



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET OPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI -BEL -ABBES  
Faculté de Technologie  
Département de Génie Mécanique

## THESE

Pour l'obtention du diplôme de

### Doctorat en Sciences

Spécialité: Génie Mécanique

Option: Mécanique des Matériaux et Structures

Présentée par Monsieur :

**BERKIA Abdelhak**

## ETUDE DU FLAMBEMENT STATIQUE DES STRUCTURES EN FGM

Soutenue le : 02/11 /2022 devant le jury composé de :

**Président:**

M. TOUNSI Abdelouahed                      Professeur, Université de Sidi Bel Abbes.

**Directrice de Thèse:**

Mme BENGUEDIAB Soumia                      Maître de Conférences Classe A, Université de Saida

**Co-Directeur de Thèse:**

M. BENRAHOU Kouider Halim                      Professeur, Université de Sidi Bel Abbes.

**Examineurs:**

M. BOUCHAM Belhadj                      Professeur, Université de Sidi Bel Abbes.

M. CHIKH Abdelbaki                      Maître de Conférences Classe A, Université de Tiaret

M. BOUMIA Lakhdar                      Maître de Conférences Classe A, Université de Tissemsilt

**Invité:**

M. BOUHADRA Abdelhakim                      Maître de Conférences Classe A, Université de Khenchela

2022-2023



*A mes très chers parents Et mes beaux-parents,  
À ma Belle femme et mes Deux Diamantes filles Meriem Nour  
Et Fatima Zahraa,  
À ma famille,  
À tous ceux qui m'ont soutenu et cru en moi, je leur dédie ce  
travail.*

# Remerciement

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir donné courage et patience pour accomplir ce travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à mes directeurs de thèse, le Dr. **S. BENGUEDIEB** et le Pr. **M. BENGUEDIEB**, à mon co-directeur le Professeur **M. BENRAHOU** pour m'avoir guidé et accompagné tout au long de cette étude.

Je tiens à remercier le **Pr.TOUNSI Abdelouahed** pour avoir accepté de présider le jury. Mes remerciements vont également à tous les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail ; **Pr. BOUCHAM Belhadj** , **Pr CHIKH Abdelbaki** et **Pr. BOUMIA Lakhdar**.

Je tiens à remercier les Docteurs : **Dr. BOUHADHRA Abdelhakim**,

**Dr. MENASRIA Abdelrahman** , **Dr. MANSOURI Khelifa et M CHITOUR Mourad**, collègues et enseignants au niveau de l' UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI-BEL-ABBES et ABBES LAGHROUR KHENCHELA, pour leurs aides et leurs remarques pertinentes.

Finalement je tiens à remercier chaleureusement tous qui ont participé de près ou de loin pour accomplir ce travail.

### Résumé

Le but de ce travail est l'utilisation d'abord d'une théorie des plaques d'ordre élevé pour l'étude du flambement thermique des plaques en FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak, la présente méthode aboutit à un système équations différentielles, dont le nombre d'inconnues est cinq. Les propriétés matérielles de la plaque FGM telles que le module de Young et le coefficient de dilatation thermique sont supposées être variables à travers l'épaisseur selon le modèle de distribution de Mori-Tanaka. Trois types de chargement thermique uniforme, linéaire et non-linéaire à travers l'épaisseur de la plaque ont été étudiés. Une étude paramétrique a montré que l'influence des paramètres géométrique et mécanique tel que le rapport géométrique ( $a/b$ ), rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) et l'indice matériel ( $k$ ), ainsi que l'impact des paramètres de Winkler et Pasternak sur la charge critique du flambement. Dans la suite du travail, nous proposons une solution analytique basée sur le modèle de Navier pour étudier le comportement de stabilité des poutres sandwich FG bidirectionnelles dans diverses conditions aux limites.

**Mots-clés :** Matériaux fonctionnellement gradués, Théorie d'ordre élevé, Modèle Mori-Tanaka, Fondation élastique, Flambement thermique, Flambement des poutres, Théorie quasi-3D, Principe des forces virtuelles.

### **Abstract**

The purpose of this work is the first use of a theory of plates of high order for the study of the thermal buckling of plates in FGM resting on elastic foundation type Winkler-Pasternak, the present method leads to system equations differentials, whose number of unknowns is five. The material properties of the FGM plate such as Young's modulus and coefficient of thermal expansion are assumed to be variable through the thickness according to the Mori-Tanaka distribution model. Three types of uniform, linear and non-linear thermal loading through the thickness of the plate have been studied. A parametric study showed that the influence of geometric and mechanical parameters such as geometric ratio ( $a/b$ ), thickness ratio ( $a/h$ ) and material index ( $k$ ), as well as the impact of of Winkler and Pasternak on the critical buckling load. In the continuation of the work, we propose an analytical solution based on the Navier model to study the stability behavior of bidirectional FG sandwich beams under various boundary conditions.

**Keywords:** Functionally graded materials, High order theory, Mori-Tanaka model, Elastic foundation, Thermal buckling, Buckling beams, quasi-3D theory, Principal of virtual forces.

## الملخص

الغرض من هذا العمل هو أول استخدام لنظرية الصفائح عالية الرتبة لدراسة الالتواء الحراري للألواح المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفيًا على أساس مرن من نوع Winkler-Pasternak، وتؤدي الطريقة الحالية إلى معادلات النظام التفاضلية، والتي يصل عدد المجاهيل فيها إلى خمسة. خصائص الصفيحة من المواد المتدرجة وظيفيًا مثل معامل يونغ (Young) ومعامل التمدد الحراري متغيرة من خلال السماكة وفقًا لنموذج توزيع موري تاناكا (Mori-Tanaka). تمت دراسة ثلاثة أنواع من التحميل الحراري المنتظم والخطي وغير الخطي من خلال سماكة الصفيحة. أظهرت دراسة بارامترية أن تأثير المعاملات الهندسية والميكانيكية مثل النسبة الهندسية  $(a/b)$  ونسبة السماكة  $(a/h)$  ومؤشر المادة  $(k)$ ، وكذلك تأثير Winkler-Pasternak على الانتشاء الحرج. لاستمرار العمل، نقترح حلاً تحليليًا يعتمد على نموذج Navier لدراسة سلوك الاستقرار لعمود سندويتش FG ثنائية الاتجاه في ظل ظروف حدية مختلفة.

**الكلمات المفتاحية:** المواد المتدرجة وظيفيًا، نظرية الترتيب العالي، نموذج موري تاناكا، الأساس المرن، الانحناء الحراري، انحناء الأعمدة، نظرية شبه ثلاثية الأبعاد، مبدأ القوى الافتراضية.

---

# *TABLE DES MATIERES*

---



<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## **Chapitre I Généralité sur les matériaux composites**

I.1	Introduction.....	3
I.2	Les matériaux composites classiques.....	3
I.2.1	Historique.....	3
I.2.2	Définitions des composites .....	3
I.2.3	Constituants des matériaux composites .....	4
I.2.3.1	Matrices.....	5
	a) Les matrices polymères.....	6
	b) Les matrices céramiques .....	7
	c) Les matrices métalliques .....	7
I.2.3.2	Renforts.....	7
I.2.4	Relation matrice/renfort .....	8
I.2.5	Les additifs.....	8
I.2.6	Charges .....	9
I.2.7	Classification des matériaux composites .....	9
I.2.7.1	La forme des constituants .....	9
	a) Composites à fibres .....	9
	b) Composites à particules .....	9
I.2.7.2	La nature des constituants.....	10
I.2.7.3	La structure des matériaux composites .....	10
	a) Monocouches .....	10
	b) Composites tissés.....	10
	c) Stratifiés .....	11
	d) Les sandwichs .....	12
I.2.7.4	Le type de matériau composite .....	13
	a) Matériaux composites de grande diffusion .....	13
	b) Matériaux composites de hautes performances .....	13
I.2.8	Avantage des matériaux composites .....	13
I.2.9	Inconvénient des matériaux composites .....	14
I.10	Mise en œuvre des matériaux composites .....	15

I.11	Endommagement des matériaux composite.....	16
I.12	Les matériaux à gradient fonctionnel «FGM» .....	20
I.13.1	Conception des structures FGM.....	21
I.14	Conclusion .....	22
I.15	Reference .....	23

**Chapitre II GENERALITE SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE  
PROPRIETES FGM**

II.1	Introduction .....	26
II.2	Historique des matériaux type FGM .....	26
II.3	Applications des matériaux FGM dans l'industrie .....	29
II.3.1	Domaine aérospatial .....	29
II.3.2	Industrie automobile .....	30
II.3.3	Industrie biomédical .....	30
II.3.4	Industrie militaire .....	31
II.3.5	Industrie énergétique .....	32
II.3.6	Industrie électrique / électronique .....	33
II.3.7	Industrie marine .....	33
II.3.8	Industrie optoélectronique .....	33
II.3.9	Industrie du sport .....	33
II.3.10	Autres industries .....	33
II.4	Types de matériaux à gradient propriétés .....	34
II.4.1	Matériaux à gradient de composition .....	34
II.4.2	Matériaux à gradient de porosité .....	35
II.4.3	Matériaux à gradient microstructural .....	35
II.5	Avantages et inconvénients des FGM .....	36
II.6	Comparaison entre les FGM et les composites traditionnels .....	37
II.7	Méthodes d'élaboration des matériaux FGM .....	38

II.7.1	Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) .....	39
II.7.2	Coulage en bande (Tape casting).....	40
II.7.3	Compactage des couches (poudre d'empilement).....	41
II.7.4	Coulée par centrifugation .....	41
II.7.5	Projection plasma .....	42
II.7.6	Dépôt physique en phase vapeur (PVD) et dépôt chimique en phase vapeur (CVD) .....	43
II.7.7	Frittage en infiltration et frittage en Laser Différentiel .....	43
II.7.8	Dépôt par électrophorèse .....	44
II.7.9	Implantation Ionique (Sputtering) .....	45
II.7.10	Dépôt par Centrifugation .....	45
II.7.11	Technologies de fabrication additive.....	45
II.8	Conclusion .....	47
II.9	Reference .....	48

### **Chapitre III : Propriétés matérielles et théories des plaques FGM**

III.1	Introduction.....	52
III.2	Définition d'une plaque .....	52
III.2.1	Plaques isotropes .....	52
III.2.2	Plaques anisotropes .....	52
III.3	Lois régissant de la variation des propriétés matérielles des plaques FGM .....	53
III.3.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	53
III.3.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	54
III.3.3	Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM .....	55
III.4	Modèles analytiques des plaques FGM.....	56
III.4.1	La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	56
III.4.2	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	57
III.4.3	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	59

---

a) Modèle de Reddy .....	61
b) Modèle est de Touratier .....	61
c) Modèle exponentielle .....	62
d) Modèle de version hyperbolique.....	62
e) Modèle de Aydogdu .....	62
f) Modèle d'ElMeiche .....	62
III.4.4 Théorie de zig-zag .....	63
III.5 Conclusion.....	64
III.6 References .....	65

**Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation  
élastique type Winkler-Pasternak**

IV.1 Introduction.....	67
IV.2 Formulation.....	68
IV.2.1 Géométrie et matériau .....	68
IV.2.2 Cinématiques et équations constitutives .....	68
IV.2.2.1 Champ de déplacements.....	68
IV.2.2.2 Les équations constitutives .....	70
IV.2.2.3 Equations de stabilité .....	70
IV.2.2.4 Solution analytique .....	71
IV.2.2.5 Variation de la température.....	71
a)La Variation uniforme.....	71
b) La Variation linéaire .....	72
c) La Variation linéaire .....	72
IV.3 Résultats numériques et discussions .....	72

IV.3. 1 Variation de la température critique du flambement en fonction de l'indice de puissance $k$ pour différentes valeurs pour différents valeurs du rapport de forme $a/b$ et un rapport de géométrie $a/h=100$ .....	72
IV.3. 2 Variation de la température critique du flambement en fonction de l'indice de puissance $k$ pour différentes valeurs pour différents valeurs du rapport de forme $a/b$ et un rapport de géométrie $a/h=100$ .....	75
IV.3. 3 Variation de la température critique du flambement en fonction de l'indice de puissance $k$ pour différentes valeurs pour différents valeurs du rapport de géométrie $a/h$ et un rapport de forme $a/b= 1$ .....	76
IV.3.4 Effet de la fondation élastique Pasternak sur la variation de la température critique du flambement en fonction de l'indice de puissance $k$ pour différents valeurs du rapport de géométrie $a/h$ et un rapport de forme $a/b=1$ .....	77
IV.3.5 Variation de la température critique du flambement en fonction du rapport de géométrique $a/b$ pour un rapport d'épaisseur $a/h=10$ et différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ .....	79
IV.3.6 Variation de la température critique du flambement en fonction du rapport d'épaisseur $a/h$ et un rapport géométrique $a/b=1$ et différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ .....	80
IV.3.7 Effet de l'indice de gradient sur la variation de la température critique non-dimensionnelle du flambement d'une plaque FGM reposant sur des fondations élastiques ..	81
IV.4 Conclusion .....	82
References .....	83

**Chapitre V : Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)**

V.1 Introduction .....	85
V.2 Formulation théorique .....	85
V.3 Relations constitutive .....	88
V.4 Équations de stabilité.....	89
V.5 Résultats numériques et discussion .....	93

---

## Table des Matières

---

V.6 Conclusion.....	102
V.7 Références .....	103
Conclusion Générale .....	111

---

# *LISTE DES FIGURES*

---

**CHAPITRE I : GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES**

**Figure I.1** : Schématisation des renforts noyés dans une matrice. .... 4

**Figure I.2** : Classification schématique des différents types de composites (Al-Maghribi A., 2008). .... 4

**Figure I.3** : Différentes familles de matrice ..... 5

**Figure I.4** : Les différents types de renfort de base..... 8

**Figure I.5** : Différentes formes de particules. .... 9

**Figure I.6** : Composite Monocouche. .... 10

**Figure I.7** : Exemples de tissus plans courants ..... 11

**Figure I.8** : Exemples de tissus tridimensionnels..... 11

**Figure I.9** : Composite stratifié ..... 12

**Figure I.10** : Composite Sandwichs. .... 12

**Figure I.11** : Rupture de fibre ..... 16

**Figure I.12** : Différents modes de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre (a) Rupture transverse de la matrice ; (b) Rupture en cisaillement de la matrice ; (c) Décohésion de l'interface fibre-matrice ; (d) Rupture longitudinale de la matrice ..... 17

**Figure I.13** : Rupture transverse de la matrice ..... 17

**Figure I.14** : Rupture longitudinale de la matrice ..... 18

**Figure I.15** : Décohésion fibre-matrice ..... 18

**Figure I.16** : Les trois modes de rupture dans un stratifié  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  (Smith B.W., 1993)..... 19

**Figure I.17** : Les trois modes principaux de rupture dans les composites ..... 20

**Figure I.18** : Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SUS304)..... 21

**Chapitre II : GENERALITE SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES FGM**

**Figure II.1** : Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées (Yin H., 2004)..... 27

**Figure II.2** : Exemple d'application des FGM dans le domaine aérospatial ..... 29

**Figure II.3** : Chemises de cylindre de moteur ..... 30

**Figure II.4** : FGM dans les implants dentaires (Sodolla A., 2013)..... 31

**Figure II.5** : gilets pare-balles, corps de véhicules blindé. .... 32

**Figure II.6**: Propriétés des matériaux d'aube de turbine contenant FGM (Qian X, 2003)..... 32



<b>Figure II.7 :</b> Outil de coupe de métal conventionnel en FGM (Birman V., 2014) .....	33
<b>Figure II.8 :</b> Types des matériaux fonctionnellement gradués.....	33
<b>Figure II.9 :</b> Distribution composante des matériaux (Yoshihisa U.,2004).....	37
<b>Figure II.10 :</b> Comparaison entre FGM et composites (Shyang-ho C., 2003).....	38
<b>Figure II.11 :</b> Diverses technologies pour la production de FGM résultant en des échantillons en vrac, un revêtement ou une fabrication de couches minces (Hongyuan S., 2021).....	39
<b>Figure II.12 :</b> Principe du coulage par barbotine (Moya JS., 1992) .....	40
<b>Figure II.13 :</b> Principe du coulage en bande (Lostec L., 1997). .....	40
<b>Figure II.14 :</b> Le coulage centrifuge des poudres mixtes (Xiong H., 2005). .....	42
<b>Figure II.15 :</b> Le schéma du frittage par plasma .....	42
<b>Figure II.16 :</b> (A) représentation schématique de la méthode de dépôt chimique (CVD). (B) La représentation schématique de la méthode de dépôt physique (PVD) (Mishra A., 2019)..	43
<b>Figure II.17 :</b> Disposition du procédé frittage laser différentiel (Yuki M., 1990) .....	44
<b>Figure II.18 :</b> Installation d'EPD pour la production des matériaux (Sarkar P., 1996) .....	45
<b>Figure II.19 :</b> 19 Représentation schématique de quelques méthodes de fabrication additive	46

### CHAPITRE III : PROPRIETES MATERIELLES ET THEORIES DES PLAQUES

#### FGM

<b>Figure III.1 :</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM .....	54
<b>Figure III.2 :</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM .....	55
<b>Figure III.3 :</b> Variation du module de Young dans une plaque E-FGM. (Said A. 2016).....	55
<b>Figure III.4 :</b> Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.....	56
<b>Figure III.5 :</b> Illustration de la plaque de Reissner –Mindlin (Reddy, 1997) .....	58
<b>Figure III.6 :</b> Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant l'épaisseur.. .....	59
<b>Figure III.7 :</b> la distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSMT .....	59
<b>Figure III.8 :</b> Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997) .....	60
<b>Figure III.9 :</b> Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen 2004) .....	63
<b>Figure III.10 :</b> Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Nguyen. 2004).....	64

**CHAPITRE IV : FLAMBEMENT DES PLAQUES COMPOSITES FGM REPOSANT  
SUR FONDATION ELASTIQUE TYPE WINKLER-PASTERNAK**

**Figure IV.1 :** Géométrie de la plaque FGM ..... 68

**Figure IV.2 :** Variation de la température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction du rapport  $a/b$  pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  » avec  $a/h = 10$ .. ..... 79

**Figure IV.3 :** Variation de la température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  » avec  $a/b = 1$ . ..... 80

**Figure IV.4 :** Effet de l'indice de gradient sur température critique du flambement non dimensionnelle  $T_{cr}$  d'une plaque FGM reposant sur des fondations élastique  $a/b=2$  et  $a/h = 10$ . ..... 81

**CHAPITRE V : ANALYSE DE FLAMBEMENT STATIQUE DE POUTRES  
SANDWICH BIDIRECTIONNELLES  
A GRADIENT FONCTIONNEL (PSBGF)**

**Figure V.1 :** Poutre sandwich FG bidirectionnelle..... 86

**Figure V.2 :** Variation du module de Young à travers l'épaisseur des FGSB :

(a) Honte 1-0-1, (b) Honte 1-1-1 ..... 87

**Figure V.3 :** Effet du modèle micromécanique sur le paramètre de charge de flambement de la poutre sandwich FGM ..... 98

**Figure V.4 :** Effet du rapport portée/hauteur sur les paramètres de charge de flambement de la poutre sandwich FGM..... 99

**Figure V.5 :** Effet de l'indice de loi de puissance  $k_x$  sur les charges critiques de flambement adimensionnelles de (1-0-1), (2-1-2), (1-1-1) et (2-2- 1) Poutres FGSW avec diverses conditions aux limites ( $L/h = 5$  et  $20$ ) ..... 100

**Figure V.6 :** 6 Effet du rapport portée/hauteur  $L/h$  sur les charges de flambement critiques adimensionnelles de (1-0,1), (2-1-2), (1-1-1) et ( 2-2-1) Poutres sandwich FG avec les deux conditions aux limites ( $k_x = 1, 2$  et  $5$ )..... 101

---

# *LISTE DES TABLAUX*

---

**CHAPITRE I : APERÇU GENERAL SUR LES MATERIAUX COMPOSITES ET LES STRUCTURES SANDWICHS**

**Tableau I. 1** : Caractéristiques des thermoplastiques [CARMA, 2006] ..... 6  
**Tableau I. 2** : Caractéristiques des thermodurcissables [CARMA, 2006]..... 6

**CHAPITRE II : GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES**

**Tableau II. 1** : Différentes couches des FGM [Houari MSA., 2011].. ..... 38

**CHAPITRE IV : FLAMBEMENT DES PLAQUES COMPOSITES FGM REPOSANT SUR FONDATION ELASTIQUE TYPE WINKLERPASTERNAK**

**Tableau IV.1** : La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et différentes valeurs de rapport « a/b », avec ( $a=100.h$ )..... 73  
**Tableau IV.2** : La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et différentes valeurs de rapport « a/b », avec ( $a=100.h$ )..... 74  
**Tableau IV.3** : La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation non linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k », et différentes valeurs de rapport « a/b », ( $a=10.h$ ). ..... 75  
**Tableau IV.4** : Variation de la température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction de l'indice de puissance « k » et le rapport  $a/h = 100$  pour différentes théories..... 76  
**Tableau IV.5** : La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et différentes valeurs de rapport « a/h ». ..... 77  
**Tableau IV.6** : La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée sous variation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et différentes valeurs de rapport « a/h ». ..... 77

**Tableau IV.7 :** Effet de la fondation élastique Pasternak sur la température critique de flambement des plaques carrée en FGM sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de rapport géométrique « a/h »

$K_g = k_g D / a^2$ ,  $K_w = k_w D / a^4$ ,  $T_{cr} = 10^{-3} \Delta t_{cr}$ ,  $D = E_c h^3 / 12(1 - \nu^2)$  ..... 78

**Tableau IV.8 :** Effet de la fondation élastique Pasternak sur la température critique de flambement des plaques FGM sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de rapport géométrique « a/b » avec a/h=100 et ..... 78

## CHAPITRE V : ANALYSE DE FLAMBEMENT STATIQUE DE POUTRES SANDWICH BIDIRECTIONNELLES A GRADIENT FONCTIONNEL (PSBGF)

**Tableau V.1 :** Fonctions admissibles  $X_m$ ,  $Y_n$ . ..... 92

**Tableau V.2 :** Comparaison des charges de flambement critiques adimensionnelles de la poutre S-S FG (L/h = 20) pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique. .... 94

**Tableau V.3:** Comparaison des charges de flambement critiques adimensionnelles du sandwich poutre C-C FG (L/h = 20) pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique..... 95

**Tableau V.4 :** Comparaison des charges de flambement critiques adimensionnelles de la poutre S-S FG (L/h =5) pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique..... 95

**Tableau V.5 :** Comparaison des charges de flambement critiques non dimensionnelles du sandwich poutre C-C FG (L/h = 5) pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique. .... 95

**Tableau V.6 :** Comparaison des charges critiques de flambement sans dimension  $N_{cr}$  des poutres sandwich FG associées à différentes conditions aux limites (L/h= 5,  $\epsilon_{zz}=0$ )..... 97

**Tableau V.7 :** Comparaison des charges critiques de flambement sans dimension  $N_{cr}$  des poutres sandwich FG associées à différentes conditions aux limites (L/h= 20,  $\epsilon_{zz}=0$ )..... 97

**Tableau V.8 :** Les charges critiques de flambement des poutres sandwich FG C-C et S-S pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique  $k_z$ ,  $k_x=0$  avec  $\epsilon_{zz}=0$  et L/h=20 ..... 98

---

# *LISTE DES NOTATIONS*

---

## Liste des Notations

---

$P$	Propriétés mécaniques
$V$	Fraction volumique
$T$	Température
$E$	Module de Young
$\nu$	Coefficient de poisson
$\alpha$	Coefficient de dilatation thermique
$P_i$	Propriétés mécaniques du constituant i
$V_i$	Fraction volumique du constituant i
$P_1$	Propriétés mécaniques de la céramique
$V_1$	Fraction volumique de la céramique
$P_2$	Propriétés mécaniques du métal
$V_2$	Fraction volumique du métal
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes
$E(z)$	Module de Young en fonction de z
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de z
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de z
$p$	Paramètre matériel
$h$	Épaisseur de la plaque
$a$	Largeur de la plaque
$b$	Longueur de la plaque
$P(z)$	Propriétés mécaniques en fonction de z
$K$	Module de compressibilité
$G$	Module de cisaillement
$u, v, w$	Déplacements dans les directions x, y, z
$u_0, v_0, w_0$	composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\phi_x, \phi_y$	Rotations totales à la normale au plan moyen autour des axes x et y
$\psi_x, \psi_y$	Rotations autour des axes x et y
$f(z)$	Fonction de gauchissement
$g(z)$	Première dérivée de la fonction $f(z)$
$g'(z)$	Première dérivée de la fonction $g(z)$
$w_b, w_s$	Composante de flexion et de cisaillement du déplacement transversal
$\theta$	Déplacement transversal dû au cisaillement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations transversales
$\rho$	Masse volumique
$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$	Composantes du vecteur d'accélération

## Liste des Notations

---

$P_f(x, z)$	Propriétés mécaniques en fonction de x et z
$P_c$	Propriétés mécaniques de la céramique
$P_m$	Propriétés mécaniques du métal
$k_1, \lambda, \mu$	coefficients dépendent de la géométrie
$A', B'$	Coefficients dépendent de la solution de Navier
$C_{ij}$	Coefficient de rigidité élastique
$i$ et $j$	Nombres naturels
$R_f$	Densité de la réaction de la fondation élastique
$\bar{K}$	Paramètre de Winkler
$\bar{G}$	Rigidité de la couche de cisaillement
$\nabla^2$	Opérateur Laplacien
$\delta U$	variation de l'énergie de déformation
$\delta V$	variation du travail externe
$\delta U_f$	Variation du travail de la fondation élastique
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$	Variation du champ de déplacements
$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion dans la plaque
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moments supplémentaires dus au cisaillement transverse
$Q_{yz}^s, Q_{xz}^s, S_{yz}^s, S_{xz}^s$	Effort de cisaillement
$q$	Charge mécanique
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$Bs_{ij}$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$Ds_{ij}$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$HS_{ij}$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$Fs_{ii}$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$Xs_{ii}$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$T_t$	Température de la face supérieure (céramique)
$T_b$	Température de la face inférieure (métallique)
$k_t$	Conductivité thermique de la face supérieure (céramique)
$k_b$	Conductivité thermique de la face inférieure (métallique)
$k_{tb}$	Variation de la conductivité thermique
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$	Paramètres arbitraires
$q_{mn}$	Charge transversale
$a_{ij}$	Composants de la matrice de rigidité
$\{ \}$	Vecteur
$[ ]$	Matrice



---

# *INTRODUCTION GENERALE*

---

## Introduction générale

---

Les avancées enregistrées ces dernières années dans les procédés de fabrication, notamment la fabrication additive, ont permis la synthèse de nouveaux types de matériaux composites plus performants dans lesquels les surfaces de contact entre les différents constituants sont pratiquement inexistantes. Ce sont des matériaux à gradient de propriétés communément appelés en Anglais « Functionally Graded Material (FGM) ». Les FGM (Functionally Graded Materials) s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, générant ainsi des changements en conséquence au niveau des propriétés des matériaux. Les FGM les plus courants allient la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques. Les FGM sont générés par différents procédés, ils sont très prometteurs au regard des applications présentant des conditions de fonctionnement extrêmes. La demande est grande en faveur de FGM capables de supporter de fortes températures et des environnements de frottement élevé afin d'aider l'industrie de faire de grands pas vers l'avant. Ces matériaux sont souvent utilisés dans les structures et composants mécaniques qui sont soumis à des phénomènes pouvant entrainant la ruine des édifices et des structures. La préoccupation majeure des industriels et des centres de recherche est la préservation des édifices et des structures contre les phénomènes de flambement, de fatigue et de rupture.

Le flambement, ou flambage, concerne toutes les structures dites "élancées", qui présentent au moins une dimension très petite devant les autres. Dans le cas des plaques et coques, cette dimension est l'épaisseur. Pour les poutres, il s'agit des dimensions de la section, faibles devant la longueur. Le flambement des structures de base, plaques, coques et poutres est d'abord introduit. Ces structures de base s'assemblent pour former des structures raidies qui héritent de la sensibilité au flambement de leurs composants.

L'objectif principal de ce travail est l'utilisation d'une théorie des plaques d'ordre élevé pour l'étude du flambement thermique des plaques en **FGM** reposant sur fondation élastique type **Winkler-Pasternak**, la présente méthode aboutit à un système équations différentielles, dont le nombre d'inconnues est cinq. Les propriétés matérielles de la plaque **FGM** telles que le module de Young et le coefficient de dilatation thermique sont supposées être variables à travers l'épaisseur selon le modèle de distribution de **Mori-Tanaka**. Le deuxième objectif est de présenter une solution analytique pour étudier le comportement de flambement des poutres **PSBGF** avec diverses conditions aux limites en utilisant une théorie de poutre intégrale quasi-3D.

## Introduction générale

---

La thèse s'articule autour de cinq chapitres répartis comme suit:

Une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel (également appelés matériaux à gradient de propriétés ou matériaux fonctionnellement gradués) ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse. Le premier chapitre est consacré aux matériaux composites classiques en présentant les différents types de matériaux composites, leurs composants, leurs avantages et inconvénients ainsi que les différents modes de ruptures de ces matériaux. Une synthèse bibliographique sur les matériaux à gradient de propriété, leurs utilisations, leurs techniques de mise en œuvre, leurs développements ainsi que leurs domaines d'application ont été présentés au deuxième chapitre. Le troisième chapitre est dédié aux différentes théories appliquées aux structures FGM et les procédures de résolutions utilisées pour résoudre certains problèmes. On trouve aussi un rappel sur les théories des plaques avec toutes les étapes de formulation d'un modèle analytique basé sur une théorie quasi-3D de déformation de cisaillement pour analyser le comportement à la flexion des plaques FGM, définies par la variation des fractions de volume à savoir P-FGM, E-FGM et SFGM. Dans le quatrième chapitre sont exposés les résultats obtenus à partir de la théorie proposée des plaques d'ordre élevé pour l'étude du flambement thermique reposant sur fondation élastique type **Winkler-Pasternak**.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation numérique des résultats du modèle proposé concernant le comportement de flambement des poutres avec diverses conditions aux limites comparés aux résultats obtenus par les théories conventionnelles disponibles dans la littérature. Les résultats obtenus sont discutés et analysés. La concordance des résultats montre que les modèles proposés sont précis et efficace. Ce travail de thèse s'achève par une conclusion générale sur les principaux aspects abordés dans la problématique ainsi que des perspectives envisagées pour d'éventuels travaux futurs.

---

***CHAPITRE I : GENERALITE  
SUR LES MATERIAUX  
COMPOSITES***

---

## I.1 Introduction

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée. Dans ce chapitre, nous présentons les différents types de matériaux composites employés dans l'industrie. Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite. En effet, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases de la structure pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques élastiques [Laurent G., 2008].

## I.2 Les matériaux composites classiques

### I.2.1 Historique

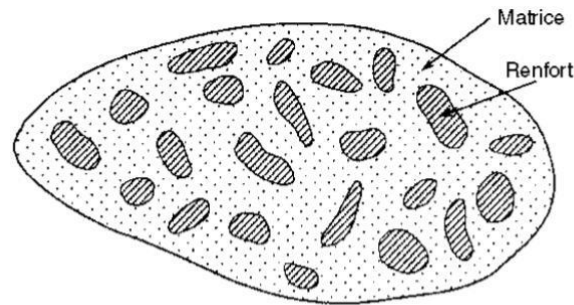
L'idée de combiner plusieurs composants pour produire de nouveaux matériaux (matériaux composés) avec de nouvelles propriétés n'est pas nouvelle, car la première utilisation de ces matériaux remonte à 1500 avant JC lorsque les Égyptiens et les premiers Mésopotamiens ont utilisé un mélange d'argile et de paille pour créer des bâtiments solides et durables plus tard et en 1200 après JC, inventé Premier arc à poulies des Moghols. Utilisant une combinaison de bois, d'os et de colle animale, ces bretelles sont très solides et très précises et compactes grâce à la technologie, ce fut l'arme la plus puissante de l'arme au sol jusqu'à l'invention de la poudre à canon [Reddy R., 2017].

Bien que les matériaux composites soient connus sous diverses formes à travers l'histoire de l'humanité, l'histoire des composés modernes est apparue au XVIIIe siècle, lorsque l'utilisation des matériaux composites s'est étendue à la plupart des domaines industriels.

### I.2.2 Définitions des composites

Un matériau composite peut être défini comme une combinaison d'au moins deux matériaux différents, à l'échelle macroscopique ou plusieurs matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion), l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "*matériaux composites*" des arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible (Figure I.1). La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont

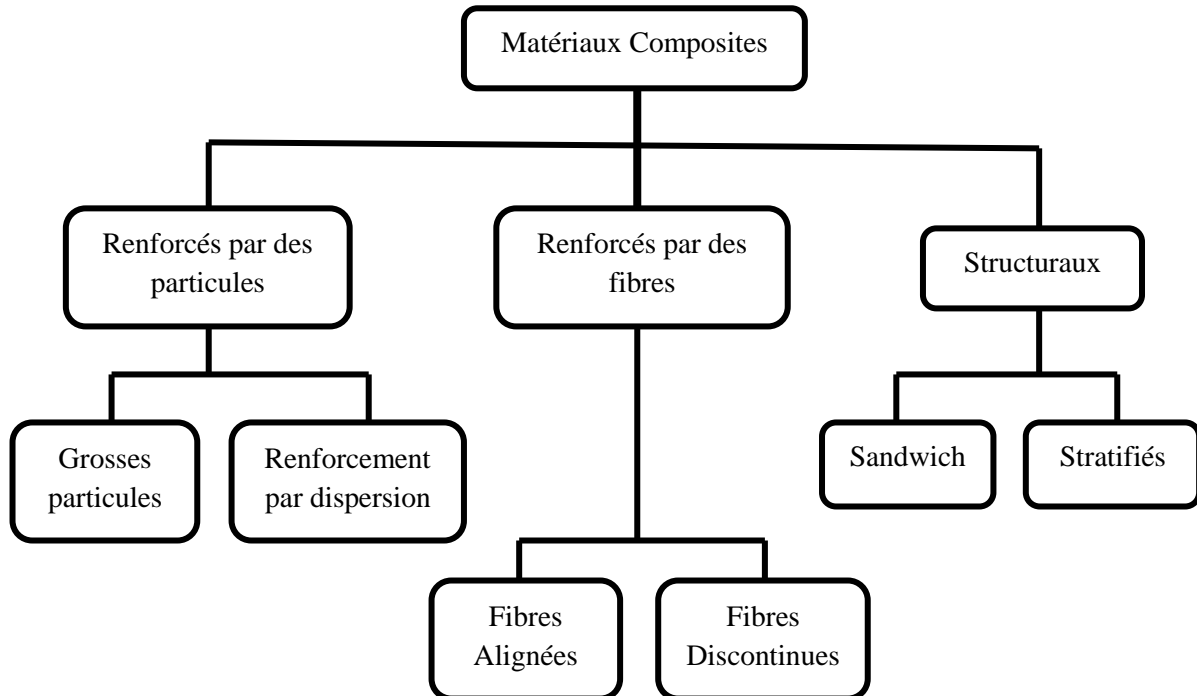
soumises les pièces [5 Ledru, 2009]. Les matériaux ainsi obtenus sont très hétérogènes et anisotropes.



*Figure I.1 Schématisation des renforts noyés dans une matrice.*

### I.2.3 Constituants des matériaux composites

Les matériaux composites sont constitués principalement par des renforts et une matrice (la résine). Les renforts se présentent sous plusieurs formes : armature, squelette, fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la tenue mécanique aux efforts ainsi, la résistance à la traction et à la rigidité. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts, la répartition des efforts, la résistance à la compression ou à la flexion et assure la protection chimique.



*Figure I.2 Classification schématique des différents types de composites [AL-MAGHRIBI A., 2008]*

L'introduction de renforts au sein d'une matrice produit un niveau d'hétérogénéité supplémentaire qui pourra, selon la disposition géométrique des fibres et particules (et leurs formes), être la cause d'une anisotropie macroscopique importante. Ainsi, un composite à renfort continu unidirectionnel confèrera aux matériaux une grande résistance dans le sens des fibres et une très forte anisotropie de comportement alors qu'avec une distribution d'orientation aléatoire le matériau conservera une isotropie macroscopique [Al-Maghribi A., 2008].

### I.2.3.1 Matrices

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Elle maintient les fibres dans leur orientation et leur position prévues pour les charges appliquées. Ses autres rôles consiste à distribuer les efforts entre les fibres, fournir une résistance à la propagation de fissure, et fournir toutes les résistances en cisaillement du composite [Reinhart T.J., 1993]. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la Figure I.3.

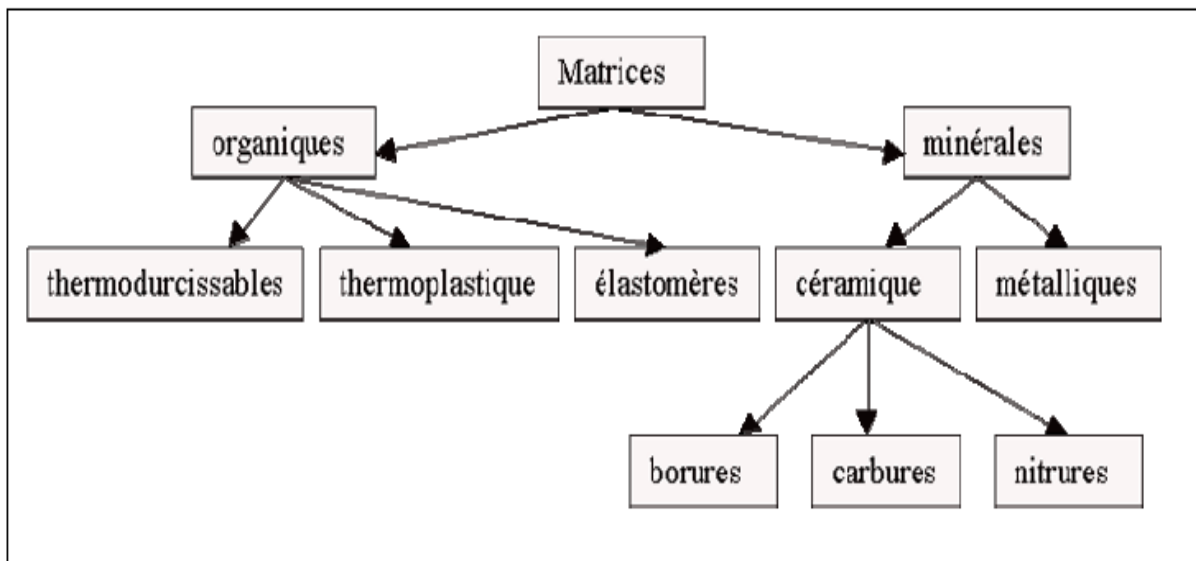


Figure I.3 Différentes familles de matrice.

#### a) Les matrices polymères

##### - Les résines thermoplastiques

Les composites à matrice thermoplastique offrent de nombreux avantages. Elles présentent le gros avantage de pouvoir être alternativement ramollies par chauffage et durcies par refroidissement ce qui permet de faciliter leur moulage par viscoplasticité. Cette

## Chapitre I Généralité sur les matériaux composites

transformation est par ailleurs réversible, ce qui permet de recycler ce matériau. Renforcée avec des fibres courtes ou avec des fibres longues, l'utilisation de ces résines se développe fortement notamment comme matrice des composites structuraux [Mohamed R., 2010].

*Tableau I.1 Caractéristiques des thermoplastiques [CARMA, 2006]*

Matrices TP	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	Module d'élasticité longitudinal (Mpa)	Module de cisaillement (Mpa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C <sup>-1</sup>
	Mv	E	G	k	C <sub>r</sub>	A	α
<b>PP</b>	900	1 200		0.4	30	20 à 400	9*10 <sup>-5</sup>
<b>PPS</b>	1 300	4 000			65	100	5*10 <sup>-5</sup>
<b>PA</b>	1 100	2 000		0.35	70	200	8*10 <sup>-5</sup>
<b>PES</b>	1 350	3 000			85	60	6*10 <sup>-5</sup>
<b>PEI</b>	1 150	3 300			105	60	6*10 <sup>-5</sup>
<b>PEEK</b>	1 300	4 000			90	50	5*10 <sup>-5</sup>

### - Les résines thermodurcissables

Lorsque l'on soumet certains polymères constitués de substances organiques ou semi-organiques à une élévation de température, il se crée des réactions chimiques au cours desquelles les monomères s'associent pour former un réseau tridimensionnel rigide : cette réaction de polymérisation particulière est appelée réticulation.

*Tableau I.2 Caractéristiques des thermodurcissables [CARMA, 2006]*

Matrices TD	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Module de cisaillement (MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C <sup>-1</sup>
	Mv	E	G	k	C <sub>r</sub>	A	α
<b>Epoxyde</b>	1 200	4 500	1 600	0,4	130	2	11*10 <sup>-5</sup>
<b>Phénolique</b>	1 300	3 000	1 100	0,4	70	2,5	1*10 <sup>-5</sup>
<b>Polyester</b>	1 200	4 000	1 400	0,4	80	2,5	8*10 <sup>-5</sup>
<b>Polycarbonate</b>	1 200	2 400		0,35	60		6*10 <sup>-5</sup>
<b>Vinylester</b>	1 150	3 300			75	4	5*10 <sup>-5</sup>
<b>silicone</b>	1 100	2 200		0,5	35		
<b>Uréthane</b>	1 100	700 à 7 000			30	100	
<b>Polyimide</b>	1 400	4 000 à 19 000	1 100	0.35	70	1	8*10 <sup>-5</sup>

Le matériau final se présente sous la forme d'un corps solide et infusible. La polymérisation étant irréversible ces matériaux ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois (non recyclable). En règle générale, ces résines possèdent une faible résistance à l'impact et une faible tenue en



température Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage : les résines polyesters insaturées, les résines de condensation, les résines époxydes [Berthelot JM., 1999].

### **b) Les matrices céramiques**

Pour de plus hautes températures d'utilisation ( $> 800^{\circ}\text{C}$ ), en raison de leur excellente réfractairité, leurs hauts modules d'élasticité, leurs duretés élevées et leurs bonnes inerties chimiques combinés à leurs masses volumiques relativement faibles (par rapport à celles des métaux), les céramiques apparaissent comme les matériaux de matrice les mieux adaptés.

Leurs associations avec un renfort fibreux (au sein d'un composite) permettent de pallier à leurs principaux inconvénients : leurs fragilités. Ainsi, les composites à matrice céramique (CMC) peuvent être envisagés à terme pour la fabrication de pièces de moteur thermique ou d'engins spatiaux, voire pour des applications nucléaires civiles et militaires [ROSSO M., 2005].

### **c) Les matrices métalliques**

Ces matériaux sont composés d'un renfort métallique ou céramique (fil d'acier, particules de carbure de silicium, de carbone, d'alumine) et d'une matrice métallique (titane, aluminium, zinc, magnésium ...). L'utilisation de fibres est cependant assez compliquée du fait de la difficulté à enduire celles-ci avec un métal liquide. La température joue un rôle important sur les propriétés mécaniques du matériau en raison de réactions possibles entre les renforts et la matrice. Cet aspect limite l'utilisation de ces composites pour des applications dans des gammes des températures inférieures à  $800^{\circ}\text{C}$ . Les combinaisons sont limitées afin d'avoir des matériaux plus légers que les superalliages classiquement utilisés pour les applications aérospatiale et aéronautique dans ces gammes de température. Les coûts de matière première n'ont pas permis l'ouverture des domaines d'application de ces matériaux avant les années 1980 avec les domaines de l'automobile, l'électronique et les loisirs [Olivier L., 2014].

### **I.2.3.2 Renforts**

Un renfort est un dispositif permettant d'assurer une meilleure tenue mécanique, c'est-à-dire une bonne rigidité et une bonne résistance, et d'améliorer les propriétés thermiques. Parmi ces renforts, que contient un matériau composite, on distingue les fibres (les plus souvent employées), les particules, les billes pleines ou creuses, les fibrilles, les écailles, les whiskers [Bahlouli N.]. Le renfort est un élément nécessaire à la constitution du composite. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la Figure I.4.

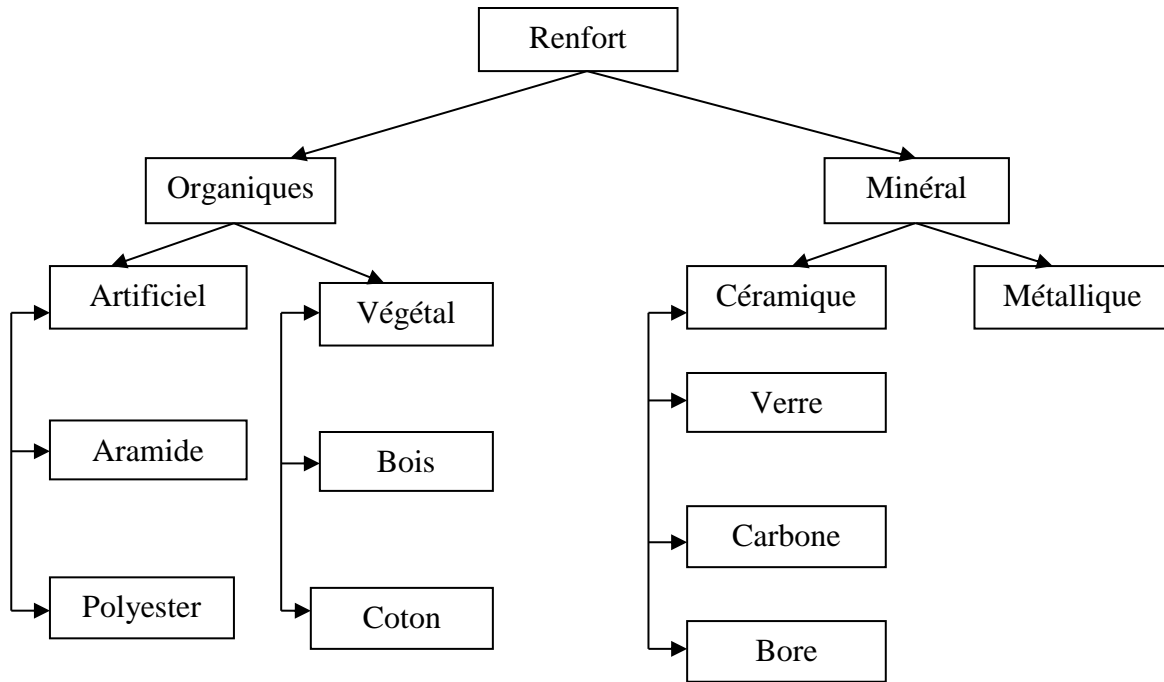


Figure I.4 Les différents types de renfort de base.

### I.2.4 Relation matrice/renfort

Les propriétés d'un composite dépendent non seulement des propriétés des matériaux le constituant (matrice et renfort), mais aussi de la qualité de l'interface entre ces deux matériaux (épaisseur, forces interfaciales, mouillabilité du renfort par la matrice, ...) [SEYNI A., 2008]. La diversité des paramètres pousse à ne pas définir un seul modèle d'adhésion mais plusieurs, correspondant chacun à un cas particulier. Il existe deux types de modèles :

- **l'adhésion mécanique**, consiste en un phénomène d'ancrage, d'accrochage mécanique de la matrice dans les pores et aspérités du renfort.
- **l'adhésion spécifique**, qui permet de décrire différents types d'adhésion ; on peut distinguer différents modèles :
  - le modèle électrostatique ;
  - le modèle de la diffusion interfaciale ;
  - le modèle d'adsorption ;
  - le modèle de liaison chimique ;
  - le modèle de Bikerman.

### I.2.5 Les additifs

Des produits peuvent être incorporés à la résine pour renforcer les propriétés mécaniques (charges renforçant, ex : charges sphériques creuses 5 à 150  $\mu\text{m}$ ). Des charges non renforçant

peuvent être également utilisées pour diminuer le coût des matrices en résine. Des additifs, de type colorant ou agent de démoulage sont largement utilisés lors de la conception des structures constituées de matériaux composites [AL-MAGHRIBI A., 2008].

### I.2.6 Charges

On désigne sous le nom général de charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement, de réduire le prix de revient du matériau transformé [Mansouri K., 2021]. L'incorporation d'une charge au sein d'une matrice permet d'agir sur plusieurs propriétés du matériau composite formé :

- Propriétés physico-chimiques (résistances aux produits acido-basiques...),
- Propriétés mécaniques (résistances aux chocs, à la compression, aux cisaillements...),
- Propriétés électriques (amélioration de la conductivité ou de la résistance)
- Facilité de mise en œuvre,
- Réduction du coût...

### I.2.7 Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant :

#### I.2.7.1 La forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

##### a) Composites à fibres

Un composite est dit à fibres quand son renfort est sous forme de fibres, c'est à dire qu'il possède une direction privilégiée. L'arrangement des fibres, leur orientation définissent les propriétés souhaitées et peuvent rendre le matériau fortement anisotrope ou fortement isotrope dans un plan [Hurang H., 2010].

##### b) Composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres ne possède pas de dimensions privilégiées.



Figure I.5 Différentes formes de particules

Les matériaux renforcés de particules sont plus attractifs en raison de leur rentabilité, de leurs propriétés isotropes et de leur capacité à être traités à l'aide d'une technologie similaire à celle utilisée pour les matériaux monolithiques [Chawla N. et al., 2001]. Le comportement du composite bi – phases macroscopiquement isotrope.

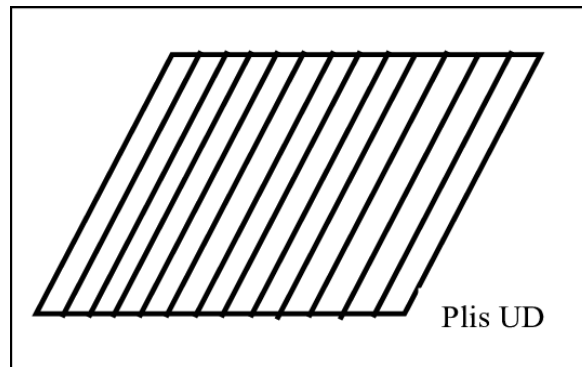
### I.2.7.2 La nature des constituants

Selon la nature des constituants (nature de la matrice), les composites peuvent être divisés en trois grandes classes, considérées ici par ordre croissant de tenue en température : Composites à matrice organique (pour une utilisation  $T < 300\text{ C}^\circ$ ), Composites à matrice métallique (pour une utilisation à  $T < 600\text{ C}^\circ$ ) et Composites à matrice céramique (pour une utilisation à  $T < 1000\text{ C}^\circ$ ) [Mansouri K., 2021].

### I.2.7.3 La structure des matériaux composites

#### a) Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes [Mansouri K., 2021].



*Figure I.6 composite monocouche.*

#### b) Composites tissés

Beaucoup de pièces en matériaux composites sont fabriqués à l'aide de tissus. Dans ces structures, les fibres sont alignées en fils et formés suivant des motifs.

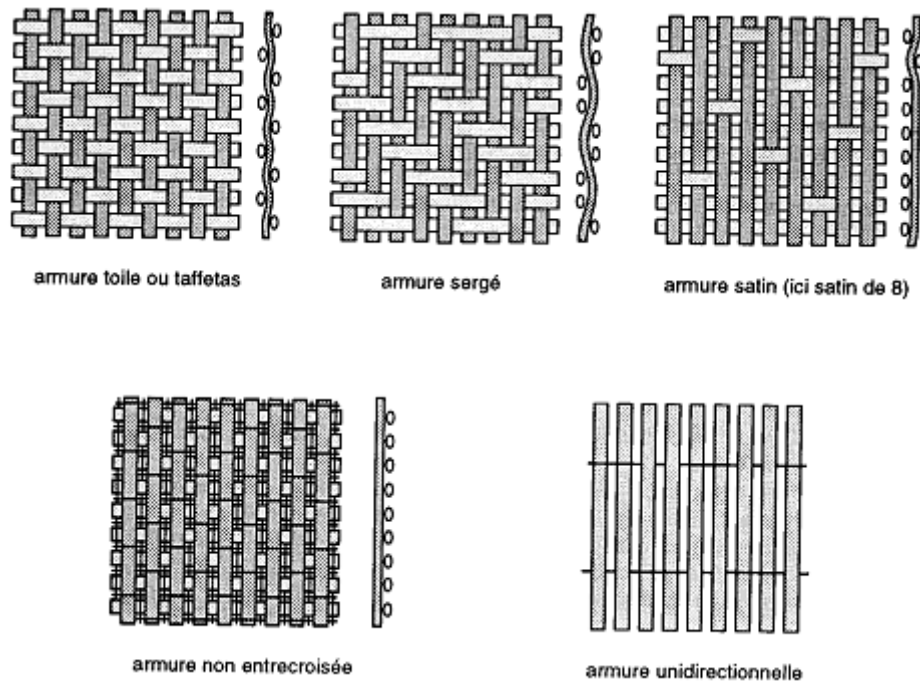
Après la mise en forme finale, la matrice se présente à deux niveaux :

- au sein des fils,
- au sein du tissu.

Les motifs utilisés dans le tissage des composites peuvent avoir des formes variés.

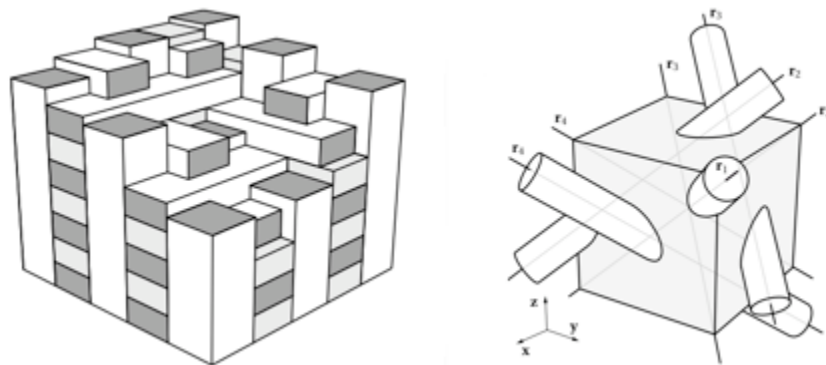
- Une couche de fils ;
- L'épaisseur est obtenue en cousant plusieurs couches entre elles ;

- En empilant des couches pour former un stratifié.



*Figure I.7 Exemples de tissus plans courants*

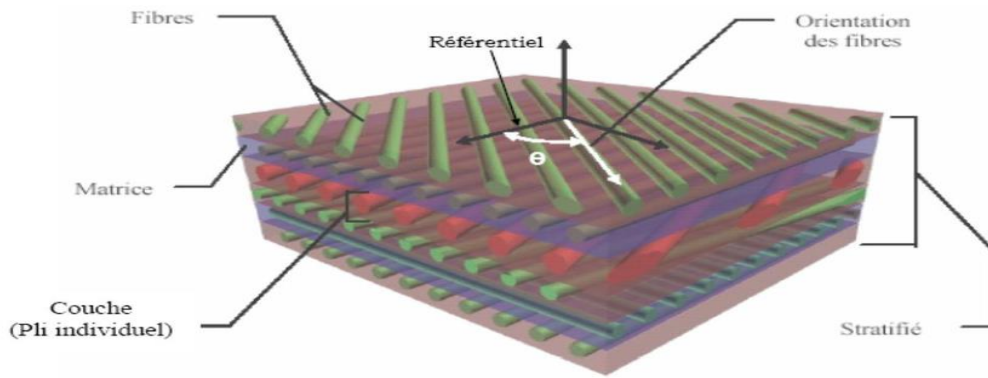
Il existe d'autres tissus en forme tridimensionnels qui possèdent des fils dans plusieurs directions. Ce type de tissage permet de réaliser des pièces avec des épaisseurs variables qui résistent mieux à l'arrachement, Mais ce type de fabrication est plus complexe.



*Figure I.8 Exemples de tissus tridimensionnels*

### c) Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. La figure ci-après représente un matériau composite stratifié.



*Figure I.9 composite stratifié.*

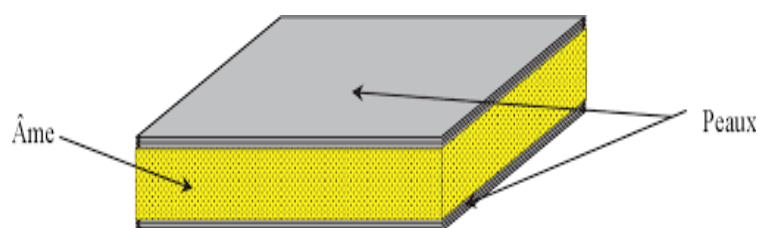
Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. Un stratifié possédant l'empilement  $(0, +45, +90, -45)$   $2s$  est un stratifié avec quatre couches dans les directions  $0^\circ, -45^\circ, 90^\circ$  et  $+45^\circ$ , l'orientation  $0^\circ$  coïncidant avec la direction une du repère principal du composite. Ces plans seront réparties symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié.

On pourra avoir des stratifiés de type :

- Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientée suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientée suivant la direction  $-\theta$  ;
- Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen ;
- Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches  $90^\circ$ .

#### **d) Les sandwichs**

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Figure I.10) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble [ARBAOUI JE., 2009].



*Figure I.10 Composite sandwichs.*

- **Le noyau :** Il existe un grand nombre de matériaux qui peuvent être utilisés comme noyau. Ces matériaux sont divisés en trois classes :
  - Matériaux solide à faible densité : balsa et d'autres types de bois ;
  - Matériaux à haute densité augmentés en forme cellulaire : nid d'abeilles ;
  - Matériaux à haute densité augmentés sous la forme ondulée : feuilles ondulées.
- **La peau :** Une large variété de matériaux est utilisée comme peau, par exemple : les feuilles de métaux comme l'aluminium, le titane, etc. Le choix des matériaux utilisés comme peau est important du point de vue de l'environnement de travail, car la présente partie entre en contact direct avec ce dernier.

### I.2.7.4 Le type de matériau composite

#### a) Matériaux composites de grande diffusion

Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiels, qui sont: Optimisation des coûts par diminution des prix de revient, leur composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe d'élaboration du matériau (moulage par contact, SMC et injection).

#### b) Matériaux composites de hautes performances

Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%.

### I.2.8 Avantage des matériaux composites

Les avantages les plus cités des matériaux composites incluent :

- **Propriétés mécaniques adaptables :** Un avantage principal du stratifié composite est que les plis élémentaires peuvent être orientés de telle façon que la résistance dans une direction donnée corresponde aux chargements prévus. La part de matériau dans des directions non-sollicitées est donc minimisée.
- **Haute résistance et haut module d'élasticité :** Les propriétés mécaniques élevées, notamment la résistance et le module des matériaux composites hauts performances permettent de répondre aux exigences de l'industrie aéronautique [GUENFOUD H. 2021].
- **Poids :** Les matériaux composites hauts performances ont une densité de l'ordre de 1,6 contre 2,7 pour les alliages d'aluminium. Selon Airbus, ils autorisent un gain de 10 à 30 % sur les éléments de structure. Ceux-ci consomment moins et permettent de réduire la taille des réservoirs de carburant.

- **Production** : Les matériaux composites permettent de simplifier l'assemblage de la structure, ce qui compense partiellement leur prix élevé. La réduction du nombre de pièces par rapport aux matériaux conventionnels peut être substantielle.
- **Maintenance** : Les composites ont besoin de moins d'entretien que les alliages métalliques. D'une part, ils ne sont pas sensibles à la corrosion. D'autre part, la tenue en fatigue est très bonne [Dubois T., 2005].

En plus de ces avantages on peut citer :

- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage);
- Grande résistance à la fatigue;
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone) [CARMA, 2006].

### I.2.9 Inconvénient des matériaux composites

Bien que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

- **Coût** : Les matériaux composites ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale où le coût élevé peut être toléré en échange de matériaux plus performants. Par conséquent, le transfert de la technologie des composites aux produits de grande consommation est lent.
- **Conception et analyse** : Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux conventionnels. Elles nécessitent des approches plus compliquées, pour la conception et l'analyse des structures. Les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation (lois de comportement) [Jones R.M., 1975].
- **Assemblage** : Les composites sont plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, la redistribution des contraintes autour des sites de concentration telle que le trou est moins efficace. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne peuvent pas toujours être entièrement transférés par un joint. Le trou est donc souvent renforcé par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié dans la partie trouée [Hassina Z., 2017].



- **Tolérance aux dommages** : Des dommages de diverses natures peuvent se produire dans la vie d'une structure, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer l'impact car la ductilité fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont tendance de se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement [Horton, R.E. et al., 1993].

En plus de c'est inconvénients on peut citer :

- Vieillessement sous l'action de l'eau et de la température;
- Décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes [CARMA, 2006].

### I.10 Mise en œuvre des matériaux composites

Le but de ce paragraphe est de présenter les différentes techniques de mise en œuvre des composites dans leur globalité et de préciser dans quels cas elles sont utilisées. Il existe plusieurs méthodes pour élaborer et mettre en forme les composites qui peuvent être regroupées en catégorie :

- par extrusion, très utilisée avec les thermoplastiques ;
- par imprégnation, utilisée souvent avec les tissus et les fils ;
- par dépôt pour les composites en sandwichs.

Ces techniques sont souvent suivies d'un moulage qui définit les formes du matériau. Le moulage peut être réalisé de plusieurs façons :

- Par compression (à froid, à chaud, par injection de résine) : pour obtenir des formes profondes et délicates. Il s'agit d'une méthode utilisée pour les composites à fort taux de renfort ou des pièces produites en grande quantité ;
- Sous pression (au contact, à injection simultanée) : méthode la plus simple permettant l'obtention de pièces en grande série et à bas prix. Le taux de renfort est toutefois limité;
- Sous vide (pour des pièces de petites et moyennes séries) ;
- En continu : les pièces obtenues sont planes ou ondulés, les composites en sandwichs sont souvent préparés par cette technique ;
- Par pultrusion qui intervient d'habitude après imprégnation des fibres (fils, stratifils, tissus), les profils obtenus sont rectilignes ou en courbes à section constante. Cette technique donne des matériaux à caractéristiques mécaniques élevées suivant l'axe car les taux de fibres peuvent atteindre 80% ;
- Par centrifugation : technique réservée pour les formes cylindriques (tubes, tuyaux) ;

- par enroulement filamentaire (circonférentiel, hélicoïdal, mandrin) permettant la conception de pièces (cylindriques et sphériques) avancées. La proportion de fibres dans le composite peut atteindre 80% donc de hautes caractéristiques mécaniques. Néanmoins, c'est une méthode très couteuse.

La conception d'un matériau composite dépend du type d'application, de chargement, etc. Ce qui le diffère fortement des matériaux classiques, où la conception d'une structure est adaptée en fonction du matériau constitutif. Il est évident de voir que la qualité et la convenance d'un matériau composite dépendent du choix de ces deux composants de base (matrice et fibres) en fonction des applications spécifiques qui lui sont envisagées.

Deux dispositifs fondamentaux doivent être atteints:

- il est essentiel que le liquide qui enveloppe les fibres pendant la formation du composé réalise leur mouillage spontanément, c'est-à-dire que l'énergie d'adhésion résultant de ce contact doit surmonter l'énergie cohésive du polymère.
- les performances mécaniques seront améliorées si la ligne formée par l'interface comporte des enchevêtrements macromoléculaires résultant de la diffusion dans la matrice polymère et des chaînes greffées sur les fibres.

### I.11 Endommagement des matériaux composite

La rupture finale d'un composite est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- la rupture des renforts,
- la rupture transverse de la matrice,
- la rupture longitudinale de la matrice,
- la rupture de l'interface renfort – matrice.

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

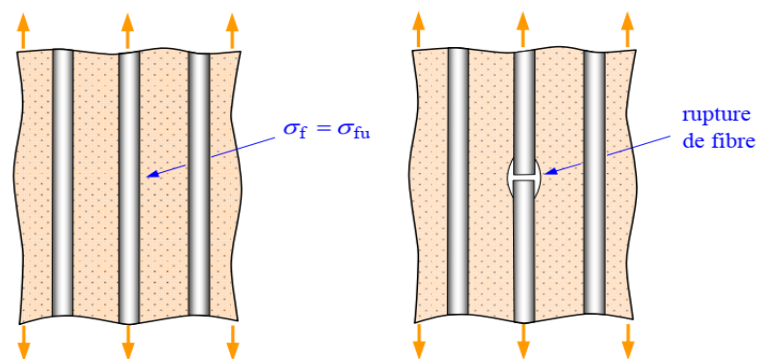
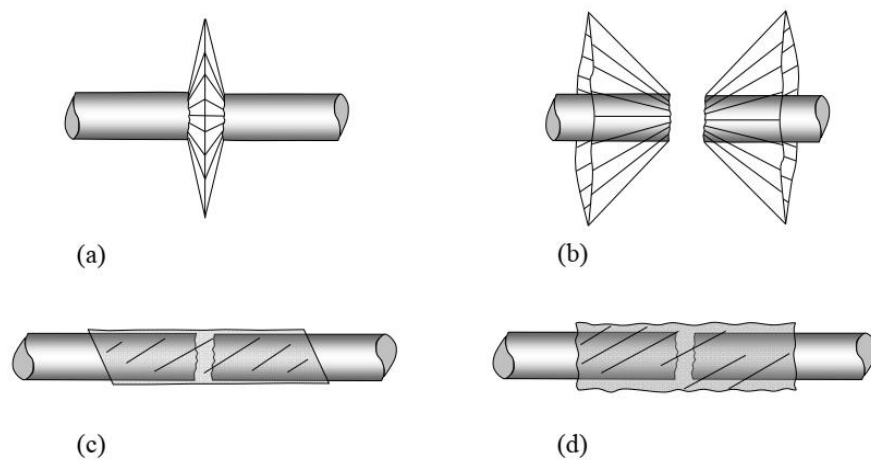
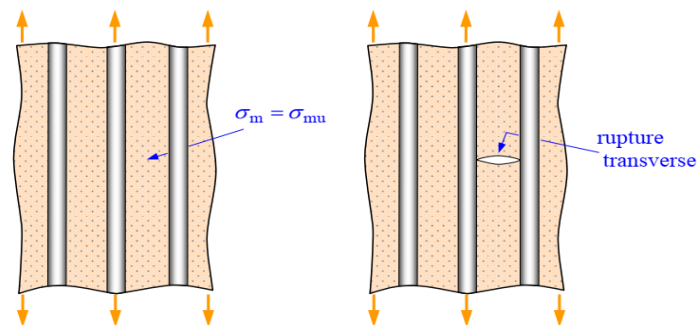


Figure I.11 Rupture de fibre

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction  $\sigma_f$  dans une fibre atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{fu}$  de la fibre (Figure I.11). La rupture de la fibre produit une concentration de contraintes au voisinage de la rupture. La redistribution de ces contraintes, et par conséquent le processus de rupture résultant, dépend principalement : de la contrainte à la rupture des fibres, de la capacité de la matrice à absorber l'énergie libérée, des propriétés de l'interface fibre-matrice, etc. Les Figures I.12 montrent les différents processus de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.



**Figure I.12** Différents modes de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.  
 (a) Rupture transverse de la matrice ; (b) Rupture en cisaillement de la matrice ; (c) Décohésion de l'interface fibre-matrice ; (d) Rupture longitudinale de la matrice.

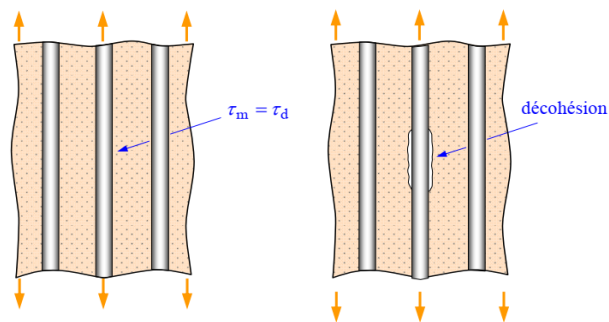


**Figure I.13** Rupture transverse de la matrice.

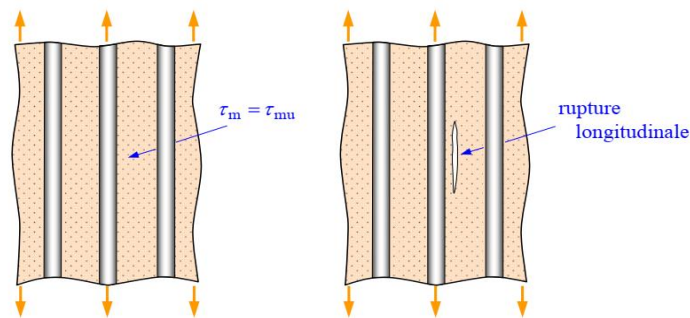
La fissuration de la matrice peut se produire, soit par fissuration transverse (Figure I.13) lorsque la contrainte en traction  $\sigma_m$  dans la matrice atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice, soit par fissuration longitudinale (Figure I.14) lorsque la contrainte de cisaillement  $\tau_m$  dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture  $\tau_{mu}$ , généralement au voisinage

d'une fibre. Ce dernier mode de rupture, appelé "splitting" par les anglo-saxons, se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice :  $\tau_d > \tau_{mu}$ . Dans le cas contraire où  $\tau_d < \tau_{mu}$ , il se produit une rupture par décohésion de l'interface fibre-matrice (Figure I.15).

La rupture finale d'un matériau composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de ces divers mécanismes élémentaires. L'initiation, puis la propagation de la rupture dépendent des propriétés des fibres et de la matrice, de l'interface fibre-matrice, de la fraction volumique des fibres, de l'état et des conditions de sollicitations mécaniques imposées [Berthelot JM., 2012].



**Figure I.14** Rupture longitudinale de la matrice.



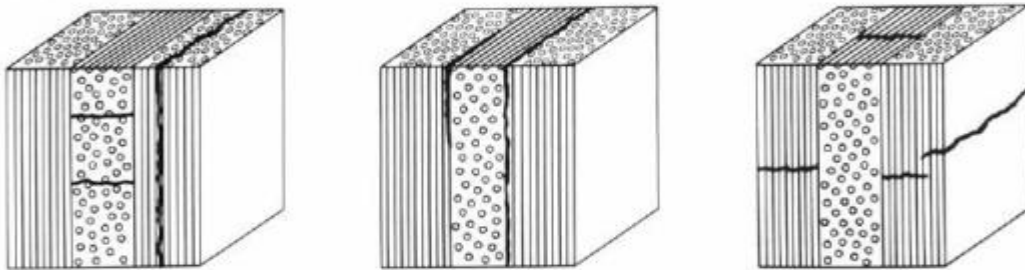
**Figure I.15** Décohésion fibre-matrice.

Il existe des différences significatives entre les propriétés du renfort et de la matrice. La rigidité du renfort est beaucoup plus élevée que la rigidité de la matrice. La majeure partie du chargement est transférée sur la fibre [SZEKRÉNYES A. et al., 2002]. Les thermoplastiques renforcés par des fibres de verre courtes moulés par injection sont des matériaux composites. Leur comportement macroscopique résulte donc d'interactions entre la matrice thermoplastique hautement non linéaire et la fibre élastique courte [A. Launay et al, 2010].

L'endommagement microscopique, l'échelle microscopique qui voit les hétérogénéités les plus fines présentes dans le matériau [BONNET B., 2005], sous la forme de décollage de renforts/matrices et de fissure dans la matrice constituent une étape importante vers la défaillance des composites, car ils peuvent déclencher d'autres modes de défaillance tels que les délaminages et la rupture des fibres. On sait que l'apparition des dommages microscopiques

dépend de l'état de contrainte local, de la fraction volumique locale des renforts et des propriétés des renforts et de la matrice. Il est également sensible à la distribution spatiale des renforts [Romanov V, 2013]. Cependant, les effets des défauts locaux à l'échelle microscopique ne sont pas explicitement pris en compte et le comportement du matériau est pris uniquement à l'échelle macroscopique [Peterson WM., 2011].

La description de la rupture à l'échelle du pli sert au classement des mécanismes de rupture. Les stratifiés à renforts de fibres longues montrent trois types de rupture : rupture intra-laminaire, rupture inter-laminaire et rupture translaminaire. Ces trois modes de rupture sont présentés à la Figure I.16. Elles définissent le plan de rupture par rapport aux composants du matériau. La rupture intra-laminaire se manifeste à l'intérieur d'un pli tandis que la rupture inter-laminaire est une rupture entre deux plis contigus. La rupture translaminaire a une orientation transversalement à l'orientation des fibres pour le pli endommagé [GUENFOUD H., 2021].



*Figure I.16 Les trois modes de rupture dans un stratifié  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  [Smith, B.W., 1993].*

- **La rupture intra-laminaire** : Elle est due particulièrement à la faible résistance de la matrice et/ou de l'adhérence entre la matrice et les fibres. Elle est provoquée par les contraintes se trouvant dans le plan du stratifié. Un pli se dégrade par la résultante de la contrainte de traction dans la direction normale aux fibres. Ce type de rupture est connu sous l'appellation de "fissure transverse". Dans la majorité des cas, ce type de fissure de la matrice se manifeste avant la rupture des fibres.
- **La rupture inter-laminaire** se manifeste à l'interface entre deux plis d'un empilement. Ce type de rupture se caractérise par la rupture de la matrice et la décohésion fibre/matrice. Ce mécanisme de rupture inter laminaire contient peu de rupture de fibres. De même que pour le cas des matériaux métalliques, la rupture inter laminaire se produit selon des modes distincts connus en mécanique de la rupture ; à savoir le mode I (ouverture), le mode II (cisaillement), le mode III (cisaillement anti-plan) ou une combinaison des trois modes.

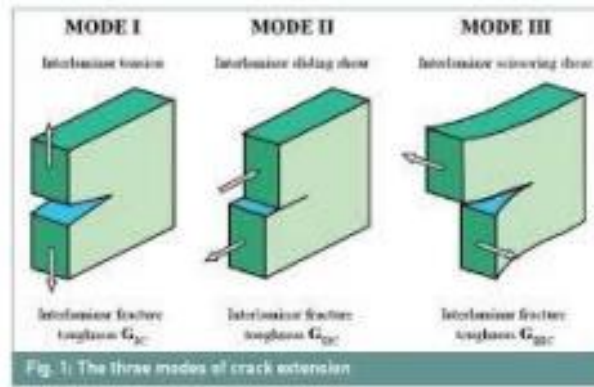


Figure I.17 Les trois modes principaux de rupture dans les composites

- **La rupture translaminaire** : concerne la rupture de fibres. Les surfaces de rupture sont donc généralement marquées par la morphologie rugueuse des bouts de fibres.

En effet, la contrainte de rupture des fibres est plus importante que celle de tous les autres constituants d'un composite stratifié. Par conséquent, ce mécanisme de rupture entraîne souvent la rupture totale du stratifié. La rupture translaminaire peut être séparée en deux modes selon les chargements : la rupture en traction et le micro-flambage en compression.

La rupture peut être provoquée par un mode individuel ou une combinaison de deux modes [Hassina Z., 2017].

### I.12 Les matériaux à gradient fonctionnel «FGM»

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces type de matériaux, ont suscités beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes.

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Niino et al., 1987]. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc [Koizumi, M., (1993).]

Généralement, les FGM sont fabriqués à partir des matériaux isotropes tels que les céramiques et les métaux [SALAH F., 2021]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites

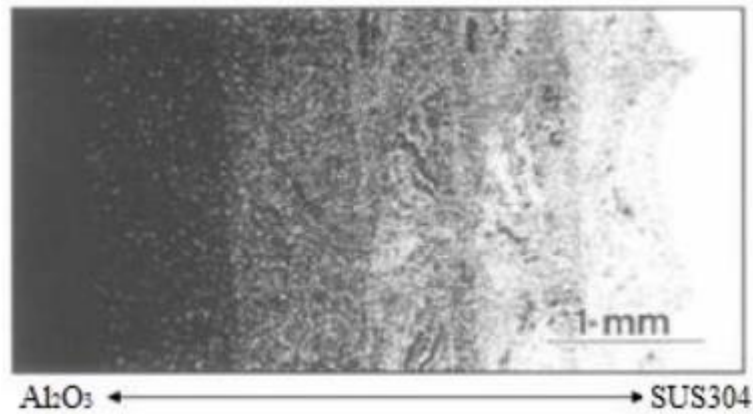
conventionnels [10-36]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

### I.13.1 Conception des structures FGM

Dans la plupart des cas, les investigateurs considèrent le FGM comme étant un matériau composé particulier pour lesquels la fraction de volume varie sans interruption dans la direction de l'épaisseur. Quelques études considèrent également le FGM comme étant un composé renforcé par un tissu dans lesquels l'orientation de fibre varie à travers l'épaisseur.

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les distributions de propriété sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules ; qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture ; mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure. La (Fig.1.8) montre une micrographie par microscope électronique à balayage de la section transversale d'une billette en FGM (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SUS304).

Dans un matériau à gradient fonctionnel, les différentes phases micro-structurelles ont des fonctions différentes, et le matériau à gradient fonctionnel global atteint le statut multi structural par gradation de leurs propriétés. En variant progressivement la fraction volumique des constituants du matériau, leurs propriétés matérielles présentent un passage lisse et continu d'une surface à une autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et l'atténuation des concentrations de contraintes. Cela est dû au fait que le constituant céramique du matériau à gradient fonctionnel est capable de résister à des environnements de haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que le constituant métallique assure une meilleure performance mécanique et réduit la possibilité d'une rupture catastrophique.



*Figure. I.18* Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SUS304)

### I.14 Conclusion

Les matériaux composites sont des matériaux très variés, disponibles partout, et connaissent actuellement un essor important dans tous les domaines d'application, particulièrement dans la construction mécanique, vu leurs performances mécaniques très élevées. Leurs caractéristiques mécaniques dépendent :

- Des propriétés intrinsèques des constituants de base ;
- Des distributions géométriques des constituants ;
- De l'interaction entre les différents constituants, etc.

Le choix des constituants de base ainsi que les techniques et le procédé de mise en œuvre ont une influence directe sur l'architecture et le comportement mécanique du composite.

Un composite stratifié soumis à un chargement présente différentes étapes de dégradation. Dans le scénario d'évolution des défauts le plus « classique », la matrice et l'interface fibre/matrice sont les premières à se détériorer. Les premiers défauts sont donc la microfissuration de la matrice et la décohésion fibre/matrice à l'échelle microscopique.

Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations des contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").



### I.15 Reference

**AL-MAGHRIBI A.**, (2008), « Comportement des matériaux composites a fibres Courtes : applications a l'impact basse vitesse», Thèse de Docteur de l'université Paul Sabatier Toulouse.

**A. Launay** et al, (2010), « Cyclic behavior of short glass fiber reinforced polyamide for fatigue life prediction of automotive components”, Elsevier Procedia Engineering 2, 901-910.

**ARBAOUI, JE.**, (2009), « Etude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwichs multicouches », Thèse de docteur de l'Université Paul Verlaine – METZ, France.

**Bahlouli N.** « Cours Matériaux Composites DESS Mécanique avancée et Stratégie industrielle ».- 120p.

**Dubois, T.** (2005), Boeing 787 : Les belles promesses de la légèreté. Science & vie, hors-série N° 231, p. 22-29.

**Hassina Z.**, (2017), “Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel”, Thèse de Docteur Université Mohamed Khider – Biskra, Algérie.

**Horton, R.E.** and Mccarty, J.E. (1993), Damage tolerance of composites. Engineered materials handbook - Volume 1: Composites. Ohio, USA: ASM International, p. 259-267. ISBN 0871702797 (v.1).

**Hurang Hu**, « Characterizing and Modeling Mechanical Properties of Nanocomposites – Review and Evaluation», Vol. 9, No.4, pp.275-319, 2010.

**Laurent G.** « Généralités sur les matériaux composites ». Ecole d'ingénieur. 2008.

**R. Reddy** Nagavally, «Composite materials - history, types, fabrication techniques, advantages, and applications», International Journal of Mechanical And Production Engineering, Volume-5, Issue-9, 2017

**Ledru, Y.**, (2009). « Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés Aéronautiques », Toulouse: s.n.

**Reinhart T.J.** and Clements L.L., (1993), “Introduction to composites”, Engineered materials handbook - Volume 1: Composites, Ohio, USA: ASM International, p. 27-34. ISBN 0871702797 (v.1).

**Mohamed R.**, (2010), « Contribution à l'amélioration de la compatibilité interfaciale fibres naturelles/matrice thermoplastique via un traitement sous décharge couronne », Thèse de Docteur de l'Université Henri Poincaré Nancy 1, 2010.

[GLOSSAIRE DES MATERIAUX COMPOSITES – CARMA –Actualisation octobre 2006.

Jean Marie. Berthelot, Matériaux composites « comportement mécanique et analyse des Structures », édition TEC et DOC, 1999.

**ROSSO, M.**, (2005), «Ceramic and metal matrix composites : routes and properties», Journal of Materials Processing Technology, vol. 175, no1-3. 2006, p. 364–375. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2005.04.038>.

**Olivier L.**, (2014), « Elaboration de matrices céramiques par un nouveau procédé hybride: imprégnation de poudres et CVI réactive ». Génie des procédés. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0177ff. tel-01138115

**SEYNI A.**, (2008), « Propriétés physico-chimiques et d'usage de matériaux composites à charge dégradable produits par co-broyage», Thèse de Docteur de l'université DE Toulouse, France.

**Mansouri K.**, (2021), « Etude du Comportement Mécanique Des Composites à matrice thermoplastique et modélisation par éléments finis », Thèse de Docteur Université Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd. Algérie.

**N. Chawla** and Yu-Lin Shen, “ADVANCED ENGINEERING MATERIALS”, 3, No.6, p. 357-370 (2001).

**GUENFOUD H.** (2021), « Modélisation par éléments finis spéciaux des structures en matériaux à gradient fonctionnel », Thèse de Docteur de l'Université 8 Mai 1945 Guelma. Algérie.

**Jones, R.M.** (1975), Mechanics of composite materials, Washington D.C., USA: Scripta Book Company, 355 p. ISBN 0070327904.

**Jean-Marie Berthelot**, « matériaux composites-comportement mécanique et analyse des structures » ; 5 édition, lavoisier, Paris, 2012.

**SZEKRÉNYES A.** and József UJ, (2002), « finite element modelling of the damage and failure in fiber reinforced composites”, PERIODICA POLYTECHNICA SER. MECH. ENG. VOL. 46, NO. 2, PP. 139–158.

**BONNET B.**, (2005), « Comportement au choc de matériaux composites pour applications automobiles”, thèse doctorat a l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

**Romanov V.**, (2013), « statistical analysis of real and simulated fibre arrangements in unidirectional composites”, Composites: Science and Technology 87, p. 126-134.

**Peterson WM.**, (2011), « effect of fiber diameter on stress transfer and interfacial damage in fiber reinforced composites », MONTANA STATE UNIVERSITY Bozeman, Montana.

**Smith, B.W.** (1993), “Fractography for continuous fiber composites: Engineered materials handbook - Volume 1: Composites. Ohio, USA: ASM International, p. 786-793. ISBN 0871702797 (v.1).

**Niino et al.**, 1987

**Koizumi, M.**, (1993).

**SALAH F.**, (2021), « Etude Des Propriétés Thermiques Des Matériaux F.G.M A Base De Céramique – Métal », Thèse de Docteur Université DJILLALI LIABES - SIDI BEL ABBES, Algérie.

---

***CHAPITRE II :GENERALITE  
SUR LES MATERIAUX A  
GRADIENT DE PROPRIETES  
FGM***

---

### **II.1 Introduction**

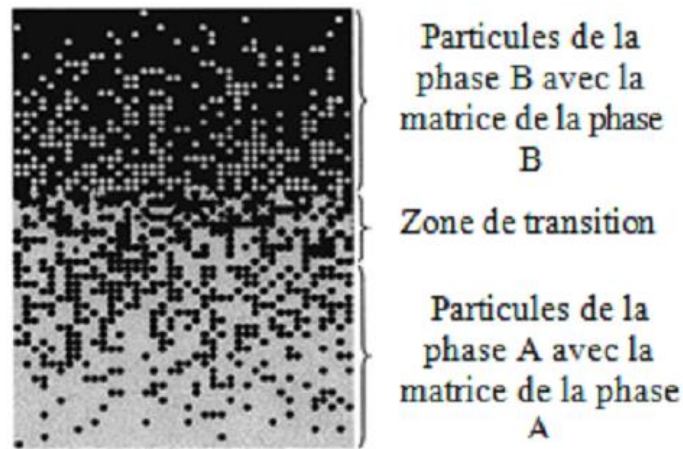
Les matériaux à Gradient de propriétés (Functionally Graded Materials: FGM) appelés aussi matériaux à propriétés fonctionnellement graduées sont une nouvelle classe de matériaux composites capable de résister dans des conditions extrêmes. Leurs propriétés mécaniques et physiques sont gardées grâce à leurs compositions qui varient graduellement avec la l'épaisseur de telle sorte à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent [Niino et al., 1987], ce matériau a été développé au Japon dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques [M. Koizumi et al., 2018], l'idée est de créer des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les matériaux à propriétés graduées FGM, est une gamme de matériaux composites produite en changeant continuellement les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, en génie civil et se trouvent également dans des applications biomédicales.

### **I.2 Historique des matériaux type FGM**

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés. Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Un FGM est un matériau composite non homogène réalisé à partir de différentes phases des constituants (généralement en céramique et métal). Un exemple d'un tel matériau est présenté sur la Figure II.1 [Yin et al., 2004], où des particules (sphériques ou presque sphériques) sont incorporées dans une matrice isotrope. Dans ce type de matériau les différentes phases microstructurales ont différentes fonctions, en variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs avec un changement doux et continu d'une surface à l'autre, de ce fait éliminant les problèmes d'interface qui conduit à la diminution des concentrations de contrainte thermique (dû fait que le céramique peut résister au haute température, alors que le

métal fournis une performance mécanique plus forte et réduis la possibilité de rupture catastrophique).



*Figure. II.1 Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [Yin et al., 2004]*

Les problèmes de transitoire ou de fatigue thermique sont étudiés dans divers secteurs industriels autres que l'aéronautique, comme l'électronucléaire (circuits de refroidissement, combustible), l'électrotechnique (contacts électriques), l'automobile (culasses, collecteurs d'échappement, filtres à particules) ou la production de matériaux (verre, aluminium).

L'étude des résultats de ces sollicitations thermique constitue l'un des axes majeurs de plusieurs chercheurs et s'appuie sur la méthodologie développée pour l'aéronautique et les superalliages. Des approches multi-échelles sont aussi utilisées pour la prévision de durée de vie des revêtements à haute température. L'objectif est d'augmenter la tenue aux hautes températures pour les turbines à gaz en appréhendant les mécanismes fondamentaux de la rupture des revêtements pour aubes de turbine.

Le terme FGM a été élaboré au milieu des années 80 par un groupe de scientifiques dans la région de *Sendai* au Japon, comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique [Yamanoushi et al., 1990], [Koizumi, 1993]. Des grands efforts ont été fournis dans le but de développer des matériaux à haute performance avec une résistance élevée à la chaleur.

En 1985, de nombreux chercheurs ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau matériau. Principalement pour de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une

navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps, protéger l'intérieur contre un surchauffement. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que la surface inférieure. Pour cette raison les matériaux de revêtement, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1000°C. Il n'y a aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique.

Un revêtement céramique  $Al_2O_3$  aurait pu protéger le fuselage (acier austénitique) contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre le fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des valeurs du coefficient de dilatation thermique, des modules de Young et de la conductivité thermique des deux matériaux.

La solution envisagée pour ce problème est la mise en œuvre d'un composite à gradient de fonction (FGM) constitué d'un matériau dont la face exposée à très haute température aurait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, alors que la face intérieure posséderait une très bonne conductivité de chaleur. Un simple assemblage de ces deux constituants présentent aussitôt une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface (propriétés thermiques différentes). Pour éliminé ce problème, il serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction, à la fois dans les laboratoires de la NASA puis de manière plus formalisée au Japon après la mise en place d'un comité de réflexion en 1985 entre des chercheurs du NAL (National Aerospace Laboratory, STA), de l'université du Tohoku et du GIRI du Tohoku (Gouvernemental Industrial Research Institute, MITI). Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition progressive (graduelle) continue de la composition, de la structure et de la distribution des propriétés entre ces constituants.

La transition entre les constituants peut habituellement être approchée par le biais d'une série de puissance. L'industrie aéronautique et l'aérospatiale et l'industrie des circuits informatiques sont très intéressées par la possibilité de matériaux qui peuvent résister à de très forts gradients thermiques [Yamanoushi et al., 1990]. Ceci est normalement obtenu en utilisant une couche de céramique en rapport avec une couche métallique.

L'illustration d'une idée de l'application des FGM à ce concept, il existe des matériaux dits thermoélectriques qui lorsqu'ils sont soumis à un apport thermique produisent un courant électrique. Lorsque ce matériau est chauffé sur sa face externe, même si la température transmise baisse dans les couches internes, on obtient une réponse optimum à chaque niveau et en conséquence une conversion thermoélectrique globale améliorée [SAID Abderrahmane, 2016].

### **II.3 Applications des matériaux FGM dans l'industrie**

Les caractéristiques particulières de ce type de matériau ont fasciné l'attention de plusieurs chercheurs durant ces dernières années, favorisant leurs utilisations dans la plupart des domaines d'ingénierie. Malgré que ces matériaux sont destinés pour les domaines aérospatial et aéronautique, ils ont trouvés la place dans les autres domaines comme : l'industrie automobile, la biomédicale, défense militaire, électrique, électronique et thermoélectronique, sportifs, etc.

#### **II.3.1 Domaine aérospatial**

Etant le premier domaine d'application de ce type de matériau, ils étaient utilisés dans les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les roues de turbine, les revêtements de lame de turbine, les casquettes de nez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales [L. Marin, 2005] (Figure II.2 ). Les matériels FGM sont aussi utilisés pour les murs structurels qui combinent des propriétés d'isolation thermiques et sonores.



Figure II.2



### II.3.2 Industrie automobile

A cause du coût élevé de production, l'utilisation de matériaux FG dans l'industrie automobile est toujours limitée actuellement. Malgré cela, le matériau est utilisé dans les parties très importantes de l'automobile, où le coût élevé présent justifie son utilisation. Les applications présentes incluent : les chemises de cylindre de moteur, pistons de moteur diesel, les ressorts à lames, bougies, chambres de combustion, puits d'énergie, amortisseurs, volants, quelques parties du corps de la voiture, le verre de fenêtre et des freins de voiture de course (Figure II.3).



*Figure II.3 Chemises de cylindre de moteur*

### II.3.3 Industrie biomédical

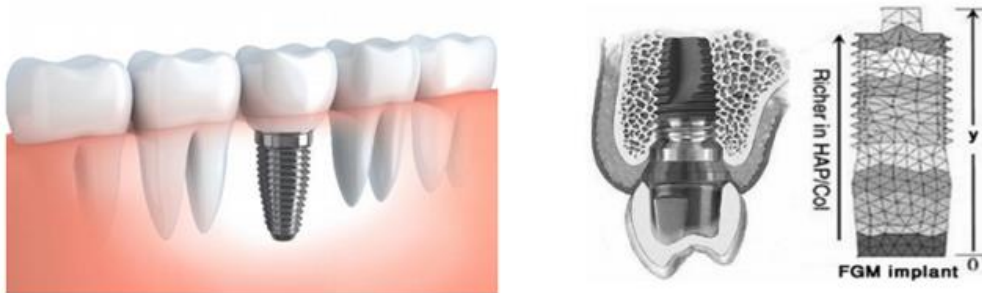
Les implants métalliques sont généralement conçus pour servir d'implants porteurs et ne sont pas destinés à être utilisés temporairement. Ils ont généralement un caractère permanent, à l'exception de certains à base de magnésium pour des applications spécifiques dans lesquelles la vitesse de corrosion est d'une importance significative. Bien qu'ils aient une excellente résistance mécanique et une résistance à la traction et à la compression uniaxiales, les implants métalliques ont une limitation majeure en raison de leur module de Young, qui est beaucoup plus grand que l'os humain naturel et entraîne des problèmes de protection contre les contraintes et une défaillance précoce de l'implant.

L'os cortical a une valeur de module d'Young comprise entre 5 et 23 GPa, et ces valeurs sont respectivement de l'ordre de 114, 190, 45, 44 et 120 pour Ti-6Al-4V, acier inoxydable 316L, Mg pur, alliage WE43 Mg, et Ti pur [Haghshenas, 2017]. En raison de cette grande différence, la conception FGM des implants métalliques vise à résoudre ce problème. Une bonne gradation mécanique satisfaisante peut être obtenue par la conception FGM et le contrôle des variantes associées. De plus, grâce à une conception de surface hiérarchique intelligente et à la fabrication

de liaisons biomécaniques et chimiques dans les couches superficielles des FGM, les cellules osseuses peuvent s'y fixer et se différencier facilement et faciliter la procédure de traitement [Liu et al., 2017]; [Bahraminasab et Edwards, 2019] ; [Bai et al., 2019].

Ce type de gradation se rencontre également dans les systèmes naturels et peut entraîner des variations dans les propriétés mécaniques de la pièce ; l'un des bons exemples est l'os illustré à la figure 1E qui peut être utilisé dans des applications porteuses [Wegst et al., 2015]. Il existe de nombreux exemples dans la nature, notamment les écailles de poisson et les dents de requin, où leur structure unique peut résister aux forces de contact et d'impact (14 Chen et al., 2012). Ce concept peut être utilisé dans les pièces métalliques afin d'améliorer la résistance mécanique contre la déformation et les dommages de contact [Suresh, 2001], la fissuration [16 Bao et Wang, 1995] et l'amélioration d'autres propriétés mécaniques [Islam et al., 2020].

Sédighi [Sédighi et al. 2017] produisent un FGM composite Ti/HA à cinq couches pour les applications d'implants dentaires. Dans son étude, les poudres Ti et HA ont été mélangées avec différents rapports Ti-à-HA (100, 90:10, 80:20, 70:30 et 60:40), puis les échantillons ont été frittés par la méthode SPS, les résultats confirment les valeurs graduées de microdureté et les différences de microstructure. De plus, d'autres chercheurs ont étudié l'effet de ces changements graduels à l'aide de méthodes de FA [Lima et al., 2017] ; [Han et al., 2018b].



*Figure II.4 FGM dans les implants dentaires [Sodolla et al., 2013] 21*

### II.3.4 Industrie militaire

La capacité des matériaux FG offre des propriétés résistance à la pénétration en évitant la propagation des fissures est une propriété attirante qui favorise le matériau dans l'industrie de défense [L. Lu et al., 2011]. Les FGM sont utilisés dans l'industrie de défense comme : gilets pare-balles, le corps de véhicules blindé (pare-balles) (Figure II.5).



Figure II.5 gilets pare-balles, corps de véhicules blindé

### II.3.5 Industrie énergétique

Les industries d'énergie ont habituellement besoin de différents types de matériau FG pour améliorer l'efficacité des équipements. Certaines applications dans l'industrie d'énergie incluent : le mur intérieur des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et les équipements sous pression, les électrodes graduées pour la production de carburant solide d'oxyde, le piézoélectrique FGM pour le capteur ultrasonique, le diélectrique, la pile à combustible, Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement de protection sur les pales de la turbine dans le moteur à turbine à gaz [A. Bishop et al., 1993]. (Figure II.6).

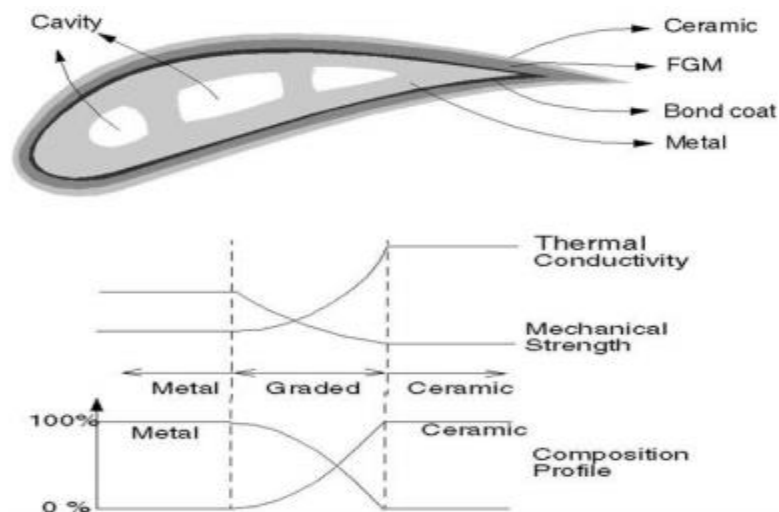


Figure II.6 Propriétés des matériaux d'aube de turbine contenant FGM [Qian X, 2003]

### **II.3.6 Industrie électrique / électronique**

Les matériaux FG sont utilisés dans les industries électriques et électroniques pour la relaxation du champ de stress dans les électrodes et l'interface d'entretoise de terrain, dans les diodes, les semi-conducteurs, pour les isolants et pour la production de capteurs. Les éléments de bouclier thermique dans la micro-électronique sont aussi faits du nanotube carbonique des matériaux FGM.

### **II.3.7 Industrie marine**

Les matériaux FG ont aussi des applications dans l'industrie marine notamment : Dans le puits de propulseur, les cylindres plongeants, les dômes de sonar, le système de tuyauterie de composé et dans la coque de pression cylindrique.

### **II.3.8 Industrie optoélectronique**

Les matériaux FG peuvent être utilisés dans l'industrie optoélectronique pour la production de fibres optiques, la lentille, les lasers GRINSH, les détecteurs de photo à haute performance, les cellules solaires, les photodétecteurs tunables, les médias de stockage magnétiques et lors de la production de semi-conducteurs avec un indice de réfraction variable.

### **II.3.9 Industrie du sport**

Les matériaux FG sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tel que les clubs de golf, des raquettes de tennis et des skis.

### **II.3.10 Autres industries**

L'application des matériaux FG inclut aussi divers domaines, exemple, les outils de coupe pour améliorer la force thermique de l'outil de coupe [M. S. EL-Wazery et al., 2015], les lames de rasoir de Fer Aluminure/Acier inoxydable, dans les équipements de sécurité, comme des bouteilles d'air de lutte contre les incendies, les cadres de monocle et les casques.

D'autres équipements, comme, le scanner IRM des tubes cryogéniques, les récipients sous pression, les réservoirs à carburant, les cas d'ordinateur portable, les instruments de musique et les tables radiographiques [S.BRAIRI, 2019].

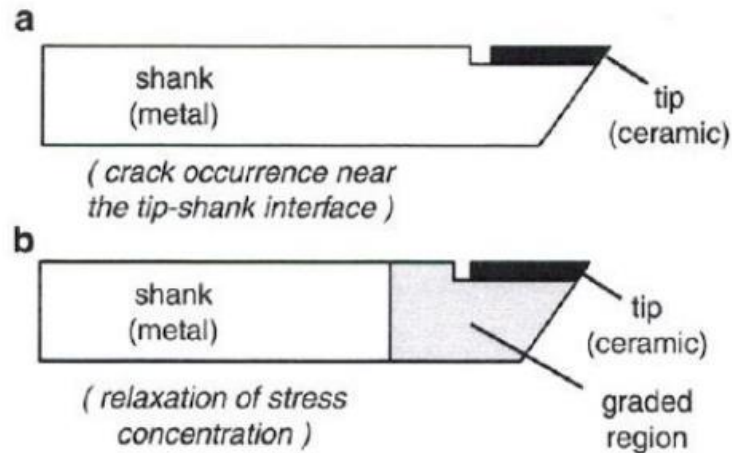


Figure II.7 Outil de coupe de métal conventionnel en FGM [Birman V, 2014]

### II.4 Types de matériaux à gradient propriétés

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface qui existait dans le matériau composite traditionnel, et de le remplacer par une interface graduellement progressive. Le type d'application prévue détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types de FGM qui sont actuellement produits comprennent le gradient de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM, et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté dans les sections suivantes.

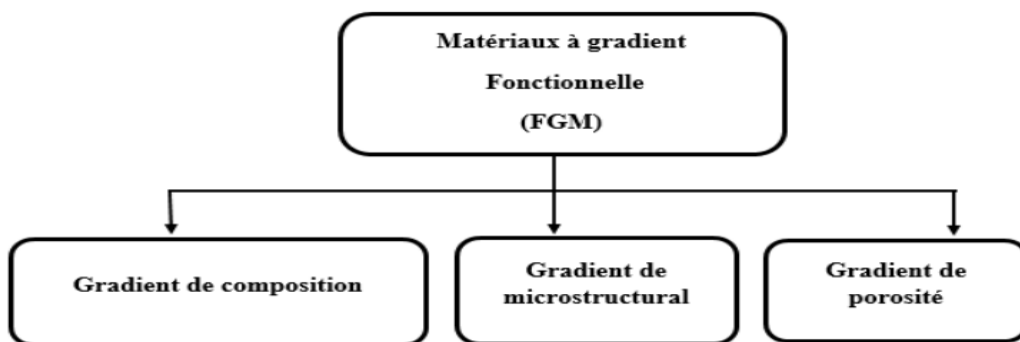


Figure II.8 Types des matériaux fonctionnellement gradués

#### II.4.1 Matériaux à gradient de composition

Il s'agit du type de FGM qu'on va traiter en détail dans ce mémoire, où la composition varie progressivement, en fonction du rayon dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multi phase. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments

chimiques d'une phase dans l'autre phase [Bharti. I et al., 2013]. Ce type de FGM est moins commun. Les matériaux classés de façon fonctionnelle les plus couramment utilisés sont ceux qui ont une composition multiphasique [Mahamood, R.M., et al, 2015]. Les phases et la composition sont faites pour varier à travers le volume du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions qui aideraient à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçue. Les différentes phases qui sont produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions d'élaborations, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau. En métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre couche par couche la composition de poudre requise, puis le compactage de la poudre et ensuite le frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieraient en fonction de la position dans le volume du matériau à gradient fonctionnel.

### **II.4.2 Matériaux à gradient de porosité**

Le matériau à gradient fonctionnel de gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer par rapport à une direction dans le matériau. La forme et la taille des pores sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnel. Ce type de matériau fonctionnel est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer consiste en une porosité graduelle fonctionnelle, et la porosité graduelle aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de cicatrisation de cet implant, et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée aide également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module. D'élasticité du matériau de l'implant pour qu'il corresponde à celui du tissu humain. La porosité graduée aide à réduire la densité du bio-implant. Ceci est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain.

### **II.4.3 Matériaux à gradient microstructural**

Matériau à gradient fonctionnel microstructural est un l'autre type de FGM, où la microstructure est adaptée de sorte que les différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer graduellement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue au cours du processus de

solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. On laisse refroidir lentement le noyau du même matériau. La microstructure graduée entraînerait un changement progressif des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau. Les FGM à gradient microstructural trouvent leur application dans des composants qui doivent avoir une surface très dure pour résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact élevé qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau fonctionnellement gradué comprend l'acier cémenté, les cames ou les couronnes, les paliers ou arbres et les applications de turbine [Schneider, M.J et al., 2013].

### **II.5 Avantages et inconvénients des FGM**

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est-à-dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du future produit qui, pourrai être réalisé par un simple revêtement et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaire de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que surfaces libres, des coins, des racines des fissures.

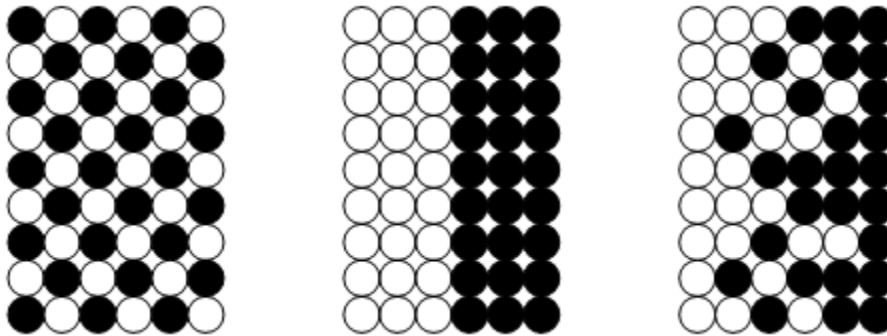
Le principal obstacle est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation de propriétés différentes, par exemple, la température de fusion de l'affinité différente pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion ( $T_1$ ) et une céramique avec température fusion ( $T_2$ ).

Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T_1 \ll T_2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ ( $T_1$ ). La céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans des nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. D'autre part, travailler autour de ( $T_2$ ) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [Narottam P et al., 2011].

### II.6 Comparaison entre les FGM et les composites traditionnels

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs matériaux combinés qui ont des propriétés qui ne peuvent être obtenues avec aucun des constituants [Jones, R.M., 1999]. Les FGM sont des matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. La différence avec les composites c'est que les FGM sont non-homogènes Figure II.8.

Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].



*Figure II.9 Distribution composante des matériaux [Yoshihisa, 2004].*

Yoshihisa [Yoshihisa, 2004] a établi un modèle simple illustrant différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (Figure II.9).

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composées et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des



## Chapitre II GENERALITE SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES FGM

deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistance aux hautes températures dans le côté en céramique.

<b>Propriétés</b>	1 Résistance mécanique		
	2 Conductivité thermique		
<b>Structure</b>	Eléments constitutifs : Céramique ○ Métal ● Microporosité ◊ Fibre ✱		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

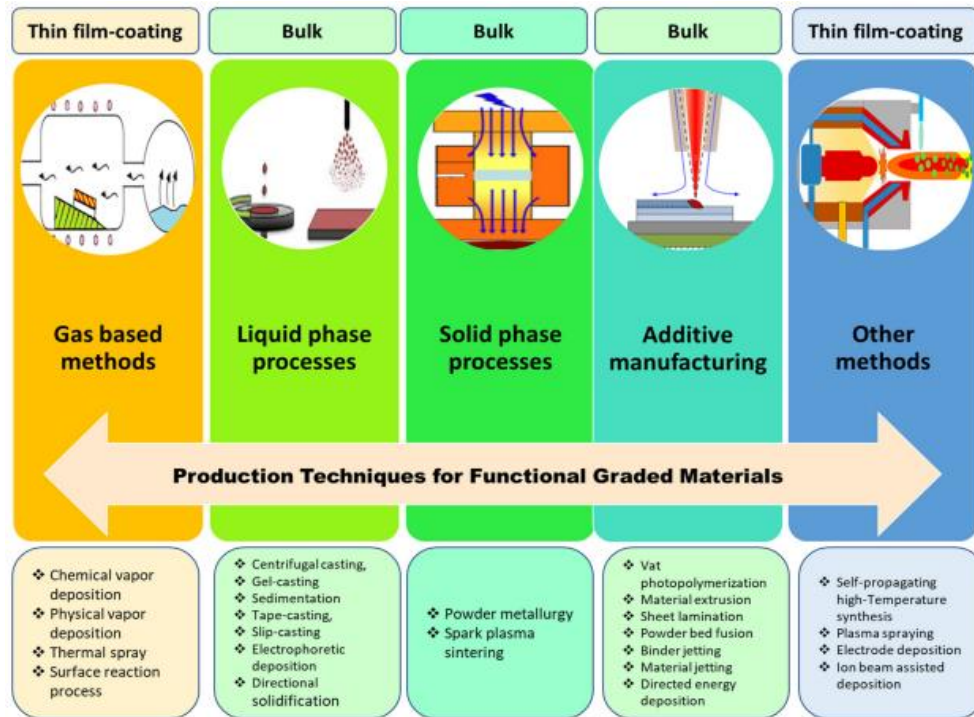
Figure II.10 Comparaison entre FGM et composites [Shyang-ho et al., 2003]

Tableau II.1 Différentes couches des FGM [Houari MSA., 2011]

Couches	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bonne résistance thermique</li> <li>• Faible conductivité thermique</li> </ul>
Couches intermédiaire	Céramique-métal	Élimination des problèmes de l'interface
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bonne résistance mécanique</li> <li>• Conductivité thermique élevée</li> </ul>

### II.7 Méthodes d'élaboration des matériaux FGM

La technique de fabrication est d'une importance capitale pour obtenir des FGM de haute qualité avec la gradation et les propriétés souhaitées ; par conséquent, de nombreuses méthodes ont été proposées et utilisées jusqu'à présent ; chacune ayant ses propres avantages et inconvénients, et ces méthodes sont répertoriées dans la Figure II.10. Les techniques de production de FGM peuvent être classées en quatre principaux procédés : méthodes à base de gaz, en phase liquide [Chen et al., 2000], en phase solide [Tripathy et al., 2018] et les procédés de fabrication additive [Hongyuan et al., 2021].



*Figure II.11 Diverses technologies pour la production de FGM résultant en des échantillons en vrac, un revêtement ou une fabrication de couches minces [Hongyuan et al., 2021].*

La fabrication des matériaux à gradient de propriété s’effectue en première étape par l’établissement de la structure dans l’espace non homogène « gradation » puis en deuxième étape une transformation en bloc de la structure du matériau « consolidation ». Les procédés de fabrication des produits FGM sont multiples et leurs choix dépendent des paramètres suivants :

- De la combinaison de matière,
- Du type de la loi de mélange requise
- De la géométrie de la composante souhaitée

### **II.7.1 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le principe consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, en laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Ce coulage s’effectue en deux étapes essentielles qui sont, la formation du tesson ou « prise » dans une première phase puis une consolidation du tesson ou « raffermissement ».

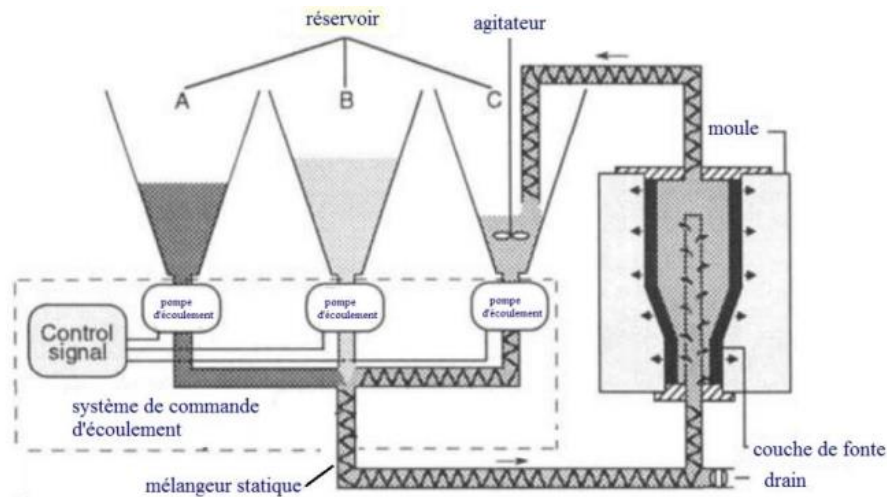


Figure II.12 Principe du coulage par barbotine [Moya et al., 1992].

### II.7.2 Coulage en bande (Tape casting)

Le coulage en bande est une technique qui consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse sur un support plan sous forme de plusieurs couches minces et régulières pour fabriquer des feuillets dont les épaisseurs sont contrôlées et qui varient de 25 à 1000 $\mu\text{m}$ . Après un raffermissement de la pâte, ces feuillets sont démoulés puis découpés.

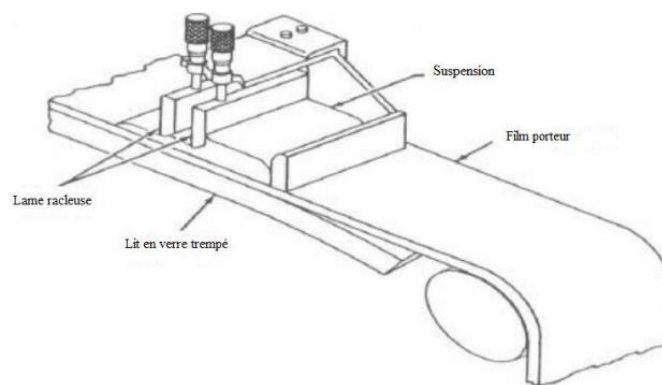


Figure II.13 Principe du coulage en bande [L. Lostec et al., 1997].

Pour que le procédé réussisse, il faut que le solvant utilisé ait un point d'ébullition très bas et une viscosité faible mais il ne doit pas être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique mais soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts. Le liant est utilisé pour offrir une grande résistance mécanique au produit cru et facilite sa manipulation. Alors que le plastifiant est ajouté au liant pour réduire sa viscosité. Ces dits produits (Le liant, le plastifiant et le défloculant) doivent être totalement dégagés pendant le démoulage.

Ce procédé de coulage en bande est souvent utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant les deux méthodes suivantes :

- Soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (MIST) ;
- Soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch, 1986].

### **II.7.3 Compactage des couches (poudre d'empilement)**

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage. Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce (<100 cm<sup>2</sup>) en raison des limites des forces de compaction, fabrication discontinue avec la productivité faible. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces des systèmes à gradient de propriétés [A. SAID, 2016].

### **II.7.4 Coulée par centrifugation**

Dans la coulée par centrifugation, des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité (Mg<sub>2</sub> Si, [Zhang, 1998]) et une densité plus élevée (Al<sub>3</sub>Ti, [Watanabe, 1997]) que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou externe du tube. [A. SAID, 2016].

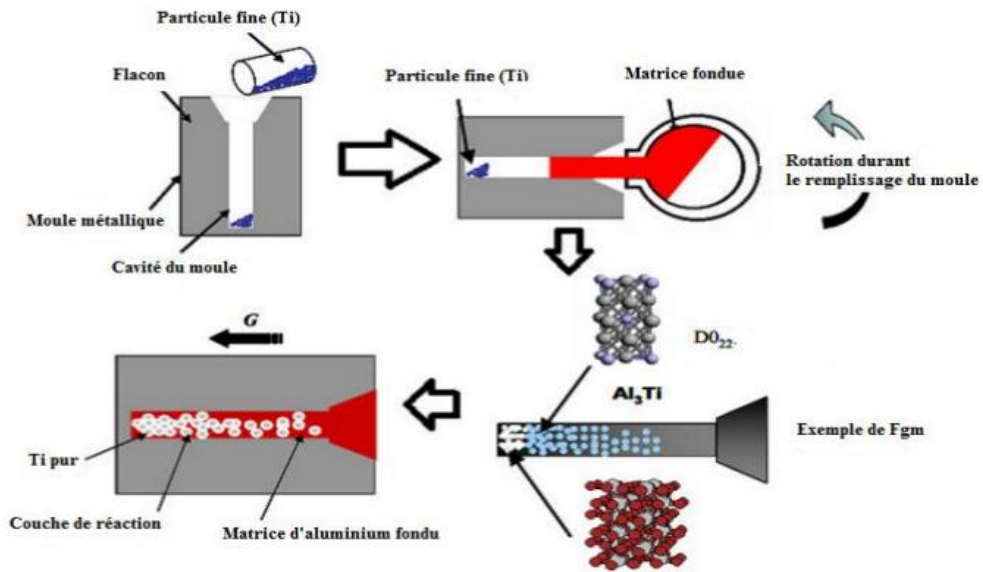


Figure II.14 Le coulage centrifuge des poudres mixtes [Xiong et al., 2005].

### II.7.5 Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGMs l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens, 1990].

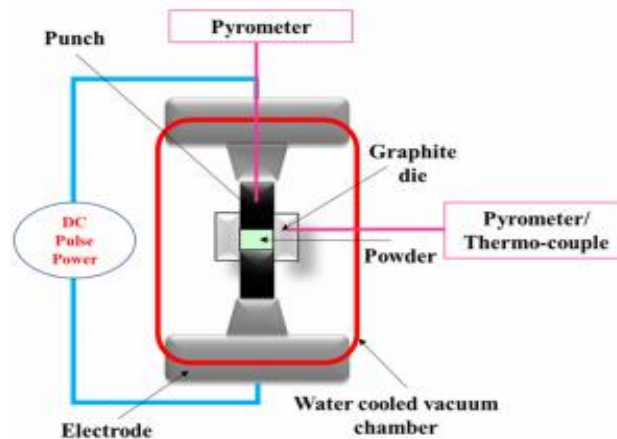
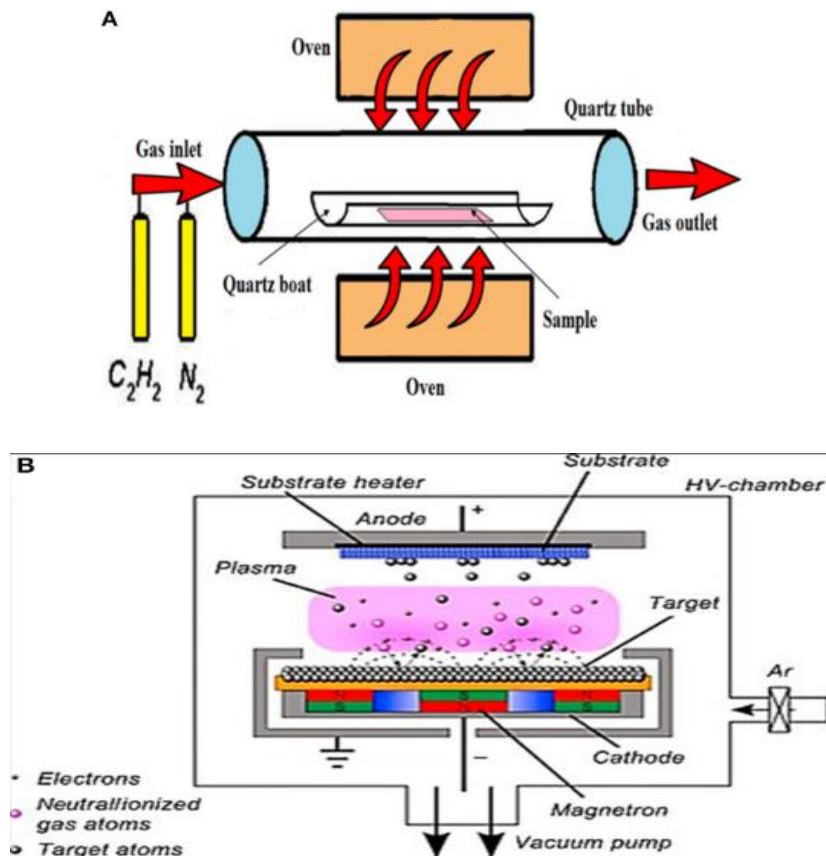


Figure II.15 The schematic of spark plasma sintering.

### II.7.6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD) et dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Les dépôts chimique (C.V.D) ou physique (P.V.D) en phase vapeur sont des procédés de fabrication des FGM dont lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de FGM sur des substrats de formes compliquées [Kawai et al, 1990].



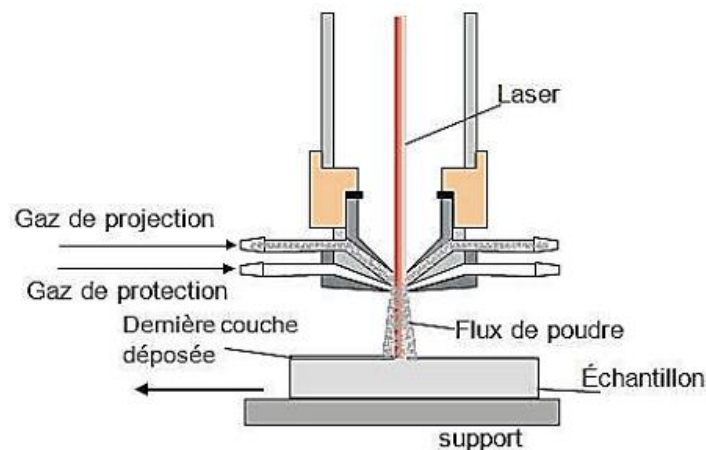
**Figure II.16** (A) représentation schématique de la méthode de dépôt chimique (CVD). (B) La représentation schématique de la méthode de dépôt physique (PVD) [Mishra et al., 2019].

### II.7.7 Frittage en infiltration et frittage en Laser Différentiel

La technique de frittage en infiltration est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [M. Takashi et al., 1990].

L'utilisation du laser dans le procédé de frittage en Laser Différentiel permet de contrôler la température et focaliser avec précision le point à chauffer. Le frittage différentiel le long de la pièce est obtenu grâce à la différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

Yuki [Yuki et al., 1990] a fabriqué une pièce F.G.M de PSZ/Mo. La Figure II.16 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par cette auteur.



*Figure II.17 Disposition du procédé frittage laser différentiel [YUKI et al., 1990]*

### II.7.8 Dépôt par électrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique [Sarkar, 1996].

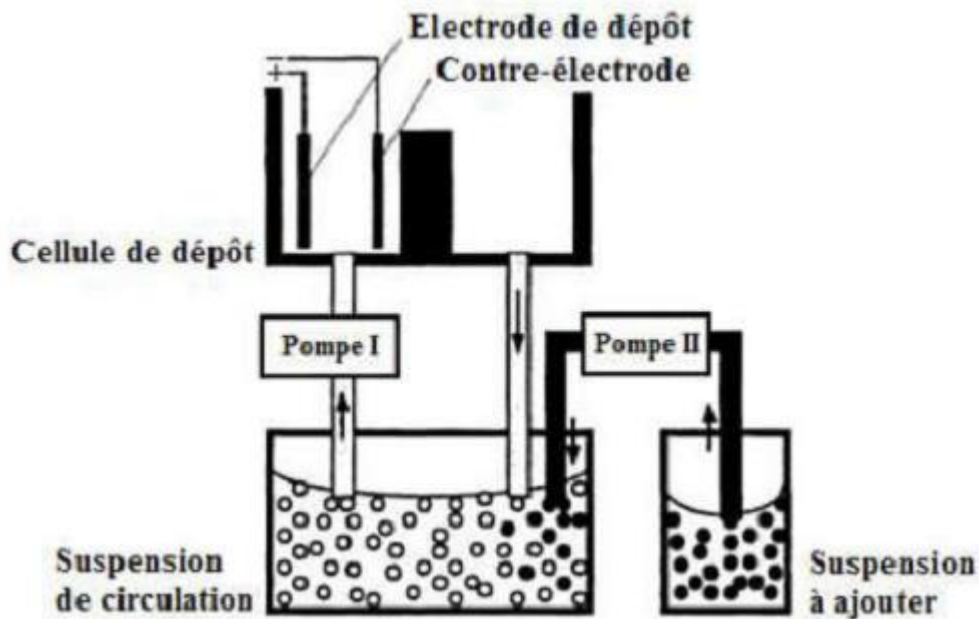


Figure II.18 Installation d'EPD pour la production des matériaux [Sarkar, 1996]

### II.7.9 Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGMs permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions eu via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Chigasaki, 1990].

### II.7.10 Dépôt par Centrifugation

La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques, qui consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches [Lucc, 1995].

### II.7.11 Technologies de fabrication additive

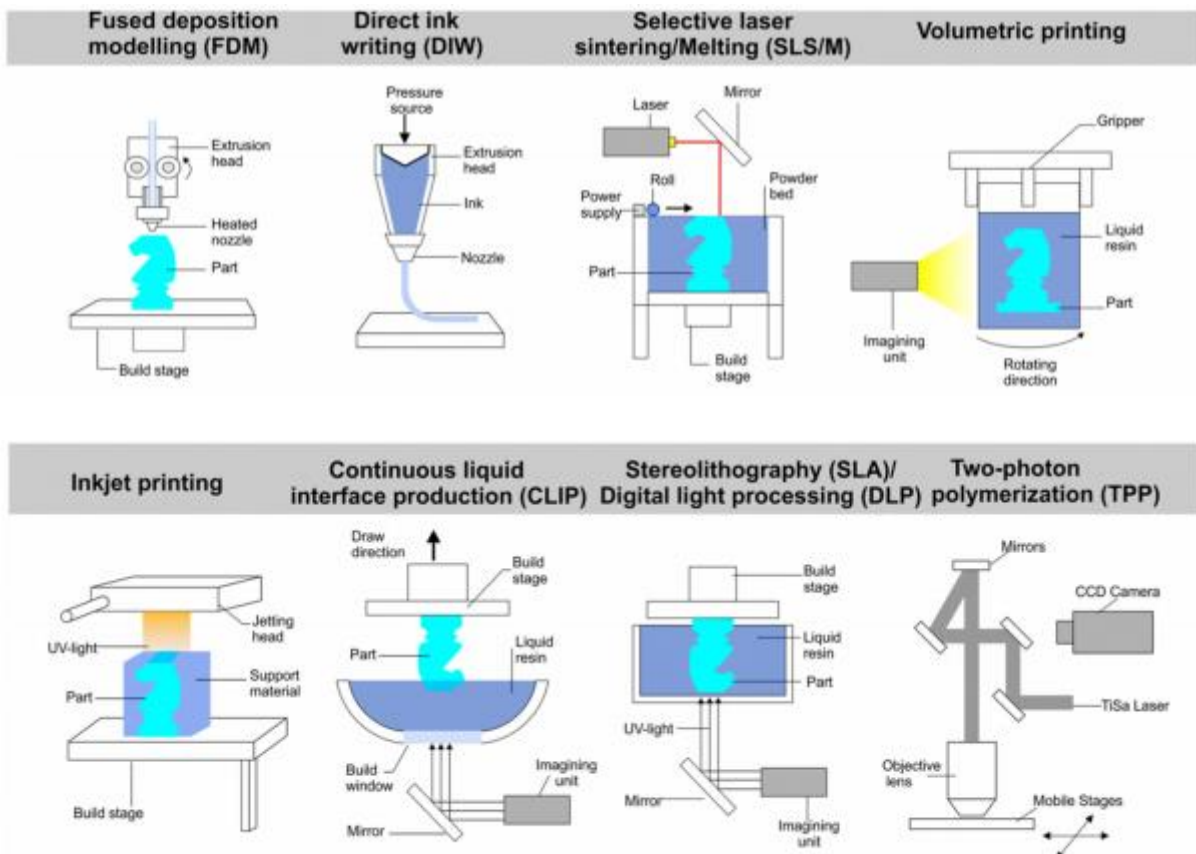
Les technologies de fabrication additive, également connues sous le nom de méthodes d'impression 3D, font partie des procédures de fabrication FGM les plus récentes [Zhang B. et al., 2016], certaines d'entre elles sont illustrées dans la Figure II.18. Elles ont le potentiel pour fabriquer des pièces poreuses très complexes avec une haute résolution. Ce sont des méthodes simples et directes qui ne nécessitent aucune étape de matrice, d'outillage, d'assemblage, de frittage ou d'assemblage. Cette technologie présente de nombreux avantages et constitue une



## Chapitre II GENERALITE SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES FGM

procédure unique pour produire différentes pièces structurales et industrielles. En particulier, il a un grand impact sur le domaine biomédical. Certains de ses avantages que l'on peut citer sont :

- sa nature économique,
- sa capacité à produire en masse,
- son potentiel de production de pièces très complexes,
- sa répétabilité,
- ses délais de mise sur le marché plus courts,
- sa capacité à utiliser divers matériaux (organiques ou inorganiques), etc. [Attaran, 2017].



**Figure II.19** Représentation schématique de quelques méthodes de fabrication additive.

L'un des avantages importants de la technologie d'impression 3D est la possibilité d'utiliser une technique de conception assistée par ordinateur (CAO) qui permet de fabriquer des implants entièrement spécifiques au patient [Jardini et al., 2014] ; [Mobbs et al., 2017]. Pendant le traitement, le modèle CAO 3D est d'abord converti en fichiers numériques imprimables (tels que les fichiers STL), puis les données traitées sont regroupées en fines

tranches 2D à l'aide d'un logiciel de découpage. Par la suite, les tranches développées sont acheminées vers l'imprimante 3D pour construire les pièces finales couche par couche [Zhang L. et al., 2016]. Il existe de nombreuses méthodes, chacune ayant ses avantages et ses limites. Les méthodes les plus importantes dans la fabrication de structures métalliques FGM sont les méthodes de fusion laser sélective (SLM) et de fusion par faisceau d'électrons (EBM), et plus d'informations sur ces méthodes peuvent être trouvées dans [Bikas et al., 2016] ; [Awad et al., 2018] ; [Ngo et al., 2018]. Les techniques de fabrication ont un impact considérable sur le domaine biomédical.

### **II.8 Conclusion**

Les matériaux FGM sont des excellents matériaux de pointe qui ont révolutionné le monde de l'industrie, ils ont été développés en combinant des matériaux d'ingénierie avancée. Le changement continu des propriétés des FGM a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter une structure du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles et améliorer des propriétés spécifiques dans la direction préférée, les rendant ainsi meilleurs que les matériaux composites classiques (élimination des interfaces).

Dans ce chapitre, on a présenté un aperçu sur ce type de matériau, l'historique de leur origine, les différents procédés de mise en œuvre, les domaines d'application, leurs avantages et inconvénients, l'amélioration des méthodes d'élaboration peuvent conduire à abaissé les coûts de fabrication.

### I.9 Reference :

- Niino, M.,** Hirai, T. & Watanabe, R., (1987). “The functionally gradient materials”. J. Jpn. Soc. Composite Materials, Volume 13, pp. 257–264.
- Koizumi, M.,** (1997). “Fgm activities in japan”. Composites Part B : Engineering, 28(1-2) :1.
- Yin, H.** and Sun, L. and Paulino, G., (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, Acta Materiala , vol.52,p.3535-3543.
- Yamanouchi, M.,** Koizumi, M., Hirai, T., Shiota, I., (1990). "In Proceedings of first international symposium on functionally gradient materials", Sendai, Japan,.
- Koizumi, M.,** (1993). “The concept of FGM”, Ceram Trans, Funct Gradient Mater, 34, 3–10.
- SAID A.,** (2016). «Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil », THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES, Spécialité : Génie Civil, Option : Structures et matériaux, UNIVERSITE DJILLALI LIABES, SIDI BEL ABBES.
- Marin L.,** (2005 ). “Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials,” Int J Solids Struct, vol. 42, pp. 4338-4351.
- Haghshenas, M.** (2017). “Mechanical characteristics of biodegradable magnesium matrix composites”: a review. J. Magnes. Alloy 5, 189–201. doi: 10.1016/j.jma.2017.05.001
- Liu, Z.,** Meyers, M. A., Zhang, Z., and Ritchie, R. O. (2017). “Functional gradients and heterogeneities in biological materials: design principles, functions, bioinspired applications”. Prog. Mater. Sci. 88, 467–498. doi: 10.1016/j.pmatsci.2017.04.013
- Bahraminasab, M.,** and Edwards, K. L. (2019). “Computational tailoring of orthopaedic biomaterials: design principles and aiding tools,” in BT -Biomaterials in Orthopaedics and Bone Regeneration: Design and Synthesis, eds P.S. Bains, S. S. Sidhu, M. Bahraminasab, and C. Prakash (Singapore: Springer), 15–31.
- Bai, L.,** Gong, C., Chen, X., Sun, Y., Zhang, J., Cai, L., et al. (2019). “Additive manufacturing of customized metallic orthopedic implants: materials, structures, surface modifications”. Metals 9:1004. doi: 10.3390/met9091004.
- Wegst, U. G. K.,** Bai, H., Saiz, E., Tomsia, A. P., and Ritchie, R. O. (2015). Bioinspired structural materials. Nat. Mater. 14, 23–36. doi: 10.1038/nmat4089.
- Chen, P.-Y.,** Schirer, J., Simpson, A., Nay, R., Lin, Y.-S., Yang, W., et al. (2012). “Predation versus protection: fish teeth and scales evaluated by nanoindentation”. J. Mater. Res. 27, 100–112. doi: 10.1557/jmr.2011.332
- Suresh, S.** (2001). “Graded materials for resistance to contact deformation and damage”. Science 292, 2447–2451. doi: 10.1126/science.1059716.
- Bao, G.,** and Wang, L. (1995). “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”. Int. J. Solids Struct. 32, 2853–2871. doi: 10.1016/0020-7683(94)00267-Z

- Islam, M.**, Thakur, M. S. H., Mojumder, S., Al Amin, A., and Islam, M. M. (2020). "Mechanical and vibrational characteristics of functionally graded Cu–Ni nanowire: a molecular dynamics study". *Compos. B Eng.* 198:108212. doi: 10.1016/j.compositesb.2020.108212
- Sedighi, M.**, Omidi, N., and Jabbari, A. (2017). "Experimental investigation of FGM dental implant properties made from Ti/HA composite". *Mech. Adv. Compos. Struct.* 4, 233–237. doi: 10.22075/mac.2017.1819.1096
- Lima, D. D.**, Mantri, S. A., Mikler, C. V., Contieri, R., Yannetta, C. J., Campo, K. N., et al. (2017). "Laser additive processing of a functionally graded internal fracture fixation plate". *Mater. Des.* 130, 8–15. doi: 10.1016/j.matdes.2017.05.034
- Han, C.**, Li, Y., Wang, Q., Wen, S., Wei, Q., Yan, C., et al. (2018). "Continuous functionally graded porous titanium scaffolds manufactured by selective laser melting for bone implants". *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* 80, 119–127. doi: 10.1016/j.jmbbm.2018.01.013
- Sadollah, A. e. a.**, 2013. "Optimum Material Gradient for Functionally Graded Dental Implant Using Particle Swarm Optimization". *Advanced Materials Research*, Volume 647, pp. 30-36.
- Lu, L.**, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin and G. Villain, (2011). "Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer, *NDT & E International*, Volume 44, Issue 2, Pages 169-177, March.
- Bishop. A.**, C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, (1993 ). "A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process", *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516 -18.
- Qian X.**, (2003), "Design of heterogeneous turbine blade Computer aided design", 35, 319-329.
- EL-Wazery, M. S.**, A. R. EL-Desouky, "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials *Mater. Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376. ISSN: 2028-2508, 2015.
- BRAIRI S.**, (2019). "Analyse De La Dégradation Des Structures Fgm Renforcées Par Frp Précontraints", Thèse de Doctorat LMD en Génie mécanique, Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen.
- Birman V.**, (2014). "Functionally graded material and structures", *Encyclopedia Thermo stresses*,
- Bharti, I.**, Gupta, N., Gupta, K.M. (2013). "Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermo-electric materials". *Int. J. Mater. Mech. Manuf.* 1, 221–224.
- Mahamood, R.M.**, Akinlabi, E.T. (2015). "Laser-metal deposition of functionally graded Ti6Al4V/TiC". *Mater. Des.* 84, 402–410.
- Schneider, M.J.**, (2013). "The Timken Company, and Madhu S. Chatterjee, bodycote introduction to surface hardening of steels". In : Dossett, J., Totten, G.E. *ASM Handbook, Steel Heat-Treating Fundamentals and Processes*, vol. 4.
- Narottam P & Al** (2011). "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley et Sons ;page 110.

- Jones, R.M.**, (1999). “Mechanics of Composite Materials”, Second Edition, Taylor & Francis.
- Boch, P.**, (1986). “Chartier . Huttepain. M Tapa casting of  $AL_2O_3/ZrO_2$  laminated composites”.
- Yoshihisa Uchida**, (2004). “Proprieties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications”, 39-51-B, Vol. 39-B.
- Shyang-ho. Chi**, (2003). “Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”. *Engineering Fracture Mechanics* ; 70 (10), 1227–1243.
- Houari MSA**, (2011). « Analyse des contraintes thermoélastique : lois des puissances ». Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Chen, L.**, Lengauer, W., Ettmayer, P., Dreyer, K., Daub, H. W., and Kassel, D. (2000). “Fundamentals of liquid phase sintering for modern cermets and functionally graded cemented carbonitrides (FGCC)”. *Int. J. Refract. Met. Hard Mater.* 18, 307–322. doi: 10.1016/S0263-4368(00)00041-X
- Tripathy, A.**, Sarangi, S. K., and Chaubey, A. K. (2018). “A review of solid state processes in manufacture of functionally graded materials”. *Int. J. Eng. Technol.* 7, 1–5. doi: 10.14419/ijet.v7i4.39.23686.
- Hongyuan Shi**, Peng Zhou, Jie Li, Chaozong Liu and Liqiang Wang (2021), “Functional Gradient Metallic Biomaterials: Techniques, Current Scenery, and Future Prospects in the Biomedical Field, *Front. Bioeng. Biotechnol*”. 8:616845. doi: 10.3389/fbioe.2020.616845.
- Moya, J.S.**, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, (2002), “Functionally gradient ceramics by sequential slip casting”, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- Lostec, L.** (1997). « Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L », Thèse de l’université de Limoges.
- Zhang, D.G.**, Zhou, Y.H., (2008). "A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface", *Comput.Mater.Sci.* 44,716-720.
- Xiong H.**, Kawasaki A., Kang Y., Watanabe R, 2005. “Synthesis and characterization of in - situ reinforced Fe-TiC steel FGMs, *Surf & Coat*”. *Technol.* 194 203.
- Steffens H.D.**, M. Dvorak., M. Wewel,(1990), “Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials”-FGM’90-Sendai-Japan; 139-43, 1990
- Kawai C.**, Wakamatsu S., Sakagami S., Igarashi T., (1990). “Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced composite by CVD”, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan*, 77–82.
- Mishra, A.**, Bhatt, N., and Bajpai, A. K. (2019). “Nanostructured superhydrophobic coatings for solar panel applications”. *Nanomater. Based Coat.* 397–424. doi: 10.1016/B978-0-12-815884-5.00012-0
- Takahashi M.**, Y. Itoh., H. Kashiwaya (1990), “Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM’90-Sendai-Japan*; 129-34.

**Yuki, M.**, Murayama, T., Irisawa, T., Kawasaki, A. & Watanabe, R., (1990), “In Proc., 1st Int. Sump. On FGM », Sendai, ed. M. Yamanouchi, M. Koizumi, T. Hirai & I. Shiota. FGM Forum. Society for Non-traditional Technology, Tokyo, , p. 203

**Sarkar, P.**, Nicholson, P. S. (1996), “Electrophoretic Deposition (EPD): Mechanisms, Kinetics, and Application to Ceramics”, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 79, N°. 8, p. 1987-2002.

**Chigasaki, M.**, Kojima, Y., Nakashima, S. & Fukaya, Y., (1990), “Partially Stabilized ZrO<sub>2</sub> and Cu FGM Prepared by Dynamic Ion Mixing Process”, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, p. 269-72.

**Lucchini, E.** & Sbaizero, O. (1995)., “Alumina/Zirconia Multilayer Composites Obtained by Centrifugical Consolidation”, *J. European Ceram. Soc.*, Vol. 15, p. 975-81.

**Zhang, L.**, Dong, H., and El Saddik, A. (2016). “From 3D sensing to printing. *ACM Trans*”. *Multimed. Comput. Commun. Appl.* 12, 1–23. doi: 10.1145/2818710

**Attaran, M.** (2017). “The rise of 3-D printing: the advantages of additive manufacturing over traditional manufacturing”. *Bus. Horiz.* 60, 677–688. doi: 10.1016/j.bushor.2017.05.011

**Jardini, A. L.**, Larosa, M. A., Filho, R. M., de Zavaglia, C. A., Bernardes, L. F., Lambert, C. S., et al. (2014). “Cranial reconstruction: 3D biomodel and custombuilt implant created using additive manufacturing”. *J. Cranio Maxillofacial Surg.* 42, 1877–1884. doi: 10.1016/j.jcms.2014.07.006.

**Mobbs, R. J.**, Coughlan, M., Thompson, R., Sutterlin, C. E., and Phan, K. (2017). The utility of 3D printing for surgical planning and patient-specific implant design for complex spinal pathologies: case report. *J. Neurosurg. Spine.* 26, 513–518. doi: 10.3171/2016.9.SPINE16371.

**Bikas, H.**, Stavropoulos, P., and Chryssolouris, G. (2016). “Additive manufacturing methods and modelling approaches: a critical review”. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 83, 389–405. doi: 10.1007/s00170-015-7576-2

**Awad, R. H.**, Habash, S. A., and Hansen, C. J. (2018). “3D printing methods,” in *3D Printing Applications in Cardiovascular Medicine*, eds J. Min, B. Mosadegh, S. Dunham, and S. Al’Aref (London: Elsevier), 11–32.

**Ngô, T. D.**, Kashani, A., Imbalzano, G., Nguyen, K. T. Q., and Hui, D. (2018). “Additive manufacturing (3D printing): a review of materials, methods, applications and challenges”. *Compos. B Eng.* 143, 172–196. doi: 10.1016/j.compositesb.2018.02.012.

---

***CHAPITRE III : PROPRIETES  
MATERIELLES ET  
THEORIES DES PLAQUES  
FGM***

---

# Chapitre III : Propriétés matérielles et théories des plaques FGM

---

## III.1 Introduction

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques, conçus pour éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et qui diffèrent des matériaux à base de composite. Les caractéristiques de la céramique sont: Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion, Haute température de fusion ou de décomposition ; Haut module d'élasticité et haute dureté ; Charge à la rupture élevée ; Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ; Conservation des propriétés à haute température ; Faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ; Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température). Il est à noter que les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont : Bonne résistance mécanique ; Conductivité thermique élevée, Très bonne ténacité (Belarouci A., 2021).

## III.2 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface plane (plan  $x, y$ ) et par une petite épaisseur notée ( $h$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur, largeur), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou bien non homogène. Les plaques peuvent être classées en deux catégories :

### III.2.1 Plaques isotropes

Ce type de plaque est constitué d'un matériau isotrope (acier, aluminium, cuivre, ...) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité (Young) et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions mécaniques classiques.

### III.2.2 Plaques anisotropes

Leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les définir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et utilisées dans l'industrie aéronavale.



### III.3 Lois régissant de la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :

$$E = E(z), \nu = \nu(z) \quad (\text{III.1})$$

Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (SFGM).

#### III.3.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

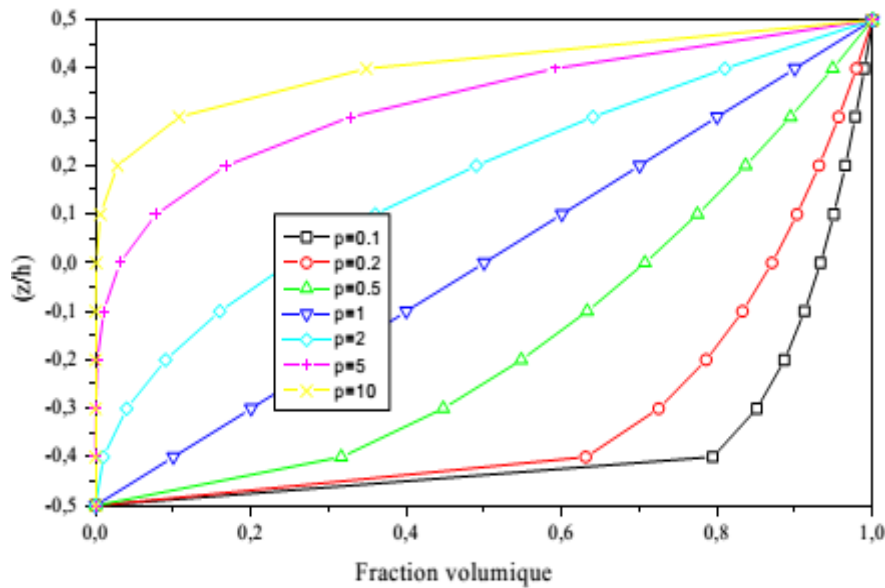
$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{III.2})$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{III.3})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z=-h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z=h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la Figure III.1, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .



**Figure III.1** : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

### III.3.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas de l'ajout d'une plaque P-FGM avec une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Lee YD., 1995) ; (Bao G., 1995). Par conséquent, Chung et chi (Chung YL., 2001) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (III.4)$$

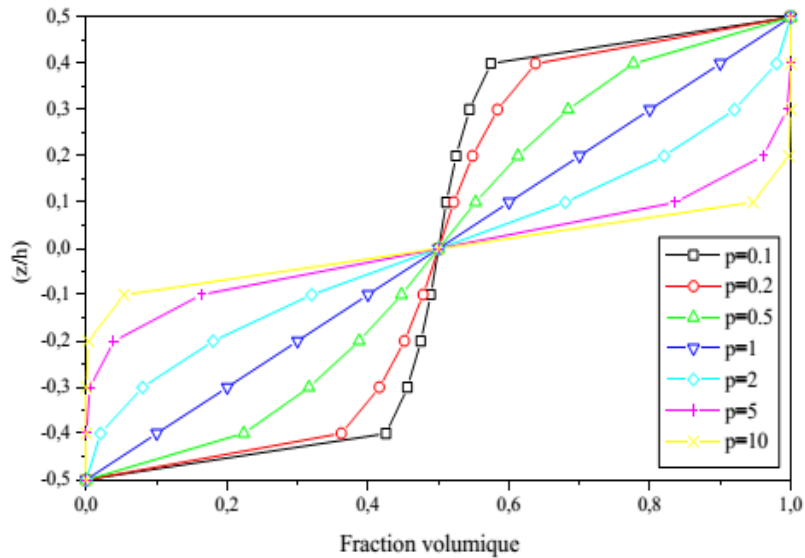
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (III.5)$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

La Figure III.2 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (III.5) représente les distributions sigmoïdes, cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).



**Figure III.2 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### III.3.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

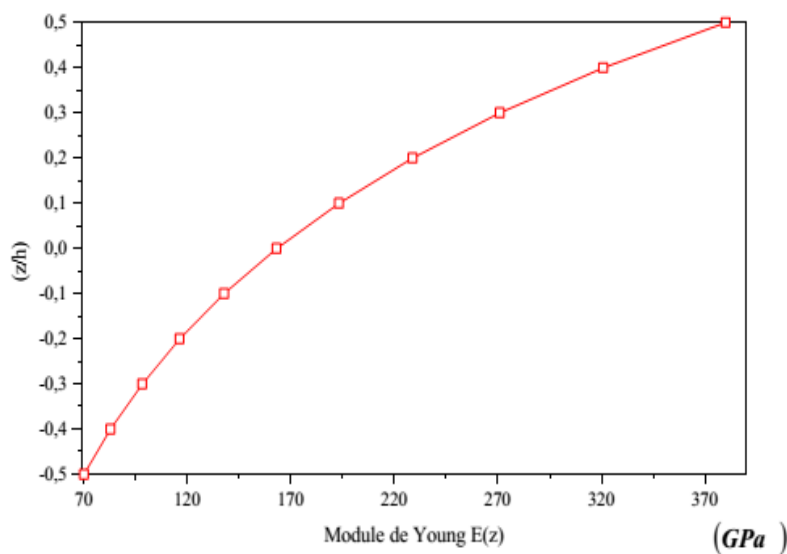
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale F., 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \tag{III.6}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \tag{III.7}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure III.3.



**Figure III.3 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM. (Said A. 2016)

## III.4 Modèles analytiques des plaques FGM

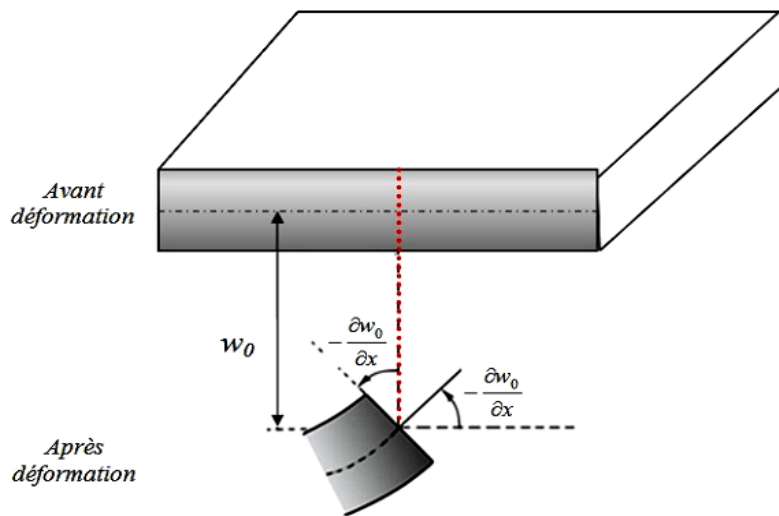
### III.4.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Cette théorie est basé sur les hypothèses de Kirchhoff, dans lesquelles les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées et la normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure III.4) ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Donc dans ce cas, la distribution des déplacements suivant l'épaisseur est linéaire (Khilouni M., 2020).

Plusieurs articles ont été publiées en utilisant cette théorie, en se basant sur les hypothèses citées ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \tag{III.8}$$

Où  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$  sont les déplacements à la surface médiane ( $z = 0$ ).



. **Figure III.4** : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'équation (III.8) est obtenu comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.9}$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Puisque la théorie classique des plaques (CPT) est limitée et donne des résultats non précis pour les plaques semi-épaisses et épaisses, Reissner et Mindlin (Reddy, 1997) ont proposé la théorie classique des plaques minces (CPT) en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

### III.4.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans cette théorie le cisaillement transverse est inclus. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur de la plaque (Figure III.5), ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement « $ks$ ».

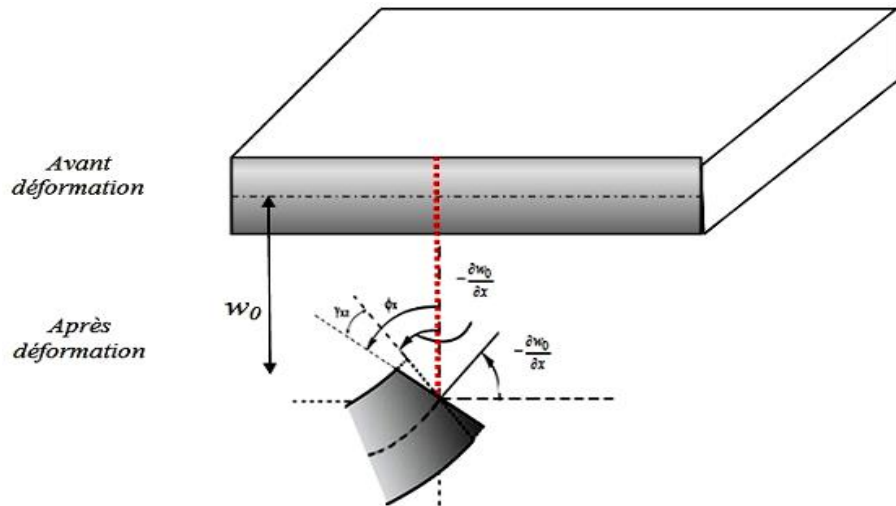
La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression III.11 permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement.

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{III.12})$$

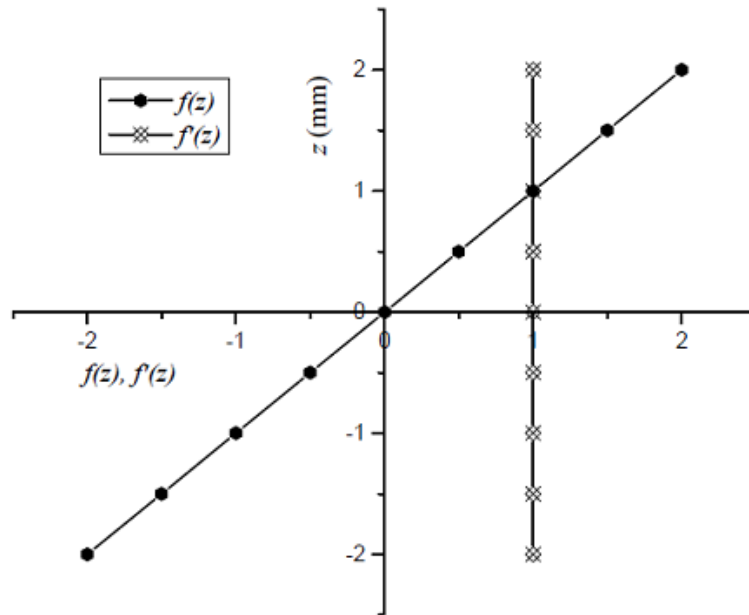


**Figure III.5:** Illustration de la plaque de Reissner –Mindlin (Reddy, 1997).

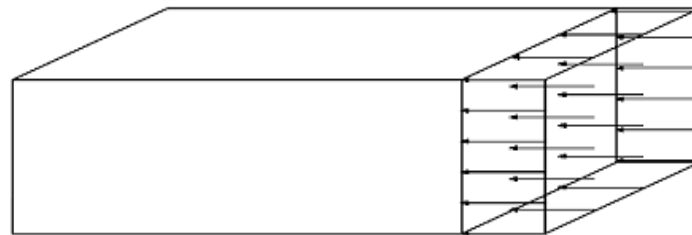
Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'équation (III.13) est obtenu comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \text{ avec } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Les contraintes de cisaillement et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur (voir Figures III.6 et III.7).



**Figure III.6 :** Variation de la fonction de gauchissement  $f(z) = z$  et  $f'(z)$  suivant l'épaisseur.



**Figure III.7 :** la distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT.

Pour éviter l'introduction à chaque fois le facteur de correction, qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur.

### III.4.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et de la théorie FSDT avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés ont été introduites (Boukhari A., 2016).

## Chapitre III : Propriétés matérielles et théories des plaques FGM

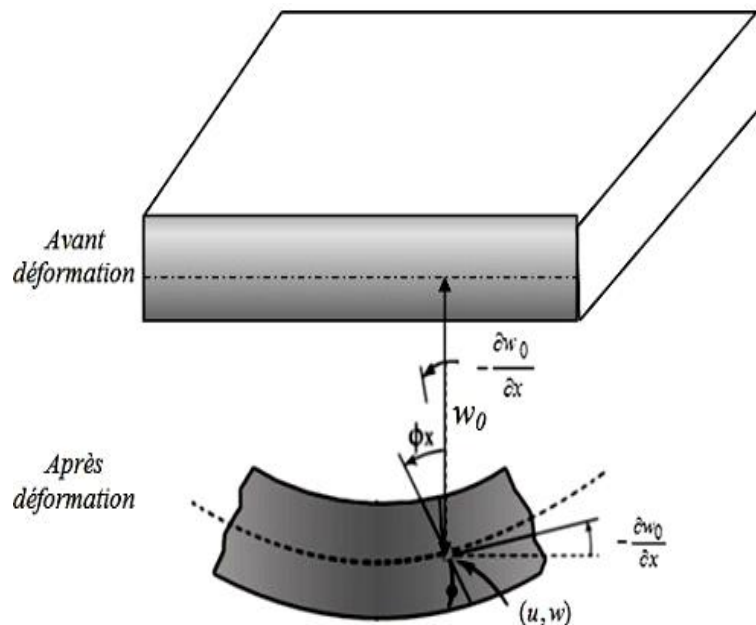
Le champ de déplacement de cette théorie (HSDT) est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.14}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement.

$$\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y
 \tag{III.15}$$

$f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (**CPT**) sont obtenus en prenant  $f(z)=0$ , alors que la théorie de premier ordre (**FSDT**) peut être obtenue par  $f(z)=z$ .



**Figure III.8** Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé de l'équation est obtenu comme suit :



$$\text{Ou } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.18})$$

Des contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de formes  $f(z)$  sont donnés dans la littérature. Six modèles de fonction de gauchissement qui assurent la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces libres de la plaque seront présentés (Khilouni M., 2020).

#### a) Modèle de Reddy

$$f(z) = Z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} Z^2 \right) \quad (\text{III.19})$$

Dans ces modèles de Reddy (Reddy, 1997,1999), le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Ce qui donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle (Elasticité 3D).

#### b) Modèle est de Touratier

Une fonction trigonométrique sinusoïdale est introduite dans un modèle sinusoïdale (SSDT) pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, ce modèle (SSDT) est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale (Touratier, 1991). La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi \cdot Z}{h} \quad (\text{III.20})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (SSDT) prennent une forme co-sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

### c) Modèle exponentielle

Ce modèle a été développé par Karama et al. (Karama ,2003) (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) est obtenu en prenant :

$$f(z) = Z \cdot e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.21})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction (sinus) de Touratier ne permet qu'un développement en puissance impair.

### d) Modèle de version hyperbolique

Développé par Ait Atmane et al. (Ait Atmane H., 2010) (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) est obtenu en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} \cdot Z - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{h} \cdot Z\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} \quad (\text{III.22})$$

### e) Modèle de Aydogdu

Développé par Aydogdu Aydogdu (2005) , il est obtenu en prenant:

$$f(z) = Z \cdot \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} , \alpha > 0 \quad (\text{III.23})$$

### f) Modèle d'ElMeiche

ElMeiche et al. (ElMeiche, 2011) ont développé un modèle en sin et cosh :

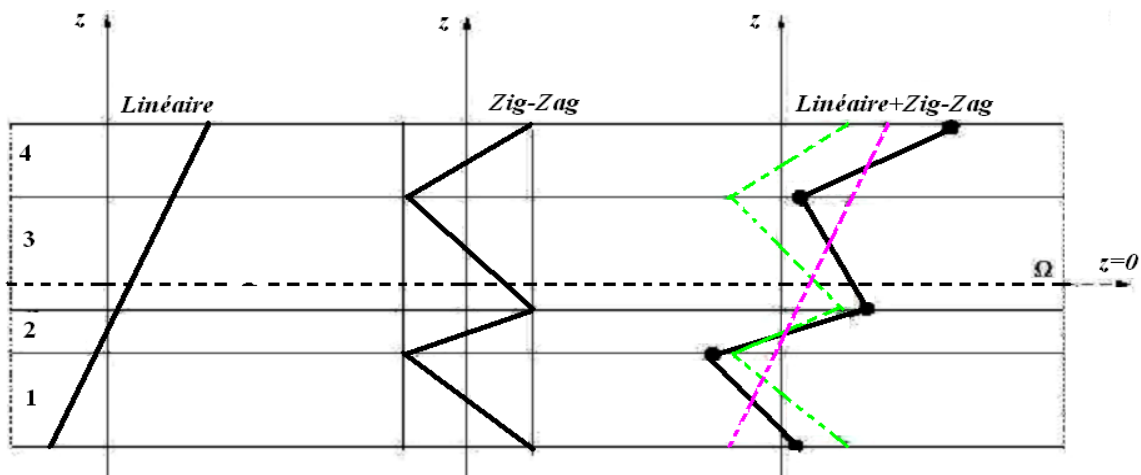
$$f(z) = \frac{\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \quad (\text{III.24})$$

#### III.4.4 Théorie de zig-zag

Dans le but de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre (Di Sciuva, 1987). Dans ce modèle, les

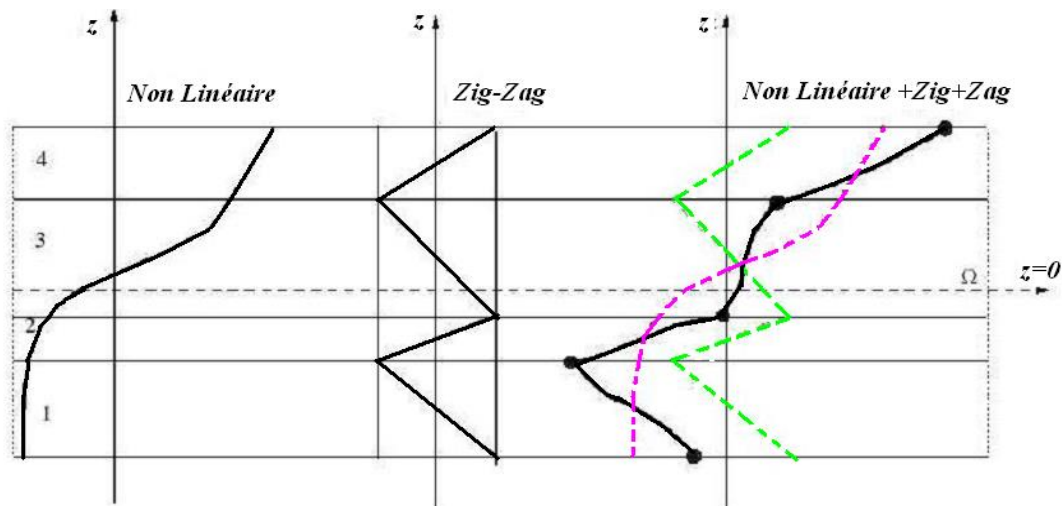
## Chapitre III : Propriétés matérielles et théories des plaques FGM

déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (Figure III.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



*Figure III.9* Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen 2004).

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Nguyen, 2004). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur souvent cubique (Figure III.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figure III.10** : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Nguyen. 2004)

Les résultats numériques de tous les travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage (Said A., 2016).

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté un bref aperçu sur les différentes théories des plaques telles que la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé (HSDT) et aussi la théorie de Zig-Zag. Ainsi, ces théories conviennent pour décrire le comportement de plaques minces et /ou moyennement épaisses. Étant donné que les plaques à gradation fonctionnelle (FG) peuvent avoir une épaisseur importante, les théories bidimensionnelles peuvent s'avérer inadéquates.

A travers cet aperçu de la littérature, on notera que les théories d'ordre élevé sont plus précises, mais sont assez complexes en termes de formulations et coûteuses en temps de calcul.

### III.6 References

- Ait Atmane H**, Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia E A. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*; 6(2):113–121.
- Aydogdu M.**, (2003), « Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour les plaques composites stratifiées ». *Composite Structures*, 94–101.
- Bao G.**, Wang L., (1995), “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”, *International Journal of Solids and Structure* 32, 2853–2871
- Belarouci A.**, (2021), “Etude comparative du comportement des plaques épaisses p-fgm et s-fgm”, Thèse de Doctorat En Sciences, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbès.
- Bouazza M.**; Tounsi A.; Adda-Bedia E.A.; Megueni A., (2010), “Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach”. *Comput. Mater. Sci*, 49, 865–870, doi:10.1016/j.commatsci.2010.06.038.
- Boukhari A.**, (2016), “Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement pour l’étude du comportement mécanique des plaques épaisses”, These de Doctorat en Sciences, Spécialité : Génie Civil, Option : Structures et matériaux, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbès.
- Chung Y.L.**, Chi S.H., (2001), “The residual stress of functionally graded materials”. *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering* 13, 1–9.
- Delale F.**, Erdogan F., (1983). “The crack problem for a nonhomogeneous plane”. *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609–614.
- El Meiche, N.**, Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia : Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle. *International Journal of Mechanical Sciences*, 237–247, (2011).
- Karama M.**, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003), « Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiées avec cisaillement transversal de stress continuité ». *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.

## Chapitre III : Propriétés matérielles et théories des plaques FGM

---

**Khilouni M.**, (2020). “ Investigation sur la réponse mécanique des structures en matériaux à gradient de propriété”, Thèse de Doctorat en Sciences, Spécialité : Génie Civil, Option : Structures et matériaux, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbès.

**Lee Y.D.**, Erdogan F., (1995), “Residual/thermal stress in FGM and laminated thermal barrier coatings”. *International Journal of Fracture* 69, 145–165.

**Reddy J.N.**, (1997), “Mechanics of Laminated Composites Plates”: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton.

**Reddy J.N.**, (1999), “Theory and Analysis of Elastic plates”. Taylor & Francis, Philadelphia.

**Said A.**, (2016). « Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil », thèse de Doctorat en Sciences, Spécialité : Génie Civil, Option : Structures et matériaux, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbès.

**Touratier M.**, (1991), “An efficient standard plate theory”. *Int J Eng Sci*; 29(8):901 -916.

Wu L., (2004), “Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate”. *Compos. Struct.* 2004, 64, 211–218, doi:10.1016/j.compstruct.2003.08.004.

---

***CHAPITRE IV :***  
***FLAMBEMENT DES***  
***PLAQUES COMPOSITES FGM***  
***REPOSANT SUR FONDATION***  
***ELASTIQUE TYPE WINKLER-***  
***PASTERNAK***

---

# Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

## IV.1 Introduction

Au cours des deux dernières décennies, de nombreux rapports de recherche ont été publiés sur les contraintes thermiques, la rupture, la réponse thermomécanique, le flambement, les vibrations libres, etc. des éléments structuraux en FGM (Ravikiran K. et al., 2008). En raison de l'importance et des vastes applications techniques des FGM, les analyses statiques, vibratoires, thermomécaniques et de flambage des structures de FGM ont été abordées par de nombreux chercheurs. Bouhadra et al. (Bouhadra A. et al., 2015) ont étudié la réponse au flambement thermique de plaques fonctionnellement graduées soumises à des élévations de température uniformes, linéaires et non linéaires dans le sens de l'épaisseur.

Reddy (Reddy J.N., 1997) qui a développé la théorie de déformation de cisaillement de plaque du troisième ordre (TSDT), puis Touratier (Touratier M., 1991) qui a élaboré une théorie de plaque de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT), la théorie de plaque de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) (Karama M. et al., 2003). Sankar et Tzeng (Sankar B.V. et al., 2002) ont obtenu une solution d'élasticité pour les poutres FGM avec variation exponentielle des propriétés soumises à des charges transversales. Kapania et Raciti (Kapania R.K. et al., 1989) fournissent un examen détaillé des théories de déformation par cisaillement utilisées pour l'analyse statique, vibratoire et de flambement des poutres et des plaques. En utilisant une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables, Bourada et al. (Bourada et al., 2012) ont étudié la réponse au flambement thermique des plaques sandwich FGM. Une théorie raffinée des plaques déformables par cisaillement trigonométrique pour la flexion thermoélastique de plaques sandwich FGM a été présentée par Tounsi et al. (Tounsi et al., 2013). Une étude le flambement thermique des plaques FG basée sur une théorie raffinée des plaques a été réalisée par Bachir Bouiadjra et al. (Bachir Bouiadjra et al., 2012). L'analyse du comportement thermique non linéaire au flambement des plaques FGM à l'aide d'une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale a été faite par Bachir Bouiadjra et al. (Bachir Bouiadjra et al., 2013). Sobhy (Sobhy et al., 2013) a étudié le comportement en vibration et en flambement de plaque sandwich en matériau gradué (EGM) reposant sur des fondations élastiques sous diverses conditions aux limites. Ait Amar Meziane et al. (Ait Amar Meziane et al., 2014) ont développé une méthode efficace et simple théorie raffinée de la déformation par cisaillement pour les analyses de déformation et de vibration de l'EGM plaques sandwich soutenues par des fondations élastiques en considérant différents types de conditions aux limites.

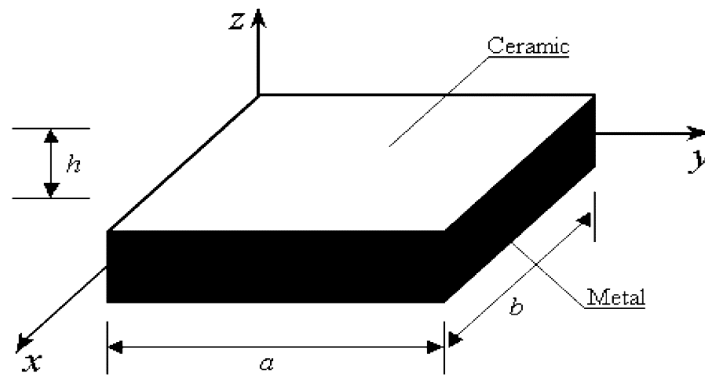


# Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

## IV.2 Formulation

### IV.2.1 Géométrie et matériau

Considérant une plaque en FGM d'épaisseur  $h$ , de longueur  $a$  et de largeur  $b$ , mentionné par rapport aux coordonnées cartésiennes rectangulaires  $(x, y, z)$ . Le plan  $x - y$  est pris pour être le mi-plan de la non-déformé du plan de la plaque et l'axe  $z$  est perpendiculaire au plan  $x - y$  (Figure IV.1).



**Figure IV.1** Géométrie de la plaque FGM

Les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FGM, en fonction de la coordonnée d'épaisseur sont données par les expressions IV.1 :

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + (E_c - E_m) V_c / \left(1 + (1 - V_c) \left(\frac{E_c}{E_m} - 1\right) (1 + \nu) / (3 - 3\nu)\right) \\ \alpha(z) &= \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m) V_c / \left(1 + (1 - V_c) \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_m} - 1\right) (1 + \nu) / (3 - 3\nu)\right) \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont les propriétés correspondantes du métal et de la céramique, respectivement, et  $k$  est le paramètre matériel. Les fractions volumiques du constituant céramique  $V_c$  et du constituant métallique  $V_m$  peuvent être écrites sous la forme (Kiani Y. et al., 2011) :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \quad V_m = 1 - V_c \quad (\text{IV.2})$$

### IV.2.2 Cinématiques et équations constitutives

#### IV.2.2.1 Champ de déplacements

Les déplacements d'un point de matériau situé en  $(x, y, z)$  dans la plaque peuvent s'écrire comme suit (Zenkour AM., 2004):

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0 - z(\partial w_0 / \partial x) + \Psi(z)\varphi_1 \\
 v(x, y, z) &= v_0 - z(\partial w_0 / \partial y) + \Psi(z)\varphi_2 \\
 w(x, y, z) &= w_0
 \end{aligned}
 \tag{IV.3}$$

Où  $u$  ;  $v$  ;  $w$ ,  $\varphi_1$ , et  $\varphi_2$  sont les cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque,  $\Psi(z)$  représente la fonction de gauchissement définissant la variation des déformations transversales de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur. Dans ce travail, la fonction de gauchissement est définie par :

La théorie de plaque de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDPT) est obtenue à partir de l'équation IV.4 (Zenkour AM., 2010) :

$$\Psi(z) = z \tag{IV.4}$$

La théorie de plaque de déformation du troisième ordre (HPT) de Reddy est obtenue à partir de l'équation IV.5 (Khayat et al., 1996) :

$$\Psi(z) = z\left(1 - \left(4z^2/3h^2\right)\right) \tag{IV.5}$$

La théorie sinusoidale de plaque de déformation de cisaillement (SSDPT) de Zenkour est obtenue par l'équation IV.6 (Zenkour AM., 2010) :

$$\Psi(z) = (h/\pi)\sin(\pi z/h) \tag{IV.6}$$

La théorie de plaque de déformation de cisaillement exponentielle (DEPT) de Karama et al (2003) est obtenue par (Karama M. et al., 2003):

$$f(z) = \left[ \ln(\pi \exp(1/20)) - (0.1407)^{5/4} \cosh(\pi z) \right] z \tag{IV.7}$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'équation (IV.3) est donné par :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \psi(z) \begin{Bmatrix} \eta_{xx} \\ \eta_{yy} \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \\
 \varepsilon_{xx} &= 0, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{IV.8}$$

# Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

## IV.2.2.2 Les équations constitutives

Les relations constitutives d'une plaque FGM en tenant compte des effets thermiques peuvent être exprimées par (Bodaghi M., 2001) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

Où :  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$  et  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidité  $C_{ij}$  de la plaque FGM sont exprimées par :

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = E(z)/(1 - \nu^2) \\ c_{12} &= \nu c_{11} \\ c_{44} &= c_{55} = c_{66} = E(z)/2(1 + \nu^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

## IV.2.2.3 Equations de stabilité

L'énergie potentielle de déformation du système est composée de l'énergie de déformation de la plaque et de l'énergie potentielle de la fondation élastique à deux paramètres, qui peut s'écrire (Kiani Y. et al., 2011) :

$$V = U + U_f \quad (\text{IV.11})$$

Ici,  $U$  est l'énergie de déformation totale de la plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[ \sigma_{xx}^{(n)} (\varepsilon_{xx} - \alpha^{(n)} T) + \sigma_{yy}^{(n)} (\varepsilon_{yy} - \alpha^{(n)} T) + \sigma_{xy}^{(n)} \gamma_{xy} + \sigma_{yz}^{(n)} \gamma_{yz} + \sigma_{xz}^{(n)} \gamma_{xz} \right] dV \quad (\text{IV.12})$$

Et  $U_F$  est l'énergie de déformation due à la fondation élastique Pasternak qui est donnée par (Aiello MA. Et al., 1999) :

$$U_F = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ K_w w_0^2 + K_g (w_{0,x}^2 + w_{0,y}^2) \right] d\Omega \quad (\text{IV.13})$$

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

Les équations de stabilité sont obtenues comme :

$$\begin{aligned}
 N_{x,x}^1 + N_{xy,y}^1 &= 0 \\
 N_{xy,x}^1 + N_{y,y}^1 &= 0 \\
 M_{x,xx}^1 + 2M_{xy,xy}^1 + M_{y,yy}^1 + N_x^0 w_{,xx}^1 + N_y^0 w_{,yy}^1 - Kw + Kg \nabla^2 w &= 0 \\
 S_{x,x}^1 + S_{xy,y}^1 + Q_{xz}^1 &= 0 \\
 S_{xy,x}^1 + S_{y,y}^1 + Q_{yz}^1 &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Où les exposants **1** et **0** fait référence à l'état de stabilité et à l'état des conditions d'équilibre respectivement. Les termes  $N_x^0$ ,  $N_y^0$  et  $N_{xy}^0$  sont les efforts de pré-flambement obtenues comme :

$$N_x^0 = N_y^0 = A_T / (1 - \nu); N_{xy}^0 = 0 \tag{IV.15}$$

### IV.2.2.4 Solution analytique

Les plaques FGM sont généralement classées en fonction du type d'appui utilisé. Pour la solution analytique de l'équation (IV.14), la méthode de Navier est utilisée dans les conditions aux limites spécifiées :

$$\begin{Bmatrix} u^1 \\ v^1 \\ w^1 \\ \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ Y_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \end{Bmatrix} \tag{IV.16}$$

Où  $U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{mn}^1, X_{mn}^1$  et  $Y_{mn}^1$  sont des paramètres arbitraires à déterminer  $\lambda$  et  $\mu$  sont définis comme suit :

$$\lambda = m\pi / a, \quad \mu = n\pi / b \tag{IV.17}$$

### IV.2.2.5 Variation de la température

#### a) La Variation uniforme

La variation de température est donnée par :

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

$$T(z) = T_f - T_i = \Delta T \quad (\text{IV.18})$$

### *b) La Variation linéaire*

La distribution de température linéaire suivant l'épaisseur de la plaque FGM est considérée :

$$T(z) = \Delta T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + T_m; \Delta T = T_c - T_m \quad (\text{IV.19})$$

### *c) La Variation linéaire*

La distribution de température linéaire suivant l'épaisseur de la plaque FGM est considérée :

$$T(z) = \Delta T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + T_m, \quad \Delta T = T_c - T_m \quad (\text{IV.20})$$

Où  $p$  est l'exposant de température.

## **IV.3 Résultats numériques et discussions**

La plaque FGM est considérée comme étant en aluminium et d'alumine avec les propriétés des matériaux suivants : Métal (aluminium) : Le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique sont  $E_m = 70 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_m = 23.10^{-6}/^\circ\text{C}$ . Céramique (alumine): Le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique sont  $E_c = 380 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_c = 7.4.10^{-6}/^\circ\text{C}$ . Pour la distribution linéaire et non linéaire de température à travers l'épaisseur  $T_t = 5^\circ\text{C}$ .

### **IV.3. 1 Variation de la température critique du flambement en fonction de l'indice de puissance k pour différentes valeurs pour différents valeurs du rapport de forme a/b et un rapport de géométrie a/h=100**

Dans cette partie, nous présentons la variation de la température critique  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation uniforme, linéaire et non linéaire de la température en fonction de l'indice de puissance  $k$  pour différentes valeurs du rapport de forme ( $a/b=1,2,3,4,5$ ) et un rapport de géométrie  $a/h=100$ . Ces résultats sont représentés respectivement dans les tableaux IV.1, IV.2 et IV.3 pour des variations uniformes, linéaires et non linéaires de la température. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par (Bouhadra et al. 2015), la théorie sinusoidale SPT, la théorie de premier ordre FPT et la théorie d'ordre élevée HPT (Zenkour et al., 2010). On note qu'il y a une bonne corrélation les valeurs obtenus par les deux modèles développés (Berkia et al., 2022) et les valeurs obtenus par (Bouhadra et al., 2015), la théorie sinusoidale des plaques SPT, théorie des plaque de premier ordre FPT et la théorie d'ordre élevée HPT (Zenkour et al., 2010) pour un indice de

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

puissance  $k=0$ , c'est-à-dire où la plaque est entièrement céramique. Par contre pour les autres valeurs de l'indice puissance  $k$ , on constate que des différences significatives entre les résultats obtenus et ceux des modèles de Bouhadra, Zenkour. Ces différences peuvent être attribuées à l'effet du modèle de distribution de la matière (modèle de Mori-Tanaka et loi de puissance).

**Tableau IV.1** La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  » et différentes valeurs de rapport «  $a/b$  », avec ( $a=100.h$ ).

k	Théories	a/b = 1	a/b = 2	a/b = 3	a/b = 4	a/b = 5
0	<b>Bouhadra et al.</b>	17.0894	42.6876	85.2553	144.6496	220.6721
	Zenkour et al. SPT	17.0894	42.6876	85.2554	144.6500	220.6729
	Zenkour et al. HPT	17.0894	42.6875	85.2551	144.6490	220.6706
	Zenkour et al. FPT	17.0894	42.6875	85.2551	144.6489	220.6704
	<b>Présent FSPT</b>	<b>17.0910</b>	<b>42.6975</b>	<b>85.2950</b>	<b>144.7640</b>	<b>220.9385</b>
	<b>Présent SPT</b>	<b>17.0894</b>	<b>42.6876</b>	<b>85.2554</b>	<b>144.6500</b>	<b>220.6729</b>
1	<b>Bouhadra et al.</b>	7.94000	19.8359	39.6248	67.2509	102.6362
	Zenkour et al. SPT	7.9400	19.8359	39.6249	67.2510	102.6365
	Zenkour et al. HPT	7.9400	19.8358	39.6248	67.2506	102.6356
	Zenkour et al. FPT	7.9400	19.8358	39.6248	67.2506	102.6355
	<b>Présent FSPT</b>	<b>9.8101</b>	<b>24.5095</b>	<b>48.9660</b>	<b>83.1173</b>	<b>126.8760</b>
	<b>Présent SPT</b>	9.8089	24.5019	48.9358	83.0285	126.6690
2	Zenkour et al. SPT	7.0390	17.5840	35.1233	59.6034	90.9501
	Zenkour et al. HPT	7.0390	17.5840	35.1234	59.6037	90.9508
	Zenkour et al. FPT	7.0392	17.5853	35.1285	59.6184	91.9850
	<b>Présent FSPT</b>	8.96692	22.4015	44.7500	75.9502	115.9150
	<b>Présent SPT</b>	8.96538	22.3920	44.7118	75.8402	115.6590
4	<b>Présent FSPT</b>	<b>8.4037</b>	<b>20.9929</b>	<b>41.9313</b>	<b>71.1532</b>	<b>108.5698</b>
	<b>Présent SPT</b>	<b>8.4020</b>	<b>20.9822</b>	<b>41.8883</b>	<b>71.0297</b>	<b>108.2825</b>

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

**Tableau IV.2** La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et différentes valeurs de rapport « a/b », avec (**a=100.h**).

k	Théories	a/b = 1	a/b = 2	a/b = 3	a/b = 4	a/b = 5
0	<b>Bouhadra et al.</b>	24.1789	75.3752	160.5107	279.2993	431.3442
	Zenkour et al. SPT	24.1789	75.3753	160.5109	279.3000	431.3459
	Zenkour et al. HPT	24.1789	75.3751	160.5102	279.2980	431.3412
	Zenkour et al. FPT	24.1789	75.3751	160.5102	279.2979	431.3409
	<b>Présent FSPT</b>	24.1821	75.3951	160.5901	279.5281	431.8770
	<b>Présent SPT</b>	24.1789	75.3753	160.5109	279.3000	431.3459
1	<b>Bouhadra et al.</b>	5.5138	27.8242	64.9378	116.7495	183.1134
	Zenkour et al. SPT	5.5138	27.8242	64.9379	116.7498	183.1140
	Zenkour et al. HPT	5.5138	27.8242	64.9376	116.7490	183.1123
	Zenkour et al. FPT	5.5138	27.8242	64.9376	116.7490	183.1122
	<b>Présent FSPT</b>	8.8541	35.91166	80.92984	143.7927	224.3392
	<b>Présent SPT</b>	8.8519	35.8975	80.8735	143.6306	223.9614
2	Zenkour et al. SPT	3.5893	22.1521	53.0271	96.1203	151.3011
	Zenkour et al. HPT	3.5893	22.1522	53.0273	96.1209	151.3023
	Zenkour et al. FPT	3.5897	22.1544	53.0363	96.1467	152.3624
	<b>Présent FSPT</b>	7.4300	32.5929	74.4522	132.8903	207.7431
	<b>Présent SPT</b>	7.4271	32.5750	74.3807	132.6844	207.2638
4	Présent FSPT	6.5141	30.6074	70.6791	126.6044	198.2105
	Présent SPT	6.5108	30.5869	70.5979	126.3681	197.6623

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

**Tableau IV.3** La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation non linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  », et différentes valeurs de rapport «  $a/b$  », ( $a=10.h$ ).  $T_{cr} = 10^{-3} \Delta t_{cr}$

k	Théorie	a/b=1		a/b=2		a/b=3	
		p=2	p=5	p=2	p=5	p=2	p=5
0	Zenkour et al. SPT	4.8414	9.6829	11.2294	22.4589	20.0164	40.0328
	Zenkour et al. HPT	4.8410	9.6821	11.2269	22.4538	20.0066	40.0133
	Zenkour et al. FPT	4.8408	9.6817	11.2246	22.4492	19.9919	39.9838
	<b>Présent FSPT</b>	<b>4.8844</b>	<b>9.7689</b>	<b>11.4609</b>	<b>22.9219</b>	<b>20.7533</b>	<b>41.5066</b>
	<b>Présent SPT</b>	<b>4.8414</b>	<b>9.6829</b>	<b>11.2294</b>	<b>22.4589</b>	<b>20.0164</b>	<b>40.0328</b>
1	Zenkour et al. SPT	2.1068	4.3182	4.9517	10.1496	8.9711	18.3880
	Zenkour et al. HPT	2.1066	4.3179	4.9508	10.1476	8.9673	18.3802
	Zenkour et al. FPT	2.1065	4.3178	4.9499	10.1458	8.9615	18.3684
	<b>Présent FSPT</b>	<b>2.4541</b>	<b>4.5190</b>	<b>5.7946</b>	<b>10.6702</b>	<b>10.5718</b>	<b>17.8041</b>
	<b>Présent SPT</b>	<b>2.4249</b>	<b>4.4652</b>	<b>5.6365</b>	<b>10.3791</b>	<b>10.0635</b>	<b>18.5310</b>
2	Zenkour et al. SPT	1.6765	3.2736	3.9243	7.6627	7.0655	13.7962
	Zenkour et al. HPT	1.6766	3.2738	3.9246	7.6633	7.0659	13.7970
	Zenkour et al. FPT	1.6812	3.2828	3.9493	7.7116	7.1433	13.9483
	<b>Présent FSPT</b>	<b>2.2827</b>	<b>4.1833</b>	<b>5.3638</b>	<b>9.8297</b>	<b>9.7153</b>	<b>17.8041</b>
	<b>Présent SPT</b>	<b>2.2459</b>	<b>4.1159</b>	<b>5.1674</b>	<b>9.4697</b>	<b>9.0969</b>	<b>16.6709</b>
4	<b>Présent FSPT</b>	<b>2.1993</b>	<b>4.0730</b>	<b>5.1356</b>	<b>9.5108</b>	<b>9.2186</b>	<b>17.0720</b>
	<b>Présent SPT</b>	<b>2.1573</b>	<b>3.9952</b>	<b>4.9151</b>	<b>9.1022</b>	<b>8.5394</b>	<b>15.8144</b>

### IV.3. 2 Variation de la température critique du flambement en fonction de l'indice de puissance k pour différentes valeurs pour différents valeurs du rapport de forme a/b et un rapport de géométrie a/h=100

La variation de la température critique  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation uniforme, linéaire et non linéaire de la température en fonction de l'indice de puissance k pour différentes valeurs du rapport de forme ( $a/b=1,2,3,4,5$ ) pour un rapport de géométrie  $a/h=100$  est présentée dans le tableau IV.4 pour les différentes théories. On note qu'il y a une bonne corrélation les valeurs obtenues par les différentes théories. Les valeurs de température les plus élevées sont obtenues pour un indice de puissance  $k=0$  c'est-à-dire où la plaque est complètement céramique.



## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

**Tableau IV.4** Variation de la température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction de l'indice de puissance «  $k$  » et le rapport  $a/h = 100$  pour différentes théories.

	$a/b$	Indice matériel				
		$k=0$	$k=0.5$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
<i>SPT</i>	1	17.0894	11.1626	9.8089	8.9653	8.6333
	2	42.6876	27.8849	24.5018	22.3918	21.5607
	3	85.2554	55.6980	48.9357	44.7119	43.0464
	4	144.6500	94.5161	83.0293	75.8403	73.0011
	5	220.6736	144.2202	126.6701	115.6585	111.3011
<i>HPT</i>	1	17.0894	11.1626	9.8089	8.9653	8.6333
	2	42.6875	27.8849	24.5019	22.3919	21.5608
	3	85.2551	55.6980	48.9359	44.7124	43.0469
	4	144.6490	94.5160	83.0299	75.8416	73.0025
	5	220.6729	144.2201	126.6716	115.6616	111.3045
<i>FPT</i>	1	17.0910	11.1637	9.8101	8.9669	8.6350
	2	42.6975	27.8917	24.5095	22.4014	21.5712
	3	85.2950	55.7250	48.9662	44.7501	43.0885
	4	144.7640	94.5938	83.1174	75.9503	73.1221
	5	220.9385	144.4012	126.8753	115.9144	111.5827
<i>EPT</i>	1	17.0895	11.1626	9.8089	8.9653	8.6333
	2	42.6879	27.8850	24.5019	22.3918	21.5607
	3	85.2565	55.6985	48.9359	44.7120	43.0465
	4	144.6531	94.5175	83.0301	75.8404	73.0013
	5	220.6802	144.2235	126.6720	115.6588	111.3015

### IV.3. 3 Variation de la température critique du flambement en fonction de l'indice de puissance $k$ pour différentes valeurs pour différents valeurs du rapport de géométrie $a/h$ et un rapport de forme $a/b= 1$

Les tableaux IV.5 et IV.6 représentent la variation de la température critique  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation uniforme et variation linéaire de la température en fonction de l'indice de puissance  $k$  pour différentes valeurs du rapport de géométrie  $a/h$ . On note qu'il y a une bonne corrélation entre les différentes théories.

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

**Tableau IV.5** La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  » et différentes valeurs de rapport «  $a/h$  ».  $T_{cr} = 10^{-3} t_{cr}$ .

k	a/h	Théories			
		SPT	FSPT	HPT	EPT
0.5	10	1.0620	1.0719	1.0620	1.0622
	20	0.2756	0.2763	0.2756	0.2756
	30	0.1233	0.1235	0.1233	0.1233
	40	0.0695	0.0696	0.0695	0.0695
	50	0.0445	0.0445	0.0445	0.0445
1	10	0.9297	0.9408	0.9297	0.9298
	20	0.2419	0.2427	0.2420	0.2420
	30	0.1083	0.1085	0.1083	0.1083
	40	0.0611	0.0611	0.0611	0.0611
	50	0.0391	0.0391	0.0391	0.0391
2	10	0.8429	0.8566	0.8431	0.8430
	20	0.2207	0.2216	0.2207	0.2207
	30	0.09897	0.0991	0.0989	0.0989
	40	0.0558	0.0559	0.0558	0.0558
	50	0.0357	0.0358	0.0357	0.0357

**Tableau IV.6** La température critique de flambement  $T_{cr}$  d'une plaque carrée en FGM simplement appuyée sous variation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  » et différentes valeurs de rapport «  $a/h$  ».  $T_{cr} = 10^{-3} t_{cr}$ .

k	a/h	Théorie			
		FSPT	SPT	HPT	EPT
0.5	<b>10</b>	1.9553	1.9373	1.9374	1.9377
	<b>20</b>	0.4972	0.4960	0.4960	0.4960
	<b>30</b>	0.2172	0.2170	0.2170	0.2170
	<b>40</b>	0.1184	0.1183	0.1183	0.1183
	<b>50</b>	0.0725	0.0725	0.0725	0.0725
1	<b>10</b>	1.7226	1.7022	1.7022	1.7022
	<b>20</b>	0.4376	0.4362	0.4362	0.4362
	<b>30</b>	0.1905	0.1902	0.1903	0.1903
	<b>40</b>	0.1034	0.1033	0.1033	0.1033
	<b>50</b>	0.0629	0.0629	0.0629	0.0629
2	<b>10</b>	1.5953	1.5695	1.5698	1.5696
	<b>20</b>	0.4058	0.4040	0.4040	0.4040
	<b>30</b>	0.1763	0.1760	0.1760	0.1760
	<b>40</b>	0.0953	0.0952	0.0952	0.0952
	<b>50</b>	0.0577	0.0576	0.0576	0.0576

**IV.3.4 Effet de la fondation élastique Pasternak sur la variation de la température critique du flambement en fonction de l'indice de puissance  $k$  pour différents valeurs du rapport de géométrie  $a/h$  et un rapport de forme  $a/b=1$**

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

Les tableaux IV.7 et IV.8 représentent la variation de la température critique  $T_{cr}$  d'une plaque en FGM simplement appuyée sous variation uniforme de la température en fonction de l'indice de puissance  $k$  pour différentes valeurs du rapport de géométrie  $a/h$  sous l'effet de la fondation élastique Pasternak . On note qu'il y a une bonne corrélation entre les différentes théories.

**Tableau IV.7** Effet de la fondation élastique Pasternak sur la température critique de flambement des plaques carrée en FGM sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de rapport géométrique «  $a/h$  ».

$$K_g = k_g D / a^2, \quad K_w = k_w D / a^4, \quad T_{cr} = 10^{-3} \Delta t_{cr}, \quad D = E_c h^3 / 12(1 - \nu^2)$$

(kw , kg)		a/h=5	a/h=10	a/h=15	a/h=20	a/h=25	a/h=30	
k								
	(0, 0)	0	5.5834	1.6186	0.7413	0.4215	0.2711	0.1888
		1	3.2130	0.9297	0.4256	0.2419	0.1556	0.1083
		2	2.8571	0.8429	0.3876	0.2207	0.1420	0.0989
(100, 0)		0	6.5479	1.8598	0.8485	0.4818	0.3097	0.2155
		1	4.6405	1.2866	0.5842	0.3311	0.2127	0.1480
		2	4.3815	1.2240	0.5570	0.3160	0.2030	0.1413
(100, 10)		0	8.4517	2.3357	1.0600	0.6008	0.3858	0.2684
		1	7.4582	1.9909	0.8972	0.5072	0.3254	0.2263
		2	7.3898	1.9763	0.8913	0.5040	0.3233	0.2248

**Tableau IV.8** Effet de la fondation élastique Pasternak sur la température critique de flambement des plaques FGM sous variation uniforme de température pour différentes valeurs de rapport géométrique «  $a/b$  » avec  $a/h=100$  et  $T_{cr} = \Delta t_{cr}$

(kw , kg)		a/b=0.5	a/b=1	a/b=1.5	a/b=2	a/b=2.5	a/b=3	
k								
	(0, 0)	0	10.6832	17.0894	27.7605	42.6877	61.8577	61.8577
		1	6.13187	9.80896	15.9339	24.5019	35.5055	48.9358
		2	5.60468	8.96538	14.5629	22.3920	32.4450	44.7118
(100, 0)		0	14.5412	19.5007	29.2443	43.6522	62.5228	85.7375
		1	11.8411	13.3772	18.1298	25.9290	36.4900	49.6492
		2	11.7011	12.7757	16.9076	23.9159	33.4958	45.4737
(100, 10)		0	19.3007	24.2603	34.0042	48.4118	67.2823	90.4965
		1	18.8847	20.4208	25.1734	32.9727	43.5336	56.6928
		2	19.2222	20.2966	24.4287	31.4371	41.0170	52.9947

# Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

## IV.3.5 Variation de la température critique du flambement en fonction du rapport de géométrique $a/b$ pour un rapport d'épaisseur $a/h=10$ et différentes valeurs de l'indice de puissance $k$

La Figure IV.2 représente la variation de la température critique de flambement en fonction du rapport géométrique ( $a/b$ ) selon trois variations de la température à travers l'épaisseur (uniforme, linéaire et non linéaire). On note que la température  $T_{cr}$  augmente avec l'augmentation du paramètre géométrique. Les plus hautes valeurs de la température sont obtenues pour les variations linéaires de la température et pour un indice puissance  $k=0$ .

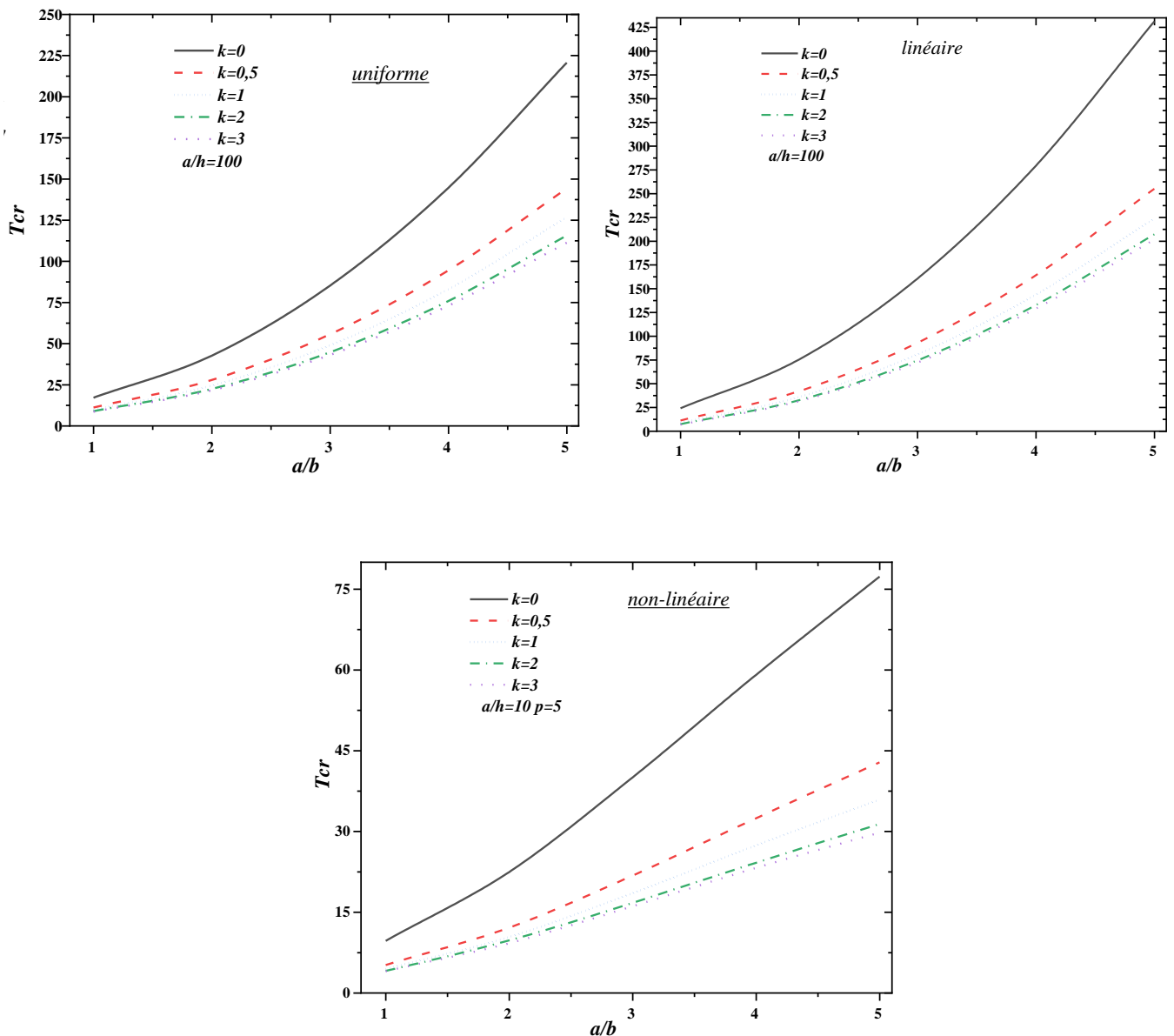


Figure IV.2 Variation de la température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction du rapport  $a/b$  pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  » avec  $a/h=10$

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

### IV.3.6 Variation de la température critique du flambement en fonction du rapport d'épaisseur $a/h$ et un rapport géométrique $a/b=1$ et différentes valeurs de l'indice de puissance $k$

La Figure IV.3 représente la variation de la température critique de flambement en fonction du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) selon trois variations de la température à travers l'épaisseur (uniforme, linéaire et non linéaire), et comme le montre la figure la température  $T_{cr}$  diminue lorsque le paramètre d'épaisseur augmente.

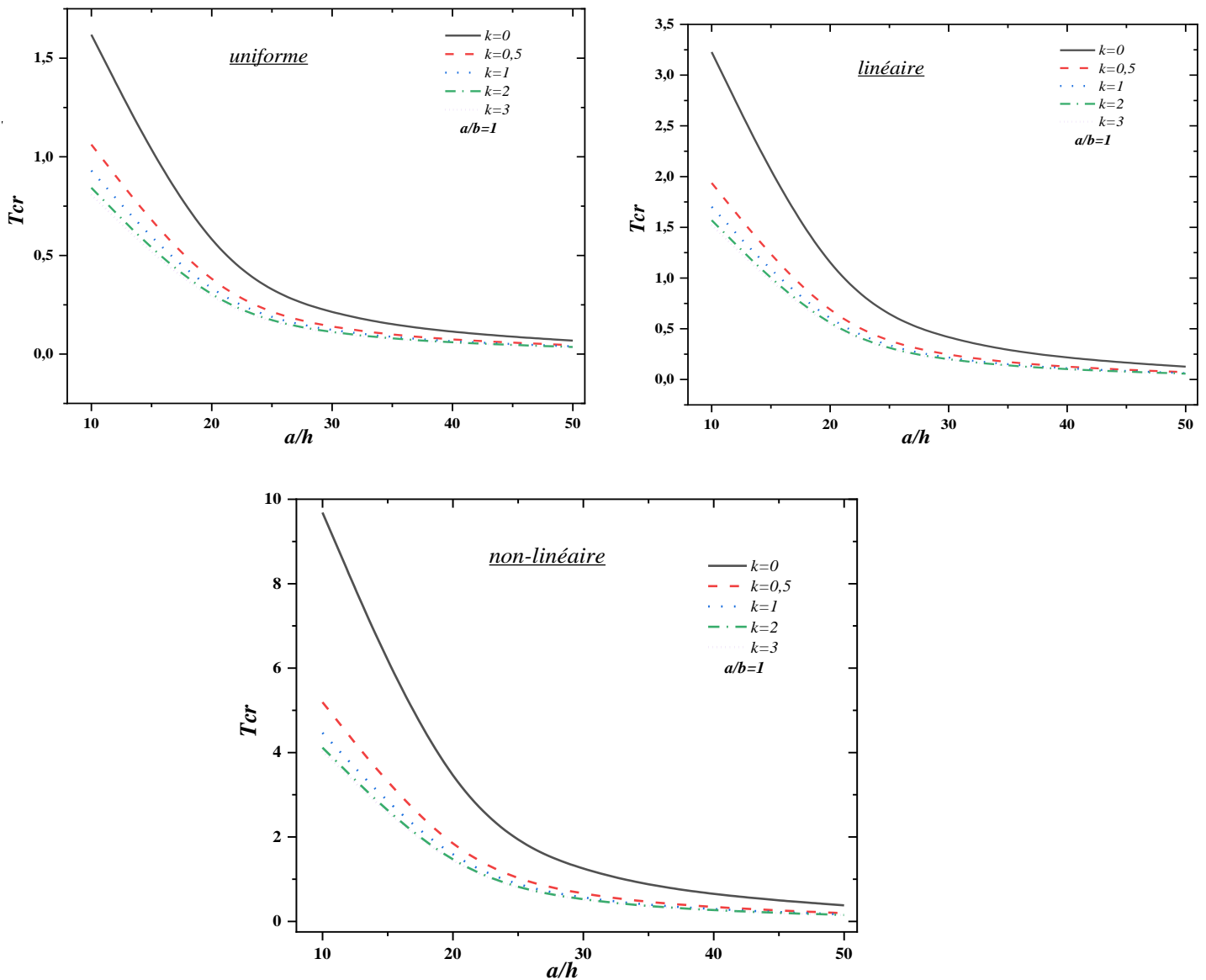
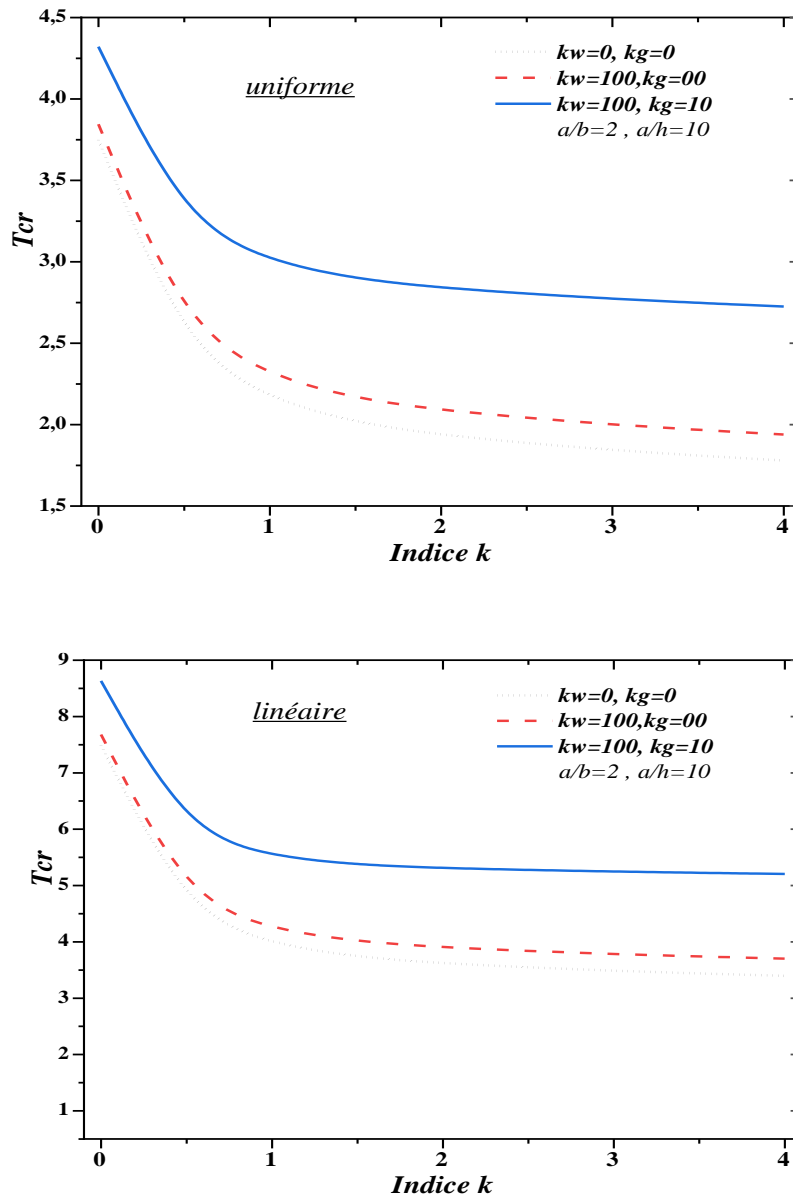


Figure IV.3 Variation de la température critique de flambement  $T_{cr}$  en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes valeurs de l'indice de puissance «  $k$  » avec  $a/b = 1$

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

### IV.3.7 Effet de l'indice de gradient sur la variation de la température critique non-dimensionnelle du flambement d'une plaque FGM reposant sur des fondations élastiques

La Figure IV.4 représente la variation de la température critique de flambement en fonction de l'indice matériau " $k$ " sous l'effet de la fondation élastique selon deux variations de température dans l'épaisseur (uniforme et linéaire). On note que la température  $T_{cr}$  diminue lorsque l'indice de puissance augmente. Les valeurs de la température les plus élevées sont obtenues pour les valeurs les plus élevées des coefficients de la fondation élastique  $k_w = 100$  et  $k_g = 10$ .



**Figure IV.4** Effet de l'indice de gradient sur température critique du flambement non dimensionnelle  $T_{cr}$  d'une plaque FGM reposant sur des fondations élastique  $a/b=2$  et  $a/h=10$

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

---

### IV.4 Conclusion

Dans la présente étude, le comportement en flambement thermique de plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées (FGM) reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak a été étudié. La précision du modèle de distribution de Mori-Tanaka des propriétés des matériaux à travers l'épaisseur de la plaque FGM et la théorie utilisée sont déterminées et comparées à d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé, les résultats obtenus sont en bonne corrélation avec ceux de la littérature. Les paramètres de la plaque comme l'indice de puissance " $k$ ", le rapport d'aspect " $a/b$ ", la variation du paramètre de la fondation élastique " $k_w$ " le rapport " $a/h$ " et le type de chargement thermique influent sur la variation de la température critique de flambement de la plaque FGM ainsi que sur la variation de la température critique.

## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

---

### IV.5 Références :

**Bouazza F**, Abdelhakim K, Tounsi A O, and El Abbas A B « A four variable refined plate theory for nonlinear cylindrical bending analysis of functionally graded plates under thermomechanical loadings » *Journal of Mechanical Science and Technology* 26 (12) (2012) 4073~4079

**Bouhadra Abdelhakim**, Benyoucef S , Tounsi A O, Bernard F , Bouiadjra R Bachir & Houari M Sid A « Thermal Buckling Response of Functionally Graded Plates with Clamped Boundary Conditions », *Journal of Thermal Stresses* (2015), 38:6, 630-650.

**Bouiadjra M B** , Houari M Sid A & Tounsi A O « Thermal Buckling of Functionally Graded Plates According to a Four-Variable Refined Plate Theory », *Journal of Thermal Stresses*, 35:8 (2012), 677-694.

**Ravikiran K**, Kashif A, N. Ganesan «Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory » *Science direct Applied Mathematical Modelling* 32 (2008) 2509–2525.

**J.N. Reddy**, « *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis* ». CRC Press, Boca Raton, 1997.

**M. Touratier**, A « n efficient standard plate theory », *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916, 1991.

**M. Karama.**, K.S. Afaq., S. Mistou, « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity », *Int. J. Solids Structures* ; 40 (6) : 1525-1546, 2003.

**B.V. Sankar**, J.T. Tzeng, « Thermal stresses in functionally graded beams » *AIAA J.* 40 (6) (2002) 1228–1232

**R.K. Kapania**, S. Raciti, Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I: Shear effect and Buckling, *AIAA J.* 27 (7) (1989) 923–934

**Y. Kiani**, E. Bagherizadeh, and M. R. Eslami, *ZAMM · Z. Angew.* « Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions) », *Math. Mech.* 91, No. 7, 581 – 593 (2011)

**A.M. Zenkour** « Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories », *Journal of Engineering Mathematics* 50: 75–93, 2004

**A.M. Zenkour.**, **Daoud S. Mashat.** « Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates » *Natural Science* 2 (2010) 968-978

**J.N. Reddy**, (1990). A « general non-linear third order theory of plates with moderate thickness », *International Journal of Non-linear Mechanics* : 25 (6), 677–686.



## Chapitre IV Flambement Des Plaques Composites FGM reposant sur fondation élastique type Winkler-Pasternak

---

**Berkia.A** , M. Benguediab, A. Bouhadra , K. Mansouri , A. Tounsi1 , M. Chitour  
Influence of Mechanical and Geometric Characteristics on Thermal Buckling  
of Functionally Graded Sandwich Plates.

JOURNAL OF NANO- AND ELECTRONIC PHYSICS

Vol. 14 No 3, 03031(6pp) (2022) [https://doi.org/10.21272/jnep.14\(3\).03031](https://doi.org/10.21272/jnep.14(3).03031)

**Khayat, K. H.**, Sonebi, M., Yahia, A., & Skaggs, C. B. (1996, June). Statistical models to predict flowability, washout resistance, and strength of underwater concrete. Bartos, P.J.M., Marrs D.L., and

**Cleland D.J.**, (Eds) Proceedings of the International RILEM Conference on Production Methods and Workability of Concrete, pp. 463 481

**M. Bodaghi** · A. R. Saidi Thermoelastic buckling behavior of thick functionally graded rectangular plates, Arch Appl Mech (2011) 81:1555–1572

**M. A. Aiello** , L. Ombres, « Buckling and vibrations of unsymmetric laminates resting on elastic foundations under in-plane and shear forces », Compos. Struct : 44(1), 31–41 (1999)

**M. Bourada**, A. Tounsi, M. S. Houari, and E. A. Adda Bedia, A New Four-Variable Refined Plate Theory for Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 14, pp. 5–33, 2012.

**A. Tounsi** , M. S. A. Houari, S. Benyoucef, and E. A. Adda Bedia, A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates, *Aerospace Science and Technology*, vol. 24, no. 1, pp. 209–220, 2013.

**R. Bachir Bouiadjra**, E. A. Adda Bedia, and A. Tounsi, Nonlinear Thermal Buckling Behavior of Functionally Graded Plates Using an Efficient Sinusoidal Shear Deformation Theory, *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 48, no. 4, pp. 547–567, 2013.

**Bouhadra et al.** [2] ont étudié la réponse au flambement thermique de plaques fonctionnellement graduées soumises à des élévations de température uniformes, linéaires et non linéaires dans le sens de l'épaisseur.

---

***CHAPITRE V : ANALYSE DU  
FLAMBEMENT STATIQUE  
DES POUTRES SANDWICH A  
GRADIENT DE PROPRIETES  
BIDIRECTIONNELLES  
(BFGSW)***

---

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

### V.1 Introduction

Les caractéristiques matérielles des FGM doivent être classées leurs variations directionnelles (deux ou trois directions). Cependant, la plupart des travaux antérieurs se sont concentrés sur les structures FG avec des propriétés matérielles qui ne varient qu'en épaisseur ou en direction axiale. Plusieurs études sur les poutres et les plaques constituées de matériaux à gradient fonctionnel a récemment ont été entreprises (Lü et al. 2008, Vo et al. 2014, Şimşek 2015, Vo et al. 2015, Deng et Cheng 2016, Wang et al., 2016, Tossapanon et Wattanasakulpong 2016). Rajasekaran et Khaniki (2019). La méthode des éléments finis (FEM) a été utilisée pour étudier la vibration forcée de micro-poutres FG bidirectionnelles non uniformes en tenant compte de divers modèles de classement des matériaux, y compris les modèles exponentiels, linéaires, paraboliques et sigmoïdaux, et basés sur une fondation élastique due à une masse harmonique en mouvement. Plus récemment, Nguyen et al. (2020) a réalisé une étude du comportement dynamique de poutres sandwich bidirectionnelles à gradation avec une loi de puissance sous une charge ponctuelle mobile à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDBT). La vibration libre des poutres bidimensionnelles fonctionnellement graduées, fondée sur la théorie classique des poutres "Euler Bernoulli" (EBBT) et la méthode des éléments continus supposent que les propriétés du matériau varient de manière exponentielle avec l'épaisseur et la longueur de la poutre (Abdellatif Selmi (2021).

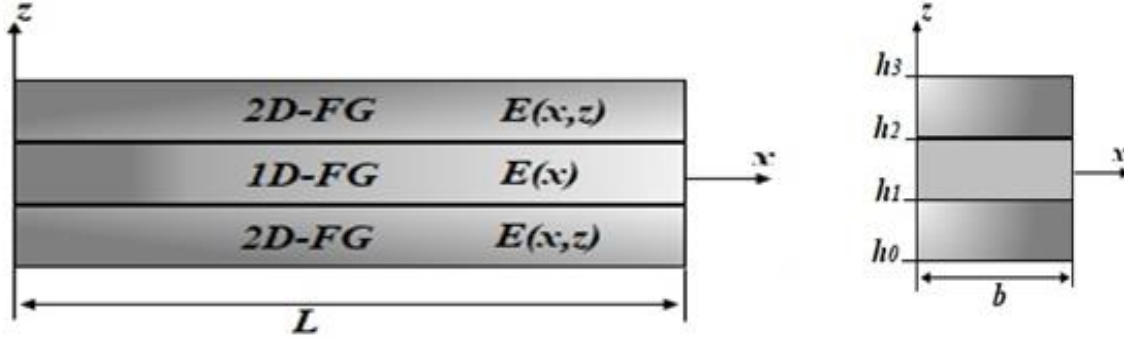
Ce travail présente une solution analytique pour étudier le comportement de flambement des poutres **BFGSW** avec diverses conditions aux limites en utilisant une théorie de poutre intégrale quasi-3D. La théorie des poutres est construite en incluant le terme intégral de la cinématique qui réduit le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes contrairement aux autres théories. Les influences de l'indice de loi de puissance, du rapport d'épaisseur des couches, du rapport portée/hauteur et des conditions aux limites sur les charges critiques de flambement sont présentées.

### V.2 Formulation mathématique

Le système examiné, représenté schématiquement sur la Figure V.1, est une poutre de section variable. On suppose que la poutre est constituée de deux matériaux différents. Les propriétés matérielles de la poutre (c'est-à-dire le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

$\nu$ , le module de cisaillement  $G$  et la masse volumique  $\rho$ ) varient à la fois dans le sens axial (axe  $x$ ) et dans le sens de l'épaisseur (axe  $z$ ), comme illustré à la Figure V.1.



*Figure V.1 Poutre sandwich FG bidirectionnelle*

Selon la loi du mélange, les propriétés effectives du matériau,  $P(x, z)$ , peuvent être exprimées comme suit:

$$P(x, z) = P_1 V_1(x, z) + P_2 V_2(x, z) \quad (\text{V.1})$$

Où  $P_1$  et  $P_2$  sont les propriétés matérielles effectives des constituants 1 et 2 ;  $V_1$  et  $V_2$  sont les fractions volumiques des constituants, et ils sont liés par:

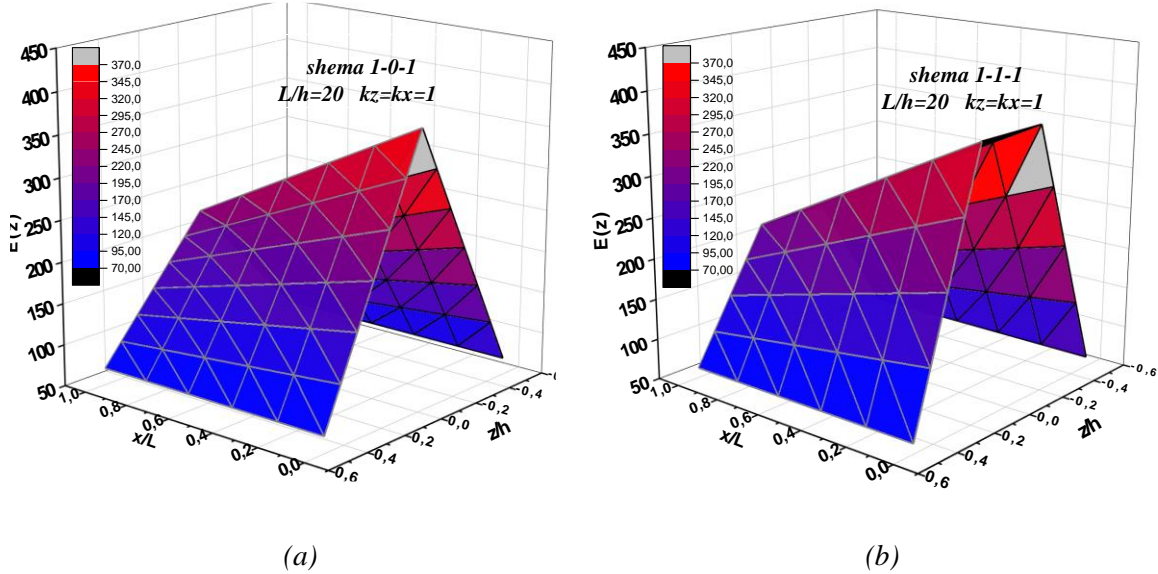
$$V_1(x, z) + V_2(x, z) = 1 \quad (\text{V.2})$$

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^{k_x} \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0}\right)^{k_z} & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)} &= \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^{k_x} & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(1)} &= \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^{k_x} \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3}\right)^{k_z} & h_2 \leq z \leq h_3 \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

$V_i(x, z)$ , est la fraction volumique supposée variable selon une loi de puissance dans deux directions.  $k_x$  et  $k_z$  qui sont les indices de loi de puissance axiale et transversale non négatifs qui déterminent la distribution du matériau dans les directions de la longueur et de l'épaisseur de la poutre.

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

Les Figure V.2a et Figure V.2b présentent la variation du module de Young ( $E$ ) dans les directions de longueur et d'épaisseur des poutres sandwich **BFGSW** pour deux types de poutre sandwich (1-0-1 et 1-1-1) en utilisant  $k_x=k_z=1$ , et  $l/h=20$ .



**Figure V.2** Variation du module de Young à travers l'épaisseur des poutres FGSB :  
(a) schémas 1-0-1, (b) schémas 1-1-1

Le champ de déplacement, prenant en compte l'effet de la déformation de cisaillement, est présenté pour les poutres sandwich FGM sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (V.4)$$

Avec:

$$k_1 = \lambda^2, \quad \lambda = \frac{m\pi}{a} \quad (V.5)$$

L'intégrale «  $\int \theta dx$  » utilisée dans l'équation ci-dessus doit être résolue par la procédure de Navier et est donnée comme suit:

$$\int \theta(x, y) dx = A \frac{\delta \theta(x, y)}{\delta x}, \quad (V.6)$$

Le champ de déplacement mentionné ci-dessus peut être réécrit comme suit:

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + k_1 A f(z) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y) \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Avec:

$$A = -\frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{V.8})$$

La fonction  $f(z)$  est donnée comme suit:

$$f(z) = \frac{3}{25} \pi z \left[ \pi - \sqrt[3]{0.135} \cosh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{V.9})$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

Les expressions déformation-déplacement, basées sur la formulation précédente, s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + z \varepsilon_{xx}^1 + f(z) \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{zz} &= g'(z) \varepsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

Où  $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{xx}^1, \varepsilon_{xx}^2, \varepsilon_{zz}^0$  et  $\gamma_{xz}^0$  sont liés aux déplacements  $u, w$  et  $\theta$  comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xx}^2 = k_1 A \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \varepsilon_{zz}^0 &= \varphi_z \\ \gamma_{xz}^0 &= k_1 A \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

### V.3 Relations constitutive

Les déformations et les contraintes sont liées par l'équation de comportement élastique suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{V.12})$$

Où:

$$\begin{aligned}
 C_{11}^{(n)} &= C_{33}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\nu^{(n)})^2}, \\
 C_{13}^{(n)} &= \nu^{(n)} C_{11}^{(n)}, \\
 C_{55}^{(n)} &= \frac{E^{(n)}(z)}{2(1 + \nu^{(n)})},
 \end{aligned} \tag{V.13}$$

Si l'effet d'étirement d'épaisseur est omis ( $\varepsilon_{zz} \neq 0$ ), les constantes élastiques  $C_{ij}$  sont réduites comme:

$$\begin{aligned}
 C_{11}^{(n)} &= E^{(n)}(z), \\
 C_{13}^{(n)} &= 0, \\
 C_{55}^{(n)} &= \frac{E^{(n)}(z)}{2(1 + \nu^{(n)})},
 \end{aligned} \tag{V.14}$$

#### V.4 Équations de stabilité

La formulation variationnelle du flambement de la poutre fonctionnellement graduée en employant le principe du travail virtuel pour lequel le travail externe est égal au travail interne, les équations de stabilité gouvernantes pour les poutres (BFGSWB) sont développées comme suit:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b \left[ \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz \right] dy dx \tag{V.15}$$

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b \left[ \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \left( \sigma_{xx}^{(n)} (\delta \varepsilon_{xx}^0 + z \delta \varepsilon_{xx}^1 + f(z) \delta \varepsilon_{xx}^2) + \sigma_{zz}^{(n)} \delta (g'(z) \delta \varepsilon_{zz}^0) + \tau_{xz}^{(n)} \delta (g(z) \delta \gamma_{xz}^0) \right) dz \right] dx dy \tag{V.16}$$

$$\delta U = \int_0^L [N_x \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_z \delta \varepsilon_{zz}^0 + M_x^b \delta \varepsilon_{xx}^1 + M_x^s \delta \varepsilon_{xx}^2 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz} \delta \gamma_{xz}^1] dx \tag{V.17}$$

L'énergie potentielle totale de la charge axiale externe ( $N_0$ ) peut être donnée par:

$$\delta V = - \int_0^L N_0 \frac{d(w_0 + g(z)\varphi)}{dx} \frac{d\delta(w_0 + g(z)\varphi)}{dx} dx \tag{V.18}$$

Où  $N_{xx}$ ;  $M_{xx}^b$ ;  $M_{xx}^s$ ,  $N_{zz}$  et  $Q_{xz}$  sont les forces et les moments résultants, définies comme:

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_{xx} dz, & M_{xx}^b &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_{xx} z dz, \\
 M_{xx}^s &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_{xx} f(z) dz, & N_{zz} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \sigma_{zz} g'(z) dz, \\
 Q_{xz} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \tau_{xz} g(z) dz,
 \end{aligned} \tag{V.19}$$

Le principe du travail virtuel pour le présent problème s'exprime comme suit:

$$\delta U + \delta V = 0 \tag{V.20}$$

En substituant les expressions de  $\delta U$  et  $\delta V$  on peut obtenir:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L \left[ N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_{zz} \delta \varepsilon_{zz}^0 + M_{xx}^b \delta \varepsilon_{xx}^1 + M_{xx}^s \delta \varepsilon_{xx}^2 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^1 \right] dx \\
 &- \int_0^L N_0 \frac{d(w_0 + g(z)\varphi)}{dx} \frac{d\delta(w_0 + g(z)\varphi)}{dx} dx = 0
 \end{aligned} \tag{V.21}$$

En remplaçant l'équation (V.11) dans l'équation (V.21), les équations de stabilité peuvent être exprimées en termes des déplacements  $u_0, w_0, \theta$  et  $\varphi_z$  comme suit:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : & \quad -\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = 0 \\
 \delta w_0 : & \quad -\frac{\partial^2 M_{xx} + N_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\
 \delta \theta : & \quad K_1 A \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} - K_1 A \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} = 0 \\
 \delta \varphi_z : & \quad N_{zz} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{V.22}$$

Remplaçant les équations (V.10) et (V.12) dans l'équation (V.20), les équations constitutives pour les forces et les moments résultants sont obtenues tel que:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ P_{xx} \\ N_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & Bs_{11} & L \\ & D_{11} & Ds_{11} & La \\ & & Hs_{11} & R \\ Sym & & & Ra \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{zz}^0 \end{Bmatrix} \tag{V.23}$$

$$\{Q_{xz}\} = [Fs_{55}] \{\gamma_{xz}^0\}$$

Où:  $A_{11}, B_{11}, Bs_{11}, D_{11}, Ds_{11}, Hs_{11}, L, La, R, Ra$  et  $F_{11}$ , sont les rigidités de la poutre sandwich FG et qui sont données par:



## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11}^{(n)} dz, & B_{11} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11}^{(n)} z dz \\
 D_{11} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11}^{(n)} z^2 dz, & B_{S_{11}} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11}^{(n)} f(z) dz \\
 D_{S_{11}} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11}^{(n)} z f(z) dz, & H_{S_{11}} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11}^{(n)} f(z)^2 dz \\
 L &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{13}^{(n)} g'(z) dz, & La &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{13}^{(n)} z g'(z) dz \\
 R &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{13}^{(n)} f(z) g'(z) dz, & Ra &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{13}^{(n)} g'(z)^2 dz \\
 F_{S_{44}} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{55}^{(n)} g(z)^2 dz,
 \end{aligned} \tag{V.24}$$

En remplaçant les équations (V.11), (V.23) dans l'équation (V.21), les équations de stabilité sont définies par:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : & \quad A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - K_1 A B_{S_{11}} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} - L \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} = 0 \\
 \delta w_0 : & \quad -B_{S_{11}} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{S_{11}} K_1 A \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - La \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \\
 \delta \theta : & \quad -B_{S_{11}} K_1 A \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + D_{S_{11}} K_1 A \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - (K_1 A)^2 (H_{S_{11}} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - F_{S_{44}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}) + \\
 & \quad (K_1 A)(R - F_{S_{44}}) \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} = 0 \\
 \delta \varphi_z : & \quad L \frac{\partial u_0}{\partial x} - La \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + K_1 A \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} (R - F_{S_{44}}) + Ra \varphi_z - F_{S_{44}} \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} = 0
 \end{aligned} \tag{V.25}$$

Pour obtenir les équations de stabilité dans le cas 2D, il suffit de mettre les termes dépendant de la coordonnée  $z$  égaux à zéro.

La solution exacte de l'équation (V.25) pour les poutres FGM sous diverses conditions aux limites peut être construite en utilisant les fonctions admissibles énumérées dans le Tableau V.1.

**Tableau V.1** Fonctions admissibles  $X_m, Y_n$ .

Cotitions aux limites	Fonctions admissibles $X_m, Y_n$	
	$X_m$	$Y_n$
<b>SSSS</b>	$\text{Sin}(\lambda x)$	$\text{Sin}(\lambda x)$
<b>CCCC</b>	$\text{Sin}(\lambda x) \text{Cos}(\lambda x)$	$\text{Sin}(\lambda x) \text{Sin}(\lambda x)$

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

Avec:

$$\begin{cases} u_0(x, y) \\ w_0(x, y) \\ \theta(x, y) \\ \varphi_z(x, y) \end{cases} = \begin{cases} U_m \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(x) \\ W_m X_m(x) Y_n(x) \\ \theta_m X_m(x) Y_n(x) \\ \psi_m X_m(x) Y_n(x) \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

Où ( $U_m, W_m, \theta_m$  and  $\psi_m$ ) sont les coefficients de déplacement inconnus.

En remplaçant les extensions de  $U_m, W_m, \theta_m$  et  $\psi_m$  des équations (V.24) dans les équations d'équilibre (V.23), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes:

$$[S]\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{V.27})$$

Où:  $\{\Delta\}$  désigne les colonnes.

$$\{\Delta\} = \{U_m, W_m, \theta_m, \psi_m\}^T \quad (\text{V.28})$$

[S] est la matrice symétrique donnée par:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} + N_{cr} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{V.29})$$

Les composantes de la matrice de rigidité [S] sont données comme suit:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -A_1 \alpha_{12} & S_{21} &= -B_1 \alpha_{13} \\ S_{12} &= B_1 \alpha_{12} & S_{22} &= D_1 \alpha_{13} \\ S_{13} &= -B s_{11} \alpha_{12} k_1 A & S_{23} &= -D s_{11} k_1 A \alpha_{13} \\ S_{14} &= -L \alpha_6 & S_{24} &= -L a \alpha_9 \\ S_{31} &= B s_{11} k_1 A \alpha_{13} & S_{41} &= L \alpha_9 \\ S_{32} &= -D s_{11} k_1 A \alpha_{13} & S_{42} &= -L a \alpha_9 \\ S_{33} &= (k_1 A)^2 (H s_{11} \alpha_{13} - F s_{44} \alpha_9) & S_{43} &= K_1 A \alpha_9 (R - F s_{44}) \\ S_{34} &= K_1 A \alpha_9 (R - F s_{44}) & S_{44} &= R a \alpha_1 - F s_{44} \alpha_9 \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

Avec:

$$N_{cr} = N_0 \alpha_9 \quad (\text{V.31})$$

Et

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1) &= \int_0^b \int_0^l (X_m Y_m) X_m Y_m dx dy, \\
 (\alpha_6, \alpha_{12}) &= \int_0^b \int_0^l (X'_m Y_m, X'''_m Y_m) X'_m Y_m dx dy, \quad b=1 \\
 (\alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}) &= \int_0^b \int_0^l (X''_m Y_m, X''_m Y''_m, X''''_m Y_m) X_m Y_m dx dy,
 \end{aligned} \tag{V.32}$$

### V.5 Résultats numériques et discussions

Dans ce chapitre, de nombreux exemples numériques sont traités et discutés pour vérifier la précision de la théorie de la déformation par cisaillement quasi-3D utilisée pour analyser le flambement statique de la poutre sandwich FGM pour diverses conditions aux limites.

Les propriétés des matériaux utilisés sont:

- Céramique ( $P_c$ : Alumina,  $Al_2O_3$ ):  $E_c=380 \text{ GPa}$ ;  $\nu_c=0.3$ .
- Métal ( $P_m$ : Aluminium,  $Al$ ):  $E_m=70 \text{ GPa}$ ;  $\nu_m=0.3$ .

Pour plus de simplicité, les paramètres de flambement critiques adimensionnels sont définis comme:

$$\bar{N}cr = Ncr \frac{12 L^2}{E_m h^3} \tag{V.33}$$

La comparaison des charges critiques de flambement des poutres sandwich FG avec deux conditions aux limites différentes est présentée dans les Tableaux V.2-V.5. Les résultats sont obtenus pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et six valeurs du rapport d'épaisseur de couche. Les résultats obtenus par notre modèle sont comparés à ceux obtenus par Nguyen et al. (2016) et par la théorie quasi-3D (Vo et al. 2015).

On constate que les résultats actuels sont en bon accord avec les solutions des travaux antérieurs. Ainsi, la précision du modèle actuel est vérifiée. Il est important de noter que lorsque l'indice de loi de puissance augmente, les charges critiques de flambement diminuent. De plus, les valeurs les plus basses de la charge critique de flambement correspondent au (1-0-1) et les plus élevées correspondent au (1-2-1). Cette différence est due au fait que ces poutres correspondent respectivement aux fractions volumiques les plus faibles et les plus élevées de la phase céramique.

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

**Tableau V.2** Comparaison des charges de flambement critiques adimensionnelles de la poutre S-S FG ( $L/h = 20$ ) pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique.

k	Théorie	$\varepsilon_{zz}$	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Nguyen et al. (2016)	$\neq 0$	53.3175	53.3175	53.3175	53.3175	53.3175	53.3175
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	53.3145	53.3145	53.3145	53.3145	53.3145	53.3145
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>53.4236</b>	<b>53.4236</b>	<b>53.4236</b>	<b>53.4236</b>	<b>53.4236</b>	<b>53.4236</b>
0.5	Nguyen et al. (2016)	$\neq 0$	29.7410	32.0853	33.2971	34.1242	35.7026	37.3626
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	29.7626	32.1022	33.3127	34.1380	35.7149	41.8227
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>29.8283</b>	<b>32.1731</b>	<b>33.3823</b>	<b>34.2132</b>	<b>35.7905</b>	<b>37.4532</b>
1	Nguyen et al. (2016)	$\neq 0$	20.7541	23.4584	24.9715	26.0001	28.0424	30.2785
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	20.7530	23.4572	24.9697	25.9989	28.0412	30.2774
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>20.8021</b>	<b>23.5128</b>	<b>25.0187</b>	<b>26.0599</b>	<b>28.0997</b>	<b>30.3451</b>
2	Nguyen et al. (2016)	$\neq 0$	14.2199	16.6317	18.2521	19.2309	21.5001	24.0284
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	14.2190	16.6307	18.2493	19.2299	21.4986	24.0276
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>14.2560</b>	<b>16.6756</b>	<b>18.2764</b>	<b>19.2812</b>	<b>21.5400</b>	<b>24.0860</b>
5	Nguyen et al. (2016)	$\neq 0$	10.6341	12.1078	13.6771	14.2515	16.5100	18.9180
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	10.6330	12.1068	13.6717	14.2505	16.5069	18.9172
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>10.6578</b>	<b>12.1412</b>	<b>13.6750</b>	<b>14.2946</b>	<b>16.5277</b>	<b>18.9715</b>
10	Nguyen et al. (2016)	$\neq 0$	10.0003	10.9246	12.4320	12.7023	14.8851	17.0723
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	9.9995	10.9239	12.4256	12.7014	14.8807	17.0712
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>10.0199</b>	<b>10.9523</b>	<b>12.4102</b>	<b>12.7416</b>	<b>14.9053</b>	<b>17.1056</b>

**Tableau V.3** Comparaison des charges de flambement critiques adimensionnelles du sandwich poutre C-C FG ( $L/h = 20$ ) pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique.

k	Théorie	$\varepsilon_{zz}$	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	210.7774	210.7774	210.7774	210.7774	210.7774	210.7774
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	210.7420	210.7420	210.7420	210.7420	210.7420	210.7420
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>210.5324</b>	<b>210.5324</b>	<b>210.5324</b>	<b>210.5324</b>	<b>210.5324</b>	<b>210.5324</b>
0.5	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	118.3095	127.6190	132.3616	135.6735	141.8619	148.4165
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	118.3530	127.6410	132.3830	135.6840	141.8690	148.4130
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>118.249</b>	<b>127.5328</b>	<b>132.2628</b>	<b>135.5730</b>	<b>141.7478</b>	<b>148.2961</b>
1	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	82.7901	93.5770	99.5203	103.6595	111.6956	120.5619
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	82.7434	93.5248	99.4730	103.6060	111.6480	120.5090
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>82.6762</b>	<b>93.4541</b>	<b>99.3699</b>	<b>103.5333</b>	<b>111.5512</b>	<b>120.4268</b>
2	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	56.8386	66.5147	72.8955	76.8684	85.8241	95.8941
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	56.7986	66.4664	72.8506	76.8166	85.7783	95.8403
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>56.7532</b>	<b>66.4249</b>	<b>72.7379</b>	<b>76.7776</b>	<b>85.6883</b>	<b>95.7915</b>
5	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	42.4914	48.5016	54.6876	57.0817	66.0121	75.6538
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	42.4596	48.4588	54.6418	57.0343	65.9671	75.6019
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>42.4049</b>	<b>48.4197</b>	<b>54.4848</b>	<b>57.0129</b>	<b>65.8487</b>	<b>75.5844</b>
10	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	39.8676	43.7664	49.7084	50.9062	59.5406	68.3252
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	39.8436	43.7273	49.6622	50.8611	59.4944	68.2737
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>39.7824</b>	<b>43.6766</b>	<b>49.4689</b>	<b>50.8350</b>	<b>59.3588</b>	<b>68.2360</b>

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

**Tableau V.4** Comparaison des charges de flambement critiques adimensionnelles de la poutre S-S FG ( $L/h = 5$ ) pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique.

k	Théorie	$\varepsilon_{zz}$	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	49.5970	49.5970	49.5970	49.5970	49.5970	49.5970
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	49.5906	49.5906	49.5906	49.5906	49.5906	49.5906
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>49.6477</b>	<b>49.6477</b>	<b>49.6477</b>	<b>49.6477</b>	<b>49.6477</b>	<b>49.6477</b>
0.5	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	28.4407	30.6650	31.7459	32.5547	33.9720	35.5032
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	28.4624	30.6825	31.7627	32.5699	33.9858	35.5156
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>28.5125</b>	<b>30.7399</b>	<b>31.8224</b>	<b>32.6351</b>	<b>34.0529</b>	<b>35.5920</b>
1	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	20.0899	22.7061	24.0833	25.1060	26.9747	29.0723
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	20.7425	22.7065	24.0838	25.1075	26.9764	29.0755
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>20.1289</b>	<b>22.7569</b>	<b>24.1336</b>	<b>25.1693</b>	<b>27.0389</b>	<b>29.1540</b>
2	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	13.8852	16.2761	17.7748	18.7756	20.8863	23.3002
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	13.8839	16.2761	17.7742	18.7772	20.8879	23.3042
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>13.9072</b>	<b>16.3139</b>	<b>17.8040</b>	<b>18.8299</b>	<b>20.9365</b>	<b>23.3792</b>
5	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	10.3708	11.9320	13.3963	14.0352	16.1613	18.5058
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	10.3673	11.9301	13.3924	14.0353	16.1605	18.5092
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>10.3698</b>	<b>11.9482</b>	<b>13.3950</b>	<b>14.0719</b>	<b>16.1854</b>	<b>18.5748</b>
10	Nguyen et al.(2016)	$\neq 0$	9.6573	10.7715	12.1790	12.5402	14.6018	16.7550
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	9.6535	10.7689	12.1737	12.5393	14.5994	16.7574
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>9.6494</b>	<b>10.7769</b>	<b>12.1639</b>	<b>12.5664</b>	<b>14.6225</b>	<b>16.8173</b>

**Tableau V.5** Comparaison des charges de flambement critiques non dimensionnelles du sandwich poutre C-C FG ( $L/h = 5$ ) pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique.

k	Théorie	$\varepsilon_{zz}$	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Nguyen et al 2016)	$\neq 0$	160.3064	160.3064	160.3064	160.3064	160.3064	160.3064
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	160.2780	160.2780	160.2780	160.2780	160.2780	160.2780
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>160.0357</b>	<b>160.0357</b>	<b>160.0357</b>	<b>160.0357</b>	<b>160.0357</b>	<b>160.0357</b>
0.5	Nguyen et al 2016	$\neq 0$	98.3648	105.8972	108.9555	111.8943	116.0009	120.7931
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	98.4559	105.9750	109.0360	111.9680	116.0700	120.8630
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>98.3500</b>	<b>105.8975</b>	<b>109.0505</b>	<b>111.9417</b>	<b>116.0685</b>	<b>120.9212</b>
1	Nguyen et al 2016	$\neq 0$	71.7633	81.0819	85.1883	89.0595	94.7381	101.5703
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	71.7654	81.0936	85.2092	89.0834	94.7675	101.6130
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>71.6677</b>	<b>81.0423</b>	<b>85.2828</b>	<b>89.1055</b>	<b>94.8192</b>	<b>101.7588</b>
2	Nguyen et al 2016	$\neq 0$	50.8264	59.9292	64.5957	68.6517	75.3511	83.5671
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	50.8183	59.9354	64.6133	68.6743	75.3818	83.6159
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>50.6623</b>	<b>59.8439</b>	<b>64.9642</b>	<b>68.6770</b>	<b>75.4180</b>	<b>83.7845</b>
5	Nguyen et al 2016	$\neq 0$	37.8590	44.8607	49.5296	52.6318	59.6057	68.0098
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	37.8295	44.8488	49.5325	52.6395	59.6248	68.0510
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>37.5736</b>	<b>44.6514</b>	<b>49.3800</b>	<b>52.5485</b>	<b>59.5765</b>	<b>68.1620</b>
10	Nguyen et al 2016	$\neq 0$	34.3176	40.5751	45.0701	47.3821	54.2081	62.1634
	Vo et al. (2015)	$\neq 0$	34.2824	40.5544	45.0660	47.3804	54.2193	62.1959
	Présent modèle	$\neq 0$	<b>34.0148</b>	<b>40.3007</b>	<b>44.8916</b>	<b>47.2315</b>	<b>54.1808</b>	<b>62.3150</b>

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

Les résultats numériques pour les charges de flambement de la poutre sandwich sont donnés dans les Tableaux V.6 et V.7. On note que les charges de flambement sont fortement influencés par la variation des indices de loi de puissance et le rapport d'épaisseur de couche. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par Le et al. (2021). La charge critique de flambement diminue avec l'augmentation des indices de loi de puissance, indépendamment des conditions aux limites et du rapport d'épaisseur de la couche. Un bon accord entre les

**Tableau V.6** Comparaison des charges critiques de flambement sans dimension  $N_{cr}$  des poutres sandwich FG associées à différentes conditions aux limites ( $L/h=5$ ,  $\epsilon_{zz}=0$ )

BC	$k_x$	$k_z$	Le et al. (2021)( $\epsilon_{zz}=0$ )				Présent modèle ( $\epsilon_{zz}=0$ )			
			1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-3-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-3-1
SS	0.5	1	22.4141	23.9743	25.7494	28.2611	22.4867	24.0607	25.8541	28.3907
		5	13.1104	14.8785	16.8657	20.1442	13.1179	14.8974	16.9019	20.2091
	1	1	20.5510	21.8977	23.4018	25.5469	20.6917	22.0648	23.6039	25.7971
		5	12.5860	14.1410	15.8085	18.6138	12.5993	14.1737	15.8696	18.7265
	5	1	12.8243	13.2439	13.6454	14.2476	12.7246	13.1888	13.6331	14.3165
		5	10.3860	10.9666	11.4198	12.2690	10.2200	10.8025	11.2421	12.1261
CC	0.5	1	76.0574	80.6826	86.1880	93.5323	76.5008	81.2197	86.8556	94.3608
		5	46.7627	52.4345	59.0953	69.3630	46.7671	52.5364	59.3332	69.8140
	1	1	69.4573	73.4029	78.0377	84.2473	70.1768	74.2705	79.1009	85.5685
		5	44.6369	49.5548	55.1390	63.8327	44.6512	49.7040	55.4615	64.4623
	5	1	43.5778	44.7739	46.1015	47.8416	41.8807	43.1935	44.5837	46.5325
		5	35.6559	37.4556	39.2983	42.0203	34.3608	36.0768	37.6528	40.3057

**Tableau V.7** Comparaison des charges critiques de flambement sans dimension  $N_{cr}$  des poutres sandwich FG associées à différentes conditions aux limites ( $L/h=20$ ,  $\epsilon_{zz}=0$ )

BC	$k_x k_z$		Le et al. (2021)( $\epsilon_{zz}=0$ )				Présent Modèle ( $\epsilon_{zz}=0$ )			
			1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-3-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-3-1
SS	0.5	1	23.7295	25.4631	27.4061	30.2149	23.7961	25.5397	27.4960	30.3229
		5	13.6268	15.5316	17.6415	21.2072	13.6386	15.5510	17.6735	21.2596
	1	1	21.7923	23.2940	24.9433	27.3493	21.9233	23.4480	25.1272	27.5753
		5	13.1124	14.7957	16.5675	19.6292	13.1282	14.8264	16.6219	19.7272
	5	1	13.6900	14.1695	14.6120	15.2999	13.6451	14.1697	14.6584	15.4312
		5	10.9709	11.6202	12.0942	13.0418	10.8663	11.5153	11.9706	12.9520
CC	0.5	1	93.5362	100.285	107.867	118.781	94.0889	100.918	108.605	119.663
		5	54.0179	61.4885	69.7772	83.7192	54.1248	61.6628	70.0540	84.1625
	1	1	85.8604	91.6853	98.1001	107.414	86.6612	92.6291	99.2284	108.800
		5	51.9838	58.5696	65.5300	77.4704	52.0756	58.7641	65.8632	78.0740
	5	1	56.8300	58.8964	60.9217	63.9358	53.8019	55.8443	57.7615	60.7780
		5	44.3807	47.2186	49.6277	53.9396	42.9212	45.4663	47.2693	51.1093

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

Les valeurs charges critiques de flambement des poutres sandwich FG C-C et S-S pour différentes valeurs d'exposant de la fraction volumique  $k_z$ ,  $k_x=0$  avec  $\varepsilon_{zz}=0$  et  $L/h=20$  sont présentées dans le tableau V.8. Ces résultats obtenus par le modèle actuel pour différentes aux limites sont comparées avec ceux déterminés par Tossapanon et Wattanasakulpong (2016) et Vo et al. (2014) pour les poutres encastées (CC) et simplement appuyées (SS) aux deux extrémités.

Quatre rapports d'épaisseur de couche, 1-0-1, 1-1-1, 2-1-2 et 1-5-1, sont sélectionnés pour valider la comparaison. Là encore, un excellent accord est obtenu entre les solutions actuelles et celles existant dans la littérature.

**Tableau V.8** Les charges critiques de flambement des poutres sandwich FG C-C et S-S pour différentes valeurs d'exposant de fraction volumique  $k_z$ ,  $k_x=0$  avec  $\varepsilon_{zz}=0$  et  $L/h=20$

$k_z$	Théorie	CC ( $\varepsilon_{zz}=0$ )				SS ( $\varepsilon_{zz}=0$ )			
		1-0-1	1-1-1	2-1-2	1-5-1	1-0-1	1-1-1	2-1-2	1-5-1
<b>0</b>	Réf. 1	208.9495	208.9495	208.9495	208.9495	53.2364	53.2364	53.2364	53.2364
	Vo et al. (2014)	208.9510	208.9510	208.9510	/	53.2364	53.2364	53.2364	/
	Présent modèle	208.9621	208.9621	208.9621	208.9621	53.2372	53.2372	53.2372	53.2372
<b>0.5</b>	Réf. 1	117.1025	134.2876	126.3037	168.5682	29.7047	34.0738	32.0404	42.8453
	Vo et al. (2014)	117.3030	134.4810	126.5080	/	29.7175	34.0862	32.2629	/
	Présent modèle	117.2975	134.4828	126.5054	168.6769	29.7172	34.0864	32.0533	42.8523
<b>1</b>	Réf. 1	81.8104	102.4747	92.4807	149.5420	20.7096	25.9467	23.4088	37.9626
	Vo et al. (2014)	81.9927	102.6650	92.6741	/	20.7212	25.9588	23.4211	/
	Présent modèle	81.9840	102.6630	92.6675	149.6687	20.7205	25.9588	23.4208	37.9707
<b>5</b>	Réf. 1	41.9324	56.3501	47.8608	115.4499	10.6079	14.2191	12.0790	29.2387
	Vo et al. (2014)	42.0775	56.4958	48.0070	/	10.6171	14.2284	12.0883	/
	Présent modèle	42.0619	56.4867	47.9941	115.5867	10.6162	14.2278	12.0875	29.2475

Réf. 1 : Tossapanon and Wattanasakulpong (2016)

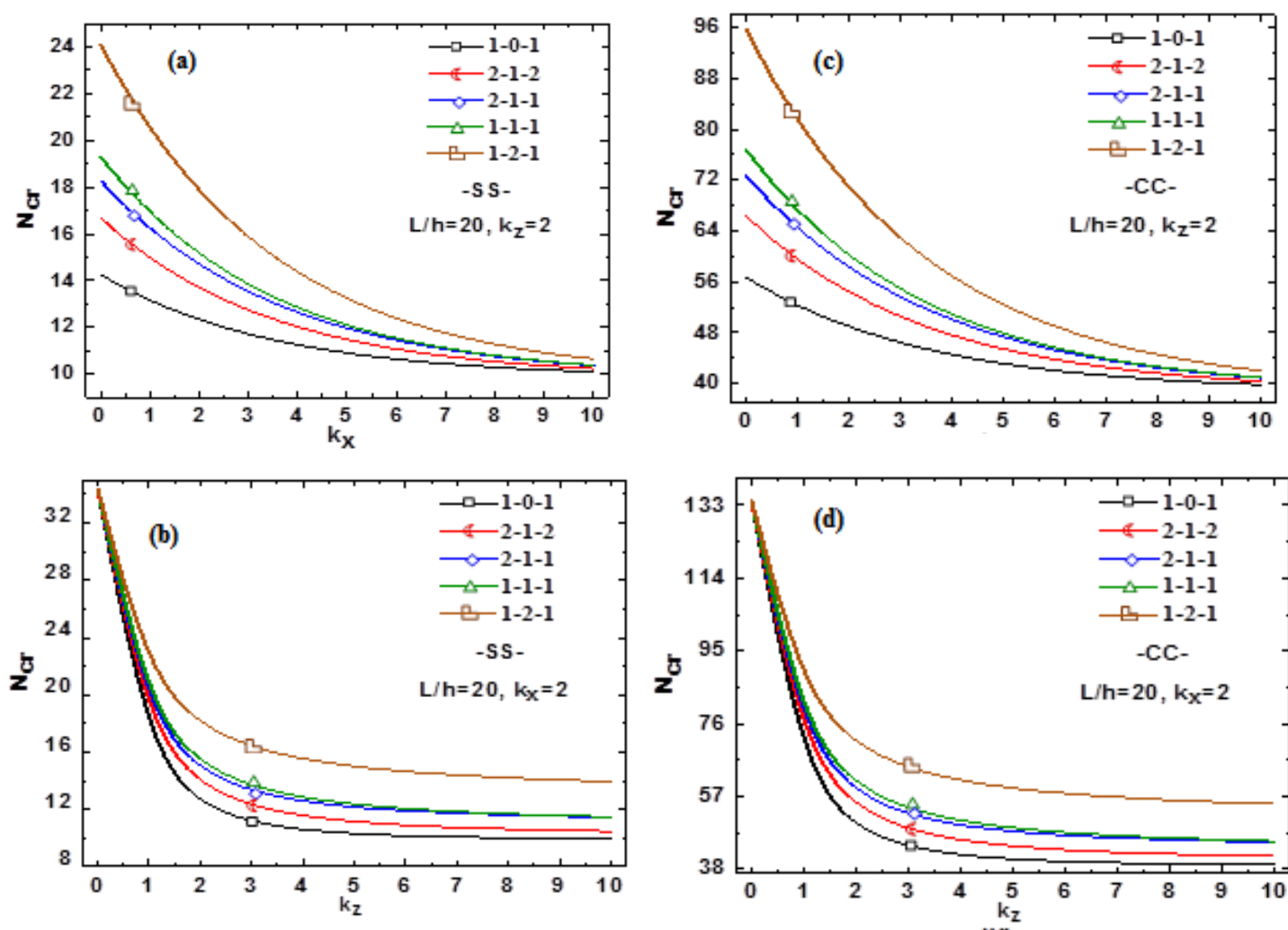
### V.5.1 : Effet du modèle micromécanique sur les charges de flambement

L'effet du modèle micromécanique sur les charges de flambement de la poutre BFGSW est mis en évidence dans les figures V.3a-d. pour deux types de poutres (SS simplement appuyée ou CC encastée-encastée) pour différentes configurations avec des rapports d'épaisseur de couche symétriques et non symétriques en fonction des indices de loi de puissance ( $k_x$  et  $k_z$ ). On note quel que soit le type des conditions aux limites (SS ou CC) et pour un indice de loi de puissance  $k_z = 2$ , la variation de les charges critiques en fonction de l'indice de la loi de puissance axial (suivant l'épaisseur)  $k_x$  présentent des valeurs maximales pour des faibles valeurs de  $k_x$  ( $k_x \leq 6$ ) avec des différences significatives au niveau des faibles valeurs de l'indice de la loi de puissance  $k_x$ . Les valeurs les plus élevées sont obtenus pour la configuration (1-2-

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

1) et les plus faibles valeurs de la charge pour les configurations (1-0-1). Au-delà de cette valeur de  $k_x$ , ces différences s'amenuisent avec l'augmentation de loi de puissance.

La tendance inverse est observée pour les variations de la charge dans le sens de la variation transversale, lorsque l'indice  $k_z$  augmente la différence entre les différentes valeurs de la charge augmentent, alors pour un indice  $k_z$  faible, quel que soit la configuration, la charge critique est la même.



*Figure V.3 Effet du modèle micromécanique sur le paramètre de charge de flambement de la poutre sandwich FGM*

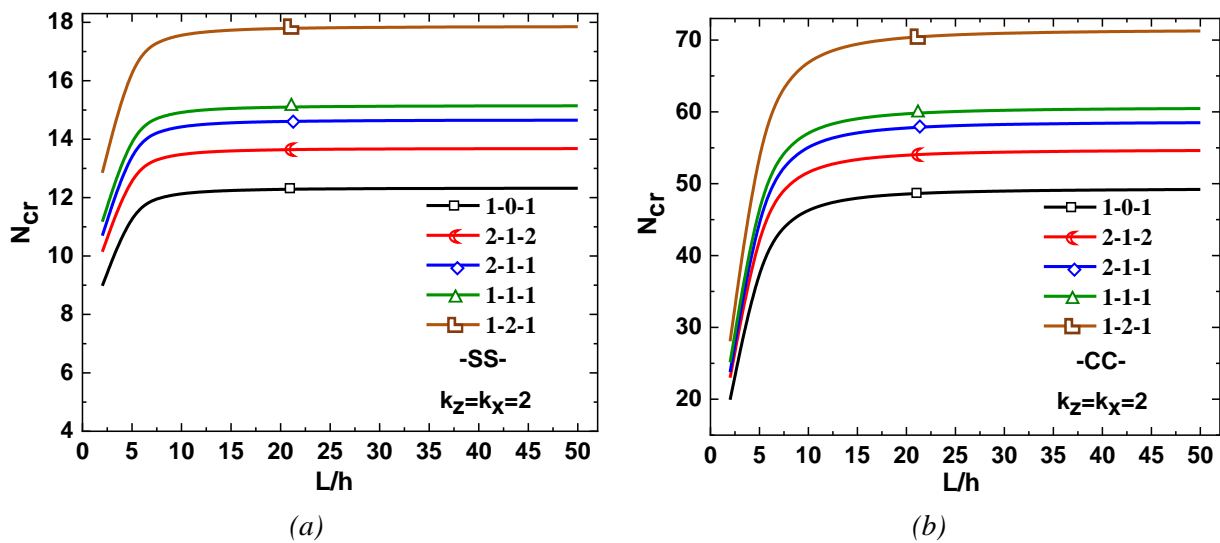
### V.5.2 : Effet du rapport 'L/h' sur la charge critique de flambement

Les Figures V.4a-b présentent la variation de la charge critique de flambement en fonction du rapport portée/hauteur  $L/h$  pour diverses poutres sandwich SS et CC FGM avec



## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

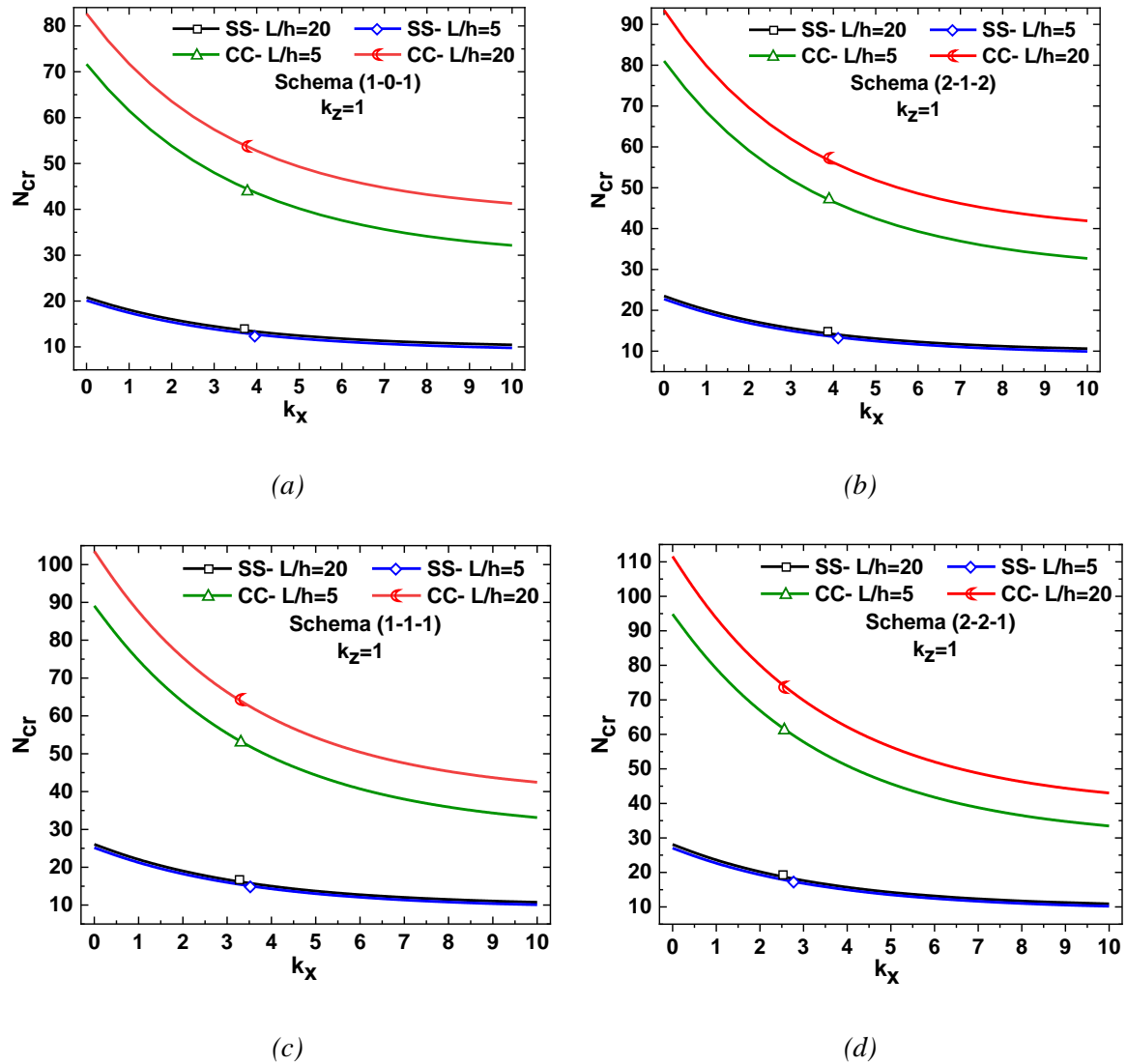
les mêmes indices de la loi de puissance ( $k_x=k_z = 2$ ) dans une plage de valeurs du rapport portée/hauteur compris entre  $2,5 \leq L/h \leq 50$ . Les charges maximales de flambement sont obtenues dans le cas de la configuration (1-2-1) et les valeurs minimales de flambement pour la configuration (1-0-1) et ceci dans les deux conditions aux limites SS ou CC. Ces résultats montrent que l'effet du rapport portée/hauteur  $L/h$  sur la variation de la charge de flambement est prépondérant. En outre, on constate que la charge critique de flambement est plus faible pour une poutre associée à des faibles rapports " $L/h \leq 10$ " où l'influence de ce rapport est importante. Pour les valeurs du rapport " $L/h \geq 20$ ", les charges sont presque constantes.



*Figure V.4 Effet du rapport portée/hauteur sur les paramètres de charge de flambement de la poutre sandwich FGM*

### V.5.3 : Effet de l'indice matériel sur la charge critique de flambement

La Figure V.5a-d présente l'évolution de la charge critique de flambement en fonction de l'indice de loi de puissance avec deux conditions aux limites différentes (SS et CC) et deux valeurs de rapport " $L/h$ " (5 et 20) pour les cas (1-0-1), (2-1-2), (1-1-1) et (2-2-1) des poutres BFGSW, respectivement. Les résultats montrent que les poutres BFGSW avec un indice de fraction volumique inférieur à 6 développent des charges critiques de flambement élevées. Ceci est attendu car ces poutres sont celles qui ont la rigidité la plus élevée par rapport aux poutres BFGSW avec un indice de fraction volumique  $k_x = 10$ . On peut conclure qu'au-delà de la valeur de  $k_x=6$ , l'influence du modèle micromécanique devient moins importante.



**Figure V.5** Effet de l'indice de loi de puissance  $k_x$  sur les charges critiques de flambement adimensionnelles de (1-0-1), (2-1-2), (1-1-1) et (2-2-1) Poutres FGSW avec diverses conditions aux limites ( $L/h = 5$  et  $20$ )

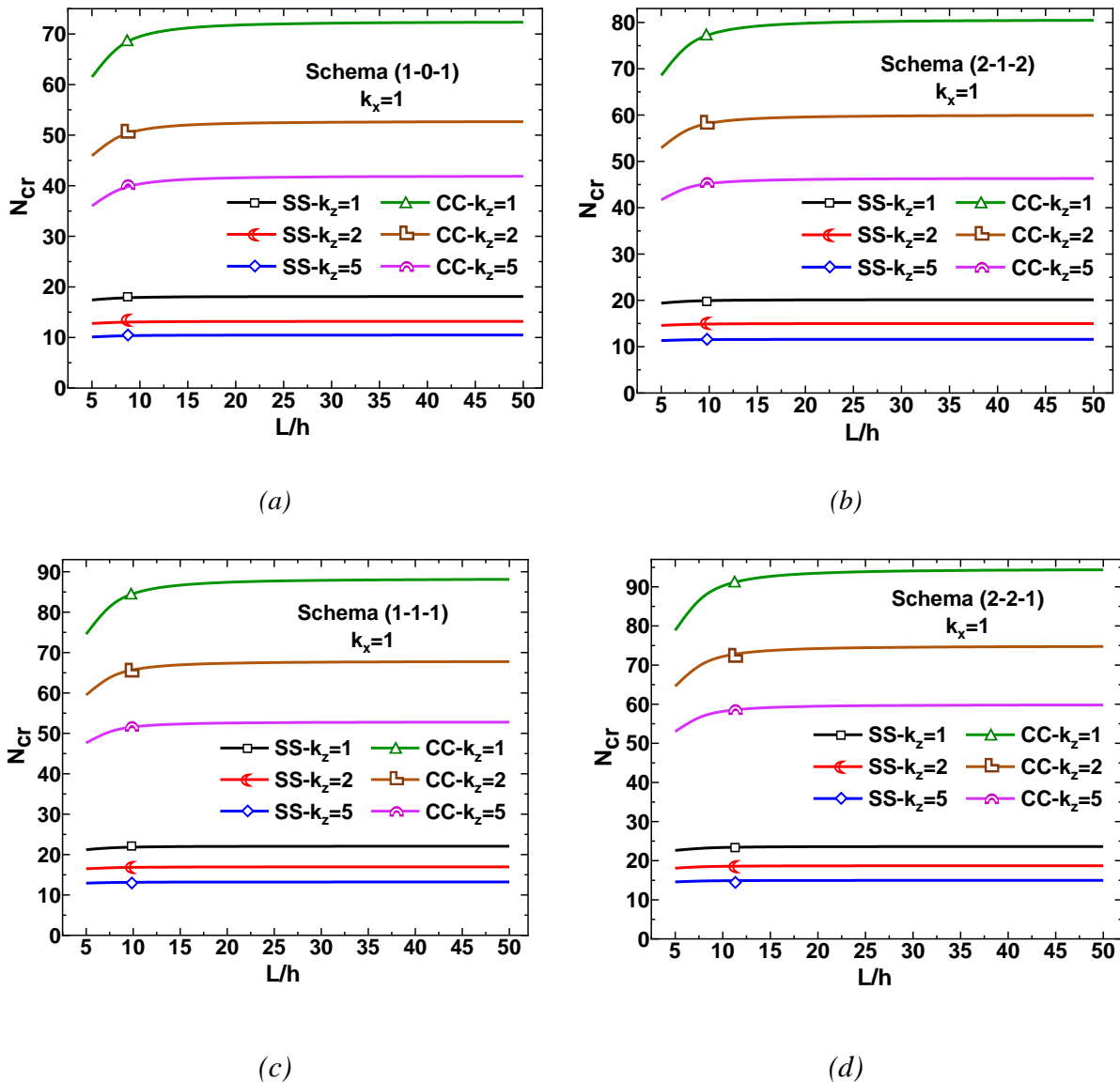
#### V.5.4 : Effet du rapport “ $L/h$ ” sur la charge critique de flambement des poutres symétriques et non-symétriques

Les figures V.6 a et V.6.b présentent la variation de la charge critique de flambement des poutres FGSW symétriques (1-0-1, 2-1-2 et 1-1-1) et non symétriques (2-2-1) avec deux conditions aux limites différentes (SS et CC) en fonction du rapport “ $L/h$ ”.

Ces résultats montrent que la charge critique de flambement des poutres sandwich FG symétriques et non symétriques encastées CC. sont les plus élevées d’une part, d’autre part ces charges diminuent lorsque le rapport portée-hauteur est égal ou inférieur à 10 ( $L/h \leq 10$ ) au-delà de cette valeur les charges varient peu particulièrement au-delà de  $L/h \geq 20$ . L’effet du

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

rapport de charge est significatif pour " $L/h \leq 10$ " pour les poutres sandwich FG symétriques et non symétriques encastées CC. Par contre les charges présentent des valeurs minimales pour poutres sandwich FG symétriques et non symétriques simplement appuyées SS, l'effet du rapport " $L/h$ " est négligeable. Ces résultats montrent l'excellente capacité de la théorie des poutres proposée dans la modélisation de la déformation par cisaillement de la poutre BFGSW bidirectionnelle.



**Figure V.6** Effet du rapport " $L/h$ " sur les charges de flambement critiques adimensionnelles de (1-0,1), (2-1-2), (1-1-1) et (2-2-1) Poutres sandwich FG avec les deux conditions aux limites ( $k_x = 1, 2$  et 5)

### V.6 Conclusion

Dans ce chapitre une solution analytique pour l'analyse de flambement des poutres BFGSW basée sur une théorie intégrale quasi-3D des poutres est utilisée. Les solutions analytiques sont développées pour étudier l'analyse de flambement des charges mécaniques avec différentes conditions aux limites à partir du modèle de Navier. Les effets de l'indice de loi de puissance, du rapport ' $L/h$ ', des rapports d'épaisseur peau-cœur-peau et des conditions aux limites sur les charges critiques de flambement sont discutés. La théorie proposée est précise et efficace pour résoudre le comportement en flambement des poutres sandwich FG (FGSWB).

Une extension de la présente théorie peut être réalisée dans les travaux suivants pour l'analyse des comportements des différents types de structures et de matériaux, tels que ceux utilisés dans les travaux (Kiani, 2019 ; Mehar& Panda, 2019 ; Shahsavari et al. , 2019 ; Yaylaci&Avcı, 2020 ; Bharath et al., 2020 ; Al-Basyouni et al., 2020 ; Fenjan et al., 2020 ; Timesli 2020, Ahmed et al. 2021, Akbas 2021).

## References

- Abouelregal AE, Mohammed WW. Sedighi H.M. (2021), “Vibration analysis of functionally graded microbeam under initial stress via a generalized thermoelastic model with dual-phase lagsé, *Arch. Appl. Mech.* <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01873-2>.
- Abdellatif Selmi (2021). Vibration behavior of bi-dimensional functionally graded beams. *77(5)*, 587-599. [Doi.org/10.12989/sem.2021.77.5.587](https://doi.org/10.12989/sem.2021.77.5.587).
- Ahmed, R.A., Fenjan, R.M., Faleh, N.M. (2019), “Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections”, *Geomechanics and Engineering*, **17(2)**, 175-180. <https://doi.org/10.12989/gae.2019.17.2.175>.
- Ahmed, R.A., Khalaf, B.S., Raheef, K.M., Fenjan, R.M., Faleh, N.M. (2021), “Investigating dynamic response of nonlocal functionally graded porous piezoelectric plates in thermal environment”, *Steel and Composite Structures*, **40(2)**, 243-254. DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2021.40.2.243>
- Akbas, S. D. (2015), “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel and Composite Structures*, **19(6)**, 1421–1447. <https://doi.org/10.12989/SCS.2015.19.6.1421>.
- Akbas, S.D. (2021), “Dynamic analyses of axially functionally graded porous beams under a moving load”, *Steel and Composite Structures*, **39(6)**, 811-821. DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2021.39.6.811>
- Al-Basyouni, K. S., Ghandourah, E., Mostafa, H. M. and Algarni, A. (2020), “Effect of the rotation on the thermal stress wave propagation in non-homogeneous viscoelastic body”, *Geomechanics and Engineering*, **21(1)**, 1–9. <https://doi.org/10.12989/GAE.2020.21.1.001>.
- Alper Polat., (2021). Examination of contact problem between functionally graded punch and functionally graded layer resting on elastic plane. *Structural Engineering and Mechanics*, **78(2)**, 135-143. [Doi.org/10.12989/sem.2021.78.2.135](https://doi.org/10.12989/sem.2021.78.2.135).
- Arbind, A., & Reddy, J. N. (2013), “Nonlinear analysis of functionally graded microstructure-dependent beams”, *Composite Structures*, **98**, 272–281. [doi:10.1016/j.compstruct.2012.10.003](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.10.003).
- Asemi, K. and Shariyat, M. (2016), “Three-dimensional biaxial post-buckling analysis of heterogeneous auxetic rectangular plates on elastic foundations by new criteria”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **302**, 1-26.
- Attia, M.A. (2017), “On the mechanics of functionally graded nanobeams with the account of surface elasticity”, *International Journal of Engineering Science*. **115**,73-101. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.03.011>.

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

- Avcar, M. (2019), “Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **30**(6), 603–615. <https://doi.org/10.12989/SCS.2019.30.6.603>.
- Bakora, A. and Tounsi, A. (2015), “Thermo-mechanical postbuckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations”, *Struct. Eng. Mech.*, **56**(1), 85-106.
- Bhangale, R. K., & Ganesan, N. (2006), “Thermoelastic buckling and vibration behavior of a functionally graded sandwich beam with constrained viscoelastic core”, *Journal of Sound and Vibration*, **295**(1-2), 294–316. [doi:10.1016/j.jsv.2006.01.026](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.026).
- Bharath, H. S., Waddar, S., Bekinal, S. I., Jeyaraj, P. and Doddamani, M. (2020), “Effect of axial compression on dynamic response of concurrently printed sandwich”, *Composite Structures*, 113223. [doi:10.1016/j.compstruct.2020.113223](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113223).
- Bouhadra, A., Menasria, A., & Rachedi, M. A. (2021), “Boundary conditions effect for buckling analysis of porous functionally graded nanobeam”, *Advances in Nano Research*, **10**(4), 313–325. <https://doi.org/10.12989/ANR.2021.10.4.313>.
- Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., & Reddy, J. N. (2003), “A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **45**(3), 519–539. [doi:10.1016/s0020-7403\(03\)00058-4](https://doi.org/10.1016/s0020-7403(03)00058-4).
- Chehel Amirani, M., Khalili, S. M. R., & Nemati, N. (2009), “Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method”, *Composite Structures*, **90**(3), 373–379. [doi:10.1016/j.compstruct.2009.03.023](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.03.023).
- Chen, D., Yang, J., & Kitipornchai, S. (2017), “Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams”, *Composites Science and Technology*, **142**, 235–245. [doi:10.1016/j.compscitech.2017.02.008](https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2017.02.008). Chen et al. 2017
- Daouadji, T.H. and Hadji, L. (2015), “Analytical solution of nonlinear cylindrical bending for functionally graded plates”, *Geomechanics and Engineering*, **9**(5), 631–644. <https://doi.org/10.12989/GAE.2015.9.5.631>.
- Deng, H., & Cheng, W. (2016), “Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams”, *Composite Structures*, **141**, 253–263. [doi:10.1016/j.compstruct.2016.01.051](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.051).
- Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory”, *Steel Compos. Struct.*, **13**(1), 91-107.
- Farokhi, H., Ghayesh, M. H., & Gholipour, A. (2017), “Dynamics of functionally graded micro-cantilevers”, *International Journal of Engineering Science*, **115**, 117–130. [doi:10.1016/j.ijengsci.2017.01.004](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.01.004).
- Fenjan, R. M., Faleh, N. M., & Ahmed, R. A. (2020), “Geometrical imperfection and thermal effects on nonlinear stability of microbeams made of graphene-reinforced nanocomposites”, *Advances in Nano Research*, **9**(3), 147–156. <https://doi.org/10.12989/ANR.2020.9.3.147>.

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

- Fukui, Y. (1991), “Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force”, *JSME International Journal. Ser. 3, Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry*, **34**(1), 144–148. [doi:10.1299/jsmec1988.34.144](https://doi.org/10.1299/jsmec1988.34.144).
- Gafour, Y., Hamidi, A., Benahmed, A., Zidour, M., & Bensattalah, T. (2020), “Porosity-dependent free vibration analysis of FG nanobeam using non-local shear deformation and energy principle”, *Advances in nano research*, **8**(1), 37-47. <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.1.037>.
- Hadji, L., (2020), “Influence of the distribution shape of porosity on the bending of FGM beam using a new higher order shear deformation model”, *Smart Structures and Systems*, **26**(2), 253-262. <https://doi.org/10.12989/sss.2020.26.2.253>.
- Huang, Y. and Li, X.F. (2010), “Buckling of functionally graded circular columns including shear deformation”, *Mater. Des.*, **31**(7), 3159-3166.
- Jia, X. L., Ke, L. L., Feng, C. B., Yang, J., & Kitipornchai, S. (2015), “Size effect on the free vibration of geometrically nonlinear functionally graded micro-beams under electrical actuation and temperature change”, *Composite Structures*, **133**, 1137–1148. [doi:10.1016/j.compstruct.2015.08.044](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.044).
- Karami, B., & Karami, S. (2019), “Buckling analysis of nanoplate-type temperature-dependent heterogeneous materials”, *Advances in Nano Research*, **7**(1), 51–61. <https://doi.org/10.12989/ANR.2019.7.1.051>.
- Ke, L.-L., Yang, J., Kitipornchai, S., & Bradford, M. A. (2012), “Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates”, *Composite Structures*, **94**(11), 3250–3257. [doi:10.1016/j.compstruct.2012.04.037](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.037).
- Kiani, Y. and Eslami, M.R. (2010), “Thermal buckling analysis of functionally graded material beams”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **6**(3), 229-238.
- Kiani, Y. (2019), “NURBS-based thermal buckling analysis of graphene platelet reinforced composite laminated skew plates”, *Journal of Thermal Stresses*, 1–19. [doi:10.1080/01495739.2019.1673687](https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1673687).
- Le, C. I., Le, N. A. T., & Nguyen, D. K. (2021), “Free vibration and buckling of bidirectional functionally graded sandwich beams using an enriched third-order shear deformation beam element”, *Composite Structures*, **261**, 113309. [doi:10.1016/j.compstruct.2020.113309](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113309).
- Lee, J. W., & Lee, J. Y. (2017), “Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **122**, 1–17. [doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.01.011](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.011).
- Li, L., & Hu, Y. (2017), “Post-buckling analysis of functionally graded nanobeams incorporating non-local stress and microstructure-dependent strain gradient effects”,

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

- International Journal of Mechanical Sciences*, **120**, 159–170. doi:10.1016/j.ijmecsci.2016.11.025.
- Lü, C. F., Chen, W. Q., Xu, R. Q., & Lim, C. W. (2008), “Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams”, *International Journal of Solids and Structures*, **45**(1), 258–275. doi:10.1016/j.ijsolstr.2007.07.018.
- Madenci, E. (2019), “A refined functional and mixed formulation to static analyses of fgm beams”, *Structural Engineering and Mechanics*, **69**(4), 427-437. DOI: 10.12989/sem.2019.69.4.427.
- Ma, X., Sahmani, S. & Safaei, B. Quasi-3D large deflection nonlinear analysis of isogeometric FGM microplates with variable thickness via nonlocal stress–strain gradient elasticity. *Engineering with Computers* (2021). <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01390-y>.
- Mehar, K. and Panda, S. K. (2019), “Multiscale modeling approach for thermal buckling analysis of nanocomposite curved structure”, *Advances in Nano Research*, **7**(3), 181–190. <https://doi.org/10.12989/ANR.2019.7.3.181>.
- Merzoug, M., Bourada, M., Sekkal, M., Ali Chaibdra, A., Belmokhtar, C., Benyoucef, S. and Benachour, A. (2020), “2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models”, *Geomechanics and Engineering.*, **22**(4), 361-374. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.4.361>.
- Mozafari, H. and Ayob, A. (2012), “Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of functionally graded materials”, *Proc. Tech.*, 1,496-504.
- Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M. (2013), “Free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique”, *Compos. B*, **44**(1), 657-674.
- Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Nguyen, B.-D., & Lee, J. (2016), “An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory”, *Composite Structures*, **156**, 238–252. doi:10.1016/j.compstruct.2015.11.074.
- Nguyen, D.K., Vu, A.N.T., Le, N.A.T.: Dynamic behaviour of a bidirectional functionally graded sandwich beam under nonuniform motion of a moving load. *Shock Vib.* (2020). <https://doi.org/10.1155/2020/8854076>.
- Osofero, A. I., Vo, T. P., Nguyen, T.-K., & Lee, J. (2015), “Analytical solution for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams using various quasi-3D theories”, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **18**(1), 3–29. doi:10.1177/1099636215582217.



## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

- Öner Erdal, Yaylaci Murat, Birinci Ahmet (2015). Analytical solution of a contact problem and comparison with the results from FEM. *Structural Engineering And Mechanics*, 54(4), 607-622. <https://doi.org/10.12989/sem.2015.54.4.000>.
- Öner et al (2022), “Study the double receding contact problem of two layers made of E-FG materials and supported by homogeneous half plane using different methods (CM, FEM and ANM)”. <https://doi.org/10.1002/zamm.202100287>
- Öner, E., Şengül Şabano, B., Uzun Yaylacı, E., Özdemir, M.E. and Birinci, A., (2022), “Solving the contact problem of functionally graded layers resting on a HP and pressed with a uniformly distributed load by analytical and numerical methods”, *Structural Engineering and Mechanics*, **82**(3), 401-416. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2022.82.3.401>
- Pradhan, S. C., & Murmu, T. (2009), “Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method”, *Journal of Sound and Vibration*, **321**(1-2), 342–362. [doi:10.1016/j.jsv.2008.09.018](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.018).
- Priyanka, R., Twinkle, C.M. & Pitchaimani, J. Stability and dynamic behavior of porous FGM beam: influence of graded porosity, graphene platelets, and axially varying loads. *Engineering with Computers* (2021). <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01478-5>.
- Rachedi, M.A., Benyoucef, S., Bouhadra, A., Bachir Bouiadjra, R., Sekkal, M., Benachour, A. (2020), “Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation”, *Geomechanics and Engineering*, **22**(1), 65-80. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.1.065>.
- Rajasekaran, S., Khaniki, H.B.: Size-dependent forced vibration of non-uniform bi-directional functionally graded beams embedded in variable elastic environment carrying a moving harmonic mass. *Appl. Math. Model.* 72, 129–154 (2019).
- Reddy, J.N. (1997), “Mechanics of laminated composite plate: Theory and analysis”, CRC Press, New York, U.S.A.
- Reddy, J. N. (2011), “Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **59**(11), 2382–2399. [doi:10.1016/j.jmps.2011.06.008](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2011.06.008).
- Refrafi, S., Bousahla, A.A., Bouhadra, A., Menasria, A. Bourada, F., Tounsi, A. Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou, K.H., and Tounsi, A. (2020). Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations. *Computers and Concrete*, 25 (4), 311-325. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.4.311>.
- Saha, R. and Maiti, P.R. (2012), “Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial load”, *Int. J. Civil Struct. Eng.*, 2(4), 1036-1050.
- Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. (2018), “Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: A review”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1–20. [doi:10.1080/15376494.2018.1447178](https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1447178).

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

- Selmi, A. (2020), "Exact solution for nonlinear vibration of clamped-clamped functionally graded buckled beam". *Smart Structures and Systems.*, **26**(3), 361–371. <https://doi.org/10.12989/SSS.2020.26.3.361>.
- Shafiei, N., & Kazemi, M. (2017), "Nonlinear buckling of functionally graded nano-/micro-scaled porous beams", *Composite Structures*, **178**, 483–492. [doi:10.1016/j.compstruct.2017.07.045](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.07.045).
- Shahsavari, D., Karami, B., & Janghorban, M. (2019), "Size-dependent vibration analysis of laminated composite plates", *Advances in Nano Research*, **7**(5), 337–349. <https://doi.org/10.12989/ANR.2019.7.5.337>.
- Şimşek, M. (2015), "Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions", *Composite Structures*, **133**, 968–978. [doi:10.1016/j.compstruct.2015.08.021](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.021).
- Şimşek, M., & Al-shujairi, M. (2017), "Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads", *Composites Part B: Engineering*, **108**, 18–34. [doi:10.1016/j.compositesb.2016.09.098](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.098).
- Şimşek, M., & Yurtcu, H. H. (2013), "Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory", *Composite Structures*, **97**, 378–386. [doi:10.1016/j.compstruct.2012.10.038](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.10.038).
- Soncco, K., Jorge, X., & Arciniega, R. (2019), "Postbuckling Analysis of Functionally Graded Beams", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **473**, 012028. [doi:10.1088/1757-899x/473/1/012028](https://doi.org/10.1088/1757-899x/473/1/012028).
- Songsuwan, W., Pimsarn, M., & Wattanasakulpong, N. (2018), "Dynamic Responses of Functionally Graded Sandwich Beams Resting on Elastic Foundation Under Harmonic Moving Loads", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **18**(50), 1850112. [doi:10.1142/s0219455418501122](https://doi.org/10.1142/s0219455418501122).
- Su, Z., Jin, G., Wang, Y., & Ye, X. (2016), "A general Fourier formulation for vibration analysis of functionally graded sandwich beams with arbitrary boundary condition and resting on elastic foundations", *Acta Mechanica*, **227**(5), 1493–1514. [doi:10.1007/s00707-016-1575-8](https://doi.org/10.1007/s00707-016-1575-8).
- Thai, H.T. and Vo, T.P. (2013), "A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates", *Appl. Math. Model.*, **37**(5), 3269–3281.
- Timesli, A. (2020), "Prediction of the critical buckling load of SWCNT reinforced concrete cylindrical shell embedded in an elastic foundation", *Computers and Concrete.*, **26**(1), 53–62. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.1.053>.
- Tossapanon, P., & Wattanasakulpong, N. (2016), "Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation", *Composite Structures*, **142**, 215–225. [doi:10.1016/j.compstruct.2016.01.085](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.085).

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

- Trinh, L. C., Vo, T. P., Osofero, A. I., & Lee, J. (2016), “Fundamental frequency analysis of functionally graded sandwich beams based on the state space approach”, *Composite Structures*, **156**, 263–275. doi:10.1016/j.compstruct.2015.11.010.
- Uzun Yaylacı, E., Yaylacı, M., Ölmez, H. and Birinci, A., (2020). Artificial Neural Network Calculations for A Receding Contact Problem, *Computers and Concrete*, Vol.25, 6, <https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.6.551>.
- Vedat Taskin and Pinar Aydan Demirhan (2021). Static analysis of simply supported porous sandwich plates. *77(4)*, 549-557. Doi.org/10.12989/sem.2021.77.4.549.
- Vinyas, M. (2020), “On frequency response of porous functionally graded magneto-electro-elastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT”, *Composite Structures*, **240**, 112044. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112044>.
- Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Inam, F., & Lee, J. (2015), “A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams”, *Composite Structures*, **119**, 1–12. doi:10.1016/j.compstruct.2014.08.006.
- Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Inam, F., & Lee, J. (2015), “Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory”, *Composites Part B: Engineering*, **68**, 59–74. doi:10.1016/j.compositesb.2014.08.030.
- Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Maheri, A., & Lee, J. (2014), “Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory”, *Engineering Structures*, **64**, 12–22. doi:10.1016/j.engstruct.2014.01.029.
- Wang, Z., Wang, X., Xu, G., Cheng, S., & Zeng, T. (2016), “Free vibration of two-directional functionally graded beams”, *Composite Structures*, **135**, 191–198. doi:10.1016/j.compstruct.2015.09.013.
- Wu, H., Kitipornchai, S., & Yang, J. (2017), “Imperfection sensitivity of thermal post-buckling behaviour of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams”, *Applied Mathematical Modelling*, **42**, 735–752. doi:10.1016/j.apm.2016.10.045.
- Xiaohui Y., Saeid S., and Babak S., (2019). Post buckling analysis of hydrostatic pressurized FGM microsized shells including strain gradient and stress-driven nonlocal effects. *37(2)*, 1549–1564. Doi.org/10.1007/s00366-019-00901-2.
- Yang, J., Liew, K.M. and Kitipornchai, S. (2005), “Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates”, *Compos. Sci. Tech.*, **65(7-8)**, 1165-1175.
- Yang, J., Wu, H., & Kitipornchai, S. (2017), “Buckling and postbuckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite beams”, *Composite Structures*, **161**, 111–118. doi:10.1016/j.compstruct.2016.11.048.

## Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)

---

- Yang, T., Tang, Y., Li, Q., & Yang, X.-D. (2018), « Nonlinear bending, buckling and vibration of bi-directional functionally graded nanobeams », *Composite Structures*, **204**, 313–319. [doi:10.1016/j.compstruct.2018.07.045](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.045).
- Yang, Y., Lam, C. C., Kou, K. P., & Iu, V. P. (2014), “Free vibration analysis of the functionally graded sandwich beams by a meshfree boundary-domain integral equation method”, *Composite Structures*, **117**, 32–39. [doi:10.1016/j.compstruct.2014.06.016](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.06.016).
- Yarasca, J., Mantari, J. L., & Arciniega, R. A. (2016), “Hermite–Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams”, *Composite Structures*, **140**, 567–581. [doi:10.1016/j.compstruct.2016.01.015](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.015).
- Yaylaci Murat, Birinci Ahmet (2013). The receding contact problem of two elastic layers supported by two elastic quarter planes. *Structural Engineering and Mechanics*, 48(2), 241-255. <http://doi.org/10.12989/sem.2013.48.2.241>.
- Yaylaci M., (2016). The investigation crack problem through numerical analysis, *Structural Engineering and Mechanics*, 57(6), 1143-1156. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2016.57.6.1143>.
- Yaylaci, M., Terzi, C. and Avcar, M., (2019). Numerical analysis of the receding contact problem of two bonded layers resting on an elastic half plane, *Structural Engineering and Mechanics*. <https://doi.org/10.12989/sem.2019.72.6.325>.
- Yaylaci, M. and Avcar, M. (2020), “Finite element modeling of contact between an elastic layer and two elastic quarter planes”, *Computers and Concrete*, **26**(2), 107–114. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.2.107>.
- Yaylaci, M., Adiyaman, E., Öner, E. and Birinci, A., (2020). Examination of analytical and finite element solutions regarding contact of a functionally graded layer, *Structural Engineering and Mechanics*. <https://doi.org/10.12989/sem.2020.76.3.325>.
- Yaylaci, M., Eyüboğlu, A., Adiyaman, G., Uzun Yaylaci, E., Öner, E. and Birinci, A., (2021)“Assessment of different solution methods for receding contact problems in functionally graded layered mediums”, *Mechanics of Materials*, <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103730>.
- Yaylaci M., Yaylı M., Uzun Yaylaci E., Ölmez, H. and Birinci A., (2021). Analyzing the contact problem of a functionally graded layer resting on an elastic half plane with theory of elasticity, finite element method and multilayer perceptron, *Structural Engineering and Mechanics*, 78(5), 585-597. DOI: 10.12989/sem.2021.78.5.585.
- Yaylaci M., Abanoz M., Yaylaci E. U., Ölmez H., Sekban D.M., and Birinci A., (2022). Evaluation of the contact problem of functionally graded layer resting on rigid foundation pressed via rigid punch by analytical and numerical (FEM and MLP) methods, *Archive of Applied Mechanics* (2022) 92:1953–1971. <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02159-5>.

## **Chapitre V Analyse du flambement statique des poutres sandwich à gradient de propriétés bidirectionnelles (BFGSW)**

---

- Yaylacı M., (2022). Simulate of edge and an internal crack problem and estimation of stress intensity factor through finite element method, *Advances in Nano Research*, 12(4), 405-414. DOI: <https://doi.org/10.12989/anr.2022.12.4.405>.
- Zenkour, A.M. (2006), “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Appl. Math. Model.*, 30(1), 67-84.
- Zenkour, A. M. r & A. F. Radwan, “hygrothermo-mechanical buckling of FGM plates resting on elastic foundations using a quasi-3D model,” *Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, DOI: 10.1080/15502287.2019.1568618.
- Zhao, X., Lee, Y.Y. and Liew, K.M. (2009), “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Compos. Struct.*, 90(2), 161-171.

---

# *CONCLUSION GENERALE*

---

## Conclusion Générale

---

Le développement théorique pour l'analyse des plaques ou poutres soumises au phénomène du flambement mécanique ou thermique constitue l'un des axes de recherches les plus importants de la modélisation des solides et des structures. Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les domaines de l'industrie, il est nécessaire de développer des théories adéquates permettant d'analyser les structures en FGM avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

Pour répondre à cette problématique, nous avons développé deux modèles, le premier concerne l'analyse du comportement au flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées (FGM) reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. La précision du modèle Mori-Tanaka de distribution des propriétés des matériaux à travers l'épaisseur de la plaque FGM et la théorie utilisée ont été confrontées avec les résultats issus d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé où un excellent accord est observé entre la théorie actuelle et les autres théories des plaques pour à partir d'une étude paramétrique sur les effets des rapports  $a/b$  ou  $a/h$ , du paramètre de la fondation élastique " $k_w$ " sur la variation charge critique du flambement non dimensionnelle.

Le deuxième objectif, nous avons présenté une solution analytique pour l'analyse de flambement des poutres basée sur une théorie intégrale quasi-3D des poutres. Les solutions analytiques sont développées pour étudier l'analyse de flambement des charges mécaniques avec différentes conditions aux limites en utilisant le modèle Navier. L'influence de l'indice de loi de puissance est mise en relief. Il a été démontré les charges critiques de flambement diminuent, lorsque l'indice de loi de puissance indépendamment de la condition aux limites et du rapport d'épaisseur de couche. L'influence des fractions volumiques de la phase céramique est très significative, les valeurs les plus basses de la charge critique de flambement correspondent au (1-0-1) et les plus élevées correspondent au (1-2-1). L'exactitude des résultats de la présente théorie est déterminée par comparaison aux résultats de Le et al., (2021). La charge critique de flambement diminue avec l'augmentation des indices de loi de puissance, indépendamment de la condition aux limites et du rapport d'épaisseur de couche. Un bon accord entre les résultats de ce cas est observé pour chaque aspect considéré.

## Conclusion Générale

---

### **Perspectives**

Ces travaux ouvrent la voie à de nombreux axes de recherche :

En perspective, nous voyons très intéressant d'appliquer ces modèles pour analyser différentes formes de structures FGM sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des propriétés des matériaux dépendent de la température.