

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et Matériaux

Présentée par

M. BENABDERRAHMANE Ismail

Intitulé de la thèse

Elaboration d'une démarche mathématique pour l'analyse du comportement des poutres en matériaux composites avancés

Soutenu le : -- / -- / 2022 Composition du jury :

Président	M. TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L SBA
Directeur de thèse	M. BENYOUCEF Samir	Pr	U.D.L SBA
Examineur	M. BOURADA Mohamed	Pr	U.D.L SBA
Examineur	M. MEKSI Abdeljalil	MCA	USTO-MB
Examineur	M. BOURADA Fouad	MCA	U-TISSEMSILIT
Examineur	M. CHIKH Abdelbaki	MCA	U-TIARET

Année universitaire 2022-2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je remercie en premier mon Dieu pour tout ce qu'il m'a donné.

Je remercie en second mes parents, qui ont sacrifiés leur vie pour notre bien.

Je remercie mon encadrant BENYOUCEF Samir, Professeur à l'Université de Djillali Lyebes-Sidi Belabbes. Il a fait preuve d'une grande disponibilité, m'a fourni un soutien constant et une aide précieuse. Il a toujours su me conseiller durant l'élaboration de ce travail de recherche, me faisant profiter ainsi de ses compétences théoriques et de son expérience.

Je remercie également Dr MEKERBI Mohamed pour ses collaborations, conseils et encouragements qu'ils m'ont apporté durant l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier très vivement et respectueusement le président du jury Professeur TOUNSI Abdelouahed et les membres : Pr. BOURADA Mohamed, Dr. MEKSI Abdeljalil, Dr. BOURADA Fouad, Dr. CHIKH Abdelbaki d'avoir accepté examiner mon travail.

Et toute ma famille.

ملخص

تقدم هذه الرسالة دراسة عن الاهتزازات الحرة لروافد متدرجة وظيفياً ثنائية الاتجاه تركز على عدة أنواع من الأساسات (المرنة والمطاطية اللزجة). خصائص المواد المتدرجة تم اعتبارها تتغير في اتجاه اول متمثل في السماكة و الثاني متمثل في الاتجاه الطولي من خلال قانون توزيع أسي للعناصر. قمنا أولاً بتحليل الاهتزاز الحر للروافد باستخدام نظرية ثنائية الأبعاد. يحتوي مجال الانتقال للنظرية المستخدمة على عناصر تكاملية غير محددة و يتضمن عدد مجاهيل مختصر. تعتمد الرافدة على دعائم بسيطة و موضوعة على أساس مرن متغير. سلوك الاهتزاز الحر تم استخراجه من خلال نظام معادلات تفاضلية مشتقة من مبدأ هاملتون.

في النموذج الثاني ، تم استخدام نظرية أخرى لدراسة تأثير أساس لزج مطاطي على السلوك الاهتزازي للرافدة في البيئة الحرارية. تم اعتبار تغير خصائص المواد بتغير درجة الحرارة. في هذه الحالة، استخرجت المعادلات باستخدام نظرية شبه ثلاثية الأبعاد تحتوي على أشكال متكاملة غير محددة بعدد قليل من المجاهيل. تأخذ النظرية في الاعتبار تمدد السمك بسبب طبيعتها شبه ثلاثية الأبعاد .

قمنا بدراسة دقة النماذج المستخدمة من خلال مقارنتها بالحلول الأخرى المستخدمة في الدراسات السابقة حيث تم الحصول على توافق جيد. تم إجراء دراسة وسيطية مفصلة لاستكشاف تأثير المعاملات المختلفة على خصائص الاهتزاز الحر للروافد.

الكلمات الرئيسية: رافدة بمواد متدرجة وظيفياً في اتجاهين، اهتزاز، أساس مرن و مطاطي لزج، نظرية شبه ثلاثية الأبعاد، أساس مرن، تردد أساسي.

Abstract

This thesis presents study the free vibration of bidirectional functionally graded beam (BDFG) resting on several kinds of foundations (elastic and viscoelastic). The material properties are assumed to be graded in thickness and longitudinal directions by a power law distribution.

In the first model, the free vibration analysis of BDFG beam's is modeled using 2D displacement field that contain undetermined integral terms and involves a reduced unknown functions. The beam is considered simply supported and resting on variable elastic foundation. The differential equation system governing the free vibration behavior is derived by the Hamilton principle.

In the second model, another theory is used to study the effect of a viscoelastic foundation on BDFG beam's vibration behavior in thermal environment. The properties of materials are also assumed to be temperature-dependent. The governing equations are found analytically using a quasi-3D theory that contains undetermined integral forms and involves few unknowns. The theory takes into account the stretching effect due to its quasi three-dimensional nature.

The accuracy of the used models can be noticed by comparing it with other solutions available in the literature where a good conformance was obtained. A detailed parametric study is conducted to explore the influence of different parameters on the free vibration characteristics of the BDFG beams.

Keywords: *BDFG beam, vibration, elastic and viscoelastic foundation, quasi 3D theory, fundamental frequencies.*

Résumé

Cette thèse présente une étude du comportement vibratoire d'une poutre fonctionnellement graduée bidirectionnelle (BDFG) reposant sur plusieurs types de fondations (élastiques et viscoélastiques). Les propriétés du matériau sont supposées être variées à travers l'épaisseur et la direction longitudinale selon la loi de puissance.

Dans le premier modèle, l'analyse du comportement vibratoire d'une poutre BDFG est modélisée à l'aide d'un champ de déplacement 2D qui contient des termes intégraux indéterminés avec un nombre réduit d'inconnus. La poutre est reposée sur une fondation élastique variable. Les équations de mouvement sont dérivées en utilisant le principe Hamilton.

Dans le deuxième modèle, une autre théorie (quasi-3D) est utilisée pour étudier l'effet d'inclusion d'une fondation viscoélastique sur le comportement vibratoire d'une poutre BDFG dans un environnement thermique. Les propriétés des matériaux sont dépendantes de la température. La théorie prend en compte l'effet d'étirement dû à sa nature quasi tridimensionnelle.

La précision des modèles utilisés est analysée en comparaison avec les solutions disponibles dans la littérature où une bonne conformité a été obtenue. Une étude paramétrique détaillée est menée pour explorer l'influence de différents paramètres sur le comportement vibratoire d'une poutre BDFG.

Mots-clés: *Poutre BDFG, vibration, fondation élastique et viscoélastique, théorie quasi-3D, fréquence fondamentale.*

Liste des figures

Figure 1.1 Types des FGM (a) discontinue, (b) continue (Islam et al.2019).....	4
Figure 1.2 Variation du module de Young suivant la loi exponentielle (Chi et Chung (2006)).....	5
Figure 1.3 Variation de la fraction volumique suivant la loi de puissance.....	6
Figure 1.4 Variation de la fraction volumique suivant la loi sigmoïde.....	6
Figure 1.5 Effet de la variation du modèle micromécanique sur la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ (Ali Rachdi et al. (2020)).....	8
Figure 1.6 Variation du module de Young avec différents modèles micromécaniques (Mahmoudi et al (2018)).....	8
Figure 1.7 Modèle de porosité d'une plaque poreuse FG (Shahsavari et al. 2018).....	10
Figure 1.8 Variation de la température critique de flambement (T_{cr}) en fonction du rapport (b/a) avec une température uniforme pour différentes distributions de la porosité ($p=1, k_w=k_p=10$) (Mekerbi et al 2019).....	10
Figure 1.9 Poutre FGM graduée suivant l'épaisseur.....	11
Figure 1.10 Poutre FGM graduée axialement.....	12
Figure 1.11 Comparaison de la déflexion d'une plaque FG sur la longueur avec différents directions du gradient (Amirpour et al (2017)).....	13
Figure 1.12 Schéma d'une poutre BDFG.....	14
Figure 1.13 La variation de la fraction volumique de la céramique à travers l'épaisseur et le sens longitudinal (Tran et Nguyen (2018)).....	15
Figure 2.1 Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) (Reddy. 2007).....	17
Figure 2.2 Schématisation des déformations des plaques par la théorie (FSDT) (Reddy, 2007).....	18
Figure 2.3 Schématisation des déformations des plaques par la théorie (HSDT) (Reddy, 2007).....	19
Figure 2.4 Type de problème d'interaction sol-structure (Seguini 2016).....	26
Figure 2.5 Modèle de fondation de Winkler (Seguini 2016).....	26
Figure 2.6 Déflexion d'une fondation élastique de type Winkler soumise à une charge répartie.....	27
Figure 2.7 Modèle de fondation de Pasternak (Seguini 2016).....	28

Figure 2.8 Modèle de fondation de Kerr (Seguini 2016).....	29
Figure 2.9 Modèle de fondation de Kelvin-Voigt (Younesian et al 2019).....	30
Figure 2.10 Modèle de fondation de Pasternak viscoélastique (Younesian et al 2019).....	31
Figure 3.1 Géométrie et coordonnées d'une poutre BDFG reposant sur une fondation élastique.....	33
Figure 3.2 Variation des fréquences adimensionnelles $\hat{\omega}$ en fonction des indices graduels de la poutre FG sans fondation élastique ($L/h=10$).....	43
Figure 3.3 Variation des fréquences adimensionnelles $\hat{\omega}$ en fonction les paramètres de la fondation élastique ($L/h = 10, \xi = 0$). (a) $j_2 = 1000$, (b) $j_1 = 1000$	44
Figure 3.4 Variation des fréquences adimensionnelles de la poutre BDFG par rapport aux paramètres de fondation élastique j_1 pour trois cas de fondation élastique variable (a) Linéaire, (b) Parabolique, (c) Sinusoïdal ($L/h=10, n_x=n_z=1, j_2=1000$).....	46
Figure 3.5 Effet de la nature de la fondation élastique sur les fréquences adimensionnelles de poutre BDFG ($L/h=10, n_x=n_z=1, j_2=1000$).....	47
Figure 3.6 Effet de l'élanement (L/h) sur les fréquences adimensionnelles de la poutre BDFG $j_2=0, \zeta=10$ (linéaire), (a) $n_x=n_z=0$, (b) $n_x=n_z=1$	47
Figure 4.1 Géométrie et coordonnées d'une poutre BDFG reposant sur une fondation élastique..	49
Figure 4.2 Variation du paramètre de la fréquence fondamentale avec le rapport L/h pour différentes fondations ($n_x=1, n_z=1$ et $\Delta T=20$).....	61
Figure 4.3 Variation du paramètre de la fréquence fondamentale en fonction de ΔT pour différentes fondations ($n_x=1, n_z=1$ et $\Delta T=20$).....	63
Figure 4.4 Variation du paramètre de la fréquence fondamentale en fonction d'élanement de la poutre (L/h) pour la fondation Kelvin-Voigt avec et sans couche de cisaillement ($n_x=1, n_z=1$ et $\Delta T=20$).....	63
Figure 4.5 Variation du paramètre de la fréquence fondamentale en fonction du coefficient d'amortissement (c) pour avec la variation du module de Winkler ($n_x=1, n_z=1$ et $\Delta T=20$).....	64

Liste des tableaux

Tableau 1.1 Les modèles micromécanique.....	7
Tableau 1.2 Coefficients dépendants de la température pour la céramique et le métal Kim (2005), Ebrahimi et al. (2016).....	9
Tableau 2.1 Différents fonctions de forme de cisaillement (Cukanovi'c et al.2018	20
Tableau 3.1 fréquences adimensionnelles d'une poutre FG unidirectionnelle transversal ($nz=0$)..	41
Tableau 3.2 Comparaison des fréquences adimensionnelles d'une poutre BDFG simplement appuyée sans fondation élastique)	43
Tableau 3.3 effet des paramètres d'élasticité de la fondation et l'élanement de la poutre (L/h) sur la fréquence adimensionnelle $\hat{\omega}$	45
Tableau 4.1 Coefficients dépendant de la température pour les différents matériaux (Kim (2005), Ebrahimi et al. (2016))	58
Tableau 4.2 Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une poutre BDFG S-S ($\Delta T=20$) sans fondation	59
Tableau 4.3 les fréquences fondamentales d'une poutre BDFG S-S ($\Delta T=20$) sur fondation élastique ($L/h=20, \zeta=0$)	60
Tableau 4.4 les fréquences fondamentales d'une poutre BDFG S-S ($\Delta T=20$) sur fondation élastique de Kerr ($L/h=20, k_l=100$)	61
Tableau 4.5 les fréquences fondamentales d'une poutre BDFG S-S ($\Delta T=20$) sur fondation viscoélastique de Kelvin-Voight ($L/h=20$)	62

Liste des symboles

h	h de la poutre
L	La longueur de la poutre
b	La largeur de la poutre
p	Indice de paramètre du matériau
n_z	Indice de paramètre du matériau suivant l'épaisseur
n_x	Indice de paramètre du matériau suivant la longueur
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de l'épaisseur
V_{c1}	Fraction volumique du céramique 1
V_{c2}	Fraction volumique du céramique 2
V_{m1}	Fraction volumique du métal 1
V_{m2}	Fraction volumique du métal 2
α	la dilatation thermique
q	Le transfert de contrainte/déformation
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$G(z)$	Module de Cisaillement en fonction de l'épaisseur
$\rho(z)$	La densité
ν	Coefficient de poisson
K	La conductivité thermique
P_{m1}	Propriétés matérielles de Métal 1
P_{c1}	Propriétés matérielles de céramique 1
P_{m2}	Propriétés matérielles de Métal 2
P_{c2}	Propriétés matérielles de céramique 2
u	Déplacement suivant x
v	Déplacement suivant y
w	Déplacement suivant z
w_0	Déplacement transversal dû au flexion
w_b	Déplacement transversal dû au flexion
w_s	Déplacement transversal dû au cisaillement
θ	Déplacement transversal dû au cisaillement
(u_0, v_0, w_0)	Les déplacements au niveau du plan moyen ($z=0$)
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations autour des axes x et y , respectivement.
$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$	Les composants des contraintes
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$	Les composants des déformations
Q_{ij}	Les coefficients d'élasticité
i, j	Nombres naturelles
$f(z)$	La fonction de forme
$g(z)$	fonction de cisaillement
\int	Intégrale indéterminée
k_1, k_2	Des coefficients dépendent de la géométrie
A', B'	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)
λ	Nombre d'onde selon x
μ	Nombre d'onde selon y
δ	Variation
δU_e	L'énergie de déformation de la plaque

δT	L'énergie cinétique de la plaque
δU_R	La variation de l'énergie de déformation de la fondation
δV	L'énergie potentielle des charges appliquées
f_e	Densité de la force de réaction de la fondation
k_w	Paramètre de Winkler
k_p	Paramètre de Pasternak
k_l, k_u, k_s	Paramètres de Kerr
C	Coefficient d'amortissement.
J_1, J_2	Coefficients du fondation élastique variable
$\partial/\partial x$	Dérivée partielle par rapport à x
$\partial/\partial y$	Dérivée partielle par rapport à y
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction $g(z)$
A	La surface de la poutre
ΔT	Variation de la température
$T(z)$	Variation du chargement thermique suivant l'épaisseur
T_1, T_2 et T_3	Les charges thermiques
T_c, T_m	Température de la céramique et le métal
T_f, T_i	Températures finale et initiale
P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3	Les coefficients de propriétés des matériaux dépendant de la température.
T_{cr}	Le chargement thermique du flambement
∇	Opérateur Laplacien
N	Effort normal résultant
M, M^b	Moment de flexion résultant
M^s, S^s	Efforts d'ordre élevé
A^{c1m1}	Rigidité transversale composée de céramique 1 et de métal 1
A^{c2m2}	Rigidité transversale composée de céramique 2 et de métal 2
I^{c1m1}	Inertie de masse transversale composée de céramique 1 et métal 1
I^{c2m2}	Inertie de masse transversale composée de céramique 2 et métal 2
$A, B, D, B^s, H^s, L, L^a,$	Composantes de rigidité
$R, R^a, F_{44}^s, X_{44}^s, A_{55}^s$	
$I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2, K_2^{st}$	Composantes de moment d'inertie
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Composantes de rigidité
A_{ij}^s	Composantes de rigidité du au cisaillement
\bar{t}	paramètre arbitraire de température
η	l'exposant de température
T^+, T^-	Température des surfaces supérieure et inférieure de la plaque FGM respectivement.

\sum	La somme
m	Nombre de mode selon x
n	Nombre de mode selon y
$(U_{mn}, W_{mn}, \theta_{mn})$	Paramètres arbitraires
K_w, K_p	Paramètre de la fondation sous forme adimensionnelle
D	Rigidité flexionnelle de la plaque
ω	Fréquence naturelle
$\hat{\omega}$	Fréquence naturelle adimensionnelle
\bar{w}, \hat{w}	Déplacement transversal adimensionnelle
$\bar{\sigma}_x$	Contrainte axiale adimensionnelle
$\bar{\tau}_{xz}$	Contrainte de cisaillement adimensionnelle
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements
$[K]$	La matrice de rigidité
a_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité
m_{ij}	Coefficients de la matrice de masse
$[M]$	La matrice masse
$\{F\}$	Composantes du vecteur de force
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Sommaire

ملخص.....	I
Abstract.....	II
Résumé.....	III
Liste des figures.....	IV
Liste des tableaux.....	VI
Liste des symboles.....	VII
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Généralités sur les FGM	
1.1 Introduction	4
1.2 Concept et principe des matériaux fonctionnellement gradués	4
1.3 Evaluation des propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués	5
1.3.1 Fonction des fractions volumique.....	5
1.3.1.1 Loi exponentielle E-FGM.....	5
1.3.1.2 Loi de puissance P-FGMs.....	5
1.3.1.3 Loi sigmoïde S-FGM.....	6
1.3.2 Modèles micromécanique des FGM.....	7
1.3.3 Propriétés dépendantes de la température	8
1.3.4 Propriétés dépendantes de la porosité.....	9
1.4 Les différents types des structures en FGM	11
1.4.1 Les structures en FGM unidirectionnelle dans le sens de l'épaisseur	11
1.4.2 Les structures en FGM unidirectionnelles axiales (AFG).....	12
1.4.3 Structure en FGM bidirectionnelle BDFG	14
1.5 Conclusion.....	16
Chapitre 2 : Comportement des structures en FGM	
2.1 Introduction	17
2.2 Théories de déformations des plaques.....	17
2.2.1 Théorie classique des plaques (CPT).....	17
2.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	18
2.2.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).....	19
2.2.4 Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)	21
2.2.5 Théorie de déformation des plaques quasi-3D	22
2.3 Relation entre les contraintes et les déformations	22
2.3.1 Relation contrainte déformation modèle bidimensionnelle (2D)	22
2.3.2 Relation contrainte déformation modèle tridimensionnelle (2D).....	23

2.4 Analyse statique et dynamique des structures FGM	23
2.4 Analyse thermomécanique des structures FGM	24
2.4.1 Dilatation thermique	24
2.4.2 Chargement thermique	24
2.4.2.1 Variation harmonique	25
2.4.2.2 Variation linéaire et non-linéaire	25
2.5 Réponses des structures FGM reposent sur les fondations.....	26
2.5.1 Les modèles élastiques	26
2.5.1.1 Modèle de Winkler	27
2.5.1.2 Modèle de Pasternak.....	28
2.5.1.3 Modèle de Kerr	28
2.5.1.4 Modèle de fondation élastique variable	29
2.5.2 Les modèles viscoélastiques	30
2.5.2.1 Modèle de Kelvin-Voigt	30
2.5.2.2 Modèle Pasternak viscoélastique	30
2.6 Conclusion	31
Chapitre 3 : Étude du comportement vibratoire des poutres FG bidirectionnelles reposant sur des fondations élastiques variables	
3.1 Introduction	32
3.2 Développements théoriques :.....	32
3.3 Cinématique.....	34
3.4 Equations du mouvement	36
3.5 Solution analytique pour poutre FG simplement appuyées	39
3.6 Résultats numériques et discussion	40
3.7 Conclusion	48
Chapitre 4 : Évaluation analytique des fréquences de poutres épaisses FG bidirectionnelles en environnement thermique et reposant sur différentes fondations	
4.1 Introduction	49
4.2 Développement théorique.....	49
4.3 Cinématique.....	51
4.4 Relations constitutives	53
4.5 Equation de mouvement	53
4.6 Solution Analytique	56
4.7 Résultats numériques et discussion	57
4.8 Conclusion	64
Conclusion générale	66
Liste des références bibliographiques	

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux ont joué un rôle important dans la société humaine tout au long de l'histoire. L'humanité a toujours essayé de mélanger plusieurs matériaux afin de produire des matériaux plus résistants et très solides comme la brique, le béton, polymère etc., pour construire des structures durables servant d'abri pour l'être humain.

Les matériaux de constructions ont connu un développement depuis l'antiquité commençant par les pierres et les argiles en passant par le béton, le béton armé et précontrainte jusqu'à les matériaux composites. Ceux-ci ont été largement utilisés dans les domaines de la construction civil et industrielle dues leurs caractéristiques mécaniques élevés. La présence de l'interface dans les matériaux composites implique la variation de la distribution de propriétés telles que le coefficient de dilatation thermique, la conductivité thermique et la résistance thermique. Ce problème de la discontinuité de matériau conduit à la concentration des contraintes au niveau des interfaces et par conséquent conduit à des dommages, de fissurations et de séparation des liaisons adhésives.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont un nouveau type des matériaux composites dont les propriétés mécaniques de ces matériaux varient graduellement et de façon continue d'un sens à l'autre. Cette caractéristique est obtenue en faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs. L'avantage de cette technique, par rapport aux matériaux composites traditionnels, est d'éviter les problèmes de délamination, concentrations de contraintes et les contraintes résiduelles, et contribue ainsi à maintenir l'intégrité de la structure à un niveau souhaitable.

Les FGM unidirectionnelles classiques dans lesquelles la variation graduelle des matériaux n'existe que dans une seule direction ont déjà été largement rapportés par plusieurs chercheurs tel que Akbas (2015), Benferhat et al. (2016), Attia (2017), Bachiri et al. (2018), Nemati et al. (2017), Avcar (2018), Ahmed et al. (2019), Madenci (2019), Ramteke et al. (2019), Rahmani et al. (2019), Mekerbi et al. (2019), Bachir Bouiadjra et al. (2020), Kar and Panda (2020), Selmi (2020), Vinyas (2020), Melaibari et al. (2020), Madenci et Gülcü (2020), Hadji (2020), Shahmohammadi et al. (2020), Cuong-Le et al. (2020) et Hadji et Avcar (2021).

Il est à noter que, Les structures en FGM ont été conçues spécialement pour fonctionner dans des environnements thermiques sévères, tels que la navette spatiale, où la température et les

contraintes pourraient être dans deux ou même trois directions. Les FGM unidirectionnelles ne peuvent pas être utiles dans la conception de ces structures, ils n'assurent pas les exigences de contraintes et de répartitions thermiques dans deux ou plusieurs directions. Pour cela, le développement des FGM multidirectionnelles est nécessaire et efficace dans ces conditions (Tanga et Ding 2019).

Pour cette raison, les structures fonctionnellement graduée bidirectionnelle (BDFG) sont attiré beaucoup l'attention des chercheurs. Plusieurs études sur le comportement mécanique, thermique et dynamique des structures BDFG ont été menées par certains chercheurs, citons à titre d'exemple les travaux de Şimşek (2015), Wang et al. (2016), Shafiei et al. (2017), Mirjavadi et al. (2017), Huynh et al. (2017), Karamanli (2018), Nguyen et Lee. (2018), Lal et Dangi. (2019), Lei et al. (2019), Yaylaci, M et al 2019, Faroughi et al. (2020), Yaylaci and Avcar (2020), Yaylaci, M. et al. (2021).

Récemment, plusieurs chercheurs ont étudiés le comportement statique et dynamique des structures en FGM reposant sur des fondations (Jalaei et Civalek 2019, Chami et al. 2020, Boulal et al. 2020). Les chercheurs ont proposé plusieurs modèles des fondations pour décrire l'interaction entre le sol et la structure tel que les modèles élastiques (Winkler, Pasternak, Kerr) et les modèles viscoélastiques (Kelvin-Voight, le modèle viscoélastique de Pasternak...etc.). Pour les modèles élastiques, la plupart de ces études traitent les structures sur des fondations élastiques avec des modules constants. Cependant, on trouve peu de travaux sur les fondations élastiques variables et on cite à titre d'exemple les travaux de (Eisenberger et Clastornik 1987, Zhou 1993, Pradhan et Murmu 2009, Sobhy 2015, Ali Rachedi et al. 2020, Merzoug et al. 2020).

L'analyse de la littérature nous a montré qu'il n'y a pas des études menées sur le comportement vibratoire des poutres BDFG avec des propriétés de matériaux dépendantes de la température et reposant sur plusieurs types de fondations (élastique et viscoélastique) au moyen d'une solution quasi-3D.

À cet effet, deux objectifs seront visés dans cette thèse. Le premier objectif est d'étudier le comportement vibratoire d'une poutre BDFG reposant sur une fondation élastique variable en utilisant la théorie de déformation en cisaillement 2D qui contient des termes intégraux indéterminés pour réduire le nombre des inconnus, la fondation élastique est modélisée avec le modèle de Winkler-Pasternak à deux paramètres variables. Le deuxième objectif est d'analyser l'effet de la fondation viscoélastique sur la réponse dynamique d'une poutre BDFG avec des

propriétés des matériaux dépendantes de la température en utilisant une théorie d'ordre supérieure quasi-3D. Pour les deux modèles (2D et quasi 3D), les propriétés des matériaux de la poutre BDFG variées à travers l'épaisseur et la direction longitudinale (axiale) à la fois selon la loi de puissance. Les équations de mouvement sont dérivées par le principe des déplacements virtuels. La précision des modèles calculés sont validées en comparant les résultats avec les solutions disponibles dans la littérature. Une étude paramétrique est menée pour évaluer l'effet de différents paramètres sur le comportement vibratoire.

Afin de bien structurer notre travail, la présente thèse a été organisée comme suit :

Dans le premier chapitre, on présente un aperçu général sur les matériaux FGM et leurs avantages par rapport les matériaux composites classiques, leurs applications, l'évaluation de leurs propriétés matérielles, les modèles micromécaniques utilisés, l'effet de la température et la porosité sur leurs propriétés ainsi que les différents types des structures en FGM unidirectionnelles et bidirectionnelles.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de différentes théories de déformation agissant sur les plaques. On présente aussi les comportements statiques, dynamiques et thermomécaniques des structures en FGM ainsi que leurs réponses sur les différents types de fondations (élastique et viscoélastique).

On présente dans le troisième chapitre la formulation et le développement d'un modèle analytique 2D pour l'analyse du comportement vibratoire d'une poutre fonctionnellement graduée bidirectionnelle (BDFG) reposant sur une fondation élastique variable. Les résultats trouvés seront validés avec les travaux de la littérature. Une étude paramétrique sera présentée pour montrer l'influence des différents paramètres tels que les paramètres des matériaux (n_x, n_z), le modèle de fondation, l'élancement de la poutre (L/h), et d'autres paramètres sur le comportement vibratoire des poutres BDFG.

Le quatrième chapitre présente la formulation d'un modèle quasi-3D pour étudier le comportement dynamique d'une poutre BDFG avec des propriétés de matériaux dépendantes de la température reposant sur des fondations élastique et viscoélastique. La validation des résultats ainsi que l'étude paramétrique seront présentés.

Finalement, notre thèse sera terminée par une conclusion générale qui résume les résultats obtenus. Des perspectives et recommandations pour des futurs travaux seront présentées.

CHAPITRE 1

Généralités sur les matériaux
fonctionnellement gradués

1.1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe des matériaux composites, ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent.

Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir pour l'amélioration de la rigidité, la tenue à la fatigue, la résistance à la corrosion ou la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

1.2 Concept et principe des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) a été inventé par un scientifique japonais en 1984 qui travaillait sur un matériau capable de tenir à des températures élevées pour des applications spatiales. Le concept a été depuis repris partout dans le monde où on s'est rendu compte de l'importance de cette nouvelle famille de matériaux.

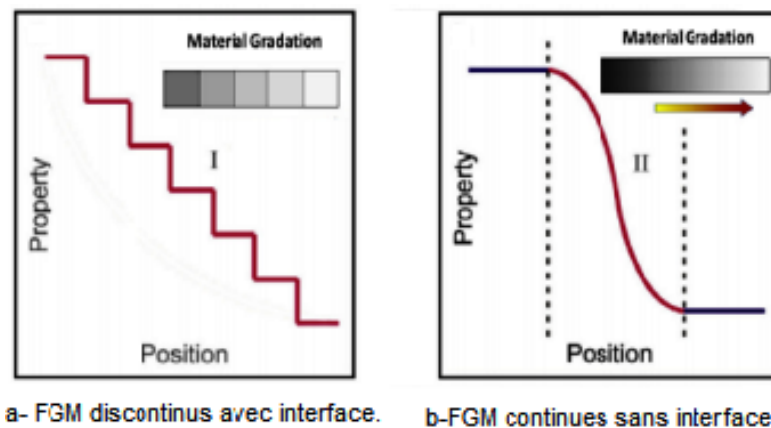


Figure 1-1 Types des FGM (a) continue, (b) discontinue (Islam et al.2019).

Comme indiqué dans la figure 1.1, les structures en FGM sont classées en deux catégories : les FGM continus (Figure 1.1.b) et les FGM discontinus sous forme de multicouche (Figures I.1.a). Dans les FGM continus, aucune zone de séparation ne peut être observée à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone. Par contre, pour les FGM multicouches il existe une interface distincte les ingrédients matériels, qui résulte un changement soudain des propriétés mécaniques est souvent entraînée des concentrations de contraintes entre les matériaux

ce qui conduit à des dommages, de fissurations et de séparation des liaisons adhésives (Islam et al.2019).

1.3 Evaluation des propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués

1.3.1 Fonction des fractions volumique

Généralement, les matériaux FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés (habituellement le métal et la céramique). On peut déterminer les propriétés matérielles sur la base de la distribution des fractions volumiques de différents matériaux. Étant donné que la fraction volumique de chaque phase varie progressivement dans le sens de la gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Dans la littérature, il y a trois fonctions courantes pour décrire les fractions volumiques : loi de puissance, loi exponentielle et loi sigmoïde (Chi et Chung, 2006).

1.3.1.1 Loi exponentielle E-FGM

Les paramètres matériels de FGM peuvent être donnés selon la loi exponentielle comme suite (Chi et Chung 2006) :

$$P(z) = Ae^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (1.1)$$

$$A = P_1 \text{ et } B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Où: P_1 et P_2 Sont les propriétés des surfaces inférieure et supérieure respectivement.

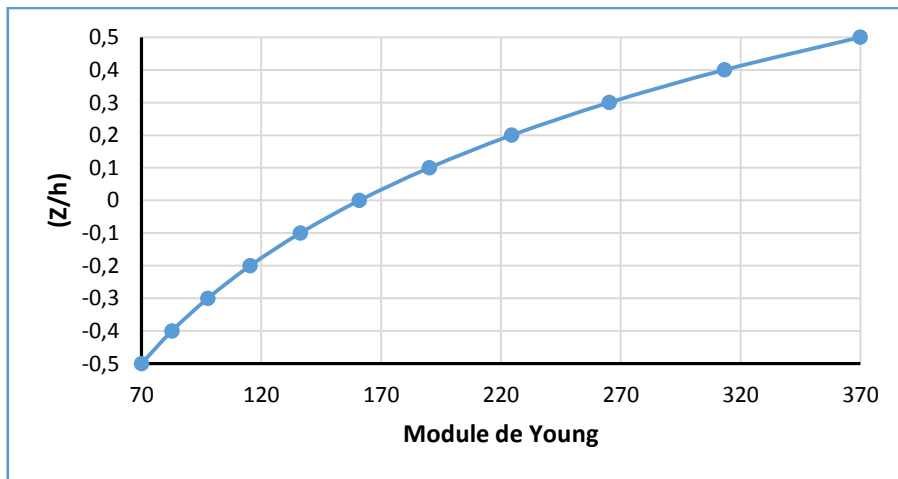


Figure 1. 2 Variation du module de Young suivant la loi exponentielle (Chi et Chung (2006)).

1.3.1.2 Loi de puissance P-FGMs

La fonction de la fraction volumique du P-FGM est donnée comme suite (Ait Atmane et al.2010):

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad (1.2)$$

Où P est le paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque.

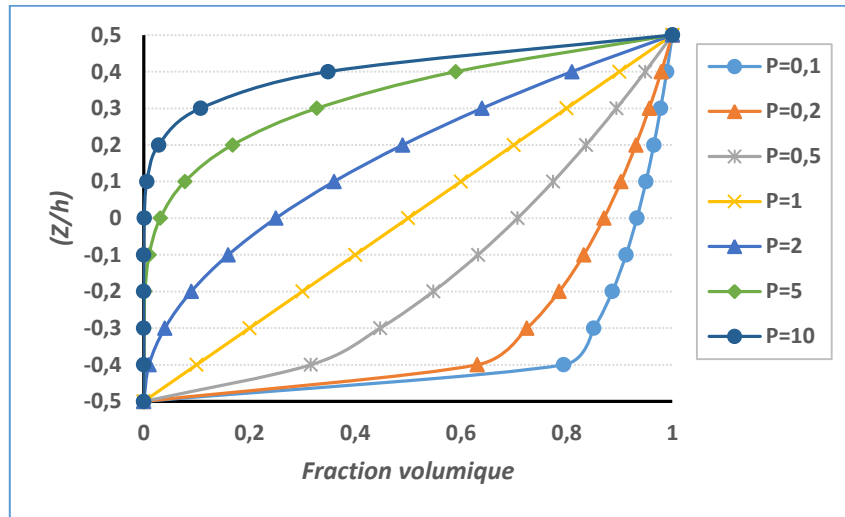


Figure 1. 3 Variation de la fraction volumique suivant la loi de puissance

1.3.1.3 Loi sigmoïde S-FGM

La loi sigmoïde combine deux fonctions de puissance différentes pour décrire la fraction volumique des matériaux constitutifs. Ces deux fonctions sont les suivantes (Chi et Chung 2006) :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.3.a)$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.3.b)$$

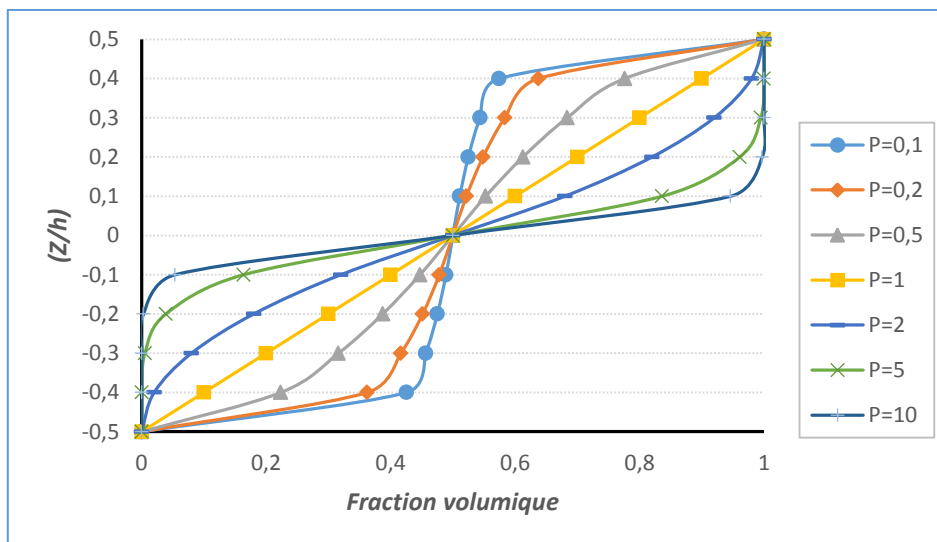


Figure 1. 4 Variation de la fraction volumique suivant la loi sigmoïde.

1.3.2 Modèles micromécanique des FGM

Afin d'estimer les propriétés des structure FGM avec précision, plusieurs modèles micromécaniques des FGM ont été rapportés par Gasik (1994,1998), Zuiker (1995), Reiter et Dvorak (1997, 1998), Yin et al. (2004), Bachir Bouiadjra et al. (2018), Mahmoudi et al. (2018).

Ali Rachdi et al. (2020) ont étudié le comportement thermomécanique des plaques FG reposant sur une fondation élastique variable en utilisant cinq modèles micromécaniques (Voigt, Reuss, LRVE, Tamura et Mori-Tanaka). Les expressions mathématiques des modèles micromécaniques utilisés sont résumées dans le tableau 1.1 :

Tableau 1.1 Les modèles micromécanique

Modèle	Expression mathématique
Voigt	$E(z) = E_c V(z) + E_m (1 - V(z))$
Reuss	$E(z) = \frac{E_c E_m}{E_m V(z) + E_c (1 - V(z))}$
Tamura	$E(z) = \frac{(1 - V(z))(q - E_c)E_m + V(z)(q - E_m)E_c}{(1 - V(z))(q - E_c) + V(z)(q - E_m)E_c}, \quad q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$
LRVE	$E(z) = E_m \left(1 + \frac{V(z)}{FE - \sqrt[3]{V(z)}} \right), \quad FE = \frac{1}{1 - E_m/E_c}$
Mori-Tanaka	$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{V(z)}{1 + (1 - V(z)) \left(\frac{E_c}{E_m} - 1 \right) \left(\frac{(1 + \nu)}{(3 - 3\nu)} \right)} \right)$

Selon la figure 1.5, Les valeurs maximales des contraintes sont obtenues par le modèle Voigt et les valeurs minimales par le modèle LRVE. Les valeurs des autres modèles sont comprises entre les deux (Ali Rachdi et al. (2020)).

La figure 1.5 exprime la variation de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ pour différents modèles micromécaniques utilisés à travers l'épaisseur d'une plaque FG reposant sur une fondation élastique. Les valeurs maximales des contraintes sont obtenues par le modèle Voigt et les valeurs minimales par le modèle LRVE. Les valeurs des autres modèles sont comprises entre les deux (Ali Rachdi et al. (2020)).

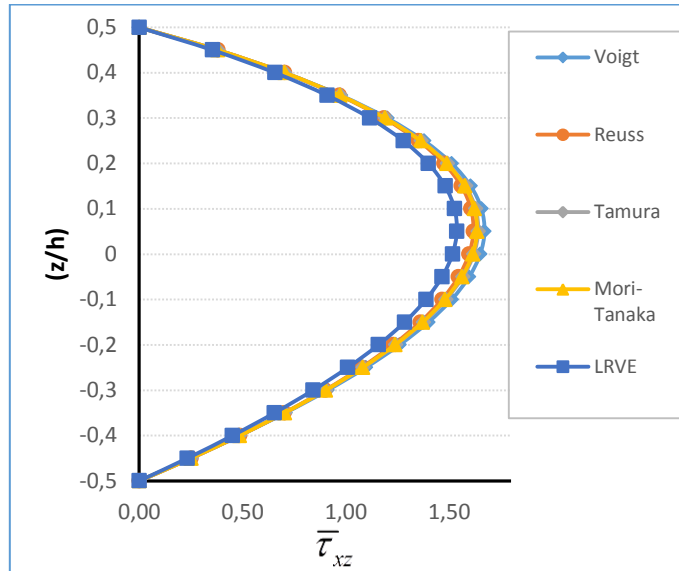


Figure 1.5 Effet de la variation du modèle micromécanique sur la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ (Ali Rachdi et al. (2020)).

Mahmoudi et al. (2018) ont étudié l'influence des modèles micromécanique pour obtenir les propriétés effectives d'une plaque FGM, la figure 1.6 montre la variation du module de Young pour les différents modèles utilisés.

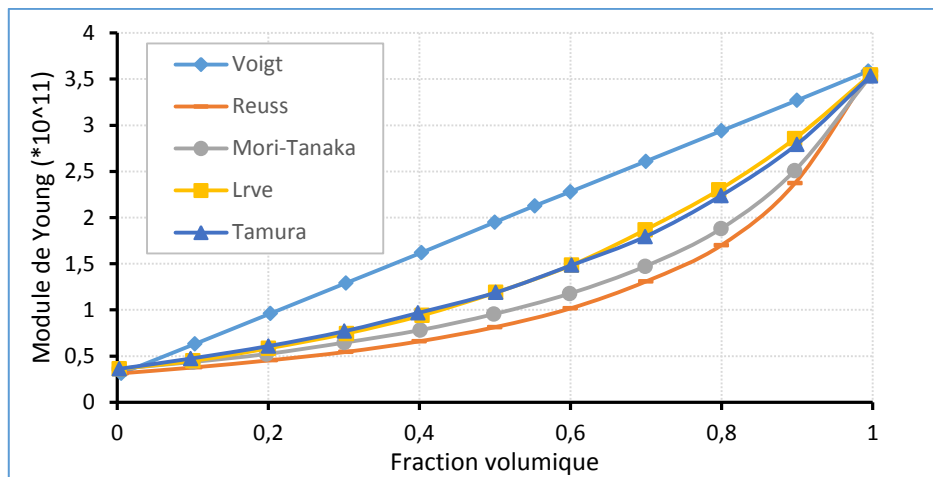


Figure 1.6 Variation du module de Young avec différents modèles micromécaniques. (Mahmoudi et al (2018)).

1.3.3 Propriétés dépendantes de la température

Les structures en FGM sont les plus couramment utilisées dans un environnement à haute température. Celle-ci provoque des changements importants dans les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs. Il est essentiel de prendre en compte cette dépendance à la température pour une prédiction précise de la réponse mécanique. Les différentes propriétés matérielles telles que le module de Young, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation thermique sont

supposés dépendre de la température et peuvent être exprimés en fonction non linéaire de la température.

Wang et Shen (2013), Sobhy (2015), Attia et al. (2018) ont utilisé la fonction suivante :

$$P = P_0 \left(\frac{P_{-1}}{T} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (1.4)$$

T : champ de la température.

P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3 : les coefficients de propriétés des matériaux dépendant de la température.

Les coefficients dépendant de la température du module de Young E , de la dilatation thermique α et de la conductivité thermique K sont rapportés par Kim (2005), Ebrahimi et al. (2016) comme le montre le tableau 1.2.

Tableau 1.2 Coefficients dépendants de la température pour la céramique et le métal Kim (2005), Ebrahimi et al. (2016).

Matériaux	Propriétés	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
Al ₂ O ₃ (céramique)	E (Pa)	0	349.55e+9	-3.853e-4	4.027e-7	1.673e-10
	α (K ⁻¹)	0	6.8269e-6	1.838e-4	0	0
	ρ (Kg/m ³)	0	3800	0	0	0
	k (W/mK)	-1123.6	-14.087	-6.227e-3	0	0
	ν	-	0.3	-	-	-
SUS304 (métal)	E (Pa)	0	201.04e+9	3.079e-4	-6.534e-7	0
	α (K ⁻¹)	0	12.330e-6	8.086e-4	0	0
	ρ (Kg/m ³)	0	8166	0	0	0
	k (W/mK)	0	15.379	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
	ν	-	0.3	-	-	-

1.3.4 Propriétés dépendantes de la porosité

Durant le processus de fabrication des FGM, des défauts peuvent apparaître sous forme de porosité. Ces derniers peuvent modifier le comportement global des structures en FGM (Mahmoudi et al. (2018)).

Gupta et Talha (2017) ont étudiés la réponse en flexion et aux vibrations des plaques FGM poreuses avec la théorie de cisaillement d'ordre supérieur. Ils ont conclu que la présence de la porosité dans une plaque FGM conduit à augmenter la déflexion pour toutes les conditions aux limites considérées. En outre, la fréquence **diminue** à mesure que la fraction volumique de porosité augmente.

Shahsavari et al. (2018) ont utilisés trois modèles de distributions de la porosité différents (figure 1.7) pour analysés les vibrations libres d'une plaque FGM reposant sur des fondations élastiques,

ils ont trouvé que la fraction volumique des porosités joue un rôle dominant sur la fréquence des plaques FGM. Dans le cas d'une fondation élastique à faible rigidité, la plaque FGM poreuse avec le modèle régulier de distribution présente des faibles fréquences naturelles. Par contre, la fréquence sera forte dans le cas d'une fondation élastiques à forte rigidité.

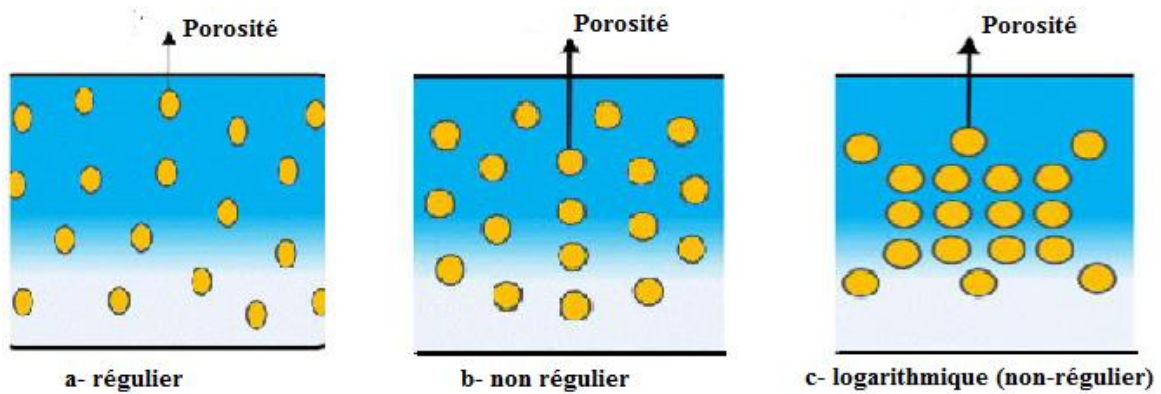


Figure 1. 7 Modèle de porosité d'une plaque poreuse FG (Shahsavari et al. 2018).

Mekerbi et al. (2019) ont étudié l'effet de la porosité avec plusieurs distributions dans le sens de l'épaisseur sur la stabilité thermique des plaques FGM reposent sur des fondations élastiques. La figure 1.8 montre que la température critique du flambement diminue avec l'augmentation de la porosité et le rapport (b/a) pour tous les modèles de distribution de la porosité.

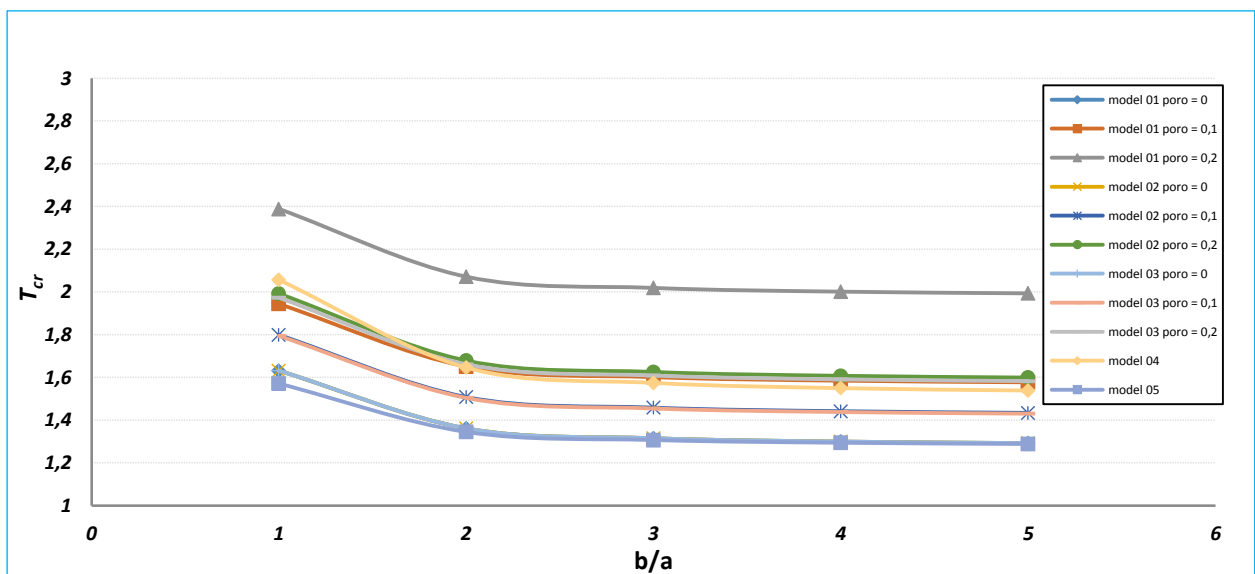


Figure 1. 8 Variation de la température critique de flambement (T_{cr}) en fonction du rapport (b/a) avec une température uniforme pour différentes distributions de la porosité ($p=1$, $k_w=k_p=10$) (Mekerbi et al 2019).

1.4 Les différents types des structures en FGM

1.4.1 Les structures en FGM unidirectionnelle dans le sens de l'épaisseur

Pour ce type de structure en FGM la fraction volumique varie progressivement dans le sens de l'épaisseur uniquement (figure 1.9), les propriétés effectives changent le long de cette direction suivant une loi de distribution donnée.

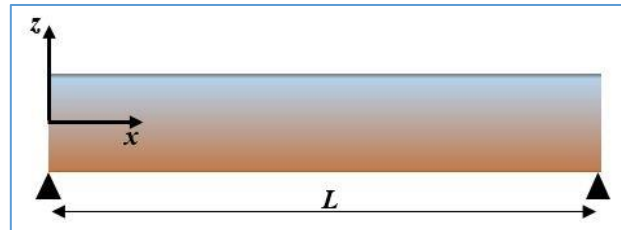


Figure 1. 9 Poutre FGM graduée suivant l'épaisseur.

De nombreuses recherches ont été menées sur les structures FGM ont une variation graduelle des propriétés du matériau uniquement dans le sens de l'épaisseur sur les contraintes, les vibrations, la déformation et la stabilité. En peut citer :

Bouiadjra et al. (2020) ont établi une approche analytique pour étudier le comportement thermodynamique d'une poutre FGM varie dans le sens de l'épaisseur reposant sur des fondations élastiques. La formulation est basée sur la théorie de déformation raffinée, et prendre en considération l'effet d'étirement.

Mekerbi et al. (2019) ont analysé le comportement thermodynamique des plaques sandwich FGM avec une variation suivant l'épaisseur par l'utilisation de la théorie raffinée des plaques 2D. Dans un autre travail, Mekerbi et al. (2020) ont étudié l'effet de la porosité sur le flambement thermique des plaques FGM unidirectionnelle à travers l'épaisseur.

Tebboune et al. (2014) ont étudié le comportement au flambement thermique des plaques FGM unidirectionnelle suivant l'épaisseur sous différents types de chargement thermique (distribution de température uniforme, linéaire et non-linéaire à travers l'épaisseur), ils ont utilisé la théorie trigonométrique de déformation en cisaillement simple.

Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) ont analysé la vibration linéaires et non linéaires des poutres élastiques poreuses FGM unidirectionnelle suivant 'z'. Chen et al. (2015) ont analysé le flambement élastique et la flexion statique des poutres poreuses FGM unidirectionnelle selon la théorie de Timoshenko.

Ziou et al (2017) ont utilisés la méthode des éléments finis (MEF) avec la théorie d'Euler Bernoulli (CBT) et la théorie de Timoshenko (TBT) pour étudier les différents comportements des poutres (flexion, vibration libre et en flambement) en FGM avec une variation suivant l'épaisseur en tenant les différents cas de chargement, de géométrie et des conditions aux limites.

1.4.2 Les structures en FGM unidirectionnelles axiales (AFG)

Les structures fonctionnellement graduées axiale (AFG) est un type spécial de structure à gradient matérielle fonctionnel, dont les propriétés des matériaux varient en continu le long de la direction axiale (Figure 1.10) selon une loi de distribution donnée.

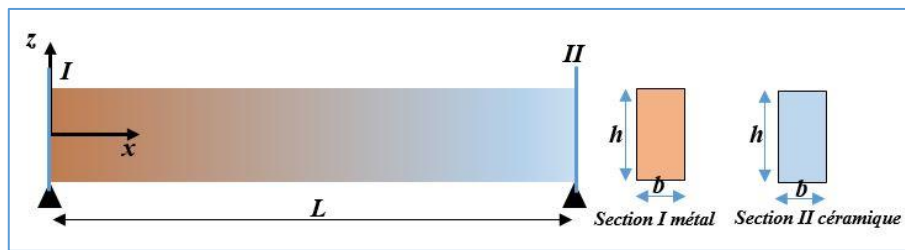


Figure 1. 10 Poutre FGM graduée axialement.

L'une des applications éventuelles des structures AFG avec une variation des propriétés des matériaux dans le plan pourrait être pour les ailes d'avion afin d'avoir une meilleure adaptation et efficacité de l'avion en localisant l'amélioration de la rigidité et de la densité pour réduire les déformations localisées (Amirpour et al. 2017).

Plusieurs recherches ont été menées par certains chercheurs sur le comportement mécanique et thermique des structures fonctionnellement graduées axiale (AFG). Mazari.A et al. (2018) ont utilisés la théorie de déformation en cisaillement hyperbolique quasi-3D pour étudier la flexion des plaques AFG simplement appuyées où les propriétés des matériaux varient sur la longueur de la plaque selon la loi de puissance.

Dongxing et al. (2019) ont étudié les vibrations libres d'une poutre fonctionnellement graduée axialement (AFG) ont utilisant la méthode des éléments finis (MEF).

Hareram et al. (2016) ont analysé les vibrations libres non linéaires des poutres AFG axialement graduée (AFG) reposant sur une fondation élastique avec différentes conditions aux limites.

Huang et Luo. (2011) ont présenté une simple approche pour calculer les charges critiques de flambement d'une poutre AFG qui présente une inhomogénéité axiale arbitraire. L'effet du paramètre de matériau sur les charges critiques de flambement a été éclairci.

Shahba et al (2011) ont étudié la vibration libre des poutres AFG, ont utilisant le modèle de poutre de Timoshenko et par une approche des éléments finis. Les effets du rapport de la

longueur sur la hauteur, de la contrainte élastique et la non-homogénéité du matériau sur les fréquences naturelles et la charge critique de flambement ont été étudiés. En utilisant la théorie de Timoshenko et avec une gradation axiale, Yong et al (2013) ont étudié les comportements vibratoires des poutres AFG avec une section transversale non uniforme.

En utilisant le principe de Hamilton combiné à la théorie des poutres d'Euler-Bernouli, Xiaobai et al. (2017), ils ont étudié le flambement, la flexion et la vibration libre des poutres unidirectionnelle AFG qui tient compte la variation de la fraction volumique par une loi de puissance sur toute la longueur de la poutre.

Afin d'avoir l'effet du sens de la variation de la rigidité (axiale et transversale) sur la déformation élastique d'une plaque FG. Amirpour et al. (2017) ont développé une solution analytique par la méthode des éléments fini (MEF) pour des plaques minces rectangulaire fonctionnellement graduée avec une variation de la rigidité dans les deux sens une fois dans le sens longitudinal et une fois dans le sens de l'épaisseur suivant la loi de puissance.

- 1^{ère} cas variation axial de la rigidité : $E(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^p (E_2 - E_1) + E_1$
- 2^{ème} cas variation transversal de la rigidité : $E(z) = E_1 + \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p (E_2 - E_1)$

Où E_1 et E_2 sont les rigidités du métal et la céramique respectivement.

La figure 1.11 montre que la rigidité globale de la plaque FG et l'emplacement de la déflexion maximale sont fortement liés à la direction de la variation de la rigidité du matériau.

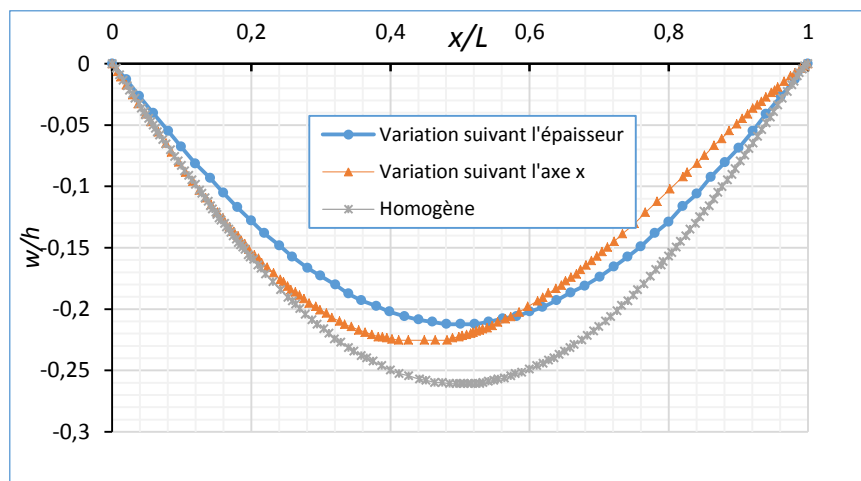


Figure 1. 11 Comparaison de la déflexion d'une plaque FG sur la longueur avec différents directions du gradient (Amirpour et al (2017)).

1.4.3 Structure en FGM bidirectionnelle BDFG

Les structures en FGM ont été conçues spécialement pour fonctionner dans des environnements thermiques sévères, tels que la navette spatiale, où la température et les contraintes pourraient être dans deux ou même trois directions. Par conséquent, les FGM conventionnelles (unidirectionnelle) ne peuvent pas être utiles dans la conception de telles structures, car les FGM conventionnelles ont une variation des propriétés des matériaux dans une seule direction (Lu et Chen 2020). En effet, comprendre le comportement des poutres FG bidirectionnelles (BDFG) devient une tâche importante. Dans les poutres BDFG la variation des propriétés des matériaux est dans les deux directions à travers l'épaisseur et le sens longitudinale (figure 1.12).

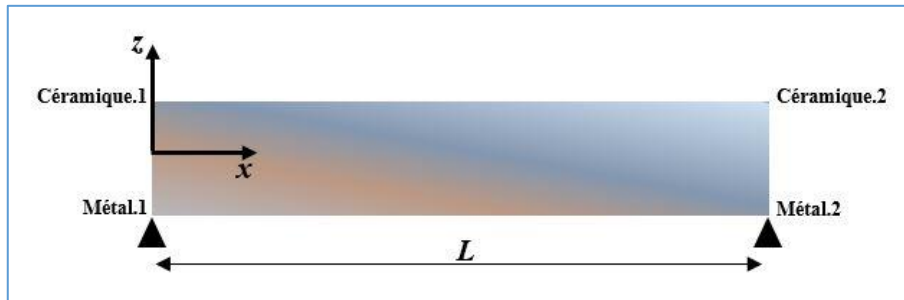


Figure 1.12 Schéma d'une poutre BDFG.

La figure 1.12 schématise une poutre BDFG qui est constituée de deux céramiques (céramique 1 et céramique 2) et de deux métaux (métal 1 et métal 2) dont la fraction volumique varie dans l'épaisseur et dans le sens longitudinal à la fois. Suite à la loi de puissance, la variation de la fraction volumique est donnée (Tran et Nguyen (2018)) :

$$\begin{aligned}
 V_{c1} &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \right], & V_{c2} &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \\
 V_{m1} &= \left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \right] \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \right], & V_{m2} &= \left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \right] \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Où n_z et n_x sont les paramètres des matériaux de la loi de puissance qui dictent la variation des matériaux constituants dans les deux directions (l'épaisseur et longitudinale), respectivement.

La figure 1.13 montre la variation de la fraction volumique des céramiques 1 et 2 dans les deux directions pour les deux valeurs des paramètres des matériaux n_z et n_x .

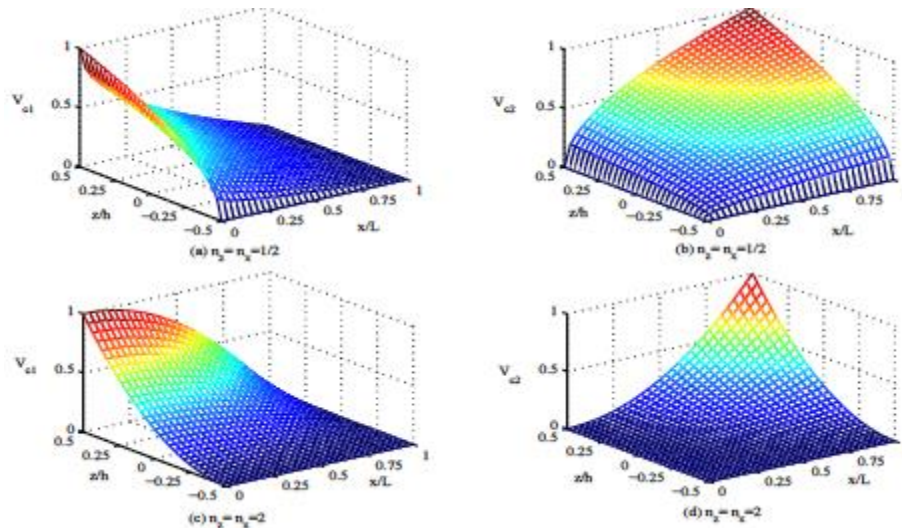


Figure 1.13 La variation de la fraction volumique de la céramique à travers l'épaisseur et le sens longitudinal (Tran et Nguyen (2018)).

Très récemment, plusieurs études sur le comportement mécanique et thermique des structures fonctionnellement gradué bidirectionnelle (BDFG) ont été menées par plusieurs chercheurs. Cette étude bibliographique présente quelques travaux réalisés sur les structures BDFG pour souligner l'ampleur qu'a pris ces nouveaux matériaux durant les dernières années.

Şimşek (2015) a étudié la vibration libre et forcée des poutres fonctionnellement graduées bidirectionnelles (BDFG) soumis à une charge mobile. Il a utilisé la théorie des poutres de Timoshenko ainsi que la théorie d'Euler pour dériver les équations du mouvement. Différentes conditions aux limites ont été étudiées. Dans un autre travail, Şimşek (2016) a étudié le flambement des poutres BDFG en 2D avec différentes conditions aux limites.

À l'aide de diverses théories des poutres, Karamanli (2017a) a analysé le comportement élastostatique des poutres BDFG soumis aux différentes conditions aux limites. Wang et al. (2016) ont établi une méthode analytique pour étudier le problème dynamique des poutres BDFG en utilisant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

En utilisant le principe de Hamilton combiné à la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen, Nejad et al. (2016 abc) ont obtenu un modèle mathématique des nano-poutres BDFG, ils ont utilisé la théorie d'Euler-Bernoulli et sur la base de la méthode GDQM, ils ont étudié le flambement, la flexion et la vibration libre des nano-poutres. Dans le même cadre, et en utilisant les mêmes théories, Mirjavadi et al. (2017) ont présenté une étude du comportement vibratoire thermomécanique d'une nano-poutre poreuse BDFG selon la théorie de Timoshenko.

Tran et Nguyen (2018) ont utilisé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement de troisième ordre (TSDT) pour analyser la vibration libre des poutres BDFG dans un

environnement thermique. Les propriétés du matériau sont supposées être variées dans les deux directions (épaisseur et longitudinal) par une distribution soumise à la loi de puissance.

Karamanli (2018) a utilisé la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre pour étudier la vibration libre d'une poutre BDFG ayant des propriétés de matériau fonctionnellement gradué de distribution exponentielle et avec diverses conditions aux limites. En utilisant une théorie quasi-3D. Trinh et al. (2018) ont étudié le comportement en vibration libre des micro-poutres BDFG dans des conditions aux limites arbitraires.

Tang et al. (2019) ont présenté un nouveau modèle de la théorie d'Euler-Bernoulli pour analyser la vibration libre non linéaire d'une poutre BDFG. Ils ont utilisé la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQM) et la méthode d'analyse homotopie pour résoudre le problème.

Lal et Dangi (2019) ont étudié le comportement vibratoire thermomécanique d'une nano-poutre BDFG de Timoshenko sous des profils de température linéaires et non linéaires. Ils ont utilisé la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) en conjonction avec la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen. Bhattacharya et Das (2019) ont présenté un modèle mathématique amélioré basé sur la théorie des poutres de Timoshenko et **la théorie modifiée du couple stress pour étudier la vibration libre** d'une micro-poutre BDFG.

Fariborz et Batra (2019) ont étudié la vibration libre des poutres circulaires BDFG au moyen de la théorie des déformations en cisaillement qui incorpore une variation logarithmique à travers l'épaisseur du déplacement circonférentiel.

En utilisant la théorie des poutres de Reddy-Bickford, Rezaiee-Pajand et Mokhtari (2019) ont développé une analyse de flexion, de flambement et de vibration libre d'ordre élevé de nano-poutres fonctionnellement gradués bidirectionnelles (BDFG). Huang (2020) a établi un modèle de poutre cylindrique d'ordre élevé pour étudier le comportement en flexion et en dynamique des poutres FG cylindriques avec une variation de matériau radial et axiale. Rahmani et al. (2020) ont utilisé la théorie générale non locale pour analyser le comportement vibratoire d'une nano-poutre BDFG circulaire.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel FGM, l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans plusieurs domaines.

CHAPITRE 2

Comportement des structures en FGM

2.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques en FGM, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement leurs comportements statiques et dynamiques ainsi que la méthode de résolution à appliquer. Plusieurs théories des plaques sont développées dans la littérature avec différentes équations qui décrivent le champ des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque.

La présence des fondations sous les plaques présente un problème très délicat lors de l'analyse du comportement des structures FGM, Cette difficulté est due principalement aux types de fondations étudiées (rigides ou souples), la nature du sol de fondation (Cohérent ou pulvérulent) qui est par définition un matériau hétérogène et la complexité du problème d'interaction sol-structure, pour cela le développement des modèles plus réalistes de fondation qui sont mathématiquement plus au moins simples est indispensable afin de résoudre le problème complexe d'interaction sol-structure.

Nous présentons dans ce chapitre quelques théories des plaques développées pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques ainsi que les différents modèles des fondations élastiques et viscoélastiques les plus utilisés par les chercheurs trouvés dans la littérature.

2.2 Théories de déformations des plaques

2.2.1 Théorie classique des plaques (CPT)

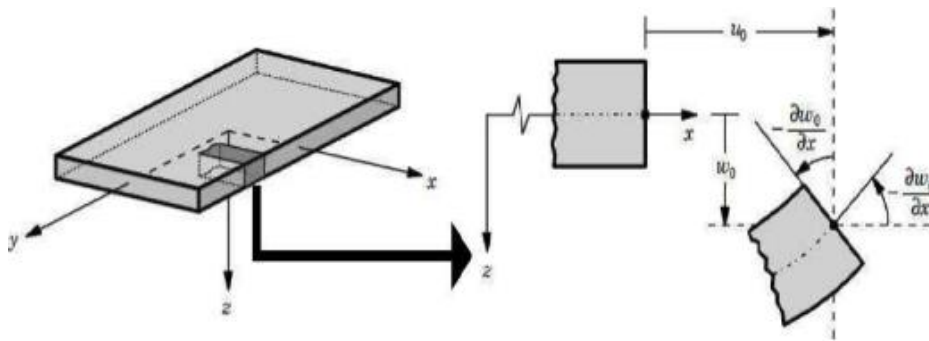


Figure 2. 1 Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) (Reddy. 2007).

La figure 2.1 montre les déformations d'une plaque selon la théorie classique des plaques (CPT). Cette théorie suppose que les sections droites initialement normales au plan moyen, restent planes et normales à celui-ci, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement

transverse ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). Les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$) (Reddy, 2007).

Le champ de déplacement qui représente les déplacements d'un point peut s'écrire comme suit (Reddy 2007) :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.1.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.1.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.1.c)$$

Où u_0 , v_0 et w_0 : Sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

Etant donné que cette théorie néglige la déformation de cisaillement transverse, ceci conduit à des résultats imprécis pour des plaques épaisses qui peuvent être interprétées par une surestimation de la rigidité de flexion et par conséquent une sous-estimation des déplacements. Par contre, suite à sa simplicité et rapidité (trois inconnu seulement), elle peut fournir des prédictions pour les plaques minces où les effets du cisaillement et déformations normales sont insignifiants (Thai et Kim (2015)).

2.2.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), tiennent en compte l'effet de cisaillement transversal, elle a supposé que la ligne verticale à l'axe neutre de la plaque changerait pendant la flexion de la plaque (figure 2.2) (Shwetha et al.2018), mais elles nécessitent d'introduire un facteur de correction de cisaillement pour satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque (Reddy 1999).

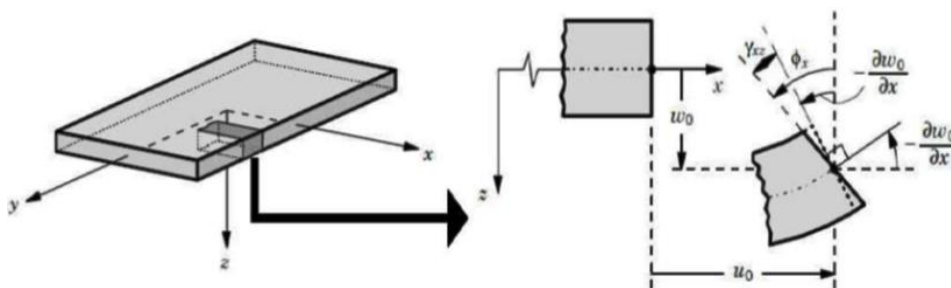


Figure 2. 2 Schématisation des déformations des plaques par la théorie (FSDT) (Reddy, 2007).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant (Reddy 2007) :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \quad (2.2.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \quad (2.2.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.2.c)$$

u_0, v_0 et w_0 : désignent les déplacements d'un point sur le plan $z = 0$.

ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale transversale autour des axes y et x , respectivement.

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \phi_y = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.3)$$

Suite à la difficulté d'estimer le facteur de correction pour satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque, d'autres théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été développées et proposées par les chercheurs.

2.2.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

Les limites des théories CPT et FSDT ont forcé le développement des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur et équivalentes pour éviter l'utilisation de facteurs de correction et pour obtenir la variation réaliste des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque (Ghugal et Shimpi 2002).

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la plaque. Elle introduit une fonction qui tient compte le phénomène de gauchissement. Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la plaque perd sa planéité (figure 2.3).

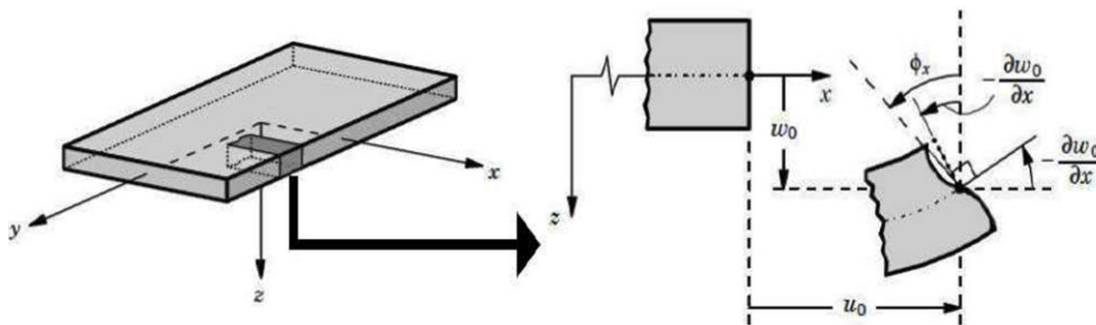


Figure 2. 3 Schématisation des déformations des plaques par la théorie (HSDT) (Reddy, 2007).

Le champ de déplacement est généralement donné par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\phi_x + f(z) \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (2.4.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z\phi_y + f(z) \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.4.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.4.c)$$

Avec u_0, v_0, w_0, ϕ_x et ϕ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement. La fonction $f(z)$ représente la distribution des déformations de cisaillement suivant l'épaisseur. Dans la littérature, plusieurs formes ont été attribuées pour cette fonction (tableau 2.1).

Tableau 2.1 Différents fonctions de forme de cisaillement (Cukanovi'c et al.2018)

Théorie	Fonction de cisaillement $f(z)$
CPT	0
FSDT	z
Ambartsumyan (1969)	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Levinson (1980), Reddy (1984)	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Reissner (1975)	$z \left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right)$
Shimpi (2002)	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$
Karama et al. (2003)	$z e^{-2(z/h)^2}$
Akavci (2010)	$(3\pi/2)h \tanh(z/h) - (3\pi/2)z \sec h^2(1/2)$
Ait Atmane (2010)	$\frac{z * \cosh(\pi/2)}{-1 + \cosh(\pi/2)} - \frac{(h/\pi) \sinh(\pi z/h)}{-1 + \cosh(\pi/2)}$
El meiche, Tounsi (2011)	$\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi) - z}{\cosh(\pi/2) - 1}$
Cukanovi'c et al. (2018)	$z \left(\cosh\left(\frac{z}{h}\right) - 1.388 \right)$

2.2.4 Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Des hypothèses simplificatrices sont faites à l'HSDT de sorte que le nombre d'inconnues est réduit. Un champ de déplacement conventionnel du HSDT satisfaisant les conditions de contraintes de cisaillement transversales (et donc de déformations) nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, est donné par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x \quad (2.5.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y \quad (2.5.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.5.c)$$

Dans l'équation 2.5, on trouve cinq déplacements inconnus qui sont : u_0 , v_0 , w_0 , ϕ_x et ϕ_y .

En considérant que $\phi_x = k_1 \int \theta dx$ et $\phi_y = k_2 \int \theta dy$.

Le champ de déplacement mentionné ci-dessus peut s'écrire comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta dx \quad (2.6.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta dy \quad (2.6.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.6.c)$$

Où u_0 , v_0 , w_0 et θ sont les quatre déplacements inconnus dans le plan médian de la plaque. Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie de la plaque. Les intégrales utilisées sont indéterminées et doivent être résolues par le type de solution adoptée et peuvent être exprimées comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.7.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (2.7.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.7.c)$$

Avec :

$$\lambda = \frac{m \pi}{a}, \quad \mu = \frac{n \pi}{b} \quad k_1 = \lambda^2, \quad k_2 = \mu^2, \quad A' = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad B' = -\frac{1}{\mu^2}$$

Ce champ de déplacement a été utilisé par plusieurs chercheurs pour l'analyse des plaques FGM, comme le comportement statique, dynamique et thermique sous divers conditions avec et sans fondations élastique. On peut citer Mahmoudi et al (2018), Bachiri et al (2018), Mekerbi et al. (2019), Merzoug et al (2020).

2.2.5 Théorie de déformation des plaques quasi-3D

L'une des hypothèses clés des théories FSDT et HSDT est que le déplacement transversal à travers l'épaisseur de la plaque est constant. Ceci a conduit à négliger l'étirement en épaisseur (Bachir Bouiadjra et al. 2018). Cependant, ces hypothèses sont inadéquates pour les plaques FGM épaisses. Pour remédier à ce problème et afin de prendre en compte les effets des déformations dues à l'étirement, des théories dites quasi-3D sont apparues dans lesquelles le déplacement transversal est exprimé comme une variation d'ordre élevé à travers l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, l'effet d'étirement de l'épaisseur est capturé (Huu-Tai et al. 2014).

Le champ de déplacement présenté par Huu-Tai et al. (2014) est :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x \quad (2.8.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y \quad (2.8.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z)\phi_z \quad (2.8.c)$$

$f(z)$ et $g(z)$ sont les fonctions de cisaillement transverse, où $g(z) = 1 - f'(z)$.

2.3 Relation entre les contraintes et les déformations

2.3.1 Relation contrainte déformation modèle bidimensionnelle (2D)

L'hypothèse des contraintes planes est utilisée pour modéliser des corps élastiques plans et minces (plaques) chargés dans leur plan. Dans ce cas, les déformations suivant z est non considérée ($\epsilon_z=0$).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Les coefficients d'élasticité Q_{ij} sont définis comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11} \quad \text{et} \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (2.10)$$

2.3.2 Relation contrainte déformation modèle tridimensionnelle (3D)

Si $\varepsilon_z \neq 0$, c'est-à-dire que l'étirement de l'épaisseur est considéré, le modèle 3D est utilisé. Dans ce cas, la relation contrainte déformation peut écrire (Neves et al. 2013, Reddy et al. 2014, Belabed et al. 2014, Hebali et al. 2014, Akavci et al. 2015, Bachir Boudjra et al. 2018 et

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Mekerbi et al 2019):

Les coefficients d'élasticité Q_{ij} sont définis comme :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} &= \frac{(1-\nu)E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} &= \frac{\nu E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.4 Analyse statique et dynamique des structures FGM

Plusieurs travaux ont été effectués pour analyser les comportements statiques et dynamiques des plaques en utilisant des théories d'ordre supérieurs (Benachour et al. 2011, Talha et Singh 2010, Daouadji 2012, Hebali et al. 2014, Meziane et al. 2014, Mahi et al. 2015, Bachir Boudjra et al. 2018 et Mekerbi et al 2019...etc). Le principe de Hamilton est utilisé pour le calcul dynamique, les équations de mouvement données sous la forme matricielle comme suite :

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{F\} \quad (2.13)$$

Où : $[K]$: est la matrice de rigidité, $[M]$: est la matrice de masse, $\{\Delta\}$: est le vecteur de déplacements, $\{F\}$: est le vecteur de charges et ω : est la fréquence.

La taille et les éléments des matrice $[K]$ et $[M]$ sont dépendants du champ de déplacement et le nombre d'inconnus qu'il comporte. Le calcul statique peut se faire par la mise la fréquence nul ($\omega=0$).

2.4 Analyse thermomécanique des structures FGM

Durant leurs durées de vie, les structures peuvent soumises à des variations de température. Celles-ci peuvent engendrées des modifications sur la rigidité et les caractéristiques à la rupture du matériau. En outre, la variation de la température produit une dilatation thermique (extension ou contraction) du matériau.

2.4.1 Dilatation thermique

La variation de la température induits une dilatation thermique du matériau, cette dilatation peut calculée sous la forme suivante (Berthelot 2013) :

$$\varepsilon^T = \alpha \Delta T(x, y, z, t) \quad (2.14)$$

Où α est le coefficient de dilatation thermique et ΔT est la variation de température à partir d'une température de référence pour laquelle les déformations thermiques sont considérées comme nuls. Dans le cas des plaques FGM, la relation contrainte/déformation en tenant compte les déformations engendrées par la variation de la température a été décrite comme suit (Sobhi 2014) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_z - \alpha \Delta T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

2.4.2 Chargement thermique

Deux variantes du chargement thermique à travers l'épaisseur des plaques FGM ont été utilisées par plusieurs chercheurs en peut citons Tounsi et al. (2013), Houari et al. (2013), Mahmoudi et

al.(2017), Bachiri et al (2019). La première, une variation selon la loi de puissance exponentielle qui donne un chargement harmonique. La seconde, le chargement thermique est supposé varie d'une façon uniforme, linéaire et non-linéaire.

2.4.2.1 Variation harmonique

La variation de température est supposée se produire dans la direction de l'épaisseur selon une forme de loi exponentielle. La variation du champ de température est supposée comme suit :

$$T(x, y, z, t) = \hat{t}(z) \hat{T}(x, y, t) \quad (2.16)$$

$$\hat{t} = T^{-e^{\frac{\gamma(z+0.5)^\eta}{h}}}, \quad \gamma = \ln\left(\frac{T^+}{T^-}\right) \quad (2.17)$$

Où T^+ est la température de la surface supérieure de la plaque FGM, T^- est la température de la surface inférieure et η est le facteur d'exposant de la température, noté que $\eta = 0$ présente la température appliquée à la surface supérieure de la plaque, tandis que $\eta = \infty$ quand la température est appliquée à la surface inférieure.

2.4.2.2 Variation linéaire et non-linéaire

Zidi et al. (2014) et Zenkour (2008) ont présentés la variation du champ de température comme suit :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h}T_2(x, y) + \frac{f(z)}{h}T_3(x, y) \quad (2.18)$$

Où T_1 , T_2 et T_3 sont les charges thermiques. Dans la résolution des problèmes thermomécaniques, les charges thermiques peuvent s'écrire sous la forme d'une série trigonométrique suivante :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (2.19)$$

A partir du champ de température défini par l'équation (2.18), deux champs de température à travers l'épaisseur peuvent être considérés :

- Distribution linéaire ($T_3=0$) ;
- Distribution non-linéaire ($T_3 \neq 0$).

2.5 Réponses des structures FGM reposent sur les fondations

Les fondations sont des parties importantes dans les systèmes physiques en raison de leur large éventail d'applications dans différents domaines de la science et de l'ingénierie, ils jouent un rôle primordial pour préserver le système structurel sous les oscillations.

Plusieurs modèles des fondations avec différentes équations ont été développés par plusieurs chercheurs, afin d'établir des modèles de calcul qui considère l'interaction sol-structure et reflétant leurs comportement le plus réellement possible. Dans ce qui suit nous présentons quelques modèles les plus utilisés dans la littérature pour les fondations élastiques et les fondations viscoélastiques.

2.5.1 Les modèles élastiques

En réalité, la pression exercée par l'ouvrage sur le sol (et réciproquement par le sol sur l'ouvrage) est en fonction de leur déformation relative. Cette interaction sol-structure est complexe. En guise de simplification, elle peut être assimilée à un ressort avec un comportement élastique linéaire, éventuellement parfaitement plastique (Seguini 2020). La figure (2.4) représente les plusieurs problèmes d'interaction sol-structure.

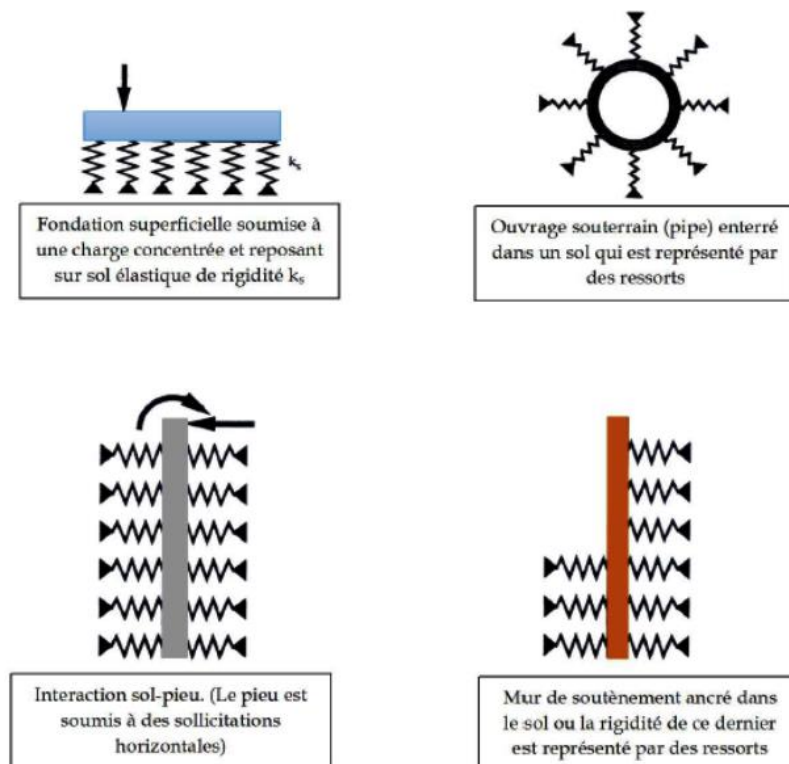


Figure 2.4 Type de problème d'interaction sol-structure (Seguini 2016).

2.5.1.1 Modèle de Winkler

Le modèle de Winkler (1867) est le plus connu, il a défini le sol comme étant un empilement de tranches indépendantes et chaque tranche est modélisée par un ressort vertical sur lequel s'appuie la fondation (figure 2.5) (Seguini 2016).

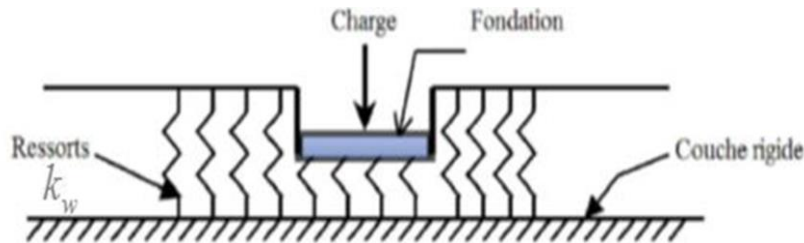


Figure 2.5 Modèle de fondation de Winkler (Seguini 2016)

Cependant pour calculer les contraintes s'exerçant sous une fondation, Winkler a supposé que la réaction du sol exercée en chaque point sous la fondation est proportionnelle à la déflexion de la fondation. En effet la déformation verticale caractéristique de la fondation est donc définie par l'utilisation de ressorts identiques, indépendants, étroitement espacés et linéairement élastiques. La densité de réaction de cette fondation est donnée par (Younesian et al 2019) :

$$f_e = k_w w \quad (2.20)$$

Où k_w est le module de réaction du sol (rigidité des ressorts ou module de Winkler).

Tandis que l'insuffisance du modèle de Winkler a été prouvée par plusieurs chercheurs (Terzaghi, 1955). En effet l'inconvénient de ce modèle est qu'il ne prend pas en compte l'interaction entre les ressorts, ce qui revient à négliger le cisaillement vertical dans le sol. En conséquence, une discontinuité de déplacement se crée entre la zone chargée et la zone non chargée sous la fondation mais en réalité la surface ne montre aucune discontinuité (Figure 2.6).

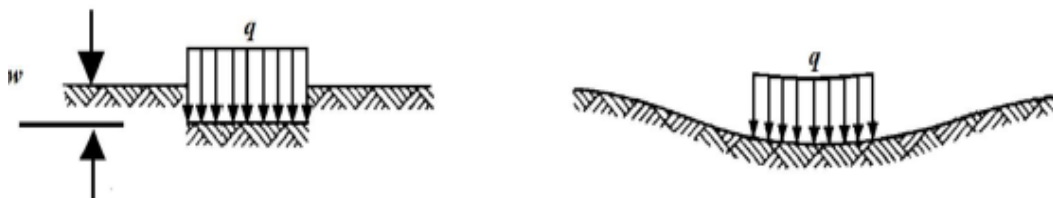


Figure 2.6 Déflexion d'une fondation élastique de type Winkler soumise à une charge répartie.

Les modèles mentionnés ci-dessous, sont développés sur la base du modèle Winkler. En fait, les chercheurs ont commencé par la théorie de Winkler, ensuite ils ont inséré plus de paramètres et des éléments dans le modèle de Winkler afin de présenter un comportement de réaction plus précis pour les fondations.

2.5.1.2 Modèle de Pasternak

Pasternak, 1954 a pris en considération l'interaction de cisaillement entre les éléments du ressort de la fondation de Winkler et cela en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou à une plaque se composant des éléments verticaux incompressibles qui se déforme seulement sous l'effet d'un cisaillement transversal (Figure 2.7).

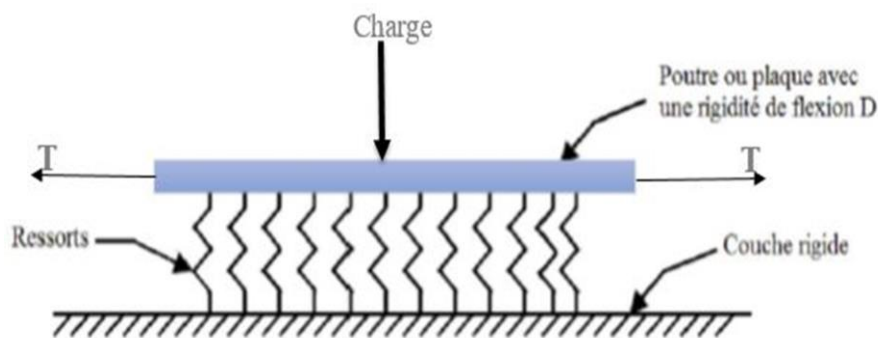


Figure 2.7 Modèle de fondation de Pasternak (Seguini 2016)

Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle du sol K_p (module de cisaillement de la couche de cisaillement) en plus de la rigidité de Winkler K_w . La densité de réaction de cette fondation est donnée par (Daikh. A. 2019) :

$$f_e = k_w w - k_p \nabla^2 w \quad (2.21)$$

2.5.1.3 Modèle de Kerr

Kerr (1965) a introduit une couche de cisaillement dans le type de fondation de Winkler et il a supposé que les ressorts qui se trouvent en dessous et en dessus de cette couche sont différents. La figure (2.8) représente le modèle mécanique adopté par Kerr. L'équation différentielle de ce modèle peut être exprimée comme suit (Younesian et al 2019) :

$$\left(1 + \frac{k_l}{k_u}\right) f_e(x) = \frac{k_s}{k_1} \nabla^2 f_e(x) + k_l w(x) - k_s \nabla^2 w(x) \quad (2.22)$$

Où k_u est la rigidité des ressorts de la première couche, k_l est la rigidité des ressorts de la deuxième couche et k_s est le module de cisaillement de la couche intermédiaire.

Shahsavari et al. (2017) et Daikh et al. (2018) ont utilisé une formule simple de la réaction de la fondation élastique avec trois paramètres comme suit :

$$f_e = \left(\frac{k_l k_u}{k_l + k_u} \right) w - \left(\frac{k_s k_u}{k_l + k_u} \right) \nabla^2 w \quad (2.23)$$

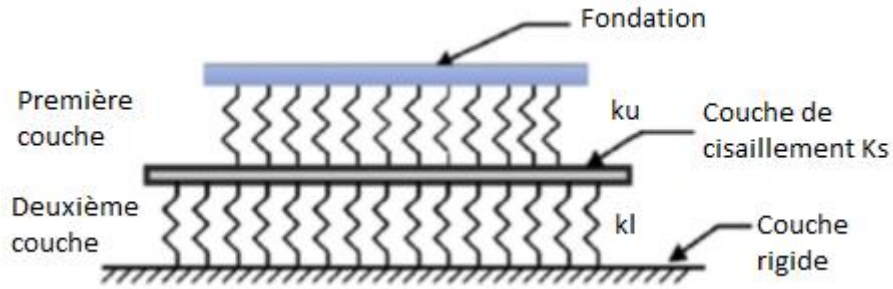


Figure 2.8 Modèle de fondation de Kerr (Seguini 2016)

2.5.1.4 Modèle de fondation élastique variable

La distribution des couches de sol n'est pas uniforme d'un point à un autre. Cela signifie que le module de Winkler est variable et n'est pas fixé sur la longueur d'une structure sous forme de plaque ou de poutre. La densité de réaction de cette fondation est donnée par (Daikh. A. 2019) :

$$f_e = k_w w(x) - k_p \nabla^2 w \quad (2.24)$$

Où : f_e est la densité de la force de réaction de la fondation élastique, k_p est la rigidité de la couche de cisaillement, ∇^2 est l'opérateur Laplacien en x et y . w est la déflexion de la plaque et k_w est le paramètre Winkler dépendant de x seulement.

Ce paramètres de Winkler prend des distributions linéaire, parabolique et sinusoidale sous formes adimensionnelles comme ce suit (Pradhan et Murmu. (2009), Sobhy. (2015), Attia et al. (2018)) :

$$k_w(x) = \frac{J_1 h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & \text{lineaire} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a} \right)^2 & \text{Parabolique} \\ 1 + \zeta \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) & \text{Sinusoidale} \end{cases} \quad (2.25)$$

Où : J_1 est une constante et ζ un paramètre variable.

Il est à noter que, si $\zeta = 0$ la fondation élastique devient celle de Pasternak. Et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation devient une fondation de Winkler.

2.5.2 Les modèles viscoélastiques

2.5.2.1 Modèle de Kelvin-Voigt

La fragilité du modèle Winkler est le manque de la viscoélasticité. Le modèle Kelvin-Voigt (figure 2.9) prend en considération le comportement viscoélastique du sol par une série de ressorts discrets parallèles avec des amortisseurs (Younesian et al 2019).

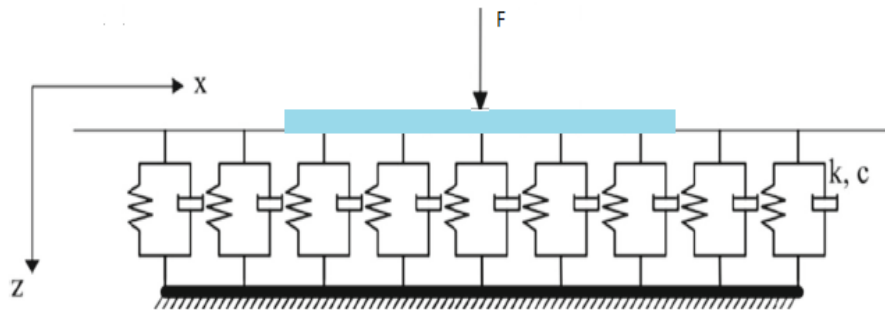


Figure 2.9 Modèle de fondation de Kelvin-Voigt (Younesian et al 2019).

La densité de réaction de cette fondation est donnée par (Younesian et al 2019) :

$$f_e(x, t) = k_w w(x, t) + c \dot{w}(x, t) \quad (2.26)$$

c : est le coefficient d'amortissement.

2.5.2.2 Modèle Pasternak viscoélastique

Le modèle Pasternak viscoélastique est composé par deux couches. La première est composée d'un amortisseur plus un ressort de Winkler connectés en parallèle et la deuxième représente la couche de cisaillement de Pasternak (figure 2.10).

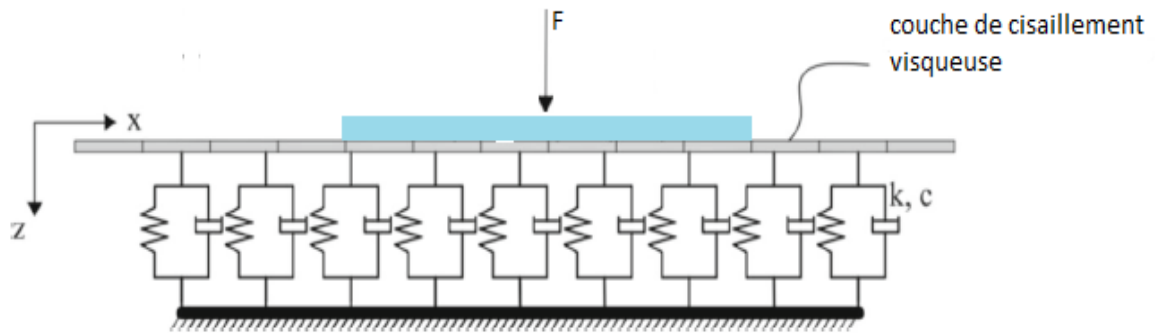


Figure 2.10 Modèle de fondation de Pasternak viscoélastique (Younesian et al 2019).

L'interaction entre la poutre viscoélastique et la fondation Pasternak viscoélastique peut être exprimée comme (Hashemi et al. (2015), Younesian et al. (2019)).

$$f_e = k_w w - k_p \nabla^2 w + c \dot{w} \quad (2.27)$$

c : est le coefficient d'amortissement.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes théories des plaques et les modèles des fondations (élastiques et viscoélastiques) existantes dans la bibliographié. Des améliorations considérables ont été effectuées par de nombreux chercheurs afin de décrire correctement les différents comportements des plaques FGM, leurs réponses sur les fondations et d'améliorer la précision des résultats pour rapprocher à la réalité désirée.

Parmi les théorie présentées, Nous constatons que la théorie quasi-3D est la mieux adaptée pour l'analyse de comportement des plaques FGM épaisses (poutres), suite à sa capacité de prendre en compte l'effet d'étirement avec un nombre d'inconnus réduit.

CHAPITRE 3

Étude du comportement vibratoire des
poutres FG bidirectionnelles reposant sur
des fondations élastiques variables

3.1 Introduction

Les poutres sont largement utilisées dans les structures civiles, mécaniques, aéronautiques, et aérospatiales. Cela est principalement dû de leurs hautes résistances, leurs rigidités spécifiques et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés pour répondre aux exigences de la pratique, ce qui a rendu nécessaire d'étudier leurs comportements vibratoires inclue une fondation élastique variable.

L'objectif visé dans ce chapitre est étudier l'effet de l'inclusion d'une fondation élastique variable sur le comportement vibratoire d'une poutre BDFG en utilisant la théorie raffinée de déformation en cisaillement 2D qui contient des termes intégraux indéterminés pour réduire le nombre de termes inconnus. Cette cinématique a été largement utilisée pour l'analyse de la flexion, flambement et le comportement vibratoire des plaques FGM unidirectionnelle (variation des propriétés suivant l'épaisseur seulement) reposées sur des fondations élastiques par plusieurs chercheurs citons : Meksi et al. (2018), Bourada et al. (2016), Sekkat et al. (2017), Mahmoudi et al. (2018), Bachiri et al. (2018), Mekerbi et al. (2019) et Merzoug et al. (2020).

Les propriétés des matériaux de la poutre BDFG varient selon l'épaisseur et la direction longitudinale (axiale) selon la loi de puissance. La fondation élastique est modélisée comme une fondation Winkler-Pasternak à deux paramètres variables. Les équations de mouvement sont dérivées par le principe des déplacements virtuels. Des solutions analytiques pour le comportement vibratoire sont obtenues sur la base de la série Fourier qui satisfont la méthode de Navier. Une analyse paramétrique est menée pour évaluer l'effet de la fondation élastique variable, de paramètre des matériaux (n_x, n_z) BDFG, l'élancement de la poutre (L/h) et d'autres paramètres sur les fréquences naturelles d'une poutre BDFG appuyée sur une fondation élastique variable. La précision de la présente étude est vérifiée en comparant les résultats actuels avec ceux disponibles dans la littérature.

3.2 Développements théoriques :

Comme le montre la figure 3.1, nous considérons un modèle d'une poutre fonctionnellement graduée bidirectionnelle (BDFG) avec longueur L , épaisseur h et largeur b . La poutre est supposée reposer sur une fondation élastique variable.

Le système de coordonnées cartésiennes dans la figure 3.1 est introduit de telle sorte que l'axe des (x) se trouve sur le plan médian, et l'axe des (z) est perpendiculaire au plan médian, et il dirige vers le haut.

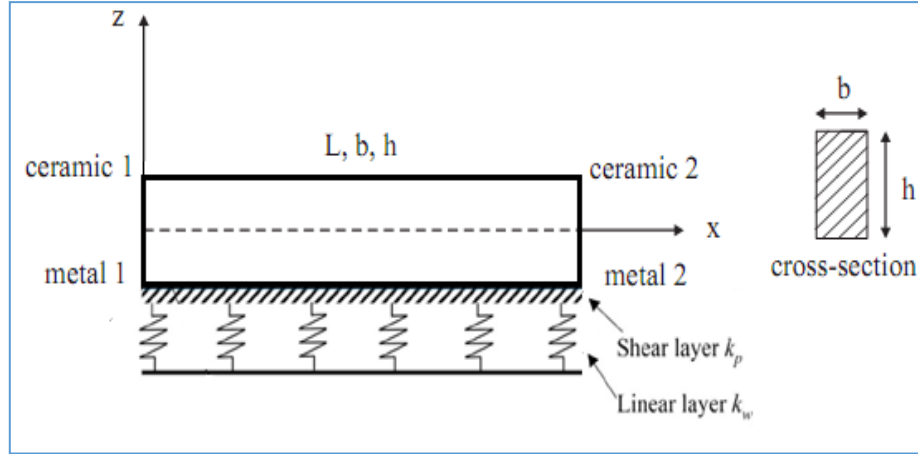


Figure 3.1 Géométrie et coordonnées d'une poutre BDFG reposant sur une fondation élastique

On suppose que le matériau de la poutre est constitué de deux céramiques (céramique 1 et céramique 2) et de deux métaux (métal1 et métal2) dont la fraction volumique varie dans l'épaisseur et dans le sens longitudinal à la fois (Tran et Nguyen 2018).

$$\begin{aligned}
 V_{c1} &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \right], & V_{c2} &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \\
 V_{m1} &= \left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \right] \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \right], & V_{m2} &= \left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \right] \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où n_z et n_x sont les indices de la loi de puissance qui dictent la variation des matériaux constituants dans les directions d'épaisseur et longitudinale, respectivement.

P est les propriétés effectives des matériaux (tels que le module élastique et la masse volumique, etc.) qui sont déterminées à l'aide du modèle Voigt comme suit (Tran et Nguyen, 2018)

$$P = V_{c1}P_{c1} + V_{c2}P_{c2} + V_{m1}P_{m1} + V_{m2}P_{m2} \tag{3.2}$$

Où P_{c1} , P_{c2} , P_{m1} et P_{m2} indiquent respectivement les propriétés de la céramique1, céramique2, métal 1 et métal2.

En substituant l'équation (3.1) dans l'équation (3.2), on obtient (Tran et Nguyen 2018)

$$P(x, z) = \left[(P_{c1} - P_{m1}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} + P_{m1} \right] \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \right] + \left[(P_{c2} - P_{m2}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} + P_{m2} \right] \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \quad (3.3)$$

Nous notons que, dans l'équation (3.3) si $n_x=0$, nous aurons une poutre FG unidirectionnelle composée par céramique2 et métal2. De plus, si $n_z=0$, nous aurons une poutre FG axialement unidirectionnelle composée par céramique1 et céramique2.

3.3 Cinématique

Le champ de déplacement HSDT conventionnel est donné par :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, t) \quad (3.4.a)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.4.b)$$

Où u_0 , w_0 et ϕ_x sont les trois déplacements inconnus du plan médian de la poutre, $f(z)$ désigne une fonction de forme représentant la variation des déformations et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. En considérant que : $\phi_x(x, t) = k_1 \int \theta(x, t) dx$, le champ de déplacement du présent modèle peut être exprimé sous une forme plus simple comme :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \quad (3.5.a)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.5.b)$$

Dans ce travail, la théorie actuelle de déformation en cisaillement des poutres d'ordre supérieur est obtenue en définissant. La fonction de forme est donnée par Reissner (1975) en tant que:

$$f(z) = 5z \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{3h^2} \right) \quad (3.6)$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s, \quad \{\gamma_{xz}\} = g(z)\{\gamma_{xz}^0\} \quad (3.7)$$

$$\{\varepsilon_x^0\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_x^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ k_1 \theta \end{Bmatrix}, \quad (3.8.a)$$

$$\{\gamma_{xz}^0\} = \left\{ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} \quad (3.8.b)$$

Où :

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par la méthode de type

Navier et peuvent être données comme suit : $\int \theta \, dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}$.

$$A' \text{ et } k_1 \text{ sont exprimés comme suit} \quad A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad k_1 = \alpha^2 \quad (3.9)$$

Où α est exprimé dans l'équation (3.25).

Pour les poutres FG élastiques, les relations constitutives peuvent être exprimées sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (3.10)$$

Où (σ_x, τ_{xz}) et $(\varepsilon_x, \gamma_{xz})$ sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation.

En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (3.1), les coefficients de rigidité Q_{ii} peuvent être donnés comme :

$$Q_{11} = \frac{E(x, z)}{(1 - \nu^2)}, \quad Q_{55} = \frac{E(x, z)}{2(1 + \nu)} \quad (3.11)$$

La poutre est supposée appuyer sur un modèle de fondation élastique à deux paramètres, qui se compose de ressorts rapprochés interconnectés à travers une couche de cisaillement constituée

d'éléments verticaux incompressibles, qui se déforment uniquement par cisaillement transversal. L'équation de réponse de cette fondation est donnée :

$$f_e = \overline{K}(x) w(x) - \overline{G} \nabla^2 w(x) \quad (3.12)$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation élastique, \overline{K} est le paramètre de Winkler ne dépendait que de x . Elle est supposée linéaire, parabolique ou sinusoïdale (Pradhan et Murmu (2009), Sobhy (2015), Ali Rachedi et al. (2020), Merzoug et al. (2020)) :

$$\overline{K}(x) = \frac{j_1 h^3}{L^4} \begin{cases} 1 + \xi \frac{x}{L} & \text{Linear} \\ 1 + \xi \left(\frac{x}{L}\right)^2 & \text{Parabolic} \\ 1 + \xi \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) & \text{Sinusoidal} \end{cases} \quad (3.13)$$

j_1 est une constante et ξ est un paramètre varié. G est la rigidité de la couche de cisaillement de la fondation, ∇^2 est l'opérateur de Laplace en x , et w est la déflexion de la poutre. Notez que, si $\xi = 0$, la fondation élastique devient une fondation Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement de la fondation est négligée, la fondation Pasternak devient une fondation Winkler.

3.4 Equations du mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé pour déterminer les équations du mouvement :

$$0 = \int_0^t (\delta U_e - \delta T + \delta U_R) dt \quad (3.14)$$

Où δU_e est la variation de l'énergie de déformation, δU_R est la variation de l'énergie potentielle de la fondation, et δT la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre est donnée par

$$\delta U_e = \int_A \int_z [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz = \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0] dA \quad (3.15)$$

Où les résultantes des contraintes N , M et Q sont définies par

$$(N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_x dz, \quad (Q_{xz}) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}) dz \quad (3.16)$$

La variation de l'énergie potentielle de la fondation

$$\delta U_R = \int_A f_e \delta w dA \quad (3.17)$$

La variation de l'énergie cinétique de la poutre peut être exprimée comme

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_A [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dA \\ \delta T &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right] + J_1 k_1 A \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right] + I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + K_2 (k_1 A)^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} - J_2 k_1 A \left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right] \right\} dA \end{aligned} \quad (3.18)$$

La convention point-exposant indique la différenciation par rapport le temps t , $\rho(z)$ est la masse volumique donnée par l'équation (3.3) et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties de masse exprimées par

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (3.19.a)$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (3.19.b)$$

En substituant les équations (3.15), (3.17) et (3.18) dans l'équation (3.14), ce qui suit peut être dérivée:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad (3.20.a)$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} - f_e = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \quad (3.20.b)$$

$$\delta \theta : -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} = -J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - K_2 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \quad (3.20.c)$$

En substituant l'équation (3.8) dans l'équation (3.10) et les résultats ultérieurs dans les équations (3.16), les résultantes des contraintes sont obtenues en termes de déformations sous la forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^b \\ k_x^s \end{Bmatrix} \quad (3.21.a)$$

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (3.21.b)$$

$$A_{44}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} g^2(z) dz \quad (3.21.c)$$

En remplaçant l'équation (3.21) dans l'équation (3.20), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, w_0, θ) sous la forme :

$$\int_x \begin{bmatrix} A_{11} d_{11} u_0 + d_1 A_{11} d_1 u_0 - B_{11} d_{111} w_0 - d_1 B_{11} d_{11} w_0 + B_{11}^s k_1 A' d_{111} \theta \\ + d_1 B_{11}^s k_1 A' d_{11} \theta - I_0 \ddot{u}_0 + I_1 d_1 \ddot{w}_0 - J_1 A' k_1 d_1 \ddot{\theta} \end{bmatrix} \delta u_0 dx = 0 \quad (3.22.a)$$

$$\int_x \left[B_{11} d_{111} u_0 + d_{11} B_{11} d_1 u_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - d_{11} D_{11} d_{11} w_0 + k_1 A' D_{11}^s d_{1111} \theta \right. \\ \left. + k_1 A' d_{11} D_{11}^s d_{11} \theta - \bar{K}(x) w_0 + \bar{G} d_{11} w_0 - I_0 \ddot{w}_0 - I_1 d_1 \ddot{u}_0 + I_2 d_{11} \ddot{w}_0 - k_1 A' J_2 d_{11} \ddot{\theta} \right] \delta w_0 dx = 0 \quad (3.22.b)$$

$$\int_x \left[-k_1 A' (B_{11}^s d_{1111} u_0 + d_{11} B_{11}^s d_1 u_0) + k_1 A' (D_{11}^s d_{1111} w_0 + d_{11} D_{11}^s d_{11} w_0) \right. \\ \left. - (k_1 A')^2 (H_{11}^s d_{1111} \theta + d_{11} H_{11}^s d_1 \theta - A_{44}^s d_{11} \theta - d_1 A_{44}^s d_1 \theta) + k_1 A' J_1 d_1 \ddot{u}_0 \right] \delta \theta dx = 0 \\ \left. - k_1 A' J_2 d_{11} \ddot{w}_0 + (k_1 A')^2 K_2 d_{11} \ddot{\theta} \right] \delta \theta dx = 0 \quad (3.22.c)$$

3.5 Solution analytique pour poutre FG simplement appuyées

Dans ce qui suite, la solution Navier sera utilisée pour résoudre le problème des poutres simplement appuyées. Les conditions aux limites suivantes sont imposées sur les bords :

$$u_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{à } x = 0, L \quad (3.23)$$

La représentation suivante pour les quantités de déplacement, qui satisfont les conditions aux limites ci-dessus, est appropriée dans le cas de notre problème

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m e^{i\omega t} \frac{\partial X(x)}{\partial x} \\ W_m e^{i\omega t} X(x) \\ \theta_m e^{i\omega t} X(x) \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Pour les conditions aux limites simplement appuyées.

Où ω est la fréquence de la vibration libre de la poutre, $\sqrt{i} = -1$ l'unité imaginaire.

$$X(x) = \sin(\alpha x) \quad (3.25)$$

$$\text{Avec} \quad \alpha = m\pi/L \quad (3.26)$$

L : est la longueur de la poutre.

En substituant l'équation (3.24) dans l'équation (3.23), on obtient le problème suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \theta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Les termes de la matrice $[K - \omega^2 M]$ sont donnés comme suite :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_x \left[A_{11} d_{111} X + d_1 A_{11} d_{11} X + I_0 d_1 X \omega^2 \right] dx \\ a_{12} &= \int_x \left[-B_{11} d_{111} X - d_1 B_{11} d_{11} X - I_1 d_1 X \omega^2 \right] dx \\ a_{13} &= \int_x \left[k_1 A' B_{11}^s d_{111} X + k_1 A' d_1 B_{11}^s d_{11} X + k_1 A' J_1 d_1 X \omega^2 \right] dx \\ a_{21} &= \int_x \left[B_{11} d_{111} X + d_{11} B_{11} d_{11} X + I_1 d_{11} X \omega^2 \right] dx \\ a_{21} &= \int_x \left[-D_{11} d_{111} X - d_{11} D_{11} d_{11} X + I_0 X \omega^2 - I_2 d_{11} X \omega^2 - \overline{K}(x) X + \overline{G} d_2 X \right] dx \\ a_{32} &= \int_x \left[k_1 A' D_{11}^s d_{111} X + k_1 A' d_{11} D_{11}^s d_{11} X + k_1 A' J_2 d_{11} X \omega^2 + J_1^{st} X \omega^2 \right] dx \\ a_{31} &= \int_x \left[-k_1 A' B_{11}^s d_{111} X - k_1 A' d_{11} B_{11}^s d_{11} X - k_1 A' J_1 d_{11} X \omega^2 \right] dx \\ a_{32} &= \int_x \left[k_1 A' D_{11}^s d_{111} X + k_1 A' d_{11} D_{11}^s d_{11} X + k_1 A' J_2 d_{11} X \omega^2 + J_1^{st} X \omega^2 \right] dx \\ a_{33} &= \int_x \left[\begin{aligned} &-(k_1 A')^2 H_{11}^s d_{111} X - (k_1 A')^2 d_{11} H_{11}^s d_{11} X - 2k_1 A' R d_{11} X + (k_1 A')^2 (A_{44}^s d_{11} X + d_1 A_{44}^s d_1 X) \\ &-(k_1 A')^2 K_2 d_{11} X \omega^2 + K_2^{st} X \omega^2 \end{aligned} \right] dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.6 Résultats numériques et discussions

Dans cette section, des études numériques ont été effectuées pour vérifier la précision du modèle actuel et étudier les effets des paramètres des matériaux (n_z, n_x), l'élançement de la poutre (L/h) et les paramètres de la fondation élastique variable sur les fréquences naturelles d'une poutre BDFG.

Comme premier exemple, les fréquences adimensionnelles d'une poutre unidirectionnelle transversale ($n_x=0$) de la solution actuelle sont comparées à celles obtenues par Chaabane et al. (2019), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur d'Ould Larbi et al. (2013) et la théorie des poutres de Timoshenko (TBT) de Şimşek (2010). Dans cet exemple, la poutre FG est composée d'aluminium (Al) et d'alumina (Al_2O_3) possédant les propriétés suivantes :

Céramique (Alumina, Al_2O_3) : $E_c=380$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho_c = 3960$ Kg/m³. Métal (Aluminium, Al): $E_m=70$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho_m = 2707$ Kg/m³. La forme adimensionnelle suivante est utilisée pour

$$\text{calculer la fréquence : } \hat{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} , j_2 = \frac{\bar{G}L^2}{h^3} .$$

Tableau 3.1 : fréquences adimensionnelles d'une poutre FG unidirectionnelle transversal ($n_x=0$)

L/h	Sources	Indice de la loi de puissance n_z					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Present	5.1575	4.4137	3.9926	3.6278	3.4019	3.2820
	Chaabane et al. (2019)	5.1633	4.4180	3.9963	3.6303	3.4004	3.2846
	Ould Larbi et al. (2013)	5.1529	4.4108	3.9905	3.6263	3.4001	3.2812
	TBT (Şimşek 2010)	5.1527	4.4111	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
20	Present	5.4654	4.6543	4.2074	3.8376	3.6492	3.5394
	Chaabane et al. (2019)	5.4657	4.6545	4.2076	3.8378	3.6491	3.5395
	Ould Larbi et al. (2013)	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6484	3.5389
	TBT (Şimşek 2010)	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390

A partir du tableau (3.1), on peut voir que les résultats obtenus par le modèle proposé sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature pour les poutres FG unidirectionnelles.

Une autre validation peut être vue dans le tableau (3.2), les fréquences adimensionnelles d'une poutre BDFG simplement appuyée sans fondation élastique en température de référence ($\Delta T = 0$) calculée avec la solution actuelle sont comparées à celles de Nguyen et al. (2017) et de Tran et Nguyen (2018).

Dans ce qui suit, on utilise une poutre BDFG avec un rapport $L/h=20$ composé d'alumine (Al_2O_3) comme céramique 1, de zirconia (ZrO_2) comme céramique 2, d'acier inoxydable (SUS304) comme métal 1 et d'aluminium (Al) comme métal 2. Les propriétés du matériau sont les suivantes :

$$E_{c1} = 390 \text{ GPa}, E_{c2} = 200 \text{ GPa}, \rho_{c1} = 3960 \text{ Kg} / \text{m}^3, \rho_{c2} = 5700 \text{ Kg} / \text{m}^3$$

$$E_{m1} = 210 \text{ GPa}, E_{m2} = 70 \text{ GPa}, \rho_{m1} = 7800 \text{ Kg} / \text{m}^3, \rho_{m2} = 2702 \text{ Kg} / \text{m}^3$$

Table 3.2 Comparaison des fréquences adimensionnelles d'une poutre BDFG simplement appuyée sans fondation élastique.

n_z	Sources	n_x							
		0	1/3	1/2	5/6	1	4/3	3/2	2
0	Nguyen et al.(2017)	3,3018	3,7429	3,9148	4,1968	4,3139	4,5118	4,5956	4,8005
	Tran et Nguyen (2018)	3,3018	3,7428	3,9146	4,1966	4,3137	4,5116	4,5954	4,8003
	Présent	3,3018	3,5766	3,7793	4,1773	4,3562	4,6653	4,7965	5,1115
	Différence	0,0%	4,4%	3,5%	0,5%	1,0%	3,4%	4,4%	6,5%
1/3	Nguyen et al.(2017)	3,1542	3,505	3,6305	3,8252	3,9022	4,0277	4,0792	4,2009
	Tran et Nguyen (2018)	3,1543	3,505	3,6305	3,8251	3,9022	4,0276	4,0791	4,2008
	Présent	3,1543	3,3285	3,488	3,8011	3,9389	4,1705	4,2661	4,4881
	Différence	0,0%	5,0%	3,9%	0,6%	0,9%	3,5%	4,6%	6,8%
1/2	Nguyen et al.(2017)	3,1068	3,3285	3,5397	3,7087	3,7745	3,8805	3,9236	4,0245
	Tran et Nguyen (2018)	3,1069	3,4285	3,5397	3,7087	3,7745	3,8805	3,9235	4,0244
	Présent	3,1069	3,2481	3,3948	3,6837	3,8101	4,021	4,1073	4,3058
	Différence	0,0%	5,3%	4,1%	0,7%	0,9%	3,6%	4,7%	7,0%
5/6	Nguyen et al.(2017)	3,0504	3,3296	3,4206	3,5548	3,6059	3,6569	3,7194	3,7847
	Tran et Nguyen (2018)	3,0505	3,3296	3,4206	3,5547	3,6058	3,6869	3,7193	3,7946
	Présent	3,0505	3,1431	3,2721	3,5287	3,6403	3,8247	3,8993	4,0687
	Différence	0,0%	5,6%	4,3%	0,7%	1,0%	3,7%	4,8%	7,2%
1	Nguyen et al.(2017)	3,0359	3,2984	3,3819	3,5035	3,5495	3,6219	3,6508	3,7177
	Tran et Nguyen (2018)	3,0359	3,2983	3,3818	3,5034	3,5493	3,6217	3,6507	3,7175
	Présent	3,0359	3,1095	3,2319	3,4771	3,5835	3,7588	3,8295	3,9892
	Différence	0,0%	5,7%	4,4%	0,8%	1,0%	3,8%	4,9%	7,3%

Pour tous les matériaux, $\nu = 0.3$. Les fréquences adimensionnelles $\hat{\omega}$ d'une poutre BDFG dans

le tableau.3.2 sont les suivants :
$$\hat{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_{m2}}{E_{m2}}}$$

Comme prévu, un bon accord peut être observé entre les résultats actuels et les résultats disponibles. Comme on peut le voir dans le tableau 3.2, la différence maximale entre les résultats de la solution actuelle et ceux de Tran et Nguyen (2018) n'est pas supérieure à 7,3% pour une poutre BDFG et est de l'ordre de 0% dans le cas d'une poutre FG unidirectionnelle transversal ($n_x = 0$). Une la légère différence entre les résultats de la présente étude et ceux de Nguyen et al. (2017) et de Tran et Nguyen (2018) pour les poutres BDFG peut expliquer par la différence entre la théorie de la poutre et la solution utilisée avec les références précédentes.

En effet, dans le présent travail, nous avons utilisé le modèle HSDT-2D et la solution Navier pour déterminer les fréquences des poutres simplement appuyées. Nguyen et al. (2017) ont utilisé une formulation par éléments finis (MEF) basée sur la théorie des poutres de Timoshenko,

Tran et Nguyen (2018) ont utilisé la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre et la formulation par éléments finis basée sur la rotation en cisaillement.

La figure 3.2 montre la variation de la fréquence adimensionnelle en fonction des paramètres des matériaux de la loi de puissance dans les deux directions n_x et n_z . Deux cas sont étudiés :

- figure (3.2.a), $n_z=0$ avec variation de n_x et $n_x=0$ avec variation de n_z .
- figure (3.2.b), $n_z=1$ avec variation de n_x et $n_x=1$ avec variation de n_z .

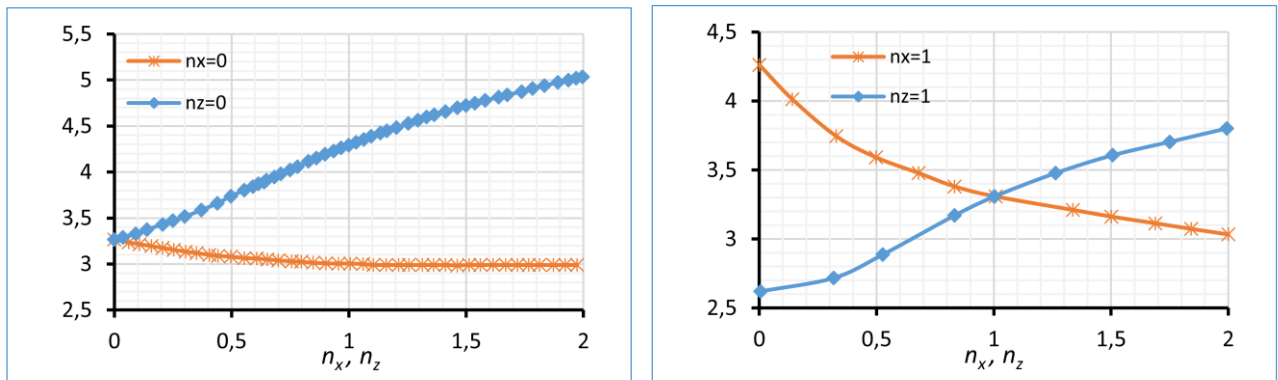
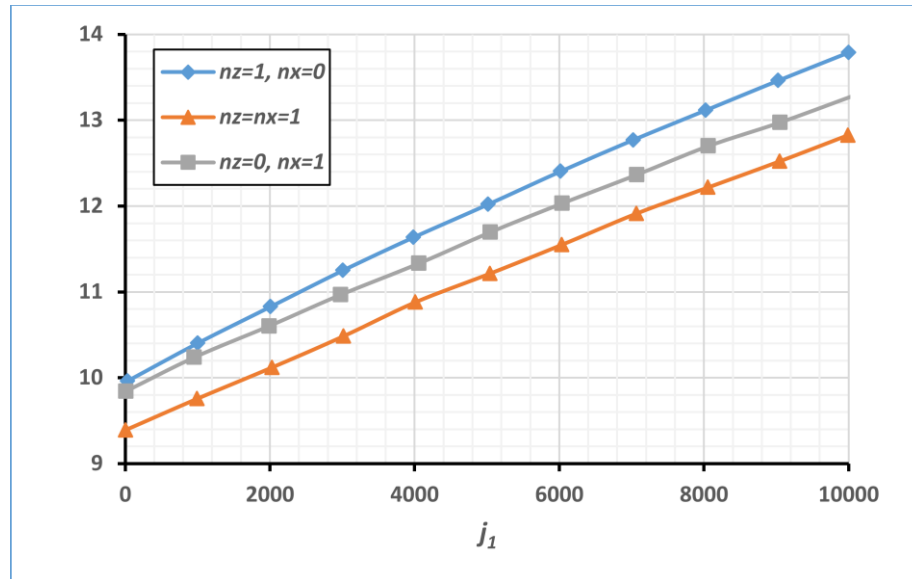


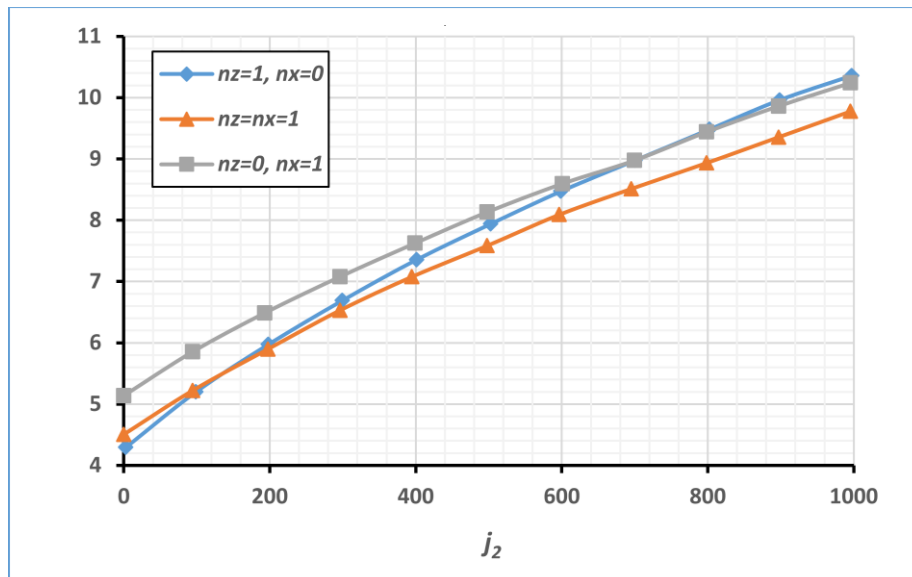
Figure 3.2 Variation des fréquences adimensionnelles $\hat{\omega}$ en fonction des indices graduels de la poutre FG sans fondation élastique ($L/h=10$).

Plusieurs informations peuvent être obtenues par ces figures :

- Pour la figure (a), les deux variantes partent du même point. Ceci est logique car cela correspond au cas de la poutre isotrope $n_x=n_z=0$.
- Dans le cas où $n_z=0$, l'augmentation de n_x provoque l'augmentation de la fréquence, donc une diminution de la période. Ce cas correspond à une poutre FG unidirectionnelle axialement rigide. Contrairement au deuxième cas où $n_x=0$ avec variation de n_z , où une diminution de la fréquence est observée.
- La même remarque est observée sur la figure (b). Pour $n_z=1$ avec variation de n_x (poutre FG unidirectionnelle axialement AFG), les fréquences augmentent. L'inverse est observé pour le deuxième cas.
- Dans la figure (b), les deux courbes se coupent au point $n_x=n_z=1$. À ce stade, nous avons une poutre FG où la variation de la fraction volumique est la même dans les deux sens.



(a)



(b)

Figure 3.3 Variation des fréquences adimensionnelles $\hat{\omega}$ en fonction des paramètres de la fondation élastique ($L/h = 10, \xi = 0$). (a) $j_2 = 1000$, (b) $j_1 = 1000$.

La figure 3.3 montre l'effet d'élasticité de la fondation sur la fréquence adimensionnelle pour les trois types des poutres FG.

- poutre FG unidirectionnelle transversalement ($n_z=1$ et $n_x=0$),
- poutre FG unidirectionnelle axialement ($n_z=0$ et $n_x=1$),
- poutre BDFG poutre ($n_z=1$ et $n_x=1$),

On peut voir sur cette figure que l'augmentation des valeurs des deux paramètres de la fondation élastique (Winkler et Pasternak) entraîne une augmentation de la fréquence. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'incorporation d'une fondation élastique augmente la rigidité de la poutre, réduisant ainsi sa période et par conséquent augmentant sa fréquence.

Dans la figure 3.3.a, la poutre FG unidirectionnelle transversalement donne les fréquences les plus élevées, la poutre BDFG donne les fréquences les plus basses et la poutre unidirectionnelle axialement est intermédiaire. Par contre, les courbes sont assez proches dans la figure 3.3.b.

Tableau 3.3 effet des paramètres d'élasticité de la fondation et l'élançement de la poutre (L/h) sur la fréquence adimensionnelle $\hat{\omega}$ ($n_x = n_z = 1, \xi = 0$)

j_1, j_2	L/h						
	5	10	15	20	25	30	50
0, 0	3.3853	3.5404	3.5722	3.5835	3.5888	3.5917	3.5960
1000, 0	4.3477	4.4866	4.5155	4.5259	4.5307	4.5334	4.5372
1000, 1000	9.6063	9.7514	9.7820	9.7930	9.7982	9.8010	9.8052

Le tableau 3.3 liste les fréquences adimensionnelles de la poutre BDFG pour diverses valeurs du rapport L/h pour les trois cas des paramètres d'élasticité de la fondation. Le tableau montre une influence significative de la fondation élastique sur la fréquence fondamentale de la poutre. En effet, l'inclusion d'une fondation élastique contribue à l'augmentation de la rigidité de la poutre et par conséquent augmente ses fréquences. Cependant, les valeurs du rapport L/h , qui donnent une indication de l'élançement de la poutre, ont une influence légère sur les fréquences.

La variation des fréquences adimensionnelles $\hat{\omega}$ de la poutre BDFG avec le paramètre d'élasticité de la fondation j_1 est représentée sur la figure 3.4 pour différentes valeurs du paramètre parabolique ξ et pour trois cas d'appui élastique (linéaire, parabolique et sinusoidal). Comme on peut le voir sur cette figure, l'augmentation des valeurs du paramètre parabolique entraîne une augmentation des fréquences. De plus, entre les trois appuis utilisés, l'utilisation d'une fondation sinusoidal génère une augmentation des fréquences.

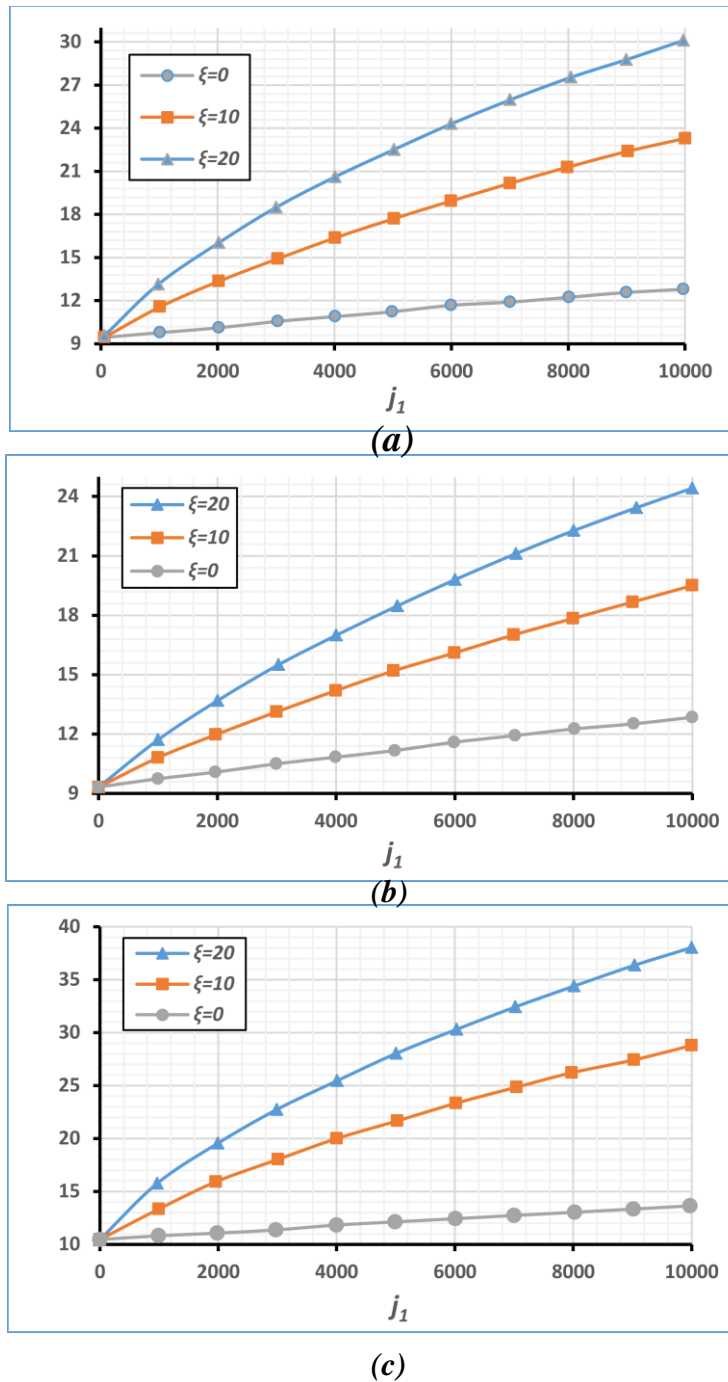


Figure 3.4 Variation des fréquences adimensionnelles de la poutre BDFG par rapport aux paramètres de fondation élastique j_1 pour trois cas de fondation élastique variable (a) Linéaire, (b) Parabolique, (c) Sinusoïdal ($L/h=10$, $n_x=n_z=1$, $j_2=1000$).

L'effet de la nature de la fondation élastique variable sur les fréquences adimensionnelles de la poutre BDFG est tracé sur la figure 3.5. Comme cela a été évoqué précédemment, l'utilisation d'une fondation sinusoïdale servir à une augmentation des fréquences.

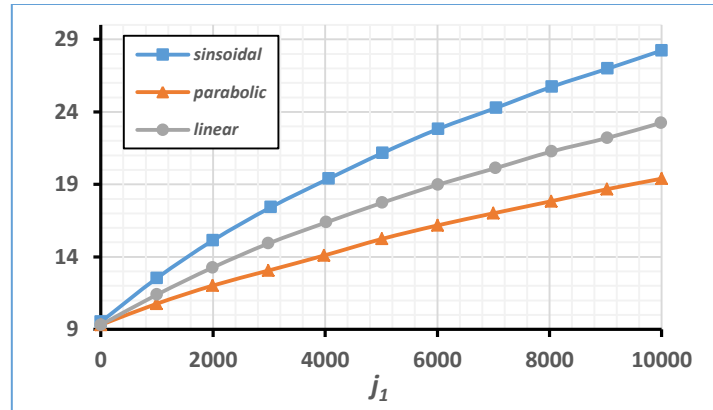


Figure 3.5 Effet de la nature de la fondation élastique sur les fréquences adimensionnelles de poutre BDFG ($L/h=10$, $n_x=n_z=1$, $j_2=1000$)

La figure 3.6 montre l'effet d'élançement de la poutre (L/h) sur les fréquences adimensionnelles pour deux cas (a) une poutre isotrope et (b) une poutre BDFG. Comme on le voit bien sur cette figure, les fréquences augmentent avec l'augmentation du paramètre de fondation J_1 mais restent insensibles au l'élançement de la poutre (L/h).

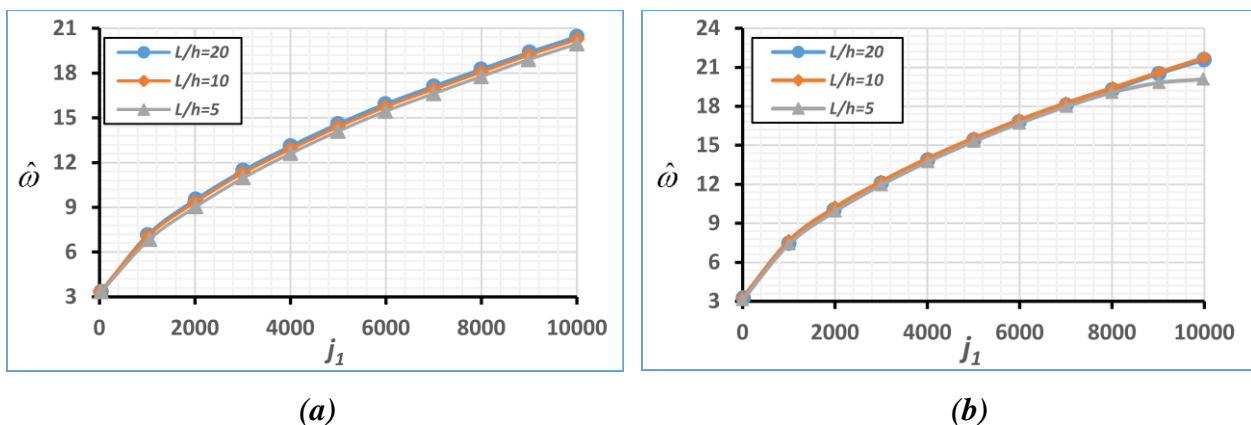


Figure 3.6 Effet de l'élançement (L/h) sur les fréquences adimensionnelles de la poutre BDFG $j_2=0$, $\zeta=10$ (linaire), (a) $n_x=n_z=0$, (b) $n_x=n_z=1$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse du comportement vibratoire d'une poutre BDFG reposant sur une fondation à élasticité variable a été présentée. Les propriétés des matériaux des poutres sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur et dans le sens longitudinal à la fois. Une analyse 2D a été utilisée pour calculer leur fréquence naturelle. Les équations du mouvement ont été dérivées avec le principe de Hamilton et elles ont été résolues par la solution de Navier pour une poutre simplement appuyée. Les résultats obtenus ont été comparés aux solutions disponibles dans la littérature et montrent un bon accord. Une étude paramétrique détaillée est présentée pour discuter des impacts significatifs de différents paramètres sur le comportement dynamique de la poutre BDFG reposant sur une fondation à élasticité variable.

D'après les résultats de l'étude, on peut tirer les conclusions suivantes :

- Pour le cas d'une poutre FG à rigidité unidirectionnelle axialement ($n_z=0$), l'augmentation de n_x provoque l'augmentation de la fréquence.
- Autrement pour $n_x=0$, la variation de n_z provoque une diminution de la fréquence.
- L'augmentation des valeurs des deux paramètres d'élasticité de la fondation (Winkler et Pasternak) entraîne une augmentation de la fréquence.
- Pour une poutre FG sur fondation élastique, la poutre FG unidirectionnelle axialement donne les fréquences les plus élevées, la poutre unidirectionnelle transversalement donne les fréquences les plus basses et la poutre BDFG donne des fréquences intermédiaires.
- L'augmentation des valeurs du paramètre parabolique entraîne une augmentation des fréquences. De plus, entre les trois appuis utilisés (Linéaire, Parabolique et Sinusoïdal), l'utilisation d'une fondation sinusoïdale génère une augmentation des fréquences.
- Les fréquences augmentent avec l'augmentation du paramètre de fondation j_1 mais restent insensibles au l'élancement de la poutre (L/h).

CHAPITRE 4

Évaluation analytique des fréquences de poutres épaisses FG bidirectionnelles en environnement thermique et reposant sur différentes fondations

4.1 Introduction

Dans ce chapitre notre objectif est d'analyser le comportement vibratoire des poutres BDFG avec des propriétés de matériaux dépendantes de la température au moyen de la théorie quasi-3D et appuyée sur plusieurs types de fondation (élastiques et viscoélastiques). La présente théorie prend en compte l'effet d'étirement dû à sa nature quasi tridimensionnelle. De plus, le modèle satisfaisait exactement aux conditions aux limites de contraintes en haut et en bas de la poutre.

Le champ de déplacement utilisé contient des termes intégraux indéterminés pour réduire le nombre des inconnues. Les propriétés matérielles de la poutre FG varient le long de l'épaisseur et la direction axiale au même temps selon la loi de puissance. Les équations de mouvement sont dérivées en utilisant le principe Hamilton et des solutions analytiques pour le comportement vibratoire sont obtenues sur la base de la méthode de Navier pour une poutre simplement appuyée.

La précision du modèle calculé est validée en comparant les résultats avec les solutions disponibles dans la littérature. L'effet de l'indice de la fraction volumique des matériaux de la poutre, changement de température, types de fondations et d'autres paramètres sur les fréquences des poutres BDFG sur des fondations élastiques sont étudiés et discutés de manière intensive.

4.2 Développement théorique

Figure 4.1 montre un modèle d'une poutre FG bidirectionnelle avec une longueur ' L ', une épaisseur ' h ' et une largeur ' b ', la poutre est estimée reposer sur une fondation élastique (modèle de Pasternak).

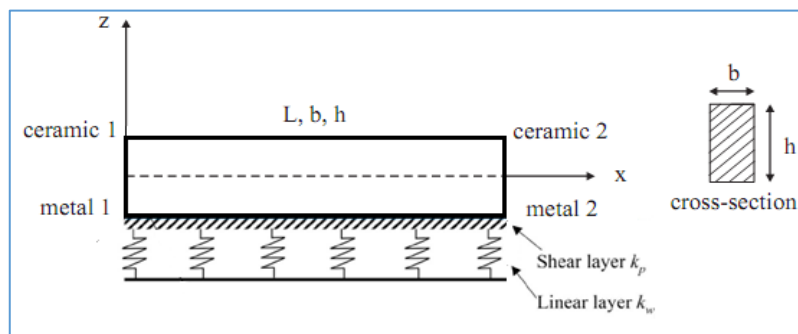


Figure 4.1 Géométrie et coordonnées d'une poutre BDFG reposant sur une fondation élastique

Le système de coordonnées cartésiennes (x, z) dans la figure 4.1 est introduit de telle sorte que l'axe ' x ' est sur le plan médian, et l'axe ' z ' est perpendiculaire au plan médian, et il dirige vers le

haut. Comme dans le chapitre 3, la poutre est supposé être constitué de deux céramiques (appelées céramique1 et céramique2) et de deux métaux (appelés métal1 et métal2) dont la fraction volumique varie dans l'épaisseur et dans le sens longitudinal à la fois comme (Tran and Nguyen 2018)

$$\begin{aligned} V_{c1} &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \right], & V_{c2} &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \\ V_{m1} &= \left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \right] \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \right], & V_{m2} &= \left[1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} \right] \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Où n_z et n_x sont les indices de la variation volumique, qui dictent la variation des matériaux constitutifs dans les directions d'épaisseur et longitudinale, respectivement.

P est les propriétés du matériau (telles que le module d'élasticité et la masse volumique, etc.) qui sont déterminées à l'aide du modèle de Voigt comme suit (Tran et Nguyen 2018).

$$P = V_{c1}P_{c1} + V_{c2}P_{c2} + V_{m1}P_{m1} + V_{m2}P_{m2} \quad (4.2)$$

Où P_{c1} , P_{c2} , P_{m1} et P_{m2} désignent les propriétés de la céramique1, de la céramique2, du métal1 et du métal2 respectivement. En substituant l'équation (4.1) dans l'équation (4.2), on obtient (Tran et Nguyen 2018).

$$P(x, z) = \left[(P_{c1} - P_{m1}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} + P_{m1} \right] \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \right] + \left[(P_{c2} - P_{m2}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{n_z} + P_{m2} \right] \left(\frac{x}{L} \right)^{n_x} \quad (4.3)$$

Nous notons que, dans l'équation. (4.3) si $n_x=0$, nous aurons une poutre FG unidirectionnelle composée par céramique2 et métal2. De plus, si $n_z=0$, nous aurons une poutre FG unidirectionnelle axialement en céramique1 et céramique2.

Dans cette étude, nous considérerons que la poutre repose sur plusieurs types de fondations, pour les fondations élastiques on va utiliser les modèles de Winkler, Pasternak et Kerr. Et pour les fondations viscoélastiques on utilisera les modèles de Kelvin-Voght et le modèle viscoélastique Pasternak. Les équations des différents modèles qui seront utiliseront par la suite sont détaillées dans le chapitre 2.

4.3 Développement théorique

Lorsque les poutres FG subissent une température élevée, ces conditions sévères peuvent provoquer des changements considérablement brusques dans les propriétés du matériau. Par

conséquent, il est nécessaire de considérer les propriétés du matériau comme dépendantes de la température. De ce fait, les propriétés comprenant le module de Young E , la dilatation thermique et la conductivité thermique sont supposées dépendre de la température et sont exprimées en fonction de la température (Ali Rachedi et al. 2020, Nemati et Mahmoodabadi 2019).

$$P_f(T, z) = P_0 \left(P_{-1} T(z)^{-1} + 1 + P_1 T(z) + P_2 T(z)^2 + P_3 T(z)^3 \right) \quad (4.4)$$

P_0, P_{-1}, P_1, P_2 , et P_3 sont les coefficients de propriétés des matériaux dépendant de la température exprimés en Kelvin. ΔT est la variation de la température à travers la direction de l'épaisseur. $P_f(T, z)$ C'est la propriété effective. Les valeurs de chacun des coefficients apparaissant dans l'équation 4.5 sont répertoriées dans le tableau 4.1.

$$T(z) = T_m + \Delta T \frac{\Theta(z)}{\Lambda} \quad (4.5a)$$

$$\Delta T = T_c - T_m \quad (4.5b)$$

Où : $T_c = T(h/2), T_m = T(-h/2) \quad (4.5c)$

$$\Theta(z) = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{(K_c - K_m)}{(n_z + 1)K_m} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{n_z+1} + \frac{(K_c - K_m)^2}{(2n_z + 1)K_m^2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{2n_z+1} \\ - \frac{(K_c - K_m)^3}{(3n_z + 1)K_m^3} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{3n_z+1} + \frac{(K_c - K_m)^4}{(4n_z + 1)K_m^4} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{4n_z+1} \\ - \frac{(K_c - K_m)^5}{(5n_z + 1)K_m^5} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{5n_z+1} \end{array} \right] \quad (4.5d)$$

$$\Lambda = 1 - \frac{(K_c - K_m)}{(n_z + 1)K_m} + \frac{(K_c - K_m)^2}{(2n_z + 1)K_m^2} - \frac{(K_c - K_m)^3}{(3n_z + 1)K_m^3} + \frac{(K_c - K_m)^4}{(4n_z + 1)K_m^4} - \frac{(K_c - K_m)^5}{(5n_z + 1)K_m^5} \quad (4.5e)$$

4.4 Cinématique

Le champ de déplacement suivant, prenant en compte l'effet de déformation en cisaillement et l'étirement de l'épaisseur.

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) + g(z)\theta(x, t) \end{cases} \quad (4.6)$$

u_0, w_0, θ et ϕ_x sont les déplacements inconnus du plan médian de la poutre.

Ce champ de déplacement est présenté pour les poutres FG comme (Bachir Bouiadjra et al. 2020, Merzoug et al. 2020)

En considérant $\phi_x(x, t) = k_1 \int \theta(x, t) dx$, nous aurons :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) + g(z) \theta(x, t) \end{cases} \quad (4.7)$$

La fonction de forme est donnée par Levinson (1980), Reddy (1984) :

$$f(z) = z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (4.8)$$

La fonction $g(z)$ est donnée comme suite (Merzoug et al.2020):

$$g(z) = \frac{2}{15} \frac{df(z)}{dz} \quad (4.9)$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z k_x^b + f(z) k_x^s \\ \varepsilon_z = g'(z) \theta \\ \gamma_{xz} = f'(z) \gamma_{xz}^0 + g(z) \gamma_{xz}^1 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ k_x^b = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad k_x^s = k_1 \theta \\ \gamma_{xz}^0 = k_1 \int \theta dx, \quad \gamma_{xz}^1 = \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases} \quad (4.11)$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par la méthode de Navier, qu'ils peuvent être donnés comme suit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (4.12)$$

Le coefficient A' est exprimé selon la solution de type Navier et il est donnés par :

$$A' = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad k_1 = -\lambda^2, \quad \lambda = \frac{m\pi}{L} \quad (4.13)$$

4.5 Relations constitutives

En supposant que le matériau de la poutre BDFG conformément à la loi de Hooke. La relation contrainte/déformation en tenant compte les déformations engendrées par la variation de la température a été décrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} & 0 \\ Q_{13} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha(z)\Delta T \\ \varepsilon_z - \alpha(z)\Delta T \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} Q_{ii} = \frac{(1-\nu)E(x, z, T)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, & (i = 1, 3) \\ Q_{ij} = \frac{\nu E(x, z, T)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, & (i, j = 1, 3) \\ Q_{ii} = \frac{E(x, z, T)}{2(1+\nu)}, & (i = 5) \end{cases} \quad (4.15)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contrainte et de déformation respectivement. $\alpha(z)$ est le coefficient de dilatation thermique, et T est la distribution de la charge thermique.

4.6 Equation de mouvement

Les équations d'équilibre régissantes peuvent être dérivées en utilisant le principe des déplacements virtuels.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être réécrite comme

$$\delta U_e = \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + N_z \delta \varepsilon_z^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz} \delta \gamma_{xz}^1 \right] dA \quad (4.16)$$

$$\text{Où : } \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (4.17)$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz, \quad Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} f'(z) dz, \quad S_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} g(z) dz$$

La variation de l'énergie cinétique de la poutre est donnée par

$$\delta T = \int_A \rho(x, z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) dA \quad (4.18)$$

La variation de l'énergie potentielle de la fondation peut être exprimée sous la forme

$$\delta U_R = \int_A f_e \delta (w_0(x) + g(z)\theta(x)) dA \quad (4.19)$$

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée sous la forme

$$\delta V = \int_A q \delta (w_0(x) + g(z)\theta(x)) dA \quad (4.20)$$

En utilisant le principe de Hamilton, en remplaçant les expressions δU_e , δT , δV et δU_R

$$\begin{aligned} & \delta U_e - \delta T - \delta V + \delta U_R = 0 \\ & = \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz} \delta \gamma_{xz}^1 \right] dA \\ & - \int_A \rho(x, z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) dA - \int_A q (\delta w_0 + g(z) \delta \theta) dA \\ & + \int_A f_e (\delta w_0 + g(z) \delta \theta) dA = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Intégrant par parties, et collectant les coefficients de δu_0 , δw_0 et $\delta \theta_0$, les équations de mouvement de la poutre sont obtenues comme suite :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta w_0 : & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + q - f_e = I_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + I_0 \ddot{w}_0 + J_1^{st} \ddot{\theta} \\ \delta \theta_0 : & -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - N_z + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} k_1 A' + \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + qg(z) - f_e g(z) = -J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \\ & - K_2 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + J_1^{st} \ddot{w} + K_2^{st} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Les équations du mouvement peut être exprimées en termes des déplacements (u_0 , w_0 et θ_0) comme suite :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + B^s k_1 A' \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial x^3} + L \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta w_0 : & B \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D^s k_1 A' \frac{\partial^4 \theta_0}{\partial x^4} + L^a \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + q - f_e = I_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} \\ & + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + J_1^{st} \ddot{\theta} \\ \delta \theta_0 : & -B^s k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - L \frac{\partial u_0}{\partial x} + D^s k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + L^a \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - H^s (k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta_0}{\partial x^4} - R^a \theta \\ & + \left(F_{55}^s (k_1 A')^2 - 2R(k_1 A') + 2X_{55}^s (k_1 A') + A_{55}^s \right) \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + qg(z) - f_e g(z) = -J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \\ & + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - K_2 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + J_1^{st} \ddot{w} + K_2^{st} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport le temps t.

Dans l'équation (4.23) A , B , D , B^s , D^s , H^s , L , L^a , R , R^a , F_{55}^s , X_{55}^s et A_{55}^s sont les rigidités de la poutre, et I_0 , I_1 , J_1 , I_2 , J_2 , J_1^{st} , K_2 et K_2^{st} sont les inerties de masse définies par :

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ D \\ B^s \\ D^s \\ H^s \end{Bmatrix} = \int_A \frac{(1-\nu) E(x, z, T)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ f(z) \\ zf(z) \\ f^2(z) \end{Bmatrix} dA \quad (4.24a)$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_A \frac{\nu E(x, z, T)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{(1-\nu)}{\nu} \end{Bmatrix} \left\{ g'(z) dA \right. \quad (4.24b)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{55}^s \\ X_{55}^s \\ A_{55}^s \end{Bmatrix} = \int_A \frac{E(x, z, T)}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} f'^2(z) \\ f'(z)g(z) \\ g^2(z) \end{Bmatrix} dA \quad (4.24c)$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ J_1 \\ J_1^{st} \\ J_2 \\ K_2 \\ K_2^{st} \end{Bmatrix} = \int_A \rho(x, z, T) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ f(z) \\ g(z) \\ zf(z) \\ f^2(z) \\ g^2(z) \end{Bmatrix} dA \quad (4.25)$$

En remplaçant l'équation (4.3) dans l'équation (4.24), on peut réécrire les rigidités de la poutre sous les formes suivantes

$$A(x, z, T) = A^{c1m1} - \left(A^{c1m1} - A^{c2m2} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^{nx} \quad (4.26)$$

Dans l'équation (4.26), A^{c1m1} est la rigidité de la poutre FG unidirectionnelle dans le sens transversale composée de céramique 1 et de métal 1, A^{c2m2} est la rigidité de la poutre FG unidirectionnelle dans le sens transversale composée de céramique 2 et de métal 2.

De même analogie, on peut écrire les équations $B, D, B^s, D^s, H^s, L, L^a, R, R^a, F_{55}^s, X_{55}^s$ et A_{55}^s .

Les inerties de masse définis par l'équation (4.25) peuvent être réécrites sous les formes :

$$I_i = I_i^{c1m1} - (I_i^{c1m1} + I_i^{c2m2}) \left(\frac{x}{L} \right)^{nx}, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4.27)$$

Avec la même analogie, nous pouvons écrire J_1, J_1^{st}, J_2, K_2 and K_2^{st} .

4.7 Solution Analytique

Dans ce qui suite, la solution de Navier pour les poutres simplement appuyées sera utilisée pour résoudre le problème. Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords :

$$u_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{à } x = 0, L \quad (4.28)$$

En suivant la procédure de résolution de Navier, les auteurs supposent la solution suivante pour $\delta u_0, \delta w_0$ et $\delta \theta_0$ qui satisfait les conditions aux limites données dans :

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ \theta_{mn} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Où U_{mn}, W_{mn} et θ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence de la poutre, et $\lambda = m\pi / L$.

En remplaçant les équations (4.28) dans les équations de mouvement, nous obtenons les équations aux valeurs propres ci-dessous pour toute valeur fixe de m , pour le comportement vibratoire :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (4.30)$$

Où $\{\Delta\}$ désigne la colonne $\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, W_{mn}, \theta_{mn}\}$,

$[K], [M]$ sont la matrice de rigidité et la matrice de masse respectivement.

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Les termes de la matrice de rigidité et la matrice de masse pour le cas d'une fondation élastique de Pasternak, sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A\lambda^2 \\
 a_{12} &= -B\lambda^3 \\
 a_{13} &= B^s(k_1A')\lambda^3 - L\lambda \\
 a_{22} &= D\lambda^4 + k_w + k_p\lambda^2 \\
 a_{23} &= -D^s(k_1A')\lambda^4 + L^a\lambda^2 + (k_w + k_p\lambda^2)F \\
 a_{33} &= H^s(k_1A')^2\lambda^4 - 2R(k_1A')\lambda^2 + 2X_{44}^s k_1A'\lambda^2 \\
 &\quad + F_{44}^s(k_1A')^2\lambda^2 + A_{44}^s\lambda^2 + R^a + (k_w + k_p\lambda^2)F^2
 \end{aligned} \tag{4.32a}$$

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= I_0 \\
 m_{12} &= -I_1\lambda \\
 m_{13} &= J_1(k_1A')\lambda \\
 m_{22} &= I_0 + I_2\lambda^2 \\
 m_{23} &= -J_2(k_1A')\lambda^2 + J_1^{st} \\
 m_{33} &= K_2(k_1A')^2\lambda^2 + K_2^{st}
 \end{aligned} \tag{4.32b}$$

Où : $F=g(-h/2)$.

4.8 Résultats numériques et discussions

Dans cette section, plusieurs exemples numériques de vibration des poutres BDFG avec des matériaux dépendants de la température et reposant sur plusieurs fondations sont considérés et analysés.

Tout d'abord, afin de montrer la validité et la précision de l'approche actuelle, les fréquences fondamentale obtenus avec la présente formulation sont comparés à ceux Tran et Nguyen (2018) pour une poutre BDFG simplement appuyée (SS) avec plusieurs valeurs des indices de variation volumique des matériaux et avec une variation de température $\Delta T=20K$ sans fondation.

La poutre est composée par Alumina (Al_2O_3) ceramic1, Zirconia (ZrO_2) ceramic2, d'acier inoxydable (SUS304) metal1 and titanium (Ti-6Al-4V) metal2 avec les propriétés listées dans le tableau 4.1. Dans ce qui suit, l'élancement de la poutre est supposé égale à 20 ($L/h=20$). Les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées dans la présente étude :

$$\hat{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, K_w = \frac{k_w L^4}{h^3}, K_p = \frac{k_p L^2}{h^3}, C = \frac{cL^2}{\sqrt{\rho_{m2} h^4}}, K_u = \frac{k_u L^4}{h^3} \text{ et } K_l = \frac{k_l L^4}{h^3}$$

Où : ρ_0 et E_0 sont la masse volumique et le module de Young du métal 2 dans la température de référence. ω est la fréquence fondamentale de la poutre.

Table 4.1 Coefficients dépendant de la température pour les différents matériaux (Kim (2005), Ebrahimi et al. (2016)).

Matériaux	Propriétés	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
Al ₂ O ₃ (céramique 1)	E (Pa)	0	349.55e+9	-3.853e-4	4.027e-7	1.673e-10
	α (K ⁻¹)	0	6.8269e-6	1.838e-4	0	0
	ρ (Kg/m ³)	0	3800	0	0	0
	k (W/mK)	-1123.6	-14.087	-6.227e-3	0	0
	ν	-	0.3	-	-	-
SUS304 (métal 1)	E (Pa)	0	201.04e+9	3.079e-4	-6.534e-7	0
	α (K ⁻¹)	0	12.330e-6	8.086e-4	0	0
	ρ (Kg/m ³)	0	8166	0	0	0
	k (W/mK)	0	15.379	-1.264e-3	2.092e-6	-7.223e-10
	ν	-	0.3	-	-	-
ZrO ₂ (céramique 2)	E (Pa)	0	132.20e+9	-3.805e-4	-6.127e-8	0
	α (K ⁻¹)	0	13.300e-6	-1.421e-3	9.549e-7	0
	ρ (Kg/m ³)	0	3657	0	0	0
	k (W/mK)	0	1.78	0	0	0
	ν	-	0.3	-	-	-
Ti-6Al 4V (métal 2)	E (Pa)	0	122.70e+9	-4.605e-4	0	0
	α (K ⁻¹)	0	7.4300e-6	7.483e-4	-3.621e-7	0
	ρ (Kg/m ³)	0	4420	0	0	0
	k (W/mK)	0	6.10	0	0	0
	ν	-	0.23	-	-	-

Comme indiqué sur le tableau 4.2, un bon accord peut être observé entre les résultats actuels et les résultats disponibles, l'écart maximum entre les résultats de la présente solution et ceux de Tran et Nguyen (2018) ne dépasse pas 7,5% pour une poutre BDFG et il est de l'ordre de 4,5% dans le cas des poutres FG unidirectionnelles transversale ($n_x = 0$).

Tableau 4.2 Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale d'une poutre BDFG S-S ($\Delta T=20$) sans fondation.

n_z	Source	n_x						
		0	0.2	0.5	1	1.2	1.5	2
0	Tran et Nguyen (2018)	3,0227	3,3456	3,6853	4,0587	4,1671	4,3004	4,4657
	Présent (3D)	3,1573	3,5856	3,9633	4,3037	4,3913	4,4937	4,6152
	Différence	4,5%	7,2%	7,5%	6,0%	5,4%	4,5%	3,3%
0.2	Tran et Nguyen (2018)	2,9415	3,1905	3,4464	3,7213	3,7998	3,8955	4,0129
	Présent (3D)	3,0750	3,4124	3,7009	3,9528	4,0163	4,0899	4,1762
	Différence	4,5%	7,0%	7,4%	6,2%	5,7%	5,0%	4,1%
0.5	Tran et Nguyen (2018)	2,8690	3,0551	3,2422	3,4402	3,4963	3,5643	3,6472
	Présent (3D)	3,0008	3,2614	3,4776	3,6612	3,7066	3,7589	3,8197
	Différence	4,6%	6,8%	7,3%	6,4%	6,0%	5,5%	4,7%
1	Tran et Nguyen (2018)	2,8051	2,9394	3,0714	3,2103	3,2496	3,2972	3,3551
	Présent (3D)	2,9348	3,1322	3,2911	3,4226	3,4546	3,4912	3,5335
	Différence	4,6%	6,6%	7,2%	6,6%	6,3%	5,9%	5,3%
1.2	Tran et Nguyen (2018)	2,7890	2,9111	3,0302	3,1556	3,1912	3,2343	3,2867
	Présent (3D)	2,9181	3,1005	3,2461	3,3657	3,3948	3,4279	3,4661
	Différence	4,6%	6,5%	7,1%	6,7%	6,4%	6,0%	5,5%
1.5	Tran et Nguyen (2018)	2,7704	2,8785	2,9833	3,094	3,1255	3,1637	3,2102
	Présent (3D)	2,8987	3,0641	3,1949	3,3016	3,3274	3,3567	3,3904
	Différence	4,6%	6,4%	7,1%	6,7%	6,5%	6,1%	5,6%
2	Tran et Nguyen (2018)	2,7483	2,8406	2,9293	3,0236	3,0506	3,0835	3,1236
	Présent (3D)	2,8756	3,0216	3,1358	3,2281	3,2503	3,2755	3,3044
	Différence	4,6%	6,4%	7,1%	6,8%	6,5%	6,2%	5,8%

La légère différence trouver entre les résultats de la présente étude et ceux de Tran et Nguyen (2018) pour les poutres BDFG peut-être résulter à la théorie des poutres différente et à la solution utilisée pour résoudre le problème avec la référence précédente.

En effet, dans le présent travail, nous avons utilisé un modèle HSDT quasi-3D et la solution de Navier pour déterminer les fréquences des poutres simplement appuyées. Par contre, Tran et Nguyen (2018) ont utilisé la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre sans effet d'étirement et la formulation par éléments finis basée sur la rotation en cisaillement. L'effet d'étirement pris en compte dans la présente étude, qu'il a un effet significatif dans le cas des poutres épaisses.

Les tableaux 4.3 et 4.4 montrent les effets de la variation les paramètres des matériaux (n_x) et (n_z) ainsi que la fondation élastique sur le comportement vibratoire d'une poutre BDFG simplement appuyée dans un environnement thermique.

Les modèles des fondations utilisées dans le tableau 4.3 sont de Winkler et Pasternak. Pour le tableau 4.4 le modèle de fondation utilisée est de Kerr.

Les tableaux 4.3 et 4.4 montrent une influence significative des paramètres des matériaux (n_x) et (n_z) sur la fréquence de la poutre. L'augmentation de l'indice (n_z), qui décrit la variation des propriétés de la poutre dans le sens de l'épaisseur, conduit à une diminution des fréquences quelles que soient les valeurs de l'indice (n_x). L'augmentation des valeurs d'indice de ce dernier augmente les valeurs des fréquences indépendamment de l'indice (n_z).

Une autre remarque importante peut être observée à partir de ces tableaux concernant l'effet de la fondation, l'augmentation des paramètres de la fondation augmente la fréquence de la poutre. Ceci peut s'expliquer par le fait que, l'inclusion d'une fondation élastique contribue à l'augmentation de la rigidité de la poutre et par conséquent à la réduction de la période et à l'augmentation de la fréquence.

Tableau 4.3 les fréquences fondamentales d'une poutre BDFG S-S ($\Delta T=20$) sur fondation élastique ($L/h=20$, $\xi=0$).

k_w	k_p	n_z	n_x						
			0	0.2	0.5	1	1.2	2	5
0	0	0	3.1573	3.5856	3.9632	4.3037	4.3912	4.6152	4.9035
		0.2	3.0750	3.4124	3.7009	3.9528	4.0163	4.1762	4.3765
		0.5	3.0008	3.2613	3.4776	3.6612	3.7066	3.8197	3.9585
		1	2.9348	3.1322	3.2911	3.4226	3.4546	3.5335	3.6285
		1.5	2.8987	3.0641	3.1949	3.3016	3.3274	3.3904	3.4657
		2	2.8756	3.0216	3.1358	3.2281	3.2503	3.3044	3.3686
		5	2.8170	2.9154	2.9912	3.0514	3.0657	3.1004	3.1412
1000	0	0	3.2341	3.6529	4.0239	4.3592	4.4456	4.6668	4.9517
		0.2	3.1511	3.4790	3.7605	4.0071	4.0693	4.2261	4.4228
		0.5	3.0763	3.3272	3.5362	3.7142	3.7584	3.8683	4.0033
		1	3.0095	3.1972	3.3488	3.4745	3.5052	3.5807	3.6720
		1.5	2.9729	3.1285	3.2519	3.3528	3.3772	3.4369	3.5084
		2	2.9495	3.0856	3.1924	3.2788	3.2996	3.3504	3.4107
		5	2.8903	2.9787	3.0468	3.1011	3.1141	3.1454	3.1823
1000	1000	0	3.9118	4.2610	4.5796	4.8738	4.9503	5.1477	5.4046
		0.2	3.8223	4.0787	4.3052	4.5076	4.5592	4.6903	4.8563
		0.5	3.7441	3.9184	4.0704	4.2023	4.2354	4.3183	4.4211
		1	3.6665	3.7792	3.8721	3.9505	3.9698	4.0177	4.0759
		1.5	3.6253	3.7047	3.7686	3.8215	3.8344	3.8661	3.9043
		2	3.5988	3.6578	3.7046	3.7427	3.7519	3.7745	3.8014
		5	3.5326	3.5425	3.5495	3.5548	3.5560	3.5589	3.5621

Le tableau 4.5 liste les valeurs des fréquences d'une poutre BDFG simplement appuyée reposant sur une fondation viscoélastique (Kelvin-Voigt). Deux cas sont étudiés, en présence et en absence d'un environnement thermique. Comme on peut le voir sur ce tableau, l'augmentation du coefficient d'amortissement (paramètre viscoélastique) "C" entraîne une légère diminution des fréquences quel que soit les conditions thermiques. De plus, pour le même type de fondation utilisé et les mêmes valeurs des indices de la variation volumique des matériaux, l'environnement thermique a un effet minime sur les fréquences.

Tableau 4.4 les fréquences fondamentales d'une poutre BDFG S-S ($\Delta T=20$) sur fondation élastique de Kerr ($L/h=20$, $k_f=100$).

k_u	k_s	n_z	n_x					
			0	0.2	0.5	1	1.2	2
0	0	0	3.1573	3.5856	3.9632	4.3037	4.3912	4.6152
		0.2	3.0750	3.4124	3.7009	3.9528	4.0163	4.1762
		0.5	3.0008	3.2613	3.4776	3.6612	3.7066	3.8197
		1	2.9348	3.1322	3.2911	3.4226	3.4546	3.5335
		1.5	2,9181	3,1005	3,2461	3,3657	3,3948	3,4661
		2	2.8756	3.0216	3.1358	3.2281	3.2503	3.3044
10	1000	0	3.2270	3.6467	4.0183	4.3541	4.4406	4.6620
		0.2	3.1441	3.4728	3.7550	4.0020	4.0644	4.2215
		0.5	3.0693	3.3211	3.5308	3.7093	3.7536	3.8638
		1	3.0026	3.1912	3.3434	3.4696	3.5005	3.5763
		1.5	2.9857	3.1592	3.2981	3.4125	3.4404	3.5087
		2	2.9427	3.0796	3.1871	3.2741	3.2951	3.3461
100	2000	0	3.8518	4.2063	4.5291	4.8266	4.9040	5.1034
		0.2	3.7629	4.0249	4.2558	4.4619	4.5144	4.6476
		0.5	3.6818	3.8654	4.0221	4.1580	4.1919	4.2771
		1	3.6085	3.7271	3.8249	3.9072	3.9275	3.9778
		1.5	3.5897	3.6927	3.7768	3.8471	3.8643	3.9068
		2	3.5416	3.6067	3.6584	3.7006	3.7108	3.7357

Pour examiner l'influence du modèle de fondation sur la réponse dynamique de poutres FG bidirectionnelles (S-S), la variation de la fréquence est affichée sur la figure 4.2 en fonction du rapport L/h . La conclusion principale de cette figure est que l'incorporation d'une fondation élastique augmente les fréquences de la poutre. On constate que le modèle de Pasternak donne les fréquences les plus élevées par rapport aux autres modèles de fondation utilisés cela pour les poutres épaisses ($L/h < 10$). Au-delà de cette valeur, la différence de fréquence entre les différentes fondations est réduite.

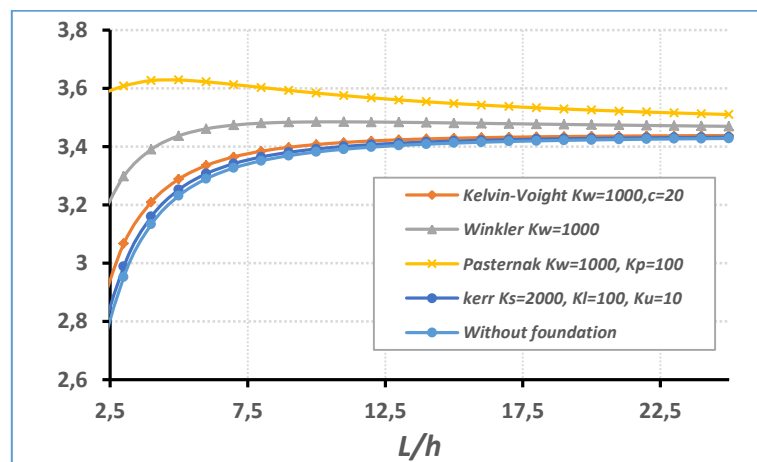


Figure 4.2 Variation du paramètre de la fréquence fondamentale avec le rapport L/h pour différentes fondations ($n_x=1$, $n_z=1$ et $\Delta T=20$)

Tableau 4.5 les fréquences fondamentales d'une poutre BDFG S-S ($\Delta T=20$) sur fondation viscoélastique de Kelvin-Voight ($L/h=20$)

ΔT	K_w	c	n_z	n_x					
				0	0.2	0.5	1	1.2	2
$\Delta T=20$	0	0	0	3.1573	3.5856	3.9632	4.3037	4.3912	4.6152
			0.2	3.0750	3.4124	3.7009	3.9528	4.0163	4.1762
			0.5	3.0008	3.2613	3.4776	3.6612	3.7066	3.8197
			1	2.9348	3.1322	3.2911	3.4226	3.4546	3.5335
			1.5	2,9181	3,1005	3,2461	3,3657	3,3948	3,4661
			2	2.8756	3.0216	3.1358	3.2281	3.2503	3.3044
	1000	20	0	3.1802	3.5993	3.9706	4.3063	4.3927	4.6141
			0.2	3.0990	3.4285	3.7115	3.9595	4.0221	4.1799
			0.5	3.0259	3.2795	3.4909	3.6711	3.7158	3.8272
			1	2.9607	3.1519	3.3066	3.4350	3.4664	3.5437
			1.5	2.9442	3.1206	3.2621	3.3788	3.4072	3.4769
			2	2.9022	3.0426	3.1530	3.2425	3.2640	3.3167
	1000	40	0	3.1272	3.5465	3.9180	4.2539	4.3404	4.5620
			0.2	3.0478	3.3788	3.6632	3.9126	3.9755	4.1342
			0.5	2.9763	3.2325	3.4462	3.6285	3.6738	3.7865
			1	2.9127	3.1074	3.2650	3.3960	3.4281	3.5070
			1.5	2.8966	3.0766	3.2213	3.3407	3.3698	3.4412
			2	2.8556	3.0001	3.1141	3.2065	3.2288	3.2833
1000	80	0	3.0239	3.4433	3.8150	4.1512	4.2378	4.4596	
		0.2	2.9480	3.2815	3.5685	3.8203	3.8840	4.0444	
		0.5	2.8797	3.1404	3.3585	3.5449	3.5911	3.7064	
		1	2.8191	3.0201	3.1834	3.3194	3.3527	3.4348	
		1.5	2.8038	3.5911	3.1412	3.2658	3.2962	3.3709	
		2	2.7648	2.9172	3.0377	3.1359	3.1596	3.2175	
$\Delta T=0$	0	0	0	3.1648	3.5917	3.9683	4.3079	4.3953	4.6188
			0.2	3.0818	3.4178	3.7052	3.9564	4.0197	4.1791
			0.5	3.0072	3.2663	3.4815	3.6643	3.7095	3.8222
			1	2.9410	3.1369	3.2947	3.4253	3.4572	3.5356
			1.5	2.9243	3.1051	3.2496	3.3684	3.3973	3.4681
			2	2.8817	3.0261	3.1392	3.2307	3.2527	3.3063
	1000	20	0	3.1875	3.6053	3.9756	4.3104	4.3967	4.6176
			0.2	3.1057	3.4339	3.7158	3.9630	4.0254	4.1827
			0.5	3.0322	3.2844	3.4948	3.6742	3.7187	3.8296
			1	2.9668	3.1565	3.3102	3.4378	3.4690	3.5458
			1.5	2.9503	3.1251	3.2656	3.3815	3.4097	3.4789
			2	2.9082	3.0470	3.1563	3.2450	3.2664	3.3185
	1000	40	0	3.1345	3.5525	3.9230	4.2581	4.3444	4.5655
			0.2	3.0545	3.3841	3.6675	3.9161	3.9788	4.1371
			0.5	2.9826	3.2374	3.4501	3.6316	3.6766	3.7889
			1	2.9188	3.1119	3.2686	3.3988	3.4306	3.5091
			1.5	2.9026	3.0812	3.2248	3.3433	3.3722	3.4432
			2	2.8616	3.0046	3.1174	3.2091	3.2312	3.2851
1000	80	0	3.0313	3.4493	3.8200	4.1555	4.2418	4.4632	
		0.2	2.9547	3.2868	3.5728	3.8238	3.8872	4.0473	
		0.5	2.8860	3.1454	3.3624	3.5479	3.5940	3.7088	
		1	2.8252	3.0247	3.1869	3.3222	3.3552	3.4369	
		1.5	2.8098	2.9951	3.1446	3.2684	3.2986	3.3729	
		2	2.7708	2.9216	3.0411	3.1384	3.1619	3.2194	

La figure 4.3 montre la variation de la fréquence fondamentale d'une poutre BDFG en fonction de la variation de la température ΔT pour différents cas de fondation. On voit que la fréquence fondamentale diminue à mesure que ΔT augmente pour tous les modèles de fondation utilisés. Cependant, cette diminution est minime.

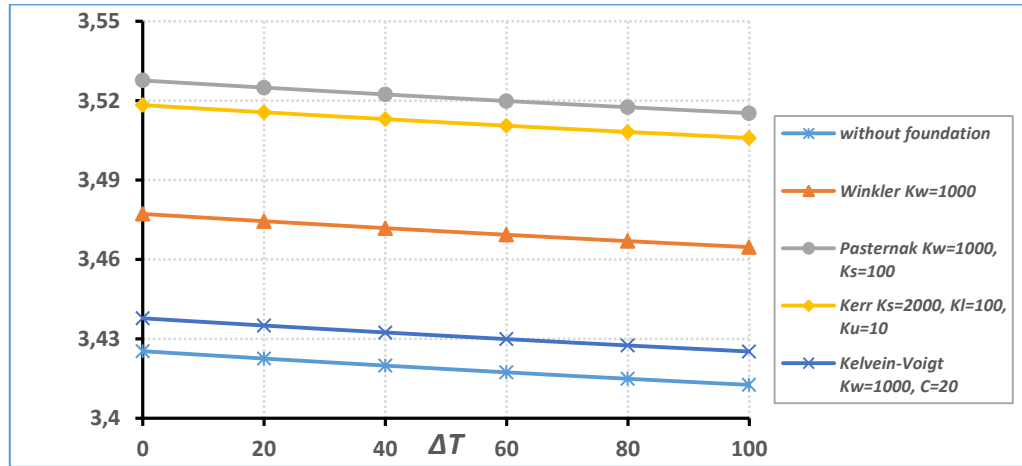


Figure 4.3 Variation du paramètre de la fréquence fondamentale en fonction de ΔT pour différentes fondations ($n_x=1$, $n_z=1$ et $\Delta T=20$).

La figure 4.4 montre la variation de la fréquence fondamentale d'une poutre BDFG en fonction du rapport L/h pour deux modèles de fondation viscoélastique (fondation Kelvin-Voigt et fondation viscoélastique Pasternak). Il y a une augmentation rapide des fréquences pour les poutres épaisses. Ensuite, les fréquences gardent une valeur plus ou moins constante.

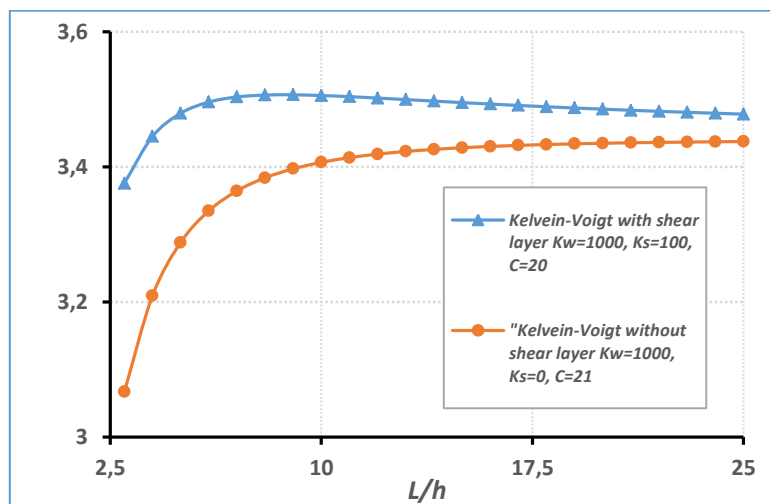


Figure 4.4 Variation du paramètre de la fréquence fondamentale en fonction d'élancement de la poutre (L/h) pour la fondation Kelvin-Voigt avec et sans couche de cisaillement ($n_x=1$, $n_z=1$ et $\Delta T=20$).

De plus, l'utilisation d'une fondation viscoélastique Pasternak qui contient une couche de cisaillement supplémentaire par rapport à la fondation viscoélastique classique (Kelvin-Voigt) augmente la rigidité de la poutre ce qui favorise l'augmentation des fréquences.

La figure 4.5 présente la variation de la fréquence fondamentale d'une poutre BDFG en fonction du coefficient d'amortissement « c » pour différentes valeurs du coefficient de Winkler K_w . L'augmentation des valeurs d'amortissement entraîne une réduction des fréquences. De plus, l'augmentation des valeurs de coefficient de Winkler permet de rigidifier la poutre et donc d'augmenter les fréquences.

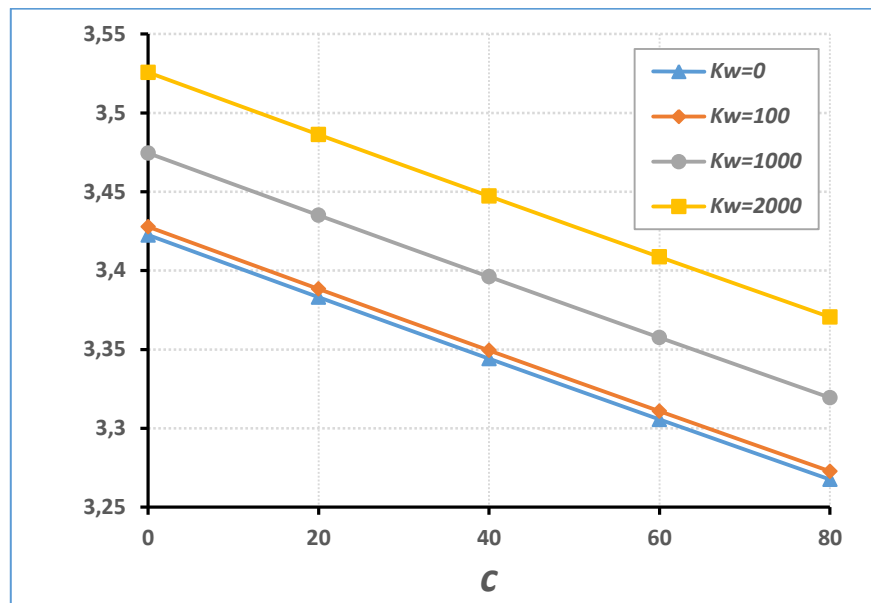


Figure 4.5 Variation du paramètre de la fréquence fondamentale en fonction du coefficient d'amortissement (c) pour avec la variation du module de Winkler ($n_x=1$, $n_z=1$ et $\Delta T=20$).

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le comportement vibratoire des poutres fonctionnellement graduées bidimensionnelles (BDFG) dans un environnement thermique et reposant sur différents types de fondations (élastique et viscoélastique).

La formulation utilisée dans ce travail est basée sur la théorie quasi-3D qui prend en compte l'effet d'étirement. Plusieurs modèles de fondations élastiques et viscoélastiques ont été utilisées telles que Winkler, Pasternak, Kerr...etc. Les équations du mouvement sont dérivées par le principe de Hamilton. Les fréquences ont été obtenues après résolution du problème par la solution de Navier pour une poutre simplement appuyée (S-S).

Une étude paramétrique a été réalisée pour mettre en évidence l'effet des indices des paramètres des matériaux, de l'augmentation de la température et du modèle de fondation sur les fréquences propres d'une poutre BDFG.

D'après les résultats de cette l'étude, on peut tirer les conclusions suivantes :

- L'augmentation de l'indice " n_z ", qui décrit la variation des propriétés de la poutre dans le sens de l'épaisseur, conduit à une diminution des fréquences quelles que soient les valeurs d'indice " n_x ".
- L'augmentation de l'indice " n_x ", qui décrit la variation des propriétés de la poutre dans le sens longitudinal, conduit à une augmentation des fréquences indépendamment de " n_z ".
- L'inclusion d'une fondation élastique contribue à l'augmentation de la rigidité de la poutre et par conséquent à la réduction de la période et à l'augmentation de la fréquence.
- Dans le cas des fondations viscoélastiques, l'augmentation du paramètre d'amortissement " c " entraîne une légère diminution des fréquences quel que soit les données de la température.
- La fréquence fondamentale de la poutre BDFG diminue au fur et à mesure que le ΔT augmente pour tous les types de fondation. Cependant, cette réduction est minime.
- L'utilisation d'une fondation viscoélastique Pasternak qui contient une couche de cisaillement supplémentaire par rapport à la fondation viscoélastique Kelvin-Voigt augmente la rigidité de la poutre ce qui favorise l'augmentation de la fréquence.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude du comportement vibratoire des structures en FGM est très essentielle pour choisir les paramètres des matériaux appropriés afin d'assurer l'intégrité de la structure soumise à des conditions extérieures sévères.

Nous avons utilisé un modèle analytique performant basé sur la théorie de déformation en cisaillement raffinée en 2D. La théorie contient des termes intégraux indéterminés avec un nombre d'inconnus réduit. Le comportement vibratoire d'une poutre BDFG simplement appuyée et reposant sur une fondation élastique variable a été analysé. Les propriétés des matériaux de la poutre sont supposées varier en épaisseur et en direction longitudinale. La fondation élastique est modélisée comme une fondation Winkler-Pasternak.

En outre, nous avons présenté l'effet de la fondation viscoélastique sur la réponse dynamique d'une poutre BDFG sous environnement thermique. Dans cette étude, nous avons considéré en compte l'effet d'étirement en utilisant une théorie de nature quasi tridimensionnelle. Les propriétés des matériaux sont considérés comme dépendantes de la température. Les équations de mouvement sont dérivées par le principe des déplacements virtuels.

A l'issue de cette étude on peut tirer les conclusions suivantes :

- La comparaison des résultats obtenus avec celle trouvés dans la littérature, a montré la performance et la précision des approches proposées (2D et quasi 3D) avec un nombre d'inconnus réduits.
- Les modèles utilisés peuvent être introduites comme référence pour vérifier l'efficacité d'autres approches numériques.
- Pour une poutre FG sur fondation élastique, la poutre avec des propriétés variées graduellement dans le sens longitudinale (gradation axiale) donne les fréquences les plus élevées contrairement à celle graduée transversalement qui donne les fréquences les plus basses. La poutre graduée dans les deux sens (BDFG) donne des fréquences intermédiaires.
- L'effet de l'élançement de la poutre sur la réponse vibratoire est négligeable dans le cas du modèle 2D par rapport au modèle quasi-3D (effet d'étirement).
- L'étude paramétrique menée a démontré que le comportement vibratoire des poutres BDFG est intimement lié par : la propriété des matériaux constituants (l'indice de la fraction volumique n_x , n_z), l'élançement de la poutre (L/h) suite à l'effet d'étirement

notamment pour les poutres épaisses, le changement de température, le type et les paramètres de fondation (élastique variable et viscoélastique).

Dans ce travail, nous avons analysé le comportement vibratoire de poutres BDFG reposants sur différents types de fondations (élastique variable et viscoélastique) dans un environnement thermique. En perspective, ce travail peut être enrichi par :

- L'utilisation d'autres types des matériaux, et d'autres modèles de déformation par cisaillement.
- L'inclusion du différent chargement extérieur (variable, mobile...etc.).
- L'utilisation d'autres types de fondation.

Liste des références bibliographiques

- Ahmed, R.A., Fenjan, R.M. and Faleh, N.M. (2019), "Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections", *Geomech. Eng.*, **17**(2), 175-180. <https://doi.org/10.12989/gae.2019.17.2.175>.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **6**(2), 113-121.
- Akbas, S.D. (2015), "Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments", *Steel Compos. Struct.*, **19**(6), 1421-1447. <https://doi.org/10.12989/SCS.2015.19.6.1421>.
- Ali Rachedi, M., Benyoucef, S., Bouhadra, A., BachirBouiadjra, R., Sekkal, M., Benachour, A. (2020), "Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation", *Geomechanics and Engineering*, **22**(1), 65-80. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/gae.2020.22.1.065>
- Amirpour Maedeh, Raj Das, Erick I.Saaverdra Flores .(2017), " Bending analysis of thin functionally graded plate under in-plane stiffness variations", *Applied Mathematical Modelling* **44** (2017) 4 81–496. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2017.02.009>
- Attia, M.A. (2017), "On the mechanics of functionally graded nanobeams with the account of surface elasticity", *Int. J. Eng. Sci.*, **115**, 73-101. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.03.011>.
- Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.RandAlwabli, S., (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundation", *Structural Engineering and Mechanics*, **65**(4), 453-464. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2018.65.4.453>
- Avcar, M. and Mohammed, W.K.M. (2018), "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation", *Arab. J. Geosci.*, **11**, 232. <https://doi.org/10.1007/s12517-018-3579-2>.
- Bachir Bouiadjra, R., Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bernard, F., (2018), —Analytical investigation of bending response of FGM plate using a new quasi 3D shear deformation theory: Effect of the micromechanical modelsl *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66, No. 3 (2018) 317-328
- Bachir Bouiadjra, R., Bachiri, A.,Benyoucef, S., Fahsi, B. and Bernard, F., (2020), "An investigation of the thermodynamic effect of FG beam on elastic foundation", *Structural Engineering and Mechanics*, **76**(1), 115-127. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2020.76.1.115>.
- Benferhat, R., Daouadji, T.H. and Adim, B. (2016), "A novel higher order shear deformation theory based on the neutral surface concept of FGM plate under transverse load", *Adv. Mater. Res.*, **5**(2), 107-120. <https://doi.org/10.12989/amr.2016.5.2.107>.
- Berthelot J. M. (2010) *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. 4^{ème} édition, 2010.
- Bhattacharya, S. and Das, D. (2019), "Free vibration analysis of bidirectional-functionally graded and double-tapered rotating micro-beam in thermal environment using modified couple stress theory", *Compos. Struct.*, **215**, 471-492. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.01.080>
- Boulal, A., Bensattalah, T., Karas, A., Zidour, M., Heireche, H., & Adda Bedia, E. A. (2020), "Buckling of carbon nanotube reinforced composite plates supported by Kerr foundation using Hamilton's energy principle", *Structural Engineering and Mechanics*, **73**(2), 209-223. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2020.73.2.209>
- Chami, K., Massafer, T. and Hadji, L. (2020), "Analytical modeling of bending and free vibration of thick advanced composite beams resting on Winkler-Pasternak elastic foundation", *Earthq. Struct.*, **19**(2), 91-101. <http://doi.org/10.12989/eas.2020.19.2.091>.
- Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), —Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatingsl. *Engineering Fracture Mechanics*; **70** (10), 1227–1243.
- Chi, Shyang-Ho, and Yen-Ling Chung. 2006. "Mechanical Behavior Of Functionally Graded Material Plates Under Transverse Load—Part I: Analysis". *International Journal Of Solids And Structures* **43**(13): 3657-3674. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011.

- Daikh, A.A., (2019), —Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundationl, *Mater. Res. Express* 6, 065702
- Dongxing Cao, Yanhui Gao (2019), "Free vibration of non-uniform axially functionally graded beams using the asymptotic development method".*Applied Mathematics and Mechanics* volume 40, pages 85–96 (2019)
- Ebrahimi, F., Ghasemi, F., and Salari., E., (2016), “Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities”, *Meccanica*, **51(1)**, 223–249. doi:10.1007/s11012-015-0208-y.
- Eisenberger, M. and Clastornik, J. (1987), “Vibrations and buckling of a beam on a variable Winkler elastic foundation”, *J. Sound Vib.*, **115**, 233-241. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(87\)90469-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(87)90469-X).
- Fariborz, J. and Batra, R.C. (2019), “Free vibration of bi-directional functionally graded material circular beams using shear deformation theory employing logarithmic function of radius”, *Compos. Struct.*, **210**, 217-230.
- Faroughi, S., Rahmani, A. and Friswell, M.I. (2020), “On wave propagation in two-dimensional functionally graded porous rotating nano-beams using a general nonlocal higher-order beam model”, *Appl. Math. Model.*, **80**, 169-190. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.11.040>.
- Gasik M. , K. Lilius, (1994), —Evaluation of properties of W-Cu functional gradient materials by micromechanical modell, *Comput. Mater. Sci.* 3 41-49.
- Gasik, M.M. (1998), —Micromechanical modeling of functionally graded materialsl. *Comput.Mater. Sci.*, 13, 42–55.
- Gupta, A., Talha, M., (2017), —Influence of porosity on the flexural and vibration response of gradient plate using nonpolynomial higher-order shear and normal deformation theoryl. *Int J Mech Mater Des*, DOI 10.1007/s10999-017-9369-2
- Hadji, L. (2020), “Influence of the distribution shape of porosity on the bending of FGM beam using a new higher order shear deformation model”, *Smart Struct. Syst.*, **26(2)**, 253-262. <http://doi.org/10.12989/sss.2020.26.2.25>.
- Hadji, L. and Avcar, M. (2021), “Free vibration analysis of FG porous sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Appl. Comput. Mech.*, **7(2)**, 505-519. <http://doi.org/10.22055/JACM.2020.35328.2628>.
- Hareram L. Anirban M. Sarmila S. (2016), “Free vibration analysis of axially functionally graded linearly taper beam on elastic foundation”*IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 149 (2016) 012130 doi:10.1088/1757-899X/149/1/012130
- Hashemi, S. H., Mehrabani, H. and Savadkoohi, A. A. (2015), “Exact solution for free vibration of coupled double viscoelastic graphene sheets by viscoPasternak medium,” *Compos Part B* 78, 377–383.
- Huang, Y., (2020),“Bending and free vibrational analysis of bi-directional functionally graded beams with circular cross-section”, *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*,**41(10)**, 1497–1516.<https://doi.org/10.1007/s10483-020-2670-6>.
- Huang Lohar, A. Mitra, S. Sahoo (2011), “Geometric nonlinear free vibration of axially functionally graded non-uniform beams supported on elastic foundation” *Curved and Layered Structures*, 2016 volume 3 page 223-239.
- Huynh, T.A., Lieu, X.Q., Lee, J., (2017),“NURBS-based modeling of bidirectional functionally graded Timoshenko beams for free vibration problem”,*Compos.Struct.*, 160, 1178–90.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.076>.
- Islam M. El-Galy, Bassiouny I. Saleh , Mahmoud H. Ahmedl (2019), “Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view”, *SN Applied Sciences* (2019) 1:1378 <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>.
- Jalaei, M.H. and Civalek, Ö. (2019), “On dynamic instability of magnetically embedded viscoelastic porous FG nanobeam”, *Int. J. Eng. Sci.*, **143**, 14-32. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.013>.

- Jung, W.Y., Han, S.C. and Park, W.T. (2016), “Four-variable refined plate theory for forced vibration analysis of sigmoid functionally graded plates on elastic foundation”, *J. Mech. Sci.*, **111**, 73-87.<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.03.001>.
- Kar, V.R. and Panda, S.K. (2020), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(3), 693-709. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.18.3.693>.
- Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2019), “Wave propagation of functionally graded anisotropic nanoplates resting on Winkler-Pasternak foundation”, *Struct. Eng. Mech.*, **7**(1), 55-66.<http://dx.doi.org/10.12989/sem.2019.70.1.055>
- Karamanli, A., (2018), “Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory”, *Composite Structures*, **189**, 127–136.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.060>.
- Karamanli, A., (2017), “Bending behaviour of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3d shear deformation theory”, *Compos. Struct.*, **174**, 70–86. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.046>
- Kim, Y. W., (2005), “Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates”, *Journal of Sound and Vibration*, **284**, (3), 531–549. doi:10.1016/j.jsv.2004.06.043.
- Lal, R., Dangi, C., (2019), “Thermomechanical vibration of bi-directional functionally graded non-uniform timoshenko beam using nonlocal elasticity theory”, *Compos. B. Eng.*, **172**, 724–42. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.05.076>
- Lei, J., He, Y., Li, Z., Guo, S., Liu, D., (2019), “Postbuckling analysis of bi-directional functionally graded imperfect beams based on a novel third-order shear deformation theory”, *Compos. Struct.*, **209**, 811–29. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.106>.
- Lu, Y. and Chen, X. (2020), “Nonlinear parametric dynamics of bidirectional functionally graded beams”, *Shock Vib.*, 8840833, <https://doi.org/10.1155/2020/8840833>.
- Mahmood, R.M., et Akinlabi, E.T., (2017), —Functionally Graded Materials|, Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering, ISSN 2364-3307
- Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., E.A Adda Bedia., (2018), —On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation|, Earthquakes and Structures., **14**(2), 117-128.
- Mazari Ali, Amina Attia, Mohamed Sekkal, Abdelhakim Kaci, Abdelouahed Tounsi, Abdelmoumen Anis Bousahla and S.R. Mahmoud., (2018), “Bending analysis of functionally graded thick plates with in-plane stiffness variation”, *Structural Engineering and Mechanics Volume 68, Number 4, November 25 2018* , pages 409-421, DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2018.68.4.409>
- Madenci, E., Özkılıç, Y.O. and Gemi, L. (2020), “Experimental and theoretical investigation on flexure performance of pultruded GFRP composite beams with damage analyses”, *Compos. Struct.*, **242**, 112162. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112162>.
- Madenci, E., Özkılıç, T.O. and Gemi, L. (2020), “Buckling and free vibration analyses of pultruded GFRP laminated composites: Experimental, numerical and analytical investigations”, *Compos. Struct.*, **254**, 112806. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112806>.
- Madenci, E., Özkılıç, T.O. and Gemi, L. (2020), “Theoretical investigation on static analysis of pultruded GFRP composite beams”, *Akademik Platform Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi*, **8**(3), 483-490. <https://doi.org/10.21541/apjes.734770>.
- Madenci, E. and Özütok, A. (2020), “Variational approximate for high order bending analysis of laminated composite plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **73**(1), 97-108. <https://doi.org/10.12989/sem.2020.73.1.097>.

- Madenci, E. and Özütok, A. (2017), "Variational approximate and mixed-finite element solution for static analysis of laminated composite plates", *Solid State Phenom.*, **267**, 35-39. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.267.35>
- Madenci, E. and Gülcü, Ş. (2020), "Optimization of flexure stiffness of FGM beams via artificial neural networks by mixed FEM", *Struct. Eng. Mech.*, **75**(5), 633-642.
- Mekerbi, M., Benyoucef, S., Mahmoudi, M., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R., (2019), "Thermodynamic behavior of functionally graded sandwich plates resting on different elastic foundation and with various boundary conditions", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, DOI: 10.1177/1099636219851281
- Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., AddaBedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2019), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw.Struct.Mater.*,**21**(2), 727-757. <https://doi.org/10.1177/1099636217698443>.
- Melaibari A, Rasha M Abo-bakr, SA Mohamed, MA Eltahir (2020).'' Static stability of higher order functionally graded beam under variable axial load', *Alexandria Engineering Journal*.Volume 59(3), page 1661-1675
- Merzoug, M., Bourada, M., Sekkal, M., Ali Chaibdra, A., Belmokhtar, C., Benyoucef, S., Benachour, A., (2020), "2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models", *Geomechanics and Engineering*, **22**(4), 361-374. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.4.361>.
- Mirjavadi, S.S., Afshari, B.M., Shafiei, N., Hamouda, A.M.S., Kazemi, M., (2017), "Thermal vibration of two-dimensional functionally graded (2D-FG) porous Timoshenko nanobeams", *Steel Compos.Struct.*,**25**(4), 415-26. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2017.25.4.415>.
- Nejad, M.Z., Hadi, A., Rastgoo, A., (2016a), "Buckling analysis of arbitrary two-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams based on nonlocal elasticity theory", *Int. J. Eng. Sci.*, **103**, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.03.001>
- Nejad, M.Z., Hadi, A., (2016b), "Non-local analysis of free vibration of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams", *Int. J. Eng. Sci.*, **105**, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.04.011>
- Nejad, M.Z., Hadi, A., (2016c), "Eringen's non-local elasticity theory for bending analysis of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams", *Int. J. Eng. Sci* 2016, **106**, 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.05.005>
- Nemati, A.R. and Mahmoodabadi, M.J. (2019), "Effect of micromechanical models on stability of functionally graded conical panels resting on Winkler-Pasternak foundation in various thermal environments", *Arch. Appl. Mech.*, 1-33. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01646-6>.
- Nguyen, D. K., Nguyen, Q. H., Tran, T. T., and Bui. V. T., (2017), "Vibration of bi-dimensional functionally graded timoshenko beams excited by a moving load", *ActaMechanica*, **228**, (1), 141-155. <doi:10.1007/s00707-016-1705-3>.
- Nguyen, T.T., Lee, J., (2018), "Flexural-torsional vibration and buckling of thin-walled bi-directional functionally graded beams", *Compos. B. Eng.*, **154**, 351-62. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.069>
- Pradhan, S.C. and Murmu, T. (2009), "Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method", *J. Sound Vibr.*, **321**, 342-362. doi:10.1016/j.jsv.2008.09.018.
- Pydah, A., Sabale, A., (2017), "Static analysis of bi-directional functionally graded curved beams", *Compo. Struc.*, **160**, 867-876. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.120>
- Rahmani, A., Faroughi, S. and Friswell, M.I. (2020), "The vibration of two-dimensional imperfect functionally graded(2D-FG) porous rotating nanobeams based on general nonlocal theory", *Mech. Syst. Signal Process.*, **144**, 106854. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2020.106854>.
- Rahmani, M., Mohammadi, Y. and Kakavand, F. (2019), "Vibration analysis of sandwich truncated conical shells with porous FG face sheets in various thermal surroundings", *Steel Compos. Struct.*, **32**(2), 239-252. <http://doi.org/10.12989/scs.2019.32.2.239>.

Ramteke, P.M., Panda, S.K. and Sharma, N. (2019), "Effect of grading pattern and porosity on the eigen characteristics of porous functionally graded structure", *Steel Compos. Struct.*, **33**(6), 865-875. <http://doi.org/10.12989/scs.2019.33.6.865>.

Reddy, J. N., (2007) —Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells: Second Edition; Taylor & Francis Group, LLC, ISBN-13: 978-0-8493-8415-8.

Reiter T., Dvorak G.J. (1998), —Micromechanical Modeling of Functionally Graded Materials, In: Bahei-El-Din Y.A., Dvorak G.J. (eds) IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials. Solid Mechanics and its Applications, vol 60. Springer, Dordrecht

Reiter, T., and Dvorak, G.J. (1997), —Micromechanical Models for Graded Composite Materials, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 46, 1655-1673.

Rezaiee-Pajand, M., Mokhtari, M., (2019), "A novel meshless particle method for nonlocal analysis of two-directional functionally graded nanobeams", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **41**, 303. <https://doi.org/10.1007/s40430-019-1799-3>.

Selmi, A. (2020), "Exact solution for nonlinear vibration of clamped-clamped functionally graded buckled beam", *Smart Struct. Syst.*, **26**(3), 361-371. <https://doi.org/10.12989/SSS.2020.26.3.361>.

Seguini, M. (2016). Vers une modélisation plus réaliste du comportement des structures enterrées : non linéarité géométrique des structures combinée à la non linéarité matérielle du sol et à sa variabilité spatiale, thesis.

Seguini M., Nedjar, D. (2016a). Modelling of soil–structure interaction behaviour: geometric nonlinearity of buried structures combined to spatial variability of soil. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 21(10), 1217–1236.

Seguini, M., Nedjar, D., (2016b). Nonlinear finite element modeling of deep beam resting on linear and nonlinear random soil. *International Journal of Environmental, Chemical, Ecological, Geological and Geophysical Engineering*, 10(2), 121–128.

Seguini, M., Nedjar, D., (2020). Dynamic and Probabilistic Analysis of Shear Deformable Pipeline Resting on Two Parameter Foundation. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. DOI : 10.3311/PPci.14927.

Shafiei, N., Mirjavadi, S.S., MohaselAfshari, B., Rabby, S., Kazemi, M., (2017), "Vibration of twodimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 322, 615–32. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.05.007>.

Shahba A, Attarnejad R, Marvi MT, et al (2011). "Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions". *Compos Part B: Eng* 2011; 42: 801–808.

Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B., (2018), « A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation", *Aero. Sci. Tech.*, **72**, 134–149. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004>

Şimşek, M. (2010), "Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher order beam theories", *Nucl. Eng. Des.*, **240**(4), 697-705. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.12.013>.

Şimşek, M. (2015), "Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions", *Compos. Struct.*, **133**, 968-978. <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.021>.

Şimşek, M. (2016), "Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions", *Compos. Struct.*, **149**, 304-314. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.04.034>.

- Sobhy, M. (2015), “Thermoelastic response of FGM plates with temperature-dependent properties resting on variable elastic foundations”, *J. Appl. Mech.*, **7(6)**, 1550082. <https://doi.org/10.1142/S1758825115500829>.
- Shwetha, K., Subrahmanya, V., Bhat, P., (2018), —Comparison Between Thin Plate And Thick Plate From Navier Solution Using Matlab Software| International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET), Volume: 05 Issue: 06 | June, e-ISSN: 2395-0056, pages 2675- 2680.
- Tanga, Y., Ding, Q., (2019), “Nonlinear vibration analysis of a bi-directional functionally graded beam under hygro-thermal loads”, *Compo.Struc.*, **225**, 111076. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111076>.
- Thai, H.T., Kim, S-E., (2015), —A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells|, *Composite Structures*.doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010
- Tran, T.T. and Nguyen D.K. (2018), “Free vibration analysis of 2-DFGM beams in thermal environment based on a new third-order shear deformation theory”, *Vietnam J. Mech.*, **40(2)**, 121-140. <https://doi.org/10.15625/0866-7136/10503>.
- Tang, Y., Lv XF., Yang, TZ., (2019), “Bi-directional functionally graded beams: asymmetric modes and nonlinear free vibration”, *Compos Part B-Eng.*, **156**, 319–31. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.140>
- Terzaghi, K. (1995). *Evaluation of coefficients of subgrade Geotechnique*, vol. 5, No 4.
- Tebboune, W., Benrahou, K.H., Houari M.S.A. and Tounsi, A., (2015), —Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory|, *Steel and Composite Structures.*, **18(2)**, 443-465.
- Tounsi, A., Al-Dulaijan, S.U., Al-Osta, M.A., Chikh, A., Al-Zahrani, M.M., Sharif, A., Tounsi, A. (2020), “A four variable trigonometric integral plate theory for hygro-thermo-mechanical bending analysis of AFG ceramic-metal plates resting on a two-parameter elastic foundation”, *Steel Compos. Struct.*, **34(4)**, 511-524. <https://doi.org/10.12989/scs.2020.34.4.511>.
- Tran, T.T., and Nguyen, D.K., (2018), “Free vibration analysis of 2-DFGM beams in thermal environment based on a new third-order shear deformation theory”, *Vietnam Journal of Mechanics*, **40(2)**, 121 – 140. [DOI:10.15625/0866-7136/10503](https://doi.org/10.15625/0866-7136/10503).
- Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., (2018), “Size-dependent vibration of bi-directional functionally graded microbeams with arbitrary boundary conditions”, *Compos. B Eng.*, **134**, 225–45. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.09.054>
- Vinyas, M. (2020), “On frequency response of porous functionally graded magneto-electro-elastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT”, *Compos. Struct.*, **240**, 112044.
- Wang, Z.X., Shen, H.S., (2013), —Nonlinear dynamic response of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations in thermal environments|, *Ocean Engineering*, **57**, 99–110.
- Wang, Z-H., Wang, X-H., Xu, G-D., Cheng, S., Zeng, T., (2016), “Free vibration of two-directional functionally graded beams”, *Compo.Struc.*, **135**, 191-198. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.013>
- Wattanasakulpong, N., Ungbhakorn, V., (2014), —Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities|, *Aerospace Science and Technology*, Volume 32, Issue 1, Pages 111-120.
- Winkler, E., (1867), “Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkei”, Prag, Dominicus
- Xiaobai, L., Yujin H, Zhe D and Weiming D (2017) Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory *Compos. Struct.* **159** 433–44
- Yaylaci M., Adiyaman E., Öner E. and Birinci A., (2021a). “Investigation of continuous and discontinuous contact cases in the contact mechanics of graded materials using analytical method and FEM”, *Computers and Concrete*, **27(3)**, 199-210. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/cac.2021.27.3.199>.
- Yaylaci, M., Eyüboğlu, A., Adiyaman, G., Uzun Yaylaci, E., Öner, E. and Birinci, A., (2021b), “Assessment of different solution methods for receding contact problems in functionally graded layered mediums”, *Mechanics of Materials*, **154**, 103730. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103730>

Yaylaci, M., Avcar, M., (2020), “Finite element modeling of contact between an elastic layer and two elastic quarter planes”, *Computers and Concrete*, 26(2), 107-114. DOI: <https://doi.org/10.12989/cac.2020.26.2.000>

Yaylaci, M., Terzi, C., Avcar, M. (2019), “Numerical analysis of the receding contact problem of two bonded layers resting on an elastic half plane”, *Structural Engineering and Mechanics*, **72(6)**, 775-783. Doi: 10.12989/sem.2019.72.6.775.

Yin, H.M., Sun L.Z., Paulino, G.H., (2004), —Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52,3535–3543

Yong H., Ling-E Y., Qi-Zhi L., 2013, Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section, *Composites: Part B* 45: 1493-1498

Younesian, D., Hosseinkhani, A., Askari, H., Esmailzadeh, E., (2019), “Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications”, *Nonlinear Dyn.*, 97, 853–895. [https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9.](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9)

Yu, T., Zhang, J., Hu, H., and Bui, T. Q., (2019), “A novel size-dependent quasi-3d isogeometric beam model for two-directional fgmicrobeams analysis”, *Composite Structures*, **211**, 76–88. DOI: [https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.12.014.](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.12.014)

Zidi Mohamed, AbdelouahedTounsi, Mohammed Sid AhmedHouari, El AbbasAdda Bedia, O.Anwar Bég (2014), “Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology* Volume 34, April 2014, Pages 24-34, [https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.02.001.](https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.02.001)

Zhong, Z. and Yu, T. (2007), “Analytical solution of a cantilever functionally graded beam”, *Composites Sciences and Technology*, 67(3–4), 481–488.

Zuiker, J.R. (1995), —Functionally Graded Materials - Choice of Micromechanics Model and Limitations in Property Variation, *Compos. Eng.*, 5(7), 807-819.