N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

THESE
DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée par

CHEMIKH SMAIL

Spécialité : MATHEMATIQUES
Option : GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Intitulée

Applications biharmoniques, Applications bi-f-harmoniques et géométrie de contact

Soutenue le 23/11/2022
Devant le jury composé de :

Président Abbes BENAISSA Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes
Examinateurs Ali HAKEM Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes
Noureddine AMROUN Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes
Kaddour ZEGGA MCA à l'Université de Mascara
Kamel TAHRI MCA à l'Université de Tlemcen

Directeur de thèse Djilali BEHLOUL Professeur à l'Université USTHB.

Table des matières

Remerciements.

Je ne peux achever ce travail sans remercier, pour son soutien indéfectible tout au long de la réalisation de cette thèse, j'ai nommé le professeur Behloul DJILALI de l'USTHB.

Je remercie également le professeur Abbas BENAISSA de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse et d'avoir veiller sur le processus de préparation de ma soutenance.

Ma gratitude et ma reconnaissance vont aux nombres de jury : Pr Ali HAKEM, Pr Noureddine AMROUN, Dr Kamel TAHRI et Dr Kaddour ZEGGA d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes sincères remerciements vont également à : Pr Seddik OUAKKAS, Ahmed ZEGLAOUI et Pr Ghouti DJELLOULI de l'université de Saïda Dr Moulay Tahar, ainsi qu'à toute l'équipe de géométrie à l'université Paris 7, en particulier à monsieur Rached Mneimné, qui ont contribué à la réalisation de ce manuscrit.

Je remercie les collègues et personnel administratif de la faculté des sciences exactes, à leurs tête le doyen Ali ZAOUI et le vice-doyen Monsieur ABBAR, pour leurs accueil et hospitalité. Un grand merci à mes amis Mr. MANSOUR-KHOJA et Mme SAOUDI du ministère de l'enseignement supérieur pour leur aide très précieuse, ainsi qu'à toute autre personne ayant contribuer, de près ou de loin, à l'accomplissement de ce modeste travail.

Enfin, ma gratitude va à toute personne qui a contribué, ou participer, aux différentes écoles de géométrie qui m'ont permis de tisser des liens utiles pour parfaire ma formation en géométrie.

Je tiens à dédicacer ce travail à la mémoire de ma mère, de mon père et à celle de mon beau père (Rabbi yerhamhoum), à ma femme qui a fait beaucoup de sacrifices pour la réussite de mon parcours, au même titre que mes filles Imène, Rania et Nour ; à mes sœurs Houria et Nassira et mon frère Mohamed, sans oublier mes amis Noureddine BENSIDEN et Mohamed TOUATI ainsi qu'à tout le personnel del'Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Alger.

Résumé de la thèse.

Les applications harmoniques et les applications biharmoniques sont respectivement solutions d'un système non-linéaire élliptique d'ordre deux et d'ordre quatre, dans les deux cas il s'agit d'un système trés difficile à résoudre. Il existe plusieurs généralisations de ces deux types d'applications, ces généralisations sont étudiées par plusieurs auteurs et qui ont fait l'objet de plusieurs publications. Cette thèse rentre dans ce cadre, elle se divise en trois chapitres. Dans le premier chapitre de cette thèse, on présente quelques outils fondamentaux de la géométrie riemannienne, ensuite on passe à la définition des applications harmoniques et biharmoniques où on cite certaines proporiétés. Un cas trés important à étudier est celui qui concerne les applications conformes. Dans le deuxième chapitre, on présente une généralisation des applications biharmoniques, dite applications bi-f-harmoniques où $f \in C^{\infty}(M)$ est une fonction positive. Nous donnons quelques constructions d'applications bi-f-harmoniques. Dans un premier résultat, nous donnons la relation entre le champ de bi-f-tension et le champ de bi-tension et la relation entre le le tenseur bi-f-énergie et le tenseur bi-énergie et dans ce cas, nous construisons quelques exemples d'applications bi-f-harmoniques et nous étudions le cas de l'application identité. Comme deuxième résultat, nous caractérisons la bi-f-biharmonicité d'une application conforme $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de dilatation λ. On commence par le cas où la fonction f est égale à la dilatation λ et nous donnons quelques exemples d'applications bi-λ-harmoniques. On termine ce chapitre par l'étude du cas général, c'est à dire le cas où f est fonction positive quelconque. Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans une revue de classe B, indexée dans la base Scopus. Dans le troisième chapitre de cette thèse, on s'intéresse à la construction des applications harmoniques et biharmoniques relativement aux déformations $\mathcal{D}$-isométriques dans les variétés presque de contact. On considère $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact. Les applications f-biharmoniques constituent une autre généralisation des applications biharmoniques, cette généralisation est traité à la fin de cette thèse. Notons, en prenons $f = 1$, dans les deux généralisations, on retrouve tous les résultats connus pour les applications biharmoniques.

Introduction générale.

Les applications harmoniques et les applications biharmoniques sont respectivement solutions d'un système non-linéaire élliptique d'ordre deux et d'ordre quatre, dans les deux cas il s'agit d'un système trés difficile à résoudre. Rappelons qu'une application $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie $E(\phi)$ définie par

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |d\phi|^2 dv_g, \tag{1}$$

c'est à dire si elle est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (2.2.1) :

$$\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi = 0, \tag{2}$$

$\tau(\phi)$ est appelé le champ de tension de ϕ. Si $(x^i)_{1\leq i\leq m}$ et $(y^\alpha)_{1\leq\alpha\leq n}$ sont les coordonnées locales respectivement sur M et N l'équation (2.2.2) devient :

$$\tau(\phi)^\alpha = \Delta\phi^\alpha + g^{ij}\,{}^N\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^j} = 0, 1 \leq \alpha \leq n \tag{3}$$

où $\Delta\phi^\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\dfrac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^j}\right)$ est le Laplacien sur (M, g) et ${}^N\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ sont les symboles de Christoffel de (N, h). . Le tenseur impulsion-énergie de ϕ est un champ de tenseur symétrique de type $(0, 2)$ sur M défini par

$$S(\phi) = e(\phi)g - \phi^* h,$$

La relation de base entre le tenseur impulsion-énérgie et les applications harmoniques est donnée par le résultat suivant :

$$divS(\phi) = -h(\tau(\phi), d\phi).$$

De cette dernière formule, il suit que si $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est une submersion, alors elles est harmonique si et seulement si $divS(\phi) = 0$. Une généralisation naturelle des applications harmoniques est obtenue en considérant les points critiques de la fonctionnelle obtenue en intégrant le carré de la norme du champ de tension. La bi-énergie $E_2(\phi)$ de l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est la fonctionnelle défine par

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\phi)|^2 \, dv_g,$$

où D est un domaine compact de M. L'application ϕ est dite biharmonique si elle est point critique da la fonctionnelle bi-énergie, c'est à dire

$$\left.\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)\right|_{t=0} = 0.$$

Les équations d'Euler -Lagrange associées à la bi-énergie nous permettent d'obtenir la première variation de la bi-énergie et qui est donnée par l'équation suivante :

$$\left.\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)\right|_{t=0} = \int_D h(v, \tau_2(\phi))\, dv_g.$$

Où

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)\, d\phi,$$

avec

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 = Tr_g\left(\nabla^\phi\nabla^\phi - \nabla^\phi_{\nabla^M}\right)$$

est le Laplacien sur les section du fibré $\phi^{-1}TN$ et R^N désigne le tenseur de courbure sur (N^n, h). L'application ϕ est dite biharmonique si et seulement si

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)\, d\phi = 0.$$

Il est clair que toute application harmonique est biharmonique. Comme pour les applications harmoniques, il existe un tenseur symétrique de type (0.2) appelé le tenseur impulsion bi-énergie associé aux applications biharmoniques. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, le tenseur impulsion bi-énergie de ϕ noté $S_2(\phi)$ est défini par :

$$S_2(\phi) = \left(\frac{-1}{2}|\tau(\phi)|^2 + divh(\tau(\phi), d\phi)\right) g - 2symh(\nabla\tau(\phi), d\phi).$$

Où

$$symh(\nabla\tau(\phi), d\phi)(X, Y) = \frac{1}{2}\left\{h(\nabla_X\tau(\phi), d\phi(Y)) + h(\nabla_Y\tau(\phi), d\phi(X))\right\}.$$

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. De même, il existe une relation entre $\tau_2(\phi)$ et la divergence de ce tenseur.

$$divS_2(\phi) = h(\tau_2(\phi), d\phi).$$

Il suit que si $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est une submersion, alors elles est biharmonique si et seulement si

$$divS_2(\phi) = 0$$

Cette thèse rentre dans ce cadre, elle se divise en trois chapitres. Dans une première partie du chapitre te thèse, on présente quelques outils fondamentaux de la géométrie riemannienne. Ensuite on passe à la définition des applications harmoniques et biharmoniques où on cite certaines proporiétés. Un cas trés important à étudier est celui qui concerne les applications conformes. Soient (M^n, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes de même dimension n, une application $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est dite conforme s'il existe une fonction $\lambda : M \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^∞ telle que pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$:

$$h(d\phi(X), d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y).$$

La fonction λ est appelée la dilatation de ϕ. La densité d'une application conforme ϕ : $(M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est égale à

$$e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2 = \frac{n}{2}\lambda^2.$$

On déduit que la dilatation est donnée par la formule suivante :

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}|d\phi|^2$$

Le champ de tension et le tenseur énergie-impulsion d'une application conforme s'écrivent en fonction de la dilatation λ. Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ, alors

$$(i) \quad divS(\phi) = (n-2)\lambda^2 d\ln\lambda, \tag{4}$$

où $S(\phi)$ est le tenseur énergie-impulsion de l'application ϕ.

$$(ii) \quad divh(\tau(\phi), d\phi) = (2-n)\left(2\lambda^2 |grad \ln\lambda|^2 + \lambda^2\Delta\ln\lambda\right). \tag{5}$$

$$(iii) \quad \tau(\phi) = (2-n)d\phi(grad \ln\lambda). \tag{6}$$

$$(iv) \quad |\tau(\phi)|^2 = (2-n)^2\lambda^2 |grad \ln\lambda|^2. \tag{7}$$

On déduit que toute application conforme $\phi : (M^2, g) \longrightarrow (N^2, h)$ est harmonique. Notons aussi que si $n \geq 3$, alors toute application conforme $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un difféomorphisme local et dans ce cas l'application ϕ est harmonique si et seulement si sa dilatation λ est une fonction constante. Une première propriété d'une application conforme est donnée par le résultat suivant

Proposition 0.0.1 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ *une application conforme de dilatation* λ*. Pour tous* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, nous avons*

$$\nabla_Y d\phi(X) = X(\ln\lambda)\, d\phi(Y) + Y(\ln\lambda)\, d\phi(X) - g(X,Y)\, d\phi(grad \ln\lambda) + d\phi(\nabla_Y X). \quad (8)$$

En particulier pour chaque fonction $f \in C^\infty(M)$*, on obtient*

$$\begin{aligned} \nabla_Y d\phi(gradf) = {} & d\ln\lambda(gradf)\, d\phi(Y) + Y(\ln\lambda)\, d\phi(gradf) \\ & - Y(f)\, d\phi(grad \ln\lambda) + d\phi(\nabla_Y gradf), \end{aligned} \quad (9)$$

et si $f = \ln\lambda$*, on obtient*

$$\nabla_Y d\phi(grad \ln\lambda) = |grad \ln\lambda|^2 d\phi(Y) + d\phi(\nabla_Y grad \ln\lambda). \quad (10)$$

Remarque 0.0.1 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ *une application conforme de dilatation* λ*. Pour tous* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *et pour toute fonction* $f \in C^\infty(M)$*, on a*

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\phi(gradf), d\phi(Y)) = {} & \lambda^2 d\ln\lambda(gradf)\, g(X,Y) + \lambda^2 g(\nabla_X gradf, Y) \\ & + \lambda^2 X(\ln\lambda)\, Y(f) - \lambda^2 X(f)\, Y(\ln\lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

et

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\phi(grad \ln\lambda), d\phi(Y)) & = h(\nabla_Y d\phi(grad \ln\lambda), d\phi(X)) \\ & = \lambda^2 |grad \ln\lambda|^2 g(X,Y) + \lambda^2 g(\nabla_X grad \ln\lambda, Y). \end{aligned} \quad (12)$$

Grâce aux propriétés cités, le tenseur bi-énergie impulssion d'une application conforme et sa trace sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 0.0.1 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ *une application conforme de dilatation* λ*, alors*

$$S_2(\phi) = (2-n)\lambda^2 \left\{ \left(\frac{n-2}{2} |grad \ln\lambda|^2 + \Delta \ln\lambda \right) g - 2\nabla d\ln\lambda \right\} \quad (13)$$

et

$$Tr_g S_2(\phi) = -(n-2)^2 \lambda^2 \left(\frac{n}{2} |grad \ln\lambda|^2 + \Delta \ln\lambda \right). \quad (14)$$

Une condition nécessaire est suffisante pour que $Tr_g S_2(\phi) = 0$ est donnée par le corollaire suivant :

corollaire 0.0.1 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \neq 3)$ *une application conforme de dilatation* λ*, alors la trace du tenseur bi-énergie impulsion est nulle si et seulement si la fonction* $\lambda^{\frac{n}{2}}$ *est harmonique.*

La biharmonicité des applications conformes est caractérisée seulement en fonction de la dilatation. Avant de citer ce résultat, on a le théorème suivant

Théorème 0.0.2 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \neq 3)$ *une application conforme de dilatation* λ*, alors*

$$Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi \left(grad \ln \lambda\right) = d\phi \left(grad \Delta \ln \lambda\right) + 2d\phi \left(grad \left(\left|grad \ln \lambda\right|^2\right)\right) - \left(\Delta \ln \lambda\right) d\phi \left(grad \ln \lambda\right)$$
$$- (n-2) \left|grad \ln \lambda\right|^2 d\phi \left(grad \ln \lambda\right) + d\phi \left(Ricci \left(grad \ln \lambda\right)\right)$$

et

$$Tr_g R^N \left(d\phi \left(grad \ln \lambda\right), d\phi(\cdot)\right) d\phi(\cdot) = -\frac{n-2}{2} d\phi \left(grad \left(\left|grad \ln \lambda\right|^2\right)\right)$$
$$- \left(\Delta \ln \lambda\right) d\phi \left(grad \ln \lambda\right)$$
$$+ d\phi \left(Ricci \left(grad \ln \lambda\right)\right).$$

Le champ de bi-tension d'une application conforme est donné par le théorème suivant.

Théorème 0.0.3 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \neq 3)$ *une application conforme de dilatation* λ*, alors le champ de bi-tension de* ϕ *est donnée par la formule suivante*

$$\tau_2(\phi) = (n-2) d\phi(H),$$

oé[1]

$$H = grad \Delta \ln \lambda - \frac{n-6}{2} grad \left(\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) - 2 \left(\Delta \ln \lambda\right) grad \ln \lambda$$
$$- (n-2) \left|grad \ln \lambda\right|^2 grad \ln \lambda + 2Ricci^M \left(grad \ln \lambda\right).$$

Il suit que la biharmonicité de ϕ *est traduite par l'équation suivante*

$$grad \Delta \ln \lambda - \frac{n-6}{2} grad \left(\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) - 2 \left(\Delta \ln \lambda\right) grad \ln \lambda$$
$$- (n-2) \left|grad \ln \lambda\right|^2 grad \ln \lambda + 2Ricci^M \left(grad \ln \lambda\right) = 0.$$

Dans le deuxième chapitre, on présente une généralisation des applications biharmoniques, dite applications bi-f-harmoniques où $f \in C^\infty(M)$ est une fonction positive. Nous donnons quelques constructions d'applications bi-f-harmoniques. Dans un premier résultat, nous donnons la relation entre le champ de bi-f-tension et le champ de bi-tension et la relation entre le le tenseur bi-f-énergie et le tenseur bi-énergie et dans ce cas, nous construisons quelques exemples d'applications bi-f-harmoniques et nous étudions le cas de l'application identité. Comme deuxième résultat, nous caractérisons la bi-f-biharmonicité d'une application conforme $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de dilatation λ. On commence par le cas où la fonction f est égale à la dilatation λ et nous donnons quelques exemples d'applications bi-λ-harmoniques. On termine ce chapitre par l'étude du cas général, c'est à dire le cas où f est fonction positive quelconque. Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans une revue de classe B, indexée dans la base Scopus.

Revue : Italian Journal of Pure and Applied Mathematics.
Titre : Some results and examples of the bi-f-harmonic maps. N. 45â"2021, pp 163-181.
Auteurs : Smail Chemikh, Djilali Behloul et Seddik Ouakkas.
Soit $f \in C^{\infty}(M)$ une fonction positive, l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est dite f-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle f-énergie :

$$E_f(\phi) = \frac{1}{2}\int_M f|d\phi|^2 dv_g.$$

Cela est équivalent à dire que ϕ satisfait les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle f-énergie :

$$\tau_f(\phi) = f\tau(\phi) + d\phi(gradf) = f(\tau(\phi) + d\phi(grad\ln f)) = 0,$$

$\tau_f(\phi)$ est appelé le champ de f-tension de l'application ϕ. Pour les applications f-harmoniques, le tenseur impulsion f-énergie $S_f(\phi)$ de ϕ associé à fonctionnelle f-énergie $E_f(\phi)$ est défini par

$$S_f(\phi) = f(e(\phi)g - \phi^* h)$$

et la relation entre $S_f(\phi)$ et $\tau_f(\phi)$ est donnée par

$$divS_f(\phi) = -h(\tau_f(\phi), d\phi).$$

Une première généralisation des applications f-harmoniques est définie comme suit : l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est dite bi-f-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-f-énergie

$$E_{f,2}(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau_f(\phi)|^2 dv_g.$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle bi-f-énergie nous donnent l'équation de la bi-f-harmonicité de l'application ϕ :

$$\tau_{f,2}(\phi) = -Tr_g \nabla^{\phi} f \nabla^{\phi} \tau_f(\phi) - fTr_g R^N(\tau_f(\phi), d\phi) d\phi = 0, \tag{15}$$

$\tau_{f,2}(\phi)$ est appelé le champ de bi-f-tension de ϕ. Notons que

$$Tr_g \nabla^{\phi} f \nabla^{\phi} \tau_f(\phi) = f\left(Tr_g \left(\nabla^{\phi}\right)^2 \tau_f(\phi) + \nabla_{grad\ln f}\tau_f(\phi)\right),$$

alors

$$\tau_{f,2}(\phi) = f\left(-Tr_g \left(\nabla^{\phi}\right)^2 \tau_f(\phi) - Tr_g R^N(\tau_f(\phi), d\phi) d\phi - \nabla_{gard\ln f}\tau_f(\phi)\right), \tag{16}$$

et ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si

$$Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 \tau_f(\phi) + Tr_g R^N \left(\tau_f(\phi), d\phi\right) d\phi + \nabla_{grad \ln f} \tau_f(\phi) = 0.$$

En suivant le notion de Jiang, le tenseur impulsion bi-f-énergie $S_{f,2}(\phi)$ de ϕ est défini par

$$S_{f,2}(\phi) = \left(\frac{1}{2}\left|\tau_f(\phi)\right|^2 + f Tr_g h\left(\nabla \tau_f(\phi), d\phi\right)\right) g - 2f symh\left(\nabla \tau_f(\phi), d\phi\right),$$

où

$$Tr_g h\left(\nabla f \tau(\phi), d\phi\right) = h\left(\nabla^\phi_{e_i} f \tau(\phi), d\phi(e_i)\right)$$

(Nous sommons sur les indices répétés). le tenseur impulsion bi-f-énergie $S_{f,2}(\phi)$ satisfait la relation suivante :

$$div S_{f,2}(\phi) = h\left(\tau_{f,2}(\phi), d\phi\right) + \left(Tr_g h\left(\nabla \tau_f(\phi), d\phi\right)\right) df.$$

Comme premier résultatde ce deuxième chapitre, on considère une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes et une fonction positive $f \in C^\infty(M)$, la relation entre le champ de bi-f-tension et le champ de bi-tension field de ϕ est donnée par le résultat suivant.

Proposition 0.0.2 *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive. Alors*

$$\begin{aligned}
\tau_{f,2}(\phi) &= f^2 \tau_2(\phi) - 3f^2 \nabla^\phi_{grad \ln f} \tau(\phi) - f^2\left(\Delta \ln f + 2\left|grad \ln f\right|^2\right)\tau(\phi) \\
&\quad - f^2\left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad \ln f\right) + Tr_g R^N\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\right) d\phi\right) \\
&\quad - 3f^2 \nabla^\phi_{grad \ln f} d\phi\left(grad \ln f\right) - f^2\left(\Delta \ln f + 2\left|grad \ln f\right|^2\right) d\phi\left(grad \ln f\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

La condition de la f-biharmonicité est donnée par la remarques suivante.

Remarque 0.0.2 *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive. Alors ϕ est bi-f-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}
&\tau_2(\phi) - \left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad \ln f\right) + Tr_g R^N\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\right) d\phi\right) \\
&- 3\nabla^\phi_{grad \ln f} \tau(\phi) - \left(\Delta \ln f + 2\left|grad \ln f\right|^2\right)\tau(\phi) \\
&- 3\nabla^\phi_{grad \ln f} d\phi\left(grad \ln f\right) - \left(\Delta \ln f + 2\left|grad \ln f\right|^2\right) d\phi\left(grad \ln f\right) = 0.
\end{aligned}$$

Dans le cas où l'application ϕ est harmonique, nous obtenons le résultat suivant.

Remarque 0.0.3 *Soit* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *une application harmonique et soit* $f \in C^\infty(M)$ *une fonction positive. Alors* ϕ *est bi-*f*-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} &Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad \ln f\right) + Tr_g R^N \left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\right) d\phi \\ &+ 3\nabla^\phi_{grad \ln f} d\phi\left(grad \ln f\right) + \left(\Delta \ln f + 2\left|grad \ln f\right|^2\right) d\phi\left(grad \ln f\right) = 0. \end{aligned}$$

On applique cette dernière remarque pour construire quelques exemples d'application bi-f-harmoniques.

Exemple 0.0.1 *On considère la projection* $\phi : \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\phi\left(t, x_2, x_3, x_4\right) = \left(t, x_2, x_3\right).$$

On suppose que $\ln f = \alpha(t)$*, alors grâce à la remarque 2.2.2, la projection* ϕ *est bi-*f*-harmonique si et seulement si*

$$\alpha''' + 4\alpha'\alpha'' + 2\left(\alpha'\right)^3 = 0.$$

Soit $\beta = \alpha'$*, donc la dernière expression devient*

$$\beta'' + 4\beta\beta' + 2\beta^3 = 0.$$

On déduit des solutions particulières de la forme $\beta = \dfrac{a}{t}$ *où* $a \in \mathbb{R}^*$*. Nous obtenons* $a = 1$ *ce qui nous donne* $f(t) = Ct$ *avec* $C > 0$*. Dans ce cas la projection* ϕ *est bi-*f*-harmonique où* $f(t) = Ct$*.*

Exemple 0.0.2 *Soit* $\phi : (\mathbb{R}^{2n}, g_{\mathbb{R}^{2n}}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ *l'application de Hopf définie par*

$$\phi(x, y) = \left(|x|^2 - |y|^2, 2x\overline{y}\right) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{K},$$

où $n = 2, 4$ *ou* 8 *et* $x, y \in \mathbb{K} \simeq \mathbb{R}^n$ *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*,* $\mathbb{H}$ *(quaternions), ou* $\mathbb{O}$ *(octonions), respectivement. Ecrivons les points* $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ *sous la forme*

$$(x, y) = r\left(\cos\theta \cdot p, \sin\theta \cdot q\right), \left(r \in [0, +\infty), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], p, q \in S^{n-1}\right)$$

et ceux of $\mathbb{R}^{n+1}$ *sous la forme*

$$s\left(\cos t, \sin t \cdot w\right), \left(s \in [0, +\infty), \theta \in [0, \pi], w \in S^{n-1}\right).$$

L'application ϕ *prend la forme suivante :*

$$\phi\left(r\cos\theta \cdot p, r\sin\theta \cdot q\right) = \left(s\cos t, s\sin t \cdot p\overline{q}\right),$$

où $s=r^2$ et $t=2\theta$. Les métriques sur $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ ont repectivement les expressions :

$$g_{\mathbb{R}^{2n}} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\cos^2\theta \cdot g_{s^{n-1}} + r^2\sin^2\theta \cdot g_{s^{n-1}}$$

et

$$g_{\mathbb{R}^{n+1}} = ds^2 + s^2 dt^2 + s^2\sin^2 t \cdot g_{s^{n-1}}.$$

Une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$ est donnée par

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial r}, e_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, e_j = \frac{1}{r\cos\theta}\xi_j, e_k = \frac{1}{r\sin\theta}\xi_k,$$

où

$$\xi_j = r\left(\cos\theta \cdot X_j, 0\right), j = 3, ..., n+1$$

et

$$\xi_k = r\left(0, \sin\theta \cdot X_k\right), k = n+2, ..., 2n$$

où les vecteurs X_j and X_k sont des vecteurs tangents unitaires à la sphère S^{n-1}. On a

$$\nabla_{e_i} e_i = \frac{1-2n}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n-1}{r^2}\left(\tan\theta - \cot\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Supposons que la fonction f depend seulement de r et posons $\ln f = \alpha(r)$. Alors par la remarque 2.2.2, on déduit que l'application ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si la fonction $\beta = \alpha'$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$r\beta'' + 4r\beta\beta' + (2n+1)\beta' + \frac{2n-1}{r}\beta + (2n+2)\beta^2 + 2r\beta^3 = 0.$$

En chechant des solutions spéciales qui s'écrivent sous la forme $\beta = \frac{a}{r}$ où $a \in \mathbb{R}^*$, nous obtenons $a = -n+1$ ce qui donne $f(r) = \frac{C}{r^{n-1}}$, $(C>0)$ et dans ce cas, l'application de Hopf $\phi : (\mathbb{R}^{2n}, g_{\mathbb{R}^{2n}}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ ainsi définie est bi-f-harmonique avec $f(r) = \frac{C}{r^{n-1}}$.

Un autre cas particulier est de considérer l'application identité, on obtient :

corollaire 0.0.2 *L'application identité $Id_M : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est bi-f-harmonique si et seulement si la fonction f est une solution de l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} &grad\Delta\ln f + \frac{3}{2}grad\left(|grad\ln f|^2\right) + \left(\Delta\ln f + 2\,|grad\ln f|^2\right) grad\ln f \\ &+ 2Ricci\left(grad\ln f\right) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Dans ce qui suit, nous présenterons deux exemples d'applications bi-f-harmoniques.

Exemple 0.0.3 *Soit l'application identité* $Id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *où on suppose que* $\ln f$ *est radiale* $(\ln f = \alpha(r))$*. En utilisant la définition du Laplacien, un calcul direct nous donne*

$$grad\Delta \ln f = \left(\alpha''' + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha'\right)\frac{\partial}{\partial r},$$

$$grad\left(|grad \ln f|^2\right) = 2\alpha'\alpha''\frac{\partial}{\partial r}$$

et

$$\Delta \ln f = \alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha'.$$

Alors par le corollaire 3.5.1, on déduit que $Id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ *est bi-*f*-harmonique si et seulement si la fonction* $\beta = \alpha'$ *est solution de l'équation différentielle suivante :*

$$\beta'' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta + 4\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta^2 + 2\beta^3 = 0.$$

Regardons des solutions particulière de type $\beta = \dfrac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$*, donc* $Id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est bi-*f*-harmonique si et seulement si*

$$a = \frac{-n+5 \pm \sqrt{(n-1)(n+7)}}{4}.$$

Nous obtenons $f(r) = Cr^{\frac{-n+5 \pm \sqrt{(n-1)(n+7)}}{4}}$ $(C > 0)$ *et dans ce cas l'application identité* $Id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est bi-*f*-harmonique.*

Exemple 0.0.4 *On considère* $M = S^n$ *avec la paramétrisation*

$$x = (\cos s, \sin s \cdot y), \quad s \in [0, \pi], \quad y \in S^{n-1}.$$

Une base orthonormée de S^n *est donnée par*

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_i = (0, f_i), \quad i = 2, ..., n$$

où les vecteurs f_i *sont tangents à la sphère* S^{n-1}*. On suppose que* $\ln f = \alpha(s)$*. Un calcul direct donne*

$$grad \ln f = grad\alpha = \alpha'\frac{\partial}{\partial s},$$

$$|grad \ln f|^2 = |grad\alpha|^2 = (\alpha')^2,$$

$$grad\left(|grad \ln f|^2\right) = grad\left(|grad\alpha|^2\right) = 2\alpha'\alpha'',$$

$$\Delta \ln f = \Delta\alpha = \alpha'' + (n-1)(\cot s)\,\alpha',$$

$$grad\Delta \ln f = grad\Delta\alpha = \left(\alpha''' + (n-1)(\cot s)\,\alpha'' - (n-1)\left(1+\cot^2 s\right)\alpha'\right)\frac{\partial}{\partial s}$$

et

$$Ricci^{S^n}\left(grad \ln f\right) = Ricci^{S^n}\left(grad\alpha\right) = (n-1)\,\alpha'\frac{\partial}{\partial s}.$$

Alors grâce au Corollaire 3.5.1, on déduit que l'application Id_{S^n} est bi-f-harmonique si et seulement si la fonction $\beta = \alpha'$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\beta'' + (n-1)\cot s\beta' + 4\beta\beta' + (n-1)\left(1-\cot^2 s\right)\beta + (n-1)\cot s\beta^2 + 2\beta^3 = 0.$$

Par exemple, prenons $n = 1$, alors l'application Id_{S^1} est bi-f-harmonique si et seulement si

$$\beta'' + 4\beta\beta' + 2\beta^3 = 0.$$

On cherche des solutions particulières de type $\beta = \dfrac{a}{s}$, on obtient $a = 1$, ce qui nous donne $f(s) = ks$ $(k > 0)$. Donc l'application Id_{S^1} est bi-f-harmonique, où $f(s) = ks$ $(k > 0)$.

Dans une deuxième section de ce chapitre, nous allons étudier la cas où $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ est une application conforme de dilatation λ avec $n \geq 3$. On commence cette section par la remarque suivante.

Remarque 0.0.4 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ. Le champ de f-tension de ϕ est donné par*

$$\begin{aligned}\tau_f(\phi) &= f\left(\tau(\phi) + d\phi\left(grad \ln f\right)\right)\\ &= f\left((2-n)\,d\phi\left(grad \ln \lambda\right) + d\phi\left(grad \ln f\right)\right)\\ &= f d\phi\left(grad \ln f\lambda^{2-n}\right).\end{aligned}$$

En particulier si $f = \lambda$, Le champ de λ-tension de ϕ prend la forme

$$\tau_\lambda(\phi) = (3-n)\,\lambda d\phi\left(grad \ln \lambda\right).$$

On divise cette section en deux parties. La première partie concerne le cas où la fonction $f = \lambda$. Nous calculons le champ de bi-λ-tension pour une application conforme ϕ.

Théorème 0.0.4 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ avec $n \geq 3$. Le champ de bi-λ-tension de ϕ est donné par :*

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi\,(H(\lambda))$$

oú

$$\begin{aligned} H(\lambda) = {} & grad\Delta \ln \lambda - \frac{n-9}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) + 2Ricci^M\,(grad \ln \lambda) \\ & - \left((n-7)\,|grad \ln \lambda|^2 + \Delta \ln \lambda\right) grad \ln \lambda. \end{aligned} \tag{19}$$

Ce théorème nous donne un résultat de caractérisation

corollaire 0.0.3 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 4)$ une application conforme de dilatation λ, donc ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} & grad\Delta \ln \lambda - \frac{n-9}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) - (\Delta \ln \lambda)\, grad \ln \lambda \\ & - (n-7)\,|grad \ln \lambda|^2\, grad \ln \lambda + 2Ricci^M\,(grad \ln \lambda) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

En particulier, on prouve que la bi-λ-harmonicité de l'application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ où la dilatation λ est radiale $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ and $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ est équivalente à une équation différentielle du deuxième ordre. Nous avons

corollaire 0.0.4 *Let $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 4)$ to be a conformal map of dilation λ when we suppose that $\ln \lambda$ is radial $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ and $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Then ϕ is bi-λ-harmonic if and only if $\beta = \alpha'$ satisfies the following ordinary differential equation :*

$$\beta'' - (n-8)\,\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta - \frac{n-1}{r}\beta^2 - (n-7)\,\beta^3 = 0. \tag{21}$$

Comme conséquence du ce corollaire, nous présenterons quelques remarques qui nous permet de construire une application bi-λ-harmonique.

Remarque 0.0.5 . *Regardons des solutions particulière de type $\beta = \dfrac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$.On déduit que $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 4)$ est bi-λ-harmonique si et seulement si a est solution de l'équation algébrique suivante*

$$(n-7)\,a^2 + 7a + 2n - 4 = 0.$$

Cette équation admet des solutions réelles si et seulement si $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. *Si $n = 4$, on trouve $a = \dfrac{7+\sqrt{97}}{6}$ ou $a = \dfrac{7-\sqrt{97}}{6}$, donc $\lambda = Cr^{\frac{7+\sqrt{97}}{6}}$ ou $\lambda =$*

$Cr^{\frac{7-\sqrt{97}}{6}}$ $(C>0)$. *Alors, dans ce cas toute application conforme* $\phi:(\mathbb{R}^4,g)\to(N^4,h)$ *de dilatation* $\lambda=Cr^{\frac{7+\sqrt{97}}{6}}$ *ou* $\lambda=Cr^{\frac{7-\sqrt{97}}{6}}$ *est bi-λ-harmonique.*

2. *Si* $n=5$, *on trouve* $a=\frac{7+\sqrt{97}}{4}$ *ou* $a=\frac{7-\sqrt{97}}{4}$, *par suite* $\lambda=Cr^{\frac{7+\sqrt{97}}{4}}$ *ou* $\lambda=Cr^{\frac{7-\sqrt{97}}{4}}$ $(C>0)$. *Il suit que toute application conforme* $\phi:(\mathbb{R}^5,g)\to(N^5,h)$ *de dilatation* $\lambda=Cr^{\frac{7+\sqrt{97}}{4}}$ *ou* $\lambda=Cr^{\frac{7-\sqrt{97}}{4}}$ *est bi-λ-harmonique.*
3. *Le cas* $n=6$ *donne* $a=8$ *ou* $a=-1$, *donc* $\lambda=Cr^8$ *ou* $\lambda=Cr^{-1}$ $(C>0)$. *Dans ce cas chaque application conforme* $\phi:(\mathbb{R}^8,g)\to(N^8,h)$ *de dilatation* $\lambda=Cr^8$ *ou* $\lambda=Cr^{-1}$ *est bi-λ-harmonique.*
4. *Si* $n=7$, $a=\frac{-10}{7}$, *donc* $\lambda=Cr^{\frac{-10}{7}}$ $(C>0)$. *Alors, toute application conforme* $\phi:(\mathbb{R}^7,g)\to(N^7,h)$ *de dilation* $\lambda=Cr^{\frac{-10}{7}}$ *est bi-λ-harmonique.*
5. *Si* $n=8$, *on trouve* $a=-3$ *ou* $a=-4$, *d'où* $\lambda=Cr^{-3}$ *ou* $\lambda=Cr^{-4}$ $(C>0)$. *Ce qui implique que toute application conforme* $\phi:(\mathbb{R}^8,g)\to(N^8,h)$ *de dilatation* $\lambda=Cr^{-3}$ *ou* $\lambda=Cr^{-4}$ *est bi-λ-harmonique.*

Comme second résultat de cette première partie, on calcule le tenseur bi-λ-énergie associé à une application conforme ϕ et on montre que $S_2(\phi)$ dépend seulement de la dilatation.

Théorème 0.0.5 *Soit* $\phi:(M^n,g)\to(N^n,h)$ *une application conforme de dilatation* λ, *on a*

$$\begin{aligned} S_{\lambda,2}(\phi) &= (3-n)\,\lambda^4\left(\frac{n+1}{2}\,|grad\ln\lambda|^2+\Delta\ln\lambda\right)g \\ &\quad -2\,(3-n)\,\lambda^4\left(\nabla d\ln\lambda+(d\ln\lambda\otimes d\ln\lambda)\right), \end{aligned} \tag{22}$$

et la trace de $S_2(\phi)$ *est donnée par*

$$Tr_g S_{\lambda,2}(\phi)=(3-n)\,\lambda^4\left(\frac{n^2+n-4}{2}\,|grad\ln\lambda|^2+(n-2)\,\Delta\ln\lambda\right). \tag{23}$$

En calculant le Laplacien de la fonction $\lambda^{\frac{n^2+n-4}{2(n-2)}}$ $((n\geq 4))$, nous obtenons le corollaire suivant :

corollaire 0.0.5 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 4)$ *une application conforme de dilatation* λ, *alors* $Tr_g S_{\lambda,2}(\phi)$ *est nulle si et seulement si la fonction* $\lambda^{\frac{n^2+n-4}{2(n-2)}}$ *est harmonique.*

Une autre conséquence est donnée dans la remarque suivante :

Remarque 0.0.6 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 4)$ *une application conforme de dilatation* λ, *nous avons*

$$divS_{\lambda,2}(\phi) = h(\tau_{\lambda,2}(\phi), d\phi) + (Tr_g h(\nabla\tau_\lambda(\phi), d\phi))\, d\lambda$$

et

$$Tr_g h(\nabla\tau_\lambda(\phi), d\phi) = (3-n)\lambda^3\left(\Delta\ln\lambda + (n+1)|grad\ln\lambda|^2\right).$$

Si on suppose que l'application conforme ϕ *est bi-*λ*-harmonique, alors* $divS_{\lambda,2}(\phi)$ *est nulle si et seulement la fonction* λ^{n+1} *est harmonique.*

A la fin de ce deuxième chapitre, on traite la cas général et on commence par le calcul du champ de bi-f-tension.

Théorème 0.0.6 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ *une applicatoin conforme de dilatation* λ, *alors le champ de bi-*f*-tension de* ϕ *est donné par :*

$$\tau_{f,2}(\phi) = f^2 d\phi(H(\lambda, f))$$

oé[1]

$$\begin{aligned}
H(\lambda, f) = {} & (n-2)\, grad\Delta\ln\lambda - \frac{(n-2)(n-6)}{2} grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right) \\
& - (n-2)\left(2(\Delta\ln\lambda) + (n-2)|grad\ln\lambda|^2\right) grad\ln\lambda \\
& + 2(n-2)\, Ricci^M(grad\ln\lambda) + \left(n(\Delta\ln f) + (2n-1)|grad\ln f|^2\right) grad\ln\lambda \\
& - grad\Delta\ln f - 4\nabla_{grad\ln\lambda} grad\ln f + 4(n-2)|grad\ln\lambda|^2 grad\ln f \\
& - \left(\Delta\ln f + 2|grad\ln f|^2\right) grad\ln f + 4(n-2)\nabla_{gard\ln f} grad\ln\lambda \\
& - 6d\ln\lambda(grad\ln f)\, grad\ln f - \frac{3}{2} grad\left(|grad\ln f|^2\right) - 2Ricci^M(grad\ln f)
\end{aligned} \tag{24}$$

Une conséquence de caractérisation de la bi-f-harmonicité est donnée par la propriété suivante.

Remarque 0.0.7 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ *une application conforme de* *dilatation λ, alors ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}
&(n-2)\, grad\Delta \ln\lambda - \frac{(n-2)(n-6)}{2} grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right) \\
&-(n-2)\left(2(\Delta\ln\lambda)+(n-2)|grad\ln\lambda|^2\right) grad\ln\lambda \\
&+2(n-2)\, Ricci^M(grad\ln\lambda)+\left(n(\Delta\ln f)+(2n-1)|grad\ln f|^2\right) grad\ln\lambda \\
&-grad\Delta\ln f-4\nabla_{grad\ln\lambda} grad\ln f+4(n-2)|grad\ln\lambda|^2 grad\ln f \\
&-\left(\Delta\ln f+2|grad\ln f|^2\right) grad\ln f+4(n-2)\nabla_{gard\ln f} grad\ln\lambda \\
&-6d\ln\lambda(grad\ln f)\, grad\ln f-\frac{3}{2} grad\left(|grad\ln f|^2\right)-2Ricci^M(grad\ln f)=0.
\end{aligned} \tag{25}$$

En particulier, si l'application ϕ est biharmonique, nous obtenons le résultat suivant.

corollaire 0.0.6 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ supposée biharmonique. Alors ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}
&grad\Delta\ln f+4\nabla_{grad\ln\lambda} grad\ln f-4(n-2)\nabla_{grad\ln f} grad\ln\lambda \\
&+\left(\Delta\ln f+2|grad\ln f|^2-4(n-2)|grad\ln\lambda|^2+6d\ln\lambda(grad\ln f)\right) grad\ln f \\
&-\left(n\Delta\ln f+(2n-1)|grad\ln f|^2\right) grad\ln\lambda+\frac{3}{2} grad\left(|grad\ln f|^2\right)+2Ricci^M(grad\ln f)=0.
\end{aligned}$$

Grâce à ces résultats, nous construisons un exemple d'une application bi-f-harmonique.

Exemple 0.0.5 *Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ l'inversion définie par*

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

On sait que ϕ est une application conforme biharmonique de dilatation

$$\lambda = \frac{1}{r^2}, \quad r = |x|.$$

Nous supposons que $\ln f$ est radiale ($\ln f = \alpha(r)$). En appliquant le résultat du corollaire 2.3.4, on déduit que l'inversion $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est bi-f-harmonique si et seulement si la fonction α satisfait l'équation différentielle suivante

$$\alpha''' + \frac{3}{r}\alpha'' - \frac{27}{r^2}\alpha' + 4\alpha'\alpha'' + \frac{5}{r}(\alpha')^2 + 2(\alpha')^3 = 0.$$

Posons $\beta = \alpha'$, cette dernière équation devient

$$\beta'' + \frac{3}{r}\beta' - \frac{27}{r^2}\beta + 4\beta\beta' + \frac{5}{r}\beta^2 + 2\beta^3 = 0.$$

Si on regarde les solutions de type $\beta = \dfrac{a}{r}$ *(*$a \in \mathbb{R}^*$*), on déduit que* $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ *est bi-*f*-harmonique si et seulement si*

$$2a^2 + a - 28 = 0.$$

Cette équation algébrique possède deux solutions $a = -4$ *et* $a = \dfrac{7}{2}$.

1. *Pour* $a = -4$*, on obtient* $f(r) = Cr^{-4}$ *et dans ce que l'inversion* $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ *est* f*-harmonic donc bi-*f*-harmonic.*
2. *Pour* $a = \dfrac{7}{2}$*, on obtient* $f(r) = Cr^{\frac{7}{2}}$ *; il suit que l'inversion* $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ *est bi-*f*-harmonique (non* f*-harmonique).*

Enfin on donne le calcul du tenseur bi-f-énergie pour une application conforme ϕ et on prouve que $S_{f,2}(\phi)$ dépend seulement de la dilatation et la fonction f.

Théorème 0.0.7 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ *une application conforme de dilatation* λ*, nous avons*

$$\begin{aligned} S_{f,2}(\phi) = {} & f^2\lambda^2 \left(-\frac{(n-2)^2}{2} |grad \ln \lambda|^2 + \frac{3}{2} |grad \ln f|^2 \right) g \\ & + f^2\lambda^2 \left((2-n)\, d\ln\lambda\, (grad \ln f) + (2-n)\Delta \ln \lambda + \Delta \ln f \right) g \\ & + f^2\lambda^2 \left(2(n-2)\, sym\, (d\ln\lambda \odot d\ln f) - 2 (d\ln f)^2 \right) \\ & - 2f^2\lambda^2 \left((2-n)\nabla d\ln\lambda + \nabla d\ln f \right) \end{aligned} \tag{26}$$

et la trace de $S_{f,2}(\phi)$ *est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} Tr_g S_{f,2}(\phi) = {} & -(n-2)^2 f^2\lambda^2 \left(\Delta \ln \lambda + \frac{n}{2} |grad \ln \lambda|^2 \right) \\ & + (n-2) f^2\lambda^2 \left(3d\ln\lambda\, (grad \ln f) + \Delta \ln f \right) \\ & + \frac{3n-4}{2} f^2\lambda^2 |grad \ln f|^2 . \end{aligned} \tag{27}$$

Si on suppose que l'application ϕ est bi-f-harmonique, alors $div S_{f,2}(\phi)$ est nulle si et seulement si les fonctions λ et f vérifient l'équation suivante

$$(2-n)\Delta \ln \lambda + \Delta \ln f + (2-n)\, n\, |grad \ln \lambda|^2 + 3d\ln\lambda\, (grad \ln f) = 0.$$

Dans le troisième chapitre de cette thèse, on s'intéresse à la construction des applications harmoniques et biharmoniques relativement aux déformations $\mathcal{D}$-isométriques dans les variétés presque de contact. On considère $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact. Une déformation $\mathcal{D}$-isométrique est définie de la manière suivante

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = \alpha\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \qquad \overline{g} = \beta g + \left(\alpha^2 - \beta\right) \eta \otimes \eta,$$

où α est une fonction positive sur M ; Notons que $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ est aussi une variété presque de contact. Notons par ∇ et $\overline{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita sur $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ et $\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ respectivement. Comme premier résulat, on obtient

Proposition 0.0.3 *Soit $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété métrique presque de contact et soit $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-isométrique de $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$. Alors, on a*

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y,Z\right) &= g\left(\nabla_X Y,Z\right)+\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\alpha\right)-\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\alpha\right)\\ &+\alpha\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\alpha\right)+\left(\alpha^2-1\right)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_X Y\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\alpha^2-1\right)\eta\left(X\right)\left\{g\left(\nabla_Y\xi,Z\right)-g\left(\nabla_Z\xi,Y\right)\right\}\\ &+\frac{1}{2}\left(\alpha^2-1\right)\eta\left(Y\right)\left\{g\left(\nabla_X\xi,Z\right)-g\left(\nabla_Z\xi,X\right)\right\}\\ &+\frac{1}{2}\left(\alpha^2-1\right)\eta\left(Z\right)\left\{g\left(\nabla_X\xi,Y\right)+g\left(\nabla_Y\xi,X\right)\right\}.\end{aligned}$$

En appliquant cette proposition, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 0.0.8 *Pour tous $X,Y\in\Gamma\left(TM\right)$, la relation entre $\overline{\nabla}_X Y$ et $\nabla_X Y$ est donnée par*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y-\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)grad\alpha+\frac{\alpha^2-1}{2}\left\{\eta\left(X\right)\nabla_Y\xi+\eta\left(Y\right)\nabla_X\xi\right\}\\ &-\frac{\alpha^2-1}{2}\left\{\eta\left(X\right)Tr_g\left\{g\left(\nabla_.\xi,Y\right)\cdot\right\}+\eta\left(Y\right)Tr_g\left\{g\left(\nabla_.\xi,X\right)\cdot\right\}\right\}\\ &+\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\alpha\right)\xi+\frac{1}{\alpha}\eta\left(X\right)Y\left(\alpha\right)\xi+\frac{1}{\alpha}\eta\left(Y\right)X\left(\alpha\right)\xi \qquad (28)\\ &+\frac{\left(\alpha^2-1\right)^2}{2\alpha^2}\left\{\eta\left(X\right)g\left(\nabla_\xi\xi,Y\right)+\eta\left(Y\right)g\left(\nabla_\xi\xi,X\right)\right\}\xi\\ &+\frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}\left\{g\left(\nabla_X\xi,Y\right)\xi+g\left(\nabla_Y\xi,X\right)\xi\right\},\end{aligned}$$

où

$$Tr_g g\left(X,\nabla_.\xi\right)\cdot = g\left(X,\nabla_{e_i}\xi\right)e_i+g\left(X,\nabla_{\varphi e_i}\xi\right)\varphi e_i+g\left(X,\nabla_\xi\xi\right)\xi.$$

De ce théorème, si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu, on obtient le corollaire suivant.

corollaire 0.0.7 *Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu, alors la relation entre* $\overline{\nabla}_X Y$ *et* $\nabla_X Y$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \alpha\eta(X)\eta(Y)\,grad\alpha \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\eta(X)\eta(Y)\xi(\alpha)\xi \\ &+ \frac{1}{\alpha}\{\eta(X)Y(\alpha)+\eta(Y)X(\alpha)\}\xi \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\{g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\}\xi.\end{aligned}$$

On commence par la biharmonicité de l'application identité

$$Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g\right)$$

.

Proposition 0.0.4 *Soient* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *et* $(N^{2n+1}, \varphi_N, \xi_N, \eta_N, h)$ *deux varétés métriques presque de contact et soit* $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *une déformation* $\mathcal{D}$*-isométrique de* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$*. Notons par* $\tau(\phi)$ *le champ de tension de l'application lisse* $\phi : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow (N^{2n+1}, \varphi_N, \xi_N, \eta_N, h)$ *et par* $\overline{\tau}(\phi)$ *le champ de tension de* $\phi : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (N^{2n+1}, \varphi_N, \xi_N, \eta_N, h)$*. alors, la relation entre* $\overline{\tau}(\phi)$ *et* $\tau(\phi)$ *est donnépar*

$$\begin{aligned}\overline{\tau}(\phi) = \tau(\phi) &+ \frac{1}{\alpha}d\phi(grad\alpha) - \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\,d\phi(\xi) \\ &- \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}(div\xi)\,d\phi(\xi) - \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\nabla_\xi d\phi(\xi).\end{aligned}$$

En particulier, Si on considère l'application identité

$$Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g\right)$$

, on obtient

$$\overline{\tau}(Id) = \frac{1}{\alpha}grad\alpha - \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi - \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\{(div\xi)\xi + \nabla_\xi\xi\}.$$

Remarque 0.0.8 *Si* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une varété de Kenmotsu, les résultats obtenues dans cette proposition deviennent*

$$\overline{\tau}(\phi) = \tau(\phi) + \frac{1}{\alpha}d\phi(grad\alpha) - \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\,d\phi(\xi) - \frac{2m(\alpha^2-1)}{\alpha^2}d\phi(\xi) - \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\nabla_\xi d\phi(\xi)$$

et

$$\overline{\tau}(Id) = \frac{1}{\alpha}grad\alpha - \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi - \frac{2m(\alpha^2-1)}{\alpha^2}\xi$$

Théorème 0.0.9 *Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une varété de Kenmotsu et soit* $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *une déformation* $\mathcal{D}$*-isométrique de* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *où nous supposons que la fonction* α *dépend seulement sur la direction de* ξ*. Alors l'application identité* $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est harmonique si et seulement si*

$$\xi(\alpha) + 2m\alpha\left(\alpha^2 - 1\right) = 0$$

et elle est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}&\alpha^2\xi(\xi(\xi(\alpha))) - 10\alpha\xi(\xi(\alpha))\xi(\alpha) + 6m\alpha^2\xi(\xi(\alpha)) + 15(\xi(\alpha))^3\\ &- 22m\alpha(\xi(\alpha))^2 + 8m^2\alpha^2\xi(\alpha) - 4m\alpha^4\xi(\alpha) - 8m^2\alpha^5\left(\alpha^2 - 1\right) = 0.\end{aligned}$$

Pour étudier la biharmonicité de $Id : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$, nous utiliserons les lemmes suivants.

Lemma 0.0.1 *Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu et soit* $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *une déformation* $\mathcal{D}$*-isométrique de* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *où nous supposons que la fonction* α *dépend uniquement de la direction de* ξ*. Soit* f *une fonction qui dépend uniquement de la direction de* ξ*, alors on a*

$$Tr_{\overline{g}}\nabla^2 f\xi = \frac{1}{\alpha^2}\xi(\xi(f))\xi - \frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi(f)\xi + 2\left(\frac{m}{\alpha^2}\xi(f) - mf\right)\xi.$$

Lemma 0.0.2 *Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu et soit* $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *une déformation* $\mathcal{D}$*-isométrique de* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *où nous supposons que la fonction* α *dépend uniquement de la direction de* ξ*. Soit* f *une fonction qui dépend uniquement de la direction de* ξ*, alors on a*

$$Tr_{\overline{g}}\nabla^2 f\xi = \frac{1}{\alpha^2}\xi(\xi(f))\xi - \frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi(f)\xi + 2\left(\frac{m}{\alpha^2}\xi(f) - mf\right)\xi.$$

On termine ce chapitre par le théorème suivant

Théorème 0.0.10 *Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu et soit* $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *une déformation* $\mathcal{D}$*-isométrique de* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *où nous supposons que la fonction* α *dépend uniquement de la direction de* ξ*. Alors l'application identité* $Id : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ *est harmonique si et seulement si*

$$\alpha\xi(\alpha) + 2m\left(\alpha^2 - 1\right) = 0$$

et elle est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}&\alpha^2\xi(\xi(\xi(\alpha))) - 10\alpha\xi(\xi(\alpha))\xi(\alpha) + 6m\alpha^2\xi(\xi(\alpha)) + 15(\xi(\alpha))^3\\ &- 22m\alpha(\xi(\alpha))^2 + 8m^2\alpha^2\xi(\alpha) - 4m\alpha^4\xi(\alpha) - 8m^2\alpha^5\left(\alpha^2 - 1\right) = 0.\end{aligned}$$

A la fin de cette thèse, on présente une autre généralisation, dite applications f-biharmoniques.

Une application ϕ est dite f-biharmonique isi elle est un point critique de la fonctionnelle f-bi-énergie :

$$E_{2,f}(\phi) = \frac{1}{2}\int_M f|\tau(\phi)|^2 dv_g.$$

De manière équivalente, ϕ est f-biharmonique si elle satisfait les équations d'Euler-Lagrange associées :

$$\tau_{2,f}(\phi) = f\tau_2(\phi) - (\Delta f)\,\tau(\phi) - 2\nabla_{gradf}\tau(\phi) = 0, \tag{29}$$

$\tau_{2,f}(\phi)$ est appelé le champ de f-bi-tension de ϕ. Contrairement au fait que toute application harmonique est biharmonique, une application f-harmonique n'est pas nécessairement f-biharmonique. Un simple calcul donne $\Delta f = f\Delta\ln f + f\,|grad\ln f|^2$ et $gradf = f grad\ln f$. Alors

$$\tau_{2,f}\left(\phi\right) = f\left\{\tau_2\left(\phi\right) - \left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right)\tau\left(\phi\right) - 2\nabla_{grad\ln f}\tau\left(\phi\right)\right\}.$$

nous déduisons que ϕ est f-biharmonique si et seulement si

$$\tau_2\left(\phi\right) - \left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right)\tau\left(\phi\right) - 2\nabla_{grad\ln f}\tau\left(\phi\right) = 0.$$

Il est clair que toute application harmonique est f-biharmonique. Si l'application ϕ est biharmonique ($\tau_2(\phi) = 0$), alors ϕ est f-biharmonique si et seulement si

$$\left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right)\tau\left(\phi\right) + 2\nabla_{grad\ln f}\tau\left(\phi\right) = 0.$$

La f-biharmonicité d'une application conforme est donnée par le théoreme suivant.

Théorème 0.0.11 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation λ, alors ϕ est f-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} &grad\Delta\ln\lambda - \frac{(n-6)}{2}grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right) + 2\nabla_{grad\ln f}grad\ln\lambda \\ &-\left(2\left(\Delta\ln\lambda\right) + (n-2)\,|grad\ln\lambda|^2 - \Delta\ln f - |grad\ln f|^2\right)grad\ln\lambda \\ &+ 2\,|grad\ln\lambda|^2\,grad\ln f + 2Ricci^M\left(grad\ln\lambda\right) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Exemple 0.0.6 *Soit $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(n \geq 3)$ l'inversion definée par $\phi\left(x\right) = \frac{x}{|x|^2}$. ϕ est une application conforme avec dilation $\lambda = \frac{1}{r^2}\left(r = |x|\right)$. Supposons que $\ln f$ est radiale $(\ln f = \alpha\left(r\right))$. Alors par Théorème 3.5.2, nous en déduisons que l'application $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est f-biharmonique si et seulement si la fonction α satisfait l'équation différentielle suivante*

$$\frac{1}{r}\alpha'' + \frac{(n-7)}{r^2}\alpha' + \frac{1}{r}\left(\alpha'\right)^2 - \frac{4\left(n-4\right)}{r^3} = 0.$$

Soit $\beta = \alpha'$, *cette équation devient*

$$\frac{1}{r}\beta' + \frac{(n-7)}{r^2}\beta + \frac{1}{r}\beta^2 - \frac{4(n-4)}{r^3} = 0.$$

Cherchons des solutions particulières de type $\beta = \frac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, *alors* $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est* f*-biharmonique si et seulement si*

$$a^2 + (n-8)\,a - 4\,(n-4) = 0.$$

Cette équation a deux solutions $a = 4$ *et* $a = 4 - n$.

1. *Pour* $a = 4$, *nous obtenons* $f(r) = Cr^4$ *et dans ce cas l'inversion* $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est* f*-biharmonique.*
2. *Pour* $a = 4-n$, *nous obtenons* $f(r) = Cr^{4-n}$ *; il suit que l'inversion* $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est* f*-biharmonique.*

Comme conséquence, si nous supposons que $f = \lambda$, nous obtenons le corollaire suivant.

corollaire 0.0.8 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ *une application conforme de dilation* λ, *alors* ϕ *est* λ*-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} & grad\Delta \ln\lambda - \left(\Delta \ln\lambda + (n-5)\,|grad \ln\lambda|^2\right) grad \ln\lambda \\ & - \frac{(n-8)}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) + 2Ricci^M\,(grad \ln\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Chapitre 1

Généralités

Sommaire

1.1 Notions générales de la géométrie riemannienne.

Définition 1.1.1 *Soit M une variété différentiable, l'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté* $\Gamma(TM)$. *Une métrique sur M est une forme*

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

$C^{\infty}(M)$-*bilinéaire, symétrique et définie positive. Le couple (M, g) est appelé variété riemannienne.*

Définition 1.1.2 *Soit M une variété différentiable, une connexion linéaire sur M est une application*

$$\begin{array}{cccc} \nabla & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
2. $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f) Y$.
3. $\nabla_{X+fY} Z = \nabla_X Y + f\nabla_Y Z$.

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et pour toute fonction $f \in C^{\infty}(M)$. Pour une telle connexion ∇, on définit un champ de tenseurs T de type $(1, 2)$ dit le tenseur de torsion associé é ∇ par

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. La connexion linéaire ∇ est dite sans torsion si le champ de tenseurs T est identiquement nul, c'est é dire : pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Notons que T est un champ de tenseurs antisymétrique.

Si on considère (M, g) une variété riemannienne, on a le résultat suivant

Théorème 1.1.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne. L'application*

$$\begin{array}{llll} \nabla & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

définie par l'équation suivante

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Z)) \\ &\quad + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned} \tag{1.1}$$

est une connexion linéaire sur M, dite connexion de Lévi-Civita. L'équation (3.15) est appelée la formule de Koszul.

Pour cette connexion, on a le résultat suivant, dit théorème fondamental de la géométrie riemannienne.

Théorème 1.1.2 *Soit (M, g) une variété riemannienne. La connexion de Levi-Civita est lâ2122unique connexion linéaire ∇ sur M sans torsion et compatible avec la métrique g. La compatibiltéavec la métrique g est traduite par la formule suivante*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. La connexion de Levi-Civita sur (M, g) est complé¨tement déterminée par la formule de Koszul.

Remarque 1.1.1 *Soit M une variété différentiable, une connexion linéaire ∇ sur M est complètement définie par les sympboles de Christoffel Γ_{ij}^k donnés par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

De plus, si $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, alors

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dans le cas d'une variété riemannienne munie de la connexion de Lévi-Civita, on a la remarque suivante

Remarque 1.1.2 *Soit (M^m, g) une variété riemannienne de dimension m et soit ∇ la connexion de Levi-Civita. Localement, les sympboles de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par la* *formule suivante :*

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}}\right).$$

Définition 1.1.3 *Soit M une variété différentiable munie d'une connexion linéaire ∇. Le tenseur de courbure R associé é la connexion ∇ est défini par*

$$\begin{array}{llcl} R & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X, Y, Z) & \longmapsto & R(X, Y) Z, \end{array}$$

oú

$$R(X, Y) Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Remarque 1.1.3 *Sur une variété riemannienne (M^m, g) de dimension m, le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure riemannienne. Localement, on a*

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}, \frac{\partial}{\partial x^{j}}\right)\frac{\partial}{\partial x^{k}} = \sum_{l=1}^{m} R_{ijk}^{l} \frac{\partial}{\partial x^{l}},$$

où

$$R_{ijk}^{l} = \frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\Gamma_{jk}^{l}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{j}}\left(\Gamma_{ik}^{l}\right) + \sum_{p=1}^{m}\left(\Gamma_{ip}^{l}\Gamma_{jk}^{p} - \Gamma_{jp}^{l}\Gamma_{ik}^{p}\right).$$

Comme propriétés, on a

1. *R est un champ de tenseurs de type $(1, 3)$.*
2. *$g(R(X, Y) Z, W) = g(R(X, Y) W, Z)$.*
3. *$g(R(X, Y) Z, W) = -g(R(Z, W) X, Y)$.*
4. *R vérifie l'indentité algébrique de Bianchi*

$$R(X, Y) Z + R(Y, Z) X + R(Z, X) Y = 0.$$

5. *R vérifie l'indentité différentielle de Bianchi*

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0.$$

pour tous $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.1.4 *Soit (M^m, g) de dimension m, la courbure de Ricci est un champ de tenseur de type $(0,2)$ défini pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ par*

$$Ric(X,Y) = Tr_g R(\cdot, X)Y = \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, X)Y, e_i),$$

oé[1] $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur M. Notons que La courbure de Ricci est forme bilinéaire symétrique. De même, le tenseur de Ricci est un champ de tenseurs de type $(1,1)$ défini pour tous $X \in \Gamma(TM)$ par

$$Ricci(X) = Tr_g R(X, \cdot)\cdot = \sum_{i=1}^{m} R(X, e_i)e_i.$$

Sur la variété riemannienne (M^m, g), la courbure de Ricci et le tenseur de Ricci sont liés par la relation suivante :

$$Ric(X,Y) = g(Ricci(X), Y).$$

1.2 Applications harmoniques.

Dans cette section, on considère (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes munies de leurs connexions de Lévi-Civita et soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞. On définit le fibré inverse (fibré pull-back) qu'on note $\phi^{-1}TN$ par

$$\begin{aligned} \phi^{-1}TN &= \left\{(x,v) \in M \times T_{\phi(x)}N\right\} \\ &= \underset{x\in M}{\cup} \{x\} \times T_{\phi(x)}N. \end{aligned}$$

L'ensemble des sections sur le fibré inverse est noté par $\Gamma(\phi^{-1}TN)$, cet ensemble est définie de la manière suivante :

$$\Gamma\left(\phi^{-1}TN\right) = \left\{V : M \longrightarrow TN, V_x \in T_{\phi(x)}N, \forall x \in M\right\},$$

ou encore

$$V \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right) \Longleftrightarrow V_x \in T_{\phi(x)}N, \forall x \in M.$$

Comme exemples, on a

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad d\phi(X) \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$$

et

$$\forall Y \in \Gamma(T\ N), \quad Y \circ \phi \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right).$$

Définition 1.2.1 *Sur le fibré inverse* $\Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$*, on définit la connexion suivante, noté* ∇^{ϕ} *par :*

$$\begin{array}{llll} \nabla^{\phi} & \Gamma(TM)\times\Gamma\left(\phi^{-1}TN\right) & \longrightarrow & \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right) \\ & (X,V) & \longmapsto & \nabla^{\phi}_{X}V \end{array}$$

avec

$$\nabla^{\phi}_{X}(H\circ\phi)=\left(\nabla^{N}_{d\phi(X)}H\right)\circ\phi,$$

pour tout $X\in\Gamma(TM)$ *et pour tout* $H\in\Gamma(T\ N)$*. Comme propriété, on a*

$$\nabla^{\phi}_{X}d\phi(Y)=\nabla^{\phi}_{Y}d\phi(X)+d\phi([X,Y]),$$

pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$*. Localement, on a*

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\left(\frac{\partial^2\phi^{\gamma}}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^{\beta}}{\partial x^j}\left({}^{N}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\phi\right)\right)\frac{\partial}{\partial y^{\gamma}}\circ\phi.$$

Définition 1.2.2 *En utilisant* ∇^{ϕ}*, on définit la deuxié¨me forme fondamentale de l'application* $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$*, noté* $\nabla d\phi$*, par*

$$\begin{array}{llll} \nabla d\phi & \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla d\phi(X,Y) \end{array}$$

oé[1]

$$\nabla d\phi(X,Y)=\nabla^{\phi}_{X}d\phi(Y)-d\phi\left(\nabla^{M}_{X}Y\right).$$

la seconde forme fondamentale $\nabla d\phi$ *de lâ2122application* ϕ *est une forme* $C^{\infty}(M)$*-bilinéaire symétrique. L'application* ϕ *est dite totalement géodésique si sa deuxié¨me forme fondamentale est identiquement nulle.*

Définition 1.2.3 *Le champ de tension de l'application* $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$*, noté* $\tau(\phi)$ *, est défini par*

$$\tau(\phi)=Tr_g\nabla d\phi=\nabla d\phi(e_i,e_i)=\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi(e_i)-d\phi\left(\nabla^{M}_{e_i}e_i\right),$$

oé[1] $(e_i)_{i=1}^{m}$ *est base orthonormée sur la variété* (M^m,g)*. Localement, on a*

$$\tau(\phi)=g^{ij}\left(\frac{\partial^2\phi^{\gamma}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial\phi^{\gamma}}{\partial x^k}{}^{M}\Gamma^{k}_{ij}+\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^{\beta}}{\partial x^j}\left({}^{N}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\phi\right)\right)\frac{\partial}{\partial y^{\gamma}}\circ\phi$$

Remarque 1.2.1 *Si on considère deux applications différentiables* $\phi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ *et* $\psi:(N^n,h)\longrightarrow(P^p,k)$*, on a la propriété suivante :*

$$\nabla d(\psi\circ\phi)=d\psi(\nabla d\phi)+(\nabla d\psi)(d\phi,d\phi),$$

et en passant à la trace dans cette dernière équation, il suit que

$$\tau(\psi\circ\phi)=d\psi(\tau(\phi))+Tr_g(\nabla d\psi)(d\phi,d\phi$$

Définition 1.2.4 *La densité de l'application* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *est l'application*

$$e(\phi) : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie par

$$e(\phi) = \frac{1}{2} |d\phi|^2 ,$$

avec $|d\phi|^2$ *est la norme de Hilbert-Schmidt de la differentielle* $d\phi$ *donnée par la formule suivante*

$$|d\phi|^2 = Tr_g \phi^* h = \sum_{i=1}^{m} h(d\phi(e_i), d\phi(e_i)),$$

oé[1] $(e_i)_{i=1}^m$ *est base orthonormée sur la variété* (M^m, g)*. Localement, on a*

$$|d\phi|^2 = g^{ij} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} (h_{\alpha\beta} \circ \phi) .$$

Définition 1.2.5 *L'énergie* $E(\phi)$ *de l'application* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *est la fonctionnelle défine par*

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_D |d\phi|^2 dv_g,$$

oé[1] D *est un domaine compact de* M*. On dit que* ϕ *est harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie* $E(\phi)$*, c'est é dire si*

$$\left.\frac{d}{dt} E(\phi_t)\right|_{t=0} = 0,$$

pour tout variation ϕ_t *é support inclu dans* D*. En appliquant les équations d'Euler-Lagrange é la fonctionnelle énergie, on obtient la premié¨re variation de* $E(\phi)$ *donnée par*

$$\left.\frac{d}{dt} E(\phi_t)\right|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\phi)) \, dv_g,$$

oé[1] $v = \left.\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x)\right|_{t=0}$ *et* $\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi$ *est le champ de tension de l'application* ϕ*. On déduit que* ϕ *est harmonique si et seulement son champ de tension est identiquement nul, d'oé*[1] *l'harmonicité de* ϕ *est traduite par l'équation suivante :*

$$\tau(\phi) = 0. \tag{1.2}$$

Remarque 1.2.2 *Si on considère deux applications différentiables* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *et* $\psi : (N^n, h) \longrightarrow (P^p, k)$*, l'équation*

$$\tau(\psi \circ \phi) = d\psi(\tau(\phi)) + Tr_g(\nabla d\psi)(d\phi, d\phi)$$

montre qu'en générale la composée de deux applications harmoniques n'est pas nécessaire-

ment une application harmonique, en particulier si ϕ est harmonique et si ψ est totalement géodésique, alors $\psi \circ \phi$ est harmonique.

Définition 1.2.6 *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, le tenseur impulsion-énergie de ϕ est le champ de tenseur symétrique de type $(0,2)$ sur M défini par*

$$S(\phi) = e(\phi)g - \phi^* h, \tag{1.3}$$

La relation de base entre le tenseur impulsion-énergie et les applications harmoniques est donnée par le résultat suivant :

Théorème 1.2.1

$$divS(\phi) = -h(\tau(\phi), d\phi). \tag{1.4}$$

De cette dernière formule, il suit que

corollaire 1.2.1 *Si $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique, alors $divS(\phi) = 0$. De plus si ϕ est une submersion et si $divS(\phi) = 0$, alors ϕ est harmonique.*

Une généralisation naturelle des applications harmoniques est obtenue en considérant les points critiques de la fonctionnelle obtenue en intégrant le carré de la norme du champ de tension.

1.3 Applications biharmoniques.

Définition 1.3.1 *La bi-énergie* $E_2(\phi)$ *de l'application* $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *est la fonctionnelle défine par*

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\phi)|^2 \, dv_g,$$

oé[1] D *est un domaine compact de* M. *L'application* ϕ *est dite biharmonique si elle est point critique da la fonctionnelle bi-énergie, c'est é dire*

$$\left.\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)\right|_{t=0} = 0.$$

Les équations d'Euler -Lagrange associées é la bi-énergie nous permettent d'obtenir la premié¨re variation de la bi-énergie et qui est donnée par l'équation suivante :

$$\left.\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)\right|_{t=0} = \int_D h(v, \tau_2(\phi)) \, dv_g.$$

Oé[1]

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)\, d\phi,$$

avec

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 = Tr_g\left(\nabla^\phi\nabla^\phi - \nabla^\phi_{\nabla^M}\right)$$

est le Laplacien sur les section du fibré $\phi^{-1}TN$ *et* R^N *désigne le tenseur de courbure sur* (N^n, h). *L'application* ϕ *est dite biharmonique si et seulement si*

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)\, d\phi = 0.$$

Remarque 1.3.1 *Il est clair que toute application harmonique est biharmonique.*

Comme pour les applications harmoniques, il existe un tenseur symétrique de type (0.2) appelé le tenseur impulsion bi-énergie associé aux applications biharmoniques et qui a été introduit par G.Y.Jiang.

Définition 1.3.2 *Soit l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞, le tenseur impulsion bi-énergie de ϕ noté $S_2(\phi)$ est défini par :*

$$S_2(\phi) = \left(\frac{-1}{2} |\tau(\phi)|^2 + divh(\tau(\phi), d\phi) \right) g - 2symh(\nabla\tau(\phi), d\phi). \tag{1.5}$$

Oé[1]

$$symh(\nabla\tau(\phi), d\phi)(X, Y) = \frac{1}{2} \{h(\nabla_X \tau(\phi), d\phi(Y)) + h(\nabla_Y \tau(\phi), d\phi(X))\}.$$

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

De même, il existe une relation entre $\tau_2(\phi)$ et la divergence de ce tenseur.

Théorème 1.3.1

$$divS_2(\phi) = h(\tau_2(\phi), d\phi). \tag{1.6}$$

Comme résultat de ce théorème, nous obtenons

corollaire 1.3.1 *Si $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est biharmonique, alors*

$$divS_2(\phi) = 0.$$

Si ϕ est une submersion et si

$$divS_2(\phi) = 0,$$

alors ϕ est biharmonique.

1.4 Applications conformes.

Un cas trés important à étudier est celui qui concerne les applications conformes. Dans cette section, nous allons rappeler les propriétés des applications conformes, en particulier la caractérisation de l'harmonicité et la biharmonicité de ce type d'applications et nous citons quelques exemples.

Définition 1.4.1 *Soient (M^n, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes de même dimension n, une application $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est dite conforme s'il existe une fonction $\lambda : M \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^∞ telle que pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$:*

$$h(d\phi(X), d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y).$$

La fonction λ est appelée la dilatation de ϕ.

Remarque 1.4.1 *On dédduit que la densité d'une application conforme $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est égale à*

$$e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2 = \frac{n}{2}\lambda^2.$$

On déduit que la dilatation est donnée par la formule suivante :

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}|d\phi|^2$$

1.4.1 Champ de tension et tenseur énergie-impulsion d'une application conforme

Le champ de tension et le tenseur énergie-impulsion d'une application conforme s'écrivent en fonction de la dilatation λ.

Proposition 1.4.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ, alors*

$$(i) \quad divS(\phi) = (n-2)\lambda^2 d\ln\lambda, \tag{1.7}$$

où $S(\phi)$ est le tenseur énergie-impulsion de l'application ϕ.

$$(ii) \quad divh(\tau(\phi), d\phi) = (2-n)\left(2\lambda^2 |grad \ln\lambda|^2 + \lambda^2 \Delta \ln\lambda\right). \tag{1.8}$$

$$(iii) \quad \tau(\phi) = (2-n)d\phi(grad \ln\lambda). \tag{1.9}$$

$$(iv) \quad |\tau(\phi)|^2 = (2-n)^2\lambda^2 |grad \ln\lambda|^2. \tag{1.10}$$

Il suit immédiatement de l'égalité (1.7), la propriété suivante :

Proposition 1.4.2 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une submersion conforme, alors ϕ est harmonique si et seulement si $n = 2$, ou si la dilatation λ est constante.*

Remarque 1.4.2 *De la proposition précédente, on déduit que toute application conforme $\phi : (M^2, g) \longrightarrow (N^2, h)$ est harmonique. Notons aussi que si $n \geq 3$, alors toute application conforme $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un difféomorphisme local et dans ce cas l'application ϕ est harmonique si et seulement si sa dilatation λ est une fonction constante.*

1.4.2 Champ de bi-tensien et tenseur bi-énergie-impulsion d'une application conforme.

Pour calculer le champ de bi-tension et le tenseur bi-énergie impulssion d'une application conforme, nous allons rappeler quelques propriétés (voir) Nous montrons que sa trace ne dépend que de la dilatation λ.

Proposition 1.4.3 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons*

$$\nabla_Y d\phi(X) = X(\ln\lambda)\, d\phi(Y) + Y(\ln\lambda)\, d\phi(X) - g(X,Y)\, d\phi(grad \ln\lambda) + d\phi(\nabla_Y X). \tag{1.11}$$

En particulier pour chaque fonction $f \in C^\infty(M)$, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla_Y d\phi(gradf) = {} & d\ln\lambda(gradf)\, d\phi(Y) + Y(\ln\lambda)\, d\phi(gradf) \\ & - Y(f)\, d\phi(grad\ln\lambda) + d\phi(\nabla_Y gradf), \end{aligned} \tag{1.12}$$

et si $f = \ln\lambda$, l'équation (1.12) devient

$$\nabla_Y d\phi(grad\ln\lambda) = |grad\ln\lambda|^2\, d\phi(Y) + d\phi(\nabla_Y grad\ln\lambda). \tag{1.13}$$

Remarque 1.4.3 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a*

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\phi(gradf), d\phi(Y)) = {} & \lambda^2 d\ln\lambda(gradf)\, g(X,Y) + \lambda^2 g(\nabla_X gradf, Y) \\ & + \lambda^2 X(\ln\lambda)\, Y(f) - \lambda^2 X(f)\, Y(\ln\lambda) \end{aligned} \tag{1.14}$$

et

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\phi(grad\ln\lambda), d\phi(Y)) & = h(\nabla_Y d\phi(grad\ln\lambda), d\phi(X)) \\ & = \lambda^2 |grad\ln\lambda|^2 g(X,Y) + \lambda^2 g(\nabla_X grad\ln\lambda, Y). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Grâce aux propriétés cités, le tenseur bi-énergie impulssion d'une application conforme et sa trace sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 1.4.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ, alors*

$$S_2(\phi) = (2-n)\lambda^2 \left\{ \left(\frac{n-2}{2} |grad \ln \lambda|^2 + \Delta \ln \lambda \right) g - 2\nabla d \ln \lambda \right\} \tag{1.16}$$

et

$$Tr_g S_2(\phi) = -(n-2)^2 \lambda^2 \left(\frac{n}{2} |grad \ln \lambda|^2 + \Delta \ln \lambda \right). \tag{1.17}$$

Une condition nécessaire est suffisante pour que $Tr_g S_2(\phi) = 0$ est donnée par le corollaire suivant :

corollaire 1.4.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \neq 3)$ une application conforme de dilatation λ, alors la trace du tenseur bi-énergie impulsion est nulle si et seulement si la fonction $\lambda^{\frac{n}{2}}$ est harmonique.*

La biharmonicité des applications conformes est caractérisée seulement en fonction de la dilatation. Avant de citer ce résultat, on a le théorème suivant

Théorème 1.4.2 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \neq 3)$ une application conforme de dilatation λ, alors*

$$\begin{aligned} Tr_g \left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi(grad \ln \lambda) = {} & d\phi(grad \Delta \ln \lambda) + 2d\phi\left(grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right)\right) - (\Delta \ln \lambda) d\phi(grad \ln \lambda) \\ & - (n-2)|grad \ln \lambda|^2 d\phi(grad \ln \lambda) + d\phi(Ricci(grad \ln \lambda)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Tr_g R^N(d\phi(grad \ln \lambda), d\phi(\cdot)) d\phi(\cdot) = {} & -\frac{n-2}{2} d\phi\left(grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right)\right) \\ & - (\Delta \ln \lambda) d\phi(grad \ln \lambda) \\ & + d\phi(Ricci(grad \ln \lambda)). \end{aligned}$$

Le champ de bi-tension d'une application conforme est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.4.3 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \neq 3)$ une application conforme de dilatation λ, alors le champ de bi-tension de ϕ est donnée par la formule suivante*

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi(H),$$

oé[1]

$$\begin{aligned} H = grad\Delta \ln\lambda - \frac{n-6}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) - 2(\Delta \ln\lambda)\, grad \ln\lambda \\ - (n-2)\, |grad \ln\lambda|^2\, grad \ln\lambda + 2Ricci^M(grad \ln\lambda). \end{aligned}$$

Il suit que la biharmonicité de ϕ est traduite par l'équation suivante

$$\begin{aligned} grad\Delta \ln\lambda - \frac{n-6}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) - 2(\Delta \ln\lambda)\, grad \ln\lambda \\ - (n-2)\, |grad \ln\lambda|^2\, grad \ln\lambda + 2Ricci^M(grad \ln\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Un cas particulier à étudier est lorsque la variété de départ est l'espace euclidien.

corollaire 1.4.2 *Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n}) \to (N^n, h)$ $(n \geqslant 3)$ une application conforme de dilatation λ telle que $\ln\lambda$ est radiale $\ln\lambda(x) = \alpha(r)$ où $r = |x|$ et $\alpha \in C^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$, alors ϕ est biharmonique si et seulement si $\beta = \alpha'$ satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante*

$$\beta'' - (n-4)\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta - \frac{2(n-1)}{r}\beta^2 - (n-2)\beta^3 = 0. \tag{1.18}$$

Grâce au Corollaire 1.4.2, nous allons citer deux exemples d'applications biharmoniques non-harmoniques.

Exemple 1.4.1 *Considérons l'inversion $\phi : (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, g_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, g_{\mathbb{R}^n})$ définie par*

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

L'inversion ϕ est conforme de dilatation λ égale à

$$\lambda(x) = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{r^2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dans ce cas, nous avons

$$\beta(r) = \frac{-2}{r}.$$

Un calcul direct montre que (1.18) est équivalente à

$$\beta'' - (n-4)\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta - \frac{2(n-1)}{r}\beta^2 - (n-2)\beta^3 = \frac{8n-32}{r^3} = 0.$$

Donc l'inversion est biharmonique non-harmonique si et seulement si $n = 4$.

Exemple 1.4.2 *Soit ϕ la réciproque de la projection stéréographique de $\mathbb{R}^n \to S^n$ définie par*

$$\phi(x) = \frac{1}{|x|^2 + 1} \left(|x|^2 - 1, 2x \right).$$

L'application ϕ est conforme de dilatation λ égale à

$$\lambda(x) = \frac{2}{|x|^2 + 1} = \frac{2}{r^2 + 1},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il est bien connu que si $n = 2$, cette application est harmonique donc biharmonique. Nous avons

$$\beta(r) = -\frac{2r}{r^2 + 1}.$$

Un calcul direct montre que (1.18) est équivalente à

$$\beta'' - (n-4)\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta - \frac{2(n-1)}{r}\beta^2 - (n-2)\beta^3 = \frac{8(n-4)r(r^2-1)}{(r^2+1)^3} = 0.$$

Donc la réciproque de la projection stéréographique est biharmonique non-harmonique si et seulement si $n = 4$.

Bibliographie

1. P. Baird, *Harmonic maps with symmetry, harmonic morphisms and deformation of metrics, Pitman Books Limited, (1983), 27-39.*
2. *P. Baird et J. Eells, A conservation law for harmonic maps, Lecture Notes in Math. 894, Springer (1981), 1-25.*
3. *P. Baird et J. Eells, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds, Oxford Sciences Publications (2003).*
4. *P. Baird et D. Kamissoko, On constructing biharmonic maps and metrics, Annals of Global Analysis and Geometry 23, (2003), 65-75.*
5. *A. Balmus, Biharmonic properties and conformal changes, An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat. (N.S.) 50 (2004), 367-372*
6. *R. Caddeo, S. Montaldo et C. Oniciuc, Biharmonic submanifolds of S^3, Internat. J. Math. No.1, (2001), 65-75.*
7. *R. Caddeo, S. Montaldo et P. Piu, Biharmonic curves on a surface, Rend. Mat. Appl., Serie VII, 21, Roma (2001), 143-157.*
8. *J. Eells et L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 16 (1978), 1-68.*

9. *J. Eells et L. Lemaire, Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.*

10. *J. Eells et A. Ratto, Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries, Princeton University Press 1993.*

11. *J. Eells et J.H. Sampson, Harmonic mappping of Riemannian manifolds, Amer. J.Math 86 (1964), 109-160*

12. *J. Eells et J. Wood, Restrictions on harmonic maps of surfaces, Topology, 15 (1976), 263-266.*

13. *G. Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, Chinese Ann. Math. Ser. A 7(1986), 389-402.*

14. *C. Oniciuc, New examples of biharmonic maps in spheres, Colloq. Math., 97 (2003), 131-139.*

15. *S. Ouakkas and D. Djebbouri : Conformal Maps, Biharmonic Maps, and the Warped Product. Mathematics, 4, 15 (2016) ; doi : 10.3390/math 4010015.*

16. *Y.-L. Ou, p-harmonic morphisms, biharmonic morphisms, and non-harmonic biharmonic maps, J. Geom. Phys. Volume 56, 3 (2006),358-374.*

Chapitre 2

Quelques résultats sur les applications bi-f-harmoniques

Sommaire

Introduction

Dans [10], l'auteur a étudié la f-harmonicité pour quelques applications spéciales relativement aux produit double tordu, il donne des conditions de f-harmonicité de la projection et quelques characterisations d'applications f-harmoniques . Les auteurs dans [15] donnent un méthode de construction d'applications biharmoniques et d'applications f-biharmoniques et ils construisent quelques exemples dans la sphère standard S^2 et entre deux sphères. Dans [14], les auteurs obtiennent la formule de la première variation de la fonctionnelle bi-f-énergie, ils introduisent la notion des applications bi-f-harmoniques, qui est une généralisation naturelle de la notion de biharmonicité, et ils donnent quelques propriétés de ce type d'applications. Dans [12], les auteurs ont étudié les classes d'applications bi-f-harmoniques et d'applications f-biharmoniques. Dans ce chapitre, nous présentons autres constructions d'applications bi-f-harmoniques. Dans un premier résultat, nous donnons la relation entre le champ de bi-f-tension et le champ de bi-tension et la relation entre le le tenseur bi-f-énergie et le tenseur bi-énergie et dans ce cas, nous construisons quelques exemples d'applications bi-f-harmoniques et nous étudions le cas de l'application identité. Comme deuxième résultat, nous caractérisons la bi-f-biharmonicité d'une application conforme $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de dilatation λ. On commence par le cas où la fonction f est égale à la dilatation λ et nous donnons quelques exemples

d'applications bi-λ-harmoniques. On termine ce chapitre par l'étude du cas général, c'est à dire le cas où f est fonction positive quelconque. Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans une revue de classe B, indexée dans la base Scopus.
Revue : Italian Journal of Pure and Applied Mathematics.
Titre : Some results and examples of the bi-f-harmonic maps. N. 45â“2021, pp 163-181.
Auteurs : Smail Chemikh, Djilali Behloul et Seddik Ouakkas.

2.1 Généralités

2.1.1 Applications f-harmoniques

Définition 2.1.1 *Soit $f \in C^{\infty}(M)$ une fonction positive, l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est dite f-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle f-énergie :*

$$E_f(\phi) = \frac{1}{2}\int_M f|d\phi|^2 dv_g.$$

Cela est équivalent é dire que ϕ satisfait les équations d'Euler-Lagrange associées é la fonctionnelle f-énergie :

$$\tau_f(\phi) = f\tau(\phi) + d\phi(gradf) = f(\tau(\phi) + d\phi(grad \ln f)) = 0,$$

$\tau_f(\phi)$ est appelé le champ de f-tension de l'application ϕ.

Définition 2.1.2 *Pour les applications f-harmoniques, le tenseur impulsion f-énergie $S_f(\phi)$ de ϕ associéé fonctionnelle f-énergie $E_f(\phi)$ est défini par (voir [1])*

$$S_f(\phi) = f(e(\phi)g - \phi^* h)$$

et la relation entre $S_f(\phi)$ et $\tau_f(\phi)$ est donnée par (voir [3])

$$divS_f(\phi) = -h(\tau_f(\phi), d\phi).$$

2.1.2 Applications bi-f-harmoniques

Une première généralisation des applications f-harmoniques est définie comme suit : l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est dite bi-f-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-f-énergie

$$E_{f,2}(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau_f(\phi)|^2 dv_g.$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle bi-f-énergie nous donnent l'équation de la bi-f-harmonicité de l'application ϕ (voir [13]) :

$$\tau_{f,2}(\phi) = -Tr_g \nabla^\phi f \nabla^\phi \tau_f(\phi) - f Tr_g R^N(\tau_f(\phi), d\phi) d\phi = 0, \tag{2.1}$$

$\tau_{f,2}(\phi)$ est appelé le champ de bi-f-tension de ϕ. Notons que

$$Tr_g \nabla^\phi f \nabla^\phi \tau_f(\phi) = f\left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau_f(\phi) + \nabla_{grad \ln f} \tau_f(\phi)\right),$$

alors

$$\tau_{f,2}(\phi) = f\left(-Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau_f(\phi) - Tr_g R^N(\tau_f(\phi), d\phi) d\phi - \nabla_{gard \ln f} \tau_f(\phi)\right), \tag{2.2}$$

et ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si (voir [12],[14])

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau_f(\phi) + Tr_g R^N(\tau_f(\phi), d\phi) d\phi + \nabla_{grad \ln f} \tau_f(\phi) = 0.$$

En suivant le notion de Jiang, le tenseur impulsion bi-f-énergie $S_{f,2}(\phi)$ de ϕ est défini par (voir [3])

$$S_{f,2}(\phi) = \left(\frac{1}{2}|\tau_f(\phi)|^2 + f Tr_g h(\nabla \tau_f(\phi), d\phi)\right) g - 2f symh(\nabla \tau_f(\phi), d\phi),$$

où

$$Tr_g h(\nabla f \tau(\phi), d\phi) = h\left(\nabla^\phi_{e_i} f \tau(\phi), d\phi(e_i)\right)$$

(Nous sommons sur les indices répétés). le tenseur impulsion bi-f-énergie $S_{f,2}(\phi)$ satisfait la relation suivante :

$$div S_{f,2}(\phi) = h(\tau_{f,2}(\phi), d\phi) + (Tr_g h(\nabla \tau_f(\phi), d\phi)) df.$$

2.2 Quelques résultats.

Comme premier résultat dans cette section, si on considère une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes et une fonction positive $f \in C^\infty(M)$, la relation entre le champ de bi-f-tension et le champ de bi-tension field de ϕ est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2.2.1 *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive. Alors*

$$\begin{aligned}\tau_{f,2}(\phi) &= f^2 \tau_2(\phi) - 3f^2 \nabla^\phi_{grad \ln f} \tau(\phi) - f^2\left(\Delta \ln f + 2|grad \ln f|^2\right)\tau(\phi) \\ &\quad - f^2\left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi(grad \ln f) + Tr_g R^N(d\phi(grad \ln f), d\phi) d\phi\right) \\ &\quad - 3f^2 \nabla^\phi_{grad \ln f} d\phi(grad \ln f) - f^2\left(\Delta \ln f + 2|grad \ln f|^2\right) d\phi(grad \ln f).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Preuve de la proposition 3.3.1. Par un simple calcul, nous montrons que pour tout $V \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right)$ l'équation suivante :

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 fV = f\left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 V + 2\nabla^\phi_{grad\ln f}V + \left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right)V\right). \tag{2.4}$$

Par définition, le champ de bi-f-tension de ϕ est donnée par

$$\tau_{f,2}(\phi) = -fTr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau_f(\phi) - fTr_gR^N\left(\tau_f(\phi), d\phi\right)d\phi - f\nabla^\phi_{grad\ln f}\tau_f(\phi), \tag{2.5}$$

où

$$\tau_f(\phi) = f\left(\tau(\phi) + d\phi\left(grad\ln f\right)\right).$$

Choisissons $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une base orthonormale sur M, on commence par le calcul du premier terme $Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau_f(\phi)$ de l'équation (2.5), on a

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau_f(\phi) = Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 f\tau(\phi) + Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 fd\phi\left(grad\ln f\right).$$

En utilisant (3.19), nous obtenons

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 f\tau(\phi) = f\left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau(\phi) + 2\nabla^\phi_{grad\ln f}\tau(\phi)\right) + f\left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right)\tau(\phi)$$

et

$$\begin{aligned}Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 fd\phi\left(grad\ln f\right) = f&\left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad\ln f\right) + 2\nabla^\phi_{grad\ln f}d\phi\left(grad\ln f\right)\right)\\ &+ f\left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right)d\phi\left(grad\ln f\right).\end{aligned}$$

il suit que

$$\begin{aligned}Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau_f(\phi) = {} & fTr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau(\phi) + fTr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad\ln f\right)\\ &+ 2f\nabla^\phi_{grad\ln f}\tau(\phi) + 2f\nabla^\phi_{grad\ln f}d\phi\left(grad\ln f\right)\\ &+ f\left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right)\left(\tau(\phi) + d\phi\left(grad\ln f\right)\right).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour le terme $Tr_gR^N\left(\tau_f(\phi), d\phi\right)d\phi$, il est simple de voir que

$$Tr_gR^N\left(\tau_f(\phi), d\phi\right)d\phi = fTr_gR^N\left(\tau(\phi), d\phi\right)d\phi + fTr_gR^N\left(d\phi\left(grad\ln f\right), d\phi\right)d\phi. \tag{2.7}$$

Finallement, pour le terme $\nabla^\phi_{grad\ln f}\tau_f(\phi)$, on a

$$\begin{aligned}\nabla^\phi_{grad\ln f}\tau_f(\phi) &= \nabla^\phi_{grad\ln f}f\tau(\phi) + \nabla^\phi_{grad\ln f}fd\phi\left(grad\ln f\right)\\ &= f\nabla^\phi_{grad\ln f}\tau(\phi) + f\,|grad\ln f|^2\,\tau(\phi)\\ &+ f\nabla^\phi_{grad\ln f}d\phi\left(grad\ln f\right) + f\,|grad\ln f|^2\,d\phi\left(grad\ln f\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Si on remplace (2.6), (2.7) et (2.8) dans (2.5), on déduit que

$$\begin{aligned}\tau_{f,2}(\phi) &= f^2\tau_2(\phi) - 3f^2\nabla^\phi_{grad\ln f}\tau(\phi) - f^2\left(\Delta\ln f + 2\left|grad\ln f\right|^2\right)\tau(\phi)\\ &\quad - f^2\left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi(grad\ln f) + Tr_g R^N\left(d\phi(grad\ln f), d\phi\right)d\phi\right)\\ &\quad - 3f^2\nabla^\phi_{grad\ln f}d\phi(grad\ln f) - f^2\left(\Delta\ln f + 2\left|grad\ln f\right|^2\right)d\phi(grad\ln f).\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de la proposition 3.3.1.

Remarque 2.2.1 *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive. Alors ϕ est bi-f-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}&\tau_2(\phi) - \left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi(grad\ln f) + Tr_g R^N\left(d\phi(grad\ln f), d\phi\right)d\phi\right)\\ &- 3\nabla^\phi_{grad\ln f}\tau(\phi) - \left(\Delta\ln f + 2\left|grad\ln f\right|^2\right)\tau(\phi)\\ &- 3\nabla^\phi_{grad\ln f}d\phi(grad\ln f) - \left(\Delta\ln f + 2\left|grad\ln f\right|^2\right)d\phi(grad\ln f) = 0.\end{aligned}$$

Dans le cas où l'application ϕ est harmonique, nous obtenons le résultat suivant.

Remarque 2.2.2 *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application harmonique et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive. Alors ϕ est bi-f-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}&Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi(grad\ln f) + Tr_g R^N\left(d\phi(grad\ln f), d\phi\right)d\phi\\ &+ 3\nabla^\phi_{grad\ln f}d\phi(grad\ln f) + \left(\Delta\ln f + 2\left|grad\ln f\right|^2\right)d\phi(grad\ln f) = 0.\end{aligned}$$

On applique cette dernière remarque pour construire quelques exemples d'application bi-f-harmoniques.

Exemple 2.2.1 *On considère la projection $\phi : \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\phi(t, x_2, x_3, x_4) = (t, x_2, x_3).$$

On suppose que $\ln f = \alpha(t)$, alors grâce à la remarque 2.2.2, la projection ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si

$$\alpha''' + 4\alpha'\alpha'' + 2(\alpha')^3 = 0.$$

Soit $\beta = \alpha'$, donc la dernière expression devient

$$\beta'' + 4\beta\beta' + 2\beta^3 = 0.$$

On déduit des solutions particulières de la forme $\beta = \dfrac{a}{t}$ où $a \in \mathbb{R}^*$. Nous obtenons $a = 1$ ce qui nous donne $f(t) = Ct$ avec $C > 0$. Dans ce cas la projection ϕ est bi-f-harmonique où $f(t) = Ct$.

Exemple 2.2.2 *Soit $\phi : (\mathbb{R}^{2n}, g_{\mathbb{R}^{2n}}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ l'application de Hopf définie par*

$$\phi(x,y) = \left(|x|^2 - |y|^2, 2x\overline{y}\right) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{K},$$

où $n = 2,4$ ou 8 et $x, y \in \mathbb{K} \simeq \mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{K} =$, $\mathbb{H}$ (quaternions), ou $\mathbb{O}$ (octonions), respectivement. Ecrivons les points $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ sous la forme

$$(x,y) = r(\cos\theta \cdot p, \sin\theta \cdot q), \left(r \in [0,+\infty), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], p, q \in S^{n-1}\right)$$

et ceux of $\mathbb{R}^{n+1}$ sous la forme

$$s(ost, \sin tdotw), \left(s \in [0,+\infty), \theta \in [0,\pi], w \in S^{n-1}\right).$$

L'application ϕ prend la forme suivante :

$$\phi(ros\theta dotp, r\sin\theta dotq) = (sost, s\sin tdotp\overline{q}),$$

où $s = r^2$ et $t = 2\theta$. Les métriques sur $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ ont repectivement les expressions :

$$g_{\mathbb{R}^{2n}} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 os^2\theta dotg_{s^{n-1}} + r^2\sin^2\theta dotg_{s^{n-1}}$$

et

$$g_{\mathbb{R}^{n+1}} = ds^2 + s^2dt^2 + s^2\sin^2 tdotg_{s^{n-1}}.$$

Une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$ est donnée par

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial r}, e_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, e_j = \frac{1}{r\cos\theta}\xi_j, e_k = \frac{1}{r\sin\theta}\xi_k,$$

où

$$\xi_j = r(\cos\theta \cdot X_j, 0), j = 3, ..., n+1$$

et

$$\xi_k = r(0, \sin\theta \cdot X_k), k = n+2, ..., 2n$$

où les vecteurs X_j and X_k sont des vecteurs tangents unitaires à la sphère S^{n-1}. On a

$$\nabla_{e_i}e_i = \frac{1-2n}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n-1}{r^2}(\tan\theta - \cot\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Supposons que la fonction f depend seulement de r et posons $\ln f = \alpha(r)$. Alors par la remarque 2.2.2, on déduit que l'application ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si la fonction $\beta = \alpha'$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$r\beta'' + 4r\beta\beta' + (2n+1)\beta' + \frac{2n-1}{r}\beta + (2n+2)\beta^2 + 2r\beta^3 = 0.$$

En chechant des solutions spéciales qui s'écrivent sous la forme $\beta = \frac{a}{r}$ *où* $a \in \mathbb{R}^*$*, nous obtenons* $a = -n+1$ *ce qui donne* $f(r) = \frac{C}{r^{n-1}}$, $(C > 0)$ *et dans ce cas, l'application de Hopf* $\phi : (\mathbb{R}^{2n}, g_{\mathbb{R}^{2n}}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ *ainsi définie est bi-*f*-harmonique avec* $f(r) = \frac{C}{r^{n-1}}$.

Un autre cas particulier est de considérer l'application identité, on obtient :

corollaire 2.2.1 *L'application identité* $Id_M : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ *est bi-*f*-harmonique si et seulement si la fonction* f *est une solution de l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} &grad\Delta \ln f + \frac{3}{2} grad\left(|grad \ln f|^2\right) + \left(\Delta \ln f + 2\,|grad \ln f|^2\right) grad \ln f \\ &+ 2Ricci\,(grad \ln f) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dans ce qui suit, nous présenterons deux exemples d'applications bi-f-harmoniques.

Exemple 2.2.3 *Soit l'application identité* $Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *où on suppose que* $\ln f$ *est radiale* $(\ln f = \alpha(r))$*. En utilisant la définition du Laplacien, un calcul direct nous donne*

$$grad\Delta \ln f = \left(\alpha''' + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha'\right)\frac{\partial}{\partial r},$$

$$grad\left(|grad \ln f|^2\right) = 2\alpha'\alpha''\frac{\partial}{\partial r}$$

et

$$\Delta \ln f = \alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha'.$$

Alors par le corollaire 3.5.1, on déduit que $Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ *est bi-*f*-harmonique si et seulement si la fonction* $\beta = \alpha'$ *est solution de l'équation différentielle suivante :*

$$\beta'' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta + 4\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta^2 + 2\beta^3 = 0.$$

Regardons des solutions particulière de type $\beta = \frac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$*, donc* $Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est bi-*f*-harmonique si et seulement si*

$$a = \frac{-n+5 \pm \sqrt{(n-1)(n+7)}}{4}.$$

Nous obtenons $f(r) = Cr^{\frac{-n+5 \pm \sqrt{(n-1)(n+7)}}{4}}$ $(C > 0)$ *et dans ce cas l'application identité* $Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *est bi-*f*-harmonique.*

Exemple 2.2.4 *On considère $M = S^n$ avec la paramétrisation*

$$x = (\cos s, \sin s \cdot y), \quad s \in [0, \pi], \quad y \in S^{n-1}.$$

Une base orthonormée de S^n est donnée par

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_i = (0, f_i), \quad i = 2, ..., n$$

où les vecteurs f_i sont tangents à la sphère S^{n-1}. On suppose que $\ln f = \alpha(s)$. Un calcul direct donne

$$grad \ln f = grad\alpha = \alpha' \frac{\partial}{\partial s},$$

$$|grad \ln f|^2 = |grad\alpha|^2 = (\alpha')^2,$$

$$grad\left(|grad \ln f|^2\right) = grad\left(|grad\alpha|^2\right) = 2\alpha'\alpha'',$$

$$\Delta \ln f = \Delta\alpha = \alpha'' + (n-1)(\cot s)\alpha',$$

$$grad\Delta \ln f = grad\Delta\alpha = \left(\alpha''' + (n-1)(\cot s)\alpha'' - (n-1)\left(1 + \cot^2 s\right)\alpha'\right)\frac{\partial}{\partial s}$$

et

$$Ricci^{S^n}(grad \ln f) = Ricci^{S^n}(grad\alpha) = (n-1)\alpha' \frac{\partial}{\partial s}.$$

Alors grâce au Corollaire 3.5.1, on déduit que l'application Id_{S^n} est bi-f-harmonique si et seulement si la fonction $\beta = \alpha'$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\beta'' + (n-1)\cot s\beta' + 4\beta\beta' + (n-1)\left(1 - \cot^2 s\right)\beta + (n-1)\cot s\beta^2 + 2\beta^3 = 0.$$

Par exemple, prenons $n = 1$, alors l'application Id_{S^1} est bi-f-harmonique si et seulement si

$$\beta'' + 4\beta\beta' + 2\beta^3 = 0.$$

On cherche des solutions particulières de type $\beta = \frac{a}{s}$, on obtient $a = 1$, ce qui nous donne $f(s) = ks$ $(k > 0)$. Donc l'application Id_{S^1} est bi-f-harmonique, où $f(s) = ks$ $(k > 0)$.

Dans la section suivante, nous allons étudier la cas où $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ est une application conforme de dilatation λ avec $n \geq 3$.

2.3 Cas des applications conformes.

On commence cette section par la remarque suivante.

Remarque 2.3.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ. Le champ de f-tension de ϕ est donné par*

$$\begin{aligned}\tau_f(\phi) &= f\left(\tau(\phi) + d\phi\left(grad \ln f\right)\right)\\ &= f\left((2-n)\, d\phi\left(grad \ln \lambda\right) + d\phi\left(grad \ln f\right)\right)\\ &= f d\phi\left(grad \ln f\lambda^{2-n}\right).\end{aligned}$$

En particulier si $f = \lambda$, Le champ de λ-tension de ϕ prend la forme

$$\tau_\lambda(\phi) = (3-n)\,\lambda d\phi\left(grad \ln \lambda\right).$$

On divise cette section en deux parties.

2.3.1 Cas où la fonction $f = \lambda$.

Nous calculons le champ de bi-λ-tension pour une application conforme ϕ.

Théorème 2.3.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ avec $n \geq 3$. Le champ de bi-λ-tension de ϕ est donné par :*

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi\left(H(\lambda)\right)$$

oé[1]

$$\begin{aligned}H(\lambda) = {} & grad\Delta \ln \lambda - \frac{n-9}{2} grad\left(\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) + 2Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right)\\ & - \left((n-7)\left|grad \ln \lambda\right|^2 + \Delta \ln \lambda\right) grad \ln \lambda.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Preuve. Par définition, le champ de bi-λ-tension de ϕ est donné par

$$\tau_{\lambda,2}(\phi) = \lambda\left(-Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \tau_\lambda(\phi) - Tr_g R^N\left(\tau_\lambda(\phi), d\phi\right) d\phi - \nabla_{gard \ln \lambda}\tau_\lambda(\phi)\right).$$

Le champ de λ-tension de l'application conforme ϕ est égal à

$$\tau_\lambda(\phi) = (3-n)\,\lambda d\phi\left(grad \ln \lambda\right),$$

il suit que

$$\begin{aligned}\tau_{\lambda,2}(\phi) = {} & (n-3)\,\lambda Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 \lambda d\phi\left(grad \ln \lambda\right)\\ & + (n-3)\,\lambda Tr_g R^N\left(\lambda d\phi\left(grad \ln \lambda\right), d\phi\right) d\phi\\ & + (n-3)\,\lambda \nabla_{gard \ln \lambda}\lambda d\phi\left(grad \ln \lambda\right).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Il est simple de voir que

$$Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2\lambda d\phi\left(grad\ln\lambda\right)=\lambda Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+2\lambda\nabla_{gard\ln\lambda}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)$$
$$+\lambda\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+\lambda\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right). \tag{2.12}$$

Grâce à un résultat cité dans le premier chapitre qui concerne les applications conformes, on obtient

$$\begin{aligned}Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)&=d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)+2d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)\\&+d\phi\left(Ricci^M\left(grad\ln\lambda\right)\right)-\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\&-\left(n-2\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Concernant le terme $\nabla_{gard\ln\lambda}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)$, on a (voir [2])

$$\nabla_{gard\ln\lambda}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)=\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+\frac{1}{2}d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right). \tag{2.14}$$

En remplaé§ant (2.13) et (2.14) dans (2.12), on déduit que

$$\begin{aligned}Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2\lambda d\phi\left(grad\ln\lambda\right)&=\lambda d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)+3\lambda d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)\\&-\left(n-5\right)\lambda\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\&+\lambda d\phi\left(Ricci^M\left(grad\ln\lambda\right)\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Maintenant, nous allons calculer $Tr_gR^N\left(d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi\right)d\phi$. Toujours, le même résultat cité dans le premier chapitre qui concerne les applications conformes nous ramène à

$$\begin{aligned}Tr_gR^N\left(d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi\right)d\phi&=-\frac{n-2}{2}d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)\\&+d\phi\left(Ricci^M\left(grad\ln\lambda\right)\right)\\&-\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Pour compléter la preuve, il nous reste le terme $\nabla_{gard\ln\lambda}\lambda d\phi\left(grad\ln\lambda\right)$, un calcul simple donne

$$\nabla_{gard\ln\lambda}\lambda d\phi\left(grad\ln\lambda\right)=\frac{1}{2}\lambda d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)+2\lambda\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right). \tag{2.17}$$

Si on substitue (2.15), (2.16) et (2.17) dans (2.11), on conclue que

$$\tau_{\lambda,2}\left(\phi\right)=\left(n-3\right)\lambda^2 d\phi\left(H\left(\lambda\right)\right)$$

où

$$H(\lambda) = grad\Delta \ln \lambda - \frac{n-9}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) + 2Ricci^M (grad \ln \lambda)$$
$$- \left((n-7)|grad \ln \lambda|^2 + \Delta \ln \lambda\right) grad \ln \lambda.$$

Ce théorème nous donne un résultat de caractérisation

corollaire 2.3.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 4)$ une application conforme de dilatation λ, donc ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} &grad\Delta \ln \lambda - \frac{n-9}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) - (\Delta \ln \lambda)\, grad \ln \lambda \\ &- (n-7)|grad \ln \lambda|^2 grad \ln \lambda + 2Ricci^M (grad \ln \lambda) = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

En particulier, on prouve que la bi-λ-harmonicité de l'application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ où la dilatation λ est radiale $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ and $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ est équivalente à une équation différentielle du deuxième ordre. Nous avons

corollaire 2.3.2 *Let $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 4)$ to be a conformal map of dilation λ when we suppose that $\ln \lambda$ is radial $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ and $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Then ϕ is bi-λ-harmonic if and only if $\beta = \alpha'$ satisfies the following ordinary differential equation :*

$$\beta'' - (n-8)\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta - \frac{n-1}{r}\beta^2 - (n-7)\beta^3 = 0. \tag{2.19}$$

Preuve du corollaire r2.3.2. Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 4)$ une application conforme de dilatation λ où on suppose que $\ln \lambda$ est radiale $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. D'après le corollaire 2.3.1, ϕ est bi-λ-harmonique si et seulement si

$$grad\Delta \ln \lambda - \frac{n-9}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) - (\Delta \ln \lambda)\, grad \ln \lambda$$
$$- (n-7)|grad \ln \lambda|^2 grad \ln \lambda = 0.$$

Un calcul direct montre que

$$grad \ln \lambda = \alpha' \frac{\partial}{\partial r},$$

$$|grad \ln \lambda|^2 = (\alpha')^2,$$

$$grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) = 2\alpha'\alpha'' \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta \ln \lambda = \alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha',$$

et

$$grad \Delta \ln \lambda = \left(\alpha''' + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha' \right) \frac{\partial}{\partial r}.$$

D'où, ϕ est bi-λ-harmonique si et seulement si la fonction α vérifie l'équation différentielle suivante

$$\alpha''' - (n-8)\,\alpha'\alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha' - \frac{n-1}{r}\left(\alpha'\right)^2 - (n-7)\left(\alpha'\right)^3 = 0.$$

Soit $\beta = \alpha'$, cette dernière équation est équivalente à une équation différentielle du second ordre de la forme

$$\beta'' - (n-8)\,\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta - \frac{n-1}{r}\beta^2 - (n-7)\,\beta^3 = 0.$$

Comme conséquence du corollaire 2.3.2, nous présenterons quelques remarques auxquelles nous donnerons une solution particulière de l'équation (2.16) qui nous permet de construire une application bi-λ-harmonique.

Remarque 2.3.2 . *Regardons des solutions particulière de type* $\beta = \frac{a}{r}$ *($a \in \mathbb{R}^*$). Par (2.16), on déduit que* $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ *($n \geq 4$) est bi-λ-harmonique si et seulement si a est solution de l'équation algébrique suivante*

$$(n-7)\,a^2 + 7a + 2n - 4 = 0.$$

Cette équation admet des solutions réelles si et seulement si $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. *Si $n = 4$, on trouve* $a = \frac{7+\sqrt{97}}{6}$ *ou* $a = \frac{7-\sqrt{97}}{6}$, *donc* $\lambda = Cr^{\frac{7+\sqrt{97}}{6}}$ *ou* $\lambda = Cr^{\frac{7-\sqrt{97}}{6}}$ *($C > 0$). Alors, dans ce cas toute application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^4, g) \to (N^4, h)$ *de dilatation* $\lambda = Cr^{\frac{7+\sqrt{97}}{6}}$ *ou* $\lambda = Cr^{\frac{7-\sqrt{97}}{6}}$ *est bi-λ-harmonique.*
2. *Si $n = 5$, on trouve* $a = \frac{7+\sqrt{97}}{4}$ *ou* $a = \frac{7-\sqrt{97}}{4}$, *par suite* $\lambda = Cr^{\frac{7+\sqrt{97}}{4}}$ *ou* $\lambda = Cr^{\frac{7-\sqrt{97}}{4}}$ *($C > 0$). Il suit que toute application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^5, g) \to (N^5, h)$ *de dilatation* $\lambda = Cr^{\frac{7+\sqrt{97}}{4}}$ *ou* $\lambda = Cr^{\frac{7-\sqrt{97}}{4}}$ *est bi-λ-harmonique.*
3. *Le cas $n = 6$ donne $a = 8$ ou $a = -1$, donc* $\lambda = Cr^8$ *ou* $\lambda = Cr^{-1}$ *($C > 0$). Dans ce cas chaque application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^8, g) \to (N^8, h)$ *de dilatation* $\lambda = Cr^8$ *ou* $\lambda = Cr^{-1}$ *est bi-λ-harmonique.*

4. *Si* $n = 7$, $a = \frac{-10}{7}$, *donc* $\lambda = Cr^{\frac{-10}{7}}$ $(C > 0)$. *Alors, toute application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^7, g) \to (N^7, h)$ *de dilation* $\lambda = Cr^{\frac{-10}{7}}$ *est bi-*λ*-harmonique.*

5. *Si* $n = 8$, *on trouve* $a = -3$ *ou* $a = -4$, *d'où* $\lambda = Cr^{-3}$ *ou* $\lambda = Cr^{-4}$ $(C > 0)$. *Ce qui implique que toute application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^8, g) \to (N^8, h)$ *de dilatation* $\lambda = Cr^{-3}$ *ou* $\lambda = Cr^{-4}$ *est bi-*λ*-harmonique.*

Comme second résultat de cette première partie, on calcule le tenseur bi-λ-énergie associé à une application conforme ϕ et on montre que $S_2(\phi)$ dépend seulement de la dilatation.

Théorème 2.3.2 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ *une application conforme de dilatation* λ, *on a*

$$\begin{aligned} S_{\lambda,2}(\phi) &= (3-n)\lambda^4 \left(\frac{n+1}{2} |grad \ln \lambda|^2 + \Delta \ln \lambda \right) g \\ &\quad - 2(3-n)\lambda^4 \left(\nabla d \ln \lambda + (d \ln \lambda \otimes d \ln \lambda) \right), \end{aligned} \tag{2.20}$$

et la trace de $S_2(\phi)$ *est donnée par*

$$Tr_g S_{\lambda,2}(\phi) = (3-n)\lambda^4 \left(\frac{n^2+n-4}{2} |grad \ln \lambda|^2 + (n-2)\Delta \ln \lambda \right). \tag{2.21}$$

Preuve. Par définition, le tenseur bi-λ-énergie de ϕ est donné par :

$$\begin{aligned} S_{\lambda,2}(\phi)(X,Y) &= \left(\frac{1}{2} |\tau_\lambda(\phi)|^2 + \lambda Tr_g h(\nabla \tau_\lambda(\phi), d\phi) \right) g(X,Y) \\ &\quad - 2\lambda symh(\nabla \tau_\lambda(\phi), d\phi)(X,Y), \end{aligned} \tag{2.22}$$

où

$$\tau_\lambda(\phi) = (3-n)\lambda d\phi(grad \ln \lambda).$$

En utilisant les équations (3.16) et (3.19) de la proposition 3.3.1, on obtient

$$\frac{1}{2} |\tau_\lambda(\phi)|^2 + \lambda Tr_g h(\nabla \tau_\lambda(\phi), d\phi) = \frac{1}{2} |(3-n)\lambda d\phi(grad \ln \lambda)|^2 + (3-n)\lambda Tr_g h(\nabla \lambda d\phi(grad \ln \lambda), d\phi).$$

Un simple calcul nous donne

$$\frac{1}{2} |(3-n)\lambda d\phi(grad \ln \lambda)|^2 = \frac{(3-n)^2}{2} \lambda^4 |grad \ln \lambda|^2$$

et

$$Tr_g h(\nabla \lambda d\phi(grad \ln \lambda), d\phi) = (n+1)\lambda^3 |grad \ln \lambda|^2 + \lambda^3 \Delta \ln \lambda,$$

alors

$$\frac{1}{2}\left|\tau_\lambda(\phi)\right|^2+\lambda Tr_g h\left(\nabla\tau_\lambda(\phi),d\phi\right)=(3-n)\lambda^4\left(\frac{n+5}{2}\left|grad\ln\lambda\right|^2+\Delta\ln\lambda\right). \quad (2.23)$$

Calculons maintenant $symh\left(\nabla\tau_\lambda(\phi),d\phi\right)$, on par définition pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$

$$\begin{aligned}
symh\left(\nabla\tau_\lambda(\phi),d\phi\right)(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(h\left(\nabla_X\tau_\lambda(\phi),d\phi(Y)\right)+h\left(\nabla_Y\tau_\lambda(\phi),d\phi(X)\right)\right)\\
&= -\frac{n-3}{2}h\left(\nabla_X\lambda d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(Y)\right)\\
&- \frac{n-3}{2}h\left(\nabla_Y\lambda d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(X)\right)\\
&= -\frac{n-3}{2}\lambda h\left(\nabla_X d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(Y)\right)\\
&- \frac{n-3}{2}\lambda h\left(\nabla_Y d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(X)\right)\\
&- \frac{n-3}{2}\lambda X(\ln\lambda)\,h\left(d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(Y)\right)\\
&- \frac{n-3}{2}\lambda Y(\ln\lambda)\,h\left(d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(X)\right).
\end{aligned}$$

Il est simple de voir que

$$h\left(\nabla_X d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(Y)\right)=\lambda^2\left(\nabla d\ln\lambda(X,Y)+\left|grad\ln\lambda\right|^2g(X,Y)\right),$$

$$h\left(\nabla_Y d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(X)\right)=\lambda^2\left(\nabla d\ln\lambda(X,Y)+\left|grad\ln\lambda\right|^2g(X,Y)\right),$$

$$X(\ln\lambda)\,h\left(d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(Y)\right)=\lambda^2X(\ln\lambda)\,Y(\ln\lambda)=\lambda^2\left(d\ln\lambda\otimes d\ln\lambda\right)(X,Y)$$

et

$$Y(\ln\lambda)\,h\left(d\phi\left(grad\ln\lambda\right),d\phi(X)\right)=\lambda^2X(\ln\lambda)\,Y(\ln\lambda)=\lambda^2\left(d\ln\lambda\otimes d\ln\lambda\right)(X,Y).$$

Il suit que

$$symh\left(\nabla\tau_\lambda(\phi),d\phi\right)=(3-n)\lambda^3\left(\nabla d\ln\lambda+\left(d\ln\lambda\otimes d\ln\lambda\right)+\left|grad\ln\lambda\right|^2g\right) \quad (2.24)$$

Si on substitue (2.23) et (2.24) dans (2.22), nous concluons que

$$S_{\lambda,2}(\phi)=(3-n)\lambda^4\left(\frac{n+1}{2}\left|grad\ln\lambda\right|^2+\Delta\ln\lambda\right)g-2(3-n)\lambda^4\left(\nabla d\ln\lambda+\left(d\ln\lambda\otimes d\ln\lambda\right)\right).$$

Pour calculer la trace du tenseur bi-λ-énergie de ϕ, on considère $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée sur M, on a

$$\begin{aligned} Tr_g S_{\lambda,2}(\phi) &= S_{\lambda,2}(\phi)(e_i,e_i) \\ &= (3-n)\lambda^4\left(\frac{n+1}{2}|grad\ln\lambda|^2+\Delta\ln\lambda\right)g(e_i,e_i) \\ &- 2(3-n)\lambda^4(\nabla d\ln\lambda(e_i,e_i)+(d\ln\lambda\otimes d\ln\lambda)(e_i,e_i)) \\ &= (3-n)n\lambda^4\left(\frac{n+1}{2}|grad\ln\lambda|^2+\Delta\ln\lambda\right) \\ &- 2(3-n)\lambda^4\left(\Delta\ln\lambda+|grad\ln\lambda|^2\right). \end{aligned}$$

D'où

$$Tr_g S_{\lambda,2}(\phi) = (3-n)\lambda^4\left(\frac{n^2+n-4}{2}|grad\ln\lambda|^2+(n-2)\Delta\ln\lambda\right).$$

En calculant le Laplacien de la fonction $\lambda^{\frac{n^2+n-4}{2(n-2)}}$ $((n\geq 4))$, nous obtenons le corollaire suivant :

corollaire 2.3.3 *Soit $\phi:(M^n,g)\to(N^n,h)$, $(n\geq 4)$ une application conforme de dilatation λ, alors $Tr_g S_{\lambda,2}(\phi)$ est nulle si et seulement si la fonction $\lambda^{\frac{n^2+n-4}{2(n-2)}}$ est harmonique.*

Une autre conséquence est donnée dans la remarque suivante :

Remarque 2.3.3 *Soit $\phi:(M^n,g)\to(N^n,h)$, $(n\geq 4)$ une application conforme de dilatation λ, nous avons*

$$divS_{\lambda,2}(\phi) = h(\tau_{\lambda,2}(\phi),d\phi)+(Tr_g h(\nabla\tau_\lambda(\phi),d\phi))\,d\lambda$$

et

$$Tr_g h(\nabla\tau_\lambda(\phi),d\phi) = (3-n)\lambda^3\left(\Delta\ln\lambda+(n+1)|grad\ln\lambda|^2\right).$$

Si on suppose que l'application conforme ϕ est bi-λ-harmonique, alors $divS_{\lambda,2}(\phi)$ est nulle si et seulement la fonction λ^{n+1} est harmonique.

2.3.2 Cas où la fonction f est quelconque.

Dans cette deuxième partie, on traite la cas général et on commence par le calcul du champ de bi-f-tension.

Théorème 2.3.3 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une applicatoin conforme de dilatation λ, alors le champ de bi-f-tension de ϕ est donné par :*

$$\tau_{f,2}(\phi) = f^2 d\phi\left(H(\lambda, f)\right)$$

oú

$$\begin{aligned}
H(\lambda, f) = &(n-2)\, grad\Delta \ln\lambda - \frac{(n-2)(n-6)}{2} grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right) \\
&-(n-2)\left(2(\Delta\ln\lambda) + (n-2)|grad\ln\lambda|^2\right) grad\ln\lambda \\
&+2(n-2)\, Ricci^M(grad\ln\lambda) + \left(n(\Delta\ln f) + (2n-1)|grad\ln f|^2\right) grad\ln\lambda \\
&- grad\Delta\ln f - 4\nabla_{grad\ln\lambda} grad\ln f + 4(n-2)|grad\ln\lambda|^2 grad\ln f \\
&-\left(\Delta\ln f + 2|grad\ln f|^2\right) grad\ln f + 4(n-2)\nabla_{gard\ln f} grad\ln\lambda \\
&-6d\ln\lambda(grad\ln f)\, grad\ln f - \frac{3}{2} grad\left(|grad\ln f|^2\right) - 2Ricci^M(grad\ln f)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Preuve. le champ de f-tension ϕ est définie par

$$\tau_f(\phi) = f d\phi\left(grad\ln f\lambda^{2-n}\right),$$

d'où, le champ de bi-f-tension de ϕ est donné par

$$\begin{aligned}
\tau_{f,2}(\phi) = &-f\left(Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 f d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right) + fTr_g R^N\left(d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right), d\phi\right) d\phi\right) \\
&- f\nabla^\phi_{gard\ln f} f d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right).
\end{aligned}$$

Pour calculer le terme $Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 f d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)$, on va utiliser l'équation (3.19) et on a

$$\begin{aligned}
Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 f d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right) = &fTr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right) + 2f\nabla^\phi_{grad\ln f} d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right) \\
&+ f\left(\Delta\ln f + |grad\ln f|^2\right) d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right).
\end{aligned}$$

D'un calcul simple, on montre que

$$\nabla^\phi_{gard\ln f} f d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right) = f\nabla^\phi_{gard\ln f} d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right) + f|grad\ln f|^2 d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right),$$

il suit que

$$\begin{aligned}
\tau_{f,2}(\phi) = &-f^2 Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right) \\
&- f^2 Tr_g R^N\left(d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right), d\phi\right) d\phi \\
&- f^2\left(\Delta\ln f + 2|grad\ln f|^2\right) d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right) \\
&- 3f^2\nabla^\phi_{gard\ln f} d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Nous étudierons terme par terme le cé´té droit de l'équation (2.11). Pour le premier terme $Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)+Tr_gR^N\left(d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right),d\phi\right)d\phi$, on a

$$\begin{aligned}
&Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)+Tr_gR^N\left(d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right),d\phi\right)d\phi\\
&\qquad=d\phi\left(grad\Delta\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)+4d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)\\
&\qquad-2\left(\Delta\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)-(n-2)\,d\phi\left(\nabla_{grad\ln(\lambda^{2-n}f)}grad\ln\lambda\right)\\
&\qquad-(n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)\\
&\qquad+2d\phi\left(Ricci^M\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)=(2-n)\ln\lambda+\ln f,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)+Tr_gR^N\left(d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right),d\phi\right)d\phi\\
&\quad=(2-n)\,d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)+\frac{(n-2)(n-6)}{2}d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)\\
&\quad-2(2-n)\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+(n-2)^2\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&\quad+2(2-n)\,d\phi\left(Ricci^M\left(grad\ln\lambda\right)\right)\\
&\quad+d\phi\left(grad\Delta\ln f\right)+4d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\ln f\right)\\
&\quad-2\left(\Delta\ln f\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)-(n-2)\,d\phi\left(\nabla_{grad\ln f}grad\ln\lambda\right)\\
&\quad-(n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln f\right)+2d\phi\left(Ricci^M\left(grad\ln f\right)\right).
\end{aligned}\tag{2.27}$$

Maintenant, nous allons regarder le dernier terme $\nabla^\phi_{gard\ln f}d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)$; par un calcul simple, on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla^\phi_{gard\ln f}d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)&=(2-n)\,\nabla^\phi_{gard\ln f}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+\nabla^\phi_{gard\ln f}d\phi\left(grad\ln f\right)\\
&=(2-n)\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln f\right)+d\phi\left(\nabla_{gard\ln f}grad\ln\lambda\right)\right)\\
&+2d\ln\lambda\left(grad\ln f\right)d\phi\left(grad\ln f\right)-\left|grad\ln f\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&+d\phi\left(\nabla_{gard\ln f}grad\ln f\right),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\nabla^\phi_{gard\ln f}d\phi\left(grad\ln\left(\lambda^{2-n}f\right)\right)&=(2-n)\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln f\right)+\frac{1}{2}d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln f\right|^2\right)\right)\\
&-\left|grad\ln f\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+(2-n)\,d\phi\left(\nabla_{gard\ln f}grad\ln\lambda\right)\\
&+2d\ln\lambda\left(grad\ln f\right)d\phi\left(grad\ln f\right).
\end{aligned}\tag{2.28}$$

Si on remplace (2.12) et (2.13) dans (2.11), nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\tau_{f,2}(\phi) &= (n-2) f^2 d\phi\left(grad\Delta \ln \lambda\right) - \frac{(n-2)(n-6)}{2} f^2 d\phi\left(grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right)\right) \\
&- (n-2) f^2 \left(2(\Delta \ln \lambda) + (n-2)|grad \ln \lambda|^2\right) d\phi\left(grad \ln \lambda\right) \\
&+ 2(n-2) f^2 d\phi\left(Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right)\right) + f^2\left(n(\Delta \ln f) + (2n-1)|grad \ln f|^2\right) d\phi\left(grad \ln \lambda\right) \\
&- f^2 d\phi\left(grad\Delta \ln f\right) - 4 d\phi\left(\nabla_{grad \ln \lambda} grad \ln f\right) + 4(n-2) f^2 |grad \ln \lambda|^2 d\phi\left(grad \ln f\right) \\
&- f^2\left(\Delta \ln f + 2|grad \ln f|^2\right) d\phi\left(grad \ln f\right) + 4(n-2) f^2 d\phi\left(\nabla_{gard \ln f} grad \ln \lambda\right) \\
&- 6 f^2 d \ln \lambda\left(grad \ln f\right) d\phi\left(grad \ln f\right) - \frac{3}{2} f^2 d\phi\left(grad\left(|grad \ln f|^2\right)\right) - 2 f^2 d\phi\left(Ricci^M\left(grad \ln f\right)\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\tau_{f,2}(\phi) = f^2 d\phi\left(H(\lambda, f)\right)$$

où

$$\begin{aligned}
H(\lambda, f) &= (n-2)\, grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-2)(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) \\
&- (n-2)\left(2(\Delta \ln \lambda) + (n-2)|grad \ln \lambda|^2\right) grad \ln \lambda \\
&+ 2(n-2) Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right) + \left(n(\Delta \ln f) + (2n-1)|grad \ln f|^2\right) grad \ln \lambda \\
&- grad\Delta \ln f - 4\nabla_{grad \ln \lambda} grad \ln f + 4(n-2)|grad \ln \lambda|^2 grad \ln f \\
&- \left(\Delta \ln f + 2|grad \ln f|^2\right) grad \ln f + 4(n-2)\nabla_{gard \ln f} grad \ln \lambda \\
&- 6 d \ln \lambda\left(grad \ln f\right) grad \ln f - \frac{3}{2} grad\left(|grad \ln f|^2\right) - 2 Ricci^M\left(grad \ln f\right).
\end{aligned}$$

Une conséquence de caractérisation de la bi-f-harmonicité est donnée par la propriété suivante.

Remarque 2.3.4 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ, alors ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}
&(n-2)\, grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-2)(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) \\
&- (n-2)\left(2(\Delta \ln \lambda) + (n-2)|grad \ln \lambda|^2\right) grad \ln \lambda \\
&+ 2(n-2) Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right) + \left(n(\Delta \ln f) + (2n-1)|grad \ln f|^2\right) grad \ln \lambda \\
&- grad\Delta \ln f - 4\nabla_{grad \ln \lambda} grad \ln f + 4(n-2)|grad \ln \lambda|^2 grad \ln f \\
&- \left(\Delta \ln f + 2|grad \ln f|^2\right) grad \ln f + 4(n-2)\nabla_{gard \ln f} grad \ln \lambda \\
&- 6 d \ln \lambda\left(grad \ln f\right) grad \ln f - \frac{3}{2} grad\left(|grad \ln f|^2\right) - 2 Ricci^M\left(grad \ln f\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

En particulier, si l'application ϕ est biharmonique, nous obtenons le résultat suivant.

corollaire 2.3.4 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ supposée biharmonique. Alors ϕ est bi-f-harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} & grad\Delta \ln f + 4\nabla_{grad\ln\lambda} grad \ln f - 4(n-2)\nabla_{grad\ln f} grad\ln\lambda \\ & + \left(\Delta \ln f + 2\left|grad\ln f\right|^2 - 4(n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2 + 6d\ln\lambda\left(grad\ln f\right)\right) grad\ln f \\ & - \left(n\Delta\ln f + (2n-1)\left|grad\ln f\right|^2\right) grad\ln\lambda + \frac{3}{2} grad\left(\left|grad\ln f\right|^2\right) + 2Ricci^M\left(grad\ln f\right) = 0. \end{aligned}$$

Grâce au corollaire 2.3.4, nous construisons un exemple d'une application bi-f-harmonique.

Exemple 2.3.1 *Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ l'inversion définie par*

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

On sait que ϕ est une application conforme biharmonique de dilatation

$$\lambda = \frac{1}{r^2}, \quad r = |x|.$$

Nous supposons que $\ln f$ est radiale $(\ln f = \alpha(r))$. En appliquant le résultat du corollaire 2.3.4, on déduit que l'inversion $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est bi-f-harmonique si et seulement si la fonction α satisfait l'équation différentielle suivante

$$\alpha''' + \frac{3}{r}\alpha'' - \frac{27}{r^2}\alpha' + 4\alpha'\alpha'' + \frac{5}{r}(\alpha')^2 + 2(\alpha')^3 = 0.$$

Posons $\beta = \alpha'$, cette dernière équation devient

$$\beta'' + \frac{3}{r}\beta' - \frac{27}{r^2}\beta + 4\beta\beta' + \frac{5}{r}\beta^2 + 2\beta^3 = 0.$$

Si on regarde les solutions de type $\beta = \dfrac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, on déduit que $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est bi-f-harmonique si et seulement si

$$2a^2 + a - 28 = 0.$$

Cette équation algébrique possède deux solutions $a = -4$ et $a = \dfrac{7}{2}$.

1. *Pour $a = -4$, on obtient $f(r) = Cr^{-4}$ et dans ce que l'inversion $\phi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est f-harmonic donc bi-f-harmonic.*

2. *Pour* $a = \frac{7}{2}$, *on obtient* $f(r) = Cr^{\frac{7}{2}}$ *; il suit que l'inversion* $\phi : \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$ *est bi-f-harmonique (non f-harmonique).*

Nous terminons ce chapitre par le calcul du tenseur bi-f-énergie pour une application conforme ϕ et on prouve que $S_{f,2}(\phi)$ dépend seulement de la dilatation et la fonction f.

Théorème 2.3.4 *Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ *une application conforme de dilatation* λ, *nous avons*

$$\begin{aligned} S_{f,2}(\phi) = {} & f^2\lambda^2 \left(-\frac{(n-2)^2}{2} |grad \ln \lambda|^2 + \frac{3}{2} |grad \ln f|^2 \right) g \\ & + f^2\lambda^2 \left((2-n)\, d\ln\lambda\,(grad \ln f) + (2-n)\,\Delta \ln \lambda + \Delta \ln f \right) g \\ & + f^2\lambda^2 \left(2(n-2)\, sym\,(d\ln\lambda \odot d\ln f) - 2\,(d\ln f)^2 \right) \\ & - 2f^2\lambda^2 \left((2-n)\,\nabla d\ln\lambda + \nabla d \ln f \right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

et la trace de $S_{f,2}(\phi)$ *est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} Tr_g S_{f,2}(\phi) = {} & -(n-2)^2 f^2\lambda^2 \left(\Delta \ln \lambda + \frac{n}{2} |grad \ln \lambda|^2 \right) \\ & + (n-2) f^2\lambda^2 \left(3d\ln\lambda\,(grad \ln f) + \Delta \ln f \right) \\ & + \frac{3n-4}{2} f^2\lambda^2 |grad \ln f|^2 . \end{aligned} \tag{2.31}$$

Preuve. Le tenseur bi-f-énergie est défini par

$$\begin{aligned} S_{f,2}(\phi) = {} & \left(\frac{1}{2} |\tau_f(\phi)|^2 + f Tr_g h\,(\nabla \tau_f(\phi), d\phi) \right) g \\ & - 2f sym h\,(\nabla \tau_f(\phi), d\phi) . \end{aligned}$$

Comme ϕ est conforme de dilatation λ, on a donc

$$\tau_f(\phi) = (2-n) f d\phi\,(grad \ln \lambda) + f d\phi\,(grad \ln f)$$

et

$$\begin{aligned} |\tau_f(\phi)|^2 = {} & (n-2)^2 f^2\lambda^2 |grad \ln \lambda|^2 + f^2\lambda^2 |grad \ln f|^2 \\ & + 2(2-n) f^2\lambda^2 d\ln\lambda\,(grad \ln f) . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Calculons le terme $Tr_g h\left(\nabla\tau_f(\phi), d\phi\right)$, Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée sur M, on a

$$\begin{aligned}
Tr_g h\left(\nabla\tau_f(\phi), d\phi\right) &= (2-n)\, h\left(\nabla^{\phi}_{e_i} f d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) + h\left(\nabla^{\phi}_{e_i} f d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) \\
&= (2-n)\, fh\left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) + (2-n)\, h\left(e_i(f)\, d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) \\
&+ fh\left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) + h\left(e_i(f)\, d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) \\
&= (2-n)\, fh\left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) + (2-n)\, fh\left(d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi\left(grad \ln f\right)\right) \\
&+ fh\left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) + fh\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\left(grad \ln f\right)\right) \\
&= (2-n)\, fh\left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) + (2-n)\, f\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) \\
&+ fh\left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) + f\lambda^2\left|grad \ln f\right|^2.
\end{aligned}$$

Il est connu que (voir [2])

$$\begin{aligned}
h\left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) &= h\left(\nabla d\phi\left(e_i, grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) + h\left(d\phi\left(\nabla_{e_i} grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) \\
&= h\left(\left|grad \ln\lambda\right|^2 d\phi(e_i), d\phi(e_i)\right) + \lambda^2 g\left(\nabla_{e_i} grad \ln\lambda, e_i\right) \\
&= n\lambda^2\left|grad \ln\lambda\right|^2 + \lambda^2\Delta\ln\lambda
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h\left(\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) &= h\left(\nabla d\phi\left(e_i, grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) + h\left(d\phi\left(\nabla_{e_i} grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) \\
&= h\left(e_i(\ln\lambda)\, d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(e_i)\right) + h\left(d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) d\phi(e_i), d\phi(e_i)\right) \\
&- h\left(e_i(\ln f)\, d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(e_i)\right) + \lambda^2 g\left(\nabla_{e_i} grad \ln f, e_i\right) \\
&= h\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi\left(grad \ln\lambda\right)\right) + d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) h\left(d\phi(e_i), d\phi(e_i)\right) \\
&- h\left(d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi\left(grad \ln f\right)\right) + \lambda^2 g\left(\nabla_{e_i} grad \ln f, e_i\right) \\
&= n\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) + \lambda^2\Delta\ln f.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
Tr_g h\left(\nabla\tau_f(\phi), d\phi\right) &= (2-n)\, nf\lambda^2\left|grad \ln\lambda\right|^2 + (2-n)\, f\lambda^2\Delta\ln\lambda \\
&+ 2f\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) + f\lambda^2\Delta\ln f + f\lambda^2\left|grad \ln f\right|^2.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Regardons maintenant le terme $symh\left(\nabla\tau_f(\phi), d\phi\right)$; nous avons par définition pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$symh\left(\nabla\tau_f(\phi), d\phi\right)(X,Y) = \frac{1}{2}\left(h\left(\nabla_X\tau_f(\phi), d\phi(Y)\right) + h\left(\nabla\tau_f(\phi), d\phi(X)\right)\right).$$

Pour le terme $h\left(\nabla_X \tau_f(\phi), d\phi(Y)\right)$, on a

$$\begin{aligned}
h\left(\nabla_X \tau_f(\phi), d\phi(Y)\right) &= (2-n)\, h\left(\nabla_X f d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(Y)\right) + h\left(\nabla_X f d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(Y)\right) \\
&= (2-n)\, f h\left(\nabla_X d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(Y)\right) + (2-n)\, X(f)\, h\left(d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(Y)\right) \\
&+ f h\left(\nabla_X d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(Y)\right) + X(f)\, h\left(d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(Y)\right) \\
&= (2-n)\, f h\left(\nabla_X d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(Y)\right) + (2-n)\, f\lambda^2 X(\ln f)\, Y(\ln\lambda) \\
&+ f h\left(\nabla_X d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(Y)\right) + f\lambda^2 X(\ln f)\, Y(\ln f).
\end{aligned}$$

le fait que ϕ est conforme nous donne

$$h\left(\nabla_X d\phi\left(grad \ln\lambda\right), d\phi(Y)\right) = \lambda^2 \left|grad \ln\lambda\right|^2 g(X,Y) + \lambda^2 \nabla d\ln\lambda\,(X,Y)$$

et

$$\begin{aligned}
h\left(\nabla_X d\phi\left(grad \ln f\right), d\phi(Y)\right) &= \lambda^2 X(\ln\lambda)\, Y(\ln f) + \lambda^2 d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) g(X,Y) \\
&- \lambda^2 X(\ln f)\, Y(\ln\lambda) + \lambda^2 \nabla d\ln f\,(X,Y),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
h\left(\nabla_X \tau_f(\phi), d\phi(Y)\right) &= (2-n)\, f\lambda^2 \left|grad \ln\lambda\right|^2 g(X,Y) + f\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) g(X,Y) \\
&+ (2-n)\, f\lambda^2 \nabla d\ln\lambda\,(X,Y) + f\lambda^2 X(\ln\lambda)\, Y(\ln f) + f\lambda^2 \nabla d\ln f\,(X,Y) \\
&- (n-1)\, f\lambda^2 X(\ln f)\, Y(\ln\lambda) + f\lambda^2 X(\ln f)\, Y(\ln f).
\end{aligned}$$

Par un simple calcul, on arrive à la formule suivante

$$\begin{aligned}
h\left(\nabla_Y \tau_f(\phi), d\phi(X)\right) &= (2-n)\, f\lambda^2 \left|grad \ln\lambda\right|^2 g(X,Y) + f\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) g(X,Y) \\
&+ (2-n)\, f\lambda^2 \nabla d\ln\lambda\,(X,Y) + f\lambda^2 X(\ln f)\, Y(\ln\lambda) + f\lambda^2 \nabla d\ln f\,(X,Y) \\
&- (n-1)\, f\lambda^2 X(\ln\lambda)\, Y(\ln f) + f\lambda^2 X(\ln f)\, Y(\ln f).
\end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
symh\left(\nabla \tau_f(\phi), d\phi\right)(X,Y) &= (2-n)\, f\lambda^2 \left|grad \ln\lambda\right|^2 g(X,Y) + f\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad \ln f\right) g(X,Y) \\
&+ (2-n)\, f\lambda^2 \nabla d\ln\lambda\,(X,Y) + f\lambda^2 \nabla d\ln f\,(X,Y) + f\lambda^2 \left(d\ln f\right)^2 (X,Y) \\
&- (n-2)\, f\lambda^2 sym\left(d\ln\lambda \odot d\ln f\right)(X,Y),
\end{aligned} \tag{2.34}$$

où

$$\left(d\ln f\right)^2 (X,Y) = d\ln f\,(X)\, d\ln f\,(Y) = X(\ln f)\, Y(\ln f)$$

et

$$\begin{aligned} sym\left(d\ln\lambda\odot d\ln f\right)(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(\left(d\ln\lambda\otimes d\ln f\right)(X,Y)+\left(d\ln\lambda\otimes d\ln f\right)(Y,X)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(X\left(\ln\lambda\right)Y\left(\ln f\right)+X\left(\ln f\right)Y\left(\ln\lambda\right)\right). \end{aligned}$$

Grâce aux équation (2.19), (2.20) et (2.21), nous concluons que

$$\begin{aligned} S_{f,2}\left(\phi\right)(X,Y) = f^2\lambda^2 & \left(-\frac{(n-2)^2}{2}\left|grad\ln\lambda\right|^2+\frac{3}{2}\left|grad\ln f\right|^2\right)g\left(X,Y\right) \\ & + f^2\lambda^2\left(\left(2-n\right)d\ln\lambda\left(grad\ln f\right)+\left(2-n\right)\Delta\ln\lambda+\Delta\ln f\right)g\left(X,Y\right) \\ & + f^2\lambda^2\left(2\left(n-2\right)sym\left(d\ln\lambda\odot d\ln f\right)-2\left(d\ln f\right)^2\right)(X,Y) \\ & - 2f^2\lambda^2\left(\left(2-n\right)\nabla d\ln\lambda+\nabla d\ln f\right)(X,Y). \end{aligned}$$

cela nous ramène à :

$$\begin{aligned} S_{f,2}\left(\phi\right) = f^2\lambda^2 & \left(-\frac{(n-2)^2}{2}\left|grad\ln\lambda\right|^2+\frac{3}{2}\left|grad\ln f\right|^2\right)g \\ & + f^2\lambda^2\left(\left(2-n\right)d\ln\lambda\left(grad\ln f\right)+\left(2-n\right)\Delta\ln\lambda+\Delta\ln f\right)g \\ & + f^2\lambda^2\left(2\left(n-2\right)sym\left(d\ln\lambda\odot d\ln f\right)-2\left(d\ln f\right)^2\right) \\ & - 2f^2\lambda^2\left(\left(2-n\right)\nabla d\ln\lambda+\nabla d\ln f\right). \end{aligned}$$

Terminons la preuve par le calcul de la du tenseur bi-f-énergie. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée sur M, on a

$$\begin{aligned} Tr_gS_{f,2}\left(\phi\right) &= S_{f,2}\left(\phi\right)(e_i,e_i) \\ &= f^2\lambda^2\left(-\frac{(n-2)^2}{2}\left|grad\ln\lambda\right|^2+\frac{3}{2}\left|grad\ln f\right|^2\right)g\left(e_i,e_i\right) \\ &+ f^2\lambda^2\left(\left(2-n\right)d\ln\lambda\left(grad\ln f\right)+\left(2-n\right)\Delta\ln\lambda+\Delta\ln f\right)g\left(e_i,e_i\right) \\ &+ f^2\lambda^2\left(2\left(n-2\right)sym\left(d\ln\lambda\odot d\ln f\right)-2\left(d\ln f\right)^2\right)(e_i,e_i) \\ &- 2f^2\lambda^2\left(\left(2-n\right)\nabla d\ln\lambda+\nabla d\ln f\right)(e_i,e_i) \\ &= f^2\lambda^2\left(-\frac{n(n-2)^2}{2}\left|grad\ln\lambda\right|^2+\frac{3n}{2}\left|grad\ln f\right|^2\right) \\ &+ f^2\lambda^2\left(\left(2-n\right)nd\ln\lambda\left(grad\ln f\right)+\left(2-n\right)n\Delta\ln\lambda+n\Delta\ln f\right) \\ &+ f^2\lambda^2\left(2\left(n-2\right)d\ln\lambda\left(grad\ln f\right)-2\left|grad\ln f\right|^2\right) \\ &- 2f^2\lambda^2\left(\left(2-n\right)\Delta\ln\lambda+\Delta\ln f\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Tr_g S_{f,2}(\phi) = &-(n-2)^2 f^2 \lambda^2 \left(\Delta \ln \lambda + \frac{n}{2} |grad \ln \lambda|^2\right) \\ &+ (n-2) f^2 \lambda^2 (d \ln \lambda (grad \ln f) + \Delta \ln f) \\ &+ \frac{3n-4}{2} f^2 \lambda^2 |grad \ln f|^2 . \end{aligned}$$

Remarque 2.3.5 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ, on a*

$$divS_{f,2}(\phi) = h(\tau_{f,2}(\phi), d\phi) + (Tr_g h(\nabla \tau_f(\phi), d\phi)) df$$

et

$$\begin{aligned} Tr_g h(\nabla \tau_f(\phi), d\phi) = &(2-n) f \lambda^2 (\Delta \ln \lambda) + (2-n) n f \lambda^2 |grad \ln \lambda|^2 \\ &+ f \lambda^2 (\Delta \ln f) + 3 \left(f \lambda^2\right) d \ln \lambda (grad \ln f) . \end{aligned}$$

Si on suppose que l'application ϕ est bi-f-harmonique, alors $divS_{f,2}(\phi)$ est nulle si et seulement si les fonctions λ et f vérifient l'équation suivante

$$(2-n) \Delta \ln \lambda + \Delta \ln f + (2-n) n |grad \ln \lambda|^2 + 3d \ln \lambda (grad \ln f) = 0.$$

Bibliographie

1. M. Ara : *Geometry of F-harmonic maps, Kodai Math. J. 22 (1999), no. 2, 243-263.*
2. *P. Baird ans J.C. Wood : Harmonic morphisms between Riemannain manifolds, Oxford Sciences Publications (2003).*
3. *M. Djaa and A. M. Cherif : On the genarilezed f-biharmonic maps and stress f-bi-energy tensor, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, JGSP 29 (2013), 65-81.*
4. *N.E.H. Djaa and A. M. Cherif : General f-harmonic morphisms, Arab J Math Sci 22 (2016), 275-284.*
5. *J. Eells and L. Lemaire : A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 16 (1978), 1-68.*
6. *J. Eells and L. Lemaire : Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.*
7. *J. Eells and L. Lemaire : Selected topics in harmonic maps, CNMS Regional Conference Series of the National Sciences Foundation, (1981).*
8. *J. Eells and A. Ratto : Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries, Princeton University Press (1993).*

9. *G. Y. Jiang : 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, Chinese Ann. Math. Ser. A 7(1986), 389-402.*

10. *W.J. Lu : f-Harmonic maps of doubly warped product manifolds, Appl. Math. J. Chinese Univ, 28(2),(2013), 240-252.*

11. *W.J. Lu : On f-bi-harmonic maps and bi-f-harmonic maps between Riemannian manifolds, Sci. China Math. 58 (2015), no. 7, 1483-1498.*

12. *Y. Luo and Y-L.Ou : Some rems on Bi-f-Harmonic Maps and f-Biharmonic Maps, Results in Mathematics, 74, number 97 (2019), 1-19.*

13. *S. Ouakkas and D. Djebbouri, Conformal Maps, Biharmonic Maps, and the Warped Product. Mathematics 2016, 4, 15 ; doi : 10.3390/math 4010015.*

14. *S. Ouakkas, R. Nasri and M. Djaa : On the f-Biharmonic maps, JP J. Geom. Topo. 10(1), (2010), 11-27.*

15. *Z.-P. Wang, Y.-L. Ou and H.-C. Yanga : Biharmonic and f -biharmonic maps from a 2-sphere, J. Geom. Phys. 104 (2016), 137-147.*

Chapitre 3

Applications biharmoniques et déformations $\mathcal{D}$-isométriques des variétés presque de contact.

Sommaire

3.1 Introduction.

Il existe plusieurs types de déformations concernant les structures presques de contact. La notion de la $\mathcal{D}$- déformation conforme généralisée est étudiée dans [9] où les auteurs donnent quelques structures particulière concernant ce type de déformation et ils étudient la courbure scalaire associée. Dans ce chapitre, on étudie un autre type de déformation, dit déformation $\mathcal{D}$-isométrique, on présente quelques résulats liés à cette déformation, on donne la relation entre les connexions de Lévi-Civita tions de $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ et $\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ et on traite quelques cas particuliers. L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier l'harmonicité et la biharmonicité relatives à ce type de déformation. Les résultats obtenus dans ce chapitre font l'objet d'un papier en cours de finalisation et qui doit être soumis.

3.2 Structures presque de contact

Définition 3.2.1 *On considé¨re*

1. *M une variété différentiable de dimension impaire $2n+1$.*
2. *φ un champs de tenseur de type $(1,1)$.*
3. *ξ un champ de vecteurs.*
4. *η une 1-forme sur M.*

Le triplet (φ,ξ,η) est dit une structure presque de contact sur M tel que

$$\eta(\xi)=1, \qquad \varphi^2X=-X+\eta(X)\xi.$$

Définition 3.2.2 *Une variété presque de contact est une variété de dimension impaire $2n+1$ munie d'une structure presque de contact (φ,ξ,η). Dans ce cas,on a les propriétés suivantes*

$$\varphi\xi=0, \quad \eta\circ\varphi=0, \quad rang\varphi=2n$$

Théorème 3.2.1 *Toute variété presque de contact (M,φ,ξ,η) admet une métrique Riemannienne g compatible avec la structure presque de contact (φ,ξ,η) telle que :*

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \quad ,g(X,\xi)=\eta(X), \quad \forall X,Y\in\Gamma(TM)$$

et

$$g(X,\varphi Y)+g(\varphi X,Y)=0.$$

Définition 3.2.3 *Une variété métrique presque de contact (M,φ,ξ,η,g) est une variété presque de contact (M,φ,ξ,η) munie d'une métrique Riemannienne g telle que cette métrique soit compatible avec la structure presque de cantact (φ,ξ,η).*
Dans ce cas, toute variété métrique presque de contact (M,φ,ξ,η,g) admet une base orthonormé locale, $\{X_i,\varphi X_i,\xi\}_{i=1}^n$ appelée $\varphi-$base.

Définition 3.2.4 *Pour chaque structure métrique presque de contact* (φ, ξ, η, g) *su* M *on définit la 2-forme fontdamentale* Φ *par :*

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

La 2-forme fontdamentale Φ *posséde les propriétés suivante :*

1. $\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X)$, *c.a.d,* Φ *est anti-symétrique.*
2. $\Phi(\varphi X, \varphi Y) = \Phi(X, Y)$, *c.a.d,* Φ *est invariante é* φ.

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Définition 3.2.5 *On dit qu'une variété* M^{2n+1} *admet une structure presque de contact s'il existe une 1-forme différentielle globale* η *et une 2-forme différentielle globale* Φ *sur* M *telle que,*

$$\eta \wedge \phi^n \neq 0.$$

3.2.1 Variété de Kenmotsu

Définition 3.2.6 *Une variété métrique presque de contact* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est dite variété de Kenmotsu si*

$$d\eta = 0 \qquad \text{et} \qquad d\Phi = 2\Phi \wedge \eta,$$

et la triplet (φ, ξ, η) *est normale.*

Théorème 3.2.2 *Soient* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variétépresque de contact de dimension* $(2n+1)$ *et* ∇ *la connection de Levi-Cevita sur* M. *On dit que* M *est une variété de Kenmotsu si et seulement si pour tous* $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$(\nabla_X \varphi)Y = -g(X, \varphi Y) - \eta(Y)\varphi X.$$

De cette condition on peut déduire que

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi.$$

3.3 The main results.

On considère $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact. Une déformation $\mathcal{D}$-isométrique est définie de la manière suivante (voir [9])

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = \alpha\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \qquad \overline{g} = \beta g + \left(\alpha^2 - \beta\right)\eta \otimes \eta,$$

où α est une fonction positive sur M ; Notons que $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est aussi une variété presque de contact. Notons par ∇ et $\overline{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita sur $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ et $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ respectivement.

3.3.1 Quelques résultats sur la déformation $\mathcal{D}$-isometrique d'une variété presque de contact.

Proposition 3.3.1 *Soit $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact et soit $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-isométrique de $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$. Alors, on a*

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) &= g\left(\nabla_X Y, Z\right) + \alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\alpha\right) - \alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\alpha\right) \\
&\quad + \alpha\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\alpha\right) + \left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_X Y\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(X\right)\left\{g\left(\nabla_Y \xi, Z\right) - g\left(\nabla_Z \xi, Y\right)\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(Y\right)\left\{g\left(\nabla_X \xi, Z\right) - g\left(\nabla_Z \xi, X\right)\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(Z\right)\left\{g\left(\nabla_X \xi, Y\right) + g\left(\nabla_Y \xi, X\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 3.3.1. En utilisant la formule de Koszul, on a

$$\begin{aligned}
2\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) &= X\left(\overline{g}\left(Y, Z\right)\right) + Y\left(\overline{g}\left(X, Z\right)\right) - Z\left(\overline{g}\left(X, Y\right)\right) \\
&\quad + \overline{g}\left(\left[X, Y\right], Z\right) + \overline{g}\left(\left[Z, X\right], Y\right) - \overline{g}\left(X, \left[Y, Z\right]\right),
\end{aligned}$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma\left(TM\right)$. Comme $\overline{g} = g + \left(\alpha^2 - 1\right)\eta \otimes \eta$, on obtient

$$\begin{aligned}
2\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) &= X\left(g\left(Y, Z\right) + \left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)\right) \\
&\quad + Y\left(g\left(X, Z\right) + \left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)\right) \\
&\quad - Z\left(g\left(X, Y\right) + \left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right) \\
&\quad + g\left(\left[X, Y\right], Z\right) + \left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(\left[X, Y\right]\right)\eta\left(Z\right) \\
&\quad + g\left(\left[Z, X\right], Y\right) + \left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(\left[Z, X\right]\right)\eta\left(Y\right) \\
&\quad - g\left(X, \left[Y, Z\right]\right)\left(\alpha^2 - 1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(\left[Y, Z\right]\right).
\end{aligned}$$

Pour le terme $X\left(\beta g\left(Y,Z\right)+\left(\alpha^{2}-\beta\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)\right)$, un long calcul donne

$$\begin{aligned}
X\left\{g\left(Y,Z\right)+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)\right\} &= X\left(g\left(Y,Z\right)\right)+X\left\{\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)\right\} \\
&= g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)+g\left(Y,\nabla_{X}Z\right)+2\alpha\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\alpha\right) \\
&+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Z\right)\left\{g\left(\nabla_{X}\xi,Y\right)+\eta\left(\nabla_{X}Y\right)\right\} \\
&+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Y\right)\left\{g\left(\nabla_{X}\xi,Z\right)+\eta\left(\nabla_{X}Z\right)\right\}
\end{aligned}$$

Par un calcul similaire, on obtient

$$\begin{aligned}
Y\left(g\left(X,Z\right)+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)\right) &= g\left(\nabla_{Y}X,Z\right)+g\left(X,\nabla_{Y}Z\right)+2\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\alpha\right) \\
&+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Z\right)\left\{g\left(\nabla_{Y}\xi,X\right)+\eta\left(\nabla_{Y}X\right)\right\} \\
&+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(X\right)\left\{g\left(\nabla_{Y}\xi,Z\right)+\eta\left(\nabla_{Y}Z\right)\right\}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Z\left(g\left(X,Y\right)+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\right) &= g\left(\nabla_{Z}X,Y\right)+g\left(X,\nabla_{Z}Y\right)+2\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\alpha\right) \\
&+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Y\right)\left\{g\left(\nabla_{Z}\xi,X\right)+\eta\left(\nabla_{Z}X\right)\right\} \\
&+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(X\right)\left\{g\left(\nabla_{Z}\xi,Y\right)+\eta\left(\nabla_{Z}Y\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Finalement, il est clair que

$$\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(\left[X,Y\right]\right)\eta\left(Z\right)=\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_{X}Y\right)-\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_{Y}X\right),$$

$$\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(\left[Z,X\right]\right)\eta\left(Y\right)=\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(\nabla_{Z}X\right)-\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Y\right)\eta\left(\nabla_{X}Z\right)$$

et

$$\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(\left[Y,Z\right]\right)=\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(\nabla_{Y}Z\right)-\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(X\right)\eta\left(\nabla_{Z}Y\right).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{X}Y,Z\right) &= g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)+\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Z\right)Y\left(\alpha\right)-\alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)Z\left(\alpha\right) \\
&+\alpha\eta\left(Y\right)\eta\left(Z\right)X\left(\alpha\right)+\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Z\right)\eta\left(\nabla_{X}Y\right) \\
&+\frac{1}{2}\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(X\right)\left\{g\left(\nabla_{Y}\xi,Z\right)-g\left(\nabla_{Z}\xi,Y\right)\right\} \\
&+\frac{1}{2}\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Y\right)\left\{g\left(\nabla_{X}\xi,Z\right)-g\left(\nabla_{Z}\xi,X\right)\right\} \\
&+\frac{1}{2}\left(\alpha^{2}-1\right)\eta\left(Z\right)\left\{g\left(\nabla_{X}\xi,Y\right)+g\left(\nabla_{Y}\xi,X\right)\right\}.
\end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 3.3.1, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 *Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, la relation entre $\overline{\nabla}_X Y$ et $\nabla_X Y$ est donnée par*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \alpha\eta(X)\eta(Y)\, grad\alpha + \frac{\alpha^2-1}{2}\{\eta(X)\nabla_Y\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi\} \\ &- \frac{\alpha^2-1}{2}\{\eta(X)Tr_g\{g(\nabla_.\xi, Y)\cdot\} + \eta(Y)Tr_g\{g(\nabla_.\xi, X)\cdot\}\} \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\eta(X)\eta(Y)\xi(\alpha)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta(X)Y(\alpha)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta(Y)X(\alpha)\xi \\ &+ \frac{(\alpha^2-1)^2}{2\alpha^2}\{\eta(X)g(\nabla_\xi\xi, Y) + \eta(Y)g(\nabla_\xi\xi, X)\}\xi \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}\{g(\nabla_X\xi, Y)\xi + g(\nabla_Y\xi, X)\xi\},\end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$Tr_g g(X, \nabla_.\xi)\cdot = g(X, \nabla_{e_i}\xi)e_i + g(X, \nabla_{\varphi e_i}\xi)\varphi e_i + g(X, \nabla_\xi\xi)\xi.$$

Preuve du Théorème 3.5.1. Si on considère une base orthonormée $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}_{i=1}^m$ sur la variété métrique presque de contact $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, alors une base orthonormée sur $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est donnune base orthonorméee par

$$\left\{\overline{e}_i = e_i, \overline{\varphi e}_i = \varphi e_i, \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi\right\}_{i=1}^m.$$

For all $X, Y \in \Gamma(TM)$, we have

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{e}_i\right)\overline{e}_i + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\varphi e}_i\right)\overline{\varphi e}_i + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \overline{\xi}\right)\overline{\xi} \\ &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, e_i\right)e_i + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \varphi e_i\right)\varphi e_i + \frac{1}{\alpha^2}\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \xi\right)\xi.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Par la Proposition 3.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, e_i\right) &= g(\nabla_X Y, e_i) - \alpha\eta(X)\eta(Y)e_i(\alpha) \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{2}\eta(X)\{g(\nabla_Y\xi, e_i) - g(\nabla_{e_i}\xi, Y)\} \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{2}\eta(Y)\{g(\nabla_X\xi, e_i) - g(\nabla_{e_i}\xi, X)\},\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \varphi e_i\right) &= g(\nabla_X Y, \varphi e_i) - \alpha\eta(X)\eta(Y)(\varphi e_i)(\alpha) \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{2}\eta(X)\{g(\nabla_Y\xi, \varphi e_i) - g(\nabla_{\varphi e_i}\xi, Y)\} \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{2}\eta(Y)\{g(\nabla_X\xi, \varphi e_i) - g(\nabla_{\varphi e_i}\xi, X)\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y, \xi\right) &= \alpha^2 g\left(\nabla_X Y, \xi\right) + \alpha\eta\left(X\right) Y\left(\alpha\right) \\
&- \alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\alpha\right) + \alpha\eta\left(Y\right) X\left(\alpha\right) \\
&- \frac{\alpha^2-1}{2}\left\{\eta\left(X\right) g\left(\nabla_\xi \xi, Y\right) + \eta\left(Y\right) g\left(\nabla_\xi \xi, X\right)\right\} \\
&+ \frac{\alpha^2-1}{2}\left\{g\left(\nabla_X \xi, Y\right) + g\left(\nabla_Y \xi, X\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

En remplaçant ... dans ..., on déduit que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y = & \, g\left(\nabla_X Y, e_i\right) e_i + g\left(\nabla_X Y, \varphi e_i\right)\varphi e_i + g\left(\nabla_X Y, \xi\right)\xi \\
& - \alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) e_i\left(\alpha\right) e_i - \alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\left(\varphi e_i\right)\left(\alpha\right)\varphi e_i \\
& - \alpha\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\alpha\right)\xi + \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)\xi\left(\alpha\right)\xi \\
& + \frac{\alpha^2-1}{2}\eta\left(X\right) g\left(\nabla_Y \xi, e_i\right) e_i + \frac{\alpha^2-1}{2}\eta\left(X\right) g\left(\nabla_Y \xi, \varphi e_i\right)\varphi e_i \\
& + \frac{\alpha^2-1}{2}\eta\left(Y\right) g\left(\nabla_X \xi, e_i\right) e_i + \frac{\alpha^2-1}{2}\eta\left(Y\right) g\left(\nabla_X \xi, \varphi e_i\right)\varphi e_i \\
& - \frac{\alpha^2-1}{2}\eta\left(X\right) g\left(\nabla_{e_i} \xi, Y\right) e_i - \frac{\alpha^2-1}{2}\eta\left(X\right) g\left(\nabla_{\varphi e_i} \xi, Y\right)\varphi e_i \\
& - \frac{\alpha^2-1}{2}\eta\left(Y\right) g\left(\nabla_{e_i} \xi, X\right) e_i - \frac{\alpha^2-1}{2}\eta\left(Y\right) g\left(\nabla_{\varphi e_i} \xi, X\right)\varphi e_i \\
& - \frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}\left\{\eta\left(X\right) g\left(\nabla_\xi \xi, Y\right)\xi + \eta\left(Y\right) g\left(\nabla_\xi \xi, X\right)\xi\right\} \\
& + \frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}\left\{g\left(\nabla_X \xi, Y\right)\xi + g\left(\nabla_Y \xi, X\right)\xi\right\} \\
& + \frac{1}{\alpha}\eta\left(X\right) Y\left(\alpha\right)\xi + \frac{1}{\alpha}\eta\left(Y\right) X\left(\alpha\right)\xi.
\end{aligned}$$

Finalement, notons que

$$g\left(\nabla_X \xi, \xi\right) = g\left(\nabla_Y \xi, \xi\right) = 0$$

and using the fact that

$$\nabla_X Y = g\left(\nabla_X Y, e_i\right) e_i + g\left(\nabla_X Y, \varphi e_i\right)\varphi e_i + g\left(\nabla_X Y, \xi\right)\xi,$$

$$grad\alpha = e_i\left(\alpha\right) e_i + \left(\varphi e_i\right)\left(\alpha\right)\varphi e_i + \xi\left(\alpha\right)\xi,$$

$$Tr_g\left\{g\left(\nabla_{.}\xi, X\right)\cdot\right\} = g\left(\nabla_{e_i}\xi, X\right) e_i + g\left(\nabla_{\varphi e_i}\xi, X\right)\varphi e_i + g\left(\nabla_\xi \xi, X\right)\xi,$$

$$Tr_g\left\{g\left(\nabla_{.}\xi, Y\right)\cdot\right\} = g\left(\nabla_{e_i}\xi, Y\right) e_i + g\left(\nabla_{\varphi e_i}\xi, Y\right)\varphi e_i + g\left(\nabla_\xi \xi, Y\right)\xi,$$

$$\nabla_X \xi = g\left(\nabla_X \xi, e_i\right) e_i + g\left(\nabla_X \xi, \varphi e_i\right)\varphi e_i,$$

$$\nabla_Y \xi = g\left(\nabla_Y \xi, e_i\right) e_i + g\left(\nabla_Y \xi, \varphi e_i\right) \varphi e_i,$$

nous concluons que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \alpha \eta(X) \eta(Y)\, grad\alpha + \frac{\alpha^2-1}{2}\left\{\eta(X) \nabla_Y \xi + \eta(Y) \nabla_X \xi\right\} \\
&- \frac{\alpha^2-1}{2}\left\{\eta(X)\, Tr_g\left\{g\left(\nabla_. \xi, Y\right) \cdot\right\} + \eta(Y)\, Tr_g\left\{g\left(\nabla_. \xi, X\right) \cdot\right\}\right\} \\
&+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha} \eta(X) \eta(Y) \xi(\alpha) \xi + \frac{1}{\alpha} \eta(X) Y(\alpha) \xi + \frac{1}{\alpha} \eta(Y) X(\alpha) \xi \\
&+ \frac{\left(\alpha^2-1\right)^2}{2\alpha^2}\left\{\eta(X) g\left(\nabla_\xi \xi, Y\right) + \eta(Y) g\left(\nabla_\xi \xi, X\right)\right\} \xi \\
&+ \frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}\left\{g\left(\nabla_X \xi, Y\right) \xi + g\left(\nabla_Y \xi, X\right) \xi\right\},
\end{aligned}$$

Du Thèorème 3.5.1, si $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu, on obtient le corollaire suivant.

Corollary 3.3.1 *Soit $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu, alors la relation entre $\overline{\nabla}_X Y$ et $\nabla_X Y$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \alpha \eta(X) \eta(Y)\, grad\alpha \\
&+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha} \eta(X) \eta(Y) \xi(\alpha) \xi \\
&+ \frac{1}{\alpha}\left\{\eta(X) Y(\alpha) + \eta(Y) X(\alpha)\right\} \xi \\
&+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\left\{g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)\right\} \xi
\end{aligned}$$

Preuve du Corollaire 3.5.1. Le fait que $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété de Kenmotsu nous parmet de simplifier l'équation ... on a

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X) \xi, \quad \nabla_Y \xi = Y - \eta(Y) \xi,$$

alors

$$\eta(X) \nabla_Y \xi + \eta(Y) \nabla_X \xi = \eta(Y) X + \eta(X) Y - 2\eta(X) \eta(Y) \xi$$

et comme

$$\eta(e_i) = \eta(\varphi e_i) = 0, \quad \eta(\xi) = 1,$$

on obtient

$$\nabla_{e_i} \xi = e_i, \quad \nabla_{\varphi e_i} \xi = \varphi e_i, \quad \nabla_\xi \xi = 0.$$

il suit que

$$Tr_g\left\{g\left(\nabla_. \xi, X\right) \cdot\right\} = X - \eta(X) \xi$$

et

$$Tr_g \{g(\nabla.\xi, Y)\cdot\} = Y - \eta(Y)\xi,$$

alors

$$\eta(X) Tr_g \{g(\nabla.\xi, Y)\cdot\} + \eta(Y) Tr_g \{g(\nabla.\xi, X)\cdot\} = \eta(Y) X + \eta(X) Y - 2\eta(X)\eta(Y)\xi.$$

Finalement, il est facile de voir que

$$g(\nabla_X \xi, Y) = g(\nabla_Y \xi, X) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

et

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = 2g(X, Y) - 2\eta(X)\eta(Y),$$

ce qui donne

$$Tr_g \{g(\nabla.\xi, X)\cdot\} = X - \eta(X)\xi.$$

Revenir à l'équation .. et en utilisant les formules obtenues, on déduit que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y &- \alpha\eta(X)\eta(Y) grad\alpha \\ &+ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\eta(X)\eta(Y)\xi(\alpha)\xi \\ &+ \frac{1}{\alpha}\{\eta(X) Y(\alpha) + \eta(Y) X(\alpha)\}\xi \\ &+ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}\{g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\}\xi. \end{aligned}$$

3.3.2 La biharmonicité de l'application identité $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g\right)$.

Proposition 3.3.2 *Soient $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ et $(N^{2n+1}, \varphi_N, \xi_N, \eta_N, h)$ deux varétés métriques presque de contact et soit $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-isométrique de $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$. Notons par $\tau(\phi)$ le champ de tension de l'application lisse ϕ : $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow (N^{2n+1}, \varphi_N, \xi_N, \eta_N, h)$ et par $\overline{\tau}(\phi)$ le champ de tension de ϕ : $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (N^{2n+1}, \varphi_N, \xi_N, \eta_N, h)$. alors, la relation entre $\overline{\tau}(\phi)$ et $\tau(\phi)$ est donnépar*

$$\begin{aligned} \overline{\tau}(\phi) = \tau(\phi) + \frac{1}{\alpha} d\phi(grad\alpha) - \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^3}\xi(\alpha) d\phi(\xi) \\ - \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}(div\xi) d\phi(\xi) - \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}\nabla_\xi d\phi(\xi). \end{aligned}$$

En particulier, Si on considère l'application identité Id : $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, on obtient

$$\overline{\tau}(Id) = \frac{1}{\alpha} grad\alpha - \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi - \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}\{(div\xi)\xi + \nabla_\xi \xi\}.$$

Peuve de la proposition 3.3.2. Choisissons une base orthonormée $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}_{i=1}^m$ sur la varété métrique presque de contact $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, alors une base orthonormée $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}_{i=1}^m$ sur $\left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est donnée par

$$\left\{\overline{e_i} = e_i, \overline{\varphi e_i} = \varphi e_i, \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi\right\}_{i=1}^m .$$

par définition, le champ de tension de $\phi : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (N^{2n+1}, \varphi_N, \xi_N, \eta_N, h)$ est défini par

$$\begin{aligned}\overline{\tau}(\phi) &= Tr_{\overline{g}}\nabla d\phi \\ &= \nabla_{\overline{e_i}} d\phi(\overline{e_i}) - d\phi\left(\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i}\right) + \nabla_{\overline{\varphi e_i}} d\phi(\overline{\varphi e_i}) \\ &- d\phi\left(\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i}\right) + \nabla_{\overline{\xi}} d\phi\left(\overline{\xi}\right) - d\phi\left(\overline{\nabla}_{\overline{\xi}}\overline{\xi}\right) \\ &= \nabla_{e_i} d\phi(e_i) + \nabla_{\varphi e_i} d\phi(\varphi e_i) + \frac{1}{\alpha}\nabla_\xi \frac{1}{\alpha} d\phi(\xi) \\ &- d\phi\left(\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i}\right) - d\phi\left(\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i}\right) - d\phi\left(\overline{\nabla}_{\overline{\xi}}\overline{\xi}\right).\end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 3.3.1, on obtient

$$\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i} = \overline{\nabla}_{e_i} e_i = \nabla_{e_i} e_i + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} g\left(\nabla_{e_i}\xi, e_i\right)\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i} = \nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} g\left(\nabla_{\varphi e_i}\xi, \varphi e_i\right)\xi,$$

$$\overline{\nabla}_\xi \xi = \alpha^2 \nabla_\xi \xi - \alpha grad\alpha + \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\xi(\alpha)\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\overline{\xi}}\overline{\xi} = \nabla_\xi \xi - \frac{1}{\alpha} grad\alpha + \frac{1}{\alpha}\xi(\alpha)\xi$$

et un calcul simple donne

$$\frac{1}{\alpha}\nabla_\xi \frac{1}{\alpha} d\phi(\xi) = \frac{1}{\alpha^2}\nabla_\xi d\phi(\xi) - \frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha) d\phi(\xi).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}\overline{\tau}(\phi) &= \tau(\phi) + \frac{1}{\alpha} d\phi(grad\alpha) - \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^3}\xi(\alpha) d\phi(\xi) \\ &- \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}(div\xi) d\phi(\xi) - \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}\nabla_\xi d\phi(\xi),\end{aligned}$$

où $\tau(\phi)$ est le champ de tension de $\phi : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow (N^{2n+1}, \varphi_N, \xi_N, \eta_N, h)$.

Remarque 3.3.1 *Si $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est une varété de Kenmotsu, les résultats obtenues dans la proposition 3.3.2 devient*

$$\begin{aligned}\overline{\tau}(\phi) &= \tau(\phi)+\frac{1}{\alpha}d\phi(grad\alpha)-\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\xi(\alpha)d\phi(\xi)\\ &-\frac{2m(\alpha^2-1)}{\alpha^2}d\phi(\xi)-\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\nabla_\xi d\phi(\xi)\end{aligned}$$

et

$$\overline{\tau}(Id)=\frac{1}{\alpha}grad\alpha-\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi-\frac{2m(\alpha^2-1)}{\alpha^2}\xi$$

Théorème 3.3.2 *Soit $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une varété de Kenmotsu et soit $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-isométrique de $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ où nous supposons que la fonction α dépend seulement sur la direction de ξ. Alors, l'application identité Id : $\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)\longrightarrow(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}&\alpha^2\xi(\xi(\xi(\alpha)))-10\alpha\xi(\xi(\alpha))\xi(\alpha)+6m\alpha^2\xi(\xi(\alpha))+15(\xi(\alpha))^3\\ &-22m\alpha(\xi(\alpha))^2+8m^2\alpha^2\xi(\alpha)-4m\alpha^4\xi(\alpha)-8m^2\alpha^5\left(\alpha^2-1\right)=0.\end{aligned}$$

Lemma 3.3.1 *Soit $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété de Kenmotsu et soit $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-isométrique de $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ où nous supposons que la fonction α dépend seulement sur la direction de ξ. Soit f une fonction qui dépend seulement sur la direction de ξ, alors on a*

$$Tr_{\overline{g}}\nabla^2 f\xi=\frac{1}{\alpha^2}\xi(\xi(f))\xi-\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi(f)\xi+2\left(\frac{m}{\alpha^2}\xi(f)-mf\right)\xi.$$

Preuve du Lemme 3.3.1. Soit f une fonction qui dépend seulement sur la direction de ξ, on a

$$e_i(f)=(\varphi e_i)(f)=0,\quad gradf=\xi(f)\xi.$$

Comme $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est une variété de Kenmotsu, alors

$$\nabla_{e_i}\xi=e_i,\quad \nabla_{\varphi e_i}\xi=\varphi e_i,\quad \nabla_\xi\xi=0$$

et

$$\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\xi=\nabla_{e_i}e_i+m\xi,\quad \nabla_{\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i}\xi=\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i+m\xi.$$

Avant de calculer $Tr_{\overline{g}}\nabla^2 f\xi$, nous prouverons certaines propriétéés. on a

$$\begin{aligned} e_i\left(\xi\left(f\right)\right) &= e_i\left(g\left(\xi, gradf\right)\right) \\ &= g\left(\nabla_{e_i}\xi, gradf\right) + g\left(\xi, \nabla_{e_i} gradf\right) \\ &= g\left(e_i, gradf\right) + g\left(e_i, \nabla_{\xi} gradf\right) \\ &= e_i\left(f\right) + g\left(e_i, \nabla_{\xi}\xi\left(f\right)\xi\right) \\ &= \xi\left(\xi\left(f\right)\right) g\left(e_i, \xi\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$e_i\left(\xi\left(f\right)\right) = 0.$$

De même, nous montrons que

$$\left(\varphi e_i\right)\left(\xi\left(f\right)\right) = 0.$$

on en déduit aussi que la fonction $\xi\left(f\right)$ dépend seulement sur la direction de ξ. Simplifions le terme $\left(\nabla_{e_i} e_i\right)\left(f\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{e_i} e_i\right)\left(f\right) &= g\left(\nabla_{e_i} e_i, gradf\right) \\ &= g\left(\nabla_{e_i} e_i, \xi\left(f\right)\xi\right) \\ &= \xi\left(f\right) g\left(\nabla_{e_i} e_i, \xi\right) \\ &= -\xi\left(f\right) g\left(e_i, \nabla_{e_i}\xi\right) \\ &= -\xi\left(f\right) g\left(e_i, e_i\right), \end{aligned}$$

il suit que

$$\left(\nabla_{e_i} e_i\right)\left(f\right) = -m\xi\left(f\right).$$

Un calcul similaire donne

$$\left(\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i\right)\left(f\right) = -m\xi\left(f\right).$$

La même méthode de calcul nous conduit à l'équation suivante

$$\left(\nabla_{e_i} e_i\right)\left(\xi\left(f\right)\right) = \left(\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i\right)\left(\xi\left(f\right)\right) = -m\xi\left(\xi\left(f\right)\right).$$

Par définition

$$\begin{aligned} Tr_{\overline{g}}\nabla^2 f\xi &= \nabla_{\overline{e_i}}\nabla_{\overline{e_i}} f\xi - \nabla_{\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i}} f\xi \\ &+ \nabla_{\overline{\varphi e_i}}\nabla_{\overline{\varphi e_i}} f\xi - \nabla_{\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i}} f\xi \\ &+ \nabla_{\overline{\xi}}\nabla_{\overline{\xi}} f\xi - \nabla_{\overline{\nabla}_{\overline{\xi}}\overline{\xi}} f\xi \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dans ce cas, on a

$$\overline{e_i} = e_i, \quad \overline{\varphi e_i} = \varphi e_i, \quad \overline{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \quad \overline{\nabla}_{\overline{\xi}}\overline{\xi} = 0$$

et

$$\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i} = \nabla_{e_i}e_i + \frac{m\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha^2}\xi, \quad \overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i} = \nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i + \frac{m\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha^2}\xi.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overline{e_i}}\nabla_{\overline{e_i}}f\xi - \nabla_{\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i}}f\xi &= \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}f\xi - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}f\xi - \frac{m\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha^2}\nabla_\xi f\xi \\
&= f\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\xi - f\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\xi - \left(\nabla_{e_i}e_i\right)(f)\,\xi - \frac{m\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha^2}\xi\,(f)\,\xi \\
&= f\nabla_{e_i}e_i - f\left(\nabla_{e_i}e_i + m\xi\right) + m\xi\,(f)\,\xi - \frac{m\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha^2}\xi\,(f)\,\xi \\
&= \frac{m}{\alpha^2}\xi\,(f)\,\xi - mf\xi.
\end{aligned}$$

Il suit que

$$\nabla_{\overline{e_i}}\nabla_{\overline{e_i}}f\xi - \nabla_{\overline{\nabla}_{\overline{e_i}}\overline{e_i}}f\xi = \left(\frac{m}{\alpha^2}\xi\,(f) - mf\right)\xi. \tag{3.7}$$

La même méthode de calcul nous donne

$$\nabla_{\overline{\varphi e_i}}\nabla_{\overline{\varphi e_i}}f\xi - \nabla_{\overline{\nabla}_{\overline{\varphi e_i}}\overline{\varphi e_i}}f\xi = \left(\frac{m}{\alpha^2}\xi\,(f) - mf\right)\xi. \tag{3.8}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overline{\xi}}\nabla_{\overline{\xi}}f\xi &= \frac{1}{\alpha}\nabla_\xi\frac{1}{\alpha}\nabla_\xi f\xi \\
&= \frac{1}{\alpha}\nabla_\xi\frac{1}{\alpha}\xi\,(f)\,\xi \\
&= \frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{1}{\alpha}\xi\,(f)\right)\xi,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\nabla_{\overline{\xi}}\nabla_{\overline{\xi}}f\xi = \frac{1}{\alpha^2}\xi\left(\xi\,(f)\right)\xi - \frac{1}{\alpha^3}\xi\,(\alpha)\,\xi\,(f)\,\xi. \tag{3.9}$$

En remplaé§ant (3.7), (3.8) et (3.9) dans (3.6), on déduit que

$$Tr_{\overline{g}}\nabla^2 f\xi = \frac{1}{\alpha^2}\xi\left(\xi\,(f)\right)\xi - \frac{1}{\alpha^3}\xi\,(\alpha)\,\xi\,(f)\,\xi + 2\left(\frac{m}{\alpha^2}\xi\,(f) - mf\right)\xi.$$

Preuve du Théorème 3.5.2. Le champ de tension de l'application identité $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g\right)$ est donné par

$$\overline{\tau}\,(Id) = \frac{1}{\alpha}grad\alpha - \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\xi\,(\alpha)\,\xi - \frac{2m\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha^2}\xi.$$

Le fait que α dépend uniquement de la direction de ξ nous donne $e_i(\alpha) = (\varphi e_i)(\alpha) = 0$ et $grad\alpha = \xi(\alpha)\xi$, ce qui donne

$$\overline{\tau}(Id) = -\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi - \frac{2m(\alpha^2-1)}{\alpha^2}\xi.$$

De cette dernière équation, nous en déduisons que $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est harmonique si et seulement si

$$\xi(\alpha) + 2m\alpha\left(\alpha^2 - 1\right) = 0.$$

L'application identité $Id : \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right) \longrightarrow (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} &Tr_{\overline{g}}\nabla^2\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi\right) + 2mTr_{\overline{g}}\nabla^2\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\xi\right) \\ &+\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha) + \frac{2m(\alpha^2-1)}{\alpha^2}\right)Tr_{\overline{g}}R(\xi,\cdot)\cdot = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant le Lemme 3.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} Tr_{\overline{g}}\nabla^2\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi\right) &= \frac{1}{\alpha^2}\xi\left(\xi\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\right)\right)\xi - \frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\right)\xi \\ &+ 2\left(\frac{m}{\alpha^2}\xi\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\right) - \frac{m}{\alpha^3}\xi(\alpha)\right)\xi. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\xi\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\right) = \frac{1}{\alpha^3}\xi(\xi(\alpha)) - \frac{3}{\alpha^4}(\xi(\alpha))^2$$

et

$$\xi\left(\xi\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\right)\right) = \frac{1}{\alpha^3}\xi(\xi(\xi(\alpha))) - \frac{9}{\alpha^4}\xi(\xi(\alpha))\xi(\alpha) + \frac{12}{\alpha^5}(\xi(\alpha))^3,$$

alors

$$\begin{aligned} Tr_{\overline{g}}\nabla^2\left(\frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi\right) &= \frac{1}{\alpha^5}\xi(\xi(\xi(\alpha)))\xi - \frac{10}{\alpha^6}\xi(\xi(\alpha))\xi(\alpha)\xi \\ &+ \frac{2m}{\alpha^5}\xi(\xi(\alpha))\xi + \frac{15}{\alpha^7}(\xi(\alpha))^3\xi \\ &- \frac{6m}{\alpha^6}(\xi(\alpha))^2\xi - \frac{2m}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} Tr_{\overline{g}}\nabla^2\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\xi\right) &= \frac{1}{\alpha^2}\xi\left(\xi\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)\right)\xi - \frac{1}{\alpha^3}\xi(\alpha)\xi\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)\xi \\ &+ \frac{2m}{\alpha^2}\xi\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)\xi - \frac{2m(\alpha^2-1)}{\alpha^2}\xi. \end{aligned}$$

La même méthode de calcul nous amène à

$$\xi\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)=\frac{2}{\alpha^3}\xi(\alpha)$$

et

$$\xi\left(\xi\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)\right)=\frac{2}{\alpha^3}\xi(\xi(\alpha))-\frac{6}{\alpha^4}(\xi(\alpha))^2,$$

il suit que

$$\begin{aligned}Tr_{\overline{g}}\nabla^2\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\xi\right)&=\frac{2}{\alpha^5}\xi(\xi(\alpha))\xi-\frac{8}{\alpha^6}(\xi(\alpha))^2\xi\\&+\frac{4m}{\alpha^5}\xi(\alpha)\xi-\frac{2m(\alpha^2-1)}{\alpha^2}\xi.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Pour compléter la preuve, il est simple de vérifier qu'on a

$$Tr_{\overline{g}}R(\xi,\cdot)\cdot=-2m\xi.\tag{3.13}$$

En substituant (3.11) , (3.12) et (3.13) dans (3.10), on déduit que l'application identité $Id:\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)\longrightarrow\left(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g\right)$ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}&\alpha^2\xi(\xi(\xi(\alpha)))-10\alpha\xi(\xi(\alpha))\xi(\alpha)+6m\alpha^2\xi(\xi(\alpha))+15(\xi(\alpha))^3\\&-22m\alpha(\xi(\alpha))^2+8m^2\alpha^2\xi(\alpha)-4m\alpha^4\xi(\alpha)-8m^2\alpha^5\left(\alpha^2-1\right)=0.\end{aligned}$$

Exemple 3.3.1 *([3]) Considérons la variété $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,z\neq0\}$. M est une variété de Kenmotsu, la métrique riemannienne sur M est définie par*

$$g=\frac{1}{z^2}dx^2+\frac{1}{z^2}dy^2+\frac{1}{z^2}dz^2,$$

et la base orthonormée est donnée par $e_1=z\frac{\partial}{\partial x}$, $e_2=\varphi e_1=z\frac{\partial}{\partial y}$ and $\xi=e_3=-z\frac{\partial}{\partial z}$. Les champs de vecteurs e_1, e_2 et e_3 satisfont

$$\begin{array}{lll}\nabla_{e_1}e_1=0, & \nabla_{e_1}e_2=0, & \nabla_{e_1}e_3=e_1,\\ \nabla_{e_2}e_1=0, & \nabla_{e_2}e_2=0, & \nabla_{e_2}e_3=e_2,\\ \nabla_{e_3}e_1=0, & \nabla_{e_3}e_2=0, & \nabla_{e_3}e_3=0.\end{array}$$

On suppose que la fonction α depend seulement de z. L'application identité $Id:\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)\longrightarrow(M,\varphi,\xi,\eta,g)$ est harmonique si et seulement si la fonction α est une solution de l'équation différentielle suivante

$$z\alpha'-2\alpha\left(\alpha^2-1\right)=0.$$

La solution générale de cette équation est

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - Cz^4}}.$$

L'application identité $Id : \left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g} = g + \left(\frac{Cz^4}{1 - Cz^4} \right) \eta \otimes \eta \right) \longrightarrow (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est harmonique. En utilisant le Théorème 3.5.2, on déduit que l'application identité* $Id : \left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g} \right) \longrightarrow (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} & z^3 \alpha^2 \alpha^{(3)} - 3z^2 \alpha^2 \alpha'' - 10z^3 \alpha \alpha' \alpha'' \\ & + 3z \alpha^2 \alpha' - 4z \alpha^4 \alpha' + 12z^2 \alpha \left(\alpha' \right)^2 \\ & + 15z^3 \left(\alpha' \right)^3 + 8\alpha^5 \left(\alpha^2 - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

3.3.3 La biharmonicité de l'application identité $Id : \left(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g \right) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g} \right)$.

Soit $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Kenmotsu et soit $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g} \right)$ une déformation $\mathcal{D}$-isométrique de $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ où nous supposons que la fonction α dépend uniquement de la direction de ξ. Par Théorème 3.5.1, la relation entre $\overline{\nabla}$ et ∇ est donnée par

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y & - \frac{1}{\alpha} \eta(X) \eta(Y) \xi(\alpha) \xi \\ & + \frac{1}{\alpha} \left\{ \eta(X) Y(\alpha) + \eta(Y) X(\alpha) \right\} \xi \\ & + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \left\{ g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \right\} \xi. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour étudier la biharmonicité de $Id : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g} \right)$, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemma 3.3.2 *Soit* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *une variété de Kenmotsu et soit* $\left(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g} \right)$ *une déformation* $\mathcal{D}$*-isométrique de* $(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *où nous supposons que la fonction* α *dépend uniquement de la direction de* ξ*. Soit* f *une fonction qui dépend uniquement de la direction de* ξ*, alors on a*

$$Tr_{\overline{g}} \nabla^2 f\xi = \frac{1}{\alpha^2} \xi(\xi(f)) \xi - \frac{1}{\alpha^3} \xi(\alpha) \xi(f) \xi + 2 \left(\frac{m}{\alpha^2} \xi(f) - mf \right) \xi.$$

Preuve du Lemme 3.3.2. par définition, on a

$$\begin{aligned} Tr_g \overline{\nabla}^2 f\xi = & \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} f\xi - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} f\xi + \overline{\nabla}_{\varphi e_i} \overline{\nabla}_{\varphi e_i} f\xi \\ & - \overline{\nabla}_{\nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i} f\xi + \overline{\nabla}_\xi \overline{\nabla}_\xi f\xi. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.14), on obtient

$$\overline{\nabla}_{e_i} f\xi = f\nabla_{e_i}\xi = fe_i,$$

alors

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} f\xi = f\overline{\nabla}_{e_i}e_i = f\nabla_{e_i}e_i + \frac{m\left(\alpha^2-1\right)f}{\alpha^2}\xi.$$

En utilisant le fait que

$$\eta\left(\nabla_{e_i}e_i\right) = -m, \quad \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\xi = \nabla_{e_i}e_i + m\xi$$

et

$$\left(\nabla_{e_i}e_i\right)(f) = -m\xi\left(f\right), \quad \left(\nabla_{e_i}e_i\right)(\alpha) = -m\xi\left(\alpha\right),$$

on obtient aussi

$$\overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i} f\xi = f\nabla_{e_i}e_i - \frac{mf}{\alpha}\xi\left(\alpha\right)\xi - m\xi\left(f\right)\xi + mf\xi,$$

ce qui nous donne

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} f\xi - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i} f\xi = \frac{mf}{\alpha}\xi\left(\alpha\right)\xi + m\xi\left(f\right)\xi - \frac{mf}{\alpha^2}\xi.$$

Un calcul similaire donne

$$\overline{\nabla}_{\varphi e_i}\overline{\nabla}_{\varphi e_i} f\xi - \overline{\nabla}_{\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i} f\xi = \frac{mf}{\alpha}\xi\left(\alpha\right)\xi + m\xi\left(f\right)\xi - \frac{mf}{\alpha^2}\xi$$

Finalement, un calcul rigoureux nous conduit à

$$\overline{\nabla}_{\xi}\overline{\nabla}_{\xi} f\xi = \frac{f}{\alpha}\xi\left(\xi\left(\alpha\right)\right)\xi + \xi\left(\xi\left(f\right)\right)\xi + \frac{2}{\alpha}\xi\left(\alpha\right)\xi\left(f\right)\xi.$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned} Tr_g\overline{\nabla}^2 f\xi &= \frac{f}{\alpha}\xi\left(\xi\left(\alpha\right)\right)\xi + \xi\left(\xi\left(f\right)\right)\xi + \frac{2}{\alpha}\xi\left(\alpha\right)\xi\left(f\right)\xi \\ &\quad + \frac{2mf}{\alpha}\xi\left(\alpha\right)\xi + 2m\xi\left(f\right)\xi - \frac{2mf}{\alpha^2}\xi \end{aligned}$$

Lemma 3.3.3 *Soit $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété de Kenmotsu et soit $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-isométrique de $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ où nous supposons que la fonction α dépend uniquement de la direction de ξ. Soit f une fonction qui dépend uniquement de la direction de ξ, alors on a*

$$Tr_{\overline{g}}\nabla^2 f\xi = \frac{1}{\alpha^2}\xi\left(\xi\left(f\right)\right)\xi - \frac{1}{\alpha^3}\xi\left(\alpha\right)\xi\left(f\right)\xi + 2\left(\frac{m}{\alpha^2}\xi\left(f\right) - mf\right)\xi.$$

Preuve du Lemme 3.3.3. Par définition, on a

$$Tr_g\overline{R}(\xi,\cdot)\cdot=\overline{R}(\xi,e_i)\,e_i+\overline{R}(\xi,\varphi e_i)\,\varphi e_i+\overline{R}(\xi,\xi)\,\xi.$$

Le premier terme $\overline{R}(\xi,e_i)\,e_i$ est défini par

$$\overline{R}(\xi,e_i)\,e_i=\overline{\nabla}_\xi\overline{\nabla}_{e_i}e_i-\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_\xi e_i-\overline{\nabla}_{[\xi,e_i]}\xi.$$

Terme par terme, de longs calculs nous donnent les formules suivantes

$$\overline{\nabla}_\xi\overline{\nabla}_{e_i}e_i=\nabla_\xi\nabla_{e_i}e_i+\frac{m}{\alpha^3}\xi(\alpha)\,\xi,$$

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_\xi e_i=\nabla_{e_i}\nabla_\xi e_i$$

et

$$\overline{\nabla}_{[\xi,e_i]}\xi=\nabla_{[\xi,e_i]}\xi,$$

il suit que

$$\overline{R}(\xi,e_i)\,e_i=\frac{m}{\alpha^3}\xi(\alpha)\,\xi-m\xi.$$

La même méthode de calcul donne

$$\overline{R}(\xi,\varphi e_i)\,\varphi e_i=\frac{m}{\alpha^3}\xi(\alpha)\,\xi-m\xi.$$

Enfin, il est trés simple de voir que

$$\overline{R}(\xi,\xi)\,\xi=0.$$

on déduit que

$$Tr_g\overline{R}(\xi,\cdot)\cdot=\frac{2m}{\alpha^3}\xi(\alpha)\,\xi-2m\xi$$

Théorème 3.3.3 *Soit $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété de Kenmotsu et soit $\left(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ une déformation $\mathcal{D}$-isométrique de $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ où nous supposons que la fonction α dépend uniquement de la direction de ξ. Alors, l'application identité Id : $(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)\longrightarrow\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ est biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}&\alpha^2\xi(\xi(\xi(\alpha)))-10\alpha\xi(\xi(\alpha))\,\xi(\alpha)+6m\alpha^2\xi(\xi(\alpha))+15(\xi(\alpha))^3\\&-22m\alpha(\xi(\alpha))^2+8m^2\alpha^2\xi(\alpha)-4m\alpha^4\xi(\alpha)-8m^2\alpha^5\left(\alpha^2-1\right)=0.\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 3.3.3. Le champ de tension de l'application identité $Id:(M^{2m+1},\varphi,\xi,\eta,g)\longrightarrow\left(M^{2m+1},\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g}\right)$ est défini par

$$\overline{\tau}(Id)=\overline{\nabla}_{e_i}e_i-\nabla_{e_i}e_i+\overline{\nabla}_{\varphi e_i}\varphi e_i-\nabla_{\varphi e_i}\varphi e_i+\overline{\nabla}_\xi\xi.$$

En utilisant les équations suivantes

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_i = \nabla_{e_i} e_i + \frac{m\left(\alpha^2 - 1\right)}{\alpha^2} \xi,$$

$$\overline{\nabla}_{\varphi e_i} \varphi e_i = \nabla_{\varphi_i} \varphi e_i + \frac{m\left(\alpha^2 - 1\right)}{\alpha^2} \xi$$

et

$$\overline{\nabla}_{\xi} \xi = \frac{1}{\alpha} \xi\left(\alpha\right) \xi,$$

on obtient

$$\overline{\tau}\left(Id\right) = \frac{1}{\alpha} \xi\left(\alpha\right) \xi + \frac{2m\left(\alpha^2 - 1\right)}{\alpha^2} \xi.$$

on déduit que $Id : \left(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g\right) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est harmonique si et seulement si

$$\alpha \xi\left(\alpha\right) + 2m\left(\alpha^2 - 1\right) = 0.$$

L'application identité $Id : \left(M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g\right) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est biharmonique si et seulement si

$$Tr_g \overline{\nabla}^2 \left(\frac{1}{\alpha} \xi\left(\alpha\right)\right) \xi + 2m Tr_g \overline{\nabla}^2 \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}\right) \xi$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha} \xi\left(\alpha\right) + \frac{2m\left(\alpha^2 - 1\right)}{\alpha^2}\right) Tr_g \overline{R}\left(\xi, \cdot\right) \cdot = 0.$$

En utilisant le Lemme 3.3.2, on obtient

$$Tr_g \overline{\nabla}^2 \left(\frac{1}{\alpha} \xi\left(\alpha\right)\right) \xi = \frac{1}{\alpha} \xi\left(\xi\left(\xi\left(\alpha\right)\right)\right) \xi + \frac{2m}{\alpha} \xi\left(\xi\left(\alpha\right)\right) \xi - \frac{2m}{\alpha^3} \xi\left(\alpha\right) \xi$$

et

$$Tr_g \overline{\nabla}^2 \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}\right) \xi = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^3} \xi\left(\xi\left(\alpha\right)\right) \xi + \frac{1}{\alpha^4} \left(\xi\left(\alpha\right)\right)^2 \xi$$
$$+ \frac{2m\left(\alpha^2 + 1\right)}{\alpha^3} \xi\left(\alpha\right) \xi - \frac{2m\left(\alpha^2 - 1\right)}{\alpha^4} \xi.$$

Enfin, en utilisant le Lemme 3.3.3, on trouve

$$\left(\frac{1}{\alpha} \xi\left(\alpha\right) + \frac{2m\left(\alpha^2 - 1\right)}{\alpha^2}\right) Tr_g \overline{R}\left(\xi, \cdot\right) \cdot = \frac{2m}{\alpha^4} \left(\xi\left(\alpha\right)\right)^2 \xi + \frac{4m^2\left(\alpha^2 - 1\right)}{\alpha^5} \xi\left(\alpha\right) \xi$$
$$- \frac{2m}{\alpha} \xi\left(\alpha\right) \xi - \frac{4m^2\left(\alpha^2 - 1\right)}{\alpha^2} \xi.$$

Alors, l'application identité $Id : (M^{2m+1}, \varphi, \xi, \eta, g) \longrightarrow \left(M^{2m+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}\right)$ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\alpha^4 \xi\left(\xi\left(\xi\left(\alpha\right)\right)\right) + 2m\alpha^2\left(2\alpha^2+1\right)\xi\left(\xi\left(\alpha\right)\right) + 4m\alpha\left(\xi\left(\alpha\right)\right)^2 \\
&+ \left\{2m\left(2m-1\right)\alpha^4 + 2m\left(4m-1\right)\alpha^2 - 4m^2\right\}\xi\left(\alpha\right) \\
&- 4m^2\alpha\left(\alpha^4-1\right) = 0.
\end{aligned}$$

References

1. P. Baird and J. Eells : *Harmonic morphisms between Riemannain manifolds, Oxford Sciences Publications (2003).*
2. *U.C. De and A.K. Mondal : On 3-dimensional normal almost contact metric manifolds satisfying certain curvature conditions, Commun. Korean Math. Soc. 24 (2009), No. 2, pp. 265-275.*
3. *A. De : On Kenmotsu manifold, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. Volume 2 No. 3 (2010), pp. 1-6.*
4. *J. Eells and L. Lemaire : A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 16 (1978), 1-68.*
5. *J. Eells and L. Lemaire : Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.*
6. *J. Eells and L. Lemaire : Selected topics in harmonic maps, CNMS Regional Conference Series of the National Sciences Foundation, November 1981.*
7. *G. Ghosh and U. C. De : Kenmotsu manifolds with generalized Tanaka-Webster connection, Publications de l'Institut Mathematique-Beograd. Volume 102 (2017), pp. 221-230.*
8. *D.L. Kiran Kumar, H.G. Nagaraja and K. Venu : D-homothetically deformed Kenmotsu metric as a Ricci soliton, Annales Mathematicae Silesianae. Volume 33 (2019), pp. 143-152.*
9. *N. Özdemir, S. Aktay and M.Solgun : On generalized D-conformal deformations of certain almost contact metric manifolds, Mathematics 2019, 7(2), 168 ; https ://doi.org/10.3390/*
10. *A.M. Pastore and V. Saltarelli : Generalized nullity distributions on almost Kenmotsu manifolds, International Electronic Journal of Geometry. Volume 4 No. 2 (2011), pp. 168-183.*
11. *M.D. Siddiqi : η-Ricci solitons in 3-dimensional normal almost contact metric manifolds, Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III : Mathematics, Informatics, Physics. Volume 11(60) No. 2 (2018), pp. 215-234.*

Annexe

3.4 Applications f-biharmoniques

Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive. L'application ϕ est dite f-harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle f-énergie :

$$E_f(\phi) = \frac{1}{2}\int_M f|d\phi|^2 dv_g$$

par rapport aux variations supportées de manière compacte. De manière équivalente, ϕ est f-harmonique si elle satisfait les équations d'Euler-Lagrange associées :

$$\tau_f(\phi) = f\tau(\phi) + d\phi\,(gradf) = f\,(\tau(\phi) + d\phi\,(grad\ln f)) = 0,$$

$\tau_f(\phi)$ est appelé le champ du f-tension de ϕ. L'application ϕ est dite f-biharmonique isi elle est un point critique de la fonctionnelle f-bi-énergie :

$$E_{2,f}(\phi) = \frac{1}{2}\int_M f|\tau(\phi)|^2 dv_g.$$

De manière équivalente, ϕ est f-biharmonique si elle satisfait les équations d'Euler-Lagrange associées :

$$\tau_{2,f}(\phi) = f\tau_2(\phi) - (\Delta f)\,\tau(\phi) - 2\nabla_{gradf}\tau(\phi) = 0, \tag{3.15}$$

$\tau_{2,f}(\phi)$ est appelé le champ de f-bi-tension de ϕ. Contrairement au fait que toute application harmonique est biharmonique, une application f-harmonique n'est pas nécessairement f-biharmonique.

3.5 The main results of f-biharmonic maps.

En premier lieu, on peut simplifier la formule donnée par (3.15) pour obtenir la remarque suivante.

Remarque 3.5.1 *Un simple calcul donne* $\Delta f = f\Delta \ln f + f\left|grad \ln f\right|^2$ *et* $gradf = fgrad \ln f$. *Alors*

$$\tau_{2,f}\left(\phi\right) = f\left\{\tau_2\left(\phi\right) - \left(\Delta \ln f + \left|grad \ln f\right|^2\right)\tau\left(\phi\right) - 2\nabla_{grad \ln f}\tau\left(\phi\right)\right\}. \tag{3.16}$$

nous déduisons que ϕ *est* f*-biharmonique si et seulement si*

$$\tau_2\left(\phi\right) - \left(\Delta \ln f + \left|grad \ln f\right|^2\right)\tau\left(\phi\right) - 2\nabla_{grad \ln f}\tau\left(\phi\right) = 0. \tag{3.17}$$

Il est clair que toute application harmonique est f-biharmonique. Si l'application ϕ est biharmonique ($\tau_2(\phi) = 0$), alors ϕ est f-biharmonique si et seulement si

$$\left(\Delta \ln f + \left|grad \ln f\right|^2\right)\tau\left(\phi\right) + 2\nabla_{grad \ln f}\tau\left(\phi\right) = 0.$$

3.5.1 The case of conformal maps.

Nous étudions les applications conformes entre les variétés équidimensionnelles de dimension $n \geq 3$. Notons que par le résultat obtenu dans [4], une telle application ne peut avoir aucun point critique, donc c'est un difféomorphisme localement conforme . Rappelons qu'une application $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ est dite conforme s'il existe une fonction de classe C^∞ $\lambda : M \to \mathbb{R}_+^*$ de telle sorte que pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$:

$$h(d\phi(X), d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y).$$

La fonction λ est dite la dilation pour l'application ϕ. Le champ de tension pour une application conforme est donné par (voir [4]) :

$$\tau(\phi) = (2 - n)d\phi(grad \ln \lambda).$$

Théorème 3.5.1 *([11]) Soit* $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ *une application conforme de dilation* λ*, alors le champ de bi-tension de* ϕ *est donné par*

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\,d\phi\,(H)$$

où

$$\begin{aligned} H = {} & grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) + 2Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right) \\ & - \left(2\left(\Delta \ln \lambda\right) + (n-2)\left|grad \ln \lambda\right|^2\right) grad \ln \lambda. \end{aligned}$$

Pour tous $X \in \Gamma\left(TM\right)$*, l'opérateur* $Ricci^M$ *est défini par*

$$Ricci^M(X) = Tr_g R^M\left(X, \cdot\right)\cdot = R^M\left(X, e_i\right)e_i$$

où $\left(e_i\right)_{1\leq i\leq m}$ *est une base orthonormée locale sur* M *(nous sommons sur les indices répé-tés).*

La f-biharmonicité d'une application conforme est donnée par le théoreme suivant.

Théorème 3.5.2 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation λ, alors ϕ est f-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} &grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) + 2\nabla_{grad \ln f} grad \ln \lambda \\ &- \left(2\left(\Delta \ln \lambda\right) + (n-2)\,|grad \ln \lambda|^2 - \Delta \ln f - |grad \ln f|^2\right) grad \ln \lambda \\ &+ 2\,|grad \ln \lambda|^2\, grad \ln f + 2Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Preuve du Théorème 3.5.2. Par l'équation (3.16), le champ de f-bitension de ϕ est

$$\tau_{2,f}(\phi) = f\left\{\tau_2(\phi) - \left(\Delta \ln f + |grad \ln f|^2\right)\tau(\phi) - 2\nabla_{grad \ln f}\tau(\phi)\right\}. \tag{3.19}$$

Comme ϕ est une application conforme, alors

$$\tau(\phi) = (2-n)d\phi(grad \ln \lambda)$$

et

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi\,(H)$$

où

$$\begin{aligned} H = {} & grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) + 2Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right) \\ & - \left(2\left(\Delta \ln \lambda\right) + (n-2)\,|grad \ln \lambda|^2\right) grad \ln \lambda, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\tau_{2,f}(\phi) = (n-2)\, f\left\{d\phi\,(H) + \left(\Delta \ln f + |grad \ln f|^2\right) d\phi\,(grad \ln \lambda) + 2\nabla_{grad \ln f} d\phi\,(grad \ln \lambda)\right\}.$$

Pour le terme $\nabla_{grad \ln f} d\phi\,(grad \ln \lambda)$, nous avons (voir [4])

$$\begin{aligned} \nabla_{grad \ln f} d\phi\,(grad \ln \lambda) &= \nabla d\phi\,(grad \ln \lambda, grad \ln f) + d\phi\,(\nabla_{grad \ln f}\, grad \ln \lambda) \\ &= |grad \ln \lambda|^2\, d\phi\,(grad \ln f) + d\phi\,(\nabla_{grad \ln f}\, grad \ln \lambda). \end{aligned}$$

Alors

$$\tau_{2,f}(\phi) = (n-2)\, f d\phi\left(H + \left(\Delta \ln f + |grad \ln f|^2\right) grad \ln \lambda + 2\,|grad \ln \lambda|^2\, grad \ln f + 2\nabla_{grad \ln f}\, grad \ln\right.$$

Finalement, nous concluons que le champ de f-bitension de ϕ est donné par

$$\tau_{2,f}(\phi) = (n-2)\, f d\phi\,(H\,(\lambda, f))$$

où

$$\begin{aligned} H\,(\lambda, f) = {} & grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) + 2\nabla_{grad \ln f}\, grad \ln \lambda \\ & - \left(2\left(\Delta \ln \lambda\right) + (n-2)\,|grad \ln \lambda|^2 - \Delta \ln f - |grad \ln f|^2\right) grad \ln \lambda \\ & + 2\,|grad \ln \lambda|^2\, grad \ln f + 2Ricci^M\left(grad \ln \lambda\right). \end{aligned}$$

En considérant le fait que $n \geq 3$, nous concluons que l'application conforme ϕ est f-biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} H(\lambda, f) &= grad\Delta \ln \lambda - \frac{(n-6)}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) + 2\nabla_{grad \ln f} grad \ln \lambda \\ &- \left(2(\Delta \ln \lambda) + (n-2)|grad \ln \lambda|^2 - \Delta \ln f - |grad \ln f|^2\right) grad \ln \lambda \\ &+ 2|grad \ln \lambda|^2 grad \ln f + 2Ricci^M(grad \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 3.5.2.

Dans la partie suivante, nous présenterons un exemple d'applications f-biharmoniques. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ $(n \geq 3)$ l'inversion definée par $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$. ϕ est une application conforme avec dilation $\lambda = \frac{1}{r^2}$ $(r = |x|)$. Supposons que $\ln f$ est radiale $(\ln f = \alpha(r))$. Alors par Théorème 3.5.2, nous en déduisons que l'application $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est f-biharmonique si et seulement si la fonction α satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{1}{r}\alpha'' + \frac{(n-7)}{r^2}\alpha' + \frac{1}{r}(\alpha')^2 - \frac{4(n-4)}{r^3} = 0.$$

Soit $\beta = \alpha'$, cette équation devient

$$\frac{1}{r}\beta' + \frac{(n-7)}{r^2}\beta + \frac{1}{r}\beta^2 - \frac{4(n-4)}{r^3} = 0.$$

Cherchons des solutions particulières de type $\beta = \frac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, alors
$\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est f-biharmonique si et seulement si

$$a^2 + (n-8)a - 4(n-4) = 0.$$

Cette équation a deux solutions $a = 4$ et $a = 4 - n$.

1. Pour $a = 4$, nous obtenons $f(r) = Cr^4$ et dans ce cas l'inversion $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est f-biharmonique.
2. Pour $a = 4 - n$, nous obtenons $f(r) = Cr^{4-n}$; il suit que l'inversion $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est f-biharmonique.

Comme conséquence du théorème 3.5.2, si nous supposons que $f = \lambda$, nous obtenons le corollaire suivant.

corollaire 3.5.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilation λ, alors ϕ est λ-biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} &grad\Delta \ln \lambda - \left(\Delta \ln \lambda + (n-5)|grad \ln \lambda|^2\right) grad \ln \lambda \\ &- \frac{(n-8)}{2} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) + 2Ricci^M(grad \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

En particulier, nous prouvons que la λ-biharmonicité de l'application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ où la dilatation λ est radiale $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ and $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ est équivalent à une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre. Plus précisément, nous avons

Remarque 3.5.2 *Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ quand nous supposons que* $\ln \lambda$ *est radiale* $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ *and* $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. *Un calcul direct donne*

$$grad \ln \lambda = \alpha' \frac{\partial}{\partial r},$$

$$|grad \ln \lambda|^2 = (\alpha')^2,$$

$$grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) = 2\alpha'\alpha'' \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta \ln \lambda = \alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha'$$

et

$$grad(\Delta \ln \lambda) = \left(\alpha''' + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha'\right)\frac{\partial}{\partial r}.$$

Par conséquent ϕ est λ-biharmonique si et seulement si la fonction α satisfait l'équation différentielle suivante

$$\alpha''' - (n-7)\alpha'\alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha' - \frac{n-1}{r}(\alpha')^2 - (n-5)(\alpha')^3 = 0.$$

Si nous dénotons $\beta = \alpha'$, la λ-biharmonicité de ϕ est équivalente à l'équation différentielle

$$\beta'' - (n-7)\beta\beta' + \frac{n-1}{r}\beta' - \frac{n-1}{r^2}\beta - \frac{n-1}{r}\beta^2 - (n-5)\beta^3 = 0.$$

Cherchons des solutions particulières de type $\beta = \frac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, nous déduisons que $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ est λ-biharmonique si et seulement si a est une solution de l'équation algébrique

$$(n-5)a^2 + 6a + 2n - 4 = 0.$$

Cette équation a de solutions réelles si et seulement si $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.

1. *Si $n = 3$, nous trouvons $a = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ ou $a = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, alors $\lambda = Cr^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}$ ou $\lambda = Cr^{\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)}$ $(C \in \mathbb{R}_+^*)$. Il s'ensuit que toute application conforme ϕ :*

$(\mathbb{R}^3, g) \to (N^3, h)$ de dilation $\lambda = Cr^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}$ ou $\lambda = Cr^{\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)}$ est λ-biharmonique.

2. *Si $n = 4$, nous trouvons $a = 3 + \sqrt{13}$ ou $a = 3 - \sqrt{13}$, donc $\lambda = Cr^{\left(3+\sqrt{13}\right)}$ ou $\lambda = Cr^{\left(3-\sqrt{13}\right)}$ $(C \in \mathbb{R}_+^*)$. Il s'ensuit que toute application conforme $\phi : (\mathbb{R}^4, g) \to (N^4, h)$ de dilation $\lambda = Cr^{\left(3+\sqrt{13}\right)}$ ou $\lambda = Cr^{\left(3-\sqrt{13}\right)}$ est λ-biharmonique.*

3. *Si $n = 5$, nous trouvons $a = -1$, donc $\lambda = \dfrac{C}{r}$ $(C \in \mathbb{R}_+^*)$. Il s'ensuit que toute application conforme $\phi : (\mathbb{R}^5, g) \to (N^5, h)$ de dilation $\lambda = \dfrac{C}{r}$ est λ-biharmonique.*

4. *Si $n = 6$, nous trouvons $a = -2$ ou $a = -4$, alors $\lambda = \dfrac{C}{r^2}$ ou $\lambda = \dfrac{C}{r^4}$ $(C \in \mathbb{R}_+^*)$. Dans ce cas, toute application conforme $\phi : (\mathbb{R}^6, g) \to (N^6, h)$ de dilation $\lambda = \dfrac{C}{r^2}$ ou $\lambda = \dfrac{C}{r}$ est λ-biharmonique. par exemple, l'inversion $\phi : (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, g_{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, g_{\mathbb{R}^n})$ définie par $\phi(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$ est une application conforme de dilation $\lambda = \dfrac{1}{r^2}$ et elle est λ-biharmonique si et seulement si $n = 6$.*

References

1. M.A. Aprodu : *Some rems on p-harmonic maps, Stud. Cerc. Mat. 50 (1998), no. 5-6, 297-305.*
2. *P. Baird, A. Fardoun and S. Ouakkas : Conformal and semi-conformal biharmonic maps, Annals of Global Analysis and Geometry 34 (2008), 403-414.*
3. *P. Baird et D. Kamissoko : On constructing biharmonic maps and metrics, Annals of Global Analysis and Geometry 23 (2003), 65-75.*
4. *P. Baird ans J.C. Wood : Harmonic morphisms between Riemannain manifolds, Oxford Sciences Publications (2003).*
5. *A. Balmus : Biharmonic properties and conformal changes, An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat. (N.S.) 50 (2004), 367-372.*
6. *N.E.H. Djaa and A. M. Cherif : General f-harmonic morphisms, Arab J Math Sci 22 (2016), 275-284.*
7. *J. Eells and L. Lemaire : A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 16 (1978), 1-68.*

8. *J. Eells and L. Lemaire : Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.*

9. *J. Eells and L. Lemaire : Selected topics in harmonic maps, CNMS Regional Conference Series of the National Sciences Foundation, (1981).*

10. *J. Eells and A. Ratto : Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries, Princeton University Press (1993).*

11. *A. Fardoun : On equivariant p-harmonic maps, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 15, no 1 (1998), 25-72.*

12. *G. Y. Jiang : 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, Chinese Ann. Math. Ser. A 7(1986), 389-402.*

13. *W.J. Lu : f-Harmonic maps of doubly warped product manifolds, Appl. Math. J. Chinese Univ, 28(2),(2013), 240-252.*

14. *W.J. Lu : On f-bi-harmonic maps and bi-f-harmonic maps between Riemannian manifolds, Sci. China Math. 58 (2015), no. 7, 1483-1498.*

15. *C. Oniciuc : New examples of biharmonic maps in spheres, Colloq. Math., 97 (2003), 131-139.*

16. *S. Ouakkas : Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps.Diff. Geom. Appl, 26 (2008), 495-502.*

17. *Y.-L. Ou : p-harmonic morphisms, biharmonic morphisms, and non-harmonic biharmonic maps, J. Geom. Phys. Volume 56 (3), 358-374 (2006).*

18. *Z.-P. Wang, Y.-L. Ou and H.-C. Yanga : Biharmonic and f -biharmonic maps from a 2-sphere, J. Geom. Phys. 104 (2016), 137-147.*