I.4 : Différents modes de vibration associée à la forme géométrique.

## I.6 Température de Curie et transition de phase

Au-delà d'une certaine température (température de Curie) un matériau piézoélectrique perd ses propriétés. Pour les matériaux piézoélectriques ferroélectriques il s'agit d'un changement de phase structurale qui a pour conséquence de supprimer la polarisation rémanente. Le matériau passe de l'état ferroélectrique à l'état para-électrique.

Dans le cas des matériaux piézoélectriques non ferroélectriques, cette notion existe et correspond aussi à un changement de structure cristalline. A 573 °C le quartz  $\alpha$  (structure trigonale) piézoélectrique se transforme en quartz  $\beta$  (structure hexagonale) non piézoélectrique.

## I.7 Matériaux piézoélectriques

Parmi les matériaux piézoélectriques [7] nous différencierons d'une part les cristaux non ferroélectriques (ex. quartz) et d'autre part les ferroélectriques pérovskites tels que les céramiques ferroélectriques (ex. PZT) et les monocristaux ferroélectriques (ex. PMN-PT). Nous présenterons un état de l'art non exhaustif des matériaux piézoélectriques dont la mise en œuvre est envisageable pour les micro-gyromètres vibrants. Pour comparer les différents matériaux piézoélectriques nous présenterons succinctement leurs constantes mécaniques  $s^E$ , électriques  $\epsilon^T$  et piézoélectriques  $d$ , ainsi que leurs masses volumiques  $\rho$  et leur température de Curie  $T_C$ .

### I.7.1 Cristaux piézoélectriques non ferroélectriques

Les cristaux piézoélectriques non ferroélectriques ont des propriétés piézoélectriques nettement moins marquées que les matériaux ferroélectriques présentés plus loin. En contrepartie, les cristaux non ferroélectriques sont très stables en température et dans le temps.

Certains de ces cristaux se trouvent dans la nature, d'autres sont obtenus par synthèse. Parmi ces cristaux, il se distingue les cristaux de symétrie 32 (ex. le quartz et ses iso types) ainsi que les cristaux de symétrie 3m (ex. le niobate et le tantalate de lithium).

### I.7.2 Le quartz et ses isotypes

Les iso types du quartz sont les cristaux de même structure cristalline trigonale (classe de symétrie 32). La forme des tenseurs de cette classe de symétrie est la suivante :

$$s^E = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & -S_{14} & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{14} & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad \text{I.40}$$

$$\epsilon^T = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{I.41}$$

$$d = \begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{12} & -d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I.42}$$

Nous présentons les valeurs caractéristiques des propriétés physiques des cristaux suivants :

- \* quartz (SiO<sub>2</sub>),
- \* Orthophosphate de galium (GaPO<sub>4</sub>),
- \* Oxyde de germanium (GeO<sub>2</sub>).

Ainsi que celles des cristaux de la famille des langasites (LGX) :

- \* Langasite ( $La_3Ga_5SiO_{14}$  : LGS),
- \* Langatate ( $La_3Ta_{0,5}Ga_{5,5}O_{14}$  : LGT),
- \* Langanite ( $La_3Nb_{0,5}Ga_{5,5}O_{14}$  : LGN).

### I.7.3 Les cristaux "lithium"

Nous présentons ici quelques propriétés physiques des cristaux piézoélectriques de la classe 3m suivants :

- Niobate de lithium (LiNbO<sub>3</sub>)
- Tantalate de lithium (LiTaO<sub>3</sub>)

La forme des matrices des coefficients élastiques, électriques et piézoélectriques de ses cristaux est la suivante :

$$S^E = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{13} & -S_{14} & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{14} & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad \text{I.43}$$

$$\varepsilon^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{I.44}$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I.45}$$

### I.7.4 Cristaux ferroélectriques pérovskites

La pérovskite est un minéral de formule CaTiO<sub>3</sub> nommée en hommage au minéralogiste russe Lev Aleksevich von Perovski. On appelle structure pérovskite l'ensemble des cristaux présentant la même structure cristalline que la péroskite.

La structure pérovskite est de type ABO<sub>3</sub>, illustré figure I.12. Elle est dite pseudo-cubique car dans sa forme la plus simple cette structure est cubique (figure I.13 à gauche). Dans cette structure, O est invariablement un anion oxygène O<sup>2-</sup> (divalent), le site A est rempli par un cation divalent (ex. Ca<sup>+2</sup>, Ba<sup>+2</sup>, Pb<sup>+2</sup>...) et le site B est rempli par un cation tétravalent (ex. Mn<sup>+4</sup>; Pb<sup>+4</sup>; Ti<sup>+4</sup>, Zr<sup>+4</sup>, Nb<sup>+4</sup>...).

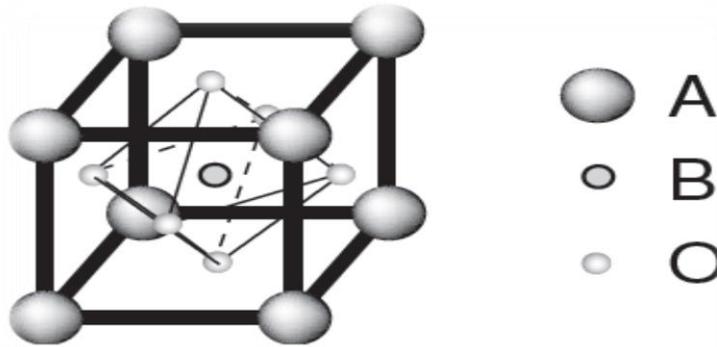


Figure. I.12 : Structure pérovskite de type ABO<sub>3</sub>

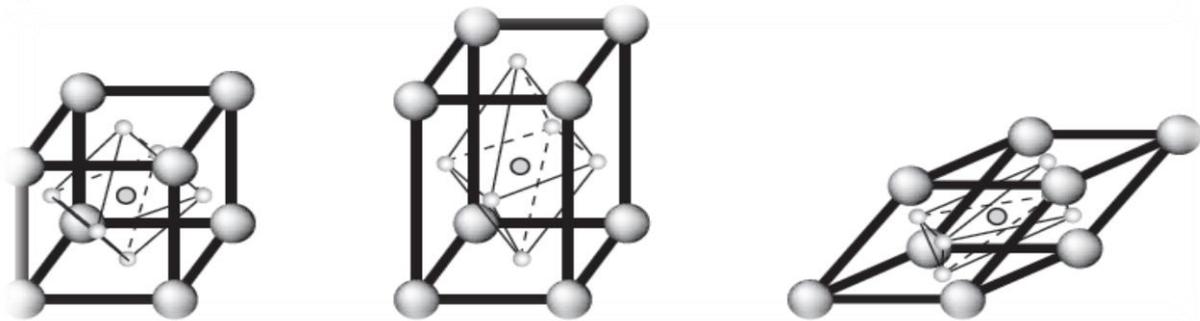


Figure. I.13 : Phase cubique (à gauche), quadratique (au centre) et rhomboédrique (à droite) de la structure pérovskite

Dans cette structure les 8 sites A forment un cube. Les anions oxygènes  $O^{-2}$  sont au centre de chaque face et forment un octaèdre au centre duquel se trouve le site B.

Sous la forme cubique, cette structure est centrosymétrique et de ce fait ne peut être piézoélectrique. Par contre, lorsque le site B est occupé par des ions de différentes natures et donc de différentes tailles, cela entraîne des distorsions de la maille pérovskite. Ces distorsions dissymétrisent la structure cristalline qui est alors ferroélectrique. Dans le cas où le matériau est constitué de deux atomes différents (respectivement 3...) pour les sites B il est dit binaire (respectivement ternaire...).

La structure cristalline de la maille pérovskite déformée peut être de phase rhomboédrique ou quadratique.

Les tenseurs des propriétés élastiques, piézoélectriques et mécaniques des matériaux pérovskites sont de la forme suivante ;

$$S^E = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{13} & -S_{14} & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{14} & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad \text{I.46}$$

$$\epsilon^T = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{I.47}$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{I.41}$$

Les pérovskites sont connus pour leurs très bonnes propriétés piézoélectriques (une fois polarisés); ainsi la famille des céramiques PZT est déjà très utilisée dans de nombreuses applications (actionneurs, capteurs). Suivant les cas on appelle double, triple et même quadruple pérovskites les matériaux respectivement binaires, ternaires ou quaternaires

### I.7.5 Céramiques PZT

Les céramiques PZT (zircono-titanate de plomb) sont des matériaux piézoélectriques de synthèse et de structure pérovskite. Elles sont apparues en 1954 et se sont répandues très rapidement car leurs propriétés piézoélectriques supplantent de loin celles des cristaux non ferroélectriques. C'est une structure binaire (mélange  $PbTiO_3$  et  $PbZrO_3$ ) dont les propriétés varient en fonction du taux de titane noté  $x$  et dont la structure générique est :  $Pb(Zr_{1-x},Ti_x)O_3$ .

- Pour  $x < 0,45$  : on est dans le domaine riche en zirconium et la phase cristalline présente une structure rhomboédrique. Cette phase présente un moment dipolaire permanent.
- Pour  $x > 0,55$  : on est dans le domaine riche en titane et la phase cristalline est quadratique. Cette phase aussi présente un moment dipolaire permanent.
- Pour  $0,45 < x < 0,55$  : on a un mélange équilibré des deux structures. Cette phase s'appelle morphotropique. C'est dans cet intervalle que les propriétés piézoélectriques du PZT sont les plus importantes (ex. 100 fois plus grandes que celles du quartz).

Ces phases (figure 1-14) existent en-dessous de la température de Curie (située entre 200 °C et 500 °C). Au-dessus de cette température  $T_c$  la phase cristalline est cubique et le matériau perd ses propriétés piézoélectriques

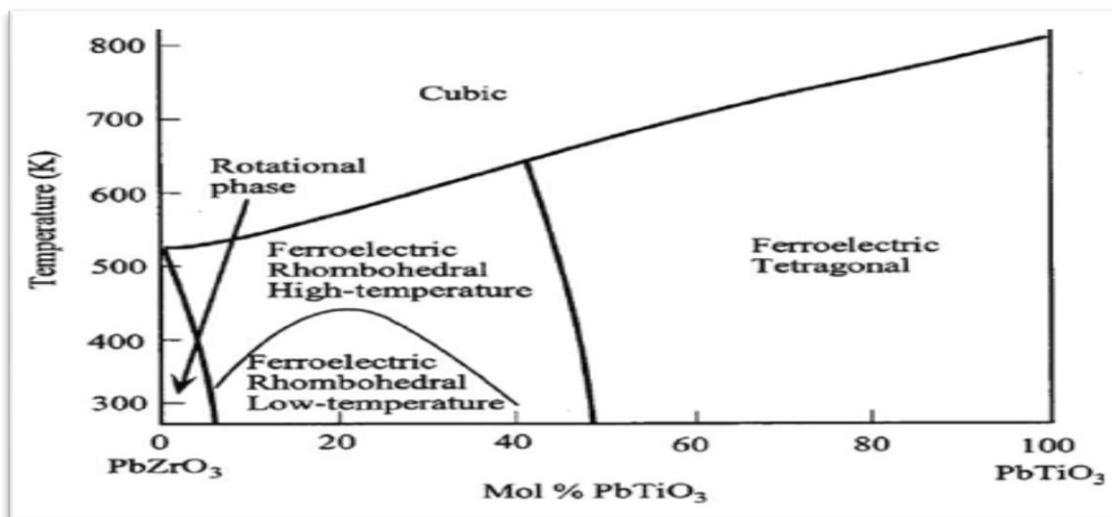


Figure I.14 : Diagramme de phase du PZT [8]

Les propriétés piézoélectriques des céramiques PZT dépendent donc du taux  $x$  de titane. De plus il est possible de doper les PZT par substitution d'une faible proportion des cations des sites A ou B afin de modifier certaines propriétés du matériau. De ce fait, il existe une grande variété de céramiques PZT disponibles pour de nombreuses applications (médicale : sonde pour échographie, navale : sonar...).

Il n'est pas possible aujourd'hui d'obtenir des cristaux de PZT de grande taille, c'est pour cela que l'on produit ce matériau sous forme de céramique. Généralement obtenues par frittage les céramiques sont constituées de nombreux grains de cristaux indépendamment orientés entre eux et soudés par un liant. Il est admis que les propriétés d'un monocristal massif de PZT seraient meilleures que celles des céramiques, dont la qualité est affectée par le liant et l'orientation aléatoire des réseaux cristallins.

Selon la nature des dopants utilisés on distingue deux grandes familles de céramiques PZT. Les céramiques PZT douces présentent des propriétés piézoélectriques un peu meilleures (i.e. de plus grands coefficients piézoélectriques et un plus grand coefficient de couplage électromécanique  $k$  confer) et une température de Curie légèrement plus élevée. En revanche les facteurs de qualité de résonateurs fabriqués avec ces céramiques sont nettement plus faibles et la permittivité de ces matériaux est plus grande.

Les céramiques PZT dures permettent d'obtenir des résonateurs avec des facteurs de qualité plus importants. Par contre elles sont "moins" piézoélectriques.

### I.7.6 Monocristaux pérovskites

Parmi les matériaux ferroélectriques pérovskites, il a été développé depuis quelques années les techniques permettant d'obtenir des monocristaux dont la taille est suffisante pour permettre des réalisations monolithiques. Ce sont des matériaux émergents de composition semblable à celles des microcristaux constituant les céramiques ferroélectriques (binaire, ternaire...).

Ces monocristaux tirent aussi profit de l'existence d'une phase morphotropique qui procure des propriétés piézoélectriques accrues. La rupture technologique par rapport aux meilleures céramiques ferroélectriques est nette : gain d'un facteur 10 sur le coefficient piézoélectrique  $d$ . Contrairement aux céramiques ferroélectriques (qui sont, par nature, isotropes avant polarisation) les propriétés des piézoélectriques des monocristaux vont dépendre de l'orientation de la polarisation par rapport à la maille cristalline. Par exemple il a été mis en évidence que le coefficient de charge piézoélectrique  $d_{33}$  des cristaux de PZN-4,5PT est plus important pour les cristaux polarisés dans la direction  $\langle 001 \rangle$  que  $\langle 110 \rangle$ . On discerne parmi ces monocristaux principalement :

- Le PZN-PT est un monocristal ferroélectrique binaire composé de  $Pb(Zn_{\frac{1}{3}}Nb_{\frac{2}{3}})O_3$  et de  $PbTiO_3$ . Sa phase morphotropique correspond à une composition de 9 % de  $PbTiO_3$ .
- Le PMN-PT est un monocristal ferroélectrique binaire composé de  $Pb(Mg_{\frac{1}{3}}Nb_{\frac{2}{3}})O_3$  et de  $PbTiO_3$ . Sa phase morphotropique correspond à une composition de 33% de  $PbTiO_3$ .

| propriétés             | Quartz $SiO_2$ | $LiNbO_3$ | $PMN - PT$ | $PVDF$ | $PZT$<br>douce | $PZT$ dure |
|------------------------|----------------|-----------|------------|--------|----------------|------------|
| $\epsilon_r$           | 4.5            | 29        |            | 12     | 4800           | 1150       |
| $T_c(K)$               | 846            | 1483      | <453       | 453    | 458            | 590        |
| $d_{33}(\frac{pC}{N})$ | 2              | 6         | 20         | 2500   | 640            | 240        |
| $k_{33}\%$             | 10             | 23        | >90        | 14     | 72             | 65         |

**Tableau I.5 :** Caractéristiques principales de quelques matériaux piézoélectriques.

$\epsilon_{r3}$  : Permittivité diélectrique relative,

$T_c$  : Température de Curie,

$d_{33}$  : Constante de charge (proportionnalité entre la charge et la contrainte à champ nul ou constant)

$k_{33}$  : Coefficient de couplage électromécanique (aptitude à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique selon la direction de polarisation) [9]

### I.8 Avantage des matériaux piézoélectriques

Densité énergétique importante

Grand bande passante

Haute fréquences

Faible puissance de mise en action

### I.9 inconvénients des matériaux piézoélectriques

Tensions limitées

Equipement auxiliaire nécessaire

Matériaux fragiles

Variations de température limitées



## II Introduction :

On peut classer les méthodes du contrôle de vibrations ou de bruit suivant trois catégories distinctes : passive, active et semi-active. Pour fonctionner, la méthode passive n'a pas besoin d'un apport extérieur d'énergie. Par contre, cette technique implique généralement une modification structurale par l'ajout de matériaux dissipatifs.

Dans les méthodes dites active, on distingue les applications destinées au contrôle des vibrations. La technique active requiert un apport d'énergie externe pour pouvoir agir. Ce chapitre traite des généralités rattachées au contrôle actif. Après un bref rappel des principes fondamentaux du contrôle actif, nous introduisons les notions indispensables à la compréhension d'un dispositif de contrôle active.

### II.1 Gouvernabilité et observabilité

#### II.1.1 Gouvernabilité ou contrôlabilité d'état

Un processus est dit complètement gouvernable si toute transition désirée de l'état du processus peut être effectuée en un temps fini par les variables de commande.

La gouvernabilité caractérise donc la relation entre les entrées et l'état du système, autrement dit le vecteur de contrôle  $u(t)$  et le vecteur d'état  $x(t)$  de l'équation II.1.

L'étude de la gouvernabilité d'un système à plusieurs variables permet au concepteur de choisir les variables d'entrée les plus appropriées pour la conduite du système. Si un état instable ne fait pas partie du sous-ensemble des états gouvernables, il ne sera pas affecté par le contrôle.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{II.1}$$

Où  $A$  est une matrices d'état,  $B$  est la matrice d'entrée et  $C$  est la matrice de sortie.

Lorsque  $A$  et  $B$  sont des matrices à termes constants, il est possible de définir un test quantitatif.

$$G = [B \quad AB \quad A^2 \dots A^{n-1}B]$$

La matrice  $G$  est appelée matrice de gouvernabilité son rang caractérise la gouvernabilité du système. Le système est complètement gouvernable si et seulement si  $G$  est de rang  $n$ , nombre de composantes du vecteur d'état  $x$ . [11],[14],[15],[17],[19]

#### II.1.2 Observabilité

Un processus est dit complètement observable si toute transition de l'état du processus affecte tôt ou tard les variables de sortie. L'observabilité est donc un concept du même type que la gouvernabilité mais cette fois, c'est la relation entre les sorties et l'état du système qui est caractérisée. Autrement dit, l'observabilité relie le vecteur de sortie  $y(t)$  et le vecteur d'état  $x(t)$  de l'équation II.1.

L'étude de l'observabilité d'un système à plusieurs variables permet au concepteur de choisir les variables de sortie mesurables du modèle du système. Si un état non observable est inclus dans le contrôle, l'instabilité éventuelle en résultant ne pourra être détectée à la sortie.

Le plus souvent, les sorties ne dépendent pas explicitement des entrées, de telle sorte que (II.1)

se réduit à (II.2). Considérons alors le système II.2 qui correspond au cas courant où les sorties ne dépendent pas explicitement des entrées.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{II.2}$$

$$O = [C^t \quad A^t C^t \quad (A^t)^2 C^t \quad \dots \quad (A^t)^{n-1} C^t]$$

La matrice O est appelée matrice d'observabilité. Son rang caractérise l'observabilité du système. Le système est complètement observable si et seulement si O est de rang n, nombre de composantes du vecteur d'état x.

## II.2 méthodes de contrôle actif

### II.2.1 Principes fondamentaux du contrôle actif

Le contrôle actif est basé sur l'interférence destructive de deux champs, sonores ou vibratoires :

Le champ primaire correspondant à la perturbation qu'on cherche à atténuer.

Le champ secondaire créé par le dispositif de contrôle

Il y a deux approches radicalement différentes de rejet de perturbations : rétroaction (feedback) et anticipation (feedforward).

### II.2.2 Contrôle par rétroaction (feedback)

Le terme feedback a été appliqué à un système en boucle fermée par Harold Black en 1920. Il décrit les processus de régulation en ingénierie ou l'information sur les résultats provoque une influence sur les entrées.

#### II.2.2.1 Principe de rétroaction (feedback)

Le figure II.1 illustre le contrôle de type feedback, le contrôle résulte uniquement du traitement d'un signal d'erreur. Ce signal d'erreur filtré par le contrôleur commande alors les actionneurs de contrôle.

En contrepartie de sa simplicité de principe, le feedback présente une limitation de performance inhérente à sa structure. En effet, dans le cas d'une perturbation persistante, on ne peut annuler le signal d'erreur sous peine d'annuler également le contrôle. En fait, plus l'erreur est faible, plus le gain de contrôle devrait être élevé, au détriment de la stabilité du système.

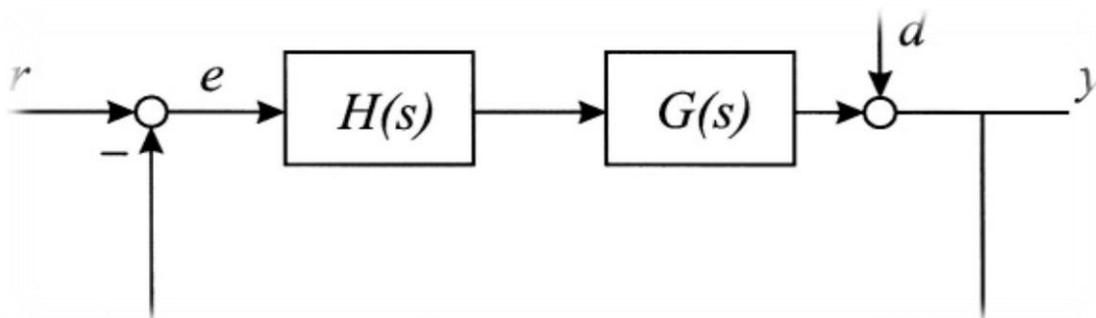


Figure II.1 : principe de base d'un dispositif de contrôle actif

### II.2.2.2 Contrôle linéaire quadratique

Considérons le système II.3, stationnaire et invariant dans le temps

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{II.3}$$

On cherche un contrôle proportionnel à l'état présenté comme suite :

$$u = -Gx \quad \text{II.4}$$

Tell que, la fonction de cout quadratique  $J$  est minimisée :

$$J = 1/2 \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad \text{II.5}$$

Le terme  $(1/2) x^T Qx$  peut être interprété comme une mesure de l'énergie du système et le terme  $(1/2) u^T Ru$ , est l'énergie de contrôle.  $Q$  et  $R$  sont des matrices symétriques respectivement, positive semi-définie et positive définie. Elles sont choisies selon l'énergie qu'on veut minimiser.  $Q$  et  $R$  peuvent être aussi interprétées respectivement comme accélérateurs de convergence de la solution  $x \rightarrow 0$  et  $u \rightarrow 0$ .

Si une série de variables à contrôler est défini par

$$z = Hx \quad \text{II.6}$$

Une fonction quadratique peut être défini comme suite :

$$J = \int_0^\infty (z^T z + u^T Ru) dt = \int_0^\infty (x^T H^T Hx + u^T Ru) dt \quad \text{II.7}$$

Cette situation est équivalente à la précédente avec  $Q = H^T H$ . De façon similaire, on utilise souvent la forme  $R = eS^T S$  ou  $S$  est une matrice scalaire et  $e$  est un paramètre de conception.

On peut voir que la solution des équations II.6 à II.7 [34,36] est

$$G = R^{-1} B^T P \quad \text{II.8}$$

où  $P$  est symétrique définie positive solution algébrique de l'équation de Riccati

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad \text{II.9}$$

L'équation de Riccati est non linéaire en  $P$  ; l'existence de la solution unique est garantie si  $(A, B)$  est une paire contrôlable et  $(A, Q^{1/2})$  est observable (par  $Q^{1/2}$ ), ce qui signifie que la matrice  $H$  telle que  $H^T H = Q$ . Sous ces conditions, le système en boucle fermée défini comme suite :

$$\dot{x} = (A - BG)x \quad \text{II.10}$$

est asymptotiquement stable. La valeur minimum de la fonction  $J$  est donnée par :

$$J = \int_0^\infty x^T (Q + G^T R G) x dt = x_0^T P^* x_0 \quad \text{II.11}$$

Où  $P^*$  est la résolution de l'équation de Lyapunov du système en boucle fermée

$$P^*(A - BG) + (A - BG)^T P^* + Q + G^T R G = 0 \quad \text{II.12}$$

En substituant  $G$ , nous obtenons:

$$P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* + A^T P^* - P B R^{-1} B^T P^* + Q + P B R^{-1} B^T P = 0$$

Cette équation est identique et satisfaite par  $P^* = P$ , ou  $P$  est la solution de l'équ. II.9 ainsi, la

valeur minimale de la fonction  $J$  est reliée avec la solution  $P$  de l'équation de Riccati par :

$$J = \min \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt = x_0^T P x_0 \quad \text{II.13}$$

De nombreuses techniques sont disponibles pour résoudre l'équation de Riccati [13], [15]; elles ne seront pas discutées dans ce travail parce qu'elles sont automatisées dans la plupart des logiciels de conception. En principe, l'approche LQR permet la conception de multi variable état en rétroaction qui est asymptotiquement stable. Un inconvénient majeur est, bien sûr, qu'elle suppose la connaissance du vecteur d'état complet. Puisque en général ce dernier, n'est pas directement disponible, il doit être reconstruit.

Les pôles de système en boucle fermé dépend de la matrice  $Q$  et  $R$ . Multipliant  $Q$  et  $R$  par coefficient scalaire nous prend a la même matrice de gain  $G$  et les mêmes pôles de boucle fermé.

Dans les applications de contrôle de structure, si les variables de contrôle ne sont pas clairement identifiées, il peut être judicieux de choisir  $Q$  de telle sorte que  $x^T Q x$  représente l'énergie totale (cinétique et déformation) dans le système.  $R$  est généralement choisie comme  $R = e R_1$ , dans lequel  $R_1$  est une constante de la matrice définie positive et  $e$  est un paramètre ajustable; sa valeur est choisie pour obtenir rapidement de façon raisonnable les pôles en boucle fermée sans valeurs excessives de l'effort de contrôle.

### II.2.2.3 Contrôle Modale

En contrôle modale, on cherche à atténuer séparément les modes tout en évitant d'affecter leurs formes. En effet, le contrôleur modal est basé sur les déformées modales et il est donc préférable de ne pas modifier ces dernières. Le but est dans ces conditions de produire un contrôle indépendant des modes en termes de raideur et amortissement, sans altérer la base modale du système. C'est cette approche très physique qui rend ce type de méthodes attrayantes.[25]

Un contrôleur modal est composé de trois parties distinctes :

- **Un filtre modal** qui donne accès au vecteur d'état modal à partir de la sortie du système,
- **La matrice de gains modaux** qui pondère le contrôle sur les différentes coordonnées modales,
- **Le synthétiseur de modes** qui reconstruit le signal à appliquer aux actionneurs de contrôle.

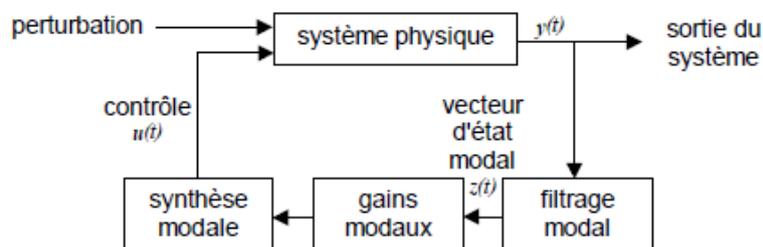


Figure II.2 : Principe de contrôle modal feedback.

#### II.2.2.3.a Filtrage modal et construction du vecteur d'état modal

Le filtre modal, en séparant les modes, autorise par la suite le traitement indépendant de ceux-ci par le contrôleur. Deux types de méthodes de filtrage sont employés :

- Le filtrage modal par combinaison des réponses d'un réseau de capteurs : la combinaison linéaire des réponses de  $n$  capteurs donne accès à  $n$  composantes modales moyennant certaines

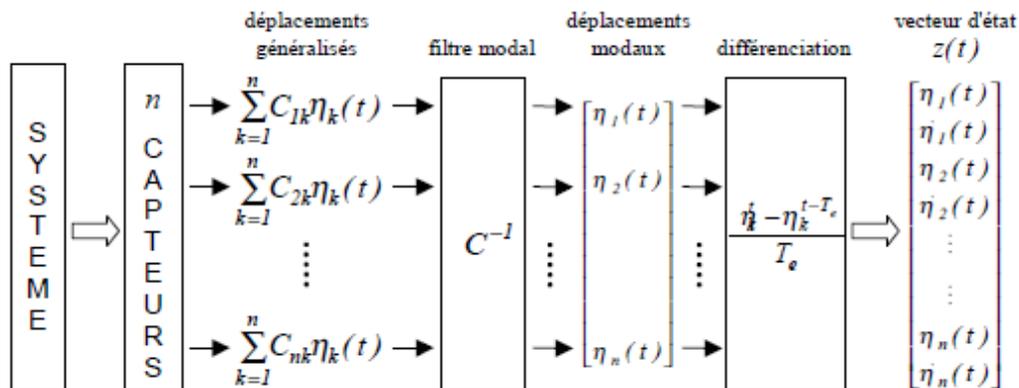
conditions sur la matrice de participation modale de sortie C du système. Les capteurs sont généralement des accéléromètres ou des céramiques piézo-électriques.

- Le filtrage modal structural : la position et la forme d'un capteur sont telles que sa réponse n'est composée que d'une composante modale. Les capteurs de ce type sont généralement élaborés à partir de film polymère piézoélectrique (PVDF).

La mise en œuvre pratique de la loi de contrôle suppose la détermination à chaque instant du vecteur d'état modal  $z(t)$ . Rappelons que  $z(t)$  est constitué des coordonnées et des vitesses modales. A moins de disposer à la fois de capteurs de déplacement et de capteurs de vitesse. On préfère déterminer ce vecteur d'état à partir d'un seul type de mesures.

La manière la plus directe de construire le vecteur modal est de disposer de capteurs de déplacement et d'approcher la dérivée des déplacements modaux. C'est-à-dire les vitesses modales, par une simple différenciation. Si le filtrage modal est de bonne qualité et les modes peu amortis, le résultat tend vers les vitesses modales.

La Figure II.3 illustre cette méthode de construction du vecteur d'état.



**Figure II.3** : Construction de vecteur d'état

D'autres méthodes existent pour construire le vecteur d'état, notamment celles utilisant des observateurs (ou estimateurs) d'états. Ces derniers présentent en principe l'avantage de reconstruire fidèlement le vecteur d'état à partir d'un nombre réduit de capteurs tous en étant relativement peu sensibles aux bruits.

### II.2.2.3.b synthèse modale

La synthèse modale est en quelque sorte l'opération inverse du filtrage modal, appliquée aux actionneurs de contrôle. Il s'agit ici de pondérer le contrôle des différents modes en fonction de l'aptitude de l'actionneur à les exciter. Il faut donc identifier les participations modales de chacun des actionneurs de contrôle. On obtient alors la matrice de participation modale d'entrée B du système. En termes de contrôle actif, cela correspond en quelque sorte aux chemins secondaires modaux.

### II.2.2.3.c Gain modaux

Les gains modaux de contrôle sont déterminés par l'application des lois du contrôle optimal. Cette approche présentée au §II.5.2 dans le cadre de systèmes décrits par des variables d'état non modales peut en effet s'appliquer à la représentation modale de systèmes d'état.

Les matrices de participation modale B et C étant connues, il reste donc à construire la matrice A, nécessaire pour établir les équations d'état modales.

Si nous considérons toujours un système à amortissement diagonal et faible dissipation, la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\xi\Omega \end{bmatrix} \quad \text{II.14}$$

Sa détermination passe donc par une caractérisation des modes en termes de fréquences modales et amortissements modaux.

Ces caractéristiques étant généralement difficilement accessibles directement, on utilise pour les évaluer des méthodes d'identification modale.

Nous retrouvons donc le système :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad \text{II.15}$$

Avec A, B et C : matrices de dimensions respectives  $2n \times 2n$ ,  $2n \times r$  et  $q \times 2n$ .

La matrice des gains modaux K peut alors être calculée avec un programme adapté de telle sorte que le contrôle :

$$u(t) = -Kz(t) \quad \text{II.16}$$

Minimise le critère §II.2.2.2 :

$$J = \int_0^{\infty} [z^t(\tau)Qz(\tau) + u^t(\tau)Ru(\tau)] d\tau \quad \text{II.17}$$

Où Q et R sont des matrices pondérant respectivement les états modaux et les entrées du système.

#### II.2.2.4 contrôleurs Proportionnel-Intégrale-Dérivé (PID)

Les régulateurs PID répondent à plus de 90% des besoins industriels et le nombre de régulateurs installés dans une usine pétrolière, par exemple, se compte par milliers. Malheureusement, malgré l'expérience acquise au fil des ans, les valeurs choisies pour les paramètres P, I et D ne sont pas toujours satisfaisantes, ni adaptées au processus à régler. Cette situation peut être remédiée avec l'utilisation des algorithmes d'optimisation tel LQC. Un régulateur PID remplit essentiellement trois fonctions :

##### II.2.2.4.a Régulateur PID

Un régulateur Proportionnel Intégral Dérivé (PID) est un organe de contrôle permettant d'effectuer une régulation en boucle fermée d'un système industriel. C'est le régulateur le plus utilisé dans l'industrie et permet de contrôler la grande majorité des procédés.[14]

##### II.2.2.4.a.1 Principe général

Le PID permet 3 actions simultanées sur l'erreur consigne/mesure :

Une action Proportionnelle: l'erreur est multipliée par un gain  $K_p$

Une action Intégrale: l'erreur est intégrée sur un intervalle de temps  $K_i$

Une action Dérivée: l'erreur est dérivée suivant un temps  $K_d$

Il existe plusieurs architectures possibles pour combiner les 3 effets (série, parallèle ou mixte), on prendra par exemple une architecture parallèle comme suit :

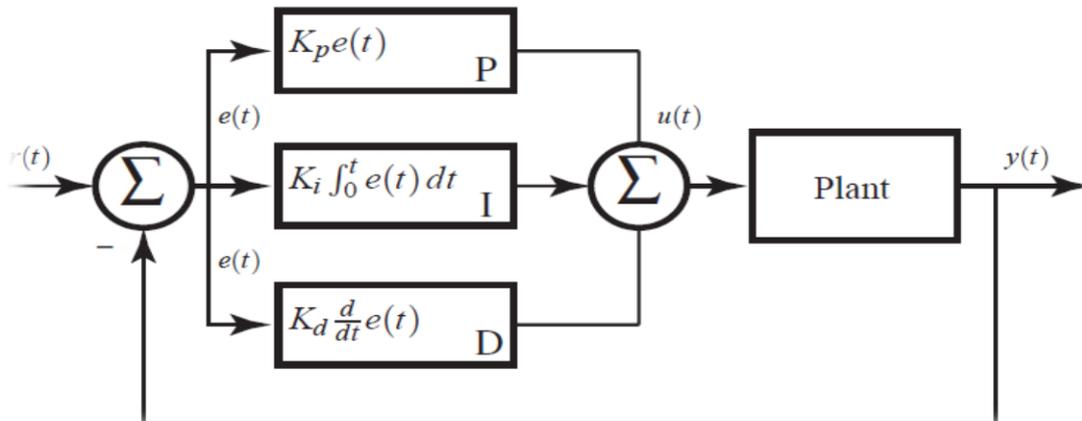


Figure II.4 Schéma d'un PID parallèle

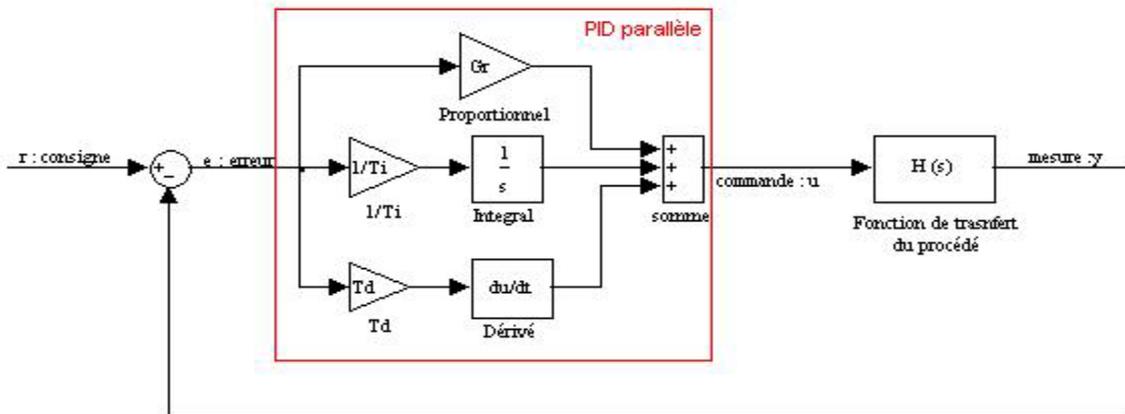


Figure II.4 a : Schéma d'un PID parallèle en bloc Simulink

La fonction de transfert avec la transformée de Laplace du régulateur PID parallèle est la somme des 3 actions:

$$C(s) = K_p + K_d \cdot s + \frac{1}{K_i} \cdot \frac{1}{s} \tag{II.18}$$

Les différents paramètres à trouver sont  $K_p$ ,  $K_d$  et  $K_i$  pour réguler le procédé ayant pour fonction de transfert  $H(s)$ . Il existe de nombreuses méthodes pour trouver ces paramètres. Cette recherche de paramètre est communément appelée réglage.

La fonction de transfert du contrôleur PID idéale est irréalisable car l'ordre du numérateur est supérieur à l'ordre du dénominateur. Dans la réalité, on rajoute toujours un paramètre alpha sur l'action dérivée de manière à obtenir un ordre 2 au numérateur et au dénominateur :

$$K_d \cdot s \rightarrow \frac{K_d s}{1 + \alpha \cdot K_d \cdot s} \tag{II.19}$$

Avec  $\alpha \ll 1$  On obtient alors une nouvelle fonction de transfert réalisable pour notre régulateur:

$$C(s) = \frac{(K_p \cdot K_i \cdot K_d \cdot \alpha + K_d \cdot K_i) \cdot s^2 + (K_p \cdot K_i + \alpha \cdot K_d) \cdot s + 1}{\alpha \cdot K_i \cdot K_d \cdot s^2 + K_i \cdot s} \tag{II.20}$$

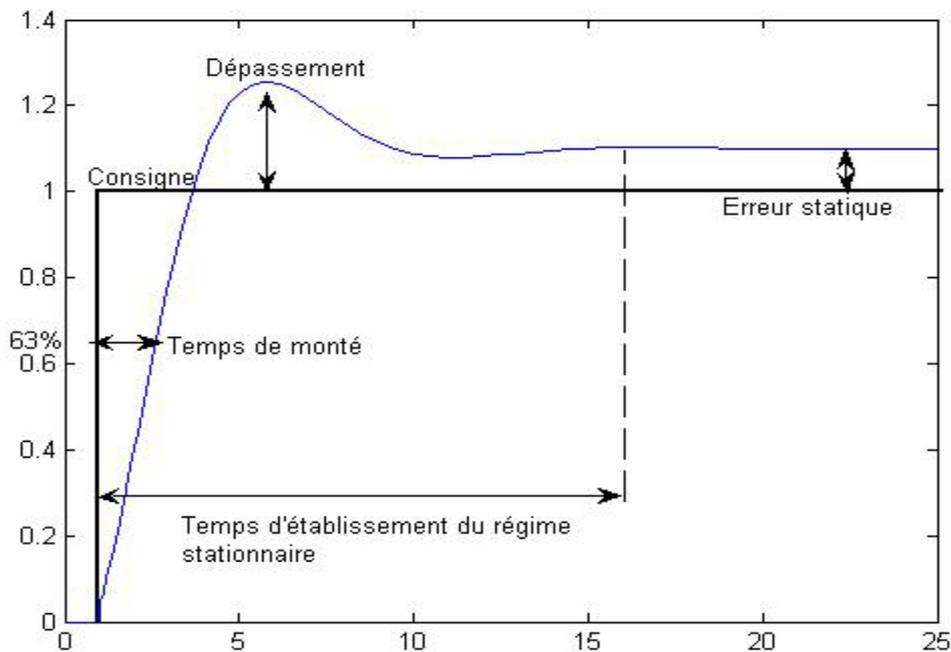
Néanmoins, pour limiter les effets néfastes du bruit du signal de mesure sur le signal de commande  $u$ , on

modère l'effet de l'action dérivée dans les régulateurs industriels en adoptant généralement  $\alpha \sim 0,1$ .

### II.2.2.4.a.2 Réglage d'un PID

Le réglage d'un PID consiste à trouver les coefficients  $K_p$ ,  $K_d$  et  $K_i$  dans le but d'obtenir une réponse adéquate du procédé et de la régulation. L'objectif est d'être robuste, rapide, précis et de limiter les dépassements. La robustesse est sans doute le paramètre le plus important et délicat. On dit qu'un système est robuste si la régulation fonctionne toujours même si le modèle change un peu. Par exemple, les fonctions de transfert de certains procédés peuvent varier en fonction de la température ambiante ou de l'hygrométrie ambiante relativement à loi de pascal. Notre régulateur doit être capable d'assurer sa tâche même avec ces changements pour éviter de redévelopper un nouveau régulateur toutes les semaines.

La réponse type d'un procédé stable est la suivante :



**Figure II.5** : Réponse d'un procédé stable

Les paramètres du PID influencent la réponse du système de la manière suivante :

- $K_p$  : Lorsque  $K_p$  augmente, le temps de montée est plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement varie peu et l'erreur statique se trouve améliorée.
- $K_i$  : Lorsque  $1/K_i$  augmente, le temps de montée est plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement au régime stationnaire s'allonge mais dans ce cas on assure une erreur statique nulle.
- $K_d$  : Lorsque  $K_d$  augmente, le temps de montée change peu mais le dépassement diminue. Le temps d'établissement au régime stationnaire est meilleur. Pas d'influences sur l'erreur statique.

L'analyse du système avec PID est très simple mais sa conception peut être délicate, voire difficile, car il n'existe pas de manière unique pour résoudre ce problème. Il faut trouver des compromis, le régulateur idéal n'existe pas. En général on se fixe un cahier des charges à respecter sur la robustesse, le dépassement et le temps d'établissement du régime stationnaire.

Les méthodes de réglage les plus utilisées sont la méthode Ziegler-Nichols, la méthode de P.Naslin (polynôme à amortissement réglage), la méthode du lieu de Nyquist inverse (utilise le diagramme de

Nyquist).

### II.2.2.4.b Régulateur PI

Le régulateur PI (action proportionnelle intégrale) est une combinaison d'un régulateur P et d'un régulateur I. Figure II.6

Commande proportionnelle intégrale continue

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt \quad \text{II.21}$$

Fonction de transfert en  $s$ :

$$C_{PI}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{K_i s} \right) \quad \text{II.22}$$

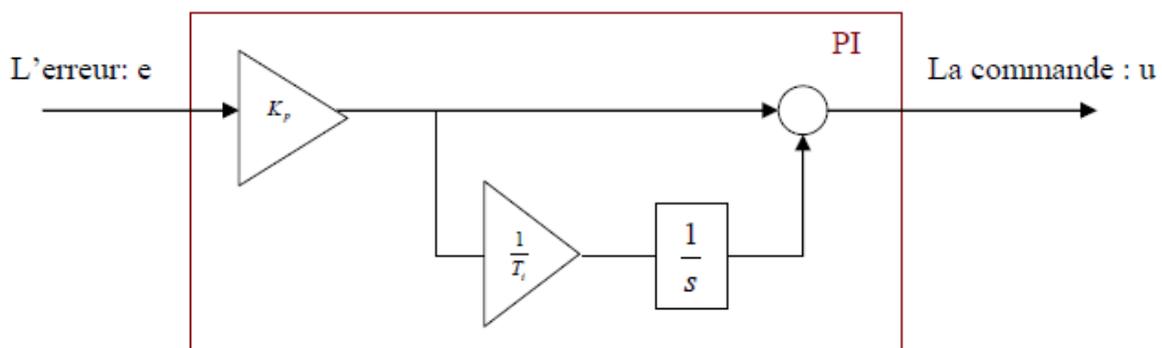
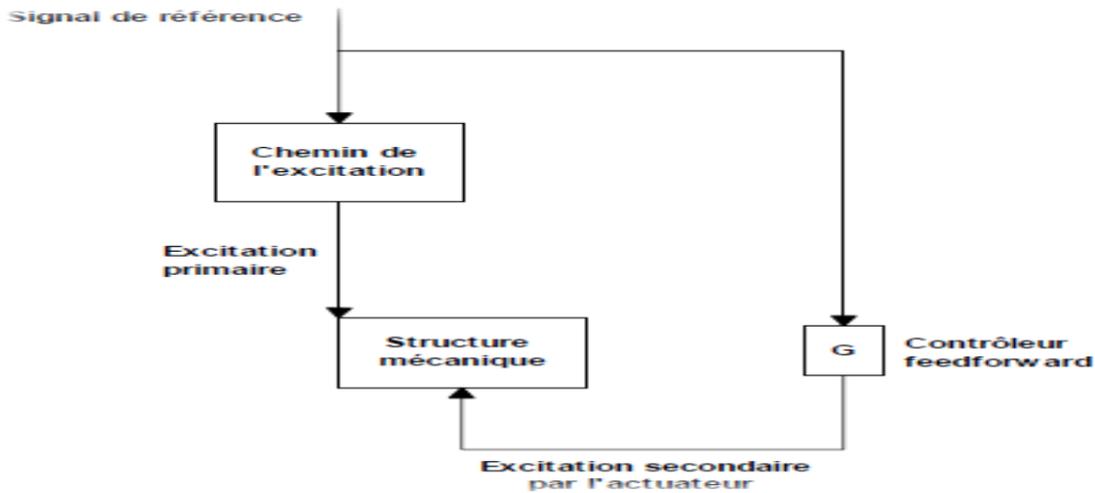


Figure II.6 : schéma d'un PI

### II.2.3 contrôle par anticipation (feedforward)

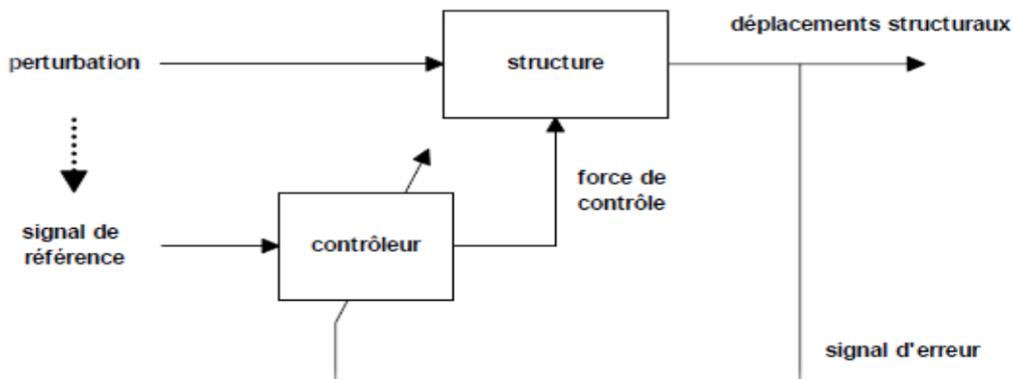
Le contrôle de type feedforward nécessite un signal de référence corrélé avec la perturbation. Des systèmes existent, en effet, où la perturbation est prévisible. Cela est notamment courant dans deux types de systèmes:

- Quand le contrôle concerne le bruit ou les vibrations rayonnées par une machine tournante, la perturbation tend alors à être harmonique.
- Quand la perturbation se propage de telle sorte qu'elle est en tout point du système fonction de sa valeur en amont.



**Figure II.7 :** Principe de fonctionnement du contrôle par anticipation

Les dispositifs de contrôle par anticipation sont plus souvent adaptatifs, répondant ainsi à la représentation de la figure II.7. Le contrôleur observe la sortie du système de manière à rafraîchir les paramètres de son modèle interne. Ainsi, il s'adapte aux faibles changements de comportement du système contrôlé.



**Figure II.8 :** contrôle adaptatif par anticipation

### II.2.3.1 Algorithme LMS

La forme la plus courante d'algorithme adaptatif est celle utilisant l'algorithme moindre carré Least Squares (LMS). L'algorithme LMS est très répandu en contrôle actif en raison de sa simplicité d'utilisation. Il adapte de façon itérative les coefficients d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) pour minimiser un signal d'erreur. La structure d'un filtre RIF est rappelée à la figure II.9 où les  $n$  coefficients du filtre RIF sont notés  $a_m (m=0, \dots, n-1)$ . Les signaux échantillonnés d'entrée et de sortie sont notés respectivement  $x$  et  $y$ .

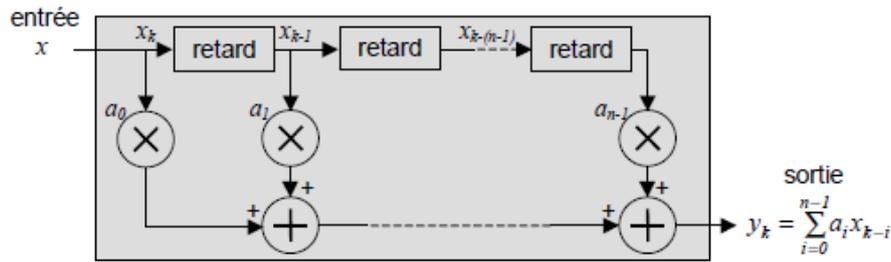


Figure II.9 : Filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (RIF)

La figure II.10 illustre le principe de l’algorithme LMS. Le calcul d’un coefficient donné du filtre RIF requiert simplement le produit de la vecteur du signal de référence associé à ce coefficient avec un signal proportionnel à l’erreur. Ce produit est ensuite ajouté à la valeur courante du coefficient pour former le nouveau coefficient. Ce processus se répète indéfiniment jusqu’à converger vers une valeur stable, correspondant à une erreur minimale. En choisissant convenablement le gain de mise à l’échelle  $\mu$  du signal d’erreur, appelé coefficient de convergence, on optimise le nombre d’itérations nécessaires à la convergence de l’algorithme. La seule exigence de l’algorithme LMS est d’avoir accès à un signal de référence corrélé avec l’erreur. Le résultat obtenu sera alors déterminé par cohérence entre les signaux de détection et d’erreur. Le fonctionnement satisfaisant suppose donc des comportements quasi linéaires.

En notant  $x_k$  l’échantillon du signal de référence au temps d’échantillonnage  $k$ , le  $i^{ème}$  coefficient du filtre RIF au temps d’échantillonnage  $k$  s’écrit :

$$a_{i(k)} = a_{i(k-1)} + 2\mu \epsilon x_{k-i}$$

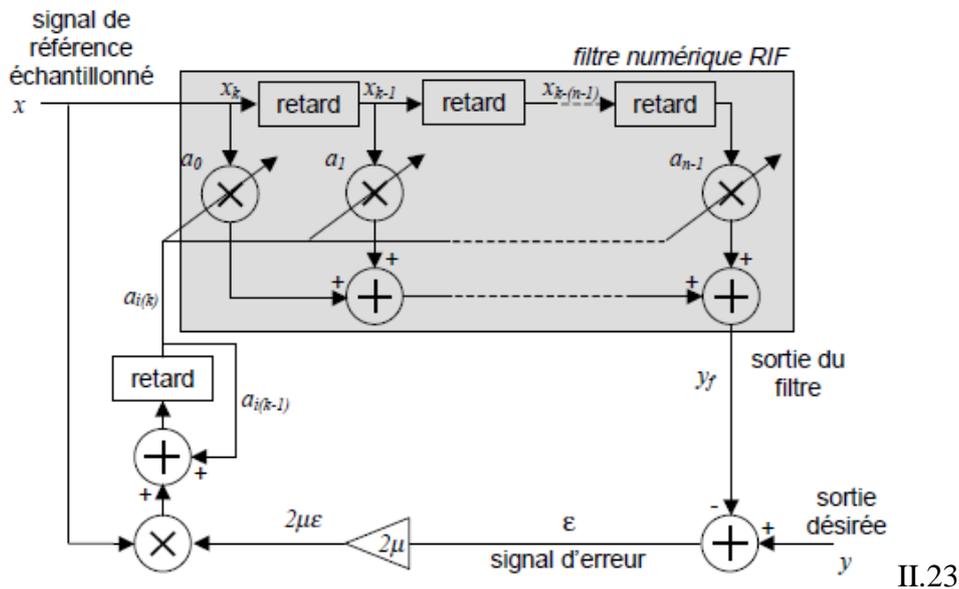
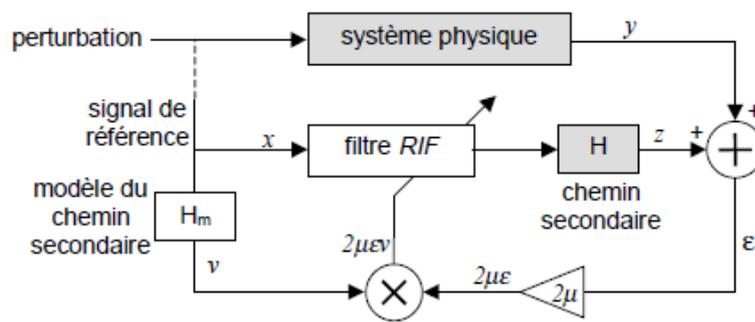


Figure II.10 : Principe de l’algorithme LMS

La figure II.11 présente l’application de cet algorithme à l’identification de processus. Ce dernier peut être par exemple un système physique transmettre une perturbation. On voit que tout changement éventuel dans le processus se trouve dans le modèle présenté par les coefficients du filtre. De plus, si le modèle est valide, un changement dans des coefficients du filtre.



**Figure II.11 :** Algorithme LMS utilisé en identification de processus.

### II.2.3.2 contrôle actif utilisant l'algorithme LMS à référence filtrée

Les problèmes de contrôle actif qui se posent dans la réalité ne se ramènent cependant pas à la simple identification d'une fonction de transfert comme décrit plus haut. Différents problèmes apparaissent dans la pratique :

- Les réponses imparfaites des transducteurs doivent être prises en compte dans le contrôleur.
- Le chemin secondaire fait apparaître une fonction de transfert supplémentaire en sortie du contrôleur. Dans un système acoustique de type propagatif par exemple, le temps de propagation du signal de contrôle au point de minimisation est fondamental pour la mise au point du filtre.

Dans la pratique, on utilise l'algorithme LMS référence filtrée pour tenir compte de ces réalités. Cette variante de l'algorithme LMS nécessite que la référence soit d'abord filtrée par la fonction de transfert secondaire avant d'être multipliée par l'erreur. Ainsi, la mise en œuvre de cet algorithme demande l'identification du chemin secondaire pour réaliser le contrôle proprement dit.

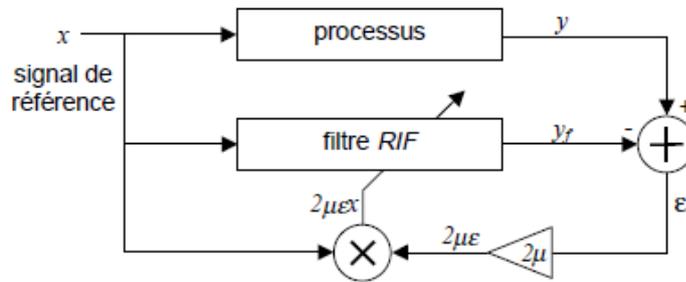
### II.2.3.3 Identification du chemin secondaire

Dans la méthode classique, l'identification du chemin secondaire est réalisée probablement au contrôle par une identification de processus semblable. Le chemin secondaire est alors simplement le processus à identifier. On parle d'identification hors ligne.

Des méthodes plus évoluées existent dans lesquelles le chemin secondaire est modélisé en continu. On doit souligner cependant que la multiplication des boucles d'adaptation ne conduit généralement pas à un gain en performance. Elle permet seulement la réalisation de contrôles plus robustes.

### II.2.3.4 Mise en œuvre du contrôle actif

Une fois le chemin secondaire modélisé, l'algorithme est implanté dans un contrôleur numérique et le contrôle est mise en œuvre suivant la description de la figure II.12. Ce type de contrôle est largement utilisé en contrôle actif, car il allie simplicité, adaptabilité et efficacité.



**Figure II.12 :** Algorithme x-LMS monovoie appliqué au contrôle actif

Il faut souligner le fait que ce contrôle n'est possible qu'à condition d'avoir accès à un signal de référence corrélé avec la perturbation. La validité du filtre repose en effet sur la cohérence entre la référence et l'erreur. Si cette cohérence est faible, c'est-à-dire si le signal de référence est très bruité, le modèle perd de sa validité et le contrôle se détériore. De même, la qualité de l'identification du chemin secondaire influe sur l'efficacité du contrôle. Cela étant dit, l'algorithme x-LMS se révèle robuste, autrement dit sa convergence est assurée, même quand l'identification du chemin secondaire est de qualité moyenne et que le signal de référence montre des erreurs de phase par rapport à la perturbation.

En outre et à titre de remarque, on peut noter que dans le dispositif de contrôle, l'erreur  $e$  est maintenant une somme physique et non plus une différence calculée comme lors de l'identification. Ainsi, l'algorithme s'écrit ici pour le  $i^{\text{ème}}$  coefficient du filtre RIF au temps d'échantillonnage  $k$  :

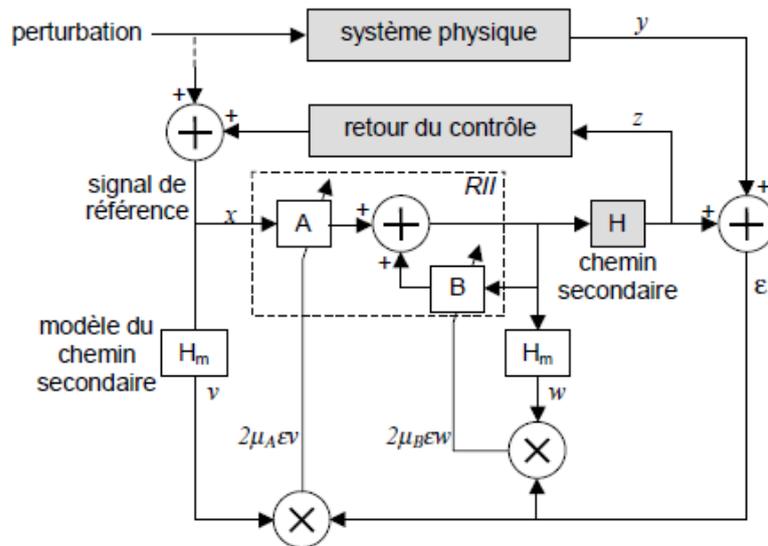
$$a_{i(k)} = a_{i(k-1)} - 2\mu e v_{(k-1)} \quad \text{II.24}$$

Dans la pratique, on ajuste par des essais le coefficient de convergence  $\mu$  jusqu'à assurer un compromis entre stabilité et vitesse de convergence.

### II.2.3.5 Algorithme LMS récursif

Dans les paragraphes précédents, nous avons considéré des contrôleurs adaptatifs utilisant des filtres RIF. Leur implantation s'avère simple et leur structure les rend intrinsèquement stable. Néanmoins, il existe des situations dans lesquelles un filtre RIF montre certaines limitations :

- si le système à contrôler possède de nombreux modes de résonance dans la bande de fréquences traitées, la fonction de transfert à modéliser comportera de nombreux pôles. La dimension du filtre RIF nécessaire pour modéliser correctement cette fonction de transfert peut alors rendre le temps de calcul rédhibitoire, surtout si plusieurs voies de contrôle sont implantées.
- Quand le contrôle a une influence sur le capteur de référence, des instabilités de boucle fermée peuvent être engendrées. Autrement dit, le bouclage introduit des pôles dans la fonction de transfert du contrôle. Un filtre RIF est dans ce cas inadapté.



**Figure II.13 :** dispositif de contrôle actif utilisant l'algorithme RLMS monovoie [25]

La figure II.13 décrit le principe d'un dispositif de contrôle actif utilisant l'algorithme RLMS. Nous avons fait apparaître le chemin de retour du contrôle sur la référence et la structure du filtre RII est encadrée en pointillés. On note que le contrôle est ici encore adaptatif. Pour simplifier la figure, l'action des coefficients de convergence est symbolisée sans apparaître explicitement.

Il existe comme pour l'algorithme LMS référence filtrée des extensions permettant l'identification en ligne du chemin secondaire [25].

### II.3 Avantages et désavantages des stratégies de contrôle

Le tableau II.1, inspiré par [5], présente une comparaison des différentes stratégies de contrôle. Il est bien entendu difficile de préférer telle ou telle méthode de contrôle. Le choix final dépendra à la fois des objectifs poursuivis, de la complexité de la structure à contrôler ainsi que de la puissance de calcul disponible.

| Type de contrôle  | Avantages  | Désavantages   |
|---|--|--|
| Feedback  |  |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Contrôle actif classique</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pas besoin d'un modèle structural</li> <li>• La stabilité est garantie pour configuration col-localisée</li> <li>• Faible puissance de calcul nécessaire</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Seulement efficace autour des fréquences de résonances structurales.</li> <li>• Méthode locale</li> </ul>                             |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Contrôle optimal (LQG, <math>H_\infty</math> ...)</li> </ul>                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Atténuation dans la bande passante du contrôleur</li> <li>• Méthode globale</li> <li>• pas besoin d'un modèle</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Bande passante limitée.</li> <li>• Phénomène de spillover (avec amplification de la perturbation en dehors de la passante)</li> </ul> |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Feedforward</li> <li>• Contrôle adaptatif</li> <li>• (X-filtered LMS....)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• bande passante plus grande (en fonction de la fréquence d'échantillonnage du contrôleur)</li> <li>• fonction très bien pour des excitations harmoniques</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Signal de référence nécessaire</li> <li>• Méthode local</li> <li>• Grande puissance de calcul nécessaire en temps réel.</li> </ul>    |

**Tableau II.1** : comparaison des stratégies de contrôle



### III. Introduction

Ce chapitre détaille la méthodologie générale de la conception du contrôle de structures flexibles proposées. La modélisation des actionneurs et des capteurs de type piézoélectrique, puis des structures intégrant la partie mécanique des actionneurs et des capteurs a été détaillée. Le cas particulier des poutres flexibles a été développé.

Rappelons que la théorie du contrôle classique est basée explicitement sur une relation entrée/sortie, en utilisant un modèle de la fonction de transfert du système pour la mise au point du contrôleur.

#### III.1 Représentation de variable d'état

Considérons un système à  $n$  degrés de liberté ou on note :

$q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$  Le vecteur des coordonnées généralisées,

$\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T$  Le vecteur des vitesses,

$\ddot{q}(t) = [\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_n(t)]^T$  Le vecteur des accélérations,

$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T$  Le vecteur des forces imposées, appelé vecteur de contrôle,

Ecrivons les équations de Lagrange de ce système sous la forme générale [25]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) = f_1(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n, u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)) \\ \ddot{q}_2(t) = f_2(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n, u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)) \\ \ddot{q}_n(t) = f_n(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n, u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)) \end{cases} \quad \text{III.1}$$

Ce qui est équivalent à la forme vectorielle suivante :

$$\ddot{q}(t) = f(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \quad \text{III.2}$$

Complétons l'équation III.2 par l'identité  $\dot{x}(t) = \dot{q}(t)$  et introduisons le vecteur d'état  $x(t)$  :

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad \text{III.3}$$

Nous pouvons écrire la forme généralisée des équations d'état :

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t)) \quad \text{III.4}$$

Où le vecteur  $a$  s'écrit :

$$a(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ f(q(t), \dot{q}(t), u(t)) \end{bmatrix} \quad \text{III.5}$$

L'équation III.4 définit un système dynamique : si le vecteur d'état  $x(t)$  est connu à un instant quelconque  $t_0$  et que  $u(t)$  est donné sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + \delta]$ , l'intégration de III.4 donne  $x(t)$  à tout instant de l'intervalle de temps considéré.

Si le vecteur d'état initial et le vecteur de contrôle sont donnés, le vecteur d'état peut être calculé à tout instant.

Les variations des systèmes s'opérant généralement autour d'un état d'équilibre, il est généralement intéressant de linéariser l'équation autour de ce point. On obtient alors la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{III.6}$$

Où  $A$  et  $B$  sont des matrices à coefficients constants de dimensions respectives  $2n \times 2n$  et  $2n \times r$ .

L'équation (III.6) est très largement utilisée en contrôle des systèmes linéaires. Pour décrire le système du point de vue de sa sortie, on lui adjoint souvent une seconde équation, appelée équation de sortie ou d'observation. Le système est alors complètement défini par ses équations dynamiques:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{III.7}$$

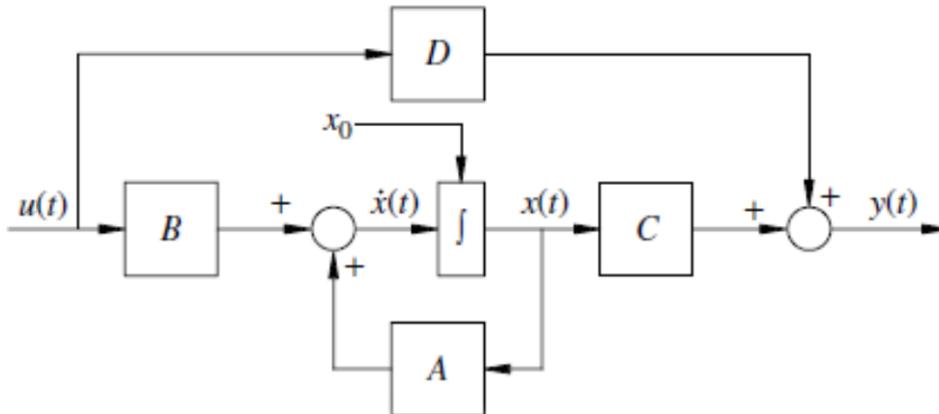


Figure III.1 : diagramme de bloc d'une équation d'état

Où  $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)]^T$  est le vecteur de sortie.  $C$  et  $D$  sont des matrices de dimensions respectives  $q \times 2n$  et  $q \times r$ , dont les termes sont en général constants. Le plus souvent, les sorties ne dépendent pas explicitement des entrées, de telle sorte que (III.7) se réduit à (III.8).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{III.8}$$

### III.2 Cas général d'un système amorti

Considérons un système discrétisé à  $n$  degré de liberté présentant un amortissement de type visqueux et régi par l'équation III.1 :

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = Q(t) \quad \text{III.9}$$

Avec

$q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]$  : Vecteur des coordonnées généralisées,

$Q(t) = [Q_1(t) \ Q_2(t) \ \dots \ Q_n(t)]$  : Vecteur des forces généralisées appliquées,

$M$  : Matrice des masses linéaires,

$C$  : Matrice d'amortissement,

$K$  : Matrice des raideurs linéaires.

Le système conservatif associé est défini par :

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad \text{III.10}$$

La solution de l'équation III.10 est :

$$q(t) = Xe^{i\omega t} \quad \text{III.11}$$

Ou  $w$  est la fréquence de vibration et  $X$  est le vecteur de  $n$  dimensions noté forme modale. Chaque fréquence naturelle a ou moins une forme modale correspondante. La solution générale est une superposition linéaire sur tous les modes possibles.

L'équation de fréquence ou valeur propre est définie par :

$$-w^2MX + KX = 0 \quad \text{III.12}$$

La solution  $X=0$  est obtenue sauf qu'il est

$$\det(M^{-1}K - w^2I) = 0 \quad \text{III.13}$$

$w^2$  doit être une valeur propre de  $M^{-1}K$ , cette forme est appelée équation caractéristique. Le carré de la valeur propre réelle et positive a deux valeurs possibles, une positive et l'autre négative. Bien que, les deux utilisent pour développer la solution générale, la racine positive est identifiée comme une fréquence naturelle. La forme modale est le vecteur propre correspondant.

### III.3 La fréquence naturelle et la forme modale

En général, dans les problèmes de vibration, l'équation caractéristique n'a que des racines réelles puisque les matrices considérées sont symétriques. En supposant que toutes les valeurs propres de  $[M]^{-1} [K]$  correspondant aux matrices de masse symétrique et de rigidité sont non négatives.[44]

Alors il existe  $n$ -réelles fréquences naturelles qui peuvent être organisées par  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \omega_n$ . Chaque valeur propre distincte  $\omega_i^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , correspond un vecteur propre  $X_i$ , qui satisfait

$$M^{-1}KX_i = \omega_i^2 X_i \quad \text{III.14}$$

Cette forme modale  $X_i$  est un vecteur colonne de dimension  $n$  de la forme

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{in} \end{bmatrix} \quad \text{III.15}$$

Cette forme modale n'est pas unique. Le vecteur propre est unique seulement pour une multiplication arbitraire constante. Un régime normalisé existe tel que la constante est choisie de sorte que le vecteur propre satisfait une condition externe imposée. La complexité algébrique de la solution augmente de façon exponentielle avec le nombre de degrés de liberté. Par conséquent, les méthodes numériques, qui ne nécessitent pas l'évaluation de l'équation caractéristique, sont utilisées pour les systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

La solution de III.1 s'exprime alors sous la forme d'une somme de contributions modales :

$$q(t) = \sum_{i=1}^n X_i p_i \quad \text{III.16}$$

Avec  $p_i$  : amplitude du mode  $i$  ou coordonnée modale à l'instant  $t$ .

### III.4 Relation d'orthogonalité

Les formes quadratiques

$$\begin{cases} X_i^T M X_i = \gamma_i, \\ X_i^T K X_i = \mu_i \end{cases} \quad \text{III.17}$$

$\gamma_i, \mu_i$  Sont respectivement les raideurs et masses généralisées. Elles mesurent respectivement la contribution  $i$  à l'énergie de déformation et à l'énergie cinétique du système.

Dans la solution du problème vibratoire de multi degré de liberté, une relation fondamentale existe entre les principaux modes. Considérons les deux principaux modes d'oscillation d'un système de plusieurs degrés de liberté. On note que ces  $r^{\text{th}}$  et  $s^{\text{th}}$  modes et les valeurs propres correspondantes sont  $\omega_r^2$  et  $\omega_s^2$ , alors il peut être démontré que :

$$\begin{cases} X_r^T M X_s = I, & r \neq s \\ X_r^T K X_s = \text{diag } \omega^2 & r = s \end{cases} \quad \text{III.18}$$

Cette équation définit la forme d'orthogonalité entre les principaux modes de vibration, à partir de  $M$  qui est une matrice diagonale et  $K$  n'est pas diagonale, il est généralement plus simple d'écrire la matrice d'orthogonalité par rapport à  $M$ . La relation d'orthogonalité par rapport à  $M$  est exprimé par :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i^r x_j^s \quad \text{III.11}$$

En substituant III.18 dans III.9 et en utilisant les relations d'orthogonalité III.17 entre modes, on obtient les équations modales suivantes :

$$\ddot{p}_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_{is}}{\mu_i} \dot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) = f_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{III.19}$$

Avec  $f_i(t) = \frac{w_i^T Q(t)}{\mu_i}$  : facteur de participation du mode  $i$  à l'excitation,

$\beta_{is} = \omega_i^T C \omega_s$  : Coefficients d'amortissement.

Les équations modales III.19 montrent qu'en présence d'amortissement et à moins de faire des hypothèses restrictives, un système amorti à  $n$  degré de liberté ne se ramène pas à un système à un degré de liberté découplés. Les équations modales restent en effet couplées par les coefficients d'amortissement  $\beta_{is}$  et l'approche modale perd donc beaucoup de son intérêt.

### III.5 Cas d'un système présentant un amortissement diagonal

On distingue cependant un type d'amortissement pour lequel les équations modales sont découplées ; l'amortissement diagonal définit par :

$$\beta_{is} = 0, \quad i \neq s \quad \text{III.20}$$

En considérant à la fois les équations III.20 et III.19, on obtient pour un système présentant un amortissement diagonal les équations modales suivantes :

$$\ddot{p}_i(t) + \frac{\beta_i}{\mu_i} \dot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) = f_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{III.21}$$

Avec  $\beta_i = \beta_{ii}$  : amortissement diagonal.

Par analogie avec les systèmes à un degré de liberté, on définit un coefficient d'amortissement modal :

$$\xi_i = \frac{\beta_i}{2\omega_i\mu_i}, k = 1, \dots, n \quad \text{III.22}$$

De telle sorte que les équations modales s'écrivent finalement :

$$\ddot{p}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) = f_i(t), i = 1, \dots, n \quad \text{III.23}$$

### III.6 Cas d'un système d'amortissement proportionnel

Pour les systèmes spéciaux, où la matrice d'amortissement est reliée linéairement par les matrices de masse et raideur, ces systèmes sont appelés systèmes d'amortissement proportionnel ou

$$C = \alpha K + \psi M \quad \text{III.25}$$

Et  $\alpha$  et  $\psi$  sont des constantes.

L'équation III.19 pour un système d'amortissement proportionnel peut s'écrire comme :

$$M\ddot{q}(t) + (\alpha K + \psi M)\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \quad \text{III.26}$$

La matrice triple qui produit la propriété d'orthogonalité, est exprimé par

$$X^T M X \{\ddot{p}(t)\} + X^T (\alpha K + \psi M) X \{\dot{p}(t)\} + X^T K X \{p(t)\} = Q(t) \quad \text{III.27}$$

L'équation III.19 peut être découplée dans l'équation gouvernant chaque degré de liberté,

$$\ddot{p}_i(t) + (\alpha\omega_i^2 + \psi)\dot{p}_i(t) + \omega_i^2 p_i(t) = f_i(t), i = 1, \dots, n \quad \text{III.28}$$

$$\text{Telle que } \xi_i = 1/2 \left( \alpha\omega_i + \frac{\psi}{\omega_i} \right)$$

On peut ainsi construire une représentation d'état sur la base modale :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad \text{III.29}$$

Avec A, B et C : matrices de dimensions respectives  $2n \times 2n$ ,  $2n \times r$  et  $q \times n$ .

$z(t)$  est constitué de coordonnées et vitesses modales, ce qui lui donne un sens physique évident :

$$z(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} \quad \text{III.30}$$

Avec

$$\begin{cases} p(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)]^T : \text{vecteur des coordonnées modales,} \\ \dot{p}(t) = [\dot{p}_1(t), \dot{p}_2(t), \dots, \dot{p}_n(t)]^T : \text{vecteur des vitesses modales,} \end{cases}$$

La matrice A est définie comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 & -2\xi\Omega \end{bmatrix} \quad \text{III.31}$$

Avec

$$\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n),$$

$$\xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

La matrice B caractérise la participation modale de l'entrée et s'écrit, pour un vecteur de contrôle de dimension r :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \dots & \omega_{1r} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \dots & \omega_{2r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \dots & \omega_{nr} \end{bmatrix} \quad \text{III.32}$$

Avec

$\omega_{is}$  : Valeur du mode i à la position de l'actionneur s.

De la même façon, la matrice C caractérise la participation modale de sortie et s'écrit, pour f mesures de déplacement et g mesures de vitesse :

$$C = \begin{bmatrix} C_d & 0 \\ 0 & C_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \omega_{f1} & \dots & \omega_{fn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_{11} & \dots & \omega_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \omega_{g1} & \dots & \omega_{g1} \end{bmatrix} \quad \text{III.33}$$

Avec

$\omega_{is}$  : Valeur du mode i à la position de capteur i

### III.7 Fonction de transfert

La fonction de transfert linéaire d'un système invariant dans le temps est définie comme étant la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle, avec toutes les conditions initiales fixées à zéro.

Soit G (s) représente la fonction de transfert d'une unique entrée/ sortie (SISO) du système, avec l'entrée (u(t)), la sortie (y(t)), et la réponse d'impulsion g (t). The transfer function G(s) is related to the Laplace transform of the input and the output through the following relation:

La fonction de transfert G (s) est lié à la transformée de Laplace de l'entrée et de la sortie par la relation suivante:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + b_0} \quad \text{III.34}$$

Ou  $m \geq n$ , Les racines du polynôme du numérateur de G(s) sont appelées les zéro du système. Les racines du polynôme du dénominateur de G(s) sont appelées les pôles. Posant le dénominateur du polynôme égal à zéro, l'équation caractéristique devient

$$s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + b_0 = 0 \quad \text{III.35}$$

La réponse de système est reliée directement au plan s des positions des pôles et zéros.

### III.8 Les propriétés de fonction de transfert

- La fonction de transfert est définie seulement pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Elle n'est pas définie pour les systèmes non linéaires.
- La fonction de transfert entre une variable d'entrée et une variable de sortie d'un système est définie comme une transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. Alternativement, la fonction de transfert entre une paire de variables d'entrée et de sortie est le rapport de la transformée de Laplace de la sortie à la transformée de Laplace de l'entrée.
- Toutes les conditions initiales des systèmes tendent vers zéro.
- La fonction de transfert est indépendante de l'entrée du système.
- La fonction de transfert d'un système continu de données est exprimée uniquement en fonction de la variable complexe  $s$ .

On introduit maintenant une fonction transfert du système excité par un amortissement de forme

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) = f_e \quad \text{III.36}$$

Pour créer une fonction de transfert on applique une transformation de Laplace à notre équation. On note  $s$  l'opérateur de Laplace, ainsi on transforme la coordonnée  $q(t)$  à  $Q(s)$  et la force extérieure  $f_e(t)$  à  $F_e(s)$ . On obtient l'équation suivante :

$$ms^2Q(s) + bsQ(s) + kQ(s) = F_e(s) \quad \text{III.37}$$

La fonction de transfert  $G(s)$  sera un rapport de transformation de Laplace de la sortie sur l'entrée, l'équation précédente devient

$$G(s) = \frac{Q(s)}{F_e(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad \text{III.38}$$

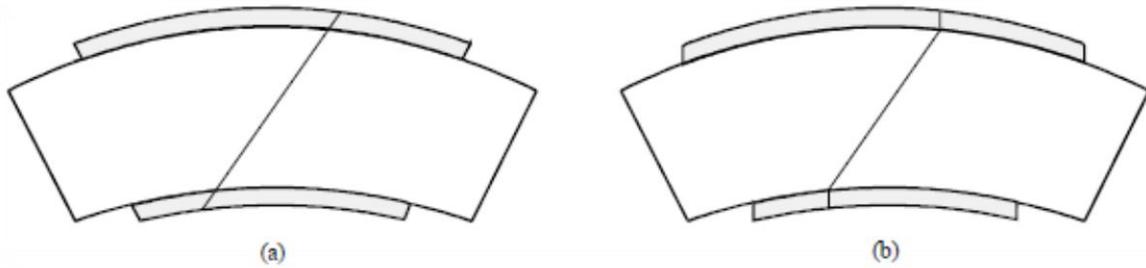
Une autre représentation de la fonction de transfert est donnée par la fréquence naturelle  $\omega_n$  et le coefficient d'amortissement  $\xi$ . On divise la fonction de transfert précédente par la masse on obtient :

$$G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{III.39}$$

Où  $b/m = 2\xi\omega_n$  et  $\xi$  est le coefficient d'amortissement.

### III.9 Modélisation analytique

Cette technique de modélisation ne peut, bien évidemment, s'appliquer que pour des cas particuliers et simples. Néanmoins, elle garde son importance dans la façon d'aborder la physique du problème et de pouvoir mettre en évidence les paramètres dimensionnant. L'expression analytique de la piézo-actuation est déduite du traitement direct des équations d'équilibre et des équations fondamentales de la piézoélectricité sur des poutres instrumentées par des piézos-laminés. La dérivation par (Preumont [20]) de l'expression analytique des moments induits par des laminés piézoélectriques sur une poutre en se basant sur les hypothèses de déformation plane de cette poutre (hypothèse de Bernoulli-Euler, figure III.2 (a)) mais en supposant que les déformations induites dans les couches piézoélectriques sont uniformes (figure III.2(b)). Il a été montré par (Crawley et Anderson [ ]) que cette hypothèse est acceptable pour une épaisseur de laminaé négligeable devant celle de la poutre ainsi que pour une épaisseur de couche adhésive négligeable.



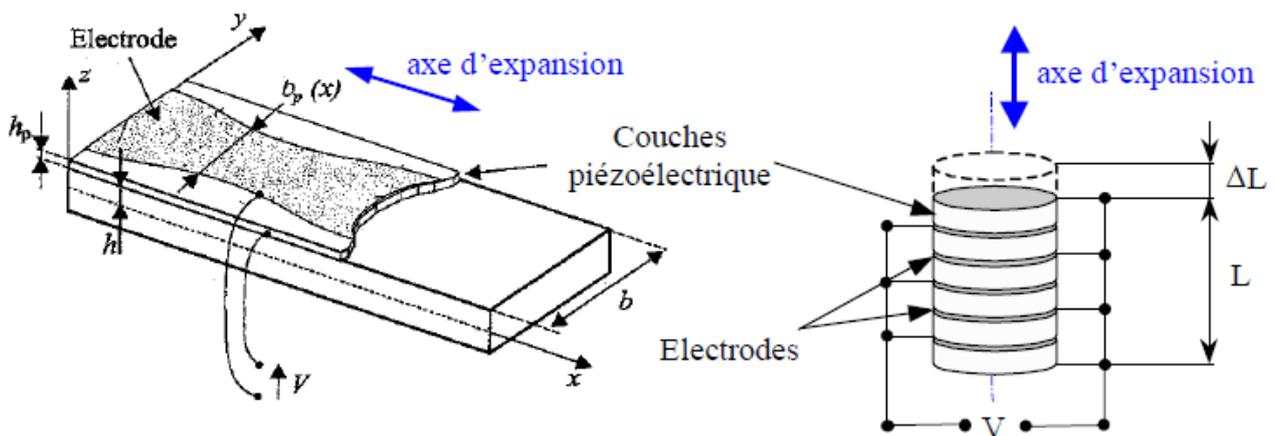
**Figure III.2 :** Profil des déformations dans une poutre piézo-électrique flexion, (a) profil d'Euler-Bernoulli, (b) profil à déformation uniforme dans les couches piézo-électrique

### III.10 Cas de l'actionneur

Soit une poutre à section uniforme, symétriquement instrumentée par un paire de laminés piézoélectriques pseudo-collocalisés qui présentent un profil d'électrodes  $b_p(x)$  (voir figure III.3). L'élément supérieur, excité par une tension électrique  $V$ , fonctionne en mode actuateur, tandis que l'élément inférieur fonctionne en mode senseur. Cette étude néglige les effets liés aux couches adhésives, ce qui revient à considérer que la raideur introduite par ces couches devient négligeable pour de faibles épaisseurs. Une étude plus approfondie montre que cette hypothèse est respectée pour des actionneurs piézoélectriques longs et minces, collés au moyen d'une couche adhésive présentant un module de cisaillement suffisamment important. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli de conservation de section droite de la poutre étant supposée respectée, la déformation axiale de la poutre est alors fonction de sa courbure et s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z w'' \quad \text{III.40}$$

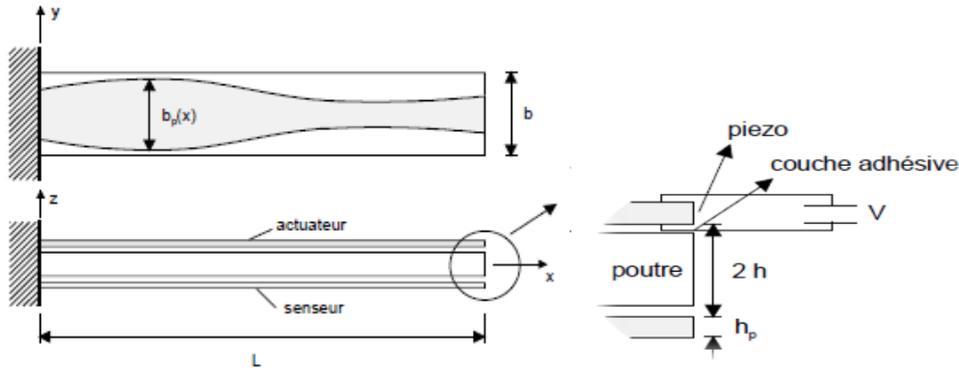
Où  $w$  est la déformation axiale de la poutre et  $z$ , la distance par rapport la fibre neutre de cette poutre.



(a) Configuration laminaire

(b) Configuration à empilement

Actionneur piézo-électrique (a) configuration laminaire (b) configuration à empilement.



**Figure III.3 :** Poutre instrumentée par une paire de piezo-laminés pseudo-collocalisés.[20]

L'état de contrainte longitudinale de l'actionneur piézo-électrique est obtenu à partir de l'expression :

$$\sigma_{11}^a = E_p \varepsilon_{11} - e_{31} \frac{V}{h_p} \quad \text{III.41.a}$$

avec  $E_p$  le module de Young du matériau piézo-électrique, et  $e_{31} = E_p d_{31}$ . De même, la contrainte longitudinale dans la poutre vaut :

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} \quad \text{III.41.b}$$

Tel que  $E$  est le module de Young de la poutre,  $V$  est la tension électrique d'actionneur,  $h_p$  est l'épaisseur de la couche piézo-électrique, et  $d_{31}$  est la constante piézo-électrique transversale. L'équation de l'équilibre de la poutre est :

$$m\ddot{w} = -\frac{d^2M}{dx^2} = -M'' \quad \text{III.42}$$

Regroupant les équations [III.40, III.41 et III.42] et en supposant l'épaisseur des laminés négligeable devant l'épaisseur de la poutre ( $h_p \ll h$ ), le couple équivalent sur une section de la poutre est obtenu en intégrant le produit des contraintes longitudinales par leurs bras de levier autour de la fibre neutre de la poutre, soit :

$$M = -\int_A \sigma_{11} z dA = EIw'' + E_p d_{31} \frac{V}{h_p} [h_p \cdot b_p(x)]h \quad \text{III.43}$$

$$M = EIw'' + E_p d_{31} V b_p(x)h \quad \text{III.45}$$

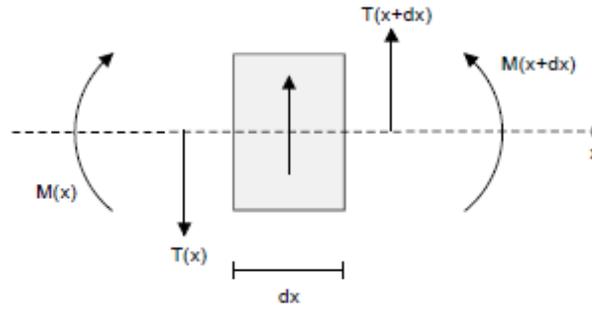
L'approximation au premier degré de l'équilibre local, tel que décrit à la figure (III.4), d'un segment de poutre est donnée par :

$$mw'' + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = P(x) \quad \text{III.46}$$

Ou  $m$  et  $p(x)$  sont respectivement la masse linéique de la poutre et une éventuelle charge distribuée par unité de longueur. Les relations moment de flexion/ courbure et moment de flexion/ effort tranchant sont données, quant- à elles, par :

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{III.47}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T(x) \quad \text{III.48}$$

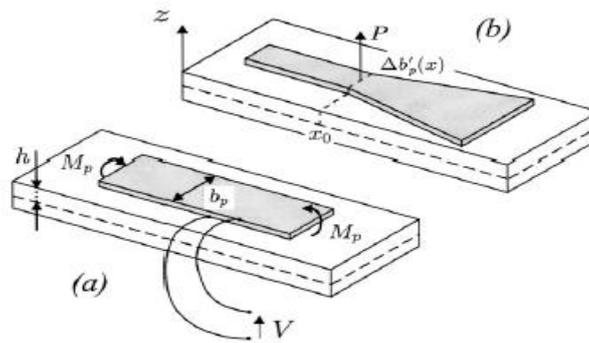


**Figure III.4 :** Equilibre local d'un segment de poutre

Après substitution d'équation III.45 dans III.46, on obtient :

$$mw'' + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = E_p d_{31} V b_p''(x) h \quad \text{III.49}$$

En comparant avec l'Equ. (III.49), nous voyons que lorsque la largeur des électrodes varie le long de la poutre, l'actionneur piézo-électrique produit une charge répartie proportionnelle à la dérivée seconde de  $b_p(x)$ .



**Figure III.5 :** (a) Actionneur à film piézo-électrique avec une largeur constante  $b_p$   
(b) changement soudain de la dérivée  $b'_p(x)$  à  $x_0$ .

Similairement, pour une électrode de largeur constante, l'actionneur distribué est équivalent à un moment concentré  $M_p$  dans les frontières de l'actionneur, comme représenté sur la figure III.5. De l'équation III. 45, le moment piézoélectrique est :

$$M_p = -E_p d_{31} V b_p h \quad \text{III.50}$$

De façon équivalente, un changement soudain dans la première dérivée  $b'(x)$  à la position  $x_0$  produit une force ponctuelle à la discontinuité Figure (III.5) :

$$P = -E_p d_{31} V [b'_p(x_0^+) - b'_p(x_0^-)] \quad \text{III.51}$$

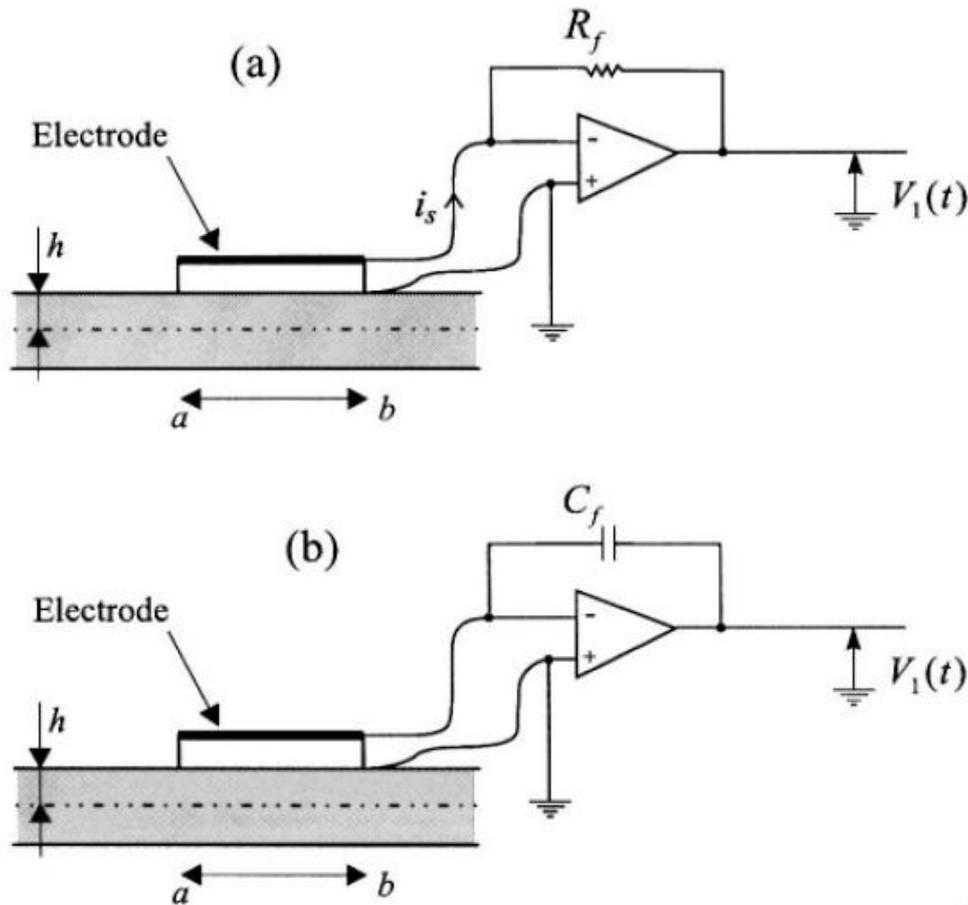
Ce résultat est facilement obtenu en intégrant la partie droite de l'Equ. (III,49) sur un petit intervalle environ  $x_0$  et en prenant la limite lorsque la taille de l'intervalle tend vers zéro.

Ces résultats sont obtenue par l'intégration de la coté droite de l'équation III.46 sur un petit intervalle  $x_0$  et prend la limite lorsque la taille de l'intervalle tend vers zéro. Les équations III.46 à III.48 donnent les charges équivalentes associées aux différentes formes des électrodes.

On note que l'autorité d'actionnement est fortement dépendante de la forme de l'électrode et qu'elle

est proportionnelle à la constante piézoélectrique  $e_{31} = E_p d_{31}$ .

Les équations (III.46) à (III.48) sont basés sur l'hypothèse que l'épaisseur de la bande piézoélectrique est beaucoup plus petite que celle du faisceau ( $h_p \ll h$ ); les calculs plus précis montrent que la distance figurant dans ces équations est effectivement la distance entre le plan médian de la poutre et le plan médian de la plaquette piézoélectrique.



**Figure III.6 :** Capteur à film piézoélectrique connecté à : (a)-un amplificateur de courant; (b)-amplificateur de charge;

### III.11 Cas du capteur laminé

En examinant un capteur laminaire avec des électrodes court-circuitées, de sorte qu'un champ  $\mathbf{E}$  appliqué soit nul. Selon l'Equ. (I.4), la quantité de charge par unité de surface est liée à la souche par  $D = eS$  ou, avec des notations engineering structurales, le déplacement électrique vu par le capteur piézoélectrique peut s'exprimer par:

$$D = E_p d_{31} \varepsilon_{11} \quad \text{III.52}$$

La combinaison avec l'Equ. (III.40) et en supposant que la souche est constante sur toute l'épaisseur de la plaque piezo (conséquence de  $h_p \ll h$ ), nous obtenons:

$$D = -E_p d_{31} h w'' \quad \text{III.53}$$

La charge électrique correspondante est égale à l'intégrale du déplacement électrique sur la surface d'électrode,

$$Q = \int_a^b D b_p(x) dx = -E_p h \int_a^b d_{31} w'' b_p(x) dx \quad \text{III.54}$$

Dans le cas particulier d'une largeur d'électrode constante  $b_p(x) = Cste$ , la charge électrique totale est alors directement proportionnelle à la différence des pentes vues aux extrémités du senseur, soit :

$$Q = -E_p d_{31} h b_{p(x)} \left[ \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|_b - \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|_a \right] \quad \text{III.55}$$

Si le profil de polarisation est uniforme (constant), la tension de sortie de l'amplificateur de courant (figure III.6.a) est

$$v_0(t) = -R_f i_s(t) = -R_f \dot{Q} = R_f E_p d_{31} h \int_a^b b_p(x) w'' dx \quad \text{III.56}$$

Ou  $R_f$  est la constante de d'amplification. Ainsi, le signal de sortie est proportionnel à l'intégrale de la dérivée dans le temps de la courbure pondérée par la largeur de l'électrode. Si un amplificateur de charge est utilisé (Figure III.6 b), la tension de sortie est proportionnelle à la charge électrique dans l'électrode:

$$v_0(t) = -\frac{Q}{C_f} = \frac{E_p d_{31} h}{C_f} \int_a^b b_p(x) w'' dx \quad \text{III.57}$$

$$\text{Tel que } C_p = \frac{l w e_{33}}{t} \quad [26]$$

Si la largeur d'électrode  $b_p$ , est constante,

$$v_0(t) = \frac{E_p d_{31} h}{C_f} [w'(b) - w'(a)] \quad \text{III.58}$$

Quant à l'actionneur, on constate que la capacité de détection est proportionnelle à  $e_{31} = E_p d_{31}$  ces résultats supposent que  $h_p \ll h$  ; un calcul plus précis montre que la distance  $h$  apparaissant dans l'Equ (III.57) est en fait la distance entre le plan médian du faisceau et le plan médian de l'élément piézo.

### III.12 Filtrage modale

Preumont [20] applique ces développements aux senseurs/actuateurs piézoélectriques distribués, en les généralisant pour mettre en évidence les effets liés aux empilements de laminés piézoélectriques. En se basant sur le principe de superposition, il montre la sensibilité aux quatre paramètres suivants: le type de matériaux, la forme des électrodes, le profil de polarisation et l'orientation des axes structuraux. Le concept de filtre modal y est aussi décrit. Ce concept intéressant tient compte de la facilité évidente de mettre à forme le profil d'une électrode (par exemple : par procédé lithographique, solvant, ...).

Dans le cas d'une poutre simplement appuyée, le principe d'orthogonalité des modes propres  $Y$  d'une poutre de longueur  $L$  et de section uniforme se réduit à l'expression suivante :

$$\int_0^1 Y_i(x) Y_j(x) dx = \begin{cases} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{III.59}$$

De même,

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 Y_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} dx \begin{cases} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{III.60}$$

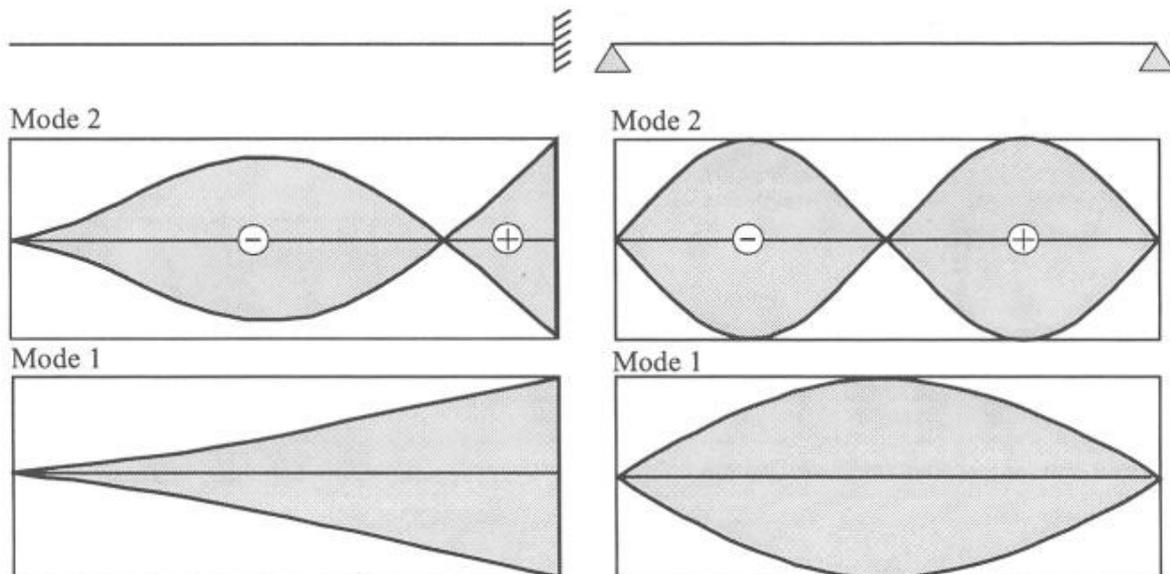
La déformation transversale  $w(x, t)$  d'une poutre peut s'exprimer par une combinaison linéaire de l'ensemble des modes de la poutre :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) Y_i(x) \quad \text{III.61}$$

En introduisant (III.61) dans l'équation du senseur piézoélectrique (III.54), on obtient :

$$Q = -E_p d_{31} h \sum_{i=1}^{\infty} \left[ q_i(t) \int_a^b \frac{\partial^2 Y_i(x)}{\partial x^2} b_p(x) dx \right] \quad \text{III.62}$$

Cette dernière expression montre qu'il est ainsi possible de filtrer spatialement un ensemble de modes si l'on parvient à annuler le terme intégral. Cette condition est respectée si l'on choisit, Le senseur modal ainsi créé collectera donc des charges électriques via ses électrodes en accomplissant un processus de filtrage dans le domaine spatial. A titre d'exemple, la figure III.7 présente le profil d'électrode nécessaire au filtrage modal du premier mode structural d'une poutre bi-appuyée.



**Figure III.7 :** Filtres modaux pour les deux modes d'une poutre pour différentes conditions aux limites: (a) poutre encastée, (b) appui simple

La figure III.7 illustre les filtres modaux utilisés pour un faisceau uniforme avec différentes conditions aux limites, le changement de signe indique un changement de la polarité de la bande, ce qui équivaut à des valeurs négatives comme une alternative, la partie de la sonde de polarité négative peut se coller sur la face opposée de la poutre. On remarquera que la forme de l'électrode de la poutre en appui simple est la même que la forme de mode, tandis que pour le faisceau en porte à faux (poutre encastée), la forme de l'électrode est celle de la forme de mode d'une poutre encastée à l'extrémité opposée.

### III.13 Contrôle de vibration d'une poutre

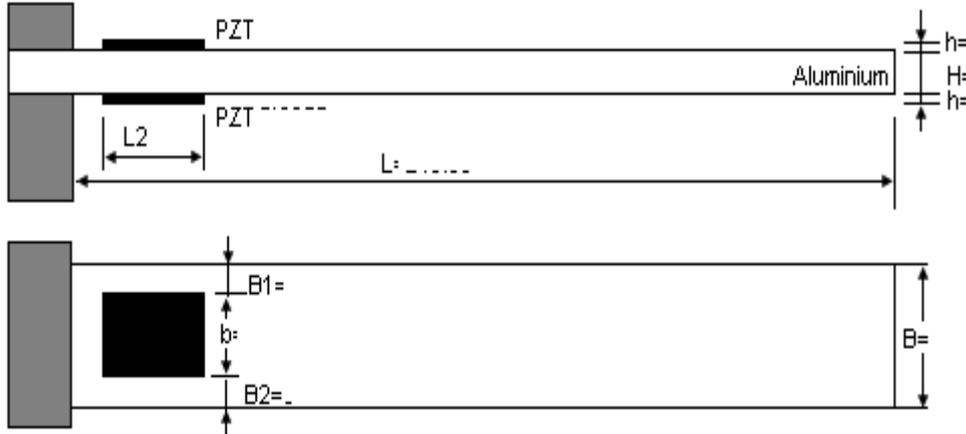
La poutre est un système de paramètre distribuée, qui en théorie peut avoir des nombres infinis de modes de vibration avec association des formes modales et des fréquences naturelles. Dans ce

sens, elle est un système d'ordre infini avec infinité de degré de liberté. Le calcul de quantité modale et le contrôle associée peuvent être assez complexe. Heureusement, juste quelques modes peuvent être conserve un model dynamique, bien que défini une contrôle simple. Quelque concept de contrôle de vibration dans la poutre est considéré en cette section. Le traitement présenter est supposé comme une illustration de pertinentes techniques et ce n'est pas dire qu'il est exhaustif. Ces techniques peuvent être relie avec autre types de système continues comme des poutres avec déferents conditions au limite et des plaques. Parce que les techniques de contrôle dépend de model, on sera premièrement illustré la procédure de l'obtention d'état initial model pour une poutre.

### III.14 Modèle d'état initial d'une poutre

On prend l'exemple de la structure illustré à la figure III.8. La poutre est fixée à une extrémité et libre à l'autre extrémité. Deux plaques de céramique piézoélectrique : un actionneur et un capteur (PZT) sont utilisés comme le montre la figure III.2. La théorie d'Euler Bernoulli est utilisée pour obtenir L'équation aux dérivées partielles décrivant la dynamique de la poutre flexible.

$$\rho_p A_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E_p I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = M \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \quad \text{III.63}$$



**Figure III.8:** Modèle de poutre étudiée

Où R est la fonction de localisation généralisée

$$R(x) = H(x - x_{a1}) - H(x - x_{a2}) \quad \text{III.64}$$

Et H est la fonction de "Heaviside",  $x_{a1}$  et  $x_{a2}$  sont les emplacements des actionneurs. Le déplacement transversal est exprimé en termes d'une série infinie.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) \phi_i(t) \quad \text{III.65}$$

Où  $Y_i(x)$  est la ième forme modale pour la poutre encastree et  $\phi_i(t)$  est les déplacements généralisés. La solution homogène de l'équation III.63 est :

$$Y(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x \quad \text{III.66}$$

Pour une poutre encastree, les conditions aux limites sont :

$$Y(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0 \quad \text{III.67.a}$$

$$\frac{\partial Y(0)}{\partial x} = 0 \Rightarrow B + D = 0 \quad \text{III.67.b}$$

$$\frac{\partial^2 Y(l)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow -A \cos \beta l - B \sin \beta l + C \cosh \beta l + D \sinh \beta l = 0 \quad \text{III.67.c}$$

$$\frac{\partial^3 Y(l)}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow A \cos \beta l - B \sin \beta l + C \cosh \beta l + D \sinh \beta l = 0 \quad \text{III.67.d}$$

On peut écrire ces équations comme une équation d'un seul vecteur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\sin\beta l & -\cos\beta l & \sinh\beta l & \cosh\beta l \\ \sin\beta l & -\cos\beta l & \sinh\beta l & \cosh\beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{III.68}$$

Cette équation admet une solution seulement si le déterminant égal à zéro, après le calcul de déterminant en avoir :

$$\cos\beta l \cdot \cosh\beta l = -1 \quad \text{III.68.a}$$

Cette équation est satisfaite pour un nombre infini de choix de  $\beta$ . Les cinq premières solutions sont

$$\beta_1 l = 1.875104069$$

$$\beta_2 l = 4.69401133$$

$$\beta_3 l = 7.85475743$$

La forme modale est donnée par :

$$Y_i(x) = C_i [\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x) - \frac{\cos(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x)}{\sin(\beta_i x) + \sinh(\beta_i x)} * (\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x))] \quad \text{III.69}$$

Ou la constante  $C_i$ , peut être déterminée par les expressions d'orthogonalité :

$$\int_0^l Y_i^2(x) dx = 1 \quad \text{III.70}$$

Et

$$\int_0^l Y_i Y_j dx = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{III.70.a}$$

### III.14.a Actionneur

Une plaque PZT (patch) est collé sur la partie haute de la structure (poutre) avec de la colle époxy comme le montre la Figure III.8. Le patch PZT a une capacité d'actionner, qui est gérée par la constante piézoélectrique  $d_{31}$ .

L'indice 3 dans  $d_{31}$  implique que la charge est perçue sur les surfaces polarisées (Fig. (III.8)), et 1 implique que la force est générée sur la longitudinale de l'axe x. Quand une tension ( $V_a$ ) est appliquée dans la même direction que la polarisation du matériau piézocéramique, le matériau est allongé sur la longueur de l'axe x. Le moment de flexion ( $M_a$ ) est illustré dans la Figure III.9. Quand une tension inverse ( $V_a$ ) est appliquée suivant la direction polarisée, le matériau est contracté sur la longueur de l'axe x [2]. Le moment induit par la tension est donné par :

$$M_a(t) = C_a V_a(t) \quad \text{III.71}$$

Ou la constante,  $C_a$  est donnée par

$$C_a = \left( \frac{1}{2(E_a d_{31} b_a (h_p + h_a))} \right) \quad \text{III.72}$$

La force totale distribuée, est donnée par :

$$M_a \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} = q(x, t) \quad \text{III.73}$$

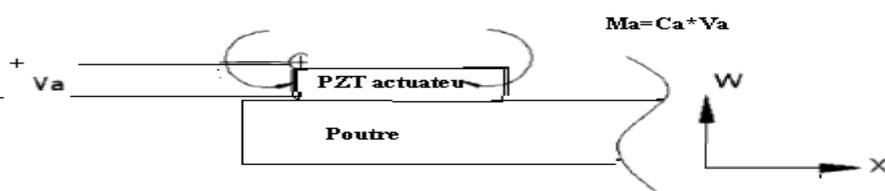


Figure III.9 : Moment d'actionneur

### III.14.b Capteur

La déformation structurelle de la poutre provoque une déformation du capteur piézoélectrique. La charge électrique de la sonde piézo-céramique ( $Q_s(t)$ ) est égale à l'intégrale de la charge électrique distribuée sur toute la longueur du matériau piézoélectrique et multipliée par la largeur du capteur ( $b_s$ ) [1]. La distribution de charge électrique ( $q(x, t)$ ) est donnée comme suite :

$$q(x, t) = \left( \frac{k_{31}^2}{g_{31}} \right) \varepsilon_c(x, t) \quad \text{III.74}$$

Où  $k_{31}$  est le coefficient de couplage,  $g_{31}$  désigne le coefficient de tension piézo-électrique, et  $\varepsilon_c(x, t)$  est la déformation dans le capteur. La déformation  $\varepsilon_c(x, t)$  est liée à la courbure de la poutre est donnée comme suite :

$$\varepsilon_c(x, t) = -\left( \frac{h_p}{2} + h_s \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{III.75}$$

La charge totale accumulée sur la couche de détection peut être compté en intégrant  $q(x, t)$  sur toute la surface du capteur piézo-électrique.

$$Q_s(t) = -b_s \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} q(x, t) dx = -b_s \left( \frac{t_p}{2} + t_s \right) \left( \frac{k_{31}^2}{g_{31}} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x_{s1}}^{x_{s2}} \quad \text{III.76}$$

### III.14.c La fonction de transfert :

#### III.14.c.1 Avec l'actionneur

La substitution de l'équation III.65 dans III.63 donne :

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\rho_p A_p Y_i(x) \ddot{\phi}_i(t) + E_p I Y_i''''(x) \phi_i(t)] = M \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \quad \text{III.77}$$

On utilisant l'expression d'orthogonalité (equ.III.70), l'équation précédente est intégré par  $\int_0^l Y_i(x) dx$

$$\left( \rho_p A_p \int_0^l Y_i^2(x) dx \right) \ddot{\phi}_i(t) + \left( E_p I \int_0^l Y_i(x) Y_i''''(x) dx \right) \phi_i(t) = M \int_0^l \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} Y_i(x) dx \quad \text{III.78}$$

Ou

$$Y_i''''(x) = \lambda_i^4 Y_i(x) \quad \text{III.78.a}$$

L'équation précédente devient

$$\left( \rho_p A_p \right) \ddot{\phi}_i(t) + \left( E_p I \lambda_i^4 \right) \phi_i(t) = M \int_0^l \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} Y_i(x) dx \quad \text{III.78.b}$$

Qu'est simplifiée l'équation III.78 a une équation de second ordre

$$\ddot{\phi}_i(t) + w_{ni}^2 \phi_i(t) = k_a [Y_i'(x_{a2}) - Y_i'(x_{a1})] V_a \quad \text{III.79}$$

Ou

$$w_{ni}^2 = \frac{E_p I}{\rho_p A_p} \lambda_i^4 \quad \text{III.80}$$

$$k_a = \frac{\left( \frac{1}{2} E_a d_{31} b_a (h_a + h_p) \right)}{\rho_p A_p} \quad \text{III.81}$$

On introduit le coefficient d'amortissement  $\xi$ , l'équation III.79 devient :

$$\ddot{\phi}_i(t) + 2\xi_i w_{in} \dot{\phi}_i(t) + w_{in}^2 \phi_i(t) = k_a [Y_i'(x_{a2}) - Y_i'(x_{a1})] V_a \quad \text{III.80}$$

Par l'utilisation de la transformation de Laplace

$$\frac{w(x,s)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_a w_i(x) [w'_i(x_{a2}) - w'_i(x_{a1})]}{s^2 + 2\xi_i w_{in} s + w_{in}^2} \quad \text{III.81}$$

### III.14.c.2 Avec capteur

La charge totale distribuée du capteur est :

$$Q_s(t) = -b_s \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} q(x,t) dx = -b_s \left( \frac{h_p}{2} + h_s \right) \left( \frac{k_{31}^2}{g_{31}} \right) \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x_{s1}}^{x_{s2}} \quad \text{III.82}$$

Avec

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right|_{x_{s1}}^{x_{s2}} = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) [Y'_i(x_{a2}) - Y'_i(x_{a1})] \quad \text{III.83}$$

On prend

$$k_s = -b_s \left( \frac{h_p}{2} + h_s \right) \left( \frac{k_{31}^2}{g_{31}} \right) \quad \text{III.84}$$

La relation entre la tension  $V_s(t)$  et la charge totale,  $Q(t)$  est donnée par :

$$V_s(t) = \frac{Q_s(t)}{C_s b_s (x_{s2} - x_{s1})} \quad \text{III.85}$$

Ou

$C_s$  est la capacitance par unité de surface du capteur piézoélectrique.

$C_s b_s (x_{s2} - x_{s1})$  est la surface du capteur piézoélectrique.

On substitue  $Q_s$  dans  $V_s(t)$  on obtient :

$$V_s = \frac{k_s \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) [Y'_i(x_{s2}) - Y'_i(x_{s1})]}{C_s b_s (x_{s2} - x_{s1})} \quad \text{III.86}$$

A partir de l'équation III.80

$$\phi_i(s) = \frac{k_a [Y'_i(x_{a2}) - Y'_i(x_{a1})]}{s^2 + 2\xi_i w_{in} s + w_{in}^2} V_a \quad \text{III.87}$$

On substitue l'équation III.87 dans III.86, on obtient l'équation III.88 qui est la fonction de transfert reliant la tension d'entrée de l'actionneur à la tension de sortie du capteur.

$$\frac{V_s(s)}{V_a(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_a k_s [Y'_i(x_{a2}) - Y'_i(x_{a1})] [Y'_i(x_{s2}) - Y'_i(x_{s1})]}{C_s b_s (x_{s2} - x_{s1}) (s^2 + 2\xi_i w_{in} s + w_{in}^2)} \quad \text{III.88}$$

### III.15 modèle par variable d'état

Pour un système de contrôle à retour d'état, la fonction de transfert (III.88) est transformée en une équation dynamique du vecteur d'état  $\dot{x}$ . La fonction de transfert du second ordre pour chaque mode nécessite deux variables d'état. Il existe trois modes et une entrée, donc une matrice d'état de 6 par 6 et une matrice d'entrée de 6 par 1 sont nécessaires. La sortie  $y$  est la tension du capteur, et aussi une combinaison de l'état des trois premiers modes de la poutre encastree. Les variables d'état sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(t) \\ x_2 &= \dot{\phi}_1(t) = \dot{x}_1 \\ x_3 &= \phi_3(t) \\ x_4 &= \dot{\phi}_4(t) = \dot{x}_4 \\ x_5 &= \phi_5(t) \\ x_6 &= \dot{\phi}_6(t) = \dot{x}_6 \end{aligned}$$

Ou le modèle de la matrice dynamique des variables d'états prend la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BV_a \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{III.89}$$

Ou les matrices A, B, C sont données en détail ci- dessous :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_{n1}^2 & -2\xi_1 w_{n1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_{n2}^2 & -2\xi_1 w_{n2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{n3}^2 & -2\xi_1 w_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + k_a \begin{bmatrix} Y'_1(x_{a2}) - Y'_1(x_{a1}) \\ 0 \\ Y'_2(x_{a2}) - Y'_2(x_{a1}) \\ 0 \\ Y'_3(x_{a2}) - Y'_3(x_{a1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{III.90}$$

$y =$

$$\frac{k_s}{c_s b_s (x_{s2} - x_{s1})} [Y'_1(x_{(s2)}) - Y'_1(x_{(s1)}) \quad 0 \quad Y'_2(x_{(s2)}) - Y'_2(x_{(s1)}) \quad 0 \quad Y'_3(x_{(s2)}) - Y'_3(x_{(s1)}) \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

III.91



### IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, on propose une application de la stratégie de contrôle développée précédemment. Comme exemple, on prend une poutre encastree instrumentée par un couple actionneur/capteur de type PZT (figure VI.11). L'actionneur et le capteur piézoélectrique sont placés dans deux positions différentes. L'objectif du contrôle retenu est la maîtrise des trois premiers modes de flexion en augmentant notamment l'amortissement de ces modes. L'algorithme de commande LQR est programmé sous Matlab puis utilisé pour simuler la structure. Pour la construction de la structure un code APDL Ansys 11.0 est utilisé.

### IV.2 Description du modèle

Les propriétés mécaniques et dimensionnelles de la poutre contrôlée sont mentionnées dans les tableaux VI.1 et VI.2

|                     |                                      |
|---------------------|--------------------------------------|
| Longueur 'L'        | 550 mm                               |
| Epaisseur 'h'       | 3 mm                                 |
| Largeur 'b'         | 50 mm                                |
| Densité 'ρ'         | 2770 kg/m <sup>3</sup>               |
| Module de Young 'E' | 65x10 <sup>10</sup> N/m <sup>2</sup> |

**Tableau VI.1 :** Propriété de la poutre

|                                  |                             |
|----------------------------------|-----------------------------|
| Longueur                         | 50 mm                       |
| Epaisseur                        | 0.25 mm                     |
| Largeur                          | 25mm                        |
| Constante de charge $d_{31}$     | $-210 \times 10^{-12} m/V$  |
| Constante de voltage $g_{31}$    | $-11.5 \times 10^{-3} Vm/N$ |
| Coefficient de couplage $k_{31}$ | 0.34                        |
| Capacitance $C_p^S$              | 115 nF                      |

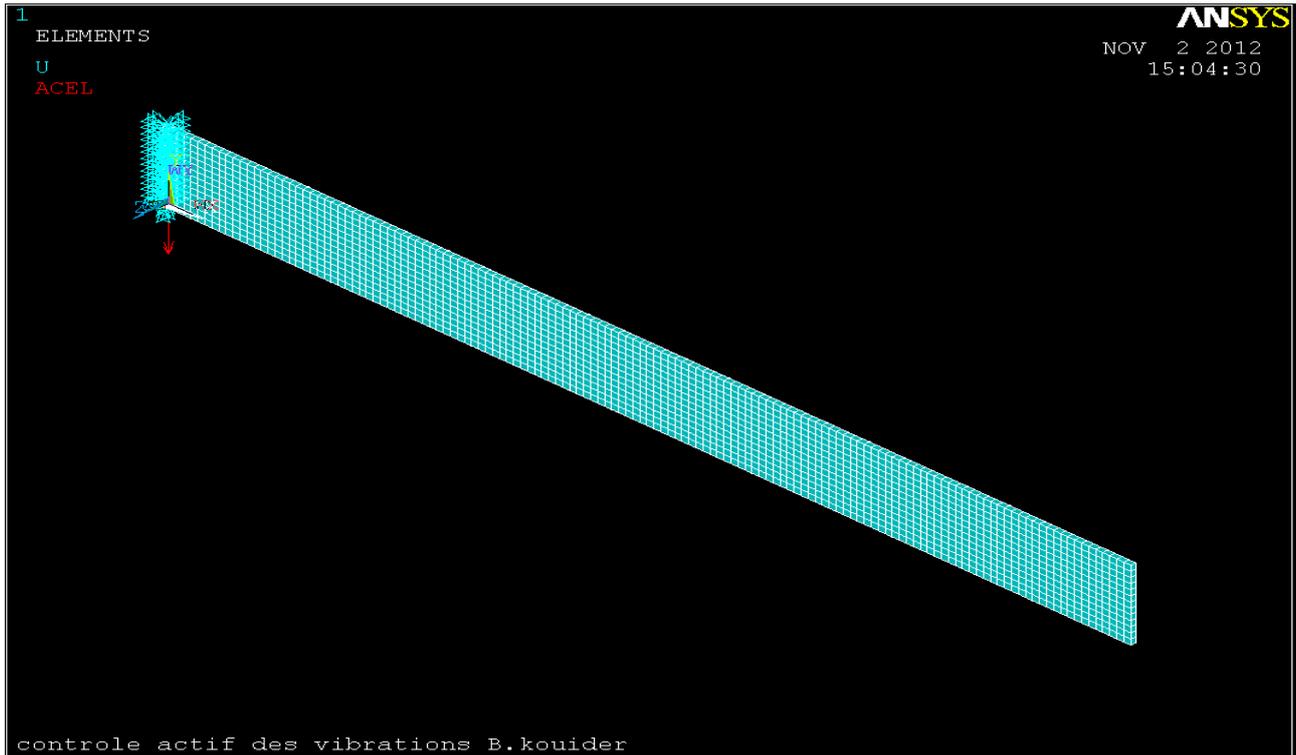
**Tableau VI.2 :** Propriété de plaquette piézoélectrique

## IV.2.Modèle de la poutre

Ce modèle a été développé dans un premier temps pour évaluer les modes et les fréquences propres. Le logiciel d'éléments finis Ansys 11.0 a été utilisé pour construire la géométrie de cette poutre (figure VI.1), puis un programme Matlab a été utilisé pour tracer les modes propres et quantifier les pulsations et les fréquences propres.

Le code APDL Ansys 11.0 pour créer la géométrie de cette poutre est donné ci- dessous :

```
! copyright 2011 par bendine kouider
FINISH
/CLEAR
/title,controle actif des vibrations B.kouider
/nopr
/com
/PREP7
et,1,SOLID45
! les dimention la poutre de support
Lb=550e-3
Hb=3e-3
Wb=50e-3
EXY=65e+10
POIS=0.35
aldns=2770
mp,ex,1,EXY
MP,PRXY,1,POIS
MP,DENS,1,aldns
BLC4,0,0,Lb,Wb,Hb
ESIZE,4e-3
ALLSEL
VPLOT
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,ALL
nset,all
nummrg,node,1e-5
! les conditions aux limites
acel,0,-9.81,0
nset,s,loc,x,0
d,all,ux,0,,uy,uz
nset,all
```



**Figure VI.1 : Poutre encastrée libre**

Les équations de comportement dynamique du chapitre précédent (équation .III.69) ont été recalées pour  $n=3$  premiers modes. Ces équations sont linéaires et permettent de construire le modèle d'état suivant :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = -m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{VI.1}$$

Les conditions aux limites pour le système étudié (poutre encastrée libre) sont :

1.  $y(0, t) = 0$  (déplacement nul) ;
2.  $\left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$  (pente nulle) ;
3.  $EI(x) \left. \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0$  (moment nul) ;
4.  $\left. \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \right|_{x=l} = 0$  (effort tranchant nul).

La recherche du problème aux valeurs propres nous amène à l'utilisation de la méthode de séparation des variables. On écrit le déplacement  $y(x, t)$  sous la forme d'un produit d'une fonction de l'espace  $Y(x)$  et d'une fonction du temps  $q(t)$ .

$$y(x, t) = Y(x)q(t) \quad \text{VI.2}$$

En substituant ces expressions dans l'équation (VI.1), nous obtenons :

$$\frac{1}{m(x)Y(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right] = -\frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} \quad \text{VI.3}$$

Qui conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right] - \omega^2 m(x) Y(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \omega^2 q(t) = 0 \end{cases} \quad \text{VI.4}$$

La deuxième formulation de l'équation (VI.4) donne une solution harmonique plutôt qu'exponentielle, ce qui est consistant avec le fait que l'énergie mécanique totale d'un système conservatif est constante.

Le problème aux valeurs propres se réduit à l'équation différentielle ci-dessous (poutre à section constante):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right] - \frac{\omega^2 m(x)}{EI} Y(x) = 0 \quad \text{VI.5}$$

Par définition  $\beta^4 = \frac{\omega^2 m(x)}{EI}$

Dans le cas d'une poutre encastree libre de section constante, les fonctions caractéristiques «eigenfunction»  $Y_i(x)$  est :

$$Y_i(x) = (\cosh\beta_i x - \cos\beta_i x) - \left[ \frac{\cosh\beta_i L - \cos\beta_i L}{\sinh\beta_i L - \sin\beta_i L} \right] (\sinh\beta_i x - \sin\beta_i x) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{VI.6}$$

Les trois premières formes modales sont tracées dans la figure suivante :

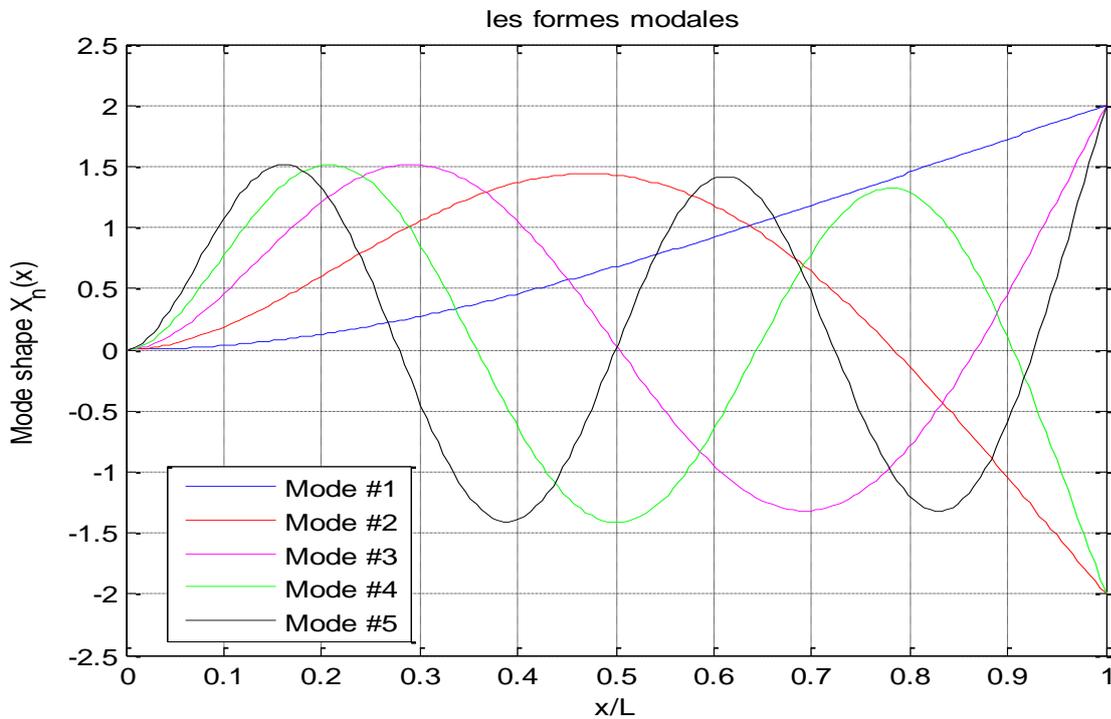


Figure VI.2 : Modes propres de la poutre (annexe II)

### IV.3. Application d'une force statique

Une force constante est appliquée dans la position  $x=400\text{mm}$ , donne les réponses figurées dans les courbes suivantes :

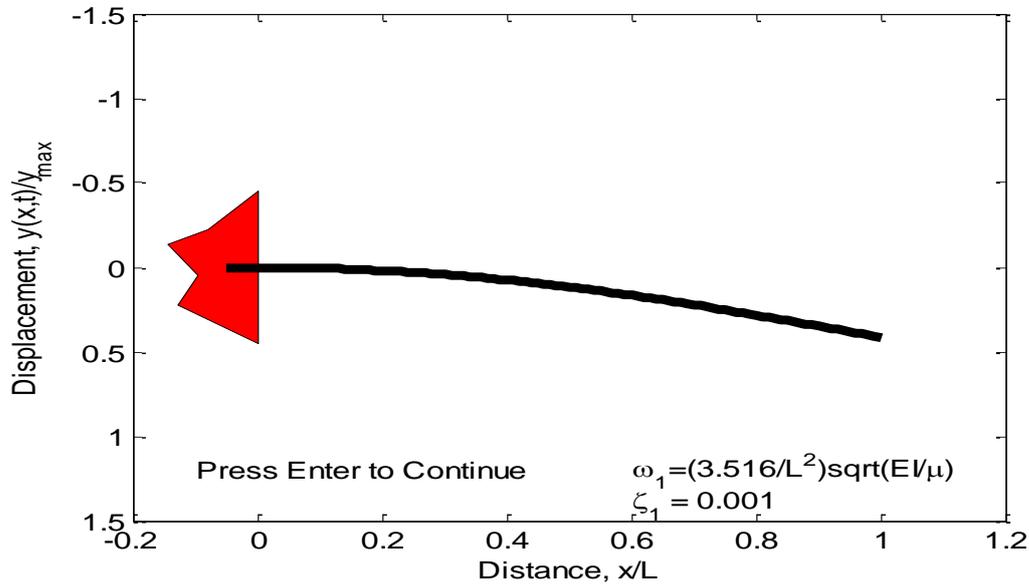


Figure VI.3: visualisation de vibrations

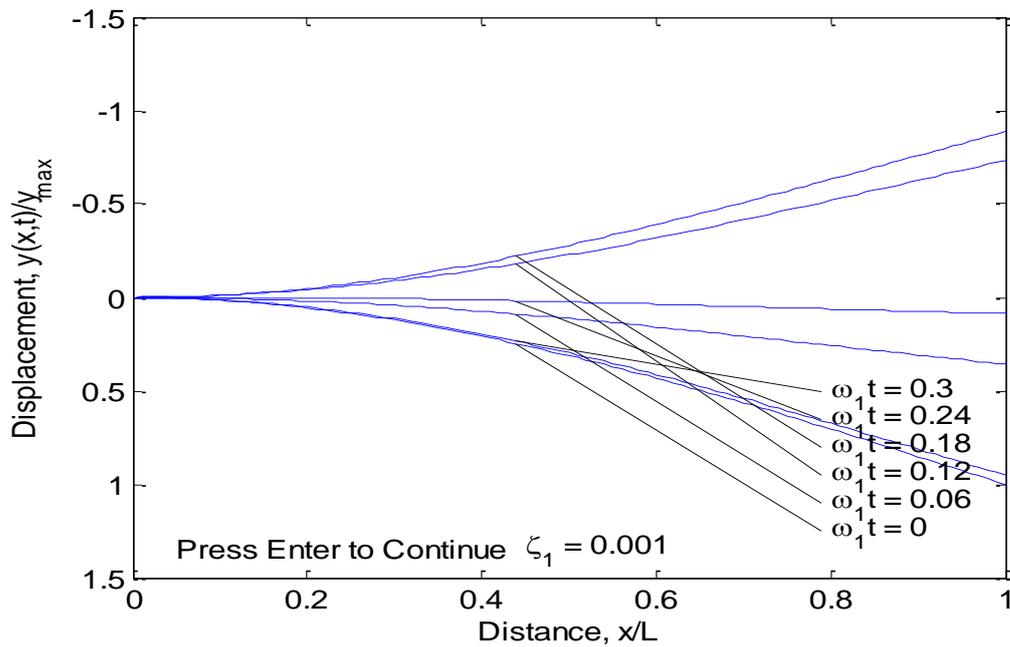


Figure VI.4 : Vibrations libres de la poutre à chaque instant  $t$  avec Matlab

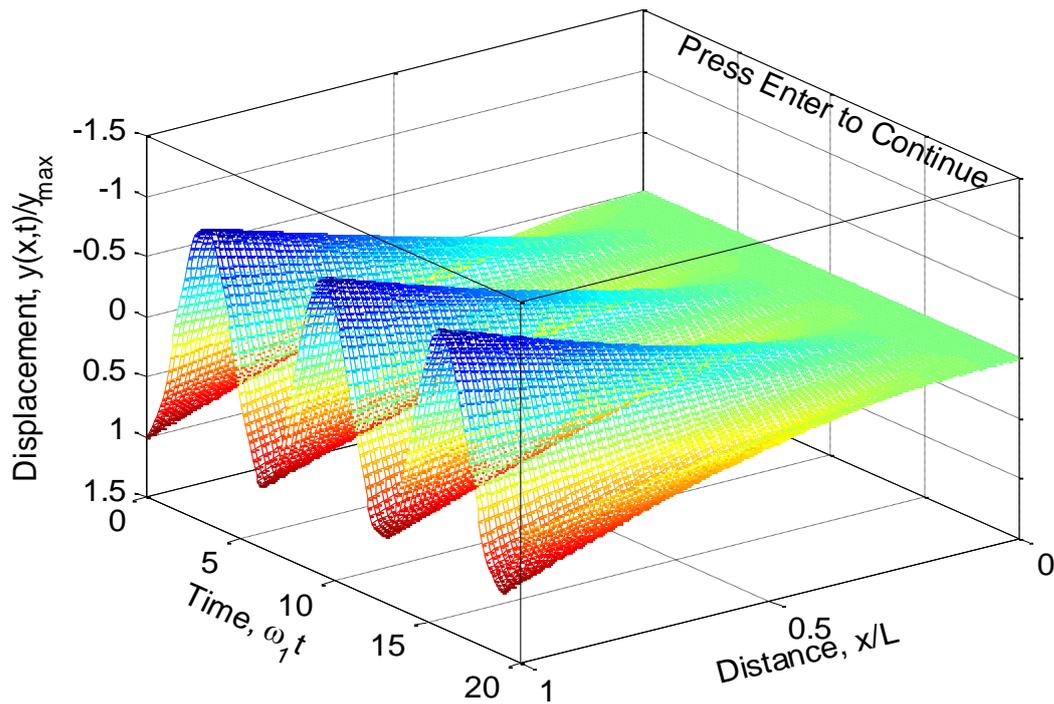


Figure VI.5 : Vibration libre de la poutre à chaque instant  $t$  (3D) avec Matlab

#### IV.4. Modélisation avec Ansys

La structure étudiée est constituée d'une poutre en aluminium de section rectangulaire dont les caractéristiques sont données dans le Tableau VI.1. Deux patches piézoélectriques polarisés verticalement sont placés de part et d'autre de la poutre. Les propriétés physiques principales et la géométrie de ces patches sont résumées dans le Tableau VI.2. Le modèle par éléments finis a été réalisé à l'aide du logiciel ANSYS® (version 11.0). Le modèle a été développé juste pour voir la géométrie de la poutre en 3D. [11],[44]

Le code APDL utilisé commence par la déclaration des dimensions de la structure. Ensuite, les trois propriétés des matériaux sont affectées. La partie du code où les propriétés des matériaux piézoélectriques sont affectés est donnée ci-dessous.

On choisi solid5 comme un type d'élément pour les patches piézoélectriques 1 (PZT).

```
et,1,SOLID5,3
MP,DENS,1,pidns
MP,PERX,1,ept11
MP,PERY,1,ept22
MP,PERZ,1,ept33
tb,ANEL,1,,1
tbda,1,s11,s12,s13
tbda,7,s22,s23
tbda,12,s33
tbda,16,s66
tbda,19,s55
```

```

tbda,21,s44
tb,PIEZ,1,,1
tbda,3,d31
tbda,6,d33
tbda,9,d32
tbda,14,d24
tbda,16,d16

```

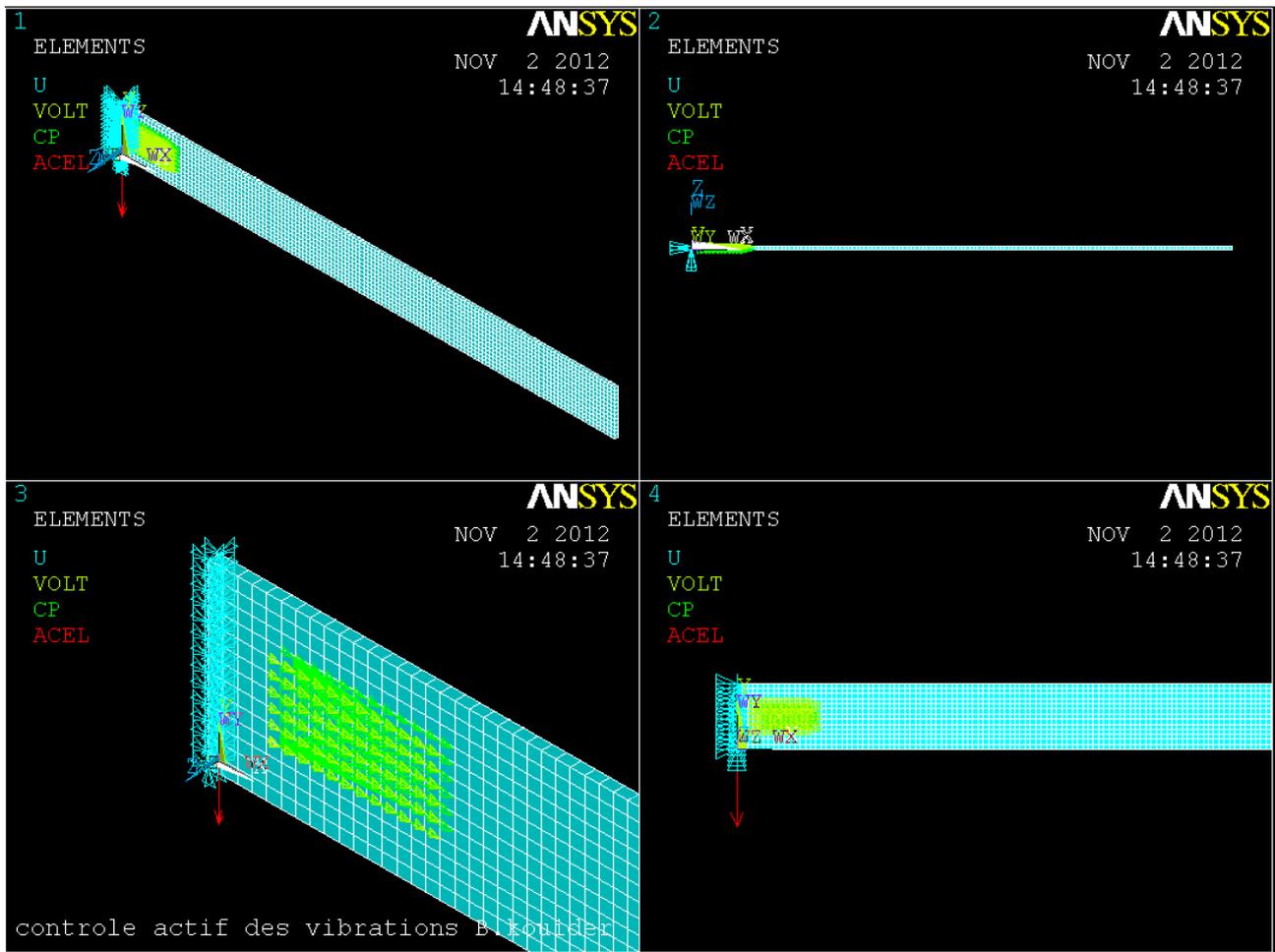
Le code continue à créer des nœuds et des éléments finis. L'élément SOLID45 est utilisé pour la partie métallique de la Structure. Le modèle éléments finis de la poutre encastree est équipé par des patches piézocéramiques et montré à la figure IV.6, tandis qu'une vue détaillée de l'actionneur couplé à son DOF est donnée à la figure IV.7

L'emplacement des plaquettes PZT est effectué par le code suivant :

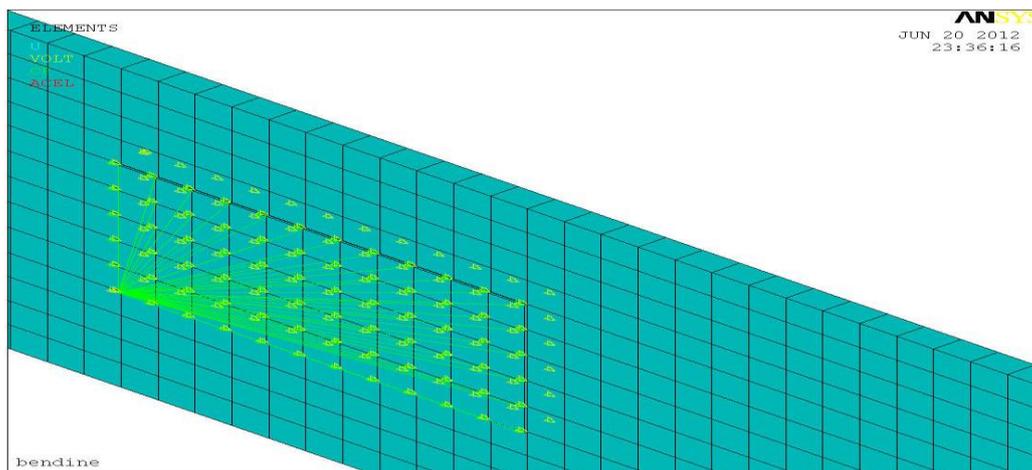
```

BLC4,0,0,Lb,Wb,Hb      ! la creation de block
WPROTA, , -90,        ! la rotation de poutre
WPOFFS, , , W1        ! le place desiré
VSBW,ALL              ! diviser le volume
WPOFFS, , , W
VSBW,ALL
WPAVE,0,0,0,
WPROTA,,,90
WPOFFS,,,L1
VSBW,ALL
WPOFFS,,,L
VSBW,ALL
WPCSYS,,0
! model de transducteur
BLOCK,L1,L1+L,W1,W1+W,Hb+Ha,Hb+H+Ha
BLOCK,L1,L1+L,W1,W1+W,0-(Ha),-(H+Ha)
! model d'adhesive
BLOCK,L1-Lda1,L1+Lda1+La,w1-Wda1,W1+Wda1+Wa,Hb,Hb+Ha
BLOCK,L1-Lda1,L1+Lda1+La,w1-Wda1,W+Wda1+Wa,Hb,-(Hb+Ha)

```



**Figure IV.6:** les différents angles de vue du modèle de poutre avec les patches piézoélectriques (annexe I ANSYS®)



**Figure IV.7:** les conditions aux limites de modèle (annexe I ANSYS®)

Les formes modales sont obtenues par l'utilisation du code suivant :

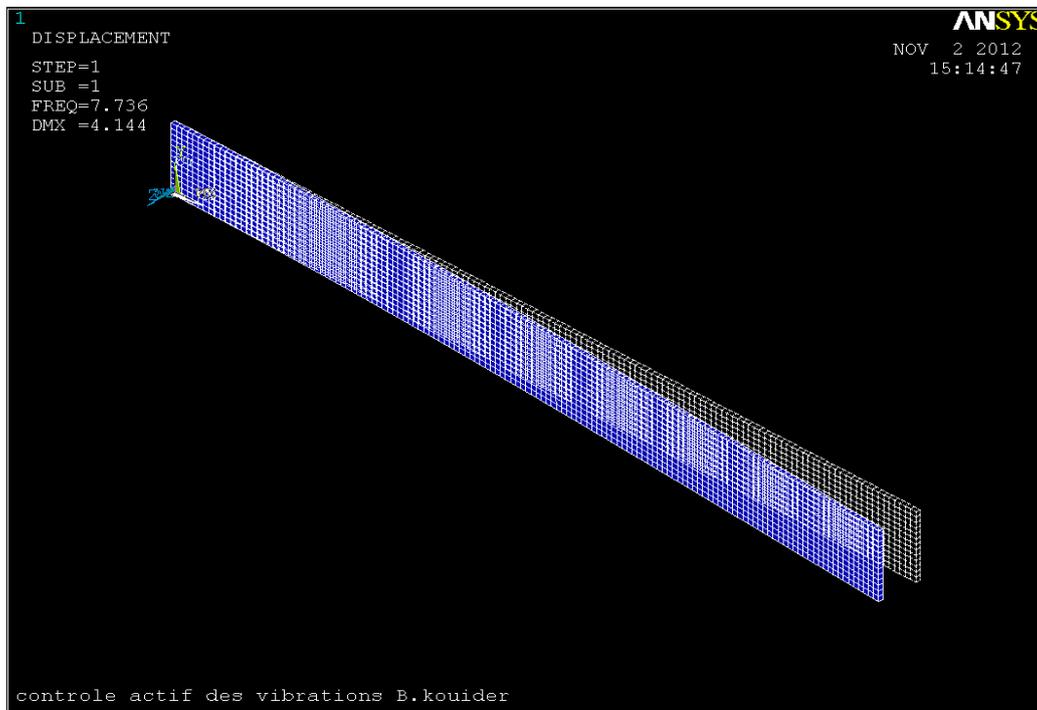
!simulation

!analyse modale

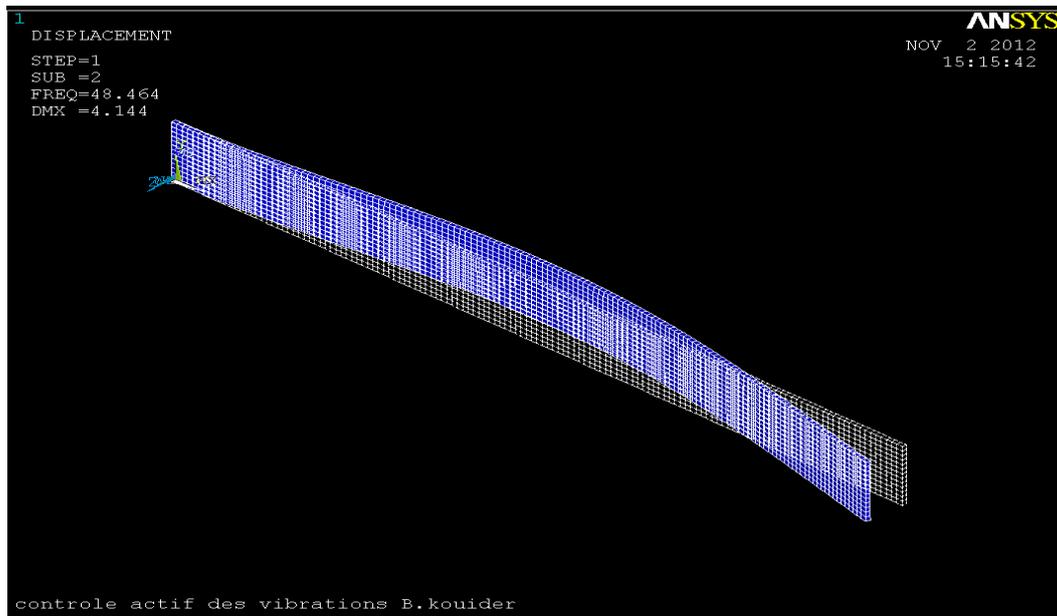
/solu

```
ANTYP,MODAL  
MODOPT,LANB,10,0,500  
MXPAND,3  
SOLVE  
FINISH
```

Et présentées dans les trois figures suivantes, avec deux différents angles de vue :



**Figure IV.8:** Forme modale N°=1 (ANSYS®)



**Figure IV.9:** Forme modale N°=2 (ANSYS®)

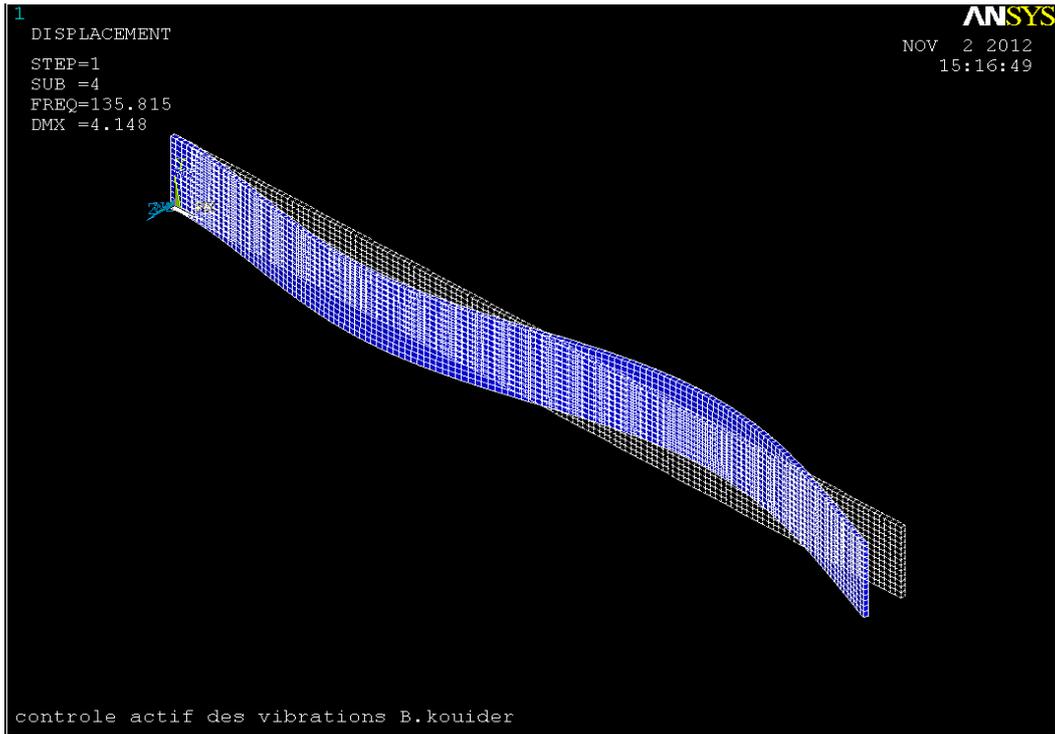


Figure IV.10: Forme modale N°=3 (ANSYS®)

| logiciel    | Fréquence | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3  | Mode 4  |
|-------------|-----------|--------|--------|---------|---------|
| Ansyes 11.0 | (Hz)      | 7.7356 | 48.464 | 135.81  | 266.61  |
| Matlab 7.0  | (Hz)      | 7.789  | 48.811 | 136.673 | 267.824 |

Tableau VI.3 : Comparaison des fréquences propres obtenues par Matlab et celle d'Ansyes

#### IV.4. Développement du modèle actif

L'équation du mouvement pour la vibration transversale d'une pièce en porte-à-faux d'épaisseur uniforme (figure VI.6) soumise à une force constante est définie comme suite :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - f(x, t) \quad \text{VI.7}$$

Avec les conditions aux limites :

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^3} \right] \Big|_{x=l} = 0 \quad \text{VI.8}$$

Supposons que les plaquettes piézoélectriques sont collées parfaitement sur la poutre, alors l'utilisation des équations définies au chapitre précédent donne :

$$\ddot{q}_i + 2\xi \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -b * d31 * E_p * (h + h_p) \int_0^A \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} dx V(t) \quad \text{VI.9}$$

$$-b * d31 * E_p * (h + h_p) \int_0^A \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} dx = k_i \quad \text{VI.10}$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -k_i V(t) \quad \text{VI.11}$$

Prenons dans notre exemple  $i=1, 2, 3$  ;

$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 \Rightarrow \ddot{q}_i + 2\xi\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -k_i V(t)$$

$$x_i = q_i \Rightarrow \dot{x}_i = \dot{q}_i = x_{i+1}$$

$$x_{i+1} = \dot{q}_i \Rightarrow \dot{x}_{i+1} = \ddot{q}_i = -2\xi\omega_i\dot{q}_i - \omega_i^2 q_i + k_i V(t)$$

$$\dot{x}_{i+1} = -2\xi\omega_i\dot{q}_i - \omega_i^2 q_i + k_i V(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -\omega_i^2 & -2\omega_i\xi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ A_a \end{bmatrix} v(t) \quad \text{IV.12}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{IV.13}$$

Le vecteur d'état  $x$  contient les participations modales en déplacement  $x_i$  et en vitesse  $\dot{x}_i$ . La commande  $u$  correspond à la tension  $v_a$  appliquée à l'actionneur piézoélectrique. Ce modèle a été conçu pour simuler le comportement de la poutre encastree-libre de façon à régler le contrôleur.

La matrice d'évolution dynamique  $A$  et la matrice d'application de la commande  $B$  du modèle linéaire de contrôle sont annexe III:

$A$

$$= 1.0e004 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \\ -0.0293 & 0 & 0 & -0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1495 & 0 & 0 & -0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -9.0142 & 0 & 0 & -0.0000 \end{bmatrix} \quad \text{VI.14}$$

### VI.5.1 1<sup>er</sup> Cas

Dans le premier cas le transducteur piézoélectrique est placée au voisinage de l'encastrement (figure VI.12), la matrice de contrôle a été obtenue par un programme Matlab et donnée ci-dessous :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0053 \\ -0.0025 \\ -0.0005 \end{bmatrix} \quad \text{VI.15}$$

L'algorithme de commande LQR est appliqué au système précédent en faisant porter la précision statique sur la tension de commande de l'actionneur piézoélectrique. L'intégrateur correspondant impose une courbe nulle de la poutre lorsque celle-ci atteint la nouvelle position statique s'il n'y a pas d'efforts extérieurs appliqués.

L'algorithme LQ présenté, permet alors de calculer la matrice de gains de commande :

$$K = [0.1451 \quad -15.5368 \quad -13.5339 \quad -47.2616 \quad -61.2132 \quad -31.6126] \quad \text{VI.16}$$

La contrôlabilité du système augmenté se vérifie par la matrice donnée dans le chapitre II.

Les informations pour construire l'état concernant la tension de commande  $v_a$  sont obtenues par les tensions des capteurs piézoélectriques :

$$y = Cx + Du$$

La même réduction modale est opérée pour conserver que les trois premiers modes à contrôler. La matrice de mesure est alors:

$$C = 1.0e003 * [5.1809 \quad 2.4857 \quad 0.4823 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

VI.17

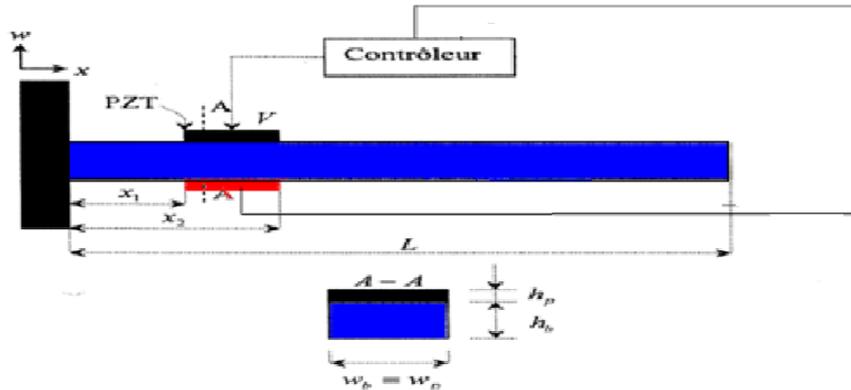


Figure IV.11 : Modèle de poutre utilisée

La réponse libre de la poutre a été donc simulée dans l'intervalle de temps de 0 à 50 secondes avec une résolution de 0,01 secondes. Le déplacement initial de la poutre a été simulé par l'application d'une force d'impulsion de 1.5 N pour une durée de 0,1 seconde. La réponse libre de la poutre est illustrée sur la figure. IV.13, où (a) montre la pleine réponse et (b) un détail du comportement transitoire. Comme il est clairement visible à partir de deux figures, la réponse libre de ce modèle sur l'effet de la force fait déplacer l'extrémité de la poutre d'environ 10 mm de distance à partir de la position d'équilibre.

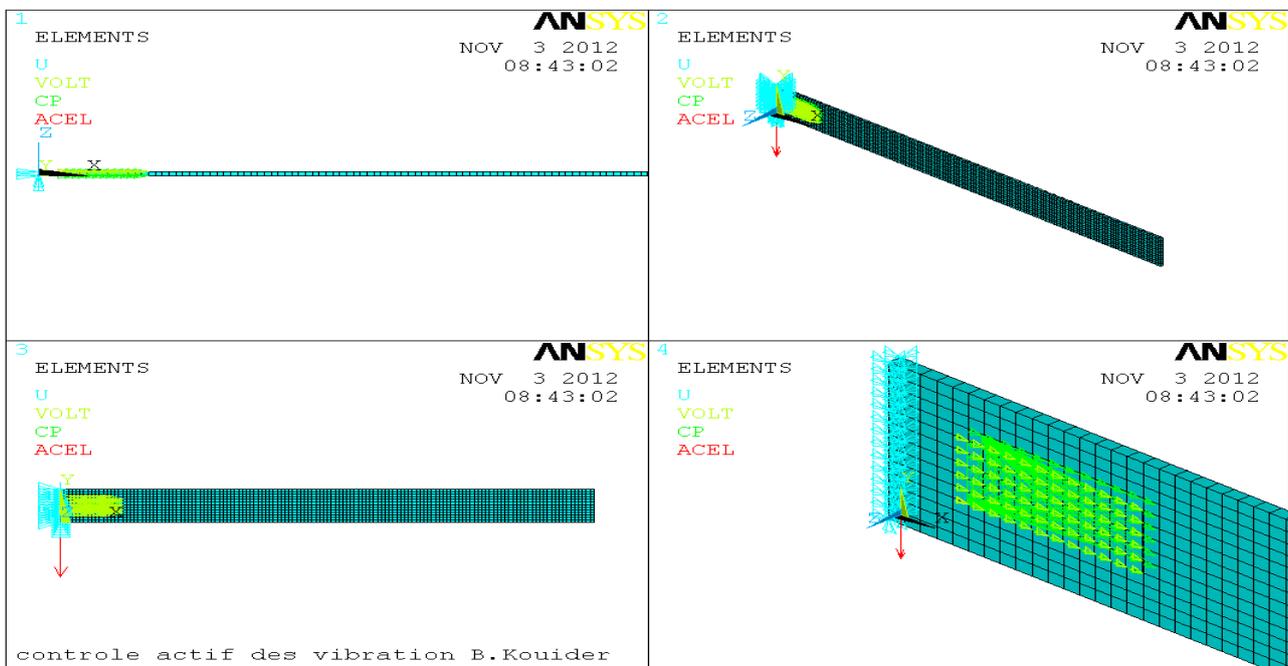


Figure IV.12 : Poutre avec un transducteur piézoélectrique fixé au voisinage de l'encastrement

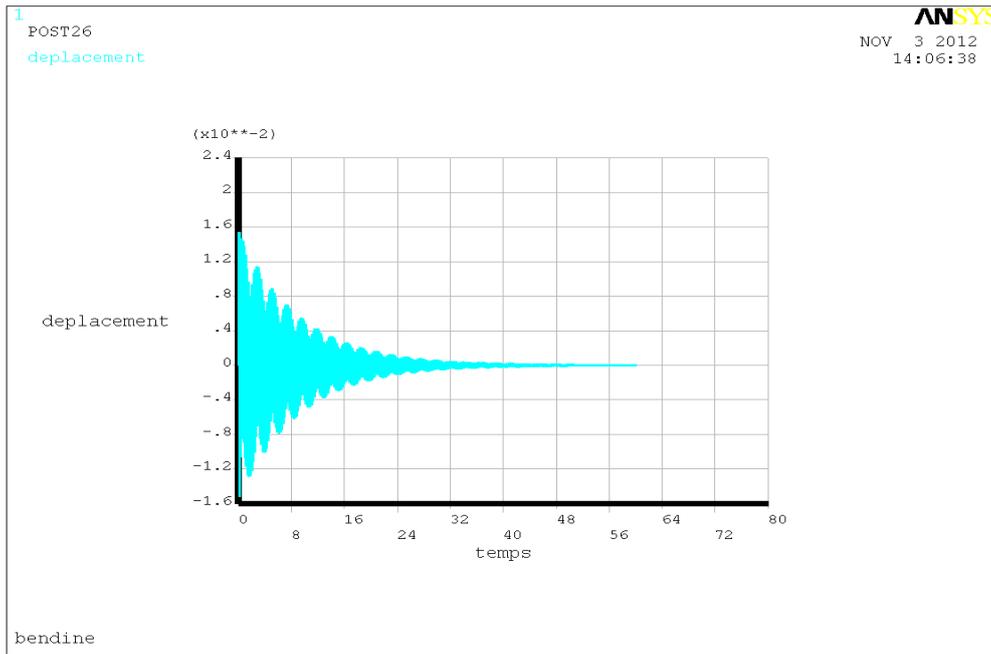


Figure IV.13.a : Réponse en boucle ouvert (déplacement) avec Ansys

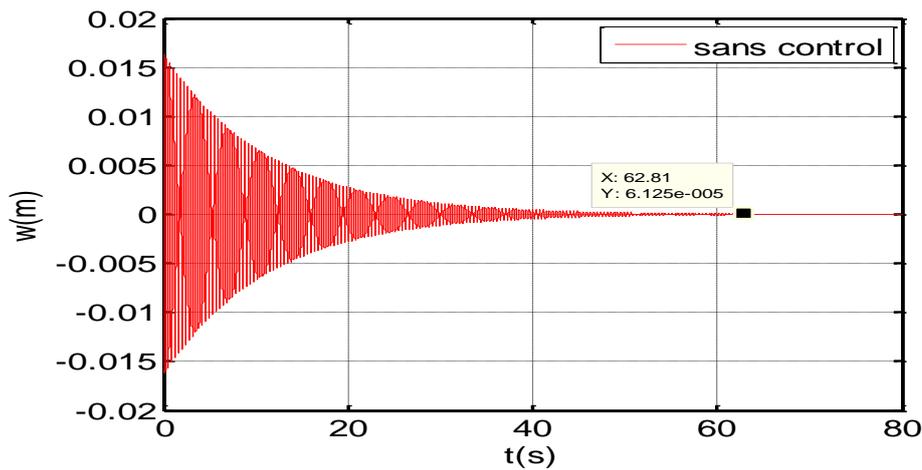


Figure IV.13.b : Réponse en boucle ouvert (déplacement) avec Matlab

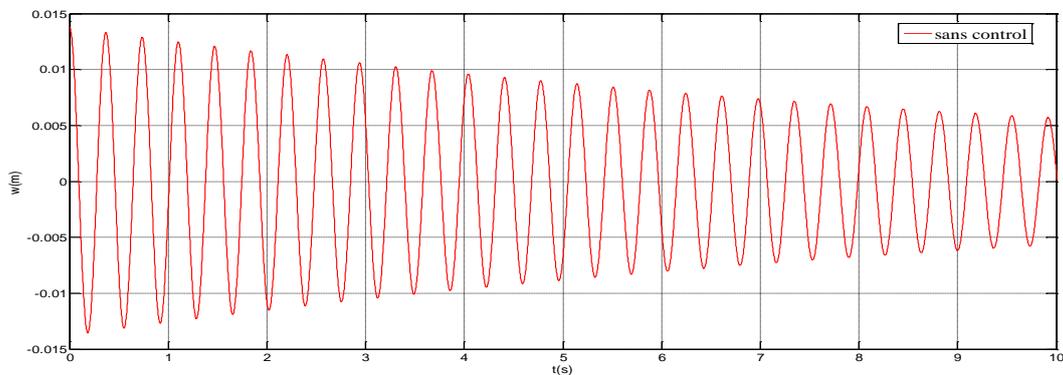
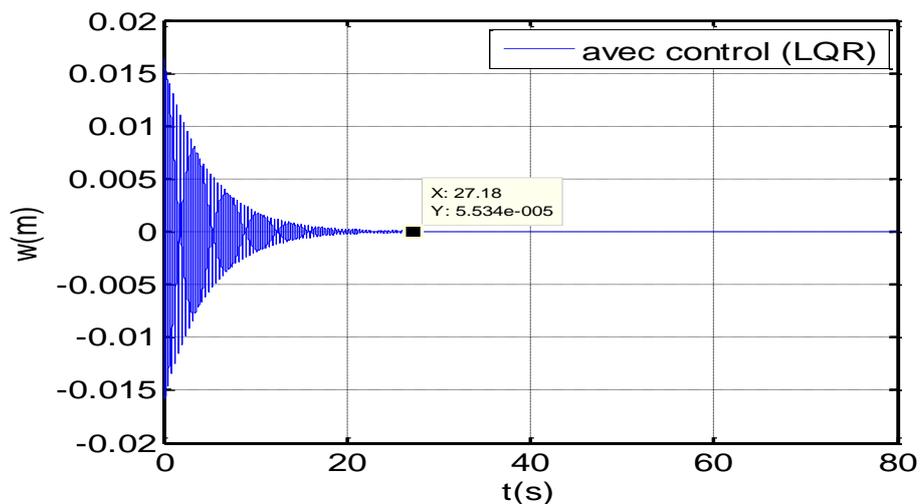


Figure IV.13.c : Réponse détaillée en boucle ouverte (déplacement) avec Matlab

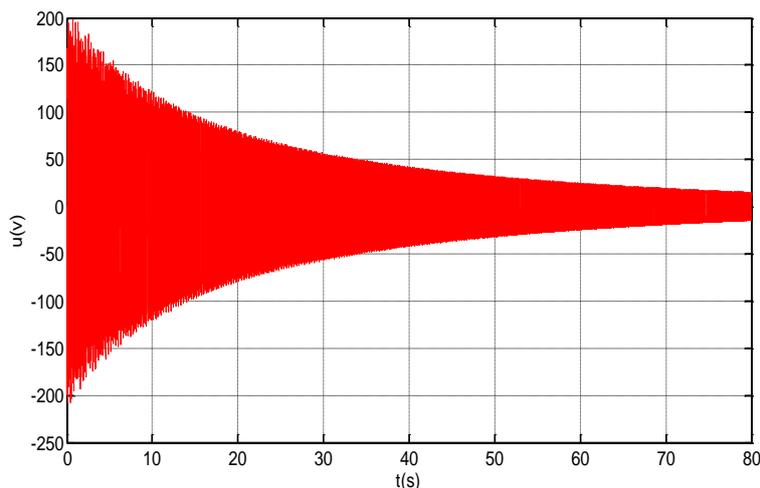
Figure IV.14 présente la réponse de la poutre en boucle fermée sous la commande LQR. Et illustre la réponse transitoire de la poutre à un déplacement initial de 10 mm Les chiffres démontrent que le

temps de la vibration de décantation a été réduit de 63 secondes à bien moins de 27 secondes.



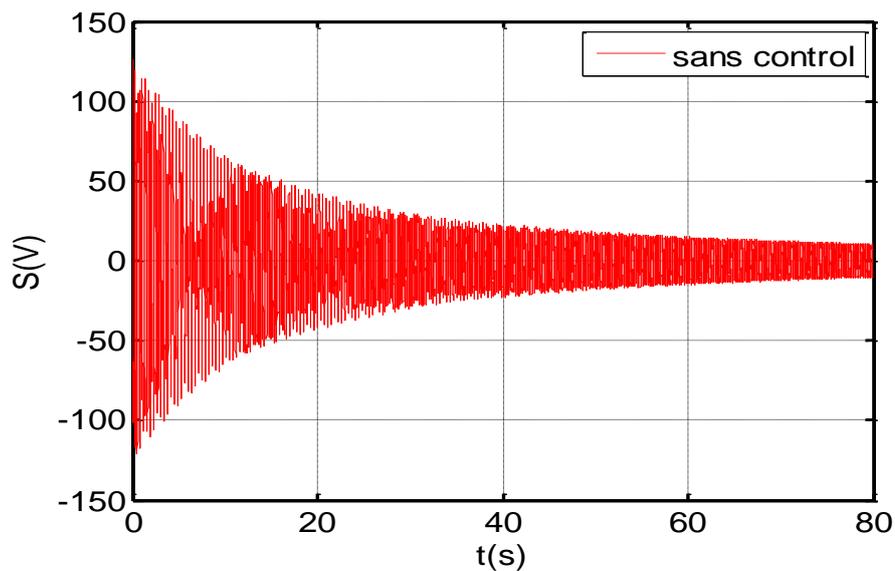
**Figure IV.14 :** Réponse en boucle fermée avec control (déplacement)

La tension fournie applique sur l'actionneur en réponse au déplacement est montrée sur la Fig. IV.15.



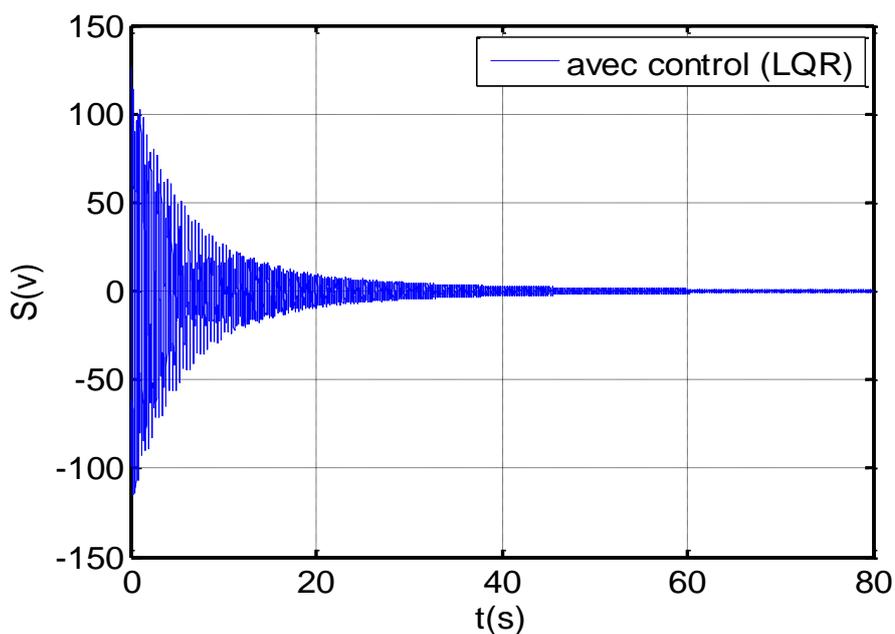
**Figure IV.15 :** Tension de control

Figure IV.16 affiche les résultats de la simulation du signal de sortie du capteur piézoélectrique sans commande LQR. Les chiffres démontrent que le signal de sortie a été réduit il est dû à l'amortissement structural de la poutre sur un intervalle de temps de 60 secondes.

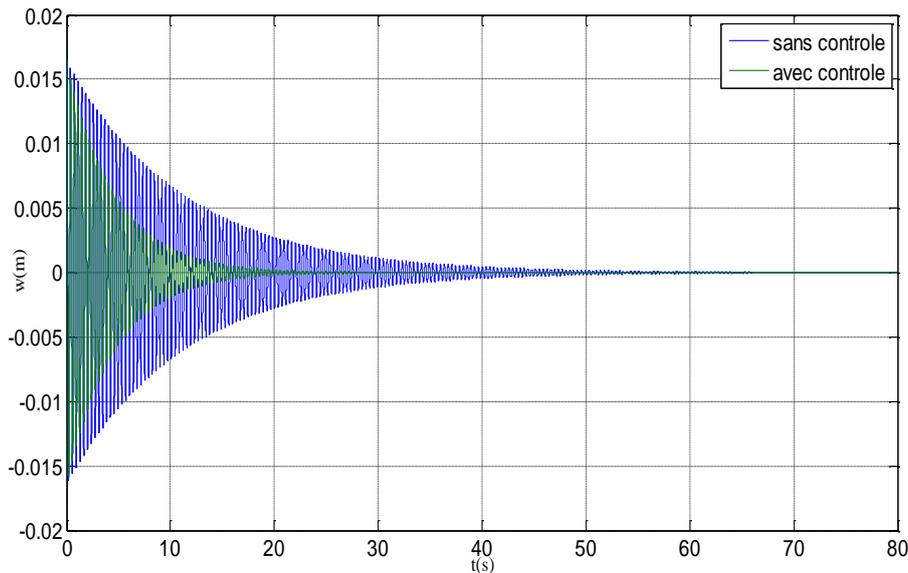


**Figure IV.16 :** Tension de sortie (sans control)

Figure IV.17 illustre le signal de sortie du capteur sous contrôle quadratique linéaire, celui-ci a été réduit dans un intervalle de temps de 10 secondes, on peut voir clairement la diminution de temps de vibration sous l'effet du contrôle avec patches piézoélectriques.



**Figure VI.17 :** Tension de sortie (avec control)



**Figure IV.18 :** Déplacement avec et sans contrôle (1<sup>er</sup> Cas)

### VI.5.2 2<sup>ème</sup> Cas

Dans le premier cas le transducteur piézoélectrique est placée au milieu de la poutre (figure VI.19), la matrice de contrôle a été obtenue par un programme Matlab et donnée ci-dessous :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0069 \\ -0.0061 \\ -0.0029 \end{bmatrix} \quad \text{VI.18}$$

L'algorithme LQ présenté, permet alors de calculer la matrice de gains de commande :

$$K = [0.5334 \quad -23.4947 \quad -52.5556 \quad -52.2834 \quad -68.0832 \quad -62.6679] \quad \text{VI.19}$$

Les informations pour construire l'état concernant la tension de commande  $v_a$  sont obtenues par les tensions des capteurs piézoélectriques :

$$y = Cx + Du$$

La même réduction modale est opérée pour conserver que les trois premiers modes à contrôler. La matrice de mesure est alors :

$$C = 1.0e003 * [6.7986 \quad 5.9746 \quad 2.8569 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad \text{VI.20}$$

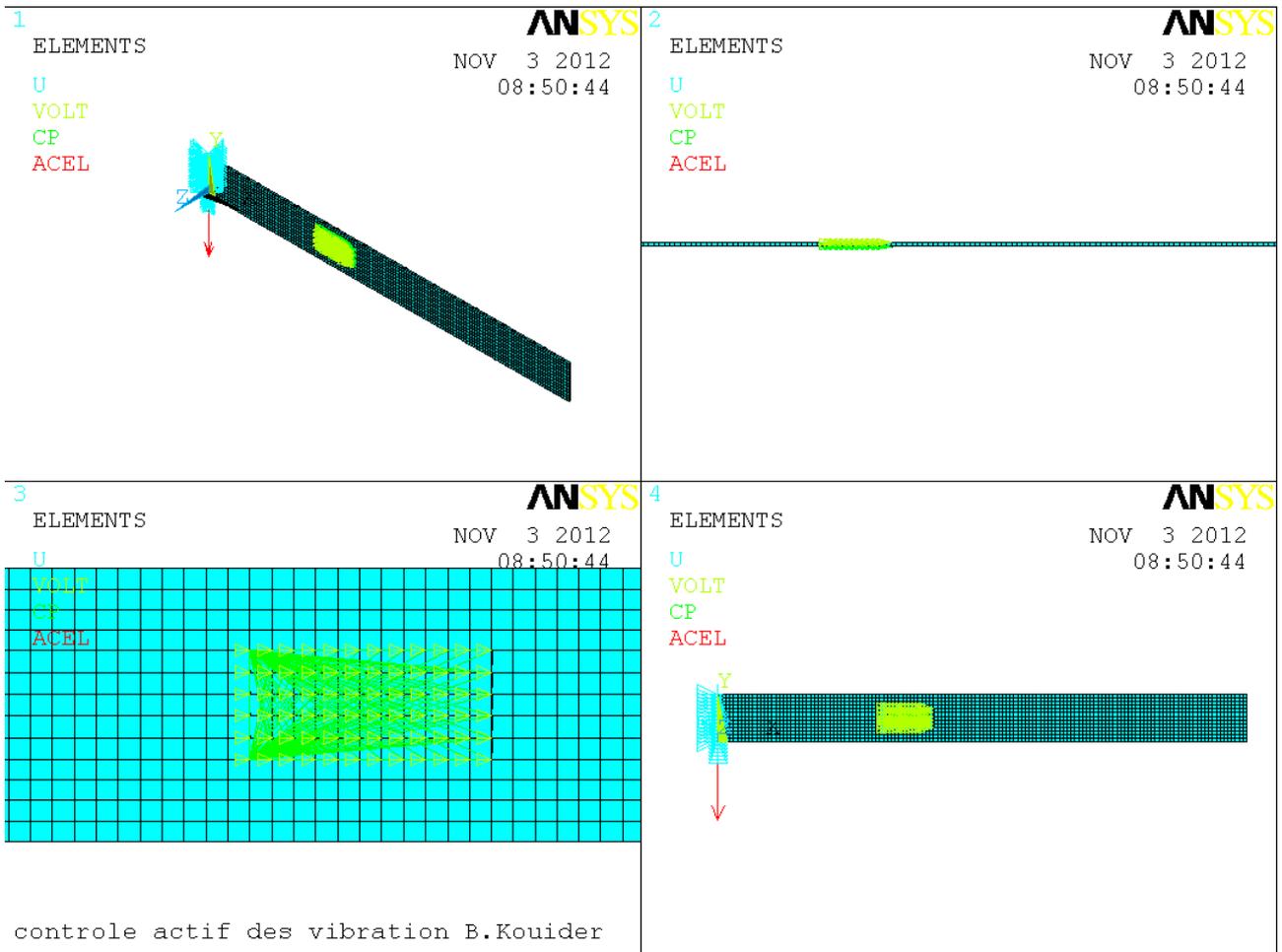


Figure IV.19 : Poutre avec un transducteur piézoélectrique fixé au milieu du poutre

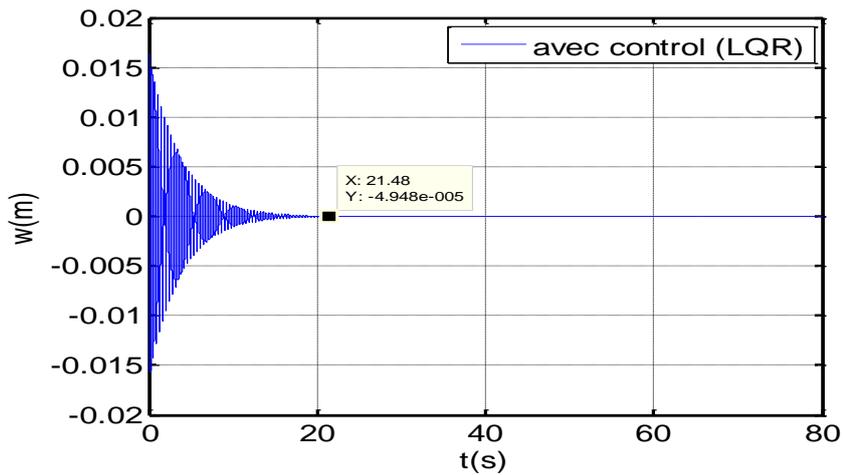


Figure IV.20 : Réponse en boucle fermé avec control (déplacement)

La figure IV.21 présente la tension de contrôle appliqué à l'actionneur piézoélectrique, on

remarque clairement que la tension est énorme qui ne pas supporté par l'actionneur en conséquence la détruit de l'actionneur.

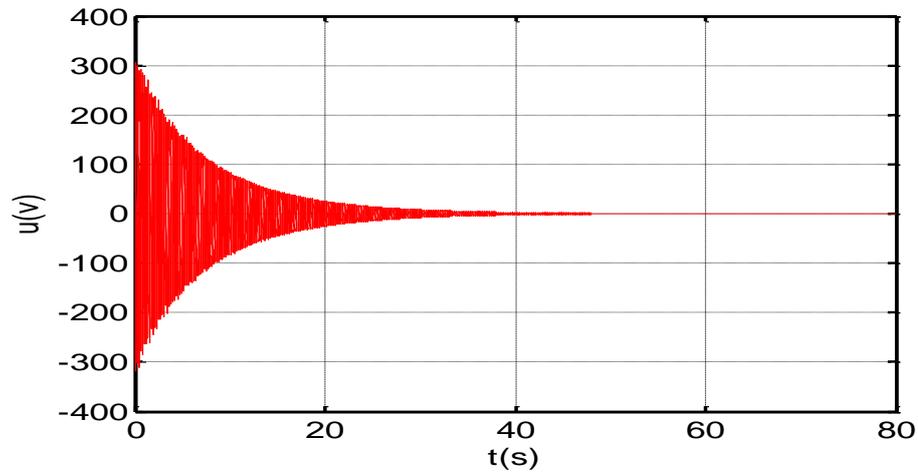


Figure IV.21 : Tension de control

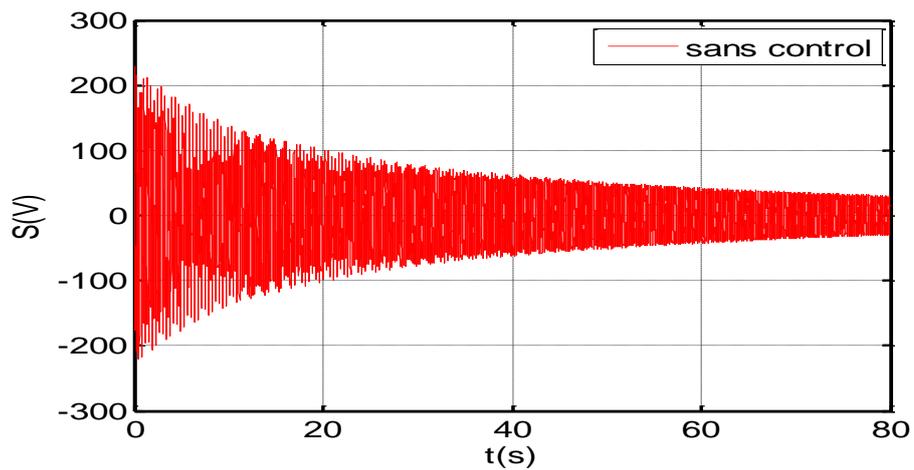


Figure IV.22 : Tension de sortie (sans control)

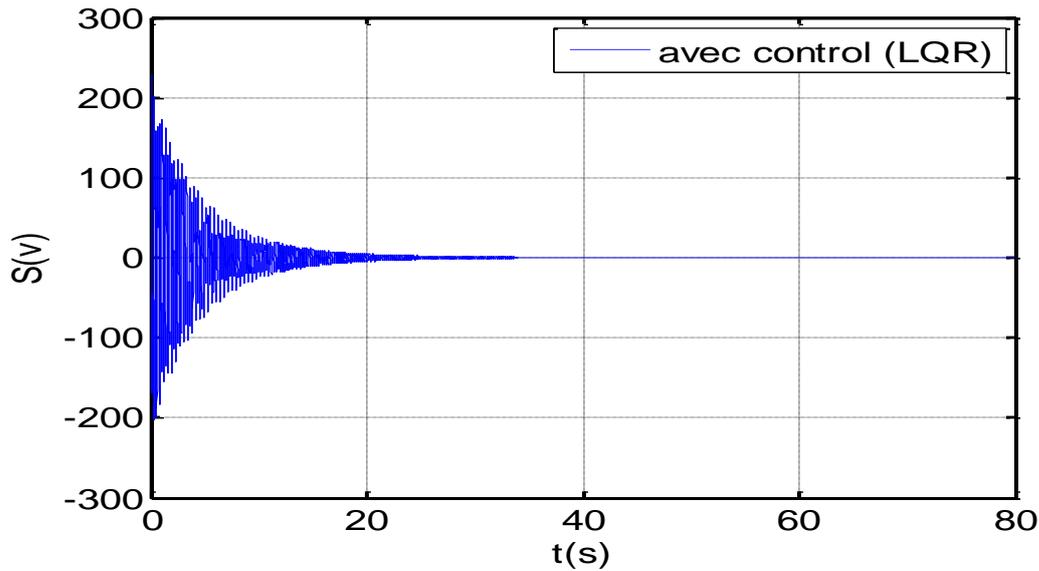


Figure VI.23 : Tension de sortie (avec control)

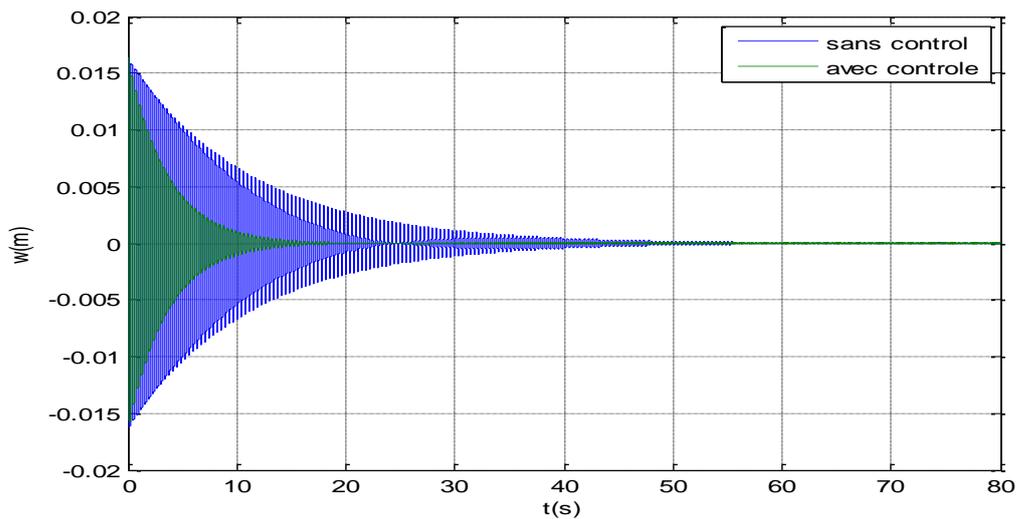
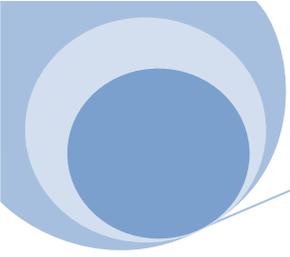


Figure IV.24 : le déplacement avec control et sans contrôle (2<sup>ème</sup> Cas)

## VI.6 Conclusion :

Le travail montre clairement que la position de transducteur piézoélectrique a une influence remarquable sur le système contrôlé, ainsi on observe que le premier cas permet d'avoir une tension de contrôle raisonnable par contre le 2<sup>ème</sup> cas provoque une énorme consommation de tension électrique qui porte un danger sur l'actionneur.



## Conclusion Générale



## *Conclusion générale*

Dans beaucoup de cas, les vibrations représentent des nuisances. Elles sont sources de bruit acoustique et de détérioration du matériel. Le contrôle de vibrations consiste à diminuer l'amplitude des vibrations d'une structure qui vibre. Ce travail est une contribution à l'étude du contrôle actif d'une poutre flexible dont le Comportement dynamique est linéaire. Il propose un Contrôle Modal basé sur le retour d'état modal de la structure. Pour cela, l'étude est articulée en plusieurs étapes.

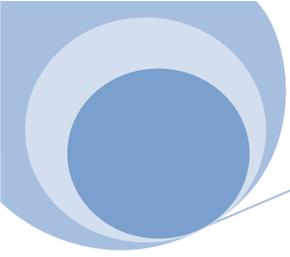
Les matériaux piézoélectriques ont fait l'objet du premier chapitre Les propriétés, le comportement et les applications des matériaux piézoélectriques ont été présentés.

Le deuxième chapitre fait le point sur l'état de l'art des algorithmes de contrôle actif de structures. Il met l'accent sur les deux grands types de stratégie de control par anticipation et par rétroaction, ainsi les modélisations mathématiques des contrôleurs.

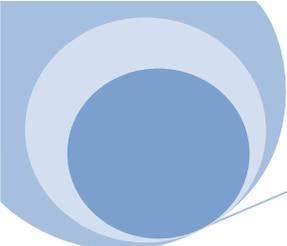
Le chapitre trois détaille la méthodologie générale de la conception du contrôle de structures flexibles proposé. La modélisation des actionneurs et des capteurs, puis des structures intégrant la partie mécanique des actionneurs et des capteurs a été détaillée. Le cas particulier des poutres flexibles a été développé. Deux algorithmes de commande ont été choisis et présentés : le contrôle optimal basé sur un critère quadratique (LQR) et le contrôleur classique (PID). Enfin, un exemple de modélisation d'une poutre encastré a été présenté en détail.

Le chapitre quatre présente une application du contrôle actif de vibration des structures flexibles. Une poutre encastrée a été contrôlé par deux capteurs et deux actionneurs piézoélectriques. Tout d'abord, un modèle mathématique a été réalisé pour construire l'équation de variable d'état de la poutre, puis on excite la poutre par un actionneur pour voir le comportement en boucle ouvert (sans control), des programmes Matlab et Ansys ont été réalisé. Après un l'algorithme *L.Q.C.* a été mis en œuvre pour effectue le control.

Les résultats de simulation sont en bon accord et montre une bonne efficacité de la méthode. La deuxième application a concerné l'extension du contrôle aux deux directions.



# Annexes



## *Annexe I : Création du modèle avec Ansys 11.0 [11] et [54]*

! Copyright 2012 par Bendine kouider

FINISH

/CLEAR

/title, contrôle actif des vibration B.Kouider

/nopr

/com

/PREP7

SHPP,SILENT,ON

SHPP,MODIFY,1,40

! les dimention la poutre de support

Lb=550e-3

Hb=3e-3

Wb=50e-3

EXY=65e+09

POIS=0.35

aldns=2834

! les dimentions de piezoelectrique transducteur

L=44e-3

H=0.25e-3

W=20e-3

et,1,SOLID45,1

et,2,SOLID5,1

Ha=0.05e-3

La=L

Wa=W

tmp=0e-3

Lda1=tmp

Wda1=tmp

Lda2=tmp

Wda2=tmp

Lda3=tmp

Wda3=tmp

Lda4=tmp

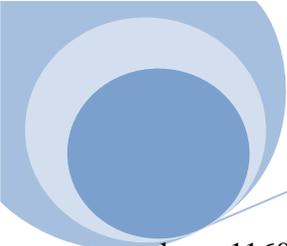
Wda4=tmp

Lda5=tmp

Wda5=tmp

EXYa=4e09

POISa=0.38



dnsa=1160

! le placement de la transducteur piezo sur la poutre

L1=20e-3

W1=15e-3

L2=180e-3

W2=15e-3

L3=350e-3

W3=15e-3

L4=20e-3

W4=15e-3

L5=350e-3

W5=15e-3

le model de poutre

BLC4,0,0,Lb,Wb,Hb

! la creation de block

WPROTA, , -90,

! la rotation de poutre

WPOFFS, , , W1

! le place desiré

VSBW,ALL

! diviser le volume

WPOFFS, , , W

VSBW,ALL

WPAVE,0,0,0,

WPROTA,,,90

WPOFFS,,,L1

VSBW,ALL

WPOFFS,,,L

VSBW,ALL

WPCSYS,,0

! la position original

! model de transducteur

BLOCK,L1,L1+L,W1,W1+W,Hb+Ha,Hb+H+Ha

BLOCK,L4,L4+L,W4,W4+W,0-(Ha),-(H+Ha)

! model d'adhesive

BLOCK,L1-Lda1,L1+Lda1+La,w1-Wda1,W1+Wda1+Wa,Hb,Hb+Ha

BLOCK,L4-Lda4,L4+Lda4+La,w4-Wda4,W4+Wda4+Wa,Hb,Hb+Ha

ET,3,SOLID5,1

MP,EX,3,EXYa

MP,PRXY,3,POISa

MP,DENS,3,dnsa

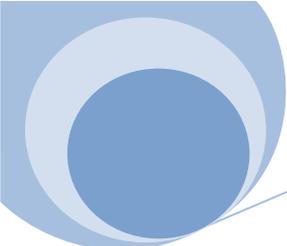
mp,ex,1,EXY ! Elasticity modulus for metal

mp,dens,1,aldns ! Density

mp,nuxy,1,0.35 ! Poisson's ratio

mp,dens,2,7500 ! Density for piez. material

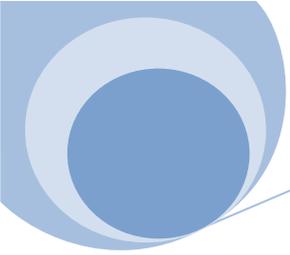
mp,perx,2,15.03E-9 ! Permittivity in x direction



```
mp,pery,2,15.03E-9 ! Permittivity in y direction
mp,perz,2,13E-9 ! Permittivity in z direction
tb,piez,2 ! Define piez. table
tbdata,16,17 ! E16 piezoelectric constant
tbdata,14,17 ! E25
tbdata,3,-6.5 ! E31
tbdata,6,-6.5 ! E32
tbdata,9,23.3 ! E33
tb,anel,2 ! Define structural table
tbdata,1,126E9,79.5E9,84.1E9! C11,C12,C13
tbdata,7,126E9,84.1E9 ! C22,C23
tbdata,12,117E9 ! C33
tbdata,16,23.3E9 ! C44
tbdata,19,23E9 ! C55
tbdata,21,23E9 ! C66
! meshing de model
ESIZE,4e-3
VSEL,S,LOC,Z,0,Hb
VATT,2,1,2,0
VSEL,S,LOC,Z,0,-Ha
VSEL,A,LOC,Z,Hb,Hb+Ha
VATT,3,1,3,0
VSEL,S,LOC,Z,-Ha,-Ha-H
VSEL,A,LOC,Z,Hb+Ha,Hb+Ha+H
VATT,2,1,1,0
ALLSEL
VPLOT
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,ALL
nsel,all
nummrg,node,1e-5
! les conditions aux limites
acel,0,-9.81,0
nset,s,loc,x,0
d,all,ux,0,,uy,uz
nset,all
aset,s,loc,z,Hb+Ha+H
aset,r,loc,x,L1,L1+L
aset,r,loc,y,w1,w1+w
```



```
nsla,s,1
*get,p1,node,0,num,min
cp,1,volt,all
d,p1,VOLT,V,0
allsel
asel,s,loc,z,Hb+Ha+H
asel,r,loc,x,L2,L2+L
asel,r,loc,y,w1,w1+w
nsla,s,1
asel,s,loc,z,-Ha-H
asel,r,loc,x,L1,L1+L
asel,r,loc,y,w1,w1+w
nsla,s,1
*get,p4,node,0,num,min
cp,4,volt,all
d,p1,VOLT,V,0
allsel
asel,s,loc,z,Hb+Ha
asel,r,loc,x,L1,L1+L
asel,r,loc,y,w1,w1+w
nsla,s,1
d,all,volt,0,0
nsel,all
asel,s,loc,z,-H-Ha
asel,r,loc,x,L1,L1+L
asel,r,loc,y,w1,w1+L
nsla,s,1
!d,all,volt,0,0
nsel,all
FINISH
```

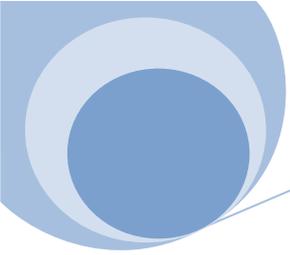


## *Annexe II : Les formes modales et les fréquences propres avec Matlab7.4.0*

```
function forme
%           programme pour le calcul des fréquences et le trace des formes
modales
%           copyright 2012 par bendine kouider clear all;
clc;
close all;
display('quelle est. la section de la poutre?')
    W=input('Entrer la largeur de la poutre [m]: ');
    Th=input('Entrer l\'hauteur de la poutre [m]:');
    L=input('Entrer la longueur de la poutre [m]: ');
    Ix=(1/12)*W*Th^3;
    Iy=(1/12)*(W^3)*Th;
    A=W*Th;
disp(' les propriétés de la poutre')
    E=input('Entrer le module de Young [Pa]: ');
    Ro=input('Entrer la densité de la poutre [kg/m^3]: ');
display('combien de mode voulez vous tracé?')
HMMS=input('Entrer le nombre de mode: ');
    if HMMS>=7
        disp(' ')
        warning('NOTE: le programme est limiter par six mode');
        disp(' ')
    end
    Nm=3*HMMS;
    jj=1;
    while jj<=Nm;
        betaNL(jj)=fzero(@(betaNL) cosh(betaNL)*cos(betaNL)+1, [jj jj+3]);
        jj=jj+3;
    end

    index=(betaNL~=0);

betaNLall=(betaNL(index))';
fprintf('betaNL value is %2.3f\n', betaNLall);
    betaN=(betaNLall/L)';
k=1;
```

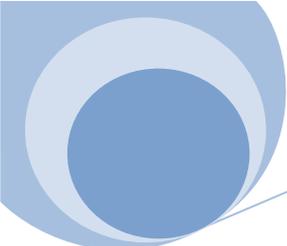


```
wn=ones(1,length(betaN));
fn=ones(1,length(wn));
while k<=length(betaN);
wn(k)=betaN(k)^2*sqrt((E*Ix)/(Ro*A));
fn(k)=wn(k)/(2*pi);
fprintf('forme modale# %2f corresponds a la nat. freq (fn): %3.3f\n', k, fn(k)
);
k=k+1;
end

x=linspace(0, L, 180);
xl=x./L;
sigmaN=zeros(1, HMMS);
for ii=1:HMMS;
    sigmaN(ii)=(sinh(betaN(ii)*L)-
sin(betaN(ii)*L))/(cosh(betaN(ii)*L)+cos(betaN(ii)*L));
end
Tc='(cosh(betaN(ii).*x(jj))-cos(betaN(ii).*x(jj)))-
sigmaN(ii).*(sinh(betaN(ii).*x(jj))-sin(betaN(ii).*x(jj)))';
Xnx=zeros(length(betaN),length(x));

for ii=1:length(betaN)
    for jj=1:length(x)
        Xnx(ii,jj)=eval(Tc);
    end
end
MMS=HMMS;
if MMS==1
    plot(xl,Xnx(1,:), 'b-')

    title('les formes modales')
    legend('Mode #1', 0); xlabel('x/L'); ylabel('forme modale X_n(x)'); grid
    hold off
elseif MMS==2
    plot(xl,Xnx(1,:), 'b-'); hold on
    plot(xl,Xnx(2,:), 'r-');grid
    title('les formes modales')
```



```
legend('Mode #1', 'Mode #2', 0)
xlabel('x/L'); ylabel('forme modale X_n(x)')
    hold off;
elseif MMS==3
    plot(xl,Xnx(1,:), 'b-'); hold on
    plot(xl,Xnx(2,:), 'r-')
    plot(xl,Xnx(3,:), 'm-');grid
    title('les formes modales')
    legend('Mode #1', 'Mode #2', 'Mode #3', 0)
    xlabel('x/L'); ylabel('forme modale X_n(x)')
    hold off;
elseif MMS==4
    plot(xl,Xnx(1,:), 'b-'); hold on
    plot(xl,Xnx(2,:), 'r-')
    plot(xl,Xnx(3,:), 'm-')
    plot(xl,Xnx(4,:), 'c-'); grid
    title('les formes modale')
    legend('Mode #1', 'Mode #2', 'Mode #3', 'Mode #4', 0)
    xlabel('x/L'); ylabel('forme modale X_n(x)')
    hold off;
elseif MMS==5
    plot(xl,Xnx(1,:), 'b-'); hold on
    plot(xl,Xnx(2,:), 'r-')
    plot(xl,Xnx(3,:), 'm-')
    plot(xl,Xnx(4,:), 'g-')
    plot(xl,Xnx(5,:), 'k-')
    grid
    title('les formes modales')
    legend('Mode #1', 'Mode #2', 'Mode #3', 'Mode #4', 'Mode #5', 0)
    xlabel('x/L'); ylabel('Mode shape X_n(x)')
    hold off
elseif MMS>=6
    plot(xl,Xnx(1,:), 'b-'); hold on

plot(xl,Xnx(2,:), 'r-')
```

```

plot(x1,Xnx(3,:), 'm-')
plot(x1,Xnx(4,:), 'g-')
plot(x1,Xnx(5,:), 'k-')
plot(x1,Xnx(6,:), 'c-')
grid
title('les formes modale')
legend('Mode #1', 'Mode #2', 'Mode #3', 'Mode #4', 'Mode #5','Mode #6', 0)
xlabel('x/L'); ylabel('forme modale X_n(x)')
hold off
end

```

### *Annexe III : Création des Matrices de Variable d'état avec Matlab7.4.0*

```

% programme pour un contrôle active de vibration de poutre
% copyright 2011 par bendine kouider
E=65e9;           %module de Young de poutre
Ep=62e9;          % module de Young
d31=-210E-12;     %coefficient de charge
lb=0.55;          %la longueur de poutre
rho=2.5e3;        %masse volumique
b=5e-2;
bp=2e-2%la largeur
h=1e-3;           %épaisseur (2h=0.002)
A=2*b*h;         %section
l=0.070;         %position d'actionneur
hp=0.0025;       %épaisseur d'actionneur
I=(b*h^3)/12;    %moment d'inertie
betal=[1.875,4.694,7.855];           %beta
beta=beta1/lb;   %beta
Cs=104e-9;       %capacitance
L1=0.020;
%L2=0.180;
%L3=0.330
%L4=L3+1
%Le1=0.400
%Le2=Le1+1
I=(2*b*h^3)/12; %moment d'inertie
k31=0.3;

```

```

g31=10.5e-3;
m=12*Ep*hp*(h+hp)/(2*E*h^3+Ep*((h+2*hp)^3-h^3))
%K=I*E*m*d31/hp
K=b*d31*Ep*(h+hp); % coefficient d'actionneur
Kb=-0.5*b*(hp+h)*(k31^2/g31)/Cs*(L3-L1);
%Kb=0.5*b*d31*Ep*(hp+h)/Cs; % coefficient de capteur
z1=0.0052 ;z2=0.001 ;z3=0.001;
gamma=[];
w=[]; %omega
omega=beta1.^2*sqrt(E*I/(rho*A*lb^4)); %omega
gamma=(sin(beta1)-sinh(beta1))./(cos(beta1)-cosh(beta1)); %gamma
A1=[zeros(3),eye(3);-diag(omega.^2),zeros(3)];
A1(4,4)=-omega(1).^2*z1;A1(5,5)=-omega(1).^2*z2;A1(6,6)=-omega(1).^2*z3; %
matrice A
t=[0:1/500:80];
syms x
c=[];
for i = 1:3
    y = inline(rho*A*(cos(beta(i)*x)-cosh(beta(i)*x)+gamma(i)*(sin(beta(i)*x)-
sinh(beta(i)*x))).^2);
    c(i)=sqrt(1/quad(y,0,lb));
end

psiD11 = c.*beta.*(-sin(beta*L1)-sinh(beta*L1)+gamma.*(cos(beta*L1)-
cosh(beta*L1)));
psiD22 = c.*beta.*(-sin(beta*(L1+1))-sinh(beta*(L1+1))+gamma.*(cos(beta*(L1+1))-
cosh(beta*(L1+1))));
%psiD33 = c.*beta.*(-sin(beta*L2)-sinh(beta*L2)+gamma.*(cos(beta*L2)-
cosh(beta*L2)));
%psiD44 = c.*beta.*(-sin(beta*(L2+1))-
sinh(beta*(L2+1))+gamma.*(cos(beta*(L2+1))-cosh(beta*(L2+1))));
%psiDel = c.*beta.*(-sin(beta*Le1)-sinh(beta*Le1)+gamma.*(cos(beta*Le1)-
cosh(beta*Le1)))

```

```

%psiDe2 = c.*beta.*(-sin(beta*Le2)-sinh(beta*Le2)+gamma.*(cos(beta*Le2)-
cosh(beta*Le2)))
B=K*[zeros(3,1);(psiD11-psiD22).'];
C=Kb*[(psiD22-psiD11),zeros(1,3)];

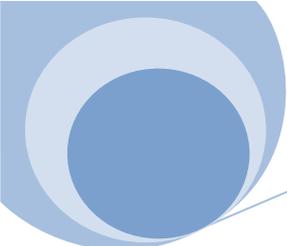
```

## *Annexe IV : Création de la fonction de transfert avec Matlab 7.4.0*

```

%fonction de transfert va/vs
numsl=K*Kb*(psiD22(1)-psiD11(1))*(psiD44(1)-psiD33(1));
densl=[1 2*z1*omega(1) omega(1)^2];
numsl=K*Kb*(psiD22(2)-psiD11(2))*(psiD44(2)-psiD33(2));
dens2=[1 2*z1*omega(2) omega(2)^2];
numsl=K*Kb*(psiD22(3)-psiD11(3))*(psiD44(3)-psiD33(3));
dens3=[1 2*z1*omega(3) omega(3)^2];
tf_model=tf(numsl,dens1);
tf_mode2=tf(numsl,dens2);
tf_mode3=tf(numsl,dens3);
tf_modes=tf_model+tf_mode2+tf_mode3
%fonction de transfert w/va
numsw1=K*(psiD22(1)-psiD11(1));
densw1=[1 2*z1*omega(1) omega(1)^2];
numsw2=K*(psiD22(2)-psiD11(2));
densw2=[1 2*z1*omega(2) omega(2)^2];
numsw3=K*(psiD22(3)-psiD11(3));
densw3=[1 2*z1*omega(3) omega(3)^2];
tf_modew1=tf(numsw1,densw1);
tf_modew2=tf(numsw2,densw2);
tf_modew3=tf(numsw3,densw3);
tf_modews=tf_modew1+tf_modew2+tf_modew3

```



## Bibliographie

### Thèses et Livres

[1] Régis Andre : *effet piézoélectrique dans les puits quantiques*. cdte/cdmnte et cdte/cdznte. universite joseph fourier-grenoble1.1994.

[2] A.Benjeddou: *advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey*. Structural mechanics and coupled systems laboratory, cnam, 2 rue conte, f-75003 paris, france.

[3]Frédéric Giraud : *modalisation causale et commande d'un actionneur piézo-électrique à onde progressive*. Laboratoire d'électrotechnique et d'électronique de puissance de lille. 9juillet 2002.

[4] Michel Brissaud : *matériaux piézoélectriques : caractérisation, modélisation et vibration*

[5]Pascal De Boe : *les éléments piézo-laminés appliqués à la dynamique des structures*. universite de liege .2003

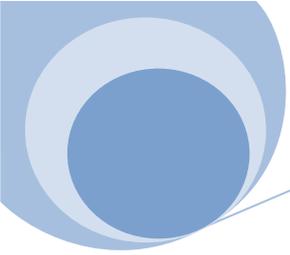
[6]Mountaga Lam : *formalisme d'octet appliqué à lapropagation d'ondes dans des milieux piézoélectriques inhomogènes*. Université de tours.2008

[7] Arnaud Parent : *apport des nouveaux matériaux piézoélectriques dans le domaine des micro-gyromètres vibrants*. Université de paris-sud.2008

[8] Godet Ludovic : *etude de la photolithogravure sur pzt pour la réalisation d'un guide d'onde*. Laboratoire de physique des isolants et d'optronique.2002

[9] Nicolas Galopin : *modélisation et caractérisation de matériaux actifs pour la conception de dispositifs magnéto-électriques*. u.f.r. des sciences d'orsay

[10] Mohamed Lakhdar Sahli : *modélisation et contrôle de sante des matériaux composites hybrides a propriétés adaptables : matériaux intelligents, sous l'effet des efforts extérieurs*.



University de constantine.2009

[11] Gergely Takács Et Boris Rohal-Likiv: *model predictive vibration control “efficient constrained mpc vibration control for lightly damped mechanical structures*. springer. aout 26, 2011

[12] Wodel K. Gawronski : *advanced structural dynamics and active control of structures*. springer.

[13] R.D Mindlin : *an introduction of the mathematical theory of vibrations of elastic plates*. editer par jiashi yang.

[14] Farid Ginaraghi & Benjamin C. Kuo: *automatic control systems (9 editions)*. Wiley

[15] Bouris J. Lurie & Paul J. Enright: *classical feedback control with matlab*. mrcel dekker, inc

[16] Michael Weeks: *digital signal processing using matlab and wavelets*. infinity science press

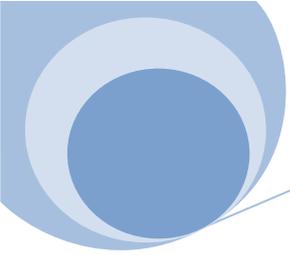
[17] John Dyle, Bruce Francis & Allen Tannanbaum: *feedback control theory*, macmillan publishing co. 1990

[18] Tomasz Kysinski & Francois Malburet: *mechanical vibrations*. iste ltd

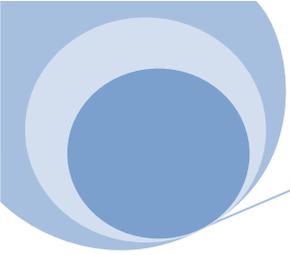
[19] Constantine H. Houpis Et Steven J. Rasmussen: *quantitative feedback theory “fundamentals and applications”*. marcel dekker, inc

[20] André Preumont: *vibration control of active structures (2<sup>nd</sup> edition)*. kluwer academic publishers

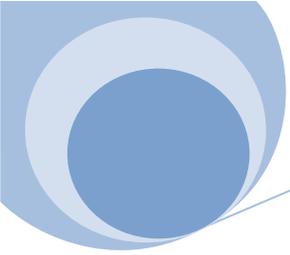
[21] Vincent Piefort: *finite element modeling of piezoelectric active structures*. Université libre de bruxelles.2000-2001



- [22] Marcelo Areias Trindade: *contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques viscoélectroniques : poutres sandwich/ multicouches intelligentes*. Conservatoire national des arts et métiers. 2000
- [23] Levent Malgaca: *intrgration of active vibration control methods with finite element models of smart structures*. dokuz eylul university . 2007
- [24] Adrien Badel : *récupération d'énergie et contrôle vibratoire par éléments piézoélectriques suivant une approche non linéaire*. Université de savoie. 2008
- [25] Nicolas Rizet : *contrôle actif de vibrations utilisant des matériaux piézoélectriques*. Institut national des sciences appliquées de lyon. 1999
- [26] S.O.Reza Moheimani & Andrew J.Fleming : *piezoelectric transducers for vibration control and damping*. springer. 2006
- [27] Ashish Tewari: *modern control design with matlab and simulink*. John wiley and sons, ltd.2002
- [28] Robert L. Williams li & Douglas A. Lawrence: *linear state-space control systems*. John wiley and sons, inc.2007
- [29] Daniel J.Inman: *vibration with control*. John Wiley and sons, inc.2006
- [30] Walter Heywang, Karl Lubitz & Wolfram Wersing: *piezoelectricity evolution and future of technology*. springer. 2008
- [31] Robert H.Bishop: *modern control systems analysis and design using matlab*. addison-wesly publishing compny.1993



- [32] Clarence W.De Silva: *vibration damping control, and design*.crc press.2007
- [33] Jasbir S.Arora: *introduction to optimum design second edition*. elsevier academic press.2004
- [34] Desineni Subbaram Naidu: *optimal control systems*.crc press.2003
- [35] Dingyu Xue, Yang Quan Chen & Derek P. Atherton: *linear feedback control analysis and design with matlab*. siam .2001
- [36] Francis H. Raven: *automatic control engineering*. mcgraw–hill book company, inc. 1961
- [37] Rao V.Dukkipati: *solving vibration analysis problems using matlab*. new age international (p) limited, publishers.2007
- [38] Michael R. Hatch: *vibration simulation using matlab and ansys*. chapman and hall/crc.2001
- [39] Jan Machowski, Janusz W.Bialek & James R. Bumby: *power system dynamics: stability and control*. John wiley and sons, ltd
- [40] C.F.Beards: *structural vibration: analysis and damping*. butterworth heinemann.2003
- [41] S. TIMOSHENKO: *vibration problems in engineering*. D.van Nostrand Company, inc.1937
- [42] Douglas Thorby: *structural dynamics and vibration in practice*. elsevier.2008
- [43] *Ansys Modeling and Meshing Guide*. Ansys, inc.2004
- [44] Daniel J.Inman: *engineering vibration (second edition)*. Pearson education.2001
- [45] Zaki B.Nossair, A.A.Madkour, M.A.Awadalla, M.M.Abdulhady: *system identification using*



*intelligent algorithm*

[46] Shawn Le: *active vibration control of a flexible beam*. san José university.2009

[47] William J: *introduction to Matlab 7 for engineers palm iii*. mcgraw hill.

[48] R. Keith Mobley: *vibration fundamentals*. newnes.1999

[49] John J. D'azzo & Constantine H. Houpis: *Linear control system analysis and design with Matlab. edition5*. marcel dekker,inc

[50] Jerome J. Connor: *introduction to structural motion control*. Pearson education, inc.2003

[51] Karel Perutka: *Matlab for engineers –applications in control, electrical engineering, it and robotics*. intech.2001

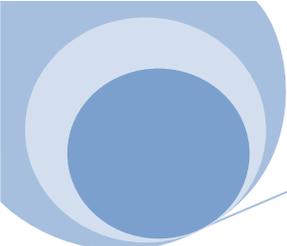
[52] Manfred Morari & N. Lawrence Ricker: *model predictive control toolbox for use with matlab*. The math works, inc.1998

[53] Timothy Eggborn: *analytical models to predict power harvesting with piezoelectric materials*. virginia polytechnic institute and state university. May 2003

[54] Erdogan Madenci & Ibrahim Guven: *the finite element method and applications in engineering using ansys®*. springer.2006

[55] Bingen Yang: *stress, strain, and structural dynamics*. elsevier inc. 2005

[56] Liuping Wang: *model predictive control system design and implementation using matla*. springer.2009



[57] Derek Atherton & Ventus publishing.2009: *control engineering*.

[58] Rao V. Dukkupati: analysis and design of control systems using Matlab. New age international (p) ltd., publishers.2006

## Articles & Conferences

[59] Andrew J. Young & Colin H. Hansen: control of flexural vibration in stiffened structures using multiple piezoceramic actuators. elsevier.1995

[60] Meysam Chegini, Milad Chegini & Hadi Mohammadi: vibration suppression of a beam of structures. iacsit.2011

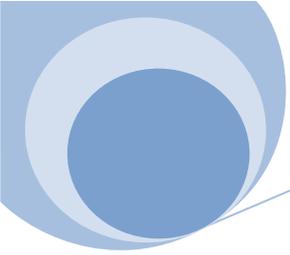
[61] Zhi-Cheng Qiu, Jian-Dahan, Xian-Minzhang, Yue-Chaowang , Zhen-Weiwu: active vibration control of a flexible beam using a non-located acceleration sensor and piezoelectric patch actuator. elsevier.2009

[62] Changjoo Shin, Chinsukhong, Weuibongjeong: active vibration control of beam structures using acceleration feedback control with piezoceramic actuators. elsevier.2011

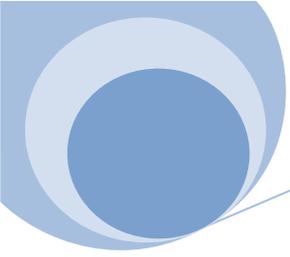
[63] C.m.a. Vasques, J. Dias Rodrigues: active vibration control of smart piezoelectric beams: comparison of classical and optimal feedback control strategies. elsevier.2006

[64] Paolo Gaudenzi \*, Rolando Carbonaro, Edoardo Benzi: control of beam vibrations by means of piezoelectric devices: theory and experiments. elsevier.2000

[65] Asan Gani, M.j.e. Salami-Smieeee and Md. Raisuddin Khan: active vibration control of a beam with piezoelectric patches: real-time implementation with xpc target. ieee.2003



- [66] Gergely Takács & Boris Rohal'ilkiv: direct closed-loop active vibration control system prototyping in ansys. Noise and vibration.2012
- [67] Jingjun Zhang: active vibration control of piezoelectric intelligent structures. Journal of computers, 2010
- [68] Deepak Chhabra, Pankaj Chandna, Gian Bhushan: design and analysis of smart structures for active vibration control using piezo-crystals. ijet publications uk.2011
- [69] M. Yuvaraja, M. Senthilkumar, I. Balaguru: study on vibration characteristics of pzt actuated mildsteel and aluminium cantilever beams. Annals of faculty engineering hunedoara.2011
- [70] Jingjun Zhang & Lili he and Ercheng Wang: active vibration control of piezoelectric intelligent structures. Journal of computers.2010
- [71] Alireza Tavakolpour, Musa Mailah, Intan z. Mat Darus: modeling and simulation of a novel active vibration control system for flexible structures. wseas transactions on systems and control.2011
- [72] M. Smrza, M. Salaseka: active integral vibration control of elastic bodies. Applied and computational mechanics.2008
- [73] Valdecir Bottega, Rejane Pergher, jun s. o. fonseca: simultaneous control and piezoelectric insert optimization for manipulators with flexible link. abcm.2009
- [74] Gergely Takács & Boris Rohal'ilkiv: piezoelectricwafer based feedback in vibration control of lightly damped beams. 9th international scientific – technical conference – process control 2010 june 7 – 10, 2010, kouty nad desnou, czech republic
- [75] Nitesh p. yelve1, s.m. khot, a.j. kothadia: simulation study of active vibration control. icem.2008



[76] Hkaragu" lle, l Malgaca & h f o" ktem: analysis of active vibration control in smart structures by ansys. Smart materials and structures.2004

Site web: [www.techno-science.net](http://www.techno-science.net)