

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

MEMOIRE DE MAGISTER
Spécialité : Génie Civil
Option : Structure et matériaux
Présentée par

BARKA Merbouha
Sujet de mémoire

Investigation de la stabilité thermique des plaques FGM sigmoïdes

Soutenu le 17 Octobre 2012

Devant le jury composé de :

BENYOUCEF SAMIR	MCA	UDL SBA	Président
BENRAHOU K.H	Pr	UDL SBA	Encadreur
ADDA BEDIA E.A	Pr	UDL SBA	Examineur
TOUNSI ABDELOUAHED	Pr	UDL SBA	Examineur

Année Universitaire 2011 / 2012

Remerciement

Remerciement

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbes.

*Je remercie **Mr. BENRAHOU** qui m'a donné l'occasion d'acquérir une expérience dans le domaine de génie civil avec ses conseils et son aide dans la réalisation de ce travail.*

Je tiens aussi à remercier très chaleureusement

Mr. FEKRAR, Pr. ADDA, Pr. TOUNSI.

J'exprime également ma gratitude aux professeurs et aux enseignants qui ont contribué à ma formation. Je tiens aussi à remercier profondément tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à réaliser ce travail.

Je voudrais remercier tous les membres du Laboratoire matériaux et hydrologie (LMH) de l'Université Djilali Liabès Sidi Bel Abbes avec qui j'ai passé d'agréables moments.

Dédicaces

Je pris Dieu, le tout puissant de mettre à ma portée l'audace et les capacités de pouvoir réaliser avec aisance devant cette éminente commission destinée à évaluer ma thèse.

Je dédie ce modeste travail :

A ceux que j'aime jusqu'à la frontière de l'imagination ;

Mon adorable Maman, qui a éclairé mon chemin et qui ma encouragé et soutenue toute au long de mes études ;

Mon cher Papa, qui a toujours était là pour moi, et qui ma donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

A mes frères ; Hicham ,Nasseroddine,Oussama et le petit Ismaïl.

A mes collègues de promotion magistère (2011-2012)

A tous ceux qui m'ont aidé, directement ou indirectement dans mes études.

Sommaire

Sommaire

ملخص

RESUME

ABSTRACT

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES NOTATIONS

Introduction général.....	15
CHAPITRE I : généralité sur les matériaux composites	
I.1 Introduction	19
I.2. Définition	19
I.3. Classification des matériaux composites	20
I.3.1 Classification suivant la forme des constituants.....	20
I.3.1.1 Composites à fibres.....	20
I.3.1.2 Composites à particules.....	20
I.3.2 Classification suivant la nature des constituants	21
I.4. Les composants de base des matériaux composites.....	21
I.4.1 La matrice.....	21
I.4.1.1 Matrice organique	22
I.4.1.1.1 Résine thermodurcissable (TD).....	22
I.4.1.1.2 Résine thermoplastique (TP).....	26
I.4.1.2 Matrice minéral.....	26
I.4.1.2.1 Les Composites à Matrice Métallique (C.M.M).....	26
I.4.1.2.2 Les Composites à Matrice Céramique (C.M.C.).....	27
I.4.2. Les fibres.....	27
I.4.2.1 Les renforts minéraux.....	28
I.4.2.1.1 Céramiques.....	28
I.4.2.1.2 Les fibres métalliques.....	30
I.4.2.2 Les renforts organiques.....	30
I.4.2.2.1 Fibres artificielles.....	30
I.4.2.2.2 Les Fibres végétales.....	32
I.5. Architecture des renforts.....	32
I.5.1 Forme linéique.....	32
I.5.2 Forme surfaciques	32
I.5.2.1 Mats.....	32
I.5.2.2 Tissus et rubans.....	33
I.6. Les matériaux composites structuraux.....	36

I.7.	La mécanique des matériaux composites.....	38
I.7.1	Equations constitutives en 3D.....	38
I.7.1.1	Loi de Hooke généralisé.....	38
I.7.1.2	Symétrie matérielle pour les matériaux orthotropiques.....	39
I.7.2	Équations constitutives en contraintes planes.....	40
I.7.2.1	Matrice de souplesse et de rigidité en contraintes planes.....	40
I.7.2.2	Matrice de souplesse et de rigidité pour un matériau orthotrope.....	41
I.7.3	Théorie des plaques stratifiées	41
I.7.3.1	Champ de déplacement.....	41
I.7.3.2	Champ des déformations	42
I.7.3.3	Champ des contraintes.....	42
I.7.3.4	Les forces par unité de longueur	43
I.7.3.5	Les moments par unité de longueur	43
I.8.	Influence des phénomènes de variation de température sur le comportement mécanique des stratifiée.....	44
I.8.1	Equations du comportement des matériaux composites tenant compte des phénomènes de dilatation.....	44
I.8.2	Equations du comportement des matériaux orthotrope.....	45
I.8.3	Equations du comportement des matériaux orthotrope dans l'état des contraintes planes.....	46
I.9.	Conclusion.....	46

CHPITRE II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

II.1.	Introduction.....	48
II.2.	Définition des matériaux à gradient des propriétés.....	48
II.3.	Fabrication des FGM.....	49
II.3.1	Métallurgie des poudres.....	49
II.3.2	la force centrifuge.....	50
II.4.	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM....	52
II.4.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	52
II.4.2	Sigmoïde structures S-FGM.....	53
II.4.3	Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	54
II.5.	Avantages et inconvénients de la FGM.....	55
II.5.1	Avantages de la FGM.....	55
II.5.2	Inconvénient de la FGM.....	56
II.6.	Les modèles analytiques des plaques FGM.....	56
II.6.1	La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT).....	57
II.6.2	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)...	58
II.6.3	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	59
II.7.	Flambement des plaques FGM.....	61
II.7.1	Définition de la stabilité.....	61

II.7.2	Méthodes d'analyse de stabilité.....	62
II.7.3	Flambement des plaques.....	62
II.7.3.1	Les équations d'équilibre.....	62
II.7.3.2	L'équation des plaques tenant compte du flambement.....	64
II.8	Conclusion.....	68

CHAPITRE III : Flambement thermomécanique des plaques FGM en tenant compte de déformation transversale

III.1.	Introduction.....	70
III.2.	Les plaques fonctionnellement gradué.....	70
III.3.	Les équations de gouvernement.....	71
III.4	Analyse de la stabilité	76
III.4.1	Analyse de la stabilité mécanique.....	78
III.4.2	Analyse de la stabilité thermique	79
III.4.3	Analyse de la stabilité thermomécanique	81
III.5.	Conclusion.....	82

CHAPITRE IV : Résultats et discussion

IV.1.	Introduction.....	85
IV.2.	Domaine d'étude.....	85
IV.3.	Validation analytique.....	86
IV.4	Les résultats numériques et discussion	86
IV .4.1.	L'effet de l'imperfection initiale.....	86
IV .4.2.	L'effet de l'indice k et l'aspect de rapport a/b	87
IV .4.3	L'effet de champ de température.....	88
IV .4.4	Les effets de matière et les paramètres géométriques.....	89
IV .4.4.1	La stabilité mécanique.....	89
IV .4.4.2	La stabilité thermique.....	92
IV .4.4.3	La stabilité thermomécanique.....	96
IV.5.	Conclusion.....	99
	Conclusion général.....	100
	Références bibliographiques.....	102

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة؛ أولاً تقديم بحث نظري لدراسة استقرار صفيحة مستطيلة ذات خصائص مادية متغيرة بالتدرج تحت تأثير حمولة ميكانيكية؛ حرارية و مشتركة. في هذه الدراسة نفرض أن خصائص المادة متغيرة بالتدرج في اتجاه السمك تحت تأثير الحرارة حسب الدالتين S-FGM P-FGM معادلات التوازن و التوافق للصفائح نتحصل عليها باستخدام نظرية الدرجة الأولى للتشوهات الناجمة عن القطع مع أخذ بعين الاعتبار الهندسة الغير خطية وفق **فون كارمن** و التشوه الابتدائي للشكل الهندسي للصفحة.

المعادلات الناجمة تحل باستخدام نظرية **Glerkin** للحصول على معادلات لرسم منحنيات الالتواء. و ثانياً؛ تحليل الاستقرار الهندسي في مستوى معلم التناظر للصفائح المدروسة يوضح تأثير المادة و الخصائص الهندسية في مستوى حواف الصفيحة؛ خصائص المادة المتغيرة تحت تأثير الحرارة و التشوه الهندسي على التواء الصفيحة.

الكلمات المفتاحية: الالتواء؛ مواد متغيرة بالتدرج؛ خصائص المادة المتغيرة تحت تأثير الحرارة؛ التشوه

Résumé

L'objectif de ce travail, est de présenter une approche analytique pour l'étude de la stabilité des plaques fonctionnellement gradué rectangulaire sous l'effet de charge mécanique thermique et charges combinés. Les propriétés du matériau sont supposées être dépendantes de la température et gradué dans la direction de l'épaisseur selon deux lois de puissance des constituants (P-FGM et S-FGM). Les équations d'équilibre et de compatibilité pour les plaques sont obtenues en utilisant la théorie du premier ordre de déformation en cisaillement. On a tenu compte la géométrie non linéaire selon Von Karman et l'imperfection géométrique initiale. Les équations résultantes sont résolus en utilisant la procédure de Galerkin. On a obtenue pour obtenir des expressions à partir des quels les courbes des flèches de flambement peuvent être tracées par une procédure itérative.

Une analyse de stabilité effectuée géométriquement au plan médian de symétrie des plaques P-FGM et S-FGM montre les effets de matière et les paramètres géométriques, dans le plan aux conditions aux limites. Les propriétés du matériau dépendant de la température, et de l'imperfection influent sur le comportement des plaques après flambement.

Les mots clé : flambement, matériaux fonctionnellement gradués, propriétés dépendant de la température, l'imperfection.

ABSTRACT

The objective of this work, first; an analytical approach to investigating the stability of rectangular functionally graded plates under mechanical load, thermal, and combined loads is presented. The material properties are assumed to be temperature-dependent and graded in the thickness direction according to two power-law distribution in terms of volume fractions of constituents (P-FGM and S-FGM). The equilibrium and compatibility equations for the plates are derived by using the first-order shear deformation theory of plates, taking into account both the geometrical nonlinearity in the von Karman sense and initial geometrical imperfections. The resulting equations are solved by employing the Galerkin procedure to obtain expressions from which the post buckling load-deflection curves can be traced by an iterative procedure.

Second, a stability analysis performed for geometrically mid plane-symmetric P-FGM and S-FGM plates shows the effects of material and geometric parameters, in-plane boundary conditions, temperature-dependent material properties, and imperfections on the post buckling behavior of the plates.

Keywords: post buckling, functionally graded materials, temperature-dependent properties, imperfection.

Liste des tableaux

CHAPITRE I		
Tableau(I.1)	Les propriétés principales des résines polyesters.....	23
Tableau(I.2)	Les propriétés principales des résines phénoliques.....	24
Tableau(I.3)	Les avantages et les inconvénients des résines phénoliques.....	24
Tableau(I.4)	Les propriétés principales des résines époxydes.....	25
Tableau(I.5)	Les avantages et les inconvénients des résines époxydes.....	25
Tableau(I.6)	Les types des résines thermoplastiques et leurs propriétés.....	26
Tableau(I.7)	Propriétés de certains matériaux importants en céramique.....	27
Tableau(I.8)	Caractéristiques mécanique des fibres aramides.....	31
CHAPITRE IV		
Tableau(1.IV)	Les coefficients dépendant de la température du nitrure de silicium et d'acier inoxydable.....	86
Tableau (2.IV)	Température de flambement ΔT des plaques FGM sous une élévation de température uniforme ($b/h = 20$ et $\nu = 0.29$)	88
Tableau (3.IV)	Les charges critiques de flambage P_{xcr} (GPa) des plaques FGM sous une compression uniaxiale ($a/b = 1.0$ et $b/h = 20$ à $y = 0, b$).....	88

Listes des figures

Listes des figures

CHAPITRE I

Figure(I.1)	Matériau composite.....	19
Figure(I.2)	Les types de composites à base de la forme.....	20
Figure (I.3)	Les différentes familles d'une matrice.....	21
Figure (I.4)	Limite de température service (indicatives) de polymères, métaux, céramiques.....	22
Figure(I.5)	Les différentes familles des fibres.....	28
Figure(I.6)	Les fibres de Carbone.....	29
Figure(I.7a)	Fibre de verre.....	30
Figure(I.7b)	Tissu en fibre de verre.....	30
Figure(I.8)	Fibre Kevlar.....	30
Figure(I.9)	Chaîne et trame d'un tissu.....	33
Figure(I.10)	Armure taffetas.....	34
Figure(I.11)	Armure sergé.....	34
Figure(I.12)	Armure sergé.....	35
Figure(I.13)	Armure croisé.....	35
Figure(I.14)	Armure unidirectionnelle.....	36
Figure(I.15)	Constitution d'un stratifié.....	37
Figure(I.16)	Composite sandwich.....	38
Figure(I.17)	Forces par unité de longueur.....	43
Figure(I.18)	Moments par unité de longueur.....	44

CHAPITRE II

Figure(II.1)	Microstructure d'une FGM qui est gradué à partir un matériau A à un matériau B	48
Figure(II.2)	Exemple de processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres.....	50
Figure(II.3)	Trois types de méthodes de fabrication de FGM en vertu de la force centrifuge. (a) la méthode centrifuge, (b) la méthode lisier centrifuge, et (c) Méthode de pressurisation centrifuge.....	50
Figure(II.4)	Appareil pour le procédé par centrifugation.....	51
Figure (II.5)	La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM.....	52
Figure(II.6)	La variation du module de Young associé à différents indices exposants pour une plaque S-FGM.....	54
Figure (II.7)	La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la	

	plaque E-FGM.....	55
Figure(II.8)	Cinématique de Love-Kirchhoff.....	57
Figure(II.9)	Cinématique de Reissner-Mindlin.....	58
Figure(II.10)	Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	59
Figure(II.11)	comportement charge-déformation de colonne soumis à une compression axiale ; (b) courbe $P - \Delta$, (c) courbe $P - y$	61
Figure(II.12)	Une plaque rectangulaire en référence cartésien(x,y,z).....	64
Figure(II.13)	Résultantes en membrane exercées sur un élément de plaque.....	65
Figure(II.14)	Résultantes normales en membrane s'exerçant sur un élément de plaque déformée.....	65
Figure(II.15)	Résultantes de cisaillement en membrane s'exerçant sur un élément de plaque déformée.....	66

CHAPITRE IV

Figure(1.IV)	Comparaison des courbes de flambement thermique des plaques FGM avec les propriétés des matériaux T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 2$, $\mu = 0$ et $,05$	87
Figure(2.IV)	Les courbes de flambage des plaques P-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $\beta = 0$ et $\mu = 0$ sous une charge de compression uniaxiale P_x vs. W/h	89
Figure(3.IV)	Les courbes de flambage des plaques P-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $\beta = 0$ et $k = 5$ sous une charge de compression uniaxiale P_x vs. W/h	90
Figure(4.IV)	L'effet des conditions aux limites libre FM dans le plan sur le flambement des plaques P-FGM et S-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$ et $\mu = 0$ et 0.1 et en compression uniaxiale.....	91
Figure(5.IV)	L'effet des conditions aux limites encastree IM dans le plan sur le flambement des plaques P-FGM et S-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$ et $\mu = 0$ et 0.1 et en compression uniaxiale.....	91
Figure(6.IV)	Le comportement après flambement thermique des plaques FGM (P et S) avec les propriétés T-ID et T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$ et $\mu = 0$ en compression uniaxiale.....	92
Figure(7.IV)	Le comportement après flambement thermique des plaques FGM (P et S) avec les propriétés T-ID et T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$ et $\mu = 0.1$ en compression uniaxiale.....	93
Figure(8.IV)	Les courbes de flambage thermique des plaques FGM avec les propriétés T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $\mu = 0$ et 0.1 ; $k = 0$ (1), 1 (2), et $k = 5$ (3)	93

Figure(9.IV)	Les courbes de flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-ID et T-D à $b/h = 20$, $k = 2$, $a/b = 1.0$ (1) et 2.0 (2); $\mu = 0$	94
Figure(10.IV)	Les courbes de flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-ID et T-D à $b/h = 20$, $k = 2$, $a/b = 1.0$ (1) et 2.0(2); $\mu = 0.1$	94
Figure(IV. 11)	Effet des conditions aux limites dans le plan IM sur le comportement après flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-D à $b/h = 20$, $k = 1$, et $a/b = 1.0$ (1) et 1.5(2) ; $\mu = 0$ et 0.1	95
Figure(IV.12)	Effet des conditions aux limites dans le plan FM sur le comportement après flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-D à $b/h = 20$, $k = 1$, et $a/b = 1.0$; $\mu = 0$ et 0.1.....	96
Figure (IV .13)	Effet de l'augmentation de température sur le comportement après flambement des plaques P-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 2$, et $\mu = 0$ et 0.1 ; $\Delta T = 0$ (1), 200(2), et 300 K(3)	97
Figure (IV .14)	Effet de la charge de compression P_x sur le comportement après flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-ID et T-D à $a/b = 1.0$ $b/h = 20$, $k = 1$, et $\mu = 0$; $P_x = 0.5$ (1,3) et 1.5 GPa (2,4)	97
Figure (IV.15)	Les courbes après flambement des plaques FGM avec les propriétés T-ID(1)et T-D(2) à $a/b = 1.0$ $b/h = 20$, et $k = 1$, et $\mu = 0$, et 0.2	98

Listes des notations

C_{ij} :	La matrice de rigidité
S_{ij} :	La matrice de souplesse
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz} :	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$:	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz} :	Déformations de distorsion
\bar{Q}_{ij} :	La matrice de rigidité réduite
\bar{S}_{ij} :	La matrice de souplesse réduite
u^0, v^0, w^0 :	Les déplacement dans le plan médian
u, v, w	Les déplacements dans les directions x ,y et z
$\{k\}$:	Sont les courbures
N_x, N_y, N_{xy} :	Les forces par unité e longueur suivant x,y et z
M_x, M_y, M_{xy} :	les moments par unité e longueur suivant x,y et z
α_i :	Les coefficients de dilatation thermique
ΔT :	La variation de température
$V(z)$:	La fraction volumique
k :	L'indice de fraction volumique
h :	L'épaisseur de la plaque
$E(z)$:	La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque
E_c :	Le module d'Young de céramique
E_m :	Le module d'Young de métal
ν :	Le module de Poisson
ϕ_α :	La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α .
γ_α^0 :	La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.
δW :	Le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques
α :	Le coefficient de dilation thermique
$\varepsilon_{xm}, \varepsilon_{ym}$	Les déformations normales
γ_{xym} :	La déformation de cisaillement sur le plan médian de la plaque
w :	L'amplitude de déviation
$w^*(x, y)$:	L'imperfection initiale de la plaque
f :	La fonction d'Airy.
FM :	Les conditions aux limites sont simplement appuis et mobiles

IM :	Les conditions aux limites sont simplement appuis et fixes
N_{x0}, N_{y0}:	Les résultantes des forces avant flambement dans les directions x et y
λ_m, μ_n:	Les nombres de demi-ondes dans les directions x et y ,
P_{xcr}:	La charge critique de flambement
$T - D$:	Les propriétés dépendantes de la température
$T - ID$:	Les propriétés indépendantes de la température

Introduction général

Introduction général

Les propriétés supérieures de matériaux composites avancés, tels que la résistance spécifique élevée la haute rigidité spécifique, ont conduit à leur utilisation généralisée dans les avions, engins spatiaux et les structures spatiales. Dans les structures composites stratifiées, homogènes les lames élastiques sont liées entre elles pour obtenir de meilleures propriétés mécaniques et thermiques. Ces éléments sont soumis à des conditions de chargement qui varient au cours de leur durée de vie. Cela peut conduire à une défaillance due à des déviations ou des contraintes excessives. Chez les composites en fibre le risque de fissuration ou de décollement peut se produire à des températures élevées à travers une interface entre deux matériaux distincts. Ces problèmes peuvent être résolus en utilisant des matériaux à gradient de propriétés (FGM) [1]. Pour ces matériaux les propriétés varient de façon continue. Ceci est réalisé soit en changeant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, généralement dans le sens de l'épaisseur seulement, soit en changeant la structure chimique d'une feuille mince de polymère. Cela pour obtenir une variation lisse des propriétés des matériaux dans le plan et une réponse optimale sous l'effet de charges externes thermomécaniques.

Les matériaux fonctionnellement graduée (FGM) sont à haut rendement, les matériaux réfractaires sont capables de résister aux températures ultra-hautes.

Des recherches ont traité le comportement de flambement des plaques en matériaux gradués. Eslami et all ont traité une série de problèmes liés au flambement linéaire des plaques FGM rectangulaire simplement appuyé, avec et sans imperfection sous les charges mécaniques et thermiques. En utilisant une approche analytique, ils ont obtenu des expressions de forme fermée pour des charges de flambement.

Lanche [2] a étudié des plaques FGM rectangulaire modérément épais après flambement thermique. Mais les effets de déformation avant flambement, les propriétés des matériaux dépendant de la température et le comportement après flambement des plaques FGM n'ont pas été prises en compte dans ces travaux. Shen [3-4] a étudié le comportement après flambement des plaques FGM soumises à des charges transversales dans le plan [3], thermoélectromécanique [5] et thermique [4].

En utilisant la théorie d'ordre élevée de déformation en cisaillement, Reddy réussi à analyser le flambement des plaques FGM avec des propriétés du matériau dépendant de la température et les imperfections initiales comptabilisées. Liew et all a analysé les plaques FGM après flambement sous l'action des diverses charges [6] et sous changement uniforme de température [7] en utilisant la théorie d'ordre élevée de déformation en cisaillement. Ils ont également étudiée le flambement des panneaux cylindriques sous la combinaison des charges thermomécaniques dans le cadre de la théorie classique [8]. En employant la méthode différentielle quadratique et une technique d'itération, les courbes de flambement des plaques entièrement serrés ont été tracées dans ces études. Na et Kim [9] ont étudié le flambement thermique des plaques FGM en utilisant les trois dimensions par la méthode des éléments finis.

Zhao et autres [10] et Zhao et Liew [11] ont analysé le comportement de flambement et après flambement des plaques FGM en invoquant la méthode d'élément libre Kp-Ritz. Il est évident d'après la littérature que les recherches considèrent les propriétés du matériau dépendent de la température. Toutefois, en pratique les structures des FGM sont généralement exposées à environnement à température élevée, où des changements significatifs dans les propriétés du matériau sont inévitables. Par conséquent, leurs propriétés dépendent de la température et devraient être envisagées.

Le but de ce travail est d'analyser le flambement thermomécanique des plaques fonctionnellement gradué en utilisant la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre en tenant compte les propriétés dépendant de la température.

Le présent travail est organisé en quatre chapitres :

Dans le chapitre I, on a présenté des généralités sur les matériaux composites tels que leur définition, principale classification et la théorie des plaques stratifiées.

Le chapitre II, est consacré à l'étude de l'état de connaissance des matériaux fonctionnellement gradués FGM et les différentes théories de calcul d'éléments plaques en tenant compte de l'effet de flambement.

Le chapitre III donne, une approche analytique qui permet d'étudier le flambement des plaques FGM sous l'effet des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques.

Le chapitre IV, est consacré à la présentation des résultats numériques obtenus. On présentera une discussion pour les plaques FGM à la fraction volumique P-FGM et S-FGM.

Enfin, on a achevé cette étude par une conclusion tout en donnant des perspectives pour les travaux à venir.

CHAPITRE .I
CHAPITRE .I

**Généralité sur les
matériaux
composites**

I.1 Introduction :

Chaque type de matériau possède des propriétés et des caractéristiques selon sa classe. Les métaux sont en général tenaces et ductiles, mais leur masse volumique est souvent élevée. Les matières plastiques, légères, font preuve d'une faible rigidité, bénéficient de propriétés mécaniques moyennes et sont parfois fragiles. Les céramiques, quant à elles, ont un module de Young et une résistance théorique à la traction très élevés. Elles sont, cependant intrinsèquement fragiles. La combinaison des divers types de matériaux normalement non miscibles, et tout en contrôlant leur morphologie et leur répartition, on obtient des matériaux composites, dont les propriétés sont totalement différentes de celles des composants de base, cette technique est utilisée depuis des siècles.

I.2. Définition :

Les matériaux composites sont formés par la combinaison de deux ou plusieurs matériaux, dans le but d'obtenir des propriétés (physiques, chimiques, etc.), qui sont supérieures à celles de ses constituants [12]. D'une manière générale on distingue deux phases une phase continue appelée la matrice et une phase discontinue appelée le renfort. Ces renforts sont noyés dans une matrice qui les maintient en place et assure la cohésion de l'ensemble [13].

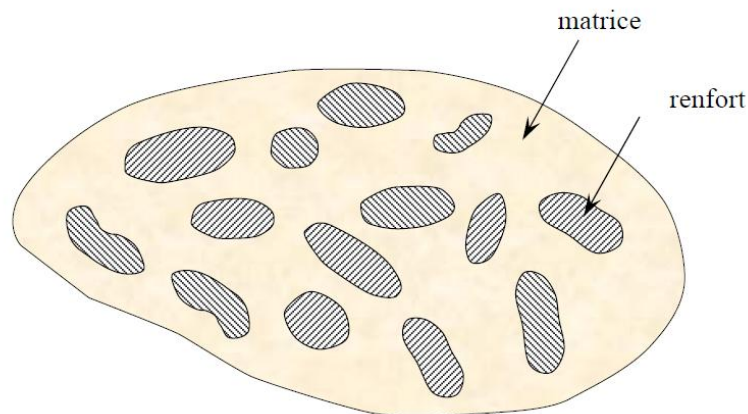


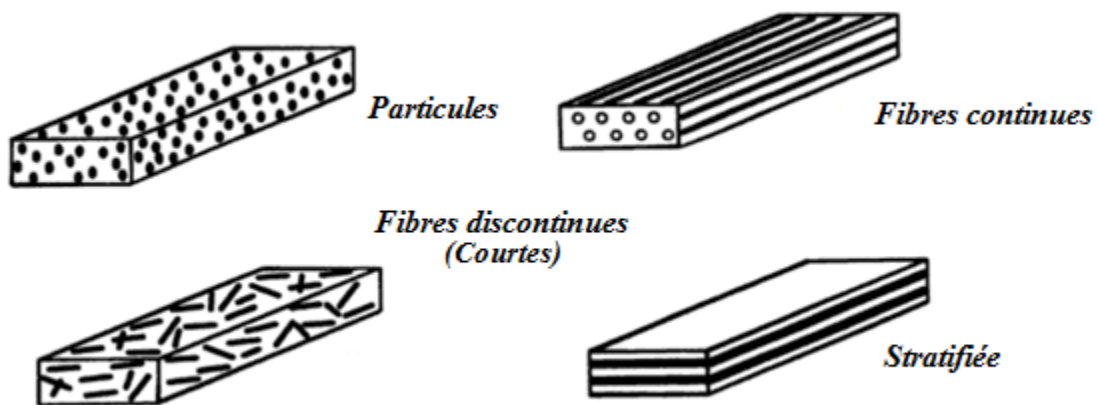
Figure. (I.1) : Matériau composite.

I.3. Classification des matériaux composites :

Les matériaux composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.[14]

I.3.1 Classification suivant la forme des constituants :

Dans cette classification les composites sont classés : les matériaux composites à particules et matériaux composites à fibres.[14]



Figure(I.2) : Les types de composites à base de la forme.

I.3.1.1 Composites à fibres :

Les renforts dans le matériau composite se trouvent sous forme de fibres continues ou sous forme discontinues (fibres coupées, fibres courtes, etc.). L'arrangement des fibres, et leurs orientations permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan.[13][14]

I.3.1.2 Composites à particules :

Dans ce cas les renforts sont sous forme des particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc.

Le choix de l'association matrice-particule dépend des propriétés souhaitées.[14]

I.3.2 Classification suivant la nature des constituants :

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique ou minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices.[14]

I.4. Les composants de base des matériaux composites :

I.4.1 La matrice :

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, répartir les contraintes sollicitées, la tenue chimique de la structure et de donner la forme désirée au produit. La matrice est plus ductile que les fibres, mais dont la résistance et la rigidité sont inférieurs. Par définition, c'est un minérale ou une résine polymère (figure I.3). La matrice assure la protection chimique des fibres on peut retrouver les différentes familles des matrices.[15].

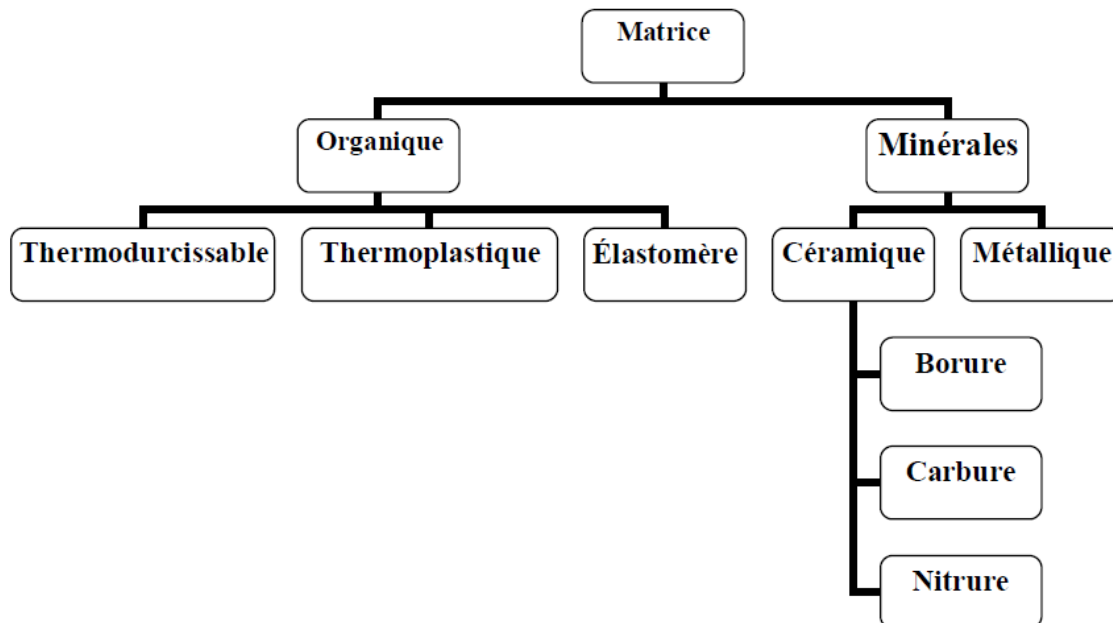


Figure (I. 3): Les différentes familles d'une matrice.

Figure (I.4) compare les limites approximatives de température de service de certains polymères importants, les métaux, et des céramiques. Clairement, les céramiques sont la seule classe de matériaux viables à très haute température.

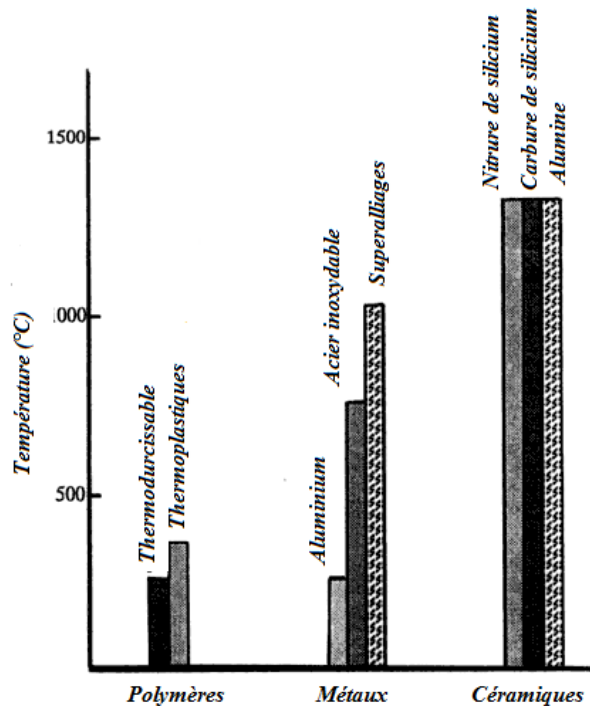


Figure (I. 4) : Limite de température service (indicatives) de polymères, métaux, céramiques. [16]

I.4.1.1 Matrice organique :

La nature thermoplastique ou thermodurcissable de la matrice détermine les principales propriétés de mise en œuvre et les performances finales des composites.[17]

I.4.1.1.1 Résine thermodurcissable (TD) :

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la fabrication de matériaux composites sont en ordre de diminuer le tonnage:

- ✓ Résines de polyesters insaturés condensés: les polyesters, les esters vinyliques, des dérivés allyliques, etc.
- ✓ Résines phénoliques, par condensation: aminoplastes, furanes, etc.
- ✓ Résines époxydes.[18]

■ Résines de polyesters:

Le plus largement utilisé de toutes les résines dans la fabrication de composites sont des résines de polyester insaturé. Leur développement est le résultat de:

-Faible coût de production.

- Une diversité qui offre de nombreuses possibilités.
 - Leur adaptation à certains procédés de fabrication qui sont faciles à réaliser et d'automatiser.
 - Une bonne rigidité résultant d'un module d'élasticité relativement élevé.
 - Bonne mouillabilité des fibres et de tissus.
 - Bonne résistance chimique aux hydrocarbures (essence, carburant, etc.) à des températures ambiantes, etc.
- D'où leur développement est industriel cesse d'augmenter.

En fonction de leur module de Young, les résines de polyester sont classées en souple, résines semi-rigides et rigides. Les résines habituellement utilisés dans la fabrication de matériaux composites sont de type rigide. Ces résines durcies ont les caractéristiques suivantes (**tableau.I.1**):[18]

La densité	1200 kg/m ³
le module de traction	2.8 – 3.5 GPa
le module de flexion	3 – 4.5 GPa
la résistance à la traction	50 – 80 MPa
la résistance à la flexion	90 – 130 MPa
d'allongement à la traction	2 – 5 %
allongement à la flexion	7 – 9 %
la température de déformation thermique (sous une contrainte de 1.8)	60 – 100°C

Tableau(I.1) : Les propriétés principales des résines polyesters.

Parmi les inconvénients sont les suivants:

- Comportement médiocre avec la température, qui est inférieure à 120 ° C en utilisation continue.
- Sensibilité à la fissuration, de l'ordre de 8-10%

- Mauvais comportement à la vapeur; dans l'eau bouillante, il ya le risque d'hydrolyse.
- Dégradation dans l'ultraviolet (UV)
- inflammabilité [18]

 **Résines condensation :**

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques. [14]

-**Les résines phénoliques** : sont les plus anciennes des résines thermodurcissables est caractérisé par les propriétés suivantes (**tableau.I.2**) :

Masse volumique	1200 kg/m ³
Module d'élasticité en flexion	3 GPa
Contrainte à la rupture en traction	40 MPa
Allongement à la rupture en traction	2.5 %
Contrainte à la rupture en flexion	90 MPa
résistance à la rupture compression	250 MPa
température de fléchissement sous charge	120 °C

Tableau(I.2) : Les propriétés principales des résines phénoliques.

Leurs avantages et inconvénients sont cités dans le **tableau (I.3)**:

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> -Une excellente stabilité dimensionnelle. -Une bonne tenue à la chaleur et au fluage. -Un faible retrait. -De bonnes caractéristiques mécaniques. -Un faible cout 	<ul style="list-style-type: none"> -Une mise en œuvre sous pression, donc à faibles cadences. -Les couleurs foncées des résines. - Une non adaptation à des utilisations alimentaires.

Tableau(I.3): Les avantages et les inconvénients des résines phénoliques.

Les résines phénoliques seront donc utilisées dans le cas de pièces nécessitant une tenue élevée en température ou une bonne résistance aux agents chimiques.[14]

-Les **résines aminoplastes** : leurs caractéristiques sont voisines de celles des résines phénoliques. aux avantages de ces résines, il faut ajouter :

-La possibilité d'utilisations alimentaires.

-La possibilité de colorer les résines.[14]

-Les **résines furaniques** : leurs avantages :

-Un durcissement plus rapide que les résines phénoliques.

-Une grande inertie vis-à-vis des agents chimiques corrosifs.[14]

■ Résines époxyde :

Sont les matrices des composites à hautes performances (constructions aéronautiques, espace, missiles, etc.)

Les caractéristiques mécaniques générales des résines époxydes sont dans le tableau(I.4) :[14]

Masse volumique	1100 à 1500 kg/m^3
Module d'élasticité en traction	3 à 5 GPa
Contrainte à la rupture en traction	60 à 80 MPa
Allongement à la rupture	2 à 5 %
Contrainte à la rupture en flexion	100 à 150 MPa
Résistance au cisaillement	30 à 50 MPa
Température de fléchissement sous charge	290 °C

Tableau(I.4): Les propriétés principales des résines époxydes.

Parmi les avantages et inconvénients des résines époxydes (tableau I.5) :[14]

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> - de bonnes propriétés mécaniques (en traction, flexion, compression, choc, fluage, etc.) -Une bonne tenue aux températures élevées : jusqu'à 150°C à 190°C en continu. -Une excellente résistance chimique.. -un faible retrait au moulage (de 0.5 à 1%). -Une très bonne mouillabilité des renforts. -une excellente adhérence aux matériaux métalliques. 	<ul style="list-style-type: none"> -un temps de polymérisation long. -un cout élevé. - la nécessité de prendre des précautions lors de la mise en œuvre. -une sensibilité à la fissuration

Tableau(I.5) : Les avantages et les inconvénients des résines époxydes.

I.4.1.1.2 Résine thermoplastique (TP) :

Les polymères utilisés sont essentiellement des thermoplastiques techniques qui présentent à l'état vierge de bonnes caractéristiques mécaniques.

Un renforcement de fibres courtes leur confère une tenue thermique et mécanique améliorée et, une bonne stabilité dimensionnelle.[19]

Parmi les types des résines thermoplastiques sont cité dans le tableau (I.6) :

Matrice TP	E [MPa]	σ_r [MPa]	ϵ_r [%]	T_{max} [°C]
Polyester (UP)	4.0	80	2.5	60 à 200
Vinylester (VER)	3.3	75	4	>100
Epoxyde (EP)	4.5	130	2.5	90 à 200
Polyimide (PI)	4 à 19	70	1	250 à 300
Polypropylène(PP)	1.2	30	20 à 400	70 à 140
Polyamide (PA)	2	70	200	170
Polyéthénylènesulfide(PPS)	4	65	100	130 à 250
Polyétheréthèreétone(PEEK)	4	90	50	140 à 250
Polyétherimide(PEI)	3.5	105	60	200

Tableau(I.6) : Les types des résines thermoplastiques et leurs propriétés.[17]

I.4.1.2 Matrice minéral :

I.4.1.2.1 Les Composites à Matrice Métallique (C.M.M)

Pour des applications plus haute température, on fait appel aux composites à matrice métallique (C.M.M) jusqu'à 600°C. Les métaux ou alliages métalliques utilisés dans la fabrication des C.M.M., sont généralement choisie en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé [15]. Ainsi, l'aluminium, le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utilisés. Les procédés de fabrication des C.M.M. diffèrent selon que la matrice se trouve lors de l'introduction des renforts à l'état liquide (forgeage liquide, fonderie moyenne pression), dans un état semi-solide ou dans l'état solide (métallurgie des poudres). Les C.M.M. présentent de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en température et aux chocs thermiques ainsi qu'une bonne résistante à l'usure et à l'abrasion.[20]

Les principaux avantages des CMM :

- Poids Major sauver résistance due plus au rapport de poids.
- Une stabilité dimensionnelle exceptionnelle.
- Une plus grande stabilité à température élevée.
- Amélioration significative des caractéristiques de fatigue cycliques [21]

I.4.1.2.2 Les Composites à Matrice Céramique (C.M.C.)

La céramique est un terme qui couvre une grande variété de non-métalliques, des matériaux inorganiques, qui sont souvent traitées à des températures élevées.

Ces céramiques avancées montrent une résistance exceptionnellement élevée à la chaleur supérieures à 1000 °C, produits chimiques, et à l'usure. Ces caractéristiques mêmes, cependant, de les rendre difficiles à fabriquer de façon simple et économique. [20-16]; le tableau(I.7) présente les propriétés de certains matériaux importants en céramique.

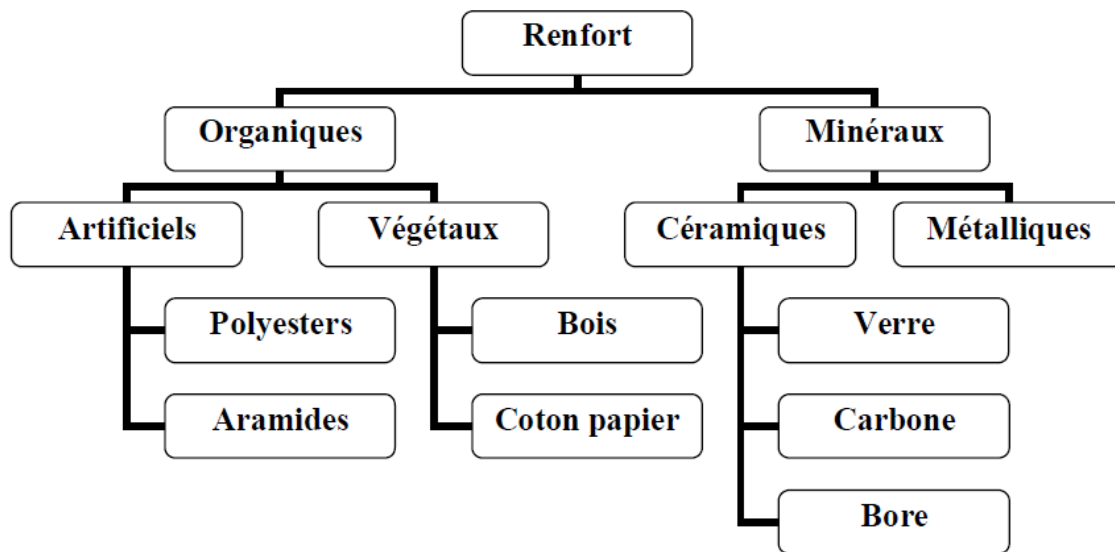
Matériau	Module de Young $E(GPa)$	Coef. De Poisson ν	Coef. De dilatation thermique $\alpha (10^{-6}K^{-1})$
SiC	420	0.22	4
Al_2O_3	380	0.25	8
Cordierite ($2Al_2O_3, MgO, 5SiO_2$)	130	0.25	2
Mullite ($3Al_2O_3, 2SiO_2$)	215	0.25	4
Sodalime glass	70	0.23	9

Tableau(I.7): Propriétés de certains matériaux importants en céramique [16]

I.4.2. Les fibres :

Les fibres sont utilisés dans les composites à cause de leurs légèreté. Les fibres sont plus forts que le matériau en vrac. Cela est du à l'orientation préférentielle des molécules le long de la direction des fibres et en raison de la réduction du nombre de défauts présents dans une fibre par rapport à la matière en vrac. [22]

La figure(I.5) présente les différentes familles des fibres.



Figure(I.5) : Les différentes familles des fibres.

I.4.2.1 Les renforts minéraux :

I.4.2.1.1 Céramiques :

■ Bore :

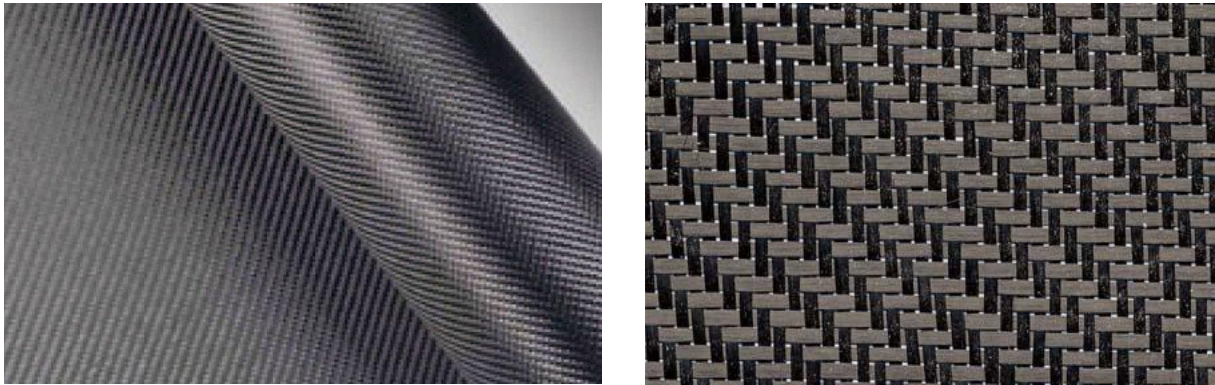
La fibre de bore est produite par dépôt de vapeur chimique à partir de trichlorure né à des températures chaudes substrat. Le substrat le plus couramment utilisé est un fil de tungstène chauffée d'environ $10 \mu m$ de diamètre, de longueurs continues de jusqu'à $3000 m$ ont été réalisés.[23]

■ Carbone :

Les fibres de carbone sont le groupe le plus développé à raison de leurs propriétés :

- faible densité.
- Haute résistance.
- Module de Young élevé.
- Grande stabilité de la masse fondue dans les systèmes métalliques divers.
- Possible grande variation dans les profils de propriété.

- Faible coefficient de dilatation thermique.
- Une bonne conductivité thermique et électrique.
- Rapport coût-efficacité [24]



Figure(I.6) : Les fibres de Carbone.

■ Verre :

Le verre possède une très bonne résistance à la rupture dépassant même celle de certains métaux. Cependant, le verre est un matériau très fragile du fait de sa forte sensibilité aux microfissures. Cette fragilité diminue lorsque le verre est sous forme de fibre puisque les microfissures sont moins nombreuses. Cela lui donne de bonnes performances. Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Il est obtenu à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres :

E : Pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;

R : Pour les composites hautes performances ;

D: Pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).[19]



Figure (I. 7a): Fibre de verre



Figure(I. 7b): Tissu en fibre de verre

I.4.2.1.2 Les fibres métalliques :

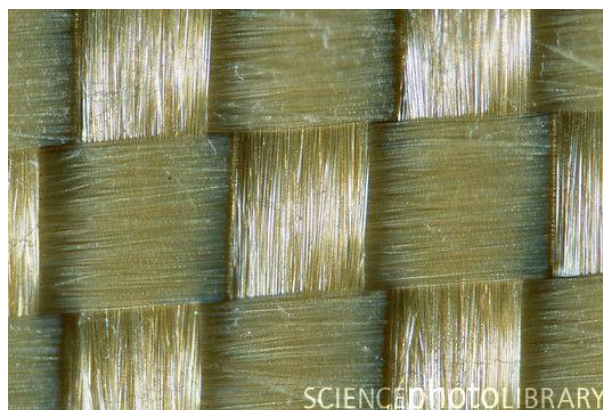
Comme les fibres d'acier, de cuivre, d'aluminium. Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour leurs bonnes conductibilités thermiques et électriques ainsi que leurs caractéristiques thermomécaniques élevées.[14]

I.4.2.2 Les renforts organiques :

I.4.2.2.1 Fibres artificielles

■ Les fibres aramides :

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont généralement connues sous le nom de Kevlar.



Figure(I.8): Fibre Kevlar.

Leur utilisation est limitée par diverse faiblesse des matériaux composites à fibres aramides :

- résistance faible à la compression, à la flexion, et au flambement ;
- sensibilité au cisaillement inter laminaire.

Ces faiblesses sont généralement attribuées à une mauvaise adhérence fibre-matrice. pour y remédier, des ensimages adaptés sont développés. des composites hybrides (verre-Kevlar, carbone-Kevlar) sont également utilisés. [14]

Les caractéristiques mécanique des fibres aramides sont regroupées dans le **tableau(I.8)** pour monofilaments. [14]

Caractéristiques	Kevlar 29	Kevlar 49	Kevlar 149	Twaron	Technora
Masse volumique $\rho(kg/m^3)$	1440	1450	1470	1440	1390
Diamètre (μm)	12	12	12	12	12
Module d'Young $E(GPa)$	60	120	160	60	90
Module spécifique $E/\rho(MNn/kg)$	42	83	110	42	65
Contrainte de rupture $\sigma_{fu}(MPa)$	3000	3000	2400	2600	2800
Contrainte spécifique $\sigma_{fu}(kNm/kg)$	2080	2070	1630	1800	2010
Allongement à la rupture (%)	3.6	1.9	1.5	3	4

Tableau (I.8) : Caractéristiques mécanique des fibres aramides

■ **Les fibres synthétiques** : Dans cette famille, on trouve :

Les fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.), les fibres polyamides, les fibres polyéthylène, et les fibres polypropylène, etc. [14]

I.4.2.2.2 Les Fibres végétales :

Ces fibres sont le bois utilisé sous forme de fibres orientées, le sisal, le jute, le lin, etc. [14]

I.5. Architecture des renforts :

Les matériaux composites sont des matériaux offrant de grands potentiels pour la conception des pièces de haute performance mécanique pouvant présenter des formes relativement complexes. par ailleurs, des nombreuses géométries et configurations possibles des renforts permettent une grande variété de propriétés et un bon contrôle de leur anisotropie. [17]

Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- Sous forme linéique.
- Sous forme de tissus surfaciques.
- Sous forme multidirectionnelle. [14]

I.5.1 Forme linéique :

Les fibres sont élaborées suivant un diamètre de quelques micromètres, et ne peuvent par conséquent pas être utilisées sous forme unitaire (filament élémentaires ou monofilament). Ces fibres sont réunies en fils ou en mèches de différentes formes. [14]

I.5.2 Forme surfaciques :

Les fils peuvent être utilisés pour des formes surfaciques de divers types : mats, tissus ou rubans : [14]

I.5.2.1 Mats :

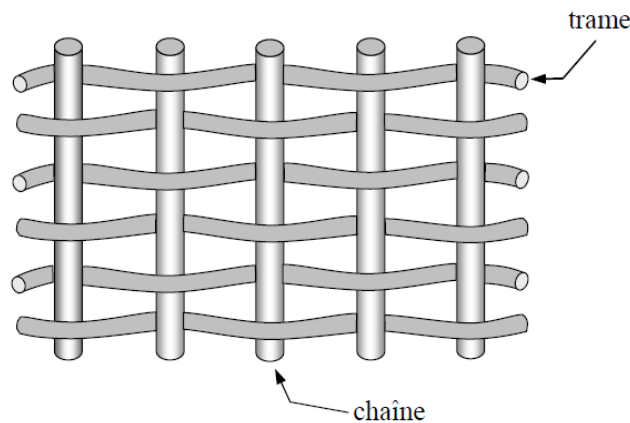
Sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle, l'absence d'orientation préférentielle conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan. [14]

I.5.2.2 Tissus et rubans :

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, de mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. il est constitué :

-D'une chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu.

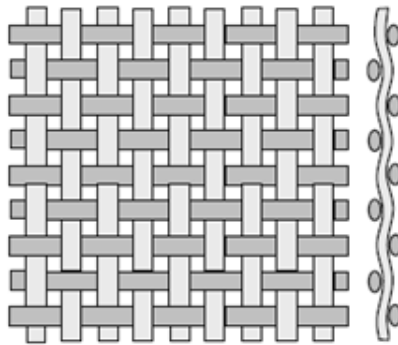
-D'une trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.



Figure(I.9) : Chaîne et trame d'un tissu.

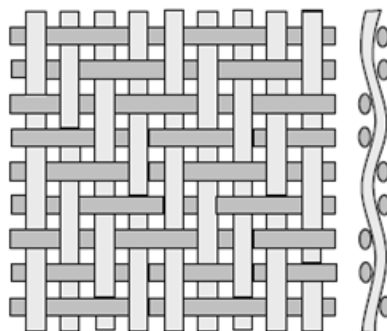
Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés (fils simple, mèches, etc.), ou par la masse linéique des fils, et par le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et des fils de trame. Les armures classiques utilisées : toile ou taffetas, sergé, satin, armure croisée, armure unidirectionnelle.

■ **Taffetas** : dans l'armure taffetas (**Figure I.10**), sont des fils de chaîne et de trames qui s'entrecroisent alternativement, conduisant à un tissu très plat, stable, mais peu déformable. Cette armure confère au tissu des propriétés mécaniques sensiblement identiques dans les deux directions chaîne et trame (pour des fils de tissage identiques).toutefois, l'armure taffetas conduit à un haut degré de courbure des fibres qui induit une diminution des performances mécaniques des composites.[14]



Figure(I.10) : Armure taffetas.

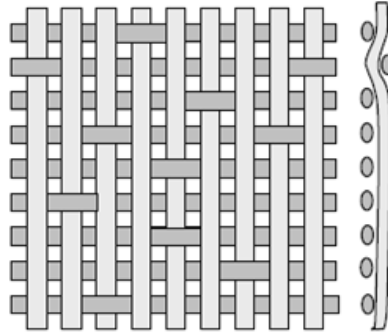
- **Sergé** : pour l'armure sergé, le nombre de fils chaîne et de fils trame qui s'entrecroisent peut varier. Dans un sergé (2x1), les fils trame passent sur un fil chaîne et sous deux fils chaînes. Ce type d'entrecroisement conduit à un motif répétitif du tissu (**figure. I.11**) sous forme de nervures diagonales. L'armure sergée offre l'avantage d'être à la fois souple et dense. Le tissu sergé permet ainsi un glissement entre les fils chaîne et trame et s'adapte bien à des moulages de formes complexes.[14]



Figure(I.11) : Armure sergé.

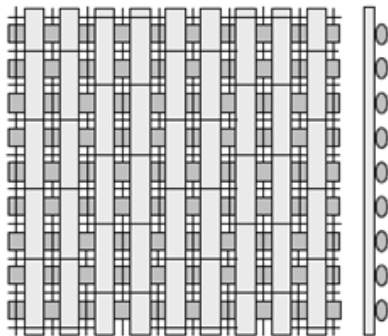
- **Satin** : l'armure satin assez semblable à celle du sergé, mais le nombre de fils chaîne et de fils trame qui passent les uns sur les autres avant de s'entrecroiser est plus élevé. Chaque tissu satin est caractérisé par un nombre, usuellement 4 ou 8, indiquant que les fils chaîne passent sur 4 ou 8 fils trame. il en résulte un tissu avec une face qui contient plus de fils chaîne et une autre face plus de fils

trame. L'armure satin est bien adaptée au moulage de formes complexes présente une forte masse spécifique [14-19]



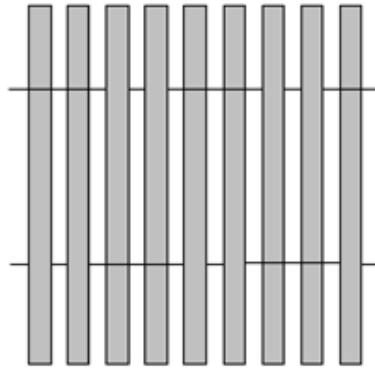
Figure(I.12) : Armure sergé.

- **Tissu croisé sans entrecroisement** : dans un tissu croisé, deux nappes de fils sont superposées sans entrecroisement des fils, et réunies par une chaîne et une trame de fils fins, n'intervenant pratiquement pas sur les performances mécaniques du tissu. L'absence d'entrecroisement supprime les effets de cisaillement et donne un tissu très performant mais couteux.[14]



Figure(I.13) : Armure croisé.

- **Tissu à armure unidirectionnelle** : dans cette cas, les fils sont alignés parallèlement à la direction chaîne, et ils sont réunis par un fil dans la direction trame. Ainsi, le tissu est unidirectionnel avec des performances élevées dans la direction chaîne.[14]



Figure(I.14) : Armure unidirectionnelle.

I.6. Les matériaux composites structuraux

Les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

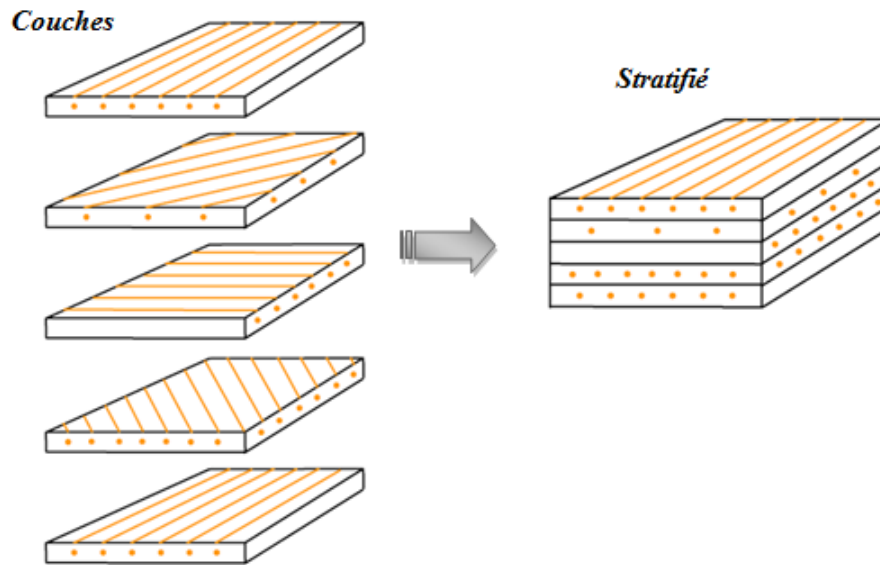
- Les monocouches
- Les stratifiés
- Les sandwichs

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite.

La forme du renfort caractérise les différents types de monocouches. Le renfort peut être à fibres longues : ce sont les plis unidirectionnels (noté parfois UD), courtes ou à fibres tissées.

Les stratifiés sont constitués d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

Sur le plan conceptuel un certain nombre de plis peuvent être utilisés dans le stratifié, mais dans la pratique, le nombre de plis sont généralement compris entre environ 10 plis à (dans des cas exceptionnels) peut-être que beaucoup de 200 plis.[25]



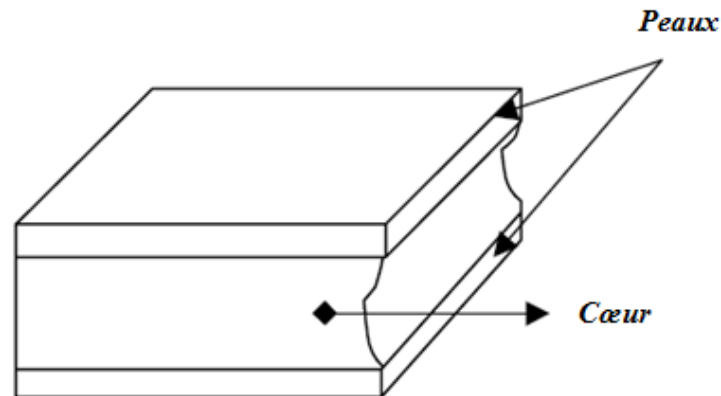
Figure(I.15) : Constitution d'un stratifié.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'obtenir des propriétés mécaniques spécifiques.

Les stratifiés peuvent être de trois types :

- Equilibrés : le stratifié contient autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
- Symétriques : les couches du stratifié sont disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
- Orthogonaux : le stratifié comporte autant de couches à 0° que de couches à 90° .

Les sandwichs sont des matériaux possédant deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur et renfermant un cœur de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.



Figure(I.16) : Composite sandwich.

I.7. La mécanique des matériaux composites :

L'élaboration de la structure est non séparée de celle du matériau. Le comportement résulte de celui des composants par l'intermédiaire de différents types d'interaction, d'où l'importance de l'interface entre les composants. Le comportement des composants est différent d'où l'intérêt de les faire travailler ensemble.

La spécificité du calcul des matériaux composites vient donc de l'hétérogénéité par conception, et des discontinuités par des microvides. Il faut donc recourir à des techniques d'homogénéisation pour obtenir la relation de comportement au niveau de la monocouche, stratifié ou du sandwich.

I.7.1 Equations constitutives en 3D :

I.7.1.1 Loi de Hooke généralisé :

La relation qui exprime la linéarité entre les contraintes et les déformations s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{I.1})$$

Où : C_{ijkl} est un tenseur du quatrième ordre avec 81 constantes élastiques.

La symétrie du tenseur de contraintes et du tenseur de déformations permet de réduire le nombre des constantes indépendantes de 81 à 36, donc la loi de Hooke peut être écrite en notation contractée comme suit :

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{I.2})$$

Les C_{ij} sont mentionnés par une variété de noms tels que : les constantes élastiques, module élastique et les coefficients de rigidité.

Le nombre des constantes élastiques indépendantes peut être encore réduit à 21 constantes indépendantes par l'existence de la fonction de la première et la deuxième loi de la thermodynamique :

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

La forme inversée de la loi de Hooke s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_j = S_{ij} \sigma_i \quad (\text{I.4})$$

S_{ij} : La matrice de souplesse est symétrique puisque la matrice de rigidité est symétrique.

Un matériau avec (21) constantes indépendantes est appelé un matériau anisotrope.

I.7.1.2 Symétrie matérielle pour les matériaux orthotropiques :

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième. [14]

Les intersections de ces trois plans de symétrie définissent les axes principaux d'orthotropie. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme : [14]

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9. [14]

I.7.2 Équations constitutives en contraintes planes :

I.7.2.1 Matrice de souplesse et de rigidité en contraintes planes :

Les équations constitutives en trois dimensions pour une seule couche d'un composite unidirectionnel avec des fibres orientées selon un angle θ sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & 0 & 0 & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & 0 & 0 & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{13} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{33} & 0 & 0 & \bar{S}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} & 0 \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{36} & 0 & 0 & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.6})$$

Pour un état de contraintes planes avec $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, l'équation (I.6) indique que les déformations hors plan sont identiquement nulles :

$$\gamma_{yz} = \bar{S}_{44}\tau_{yz} + \bar{S}_{45}\tau_{zx} = 0 \quad (\text{I.7})$$

$$\gamma_{zx} = \bar{S}_{45}\tau_{yz} + \bar{S}_{55}\tau_{zx} = 0$$

Et :

$$\varepsilon_z = \bar{S}_{13}\sigma_x + \sigma_y\bar{S}_{23} + \bar{S}_{36}\tau_{xy} \quad (\text{I.8})$$

Les composantes de déformations pour un état de contrainte plane peuvent être écrites à partir de l'équation (I.6):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

La matrice de rigidité est sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

Avec :

$$\bar{Q}_{ij} = \bar{C}_{ij} - \frac{\bar{c}_{i3}\bar{c}_{3j}}{\bar{c}_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (\text{I.11})$$

I.7.2.2 Matrice de souplesse et de rigidité pour un matériau orthotrope :

Dans le plan matériel principal, les termes des coefficients de rigidité $C_{ij}(i \neq 6)$ sont nuls, par conséquent à partir de l'équation (I.11), $Q_{16} = Q_{26} = 0$. ainsi, dans le plan principal d'un matériau orthotrope, les équations constitutives en contraintes planes (I.10) auront la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

En inversant l'équation (I.12) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Ou : $S_{ij} = Q_{ij}^{-1}$ et :

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad (\text{I.14})$$

$$Q_{12} = \frac{-S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

I.7.3 Théorie des plaques stratifiées :

I.7.3.1 Champ de déplacement :

Le comportement élastique d'un composite stratifié est plus complexe à décrire, il dépend de l'orientation de chacun des plis qui constitue le composite.

Les structures composites stratifiées étant le plus souvent minces et donc assimilables à des plaques ou des coques, on utilise la théorie des stratifiés qui consiste à se placer en contraintes planes et à prendre une cinématique de type Kirchhoff-Love . Ainsi on homogénéise le comportement du stratifié dans son épaisseur pour obtenir une

modélisation bidimensionnelle de type plaque ou coque. Cette hypothèse consiste à négliger le cisaillement transverse, soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{I.15})$$

Cette hypothèse implique :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w^0(x, y)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w^0(x, y)}{\partial y} \quad (\text{I.16})$$

Le champ des déplacements s'écrit alors :

$$\begin{cases} u(x, y) = u^0(x, y) - z \frac{\partial w^0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y) = v^0(x, y) - z \frac{\partial w^0(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Où : u^0, v^0 et w^0 : sont les déplacements dans le plan médian.

I.7.3.2 Champ des déformations :

Le champ de déformation s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x, y) = \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0(x, y)}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 + z k_x \\ \varepsilon_y(x, y) = \frac{\partial v^0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0(x, y)}{\partial y^2} = \varepsilon_y^0 + z k_y \\ \gamma_{xy}(x, y, z) = \left(\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v^0(x, y)}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w^0(x, y)}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Où : $\{k\}$ sont les courbures.

Sous forme condensée :

$$\{\varepsilon_x\} = \{\varepsilon^0\}_x + z \{k\}_x \quad (\text{I.19})$$

I.7.3.3 Champ des contraintes :

L'expression des contraintes peut être maintenant déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations et par l'utilisation de l'équation (I.19) :

$$\{\sigma\}_x = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon\}_x \quad (\text{I.20})$$

$[\bar{Q}]^k$: Matrice de rigidité réduite transformée du k^{ieme} pli correspondant à la cote z , varie avec l'orientation des fibres de chaque couche.

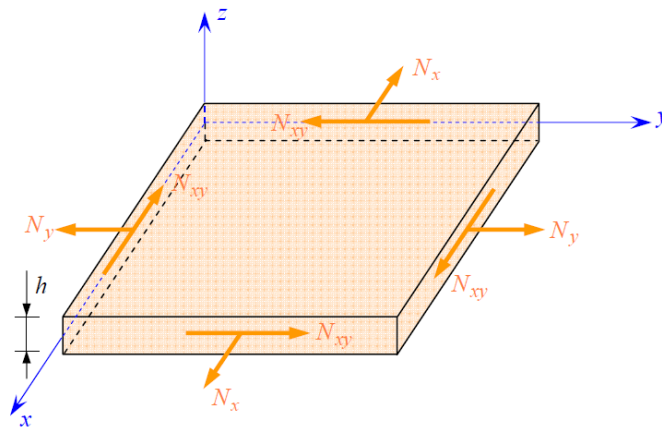
A partir des équations (I.19) et (I.20), on peut écrire :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + [\bar{Q}]^k z \{k\} \quad (\text{I.21})$$

I.7.3.4 Les forces par unité de longueur :

Les forces par unité e longueur $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ (figure.I.17) sont définies comme suit :

$$N_x = \int_{-H}^{+H} \sigma_x dz \quad , N_y = \int_{-H}^{+H} \sigma_y dz \quad , N_{xy} = \int_{-H}^{+H} \tau_{xy} dz \quad (\text{I.22})$$



Figure(I.17) : Forces par unité de longueur.

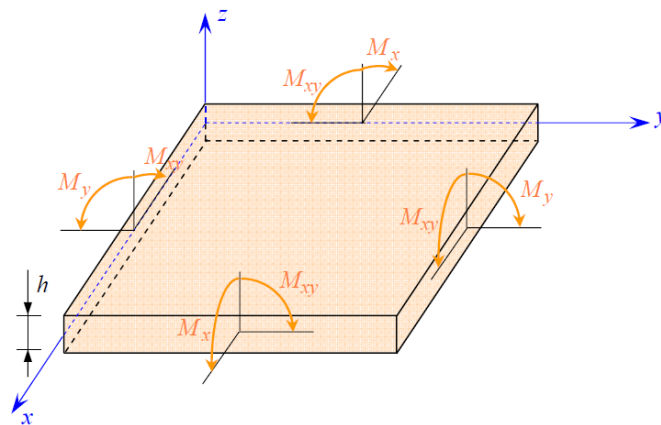
Les trois équations peuvent être écrites sous la forme condensée :

$$\{N\} = \int_{-H}^{+H} \{\sigma\} dz \quad (\text{I.23})$$

I.7.3.5 Les moments par unité de longueur :

On définit les moments par unité de longueur $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ (figure I.i8) comme l'intégrale des forces $\sigma_i z dz$:

$$M_x = \int_{-H}^{+H} \sigma_x z dz \quad , M_y = \int_{-H}^{+H} \sigma_y z dz \quad , M_{xy} = \int_{-H}^{+H} \tau_{xy} z dz \quad (\text{I.24})$$



Figure(I.18) : Moments par unité de longueur.

Les trois équations peuvent être écrites sous la forme condensée :

$$\{M\} = \int_{-H}^{+H} \{\sigma\}z dz \quad (\text{I.25})$$

I.8. Influence des phénomènes de variation de température sur le comportement mécanique des stratifiée :

Généralement, les propriétés des matériaux composites sont affectées par les conditions d'environnement auxquelles ils sont soumis. Parmi les facteurs liés à l'environnement, ceux qui introduisent des variations de déformation en l'absence de tout chargement mécanique revêtent un intérêt particulier. Dans le cas des structures en matériaux composites, ces phénomènes sont la conséquence de la variation de température, de l'absorption par la matrice polymère d'agents de gonflement tels que la vapeur d'eau, de la dilatation à des gaz absorbés par la matrice, etc. ces phénomènes induisent à des déformations et contraintes qui peuvent modifier notablement le comportement mécanique des structures en matériaux composites : rigidité, flambement, fréquences de vibration, etc.

I.8.1 Equations du comportement des matériaux composites tenant compte des phénomènes de dilatation :

Les structures sont soumises à des variations de températures aussi bien durant leur mise en œuvre qu'au cours de leur utilisation.

La température a un effet sur les propriétés mécaniques des composites. Typiquement, matrice dominée mécanique la diminution des propriétés lorsque la température augmente. Fibres dominés par les propriétés sont peu affectés par les températures froides, mais les effets ne sont pas aussi graves que ceux d'une température élevée sur les propriétés de matrice-dominés.

Ainsi, l'effet de la variation de la température est de modifier la rigidité et les caractéristiques à la rupture du matériau. En outre, la variation de la température produit une dilatation thermique (extension ou contraction) du matériau. Les phénomènes de dilatation thermique peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point (x, y, z) et à l'instant (t) sous la forme :

$$\varepsilon_{i(\text{thermique})}^* = \alpha_i \Delta T (x, y, z, t) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{I.26})$$

Où (α_i) sont les coefficients de dilatation thermique et (ΔT) est la variation de température à partir d'une température de référence pour laquelle les déformations thermiques sont considérées comme étant égales à zéro. La répartition des températures dans la structure et au cours du temps est déterminée à partir des phénomènes de transfert de chaleur.

De manière à inclure les effets des phénomènes de dilatation, la loi d'élasticité (I.4), écrite dans un état de référence ou les déformations dues aux phénomènes de dilatation sont nulles, doit être modifiée et écrite sous la forme :

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + \varepsilon_i^* \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{I.27})$$

La forme inverse de la relation (I.27) d'élasticité s'écrit :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_j - \varepsilon_j^*) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{I.28})$$

I.8.2 Equations du comportement des matériaux orthotrope :

Dans le cas de matériaux orthotrope, la relation d'élasticité (I.28), rapportée aux axes principaux du matériau s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^* \\ \varepsilon_4 - \varepsilon_4^* \\ \varepsilon_5 - \varepsilon_5^* \\ \varepsilon_6 - \varepsilon_6^* \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

I.8.3 Equations du comportement des matériaux orthotrope dans l'état des contraintes planes:

Dans un état de contraintes planes, la relation (I.29) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_6 - \varepsilon_6^* \end{bmatrix} \quad (\text{I.30})$$

I.9 Conclusion :

Dans ce chapitre ; nous avons présenté des généralités sur les matériaux composites, leurs classifications, et leurs constituants. Des équations constitutives pour les calculs de ce type des matériaux, seront présentées par la suite.

Enfin, nous présenterons l'influence des phénomènes de variation de température sur le comportement mécanique des stratifiées.

CHAPITRE II

CHAPITRE II

**Généralités sur les
matériaux à gradient
de propriétés**

II.1 Introduction :

Les matériaux composites offrent de nombreux avantages par rapport aux matériaux classiques. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion et la conductivité thermique. Une classe de la famille des matériaux composites, appelée matériaux fonctionnellement graduée (FGM), suscite un intérêt particulier dans le développement des matériaux fonctionnels.

Cette classe de matériaux, qui fait l'objet de récentes études, est caractérisée par une variation spatiale de la microstructure. Ces matériaux offrent l'avantage d'avoir une graduation des propriétés et permettent ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

II.2 Définition des matériaux à gradient des propriétés :

Les matériaux fonctionnellement graduée sont des matériaux composites, macroscopiquement hétérogène, de propriétés mécaniques varient de manière continue d'une surface à l'autre (**figure II.1**). Ce changement continu qui conduit à des propriétés de graduées dans ce types des matériaux [26] ; causé par une fonction de la position de composition chimique, microstructure ou à l'ordre atomique.[27]

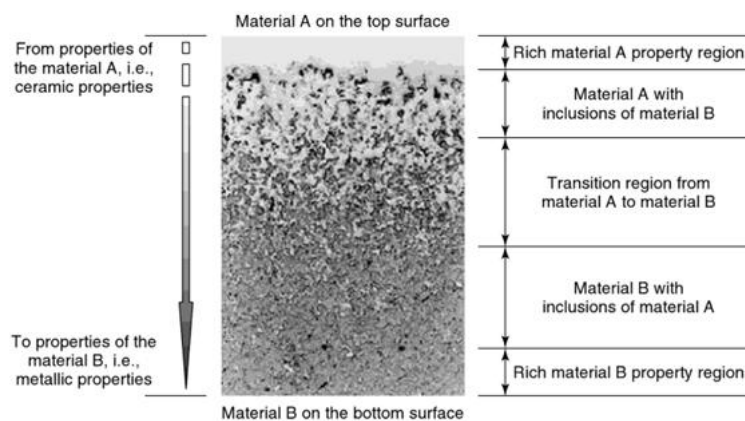


Figure (II.1): Microstructure d'une FGM qui est gradué à partir un matériau A à un matériau B [28].

II.3 Fabrication des FGM :

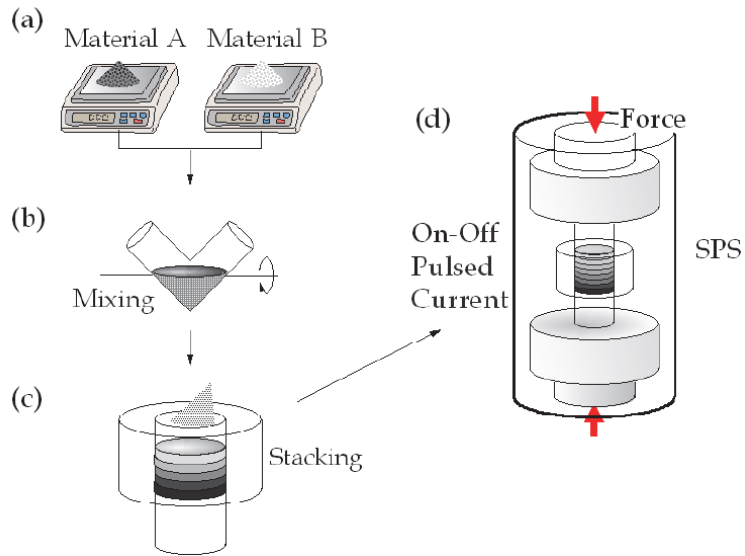
Typiquement ces matériaux sont fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métal ou d'une combinaison de différents matériaux. Le céramique constitutive du matériau fournit une résistance à haute température en raison de sa faible conductivité thermique. Le constituant métal ductile, empêche la fracture causée par des contraintes dues au gradient de température élevée dans une période de temps très courte. En outre, un mélange de céramique et de métal avec une fraction volumique variant de façon continue peut être facilement fabriqué.[29][30]

Il existe des nombreux types de méthodes pour la fabrication de la FGM, permis ces méthodes nous citons :

II.3.1 Métallurgie des poudres : [31]

Métallurgie des poudres est l'une des méthodes les plus utilisée dans la production des FGM. Un exemple d'un procédé de fabrication typique par la métallurgie des poudres est schématiquement illustré dans la figure(II.2). Dans un premier temps, le matériau (A) et (B) sont pesés et mélangés, comme indiqué dans la figure (II.2a). Chaque mixture en poudre est mélangé de manière uniforme par un broyeur en forme de V, comme représenté dans la figure (II.2b). L'étape suivante est le jalonnement de poudre pré mélangée selon une distribution prédéfinie de la composition spatiale (figure(II.2c)).

La dernière étape qui est le frittage (Spark plasma sintering SPS), représentée sur la figure (II.2d), est l'un des procédés de frittage les plus avancés, il rend possible des matériaux de frittage de haute qualité dans de courtes périodes en chargeant les intervalles entre les particules de poudre avec de l'énergie électrique et la pression de frittage. Cependant, le plus souvent les FGM fabriqués par cette méthode devraient avoir une structure progressive. Il est difficile de produire des FGM avec des gradients continus.



Figure(II.2) : Exemple de processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres.

II.3.2 La force centrifuge :[31]

Les FGM peut être également fabriqué sous une force centrifuge. Les méthodes de fabrication des FGM en vertu de la force centrifuge sont classées en trois catégories, comme indiqué dans la figure (II.3). La méthode de savoir centrifuge (application de la coulée centrifuge) est montré dans la figure (II.3a)), la méthode de suspension centrifuge (la force centrifuge) est montrée dans la figure (II.3b), et la figure (II.3c) montre la méthode de pressurisation centrifuge (pressurisation simple par la force centrifuge).

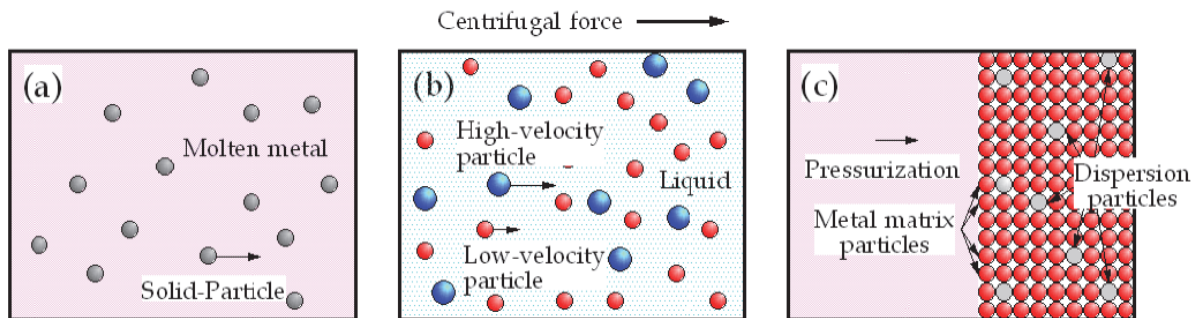


Figure (II.3) : Trois types de méthodes de fabrication de FGM en vertu de la force centrifuge. (a) la méthode centrifuge, (b) la méthode lisier centrifuge, et (c) Méthode de pressurisation centrifuge.

- En cas de procédé centrifuge représenté dans la figure (II.3a), une force centrifuge appliquée à un métal fondu homogène, dispersé avec des particules céramiques ou de composés intermétalliques, entraîne la formation de la graduation désirée. Le gradient de composition est ensuite réalisé essentiellement par la différence de la force centrifuge produite (la différence de la densité) entre le métal fondu et les particules solides. La figure (II.4) montre l'appareil utilisé pour la méthode centrifuge.

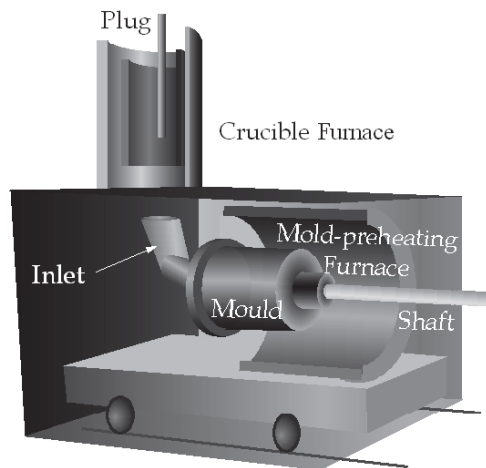


Figure (II.4) : Appareil pour le procédé par centrifugation.

- En revanche, bouillie avec deux types de particules solides, des particules à haute vitesse et des particules à faible vitesse, est soumise à la force centrifuge lors de la fabrication des FGM par la méthode à lixivier centrifuge, comme le montre la figure (II.3b). Après sédimentation complète du produit, la partie liquide du lixivier centrifuge sera supprimée (ne devient pas une partie du FGM).
- La méthode de pressurisation centrifuge, par la force centrifuge est utilisée uniquement pour la pressurisation simple. Dans cette méthode, la graduation de la composition devrait être formée avant l'application de la force centrifuge.

II.4 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM:

II.4.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :[32]

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{II. 1})$$

Où (k) est le paramètre du matériau et (h) est l'épaisseur de la plaque. Les propriétés des matériaux d'un P-FGM peuvent être déterminées par la règle de mélange en utilisant $V(z)$ comme indiqué ci-dessous:

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (\text{II. 2})$$

Où (E_1) et (E_2) sont les modules de Young des surfaces inférieure et supérieure de la plaque de FGM, respectivement. La variation de module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque P-FGM avec les propriétés des matériaux dépendent et indépendant du température est représenté dans la figure (II.5). Elle montre les changements du module de Young rapidement près de la surface inférieure pour ($k > 1$), elle augmente rapidement près de la surface supérieure pour ($k < 1$).

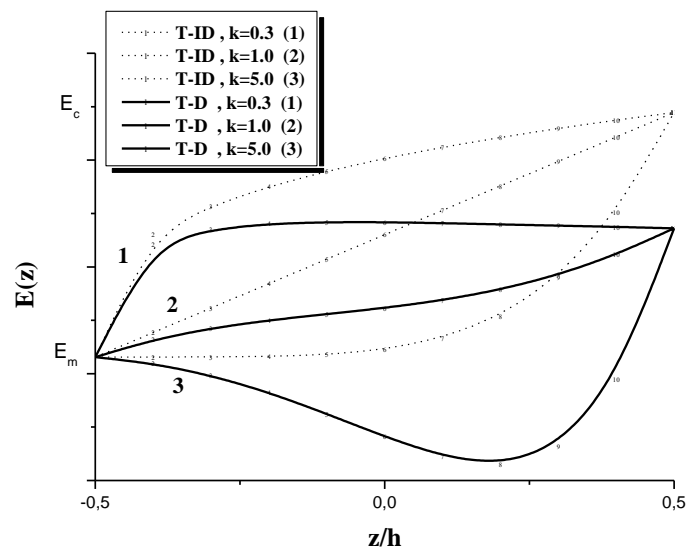


Figure (II.5) : La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM.

II.4.2 Sigmoides structures S-FGM :[33]

La fraction volumique des structures sigmoïdes par l'utilisation de deux fonctions en loi de puissance pour assurer une distribution harmonique des contraintes est définie par:

$$\begin{cases} V_f^1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k & \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k & \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II. 3})$$

Où : (h) est l'épaisseur de la plaque et (k) est le paramètre du matériau.

En utilisant la règle de mélange, les propriétés matérielles de la S-FGM peut être calculées par:

$$\begin{cases} E(z) = V_f^1(z)E_1 + [1 - V_f^1(z)]E_2 & \text{Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ E(z) = V_f^2(z)E_1 + [1 - V_f^2(z)]E_2 & \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II. 4})$$

Où : $E(z)$ représente une propriété de matériau générique. (E_1) et (E_2) indiquent les propriétés des faces inférieure et supérieure de la structure, respectivement.

La figure (II.6) montre la variation de la fraction volumique de l'équation (II.3) pour une structure sigmoïde d'un FGM, avec des propriétés des matériaux dépendant et indépendant de la température.

Considérons une plaque élastique rectangulaire. Le locale des coordonnées (x) et (y) définissent le plan médian de la plaque, tandis que l'axe (z) origine à la surface médian de la plaque est dans le sens de l'épaisseur. Les propriétés du matériau, le module de Young, sur la surface supérieure et inférieure sont différentes mais sont pré-attribués selon l'une des exigences de performances.

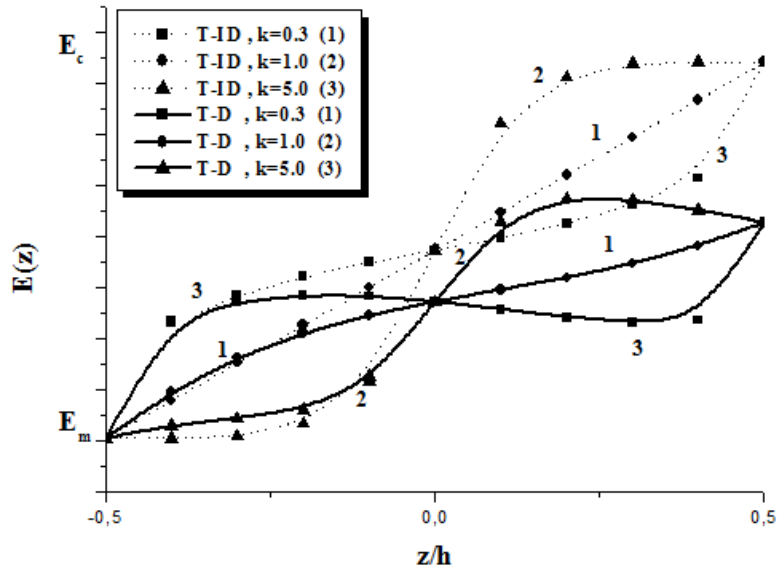


Figure (II.6) : La variation du module de Young associé à différents indices exposants pour une plaque S-FGM

II.4.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \tag{II.5}$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure (II.7).

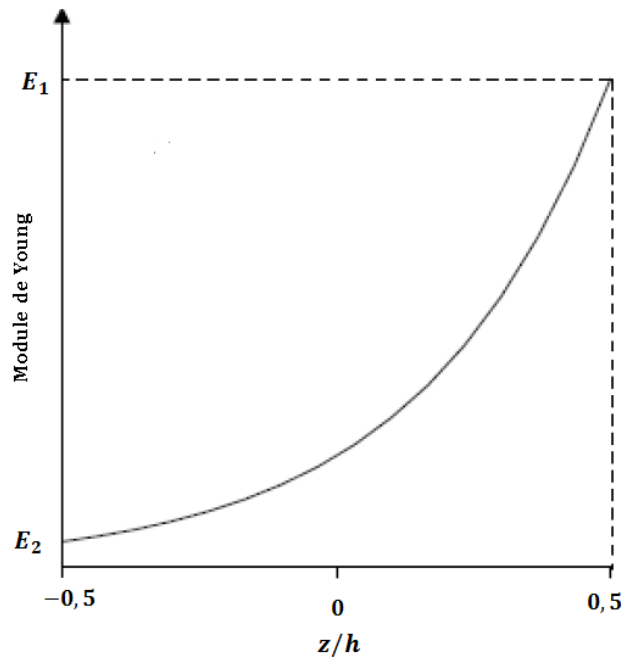


Figure (II.7) : La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

II.5. Avantages et inconvénients de la FGM

Les matériaux fonctionnellement gradué présentent des avantages et des inconvénients:

II.5.1 Avantages de la FGM :[34]

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Suresh et al. Et al Bahr, et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.

- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc

II.5.2 Inconvénient de la FGM :[34]

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses.

II.6. Les modèles analytiques des plaques FGM

Plusieurs approximations existent, allant de la théorie des plaques classique stratifié (CLPT) qui est valable pour les plaques relativement minces, aux premières ou

supérieures théories ordre de déformation en cisaillement (FSDT ou HSDT), qui sont nécessaires pour décrire correctement le comportement des plaques plus épaisses.[35]

II.6.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT) :

L'hypothèse de Kirchhoff-Love est utilisée dans le calcul de la théorie des plaques stratifiées classique. L'hypothèse de Kirchhoff-Love implique les hypothèses suivantes: la ligne droite perpendiculaire au plan médian avant déformation reste: droites, inextensibles et normales à la surface moyenne après déformation (figure (II.8)).

Ces trois hypothèses conduisent à négliger des déformations transversales, (ε_{zz}) et (ε_{yz}) . La négligence de (ε_{zz}) conduit à l'omission de (σ_{zz}) parce que le produit de (ε_{zz}) et (σ_{zz}) est égale à zéro dans l'énergie potentielle totale de la plaque.[36]

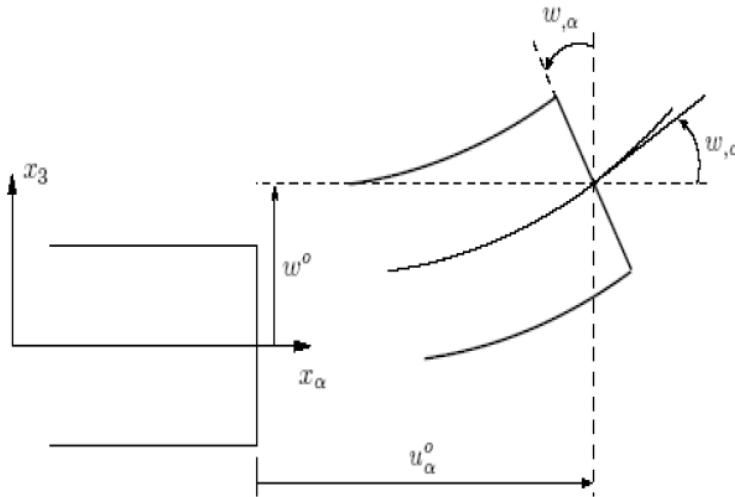


Figure (II.8) : Cinématique de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacement résultant provenant de cette hypothèse est linéaire par rapport à l'épaisseur de coordonnée (z):

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, x_3 = z) = u_0(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \\ v(x_1, x_2, x_3 = z) = v_0(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \\ w(x_1, x_2, x_3 = z) = w_0(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II. 6})$$

Où : (u, v, w) sont des déplacements le long (x_1, x_2, x_3) , respectivement, et (u_0, v_0, w_0) sont des déplacements à surface moyenne ($z = 0$).

II.6.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT), qui s'étend de la cinématique de la (CLPT) en incluant une déformation en cisaillement transversale brute dans ses hypothèses cinématiques, c.-à-d. la déformation en cisaillement transversal est supposé être constante par rapport à la coordonné d'épaisseur (figure (II.9)). La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre nécessite des facteurs de correction de cisaillement, qui sont trop difficile à déterminer, pour arbitraire stratifiés composites structures. Les facteurs de correction de cisaillement dépendent non seulement de la stratification, mais aussi sur la charge et des conditions aux limites.[37]

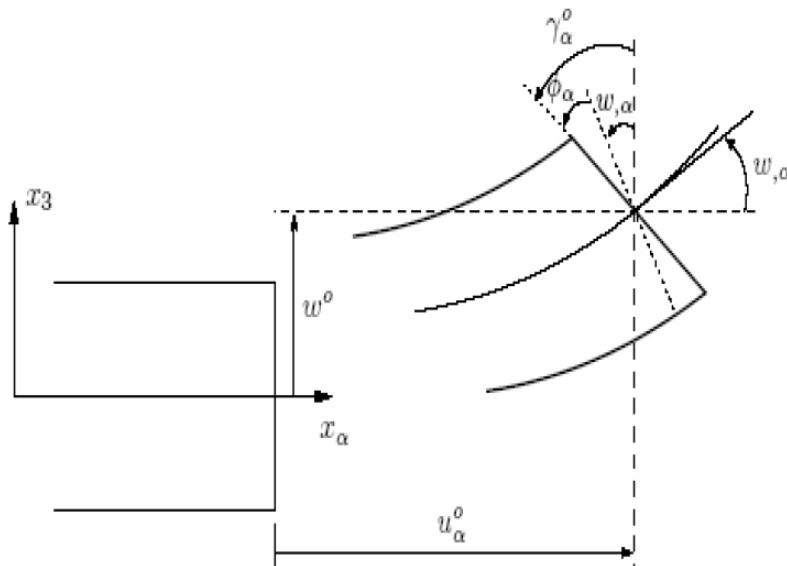


Figure (II.9) : Cinématique de Reissner-Mindlin

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + z\phi_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Avec :

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes (x_α).

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

II.6.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Les facteurs de correction du (CT) dépendent du nombre de couches ou de stratifications présentés dans une plaque ou dans une coque composite. Pour éviter d'utiliser ces facteurs, certains auteurs ont adopté des théories dites d'ordre supérieur qui sont basées sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure(II.10)). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor du champ de déplacement de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + x_3 \phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + x_3^2 \phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + x_3^3 \phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + \dots \quad (II.8)$$

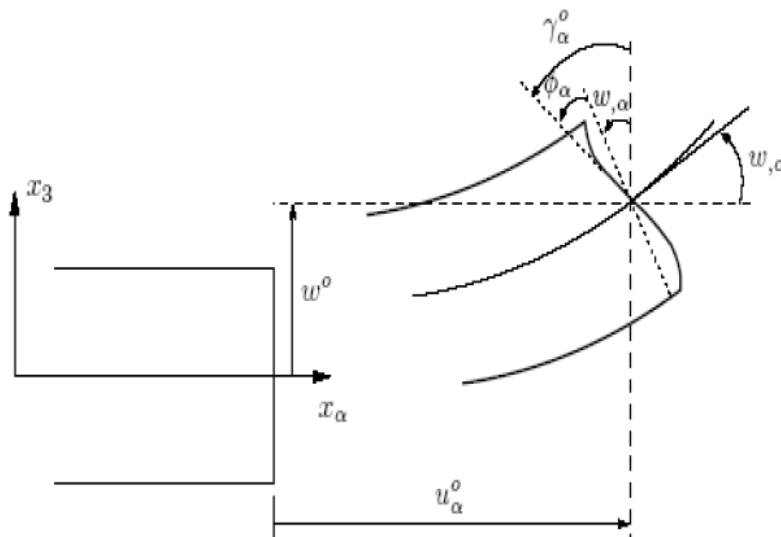


Figure (II.10) : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3^{ème} ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité.

La valeur $\phi_i^{0(j)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $i = 2,3,4 \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacements, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque. Le développement de l'équation (II.8) est utilisé avec $\phi_i^{0(3)} = \phi_i^{0(2)} = 0$. Le champ de déplacement (II.8) devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II. 9})$$

Avec : $\alpha = 1,2$.

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $f(x_3)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

■ L'approche d'Ambartsumyan, avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II. 10})$$

■ L'approche de Reissner, Panc et Kaczkowski, avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 11})$$

■ L'approche de Levinson, Murthy et Reddy Avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 12})$$

II.7 Flambement des plaques FGM:

II.7.1 Définition de la stabilité:

Le flambement est un phénomène rencontré dans la structure. C'est le résultat de l'effet des forces de compression. L'exigence selon laquelle un corps doit être en équilibre semble insuffisante. Même du point de vue purement pratique, il est souhaitable pour les structures d'être dans un état d'équilibre stable.

L'état d'équilibre stable est défini comme la capacité de la structure de rester en position et de soutenir la charge appliquée, même si elles sont forcées légèrement hors de sa position par une perturbation.[38][39]

On considère une colonne soumise à une force concentrée (P) agissant le long de son axe central. La charge (P) est continuellement augmentée, passant de zéro à une valeur critique particulière de la charge (P_{cr}) correspondant à une valeur (σ_{cr}) de la contrainte normale inférieure à la contrainte de rupture, il se produit une déformation latérale **figure(II.11.a)**.

Les courbes de déformation latérale de la charge (P) en fonction de (Δ), et de (P) et de (y) sont représentés dans les **figures(II.11.b)** et **(II.11.c)**.

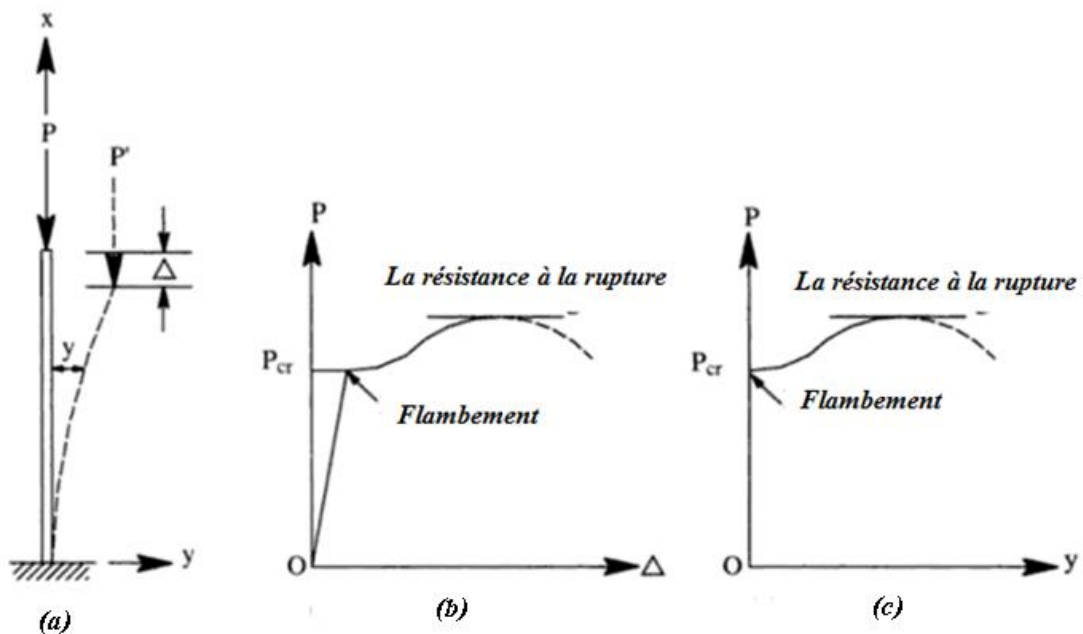


Figure (II.11) comportement charge-déformation de colonne soumis à une compression axiale ; (b) courbe $P - \Delta$, (c) courbe $P - y$.

II.7.2 Méthodes d'analyse de la stabilité:

L'analyse de la stabilité pour la détermination du mode de la perte de la stabilité structurelle et la charge correspondante est appelée charge critique.

La structure reste au repos avant et après flambement, sauf dans les cas où la perte de la stabilité est due à la transition de l'état de repos à un état de mouvement appelé l'instabilité cinématique ou dynamique. Parmi les méthodes classiques disponibles pour la résolution des problèmes de flambement sont les suivants:

- ✓ L'approche de travail.
- ✓ L'approche de l'énergie.
- ✓ L'approche cinétique ou dynamique. [38]

II.7.3 Flambement des plaques :

Le flambement d'une plaque implique la flexion dans deux plans. Un élément de plaque peut porter une charge supplémentaire au-delà de la charge critique. Cette force de réserve est appelée la résistance après flambement. L'importance relative de la résistance après flambement à la charge de flambement dépend de divers paramètres tels que les propriétés dimensionnelles, les effets d'imperfection, l'importance des effets non linéaires géométriques, les conditions aux limites, les types de chargement, et le rapport de contrainte de flambement ainsi que la limite d'élasticité. [40][41]

La première solution d'un problème de stabilité de plaque plane simplement appuyée été donnée par Bryan (1891), Euler a présenté l'analyse de la stabilité d'une colonne au début du XXe siècle. Timoshenko a étudié le flambement avec divers des conditions aux limites. Bon nombre sont donnés par Timoshenko et Gere (1961). Traitement de l'analyse de la stabilité de plaque plane est trouvé par Bleich (1952) et Timoshenko et Gere (1961).[41]

II.7.3.1 Les équations d'équilibre :

La variation totale (δW) du travail des forces volumiques et surfaciques exercées (travail virtuel) s'écrit sous la forme :

$$\delta W = \int_V \sigma_{ii} \delta \varepsilon_{ii} dv + \int_V \tau_{ij} \delta \gamma_{ij} dv \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\delta W = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dv \quad (\text{II.13})$$

Dans le cas de déformation plane ($\varepsilon_{zz} = 0$).

Le champ de déformation est devient par l'expression :

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x, y) = u_{,x}(x, y) + z\phi_{x,x}(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) = v_{,y}(x, y) + z\phi_{y,y}(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) = (u_{,y}(x, y) + v_{,x}(x, y)) + z(\phi_{x,y}(x, y) + \phi_{y,x}(x, y)) \\ \gamma_{xz}(x, y) = \phi_x(x, y) + w_{,x}(x, y) \\ \gamma_{yz}(x, y) = \phi_y(x, y) + w_{,y}(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Et:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz = N_{ij} ; \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz = M_{ij} ; \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ij} dz = N_{ij} ; \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ij} z dz = M_{ij} \quad (\text{II.15})$$

La relation (II.13) devient :

$$\begin{aligned} - \int_A (N_{x,x} + N_{xy,y}) \delta u \, dA - \int_A (N_{y,y} + N_{xy,x}) \delta v \, dA - \int_A (M_{x,x} + M_{xy,y} - N_{xz}) \delta \phi_x \, dA - \\ \int_A (M_{y,y} + M_{xy,x} - N_{yz}) \delta \phi_y \, dA - \int_A (N_{xz,x} + N_{yz,y}) \delta w \, dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

On remplace : $N_{xz} = Q_x$; $N_{yz} = Q_y$

$$\begin{cases} \delta u \neq 0 \\ \delta v \neq 0 \\ \delta w \neq 0 \\ \delta \phi_x \neq 0 \\ \delta \phi_y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} = 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0 \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

L'équation (II.17) représente l'équilibre d'une plaque en tenant compte de l'effet de cisaillement.

Ces équations peuvent être écrites en éliminant les résultantes de cisaillement, suivant une forme analogue à (II.17) on trouve:

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

II.7.3.2 L'équation des plaques tenant compte du flambement :

On prend en compte le phénomène du flambement, ou doit introduire l'effet de la déformation latérale.

On considère un élément plaque rectangulaire représenté dans la figure (II.12), suivant les coordonnées cartésiennes (x, y, z) , où (x) et (y) se situent dans le plan médian de la plaque et (z) représente la distance entre le plan médian.

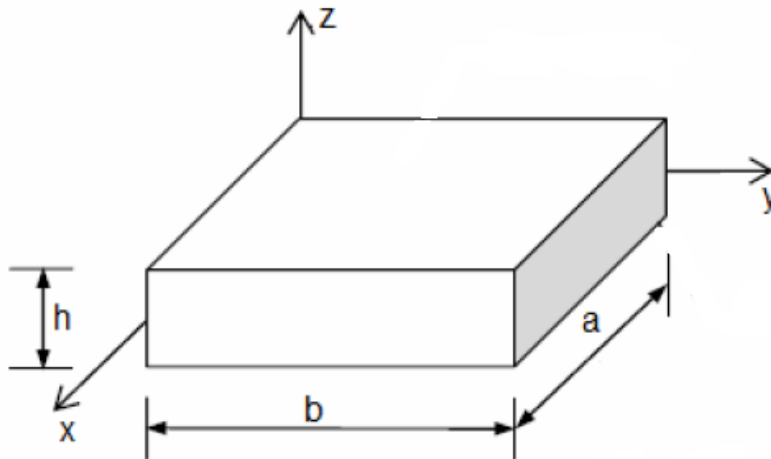


Figure (II.12) Une plaque rectangulaire en référence cartésienne (x,y,z) .

Les résultantes en membrane des actions exercées sur cette plaque sont schématisées dans la figure (II.13).

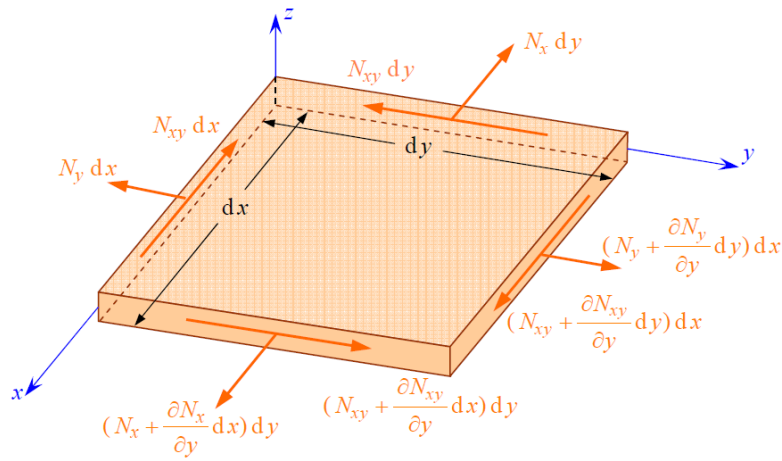


Figure (II.13) : Résultantes en membrane exercées sur un élément de plaque.

La déformée latérale dans le plan (x, y) sous l'action de la résultante N_x est présentée sur la figure (II.14).

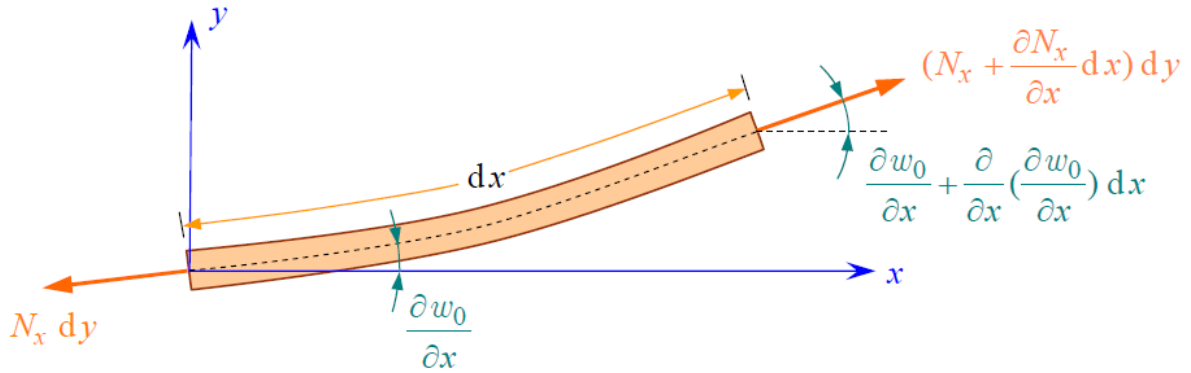


Figure (II.14) : Résultantes normales en membrane s'exerçant sur un élément de plaque déformée.

Il en résulte que la composante suivant (x) de la charge (N_x) exercée sur l'élément de plaque, est pour de faibles déformations :

$$\frac{1}{dx dy} \left[\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dx \right) - N_x dy \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \quad (\text{II. 19})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, la résultante par unité de surface de plaque dans la direction (x) est :

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II. 20})$$

De même, la somme des forces dans la direction (y) est :

$$N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II. 21})$$

La composante suivant (z) due à la résultante en cisaillement (N_{xy}) peut être évaluée à partir de la figure (II.15) :

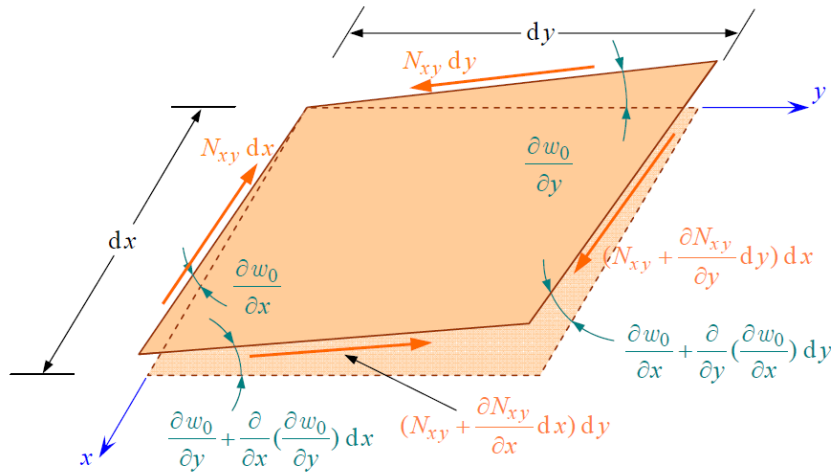


Figure (II.15) : Résultantes de cisaillement en membrane s'exerçant sur un élément de plaque déformée.

La résultante est sous la forme :

$$\frac{1}{dxdy} \left[\left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) dy + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) dx + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} dy - N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} dx \right] \quad (\text{II. 22})$$

Et en négligeant les termes d'ordre supérieur :

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II. 23})$$

En regroupant les expressions (II. 20), (II. 21) et (II. 23) , la composante totale suivant (z) s'écrit :

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \quad (\text{II. 24})$$

Par conséquent les équations (II.17), les équations à l'intérieur des parenthèses dans l'équation (II.24) sont nulles :

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (\text{II. 25})$$

Les équations des plaques prenant en compte la déformation latérale dans le cas de problèmes statiques sont alors obtenus en introduisant la composante en (z) dans l'équation (II.17), soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 26})$$

Ces équations différentes des équations classiques (II.17) par la modification de la troisième équation. ces équations peuvent être écrites en éliminant les résultantes de cisaillement suivant une forme analogue à (II.18). soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II. 27})$$

II.8 Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté une définition des matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, et les différentes lois de puissance régissant la distribution de la matière dans ce type de matériaux composites. Ensuite on a cité leurs avantages et leurs inconvénients. Les modèles analytiques des plaques FGM tel que de la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff, théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (Reissner-Mindlin) et théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé. Enfin, une analyse de phénomène d'instabilité le flambement pour un élément plaque a été citée.

CHAPITRE III

Flambement thermomécanique des plaques FGM en tenant compte de déformation transversale

III.1. Introduction :

Dans une structure, la répartition des champs de contraintes résiduelles peut être plus ou moins variable et capable de causer le flambement quand ces contraintes dépassent un certain niveau critique. Les origines de ces contraintes résiduelles sont très variées et on peut citer :

- Les origines thermiques où un matériau est soumis à des variations de température sans avoir la possibilité de se dilater.
- Les origines mécaniques quand un matériau subit une déformation plastique hétérogène.

Dans la plupart des procédés de mise en forme, le flambement est incontrôlable et peut avoir des effets néfastes sur la structure. De ce fait, ce phénomène doit être analysé assez profondément afin de comprendre ses causes, pouvoir le modéliser et essayer de l'éviter

III.2. Les plaques fonctionnellement gradué :

Considérons une plaque rectangulaire qui se compose de deux couches conçue avec des matériaux fonctionnellement gradué ; céramique et métal. Elle est symétrique par rapport au plan moyen. La longueur, largeur et l'épaisseur totale de la plaques sont (a , b et h) respectivement. Dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) où (xy) est le plan moyen de la plaque et (z) est la coordonnée de l'épaisseur $-h/2 \leq Z \leq h/2$.

En appliquant deux lois de puissance $V(z)$:

Pour la plaque S-FGM :

$$V(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + 2z/h)^k & ; -h/2 \leq Z \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1 - 2z/h)^k & ; 0 \leq Z \leq h/2 \end{cases} \quad (\text{III. 1})$$

Pour la plaque P-FGM :

$$V(z) = \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^k ; -h/2 \leq Z \leq h/2 \quad (\text{III. 2})$$

Où l'indice (k) : la fraction volumique est un nombre non négatif qui définit la répartition de matière et peut être choisi pour optimiser la réponse structurelle.

Il est supposé que les propriétés efficace du module d'élasticité (E) et le coefficient de dilation thermique (α) de la plaque fonctionnellement gradué, varient dans la direction d'épaisseur (z) et peuvent être déterminées par la règle linéaire de mélange :[42-43]

$$(E, \alpha) = (E_m, \alpha_m) + (E_{cm}, \alpha_{cm}) \cdot V(z) \quad (\text{III. 3})$$

Où : les indices (m) et (c) représentent les constituants métalliques et céramiques respectivement.

$$E_{cm} = E_c - E_m, \alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m$$

Le coefficient de Poisson est supposé constant, $\nu(z) = \nu$.

En raison des propriétés des constituants qui dépendent de la température, les propriétés effectives (E, α) de la plaque FGM dépendent de la température et de la position.

III.3. Les équations de gouvernement :

Dans cette étude, la théorie du premier ordre de déformation en cisaillement est utilisée pour obtenir les équations d'équilibre, de la compatibilité, ainsi que les expressions pour la détermination des courbes des charges de flambement et la flèche des plaques FGM.

La relation de déplacement de la plaque FGM est donnée par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y, z) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y, z) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{III. 4})$$

Où : (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements au plan médian du plaque suivant les directions (x, y, z), respectivement. (ϕ_x) et (ϕ_y) sont les rotations le long des plans (xz) et (yz) et sont indépendant de (z).

En tenant compte les termes non linéaires de Von Karman, la relation déformation-déplacement est :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xm} \\ \varepsilon_{ym} \\ \gamma_{xym} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{,x} + \phi_x \\ w_{,y} + \phi_y \end{pmatrix} \quad (\text{III. 5})$$

Avec :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xm} \\ \varepsilon_{ym} \\ \gamma_{xym} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{w_{,x}^2}{2} \\ v_{,y} + \frac{w_{,y}^2}{2} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{pmatrix} \quad (\text{III. 6})$$

Où : (ε_{xm}) et (ε_{ym}) sont les déformation normal, (γ_{xym}) est la déformation de cisaillement sur le plan médian de la plaque, et (γ_{xz}) et (γ_{yz}) sont les déformations transversales de cisaillement ; (u, v, w) sont les composantes de déplacement le long du plan médian des axes (x, y, z) ; (ϕ_x) et (ϕ_y) sont les angles de rotation dans les plans (xz) et (yz) respectivement ; $(,)$ indique la dérivée partielle.

La loi de Hooke pour une plaque, compris les effets thermiques et en négligeant l'effet de déformation transversale, est :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha\Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha\Delta T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 7})$$

Ou :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Sous une autre forme :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha\Delta T] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - (1+\nu)\alpha\Delta T] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}; \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}; \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}\end{aligned}\quad (\text{III. 8})$$

La résultante des forces et des moments de la plaque peut être exprimée en termes de composantes de contrainte dans l'épaisseur de la plaque par :

$$(N_i, M_i) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z) dz, \quad i = x, y, xy; \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j dz, \quad i = x, y; \quad j = xz, yz \quad (\text{III. 9})$$

L'insertion des équations (III. 3), (III. 5) et (III. 8) dans les équations (III. 9) donne les relations constitutives :

$$\begin{aligned}(N_x, M_x) &= \frac{1}{1-\nu^2} [(E_1, E_2)(\varepsilon_{xm} + \nu\varepsilon_{ym}) + (E_2, E_3)(k_x + \nu k_y) - (1+\nu)(\phi_m, \phi_b)], \\ (N_y, M_y) &= \frac{1}{1-\nu^2} [(E_1, E_2)(\varepsilon_{ym} + \nu\varepsilon_{xm}) + (E_2, E_3)(k_y + \nu k_x) - (1+\nu)(\phi_m, \phi_b)], \\ (N_{xy}, M_{xy}) &= \frac{1}{1-\nu^2} [(E_1, E_2)\gamma_{xym} + (E_2, E_3)k_{xy}], \\ (Q_x, Q_y) &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} (\gamma_{xz}, \gamma_{yz}),\end{aligned}\quad (\text{III. 10})$$

Où :

$$(\phi_m, \phi_b) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z, T)\alpha(z, T)\Delta T(1, z) dz \quad (\text{III. 11})$$

Plaque S-FGM :

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} E_m h + \frac{1}{2} E_{cm} h \\ E_2 = \frac{1}{8} \frac{E_{cm} h^2 k (k+3)}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{8} E_m h^2 \\ E_3 = \frac{1}{24} E_m h^3 + \frac{1}{24} E_{cm} h^3 \end{cases} \quad (\text{III. 12})$$

Plaque P-FGM :

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{(k+1)} E_{cm} h + E_m h \\ E_2 = \frac{1}{2} \frac{E_{cm} h^2 k}{(k+1)(k+2)} \\ E_3 = \frac{1}{4} \frac{E_{cm} h^3 (k^2 + k + 2)}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{1}{12} E_m h^3 \end{cases} \quad (\text{III. 13})$$

D'après la théorie du premier ordre de déformation en cisaillement et en supposant que le champ de température est soulevé de manière uniforme, les équations non linéaires pour un plaque parfait peuvent être écrites :[44-45]

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad , N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (\text{III. 14})$$

$$D \nabla^4 w + \frac{2(1+\nu)D}{E_1} \nabla^2 (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) - (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) = 0,$$

Où :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad D = \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)}$$

Pour une plaque imparfaite, let $w^*(x, y)$ désigne une imperfection petite connue. Ce paramètre représente un petit écart initial de la plaque plane à la forme plate. Lorsque l'imperfection est considérée, les équations d'équilibre (III. 14) sont écrites :[44]

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad , N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (\text{III. 15})$$

$$D\nabla^4 w + \frac{2(1+\nu)D}{E_1} \nabla^2 \left[\left(N_x(w_{,xx} + w_{,xx}^*) + 2N_{xy}(w_{,xy} + w_{,xy}^*) + N_y(w_{,yy} + w_{,yy}^*) \right) \right] \\ - \left(N_x(w_{,xx} + w_{,xx}^*) + 2N_{xy}(w_{,xy} + w_{,xy}^*) + N_y(w_{,yy} + w_{,yy}^*) \right) = 0,$$

Considérons les deux premières des équations (III.15). Une fonction (f) de la contrainte peut être définie comme :

$$N_x = f_{,yy} \quad , N_y = f_{,xx} \quad , N_{xy} = -f_{,xy} \quad \text{(III.16)}$$

L'insertion de l'équation (III.16) dans la troisième des équations (III.15) conduit à :

$$D\nabla^4 w + \frac{2(1+\nu)D}{E_1} \nabla^2 \left[\left(f_{,yy}(w_{,xx} + w_{,xx}^*) - 2f_{,xy}(w_{,xy} + w_{,xy}^*) + f_{,xx}(w_{,yy} + w_{,yy}^*) \right) \right] \\ - \left(f_{,yy}(w_{,xx} + w_{,xx}^*) + 2f_{,xy}(w_{,xy} + w_{,xy}^*) + f_{,xx}(w_{,yy} + w_{,yy}^*) \right) = 0 \quad \text{(III.17)}$$

L'équation (III.17) comporte deux inconnues dépendant (w) et (f) .pour obtenir la deuxième équation. On peut utiliser l'équation de compatibilité géométrique :[46]

$$\varepsilon_{xm,yy} + \varepsilon_{ym,xx} - \gamma_{xm,xy} = w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} \quad \text{(III.18)}$$

Pour une plaque imparfaite, cette équation peut être transformée est prend la forme suivante:

$$\varepsilon_{xm,yy} + \varepsilon_{ym,xx} - \gamma_{xm,xy} = w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} + 2w_{,xy}w_{,xy}^* - w_{,xx}w_{,yy}^* - w_{,yy}w_{,xx}^* \quad \text{(III.19)}$$

A partir des relations (III.10) ,on peut écrire :

$$(\varepsilon_{xm}, \varepsilon_{ym}) = \frac{1}{E_1} \left[(N_x, N_y) - \nu(N_y, N_x) - E_2 k_x + \phi_m(1,1) \right], \\ \gamma_{xym} = \frac{1}{E_1} \left[2N_{xy} + 2\nu N_{xy} - E_2 k_{xy} \right]$$

L'insertion des équations précédentes dans l'équation (III.19) , et en tenant compte l'équation (III.18), conduit à l'équation de compatibilité pour une plaque FGM imparfaite :

$$\begin{aligned}
& \nabla^4 f - E_2(k_{x,yy} + k_{y,xx} - k_{xy,xy}) \\
& - E_1(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} + 2w_{,xy}w_{,xy}^* - w_{,xx}w_{,yy}^* - w_{,yy}w_{,xx}^*) \\
& = 0 \quad (\text{III. 20})
\end{aligned}$$

Les équations (III. 17) et (III. 20) sont les relations de base utilisées pour étudier le flambement, et après le flambement des plaques FGM. Ils sont non-linéaires dans les inconnues dépendant (w) et (f).

III.4. Analyse de la stabilité :

Dans cette section, une approche analytique est utilisée pour étudier la stabilité des plaques FGM soumises mécaniquement, thermique et des charges combinées. Trois cas de conditions aux limites sont représentés, cas étiquetés 1,2 et 3, seront considérés.[47]

Cas 1 : Bords de la plaque sont simplement appuyés et mobile (FM). Les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{aligned}
w = \phi_y = M_{xx} = N_{xy} = 0, N_x = N_{x0}, x = 0, a, \\
w = \phi_x = M_{yy} = N_{xy} = 0, N_y = N_{y0}, y = 0, b,
\end{aligned} \quad (\text{III. 21})$$

Cas 2 : Les bords sont simplement appuyée et fixes (IM), les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{aligned}
w = u = \phi_y = M_{xx} = 0, N_x = N_{x0}, x = 0, a, \\
w = v = \phi_x = M_{yy} = 0, N_y = N_{y0}, y = 0, b,
\end{aligned} \quad (\text{III. 22})$$

Cas 3 : Les bords sont simplement appuyés, et les charges de bord uni axiale fonctionnent dans le sens d'abscisse (x). Les bords $x = 0, a$ et $x = 0, b$ sont considérés comme se déplacer librement, mais les deux autres sont sans charges et fixes. Pour ce cas, les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}
w = \phi_y = M_{xx} = N_{xy} = 0, N_x = N_{x0}, x = 0, a, \\
w = v = \phi_x = M_{yy} = 0, N_y = N_{y0}, y = 0, b,
\end{aligned} \quad (\text{III. 23})$$

Où : (N_{x0}) et (N_{y0}) sont les résultantes des forces avant flambement dans les directions (x) et (y) , respectivement pour le cas (1) et le premier du cas (3), et sont les charges de compression fictifs de bord rendant les bords fixes pour le cas (2) et le second de cas (3). Pour résoudre les équations (III. 17) et (III. 20) pour les inconnues (w) et (f) , et en tenant compte les conditions aux limites (III. 21) – (III. 23), on suppose que : [47-48]

$$w = W \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad (III. 24)$$

$$f = A_1 \cos 2\lambda_m x + A_2 \cos 2\mu_n y + A_3 \cos 2\lambda_m x \cos 2\mu_n y + A_4 \sin 2\lambda_m x \sin 2\mu_n y + \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2,$$

Où : $\lambda_m = m\pi/a$ et $\mu_n = n\pi/b$ ($m, n = 1, 2, \dots$) sont les nombres de demi-ondes dans les directions x et y , respectivement, et W l'amplitude de déviation ; A_i ($i = 1 - 4$) sont les coefficients à déterminer.

En considérant les conditions aux limites (III. 21) – (III. 23) les imperfections de la plaque sont supposées de la forme: [49-44,46]

$$w^* = \mu h \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (III. 25)$$

Où : le coefficient (μ) , varie entre (0) et (1), représente la taille des imperfections.

Après substituant les équations (III. 24) et (III. 25) dans l'équation (III. 20), les coefficients A_i sont trouvés :

$$A_1 = \frac{E_1 \mu_n^2}{32 \lambda_m^2} W(W + 2\mu h), \quad A_2 = \frac{E_1 \lambda_m^2}{32 \mu_m^2} W(W + 2\mu h), \quad A_3 = A_4 = 0 \quad (III. 26)$$

En introduisant les équations (III. 24)-(III. 26) dans l'équation (III. 17) et en appliquant la méthode de Galerkin de l'équation résultante, nous obtenons :

$$D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + \left[\frac{(1+\nu)D[5\lambda_m^2 \mu_n^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2) + \lambda_m^6 + \mu_n^6]}{8} + \frac{E_1}{16} (\lambda_m^4 + \mu_n^4) \right] W(W + \mu h)(W + 2\mu h) + \left[\frac{2(1+\nu)D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)}{E_1} + 1 \right] (\lambda_m^2 N_{x0} + \mu_n^2 N_{y0})(W + \mu h) = 0 \quad (III. 27)$$

Cette équation, dérivée des valeurs impaires (m) et (n), est utilisée pour déterminer les charges de flambement et les courbes après flambement des plaques FGM rectangulaires sous les charges mécaniques, thermiques et combinés.

III.4.1 Analyse de la stabilité mécanique :

Une plaque simplement appuyée (FGM) avec des bords mobiles (cas 1) est supposée être sous des charges de compression dans le plan (P_x) et (P_y) uniformément répartie le long des bords $x = 0, a$ et $y = 0, b$. Les propriétés des matériaux sont supposées être indépendantes de la température.

Les résultantes des forces avant flambement sont supposées sous la forme:[50-46]

$$N_{x0} = -P_x h, N_{y0} = -P_y h \quad (\text{III. 28})$$

L'introduction de l'équation (III. 28) dans l'équation (III. 27) donne :

$$P_x = \frac{\pi^2 \bar{D} (m^2 B_a^2 + n^2)^2}{B_h^2 (m^2 B_a^2 + \beta n^2) L_{mn}} \cdot \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} \left[\frac{\pi^2 \bar{E}_1 (m^4 B_a^4 + n^4)}{16 B_h^2 (m^2 B_a^2 + \beta n^2) L_{mn}} + \frac{\pi^4 (1 + \nu) \bar{D} [5m^2 n^2 B_a^2 (m^2 B_a^2 + n^2) + m^6 B_a^6 + n^6]}{8 B_h^4 (m^2 B_a^2 + \beta n^2) L_{mn}} \right] \bar{W} (\bar{W} + 2\mu), \quad (\text{III. 29})$$

Où :

$$B_a = \frac{b}{a}, B_h = \frac{b}{h}, \bar{D} = \frac{D}{h^3}, \bar{W} = \frac{W}{h}$$

$$L_{mn} = \frac{2(1 + \nu)\pi^2 \bar{D}}{\bar{E}_1 B_h^2} (m^2 B_a^2 + n^2) + 1, \beta = \frac{P_y}{P_x},$$

L'équation (III. 29) peuvent être utilisés pour tracer les courbes de charge après flambement pour les plaques FGM soumises à des charges de compression dans le plan. Pour une plaque parfaite ($\mu = 0$), l'équation (III. 29) nous conduit à une équation:

$$P_{xb} = \frac{\pi^2 \bar{D} (m^2 B_a^2 + n^2)^2}{B_h^2 (m^2 B_a^2 + \beta n^2) L_{mn}} \quad (\text{III. 30})$$

La charge critique de flambement (P_{xcr}) est trouvée pour les valeurs de (m) et (n) qui font le minimum d'expression précédente. Lorsque ($\mu \neq 0$), l'imperfection de la sensibilité des plaques peut être prédite. Les équations (III. 29) et (III. 30) de la théorie classique peut également être obtenue facilement.

III.4.2 Analyse de la stabilité thermique :

Une plaque simplement appuyée (FGM) avec les propriétés des matériaux dépendant de la température et des bords fixes (cas 2) sous une charge thermique est considéré. L'état des bords encastres est, $u = 0$ au $x = 0, a$ et $v = 0$ au $y = 0, b$, est remplie à la moyenne : [4-47]

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = 0, \int_0^a \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy dx = 0 \quad (\text{III. 31})$$

D'après les équations (III. 6) , (III. 10) et (III. 16) on aura :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_1} (f_{,yy} - \nu f_{,xx}) - \frac{1}{2} w_{,x}^2 - w_{,x} w_{,x}^* + \frac{\phi_m}{E_1} \quad (\text{III. 32})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_1} (f_{,xx} - \nu f_{,yy}) - \frac{1}{2} w_{,y}^2 - w_{,y} w_{,y}^* + \frac{\phi_m}{E_1}$$

D'après les équations (III. 24) , (III. 25) , (III. 32) et (III. 31) on aura :

$$N_{x0} = -\frac{\phi_m}{(1-\nu)} + \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\lambda_m^2 + \nu \mu_n^2) W(W + 2\mu h) \quad (\text{III. 33})$$

$$N_{y0} = -\frac{\phi_m}{(1-\nu)} + \frac{E_1}{8(1-\nu^2)} (\mu_n^2 + \nu \lambda_m^2) W(W + 2\mu h)$$

Les équations (III. 33) expriment les contraintes de compression avec les bords fixes. Ces contraintes dépendent du paramètre thermique ϕ_m et de la déviation avant flambement. Si la déviation avant flambement est ignorée. l'équation (III. 33) :

$$N_{x0} = N_{y0} = -\frac{\phi_m}{(1-\nu)}$$

Cette équation peut aussi être obtenue en utilisant la forme membranaire des équations d'équilibre de la méthode proposée par Meyers et Hyer [51]. Une telle approche a été employée par Eslami [42-52,53,44] et par Lanhe [45] pour les plaques FGM.

Les équations (III.33) et (III.27) donne l'expression suivante pour le paramètre thermique :

$$\phi_m = \frac{\pi^2 D(1-\nu)(m^2 B_a^2 + n^2)}{b^2 L_{mn}} \cdot \frac{W}{W + \mu h} + \left[\frac{\pi^4(1-\nu^2)D[5m^2 n^2 B_a^2(m^2 B_a^2 + n^2) + m^6 B_a^6 + n^6]}{8b^4(m^2 B_a^2 + n^2)L_{mn}} + \frac{\pi^2 E_1(1-\nu)(m^4 B_a^4 + n^4)}{16b^2(m^2 B_a^2 + n^2)L_{mn}} + \frac{\pi^2 E_1(m^4 B_a^4 + n^4 + 2\nu m^2 n^2 B_a^2)}{8(1+\nu)b^2(m^2 B_a^2 + n^2)} \right] W(W + 2\mu h), \quad (\text{III. 34})$$

Dans cette étude, il est supposé que la température est uniformément croissante à partir d'une valeur initiale (T_i) à une valeur finale (T_f) et la différence de température ($\Delta T = T_f - T_i$) est constante.

En utilisant les équations (III.11) – (III.13), le paramètre thermique peut être exprimé en terme de ΔT pour:

$$\phi_m = Ph\Delta T, \quad P = E_m \alpha_m + \frac{E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m}{k+1} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{2k+1} \quad (\text{III. 35})$$

Bien que (ΔT) est inclu dans l'expression de (P) et vu que les propriétés des matériaux dépendent de la température ($T = T_0 + \Delta T$). On peut exprimer (ΔT) dans équations (III.34) et (III.35) comme suit :

$$\Delta T = \frac{\pi^2 \bar{D}(1-\nu)(m^2 B_a^2 + n^2)}{B_h^2 P L_{mn}} \cdot \frac{W}{W + \mu} + \left[\frac{\pi^4(1-\nu^2)\bar{D}[5m^2 n^2 B_a^2(m^2 B_a^2 + n^2) + m^6 B_a^6 + n^6]}{8B_h^4 P(m^2 B_a^2 + n^2)L_{mn}} + \frac{\pi^2(1-\nu)\bar{E}_1(m^4 B_a^4 + n^4)}{16B_h^2 P(m^2 B_a^2 + n^2)L_{mn}} + \frac{\pi^2 \bar{E}_1(m^4 B_a^4 + n^4 + 2\nu m^2 n^2 B_a^2)}{8(1+\nu)B_h^2 P(m^2 B_a^2 + n^2)} \right] \bar{W}(\bar{W} + 2\mu), \quad (\text{III. 36})$$

Inversement, lorsque les propriétés du matériau sont dépendantes de la température, une procédure d'itération doit être utilisée pour déterminer les courbes de flambement thermique des plaques FGM. Pour le matériau donné avec les paramètres géométriques et les valeurs spécifiques de W/h et μ , la différence de température est progressivement croissante d'une valeur initiale $\Delta T = 0 (T = T_0)$ à une valeur finale $\Delta T^* (T = T_0 + \Delta T^*)$ à laquelle la différence de valeurs entre les deux côtés de l'équation (III. 36) atteint une valeur petite.

Lorsque l'imperfection initiale est ignorée l'équation (III. 36) nous conduit à une équation où duquel le flambement de la différence de température ΔT_b peut être dérivé comme :

$$\Delta T_b = \frac{\pi^2 \bar{D} (1 - \nu) (m^2 B_a^2 + n^2)}{B_h^2 P L_{mn}} \quad (\text{III. 37})$$

Le processus itératif est adoptée pour déterminer les valeurs critiques de ΔT_b lorsque les propriétés du matériau sont dépendantes de la température.

Lorsque $\mu \neq 0$, aucun point de bifurcation de flambement existe. L'imperfection de la sensibilité de la plaque peut être prédite. par ailleurs, les équations (III. 36) et (III. 37) correspondant à la théorie classique peut facilement être dérivée.

III.4.3 Analyse de la stabilité thermomécanique :

Prenons une plaque simplement appuyée, avec des bords mobiles à $x = 0, a$ et d'autres bords fixes à $y = 0, b$ (cas 3). Elle est soumise à l'action simultanée d'un champ thermique et à une charge de compression dans le plan (P_x). Cette charge est uniformément répartie le long des bords $x = 0, a$.

D'après les équations (III. 28), (III. 31) et (III. 32), nous avons :

$$N_{x0} = -P_x h, N_{y0} = \nu N_{x0} - \phi_m + \frac{E_1 \mu_n^2}{8} W (W + 2\mu h)$$

D'après l'équation (III. 27) on aura :

$$P_x = \frac{\pi^2 \bar{D} (m^2 B_a^2 + n^2)^2}{B_h^2 (m^2 B_a^2 + vn^2) L_{mn}} \cdot \frac{\bar{W}}{\bar{W} + \mu} + \left\{ \frac{\pi^4 (1 + \nu) \bar{D} [5m^2 n^2 B_a^2 (m^2 B_a^2 + n^2) + m^6 B_a^6 + n^6]}{8B_h^4 P (m^2 B_a^2 + vn^2) L_{mn}} + \frac{\pi^2 \bar{E}_1 (m^4 B_a^4 + n^4 + 2L_{mn} n^4)}{16B_h^2 (m^2 B_a^2 + vn^2) L_{mn}} \right\} \bar{W} (\bar{W} + 2\mu) - \frac{n^2 P \Delta T}{m^2 B_a^2 + vn^2} \quad (\text{III. 38})$$

L'équation (III. 38) est utilisée pour tracer les courbes de flambement des plaques FGM sous la combinaison des charges mécaniques et thermiques. Plus précisément, elle est utilisée pour déterminer les charges de compression dans le plan en fonction de flexion totale (pour une température uniformément élevée). ou la variation de la température en fonction de la flexion totale (pour une charge de compression donnée de bord). Cette équation montre que, lorsque les propriétés représentées dépendent de la température, la fonction $P_x(\bar{W})$ est affectée par le champ de température dans tous ses termes et n'est pas simplement déplacé le long de l'axe (P_x) par la quantité $\Delta P_x = -\frac{n^2 P \Delta T}{m^2 B_a^2 + vn^2}$.

D'après l'équation (III. 38), (ΔT) peut être formellement exprimée en termes de membres restants. L'équation résultante peut être immédiatement utilisée pour tracer les chemins thermiques de flambement, et les courbes $\Delta T(\bar{W})$ peuvent être déplacées le long de l'axe ΔT par l'expression $\frac{(m^2 B_a^2 + vn^2) P_x}{n^2 P}$ quand les propriétés du matériau sont indépendantes de la température. En revanche, lorsque les propriétés sont dépendantes de la température, un processus itératif doit être utilisé pour déterminer les courbes de flambement thermique pour les charges de compression donnée.

III.5. Conclusion :

Dans ce chapitre nous présentons une approche analytique pour étudier le flambement et le comportement après flambement des plaques FGM rectangulaire simplement appuyée soumise à des charges de compression dans le plan, thermique, mécanique, et thermomécanique.

Les propriétés du matériau sont supposées être dépendantes de la température et gradué dans la direction d'épaisseur selon une loi de puissance simple de distribution en termes de fraction volumique des constituants. Les équations de gouvernement sont obtenues à partir de la théorie du premier ordre de déformation en cisaillement, en tenant compte à la fois de la non linéarité de Von Karman et les imperfections initiales. Les équations résultantes sont résolus par la procédure de Galerkin.

CHAPITRE IV

Résultats et discussion

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats numériques de l'analyse de flambement thermomécanique des plaques FGM (type P et S), en utilisant la théorie de premier ordre de déformation en cisaillement. Pour décrire les champs des contraintes et des déformations.

On suppose que les propriétés matérielles (le module de Young et le coefficient de dilatation thermique) de la plaque varient dans la direction de l'épaisseur. Cette variation suit une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants.

IV .2. Domaine d'étude :

Dans cette étude on analyse le flambement thermomécanique ainsi que l'après flambement des plaques FGM par la théorie de déformation en cisaillement. On tient compte des propriétés des matériaux dépendant de température.

Les constituants des plaques FGM sont le métal (acier inoxydable) et la céramique (nitrure de silicium).

La propriété de matériau (P_r), tels que le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique, peut être exprimé comme une fonction non linéaire de la température :[54]

$$P_r = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T^1 + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (\text{IV. 1})$$

Ou : $T = T_0 + \Delta T$ et $T_0 = 300K$ (température ambiante) ; P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3 sont les coefficients dépendant de la température. Ils caractérisent les matériaux constitués. Les valeurs typiques des coefficients des matériaux mentionnés sont représentées dans le tableau (IV. 1) :

Propriété	Matériaux	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
$E(Pa)$	Nitrure de silicium	0	$348,43.10^9$	$-3,070.10^{-4}$	$2,160.10^{-7}$	$-8,946.10^{-11}$
	Acier inoxydable	0	$201,04.10^9$	$3,079.10^{-4}$	$-6,534.10^{-7}$	0
$\alpha(1/K)$	Nitrure de silicium	0	$5,8723.10^{-6}$	$9,095.10^{-4}$	0	0
	Acier inoxydable	0	$12,330.10^{-6}$	$8,086.10^{-4}$	0	0

Tableau (IV. 1) : Les coefficients dépendant de la température du nitrure de silicium et d'acier inoxydable[55]

Dans ce suit, les propriétés dépendantes et indépendantes de la température sera dénommés $T - D$ et $T - ID$; respectivement.

Par ailleurs, le module de Poisson est choisi pour être $\nu = 0,3$.

IV .3. Validation analytique:

Pour valider la formulation actuelle de flambement et après flambement des plaques FGM sous l'effet des charges mécaniques, thermiques et combinées ; en considère que l'après flambement de la plaque FGM est dans le plan moyen de symétrie avec les propriétés $T - D$ en une élévation de température uniforme. Ce problème a été également analysée par Shen .Il a utilisé la méthode de perturbation asymptotique et Reddy par la théorie d'ordre élevée de déformation en cisaillement.La plaque est simplement appuyée et fixe à tous les bords (cas 2), il est évident qu'un bon accord a été obtenu dans cette étude de comparaison.

IV .4. Les résultats numériques et discussion :

IV .4.1. L'effet de l'imperfection initiale :

Les valeurs de la flèche de flambement \bar{W}/h des plaques FGM (type P et S) sont calculées par l'équation (III.36). On tient compte des propriétés des matériaux qui sont dépendants de la température $T - D$.

Ces valeurs sont représentées dans la figure(IV. 1).

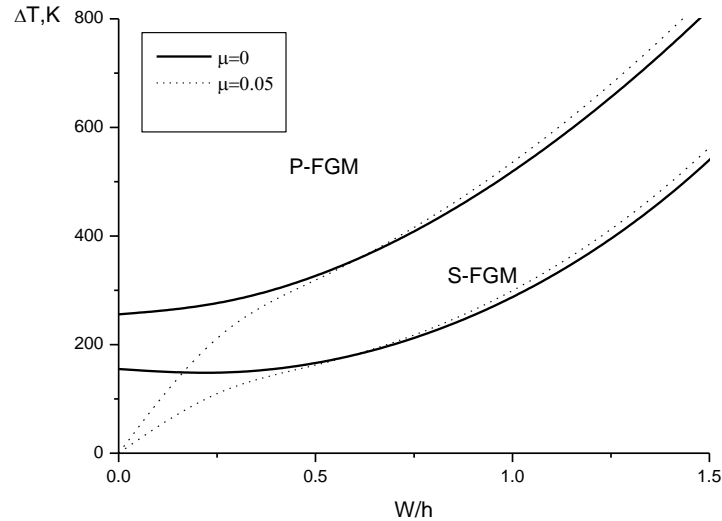


Figure (IV.1). Comparaison entre les courbes de flambement thermique des plaques P-FGM et S-FGM avec les propriétés des matériaux T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 2$, $\mu = 0$ et 0.05 .

On remarque que le flambement thermique est important, lorsque les plaques sont de type (P) dans le cas où l'imperfection est nul ($\mu = 0$).

IV .4.2. L'effet de l'indice k et l'aspect de rapport a/b :

Le tableau (IV.2) montre les effets de l'indice (k) (la fraction volumique) et l'aspect de rapport (a/b) dans la différence de température de flambement des plaques FGM en utilisant l'équation (III. 37)suivante :

Ces valeurs sont comparais avec les résultats de Shen (sont entre parenthèse) :

a/b	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$
T-ID				
1.0	205.688(206.8)*	313.742(315.1)	351.100(352.6)	386.990(388.8)
2.0	129.109(129.9)	197.025(198.1)	220.472(221.7)	242.970(244.4)
T-D				
1.0	183.722(184.6)	267.183(268.2)	294.035(295.1)	318.188(319.5)
2.0	119.774(120.4)	176.107(176.9)	194.643(195.6)	211.823(212.9)

Tableau (IV.2). Température de flambement ΔT des plaques FGM sous une élévation de température uniforme ($b/h = 20$ et $\nu = 0.29$).

On voit que les plaques flambés plus lorsque leurs propriétés des matériaux sont dépendantes de la température ; et lorsque la température de flambement augmente k augmente et a/b diminue.

IV .4.3 L'effet de champ de température :

Le tableau (IV.3) montre l'effet du champ de température sur les charges de flambement des plaques FGM sous compression uniaxiale en utilisant l'équation (III.30).

$\Delta T, K$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$
0	1.4278	2.0153	2.1335	2.1990
100	1.1501	1.7387	1.8660	1.9440
200	0.8379	1.4428	1.5826	1.6751

Tableau (IV.3). Les charges critiques de flambage P_{xcr} (GPa) des plaques FGM sous une compression uniaxiale ($a/b = 1.0$ et $b/h = 20$ à $y = 0, b$).

Il est à voir à partir de ce tableau que l'augmentation de température ambiante diminué la charge de flambement.

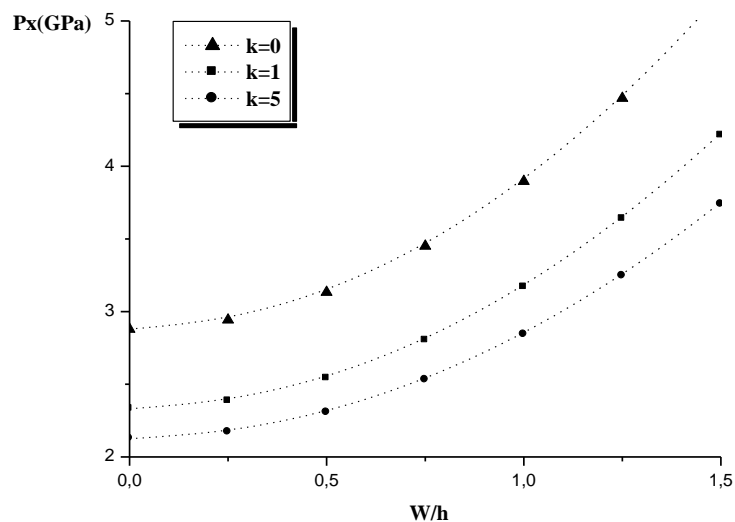
IV .4.4 Les effets de matière et les paramètres géométriques :

Les effets de matière et les paramètres géométriques, ainsi que le champ de température sur le comportement après flambement des plaques FGM sont représentés dans les figures (IV.2)- (IV.15).

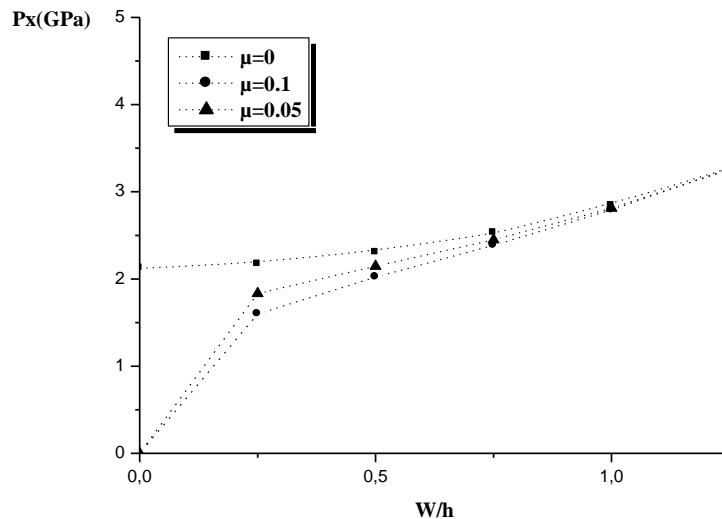
IV .4.4.1 La stabilité mécanique :

Dans ce cas on considère comme un exemple ; une plaque FGM carrée simplement appuyée sous compression uniaxiale. Ici, la charge critique de flambement de plaque correspond à $m = n = 1$ qui est le premier mode de flambement.

Les figures (IV.2) –(IV.3) montrent les effets de l'indice k la fraction volumique pour une plaque parfaite ($\mu = 0$) et pour les différentes valeurs d'imperfection ($\mu = 0; 0.05$ et 0.1), respectivement, sur le comportement après flambement des plaques $P - FGM$ avec des bords mobiles et les propriétés $T - ID$ sous une charge de compression uniaxiale.



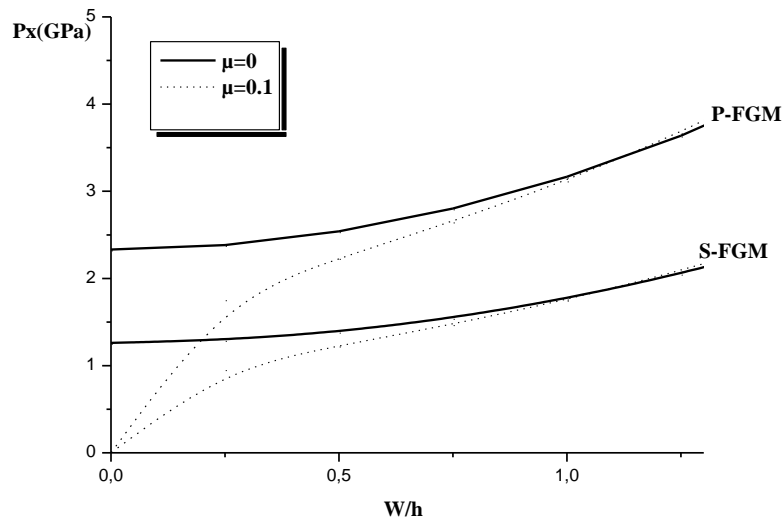
Figure(IV. 2). Les courbes de flambage des plaques $P-FGM$ à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $\beta = 0$ et $\mu = 0$ sous une charge de compression uniaxiale P_x vs. W/h .



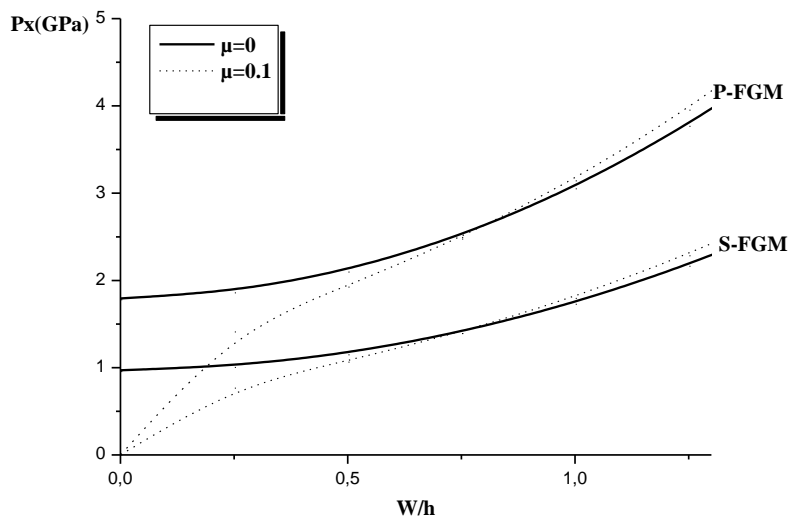
Figure(IV .3). Les courbes de flambage des plaques P-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $\beta = 0$ et $k = 5$ sous une charge de compression uniaxiale P_x vs. W/h .

Comme prévu dans la figure (IV .2), la force de flambement des plaques augmente si k accrue c.-à-d. le contenu du volume de métal (acier inoxydable) dans les plaques P – FGM.

Les effets des conditions aux limites dans le plan sur le comportement après flambement des plaques FGM (P et S) sous une compression uniaxiale sont illustrés dans les figures (IV .4) et (IV .5). dans ces figures on considère deux types des conditions aux limites dans le plan pour les bords $y = 0, b$ dénommé mobiles (FM) et des bords fixes (IM) dans ces figures ; les courbes de flambement pour le cas des bords (FM) et (IM) ont été tracés par l'utilisation de l'équation (III .29) avec $\beta = 0$ et l'équation (III.38) avec $\Delta T = 0$.



Figure(IV. 4).L'effet des conditions aux limites mobile FM dans le plan sur le flambement des plaques P-FGM et S-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$ et $\mu = 0$ et 0.1 et en compression uniaxiale



Figure(IV. 5).L'effet des conditions aux limites fixe IM dans le plan sur le flambement des plaques P-FGM et S-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$ et $\mu = 0$ et 0.1 et en compression uniaxiale

Comme on le voit, la force de flambement des plaques est plus pour $P - FGM$; et lorsque les bords $y = 0, b$ sont faites mobiles .

IV .4.4.2 La stabilité thermique :

Dans ce cas, la plaque FGM est parfaite flambé à $m = n = 1$ pour tout aspect du rapport a/b .

Les figures (IV .6)-(IV .7) montre l'effet des propriétés des matériaux dépendant de température sur le comportement du flambement thermique des plaques P-FGM et S-FGM pour $\mu = 0$ et $\mu = 0.1$, respectivement.

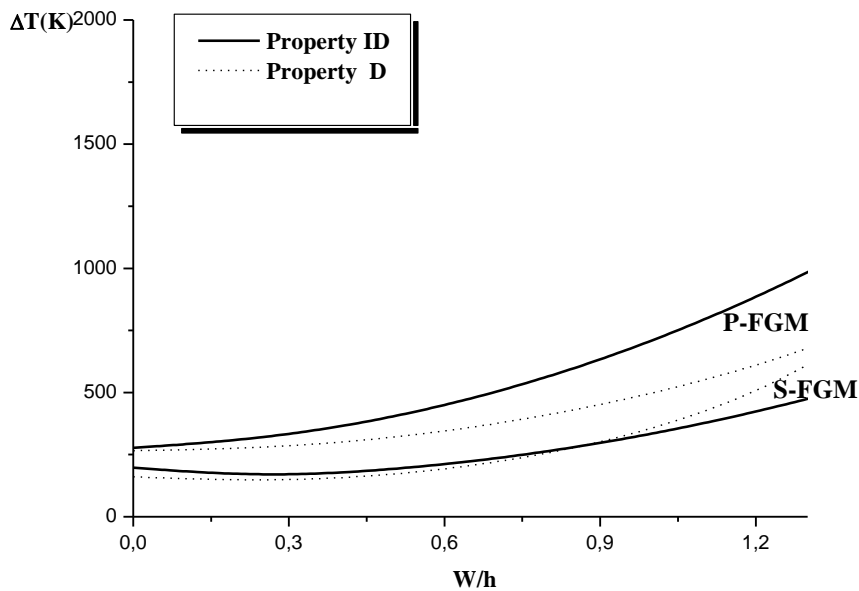


Figure (IV .6).Le comportement après flambement thermique des plaques FGM (P et S) avec les propriétés T-ID et T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$ et $\mu = 0$.

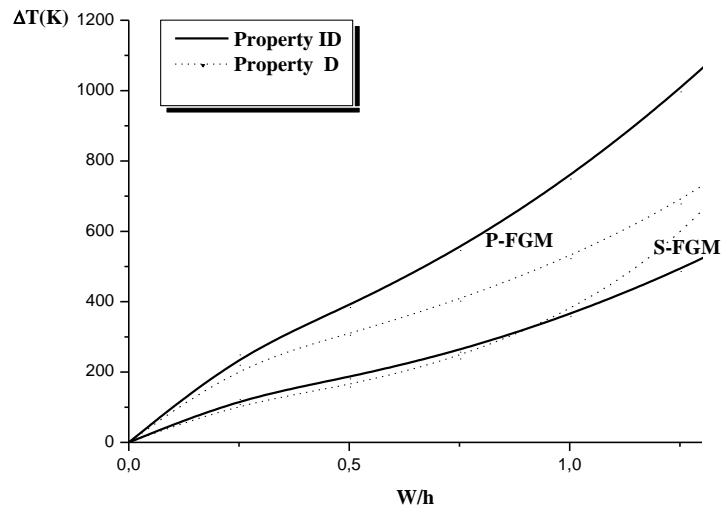


Figure (IV.7). Le comportement après flambement thermique des plaques FGM (P et S) avec les propriétés T-ID et T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$ et $\mu = 0.1$.

Il est évident que la capacité de flambement des plaques FGM diminue drastiquement lorsque en considère que les propriétés des matériaux sont dépendant de la température.

La figure (IV.8) montre la diminution de capacité de flambement thermique des plaques P – FGM quand k augmente avec les propriétés des matériaux T-D.

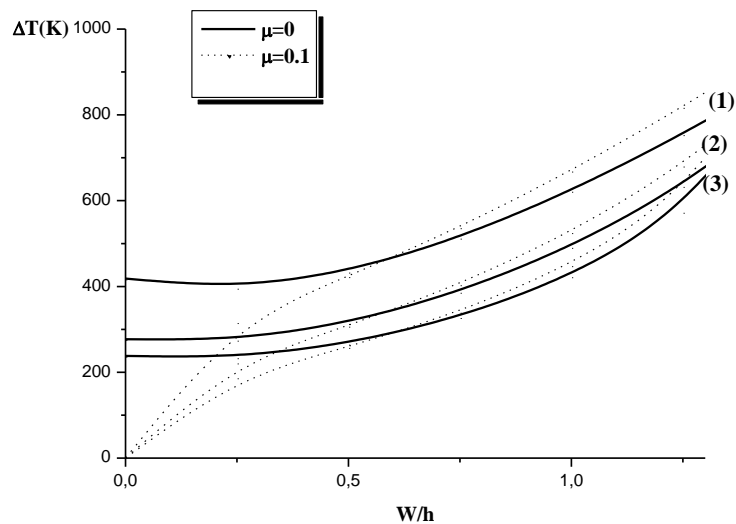


Figure (IV.8). Les courbes de flambement thermique des plaques FGM avec les propriétés T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $\mu = 0$ et 0.1 ; $k = 0$ (1), 1 (2), et $k = 5$ (3)

Les figures (IV.9)-(IV.10) montre les effets de l'aspect de rapport a/b sur le comportement du flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés des matériaux T-D et T-ID.

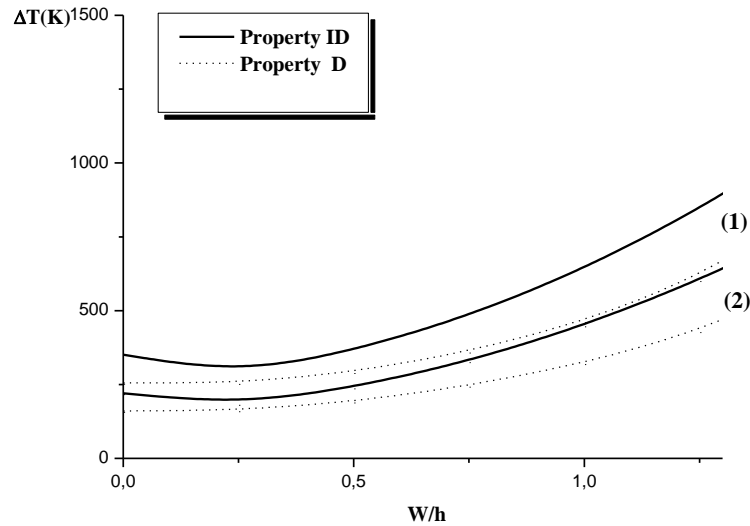


Figure. (IV .9). Les courbes de flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-ID et T-D à $b/h = 20$, $k = 2$, $a/b = 1.0$ (1) et 2.0 (2); $\mu = 0$.

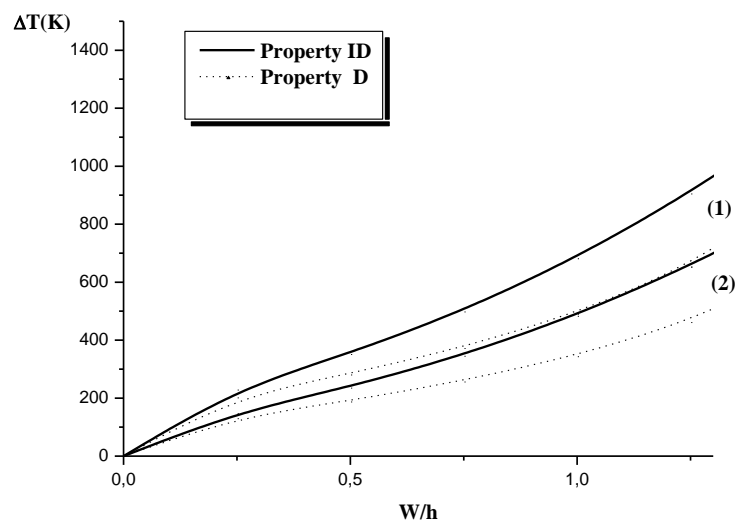
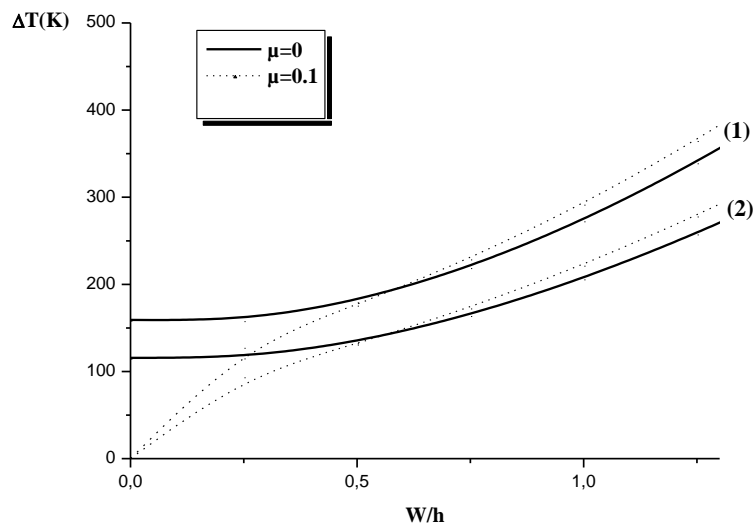


Figure (IV.10). Les courbes de flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-ID et T-D à $b/h = 20$, $k = 2$, $a/b = 1.0$ (1) et 2.0 (2); $\mu = 0.1$.

Comme on peut voir, les courbes d'après flambement thermique deviennent plus faibles lorsque le rapport a/b augmente et les propriétés des matériaux T-D est pris en compte.

L'effet des conditions aux limites dans le plan sur le comportement de flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés des matériaux T-D sont représenté dans les figures (IV .11)-(IV .12). Dans ces figures, les chemins de flambement sont tracés pour deux cas : avec tous les bords fixes (régis par l'équation III.36) et avec les bords $x = 0, a$ mobiles (régis par l'équation (III.38) avec $Px = 0$).



Figure(IV. 11).Effet des conditions aux limites dans le plan IM sur le comportement après flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-D à $b/h = 20, k = 1$, et $a/b = 1.0$ (1) et 1.5 (2) ; $\mu = 0$ et 0.1

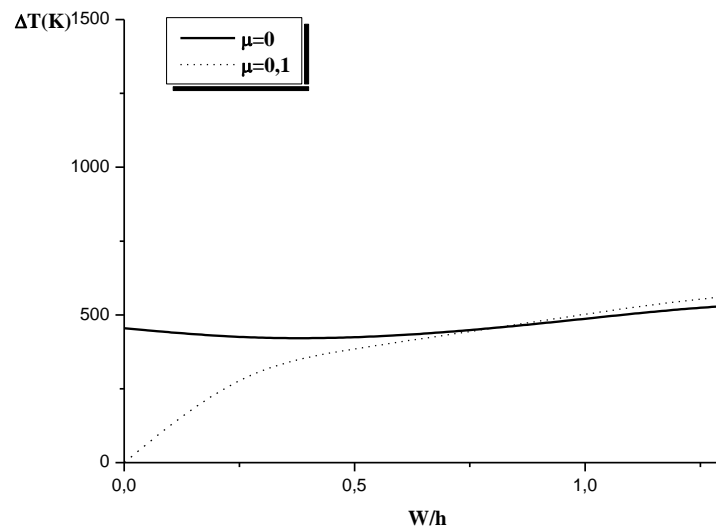


Figure (IV. 12). Effet des conditions aux limites dans le plan FM sur le comportement après flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-D à $b/h = 20$, $k = 1$, et $a/b = 1.0$; $\mu = 0$ et 0.1

Comme on peut le constater, la capacité d'après flambement thermique est considérablement réduite lorsque tous les bords sont fixes (IM), et plus pour les bords mobiles (FM).

IV .4.4.3 La stabilité thermomécanique :

Le comportement de flambement thermomécanique des plaques FGM avec les propriétés T-D sont illustrés dans les figures (IV .13) et (IV .14), en utilisant l'équation (III.38).

La figure (IV .13) montre l'augmentation de la force après flambement des plaques FGM sous l'action de la charge de compression uniaxiale lorsque la température de l'environnement est accrue.

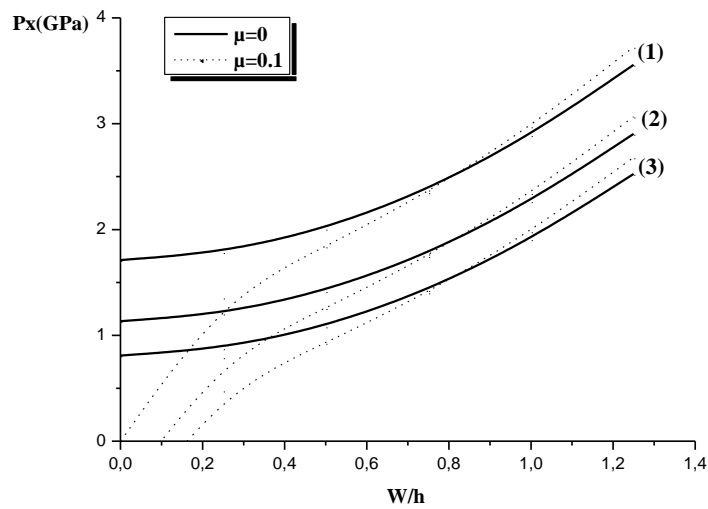


Figure (IV.13). Effet de l'augmentation de température sur le comportement après flambement des plaques P-FGM à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 2$, et $\mu = 0$ et 0.1 ; $\Delta T = 0(1)$, $200(2)$, et $300 K(3)$

De même, figure (IV.14) montre l'effet de la compression uniaxiale sur le comportement de flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés des matériaux T-D et T-ID.

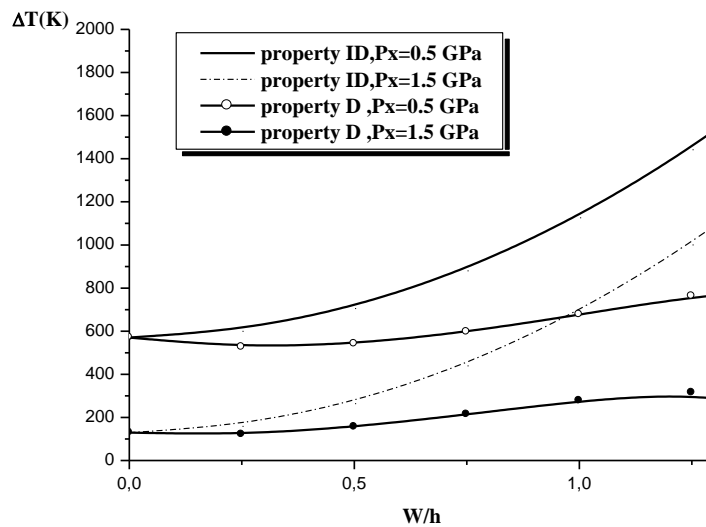


Figure (IV.14). Effet de la charge de compression P_x sur le comportement après flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés T-ID et T-D à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, $k = 1$, et $\mu = 0$; $P_x = 0.5$ (1, 3) et $1.5 GPa$ (2, 4)

Evidement, la présence d'une charge de compression et les propriétés des matériaux T-D rendre les courbes de flambement inférieure. En général, la préchauffé des plaques FGM présentent une diminution de la capacité de charge de flambement quand ils sont soumis à l'action thermique et des charges de compression, comme déjà mentionnés.

Enfin, l'effet d'imperfection initiale sur le comportement de flambement thermique des plaques P-FGM avec les propriétés des matériaux T-ID et T-D sont représentés dans la figure (IV .15).

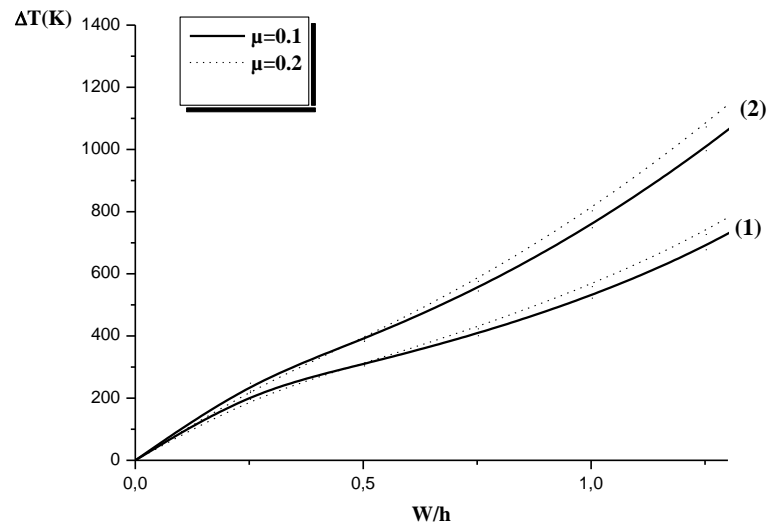


Figure (IV .15). Les courbes après flambement des plaques FGM avec les propriétés T-ID(1) et T-D(2) à $a/b = 1.0$, $b/h = 20$, et $k = 1$, et $\mu = 0, \text{ et } 0.2$

Cette figure montre l'augmentation des capacités de charge de flambement des plaques P-FGM lorsque la taille d'imperfection augmente. Ce comportement est valable pour les propriétés des matériaux T-D et T-ID à la fois des plaques P-FGM.

IV .5.Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du flambement thermomécanique des plaques FGM. La formulation est basée sur la théorie de premier ordre de déformation en cisaillement et les termes non linéaires de Von Karman et l'incorporation de l'imperfection initiale.

Nous avons effectué une étude comparative du flambement pour deux types des plaques FGM : P-FGM et S-FGM ; tous les résultats obtenus montrent que le déplacement suivant (z) pour les plaques P-FGM sous l'effet des charges (thermiques, mécanique et thermomécaniques) sont plus élevées que les plaques S-FGM.

On remarque aussi que les propriétés des matériaux dépendant de la température devraient être considérées pour une prédiction précise et fiable du comportement à la déformation des plaques FGM, et que leur stabilité est grandement influencée par les paramètres matériels et géométriques et les conditions aux limites dans le plan.

Par ailleurs, il est également démontré que l'imperfection initiale a un effet significatif sur le comportement après flambement des plaques FGM.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les caractéristiques du flambement et d'après flambement sont l'un des principaux critères de conception pour l'utilisation optimale des plaques. Par conséquent, il est donc important d'étudier ces caractéristiques pour les plaques FGM sous des différents chargements tels que les charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques.

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement du flambement des plaques FGM à deux lois de puissance différents S-FGM et P-FGM sous l'effet de chargement mécanique, thermique et thermomécanique.

Au départ, nous avons développé une méthode analytique basé sur la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre en tenant compte la non linéarité de Von Karman et l'effet d'imperfection initiale ; on suppose que les propriétés des matériaux sont dépendant de température et varie d'une façon continue suivant la direction d'épaisseur.

Ensuite, nous avons validé cette méthode analytique pour les constituants de matériau FGM : acier inoxydable (le métal) et la nitrure de silicium (le céramique) ; en tenant compte l'influence des différents paramètres tels que les paramètres géométriques, l'indice de fraction volumique (k), les conditions aux frontières.

Le flambement des plaques est présenté sous forme des graphes de chargement dans le plan par rapport au déplacement transversal (w) mesuré à un point représentatif sur la plaque.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les flèches pour les plaques P-FGM sont plus importantes que les plaques S-FGM.

En perspective, ce travail, sera élargi pour étudier le comportement après flambement des plaques FGM :

- ❑ Les valeurs critique de température augmente (la valeur de température correspondant à la bifurcation des états d'équilibre).Lorsque l'indice (k) augmente l'aspect de rapport (a/b) diminue.
- ❑ Les valeurs de charge critique diminuent lorsque l'indice (k) diminue et la température d'ambiante augmente.
- ❑ Sous l'effet de charges mécaniques ; la force de flambement augmente lorsque (k) augmente.
- ❑ Sous l'effet de charges thermiques ; la capacité de flambement diminue nettement dès que les propriétés des matériaux sont dépendant de température, le rapport (a/b) augmente et les bords sont encastées.
- ❑ Sous l'effet des charges combinées la capacité de charge de flambement augmente lorsque la taille d'imperfection augmente.

Références bibliographique

Références bibliographique

- [1]: Tsung-Lin Wu a, K.K. Shukla b, Jin H. Huang ; Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates; a, *Composite Structures* 81; 1;2007
- [2]: W. Lanhe, "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate," *Compos. Struct.*, **64**, No. 2, 211-218 (2004).
- [3]: J. Yang and H. S. Shen, "Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads," *Int. J. Non-Linear Mech.*, **38**, 467-482 (2003).
- [4]: H. S. Shen, "Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties," *Int. J. Mech. Sci.*, **49**, 466-478 (2007).
- [5]: H. S. Shen, "Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings," *Int. J. Solids Struct.*, **42**, 6101-6121 (2005).
- [6]: K. M. Liew, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Postbuckling of piezoelectric FGM plates subjected to thermo-electro-mechanical loading," *Int. J. Solids Struct.*, **40**, 3869-3892 (2003).
- [7]: K. M. Liew, J. Yang, and S. Kitipornchai, "Thermal post-buckling of laminated plates comprising functionally graded materials," *J. Appl. Mech. ASME*, **71**, 839-850 (2004).
- [8]: J. Yang, K. M. Liew, Y. F. Wu, and S. Kitipornchai, "Thermo-mechanical post-buckling of FGM cylindrical panels with temperature-dependent properties," *Int. J. Solids Struct.*, **43**, 307-324 (2006).
- [9]: K. S. Na and J. H. Kim, "Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method," *Finite Elem. Anal. Des.*, **42**, 749-756 (2006).
- [10]: X. Zhao, Y. Y. Lee, and K. M. Liew, "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates," *Compos. Struct.*, **90**, 161-171 (2009).
- [11]: X. Zhao and K. M. Liew, "Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **198**, 2796-2811 (2009).

- [12]: Ever J. Barbero ;Introduction to Composite Materials Design, second edition, CRC Press, 27,15 ,mars 2010.
- [13]: Jean Pierre Mercier, Wilfried Kurz, Zambelli, Introduction à la science des matériaux ,3^{ème} édition ,PPUR presses polytechniques,457, 19 oct. 1999.
- [14]: Jean-Marie Berthelot,Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures, ,4^{ème} édition,LAVOISIER,2005
- [15]: Jean-Paul BAÏLON et Jean Marie DORLOT ,des matériaux,3^{ème} édition,press internationale polythechnique 2001,Canada
- [16]: Krishan Kumar Chawla,Ceramic matrix composites,Springer,second edition,United States of America, 5, 1 janv. 2003
- [17]: Pierre-Etienne Bourban,Leif Carlsson,Jean Pierre Mercier,Jean-Anders E.Manson,Matériaux composites à matrice organique constituants , procédés, propriétés, 1^{ère} édition,Press polytechniques et universitaires romandes,Lausanne, ,2004
- [18]: Jean-Marie Berthelot,Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis, Springer, 16-17, 1999
- [19]: Abderrezak Gharbi,Analyse des fissurations des matériaux composites et détermination de leur délaminage utilisant des capteurs piézo-électriques, présenté pour l'obtention du diplôme de magister, Constantine: 2005
- [20]: Emmanuel Georges MBEI LISSOUCK,Contribution à la détermination des paramètres ultrasonores des gondolements des fibres dans un matériau composite à matrice céramique renforce des fibres du Â«rhectophyllum camerunense, Université-Douala (UFD Physiques et Sciences de l'Ingénieur) - DEA Mécanique-Matériaux 2008
- [21]: Nikhilesh Chawla, Krishan Kumar Chawla, Birkhäuser,Metal matrix composites, United State America, 1,2006.
- [22]: Ever J. Barbero,Introduction to Composite Materials Design, CRC Press , second edition, 15 mars 2010.
- [23]: F. L. Matthews, Rees D. Rawlings,Composite materials: engineering and science, Woodhead Publishing,England, 44,1999.
- [24]: K. U. Kainer, Wiley-VCH,Metal matrix composites: custom-made materials for automotive and aerospace engineering,Weinheim, 65, 13 févr. 2006

- [25]: M. E. Tuttle, Marcel Dekker , Structural Analysis of Polymeric Composite Materials, CRC Press, 7 nov. 2003.
- [26]: Mostafa Raki, Mahdi Hamzehei ,Thermal Buckling of Rectangular FGM Plate with Variation Thickness,World Academy of Science, Engineering and Technology 78,586,2011
- [27]: Fernando Ramirez, Paul R. Heyliger, Ernian Pan,Static analysis of functionally graded elastic anisotropic plates using a discrete layer approach;Composites: Part B 37 (2006) .
- [28]: Miguel Vaz Júnior, Eduardo A. de Souza Neto, Pablo A. Muñoz-Rojas,Advanced Computational Materials Modeling; John Wiley & Sons, 18 juil. 2011
- [29]: M. Karami Khorramabadi, M. M. Najafizadeh, J. Alibabaei Shahraki, and P. Khazaeinejad ,Effect of Shear Theories on Free Vibration of Functionally Graded Plates; ;World Academy of Science, Engineering and Technology 48 2;216,2008.
- [30]: Mostafa Raki, Mahdi Hamzehei;Thermal Buckling of Rectangular FGM Plate with Variation Thickness ; World Academy of Science, Engineering and Technology ,586,2011.
- [31]: Yoshimi Watanabe and Hisashi Sato ;Review Fabrication of Functionally Graded Materials under a Centrifugal Force ;Nagoya Institute of Technology ;Japan; 134-135-136
- [32]: H. Dastoom Laatlily, A. Abedian ;A STUDY ON THE AXIAL STRESSES OF P-FGM, S-FGM AND E-FGM PLATES UNDER PRESSURE LOADING USING THE ENERGY CONCEPT;27TH INTERNATIONAL CONGRESS OF THE AERONAUTICAL SCIENCES ,2.
- [33]: Bouazza MOKHTAR,Tounsi ABEDLOUAHED, Adda BEDIA EL ABBAS, Megueni ABDELKADER,Buckling Analysis of Functionally Graded Plates with Simply Supported Edges ; Leonardo Journal of Sciences ISSN 1583-0233 Issue 15,23-24, July-December 2009.
- [34]: Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi ,Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions ;John Wiley & Sons;page 110, 4 août 2011
- [35]: Pierre Jacquot, Jean-Marc Fournier,Interferometry in speckle light: theory and applications : proceedings of the international conference ;, Lausanne,

Switzerland; Springer, 355, 25-28 September 2000

- [36]: Ozden O. Ochoa, Junuthula Narasimha Reddy, Finite element analysis of composite laminates; Springer; 13, 1992.
- [37]: Carlos A. Mota Soares, Cristóvão M. Mota Soares, Manuel J. M. Freitas, Mechanics of composite materials and structures, 1999, Springer, page 6.vol.361,1999.
- [38]: Murari Lal Gambhir, Stability analysis and design of structures; Springer, 2004
- [39]: Robert M. Jones; Buckling of Bars, Plates, and Shells; Bull Ridge Corporation, Virginia, 1 janv. 2006;
- [40]: Zdeněk P. Bažant, Luigi Cedolin, Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories; World Scientific, 4 août 2010.
- [41]: Chai H. Yoo, Sung Chil Lee, Stability of structures: principles and applications; Elsevier, 24 mars 2011.
- [42]: R. Javaheri and M. R. Eslami, "Thermal buckling of functionally graded plates," AIAA, 40, No. 1, 162-169 (2002).
- [43]: R. Javaheri and M. R. Eslami, "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory," J. Therm. Stress., 25, No. 1, 603-625 (2002).
- [44]: B. A. Samsam Shariat and M. R. Eslami, "Effect of initial imperfection on thermal buckling of functionally graded plates," J. Therm. Stress., 28, 1183-1198 (2005).
- [45]: W. Lanhe, "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate," Compos. Struct., 64, No. 2, 211-218 (2004).
- [46]: D. O. Brush and B. O. Almroth, Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, New York (1975).
- [47]: L. Librescu and M. Stein, "A geometrically nonlinear theory of transversely isotropic laminated composite plates and its use in the post-buckling analysis," Thin-Wall. Struct., 11, 177-201 (1991).
- [48]: L. Librescu and M. Y. Chang, "Imperfection sensitivity and postbuckling behavior of shear-deformable composite doubly-curved shallow panels," Int. J. Solids Struct., 29, No. 9, 1065-1083 (1992).

- [49]: B. A. Samsam Shariat, R. Javaheri, and M. R. Eslami, "Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading," *Thin-Wall. Struct.*, **43**, 1020-1036 (2005).
- [50]: R. Javaheri and M. R. Eslami, "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading," *ZAMM*, **82**, No. 4, 277-283 (2002).
- [51]: C. A. Meyers and M. W. Hyer, "Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates," *J. Therm. Stress.*, **14**, 5247-5266 (1991).
- [52]: B. A. Samsam Shariat and M. R. Eslami, "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads," *Compos. Struct.*, **78**, 433-439 (2007).
- [53]: B. A. Samsam Shariat and M. R. Eslami, "Thermal buckling of imperfect functionally graded plates," *Int. J. Solids Struct.*, **43**, 4082-4096 (2006).
- [54]: Y. S. Touloukian, *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*, McMillan, New York (1967).
- [55]: J. N. Reddy and C. D. Chin, "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates," *J. Therm. Stress.*, **21**, 593-626 (1998).