République Algérienne Démocratique
et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Sidi Bel-Abbès
Département de Mathématiques

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة سيدي بلعباس
قسم الرياضيات

Equations Différentielles Fractionnaires et Mesure de Non Compacité[1]

par

SEBA Djamila[2]

Spécialité : Mathématiques

Option : Equations Différentielles

Résumé :

Le calcul fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques grâce à son immense application dans différents domaines tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finance et d'autres sciences qui ont été développé dans la dernière décennie ; en plus de l'intérêt que lui portent beaucoup de chercheurs en mathématiques elles même.

Cette thèse est dévouée à l'existence de solutions pour différents types d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Notre principal outil est le théorème du point fixe de Mönch combiné avec la technique de la mesure de non compacité. Cette dernière est souvent utilisée dans plusieurs branches de l'analyse non linéaire. Spécialement cette technique a prouvé qu'elle est un outil très utile dans l'existence de solutions de plusieurs types d'équations intégrales et différentielles.

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire non linéaires. En premier lieu, nous avons traité le problème aux conditions initiales suivant,

$$^cD^r y(t) = f(t, y), \quad \text{for each } t \in J = [0, T], \quad 1 < r < 2 \tag{1}$$
$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \tag{2}$$

Nous avons, aussi, considéré le problème aux conditions au bord de la forme

$$^cD^r y(t) = f(t, y), \quad \text{for each } t \in J = [0, T], \quad 1 < r < 2 \tag{3}$$
$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T \tag{4}$$

1. Thèse de Doctorat
2. Directeur de thèse : Prof. Mouffak Benchohra

où ${}^cD^r$ est la dérivé d'ordre fractionnaire de Caputo, $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses , et E est un espace de Banach munit de la norme $\|.\|$.

Nous avons également traité le même problème ; mais cette fois avec des conditions intégrales non linéaires de la forme

$$ {}^cD^r y(t) = f(t, y(t)), \quad \text{for each } t \in J = [0, T], \tag{5} $$

$$ y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s, y(s))ds, \tag{6} $$

$$ y(T) + y'(T) = \int_0^T h(s, y(s))ds, \tag{7} $$

où f est la même fonction définie dans les problèmes(1)-(4), g, et $h : J \times E \to E$ sont des fonctions données vérifiants certaines hypothèses, et ${}^cD^r$, $1 < r \leq 2$ est la dérivé d'ordre fractionnaire de Caputo.

Par la suite nous avons cherché les solutions d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire avec impulsions de la forme

$$ {}^cD^r y(t) = f(t, y), \text{ for each } \; t \in J = [0, T], \; t \neq t_k, \; k = 1, \ldots, m, \; 0 < r \leq 1, \tag{8} $$

$$ \Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)), \; k = 1, \ldots, m, \tag{9} $$

$$ y(0) = y_0, \tag{10} $$

où ${}^cD^r$ est la dérivé d'ordre fractionnaire de Caputo, $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée, $I_k : E \to E$, $k = 1, \ldots, m$ et $y_0 \in E$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$, $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, $y(t_k^+) = \lim_{h \to 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h \to 0^-} y(t_k + h)$ représentent les limites droite et gauche de $y(t)$ en $t = t_k$, $k = 1, \ldots, m.$, et E est un espace de Banach munit de la norme $\|.\|$.

Les équations différentielles fractionnaires semi linéaires dans les espaces de Banach ont été discuté juste après où nous avons commencé par prouver l'existence des solutions de

$$ D^r y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), \quad t \in J = [0, b], \quad 0 < r \leq 1 \tag{11} $$

$$ y(t) = \phi(t), \quad t \in [-\rho, 0], \tag{12} $$

où D^r est la dérivé fractionnaire standard de Riemann-Liouville, $f : J \times C([-\rho, 0], E) \to E$ est une fonction donnée, $A : D(A) \subset E \to E$ est un operateur linéaire fermé non dense sur E. $\phi : [-\rho, 0] \to E$ est une fonction continue donnée avec $\phi(0) = 0$ et $(E, |\cdot|)$ un espace de Banach. Pour toute fonction y définie sur $[-\rho, b]$ et tout $t \in J$ on note par y_t l'élément de $C([-\rho, 0], E)$ définie par

$$ y_t(\theta) = y(t + \theta), \; \theta \in [-\rho, 0]. $$

Ici $y_t(\cdot)$ représente la fonction histoire de l'état du temps $t - \rho$, jusqu'au temps t.

Ensuite nous avons généralisé notre résultat au cas où l'opérateur A est non dense et satisfait la condition de Hille-Yosida, nous avons pris $r > 0$.

Après Cela nous avons tourné notre attention vers les équations différentielles fractionnaires définies sur la demi droite réelle positive où on a considéré un problème de la forme

$$ D^r y(t) = f(t, y(t)), \text{ for each } t \in J = [0, \infty), \quad 1 < r < 2, \tag{13} $$

$$ y(0) = 0, \quad y \text{ bounded on } [0, \infty), \tag{14} $$

où D^r est la dérivé d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville, $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses, et E est un espace de Banach munit de la norme $|.|$. Ici nous avons combiné notre méthode avec le processus de diagonalisation pour trouver des solutions à notre problème

Pour terminer, nous avons considéré les équations différentielles fractionnaires hyperboliques dans les deux cas local et non local où on a étudié le problème à valeurs initiales suivant

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u), \quad (x,y) \in J := [0,a] \times [0,b], \tag{15}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \ x \in [0,a], \quad u(0,y) = \psi(y), \ y \in [0,b], \tag{16}$$

où ${}^cD_0^r$ est la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre $r = (r_1, r_2) \in (0,1] \times (0,1]$, $f : J \times E \to E$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses, $\phi : [0,a] \to E$ and $\psi : [0,b] \to E$ sont des fonctions absolument continues, $a, \ b > 0$, et E est un espace de Banach munit de la norme $|.|$.

Aussi nous avons généralisé notre résultat à l'équation différentielle fractionnaire hyperbolique non local donnée par

$$({}^cD_0^r u)(x,y) = f(x,y,u), \quad (x,y) \in J, \tag{17}$$

$$u(x,0) + Q(u) = \varphi(x), \ x \in [0,a], \ u(0,y) + K(u) = \psi(y), \ y \in [0,b], \tag{18}$$

où f, ϕ, ψ sont définies comme dans le problème (15)-(16) et $Q, K : C(J,E) \to E$ sont des fonctions continues.

Après, nous avons discuté un problème non linéaire à valeurs initiales d'équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des impulsions à temps fixé donné par

$$({}^cD_0^r u)(t,y) = f(t,y,u(t,y)), \ \text{ if } (t,y) \in J; \, t \neq t_k, \ k = 1, \dots, m, \tag{19}$$

$$u(t_k^+, y) = u(t_k^-, y) + I_k(u(t_k^-, y)), \ \text{ if } (t,y) \in J; \ k = 1, \dots, m, \tag{20}$$

$$u(t,0) = \varphi(t), \, u(0,y) = \psi(y), \, (t,y) \in J, \tag{21}$$

où $J = [0,a] \times [0,b]$, $a, b > 0$, ${}^cD_0^r$ est la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre $r = (r_1, r_2) \in (0,1] \times (0,1]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = a$, $f : J \times E \to E$, $I_k : E \to E$, $k = 0, 1, \dots, m$ sont des fonctions données, $\varphi : [0,a] \to E$ et $\psi : [0,b] \to E$ sont des fonctions absolument continues avec $\varphi(0) = \psi(0)$ et E est un espace de Banach de norme $\|.\|$.

Nous avons aussi étendu ce résultat au problème à valeurs initiales non local suivant

$$({}^cD_0^r u)(t,y) = f(t,y,u(t,y)), \ \text{ if } (t,y) \in J; \, t \neq t_k, \ k = 1, \dots, m, \tag{22}$$

$$u(t_k^+, y) = u(t_k^-, y) + I_k(u(t_k^-, y)), \ \text{ if } (t,y) \in J; \, k = 1, \dots, m, \tag{23}$$

$$u(t,0) + Q(u) = \varphi(t), \, u(0,y) + K(u) = \psi(y), \, (t,y) \in J, \tag{24}$$

où f, φ, ψ, I_k; $k = 1, ...m$, sont définies comme dans le problème (19)-(21) et $Q, K : PC(J,E) \to E$ sont des fonctions continues. $PC(J,E)$ est un espace de Banach.

Tous nos travaux ont été illustré par des exemples, pour prouver l'applicabilité de nos résultats.

Summary :

In recent years, a branch of mathematics called fractional calculus has crystallized from a diverse background. The enormous numbers of very interesting and novel applications of fractional differential equations in physics, chemistry, engineering, finance, and other sciences that have been developed in the last few decades, has been a major stimulant, and conversely, the mathematical tools developed in response should be increasingly useful in these applied disciplines. A completely different and very novel application field is the area of mathematical psychology where fractional-order systems may be used to model the behavior of human beings. Specifically, the way in which a person reacts to external influences depends on the experience he or she has made in the past. In other words, humans have memories, and fractional operators are a very natural tool to model memory-dependent phenomena.

In addition there are some applications of fractional calculus within various fields of mathematics itself.

This thesis is devoted to the existence of solutions for various types of fractional differential equations, our main tool is Mönch's fixed point theorem combined with the technique of measure of noncompactness. This last is often used in several branches of nonlinear analysis. Especially, that technique turns out to be a very useful tool in existence for several types of integral equations and differential equations.

In this work, we study the existence of solutions of nonlinear fractional differential equations. We first deal with the following initial value problem (IVP for short),

$$
\begin{aligned}
{}^cD^r y(t) &= f(t,y), \quad \text{for each } t \in J = [0,T], \quad 1 < r < 2 \qquad (25)\\
y(0) &= y_0, \quad y'(0) = y_1 \qquad (26)
\end{aligned}
$$

then we consider a boundary value problem (BVP for short) of the form

$$
\begin{aligned}
{}^cD^r y(t) &= f(t,y), \quad \text{for each } t \in J = [0,T], \quad 1 < r < 2 \qquad (27)\\
y(0) &= y_0, \quad y(T) = y_T \qquad (28)
\end{aligned}
$$

where ${}^cD^r$ is the Caputo fractional derivative, $f : J \times E \to E$ is a given function satisfying some assumptions, and E is a Banach space with norm $\|.\|$.

This is followed by an other BVP but this time with nonlinear integral conditions of the form

$$
\begin{aligned}
{}^cD^r y(t) &= f(t,y(t)), \quad \text{for each } t \in J = [0,T], \qquad (29)\\
y(0) - y'(0) &= \int_0^T g(s,y(s))ds, \qquad (30)\\
y(T) + y'(T) &= \int_0^T h(s,y(s))ds, \qquad (31)
\end{aligned}
$$

where f is as in problems (25)-(28), g, and $h : J \times E \to E$ are given functions satisfying some assumptions, and ${}^cD^r$, $1 < r \le 2$ is the Caputo fractional derivative.

Next we seek solutions for an impulsive fractional differential equation of the form

$$
\begin{aligned}
{}^cD^r y(t) &= f(t,y), \text{ for each } \ t \in J = [0,T], \ t \neq t_k, \ k = 1,\dots,m, \ 0 < r \le 1, \qquad (32)\\
\Delta y|_{t=t_k} &= I_k(y(t_k^-)), \ k = 1,\dots,m, \qquad (33)\\
y(0) &= y_0, \qquad (34)
\end{aligned}
$$

where ${}^cD^r$ is the Caputo fractional derivative, $f : J \times E \to E$ is a given function, $I_k : E \to E$, $k = 1, \dots, m$ and $y_0 \in E$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$, $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, $y(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} y(t_k + h)$ and $y(t_k^-) = \lim_{h\to 0^-} y(t_k + h)$ represent the right and left limits of $y(t)$ at $t = t_k$, $k = 1, \dots, m$., and E is a Banach space with norm $\|.\|$.

Semilinear fractional differential equations in Banach spaces are discussed just after where we begin by proving the existence of solutions of

$$D^r y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), \quad t \in J = [0, b], \quad 0 < r \le 1 \tag{35}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-\rho, 0], \tag{36}$$

where D^r is the standard Riemann-Liouville fractional derivative, $f : J \times C([-\rho, 0], E) \to E$ is a given function, $A : D(A) \subset E \to E$ is a nondensely defined closed linear operator on E. $\phi : [-\rho, 0] \to E$ a given continuous function with $\phi(0) = 0$ and $(E, |\cdot|)$ a Banach space. For any function y defined on $[-\rho, b]$ and any $t \in J$ we denote by y_t the element of $C([-\rho, 0], E)$ defined by

$$y_t(\theta) = y(t + \theta),\ \theta \in [-\rho, 0].$$

Here $y_t(\cdot)$ represents the history of the state from time $t - \rho$, up to the present time t.

Then we extend our results to the case when the operator A is nondensely defined and satisfies the Hille-Yosida condition, and we will take $r > 0$.

After that we turn our attention to fractional order differential equations on the half line where we consider a problem of the form

$$D^r y(t) = f(t, y(t)), \text{ for each } t \in J = [0, \infty), \quad 1 < r < 2, \tag{37}$$

$$y(0) = 0, \quad y \text{ bounded on } [0, \infty), \tag{38}$$

where D^r is the Riemann-Liouville fractional derivative, $f : J \times E \to E$ is a given function satisfying some assumptions, and E is a Banach space with norm $|.|$. Here we go up with our method and combine it with the diagonalization method to seek solutions for our problem.

At the last we deal with hyperbolic fractional differential equations in both cases local and nonlocal, where we study an IVP of the form

$$({}^cD_0^r u)(x, y) = f(x, y, u), \quad (x, y) \in J := [0, a] \times [0, b], \tag{39}$$

$$u(x, 0) = \phi(x),\ x \in [0, a], \quad u(0, y) = \psi(y),\ y \in [0, b], \tag{40}$$

where ${}^cD_0^r$ is the Caputo fractional derivative of order $r = (r_1, r_2) \in (0, 1] \times (0, 1]$, $f : J \times E \to E$ is a given function satisfying some assumptions, $\phi : [0, a] \to E$ and $\psi : [0, b] \to E$ are absolutely continuous functions, $a,\ b > 0$, and E is a Banach space with norm $|.|$.

And extends our investigation to the following nonlocal hyperbolic fractional differential equation

$$({}^cD_0^r u)(x, y) = f(x, y, u), \quad (x, y) \in J, \tag{41}$$

$$u(x, 0) + Q(u) = \varphi(x),\ x \in [0, a],\ u(0, y) + K(u) = \psi(y),\ y \in [0, b], \tag{42}$$

where f, ϕ, ψ are as in problem (39)-(40) and $Q, K : C(J, E) \to E$ are continuous functions.

After that we discus a nonlinear IVP for differential equations of fractional order with fixed time impulses given by

$$({}^cD_0^r u)(t, y) = f(t, y, u(t, y)), \text{ if } (t, y) \in J;\ t \neq t_k,\ k = 1, \dots, m, \tag{43}$$

$$u(t_k^+, y) = u(t_k^-, y) + I_k(u(t_k^-, y)), \text{ if } (t, y) \in J;\ k = 1, \dots, m, \tag{44}$$

$$u(t, 0) = \varphi(t),\ u(0, y) = \psi(y),\ (t, y) \in J, \tag{45}$$

where $J = [0, a] \times [0, b]$, $a, b > 0$, ${}^cD_0^r$ is the Caputo fractional derivative of order $r = (r_1, r_2) \in (0, 1] \times (0, 1]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = a$, $f : J \times E \to E$, $I_k : E \to E$, $k = 0, 1, \ldots, m$ are given functions, $\varphi : [0, a] \to E$ and $\psi : [0, b] \to E$ are absolutely continuous functions with $\varphi(0) = \psi(0)$ and E is a Banach space with norm $\|.\|$.

And we also extend this investigation to the following nonlocal IVP

$$({}^cD_0^r u)(t, y) = f(t, y, u(t, y)), \text{ if } (t, y) \in J;\ t \neq t_k,\ k = 1, \ldots, m, \tag{46}$$

$$u(t_k^+, y) = u(t_k^-, y) + I_k(u(t_k^-, y)), \text{ if } (t, y) \in J;\ k = 1, \ldots, m, \tag{47}$$

$$u(t, 0) + Q(u) = \varphi(t),\ u(0, y) + K(u) = \psi(y),\ (t, y) \in J, \tag{48}$$

where f, φ, ψ, I_k; $k = 1, ...m$, are as in problem (43)-(45) and $Q, K : PC(J, E) \to E$ are continuous functions. $PC(J, E)$ is a Banach space.