



THESE DE DOCTORAT

Présentée à

UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

POUR OBTENIR

LE DIPLOME DE DOCTORAT LMD
EN GÉNIE MÉCANIQUE

Option : Fabrication Mécanique et Productique

Par

HEBBAR Imène

Intitulée :

**Analyse par la méthode des éléments finis du
comportement en rupture des matériaux FGM**

Directeur de thèse : Pr. BOULENOUAR Abdelkader

Soutenu le : 11 / 09 / 2022

Devant le jury composé de :

M ^r . BOUCHOUICHA Benattou	Professeur	U. Sidi Bel Abbes	Président
M ^r . OUDAD Wahid	Professeur	U. Ain Temouchent	Examineur
M ^r . MADANI Kouider	Professeur	U. Sidi Bel Abbes	Examineur
M ^r . BOULENOUAR Abdelkader	Professeur	U. Sidi Bel Abbes	Directeur de thèse

Laboratoire de Matériaux et Systèmes Réactifs LMSR, Département Génie Mécanique,
UDL/ Sidi Bel Abbes, Faculté de Technologie,
BP 89, Cité Larbi Ben Mhidi, Sidi Bel Abbès 22000, Algérie

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

Remerciements

Je remercie DIEU, le tout-Puissant de m'avoir donné la patience et le courage pour finir ce modeste travail.

Ce travail de recherche a été réalisé au laboratoire Matériaux et Systèmes Réactifs, sous la direction de Monsieur BOULENOUAR Abdelkader, professeur de l'université de Sidi-Bel-Abbès.

Je tiens à lui exprimer ma gratitude et ma profonde reconnaissance pour avoir accepté l'encadrement de ma thèse, qui m'a dirigé tout au long de ce travail, et j'ai aussi beaucoup apprécié son support, sa disponibilité permanente et sa gentillesse pour le temps qu'il m'a consacré et ces précieux conseils

Je remercie Monsieur BOUCHOUICHA Benattou, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès, d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur MADANI Kouider, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès et Monsieur OUDAD Wahid, Professeur à l'Université de Ain Temouchent, de nous avoir honoré par leurs présences et d'avoir accepté d'examiner ce travail et de participer à ce jury.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation d'étude et à l'élaboration de cette modeste thèse.

Hebbar Imène

Dédicaces

Je dédie ce Modeste travail à :

Mes parents :

- ❖ *Ma Mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.*
- ❖ *Mon Père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.*
- ❖ *Mes Frères qui n'ont pas cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.*
- ❖ *Mon Directeur de thèse **Pr. Boulenouar Abdelkader**, c'est grâce à sa disponibilité et sa contribution générale et ses conseils qu'on a pu réaliser cette thèse de doctorat.*
- ❖ *Mes professeurs qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.*
- ❖ *A tous mes amis et collègues.*

Imène

Résumé

L'objectif principal de cette étude s'inscrit dans le cadre général de l'étude numérique du comportement en rupture des matériaux à gradient fonctionnel, sous les conditions du chargement mécanique. Dans ce travail de thèse, plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour déterminer l'évolution des FICs, en se basant sur des approches locales.

L'extension de la méthode de contraintes à la pointe de fissure (*CTSM Crack-tip stress method*) a été examinée, comparée et généralisée, dans le cas des matériaux FGMs. Les propriétés mécaniques des structures en FGM sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code par EF ANSYS. Ce programme permet de localiser les coordonnées du centre de gravité de chaque élément du maillage afin de calculer ensuite les propriétés matérielles, par la prise en compte de la loi des mélanges.

Le deuxième objectif de ce travail est de présenter des aspects numériques liés à l'implémentation de la méthode énergétique « Intégrale J_k ». Le présent développement numérique est basé sur le couplage des codes de calcul Ansys-Matlab. La bonne performance du programme développé a été clairement démontrée et validée par des approches numériques, analytiques et expérimentales.

Mots-clés

Matériaux à gradient fonctionnel; Facteur d'intensité des contraintes ; Méthode des éléments finis ; Méthode CTSM ; Intégrale J_k .

Abstract

The main objective of this study falls within the general framework of the numerical study of the fracture behavior of functionally graded materials, under the mechanical loadings. In this thesis work, several numerical methods have been proposed to determine the evolution of SIFs, based on the local approaches.

The extension of the CTSM method (Crack-tip stress method) has been examined, compared and generalized, for the FGM materials case. The mechanical properties of FGM structures are declared using a subroutine implemented in FE ANSYS code. This program makes it possible to locate the coordinates of the gravity center for each element of the mesh, in order to then calculate the material properties, by taking into account the law of mixtures. The second objective of this work is to present numerical aspects related to the implementation of the energy method "Integral J_k ". This numerical development is based on the coupling of Ansys-Matlab calculation codes. The good performance of the developed program has been clearly demonstrated and validated, by numerical, analytical and experimental approaches.

Key words

Functionally Graded Materials ; Stress Intensity Factor; Finite Element Method; CSTM method; Displacement Correlation; J_k -Integral.

ملخص

يُدرج الهدف الرئيسي لهذه الأطروحة في الإطار العام للدراسة الرقمية لسلوك كسر المواد ذات الخصائص المتدرجة تحت تأثير الضغط الميكانيكي. خلال هذا العمل، تم اقتراح العديد من الطرق الرقمية بهدف تعيين تطور عامل شدة الإجهاد، بناءً على الأساليب المحلية.

تم فحص استعمال طريقة CTSM (طريقة الإجهاد على رأس الشق) ومقارنتها وتعميمها على المواد ذات الخصائص المتدرجة. إن الإعلان عن الخصائص الميكانيكية لهذه المواد تم باستخدام برنامج فرعي أدمج في برنامج حساب ANSYS، الذي يعتمد بدوره على طريقة العناصر المحدودة. يتيح هذا البرنامج إمكانية تحديد إحداثيات مركز الثقل لكل عنصر من عناصر الشبكة من أجل حساب خصائص المواد بعد ذلك مع مراعاة قانون الدمج.

الهدف الثاني من هذا العمل هو تقديم الجوانب الرقمية المتعلقة بتنفيذ عمل طريقة الطاقة "Integral J_k ". يعتمد هذا التطور الرقمي على اقتران برامج الحساب Matlab- Ansys تم التأكد من أداء البرنامج المطور وفعاليتته باللجوء إلى مقارنة النتائج المحصل عليها مع أعمال أخرى المتاحة في المراجع.

الكلمات المفتاحية:

المواد ذات تدرج الخصائص؛ عامل شدة الإجهاد؛ طريقة العناصر المحدودة؛ طريقة CSTM؛ تكامل J_k .

Table des matières

Remerciement	i
Dédicace.....	ii
Résumé	iii
Table des matières	vi
Liste des figures	viii
Liste des tableaux.....	xi
Liste des Notations.....	xii
Introduction générale	01

Chapitre I *Généralités sur les matériaux FGMS*

I.1	Introduction.....	03
I.2	Idée générale sur le développement des FGM	03
I.3	Concept des matériaux FGMS	04
I.4	Domaines d'applications des FGMS.....	06
I.5	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	08
I.5.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	10
I.5.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	10
I.5.3	Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	11
I.6	Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM	12
I.6.1	Méthode de la métallurgie des poudres (Powder metallurgy).....	13
I.6.2	La méthode centrifuge à poudre mélangée (Centrifugat Casting)	14
I.6.3	Techniques à base de gaz	16
I.6.3.1	Dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	16
I.6.3.2	Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....	17
I.6.4	Traitement de fabrication additive pour les FGMS (FA).....	17
I.6.4.1	Fusion sur lit de poudre PBF	18
I.6.4.2	Dépôt d'énergie dirigé (DED)	20
I.7	Conclusion.....	25

Chapitre II *Étude bibliographique*

II.1	Introduction.....	26
II.2	Mécanique linéaire de la rupture.....	26
II.2.1	Modes élémentaires de fissuration	26
II.2.2	Processus de fissuration	27
II.2.3	Paramètres pour étudier la zone singulière	29
II.3.	Evaluation numérique des FICs	34
II.3.1	Approche locale	34
II.3.2	Approche globale	37
II.4	Comportement en rupture des matériaux FGMS	39
II.5	Conclusion	42

Chapitre III

Etude par EF du comportement en rupture des FGMs

III.1	Introduction	43
III.2	Modélisation de la singularité et l'évaluation du FIC.....	43
III.3	Modélisation numérique du comportement mécanique des FGMs	45
III.4	Etude par EF du comportement en rupture des FGMs	45
	Exemple 1 : Disque en FGM contenant une fissure centrale inclinée	45
	Exemple 2 : Poutre de flexion 3-points avec une fissure parallèle à la gradation du matériau	49
	Exemple 3 : Plaque mince en FGM contenant une fissure centrale	51
III.5	Conclusion.....	66

Chapitre IV

Formulation & l'implémentation numérique de l'intégrale d'interaction

IV.1	Introduction.....	67
IV.2	Présentation de la technique d'extraction	67
IV.2.1	Théorie : Formulation de l'intégrale	67
IV.2.2	Calcul les FICs en mode mixte et la contrainte T	72
IV.3	Méthode des éléments finis.....	75
IV.3.1	Couplage Ansys- Matlab	75
IV.3.2	Stratégie et mise en œuvre de l'implémentation.....	76
IV.4	Exemples d'application et validation.....	81
	Exemple 1 : Plaque pré-fissurée sollicitée en traction uni-axiale	81
	Exemple 2 : Eprouvette de flexion 4-points en FGM.....	87
IV.5	Conclusion	91
	Conclusion générale.....	92
	Référence bibliographiques.....	94
	Annexes (A.1).....	108
	Annexes (A.2).....	110
	Annexes (A.3).....	111
	Annexes (A.4).....	113
	Annexes (A.5).....	119

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I.1	Deux types de structures graduées	4
Figure I.2	Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM	6
Figure I.3	Différence de la distribution	6
Figure I.4	Pièces FGM dans le domaine aérospatial.....	7
Figure I.5	Pièces FGM dans le domaine médecine	8
Figure I.6	Géométrie d'une plaque FGM	9
Figure I.7	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur selon la loi P-FGM	10
Figure I.8	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur selon la loi S-FGM	11
Figure I.9	Variation du module de Young à travers l'épaisseur selon la loi E-FGM	12
Figure I.10	Techniques de fabrication des FGMs	13
Figure I.11	Procédé de fabrication de FGM avec métallurgie des poudres	14
Figure I.12	Description schématique de la méthode centrifuge à poudre mélangée	15
Figure I.13	Représentation schématique de la méthode de dépôt chimique en phase vapeur	16
Figure I.14	Méthode de dépôt physique en phase vapeur (PVD)	17
Figure I.15	Technologie EBM	19
Figure I.16	Principe d'élaboration de FGM par le procédé PBF-SLS	19
Figure I.17	Principe de fonctionnement du procédé PBF-SLM.....	20
Figure I.18	Technologie LENS	21
Figure I.19	Technologie EBAM.....	22
Figure I.20	Diagramme schématique de procédés WAAM de système d'alimentation à deux fils.....	22
Figure I.21	a) Projection poudre b) gradient de matériau constitué de cinq mélange de poudre, c) Photo d'une structure FGM.....	23
Figure I.22	Technologie CLAD (dépôt de métal par laser).....	24
Figure I.23	Procédé d'extrusion de matière (triple extrudeuse	24

CHAPITRE II

Figure II.1	Séparation d'un milieu de part et d'autre d'une Interface A.....	26
Figure II.2	Mode d'ouverture des fissures	27
Figure II.3	Zone délimitant le voisinage d'une pointe d'une fissure dans un milieu élastique	28
Figure II.4	Champ de contraintes au voisinage de la pointe de fissure	30
Figure II.5	Intégrale de contour J	32
Figure II.6	Evolution de la contrainte d'ouverture le long du ligament en présence du terme T.....	33
Figure II.7	Élément singulier autour de la pointe de fissure	35

CHAPITRE III

Figure III.1	Eléments singuliers avec nœuds au quart des côtés.....	44
Figure III.2	a) Fissure centrale inclinée dans un disque circulaire en FGM, (b) Maillage globale du disque, (c) Maillage détaillé au voisinage de deux pointes de fissure.....	46
Figure III.3	Variation de K_I et K_{II} en fonction de β : a) Variation de K_I , b) Variation de K_{II}	47
Figure III.4	Variation du facteur d'intensité de contraintes K_I en fonction des angles d'inclinaison ($\beta=-0.75$).	48
Figure III.5	Variation du facteur d'intensité de contraintes K_{II} en fonction des angles d'inclinaison ($\beta= -0.75$).....	48
Figure III.6	Variation de K_I et K_{II} en fonction des angles d'inclinaison ($\beta= -0.50$).....	49
Figure III.7	Géométrie de l'éprouvette de flexion 3points en FGM	50
Figure III.8	Maillage de l'éprouvette de flexion 3 points : (a) Maillage globale, (b) Maillage au voisinage de la pointe de fissure pour différentes tailles de fissure.....	50
Figure III.9	Variation de FIC normalisé ($K_I\sqrt{H}/P$) en fonction de E_2/E_1 : a) $a/2H= 0.45$ b) $a/2H = 0.5$ c) $a/2H = 0.55$	51
Figure III.10	a) Modèle géométrique b) Chargement et conditions aux limites, c) Discrétisation par EF.....	52
Figure III.11	Fissure centrale dans une plaque infinie en FGM (en couches).....	53
Figure III.12	Variation des propriétés élastiques des matériaux étudiés : a) PMMA, b) FGM1, c) FGM2.....	54
Figure III.13	Distribution des contraintes normales : a) FGM 1, b) FGM 2, c) PMM.....	55
Figure III.14	Variation du FIC $K_{I\text{norm}}$ en fonction de a/W a)PMMA, b) FGM 1, c) FGM 2.....	56
Figure III.15	Variation du module élastique $E(x)$	58
Figure III.16	Comparaison entre le calcul numérique et analytique du facteur F_I : (avec $n=1, R =2, 3, 4$ et 5).....	59
Figure III.17	Evolution de $\left(\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}\right)$ en fonction de $\left(\frac{a}{W}\right)$ Validation du calcul par CSTM (avec $n=2, R =2, 3, 4$ et 5).....	60
Figure III.18	Evolution de $\left(\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}\right)$ en fonction de $\left(\frac{a}{W}\right)$ Validation du calcul par CSTM (avec $n=2, R=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2).....	61
Figure III.19	Evolution de K_I^*, σ_y^* et $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction de $\left(\frac{a^*}{W}\right)$ par DET	64
Figure III.20	Evolution de $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction du rapport $\left(\frac{a^*}{W}\right)$, pour différents rapports R (avec $n=1$).....	65
Figure III.21	Evolution de $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction du rapport $\left(\frac{a^*}{W}\right)$, pour différentes valeurs de l'exposant n (avec $R=0.5$ et 2).....	65
Figure III.22	Evolution de facteur F_I en fonction de $\left(\frac{a}{W}\right)$ Validation du calcul par CSTM-G (avec $n=1, R=2, 3, 4$ et 5).....	66

CHAPITRE IV

Figure IV.1	Contour d'intégration Γ_ε entourant la pointe de fissure.....	68
Figure IV.2	Illustration du contour Γ autour de la pointe de fissure.....	68
Figure IV.3	Nouveaux domaines d'intégration d'après le théorème de divergence	71
Figure IV.4	Représentation de la géométrie du modèle	71
Figure IV.5	Représentation de la fonction q	72
Figure IV.6	Distances δ_1 et δ_2	73
Figure IV.7	Organigramme de programmation par Ansys APDL	76
Figure IV.8	Cercle d'origine la pointe de fissure.....	77
Figure IV.9	Transformation géométrique de l'élément Q8	78
Figure IV.10	Représentation schématique de la fonction q	79
Figure IV.11	(a) Représentation schématique de la plaque fissurée [EIS 87], (b) Maillage globale de la plaque avec des éléments singuliers, (c) Maillage globale de la plaque sans des éléments singuliers: Présente approche.....	82
Figure IV.12	Définition des domaines d'intégration autour de la pointe de fissure.....	83
Figure IV.13	Variation des FICs normalisés en fonction des angles d'inclinaison α	83
Figure IV.14	Variation du FIC normalisé en fonction de (a/w)	84
Figure IV.15	(a) Représentation schématique d'une plaque FGM fissurée (b) Maillage globale de la plaque, (c) Maillage détaillé au voisinage de la fissure.....	85
Figure IV.16	Indépendance du domaine d'intégration a) $\frac{E_2}{E_1} \geq 1$, b) $\frac{E_2}{E_1} < 1$	86
Figure IV.17	Résultats du FIC K_I pour différentes tailles de fissure avec :a) $\frac{E_2}{E_1} \geq 1$, b) $\frac{E_2}{E_1} < 1$	87
Figure IV.18	Eprouvette de flexion 4-points en FGM	87
Figure IV.19	Evolution des propriétés élastiques dans la zone graduée ($0 \leq \xi \leq 1$): a) Module de Young E et Coefficient de Poisson ν , b) Ténacité du matériau K_{IC}	88
Figure IV.20	Maillage de l'éprouvette de flexion 4 points en FGM : (a) Différentes positions de la fissure, (b) Domaine d'intégration Ω	88
Figure IV.21	Résultats expérimentaux des angles d'amorçage θ_0 et des chemins de propagation [ROU 00].....	89
Figure IV.22	Evolution de l'angle de bifurcation θ_0 dans la zone graduée.....	91

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE III

Tableau III.1	Paramètres matériels de la variation des propriétés mécaniques	54
Tableau III.2	Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM(avec $n=2$, $E_w/E_0=2, 3, 4$ et 5).....	61
Tableau III.3	Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM(avec $n=2$, $E_w/E_0=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)	62
Tableau III.4	Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM(avec $n=3$, $E_w/E_0=2, 3, 4$ et 5).....	62
Tableau III.5	Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM(avec $n=3$, $E_w/E_0=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2).....	63

CHAPITRE IV

Tableau IV.1	Calcul des FICs par des approches locales et globales (avec: $R_1/a=0.10$).....	82
Tableau IV.2	Propriétés mécaniques.....	88
Tableau IV.3	Comparaison entre P_{cr} , K_I et K_{II} (Position P_1 : $\xi = 0.17$).....	89
Tableau IV.4	Comparaison entre les angles d'amorçage θ_0	90

Liste des notations

μ_{tip}	Module de cisaillement calculé à la pointe de fissure
G	Taux de restitution d'énergie
ν_{tip}	Coefficient de Poisson calculé à la pointe de fissure
a	Longueur de fissure
Δa	Variation de longueur de fissure
α	Angle d'inclinaison de la fissure
E, E_{tip}	Module de Young ; Module de Young calculé à la pointe de fissure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$E(x)$	Module de Young en fonction de « x »
σ	Contrainte appliquée
SED	Critère de la densité d'énergie de déformation minimale
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes dans la direction x, y et z
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
K_I, K_{II}, K_{III}	Facteur d'intensité de contraintes en modes I, II et III
$K_I^{(aux)}, K_I^{(act)}$	Facteur d'intensité de contraintes de mode I à l'état auxiliaire et actuel
K_{IC}	Facteur critique d'intensité de contraintes
R_{int}	Rayon intérieur
R_{ext}	Rayon extérieur
ξ	Positions de la fissure
W_{ext}	Énergie potentielle des forces extérieures
W_e	Energie de déformation élastique
w_e	Densité d'énergie de déformation élastique
r, θ	Coordonnées polaires
Jac	Matrice Jacobienne
$ Jac $	Déterminant de la matrice Jac
J	Intégrale de Rice
J_K	Intégrale
M	Intégrale d'interaction
Γ	Chemin arbitraire autour de la pointe de fissure
u_i	Déplacements
V_{Fi}	Fraction volumique
l_E	Longueur d'élément
T_i	Température
$(W_{,k})_{expl}$	les dérivées explicites de W par rapport aux coordonnées x et y , respectivement
$T-stress$	Contrainte transversale
DCT	Technique de corrélation des déplacements
DET	Technique d'extrapolation par déplacement
FGM	Matériau fonctionnellement gradué
FIC	Facteur d'intensité de contrainte
Ω	Domaines
$APDL$	Langage de conception paramétrique Ansys
DCT	Technique de corrélation des déplacements
DET	Technique d'extrapolation par déplacement
FGM	Matériau fonctionnellement gradué
θ	Angle initial de propagation de fissure
ξ	Positions de la fissure
$[]$	Matrice
$\{ \}$	Vecteur colonne

Introduction générale

Ces dernières années, le monde industriel a connu une évolution remarquable grâce à l'avancement de la science. Des recherches scientifiques intensives ont été effectuées pour concevoir des procédés novateurs et des matériaux performants répondant aux besoins incessants de l'industrie.

Les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux fonctionnellement gradués (en anglais: *Functionally Graded Materials*) ont prouvé fortement leurs présences au monde industriel et ont acquis une grande popularité en raison de leurs capacités thermique et mécanique considérables. Ces matériaux sont une nouvelle génération des matériaux composites, introduits en premier temps par un groupe scientifique japonais en 1984 (Yamanouchi et al, [YAM 90] et Koizumi [KOI 93]).

Les FGM sont obtenus en changeant sans interruption les constituants des matériaux multi-phases dans une fraction prédéterminée de volume du matériau constitutif. La fonction de loi de puissance et la fonction exponentielle sont employées pour décrire les variations des propriétés matérielles des matériaux FGM, avec l'apparition des concentrations des contraintes dans les interfaces auxquelles le matériau est continu mais change graduellement.

Un certain nombre de travaux traitant de divers aspects de FGM ont été publiés dans les dernières décennies. Ils prouvent que la majeure partie de première recherche étudiée dans FGM s'était concentrée sur l'analyse du comportement mécanique et le traitement de la rupture sous l'effet du chargement mécanique et des contraintes thermiques, en se basant sur le calcul par éléments fins.

Différentes méthodologies sont proposées dans la littérature pour examiner le comportement en rupture des matériaux FGMs, en se basant sur des approches locales et énergétiques. Un des moyens efficaces de conduire l'analyse de la rupture des FGMs est la méthode d'intégral d'interaction en conjonction avec la méthode des éléments finis. Cette technique est la plus compatible avec la formulation de la méthode des éléments finis, elle est relativement exploitée dans la littérature.

Objectif de la thèse

L'objectif principal de ce travail de thèse est de présenter une étude numérique par la méthode des éléments finis, du comportement en rupture des structures en FGMs, sous les conditions de chargement

mécanique, en se basant sur l'approche locale. Par ailleurs, un autre objectif de ce travail est de présenter un développement numérique de l'implémentation de la méthode d'intégrale d'interaction dite « Intégrale J_k » pour le but de déterminer les FICs en mode mixte.

Plan de la thèse

Le plan de la présente thèse est organisé en quatre chapitres répartis comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux matériaux à gradient de propriété, leurs utilisations, leurs développements et leurs domaines d'application. Les différentes méthodes de fabrication ont été mises en évidence et les différentes lois de variation de leurs propriétés sont également présentées.

Le deuxième chapitre est dédié à un rappel sur la mécanique de la rupture. Une attention particulière sera portée sur une bibliographie de quelques recherches scientifiques portant sur le comportement en rupture des matériaux fonctionnellement gradués, en mettant l'accent sur les approches locales et globales, ainsi qu'aux travaux publiés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude numérique du comportement en rupture des matériaux FGMs. Un intérêt particulier est porté au calcul du FIC par des approches locales, il s'agit des méthodes DET et DCT. La méthode CTSM (*Crack-tip stress method*) basée sur le champ de contraintes, proposée pour les matériaux isotropes et homogènes, a été exploitée dans le cas des matériaux FGMs. A cet effet, des exemples d'applications ont été testés et comparés par des approches analytiques et numériques afin de montrer la robustesse de ces approches locales.

Le quatrième chapitre est réservé à la formulation de l'intégrale d'interaction et la présentation des aspects numériques liés à l'implémentation de l'approche « Intégrale J_k » afin de déterminer ensuite les FICs en mode mixte. Le présent développement numérique est basé sur la programmation par la MEF, par le couplage des codes de calcul Ansys et Matlab. La bonne performance du programme développé a été clairement démontrée et validée par des exemples numériques.

- Une conclusion générale clôture l'ensemble de ces travaux permettant ainsi de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer les diverses perspectives dans le cadre de ce travail de thèse.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX FGMs

I.1 Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : **F**unctionally **G**raded **M**aterial "F.G.M"). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériau composite produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ce type de matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

I.2 Idée générale sur le développement des FGMs

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "*la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques*". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGMs a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1 à 10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 °K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 °K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGMs se sont développés pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais se sont aussi élargis à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc....

I.3 Concept des matériaux FGMs

Les matériaux à gradient fonctionnels se distinguent des matériaux composites traditionnels grâce à leurs variations graduelles et continues de leurs propriétés mécaniques et thermiques selon une loi de fonction à travers l'épaisseur. Cette dernière permet d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Souvent, les FGMs structurelles sont divisés en deux types, à savoir la structure discrète et la structure continue, représentées respectivement par les figures (I.1.a) et (I.2.b).

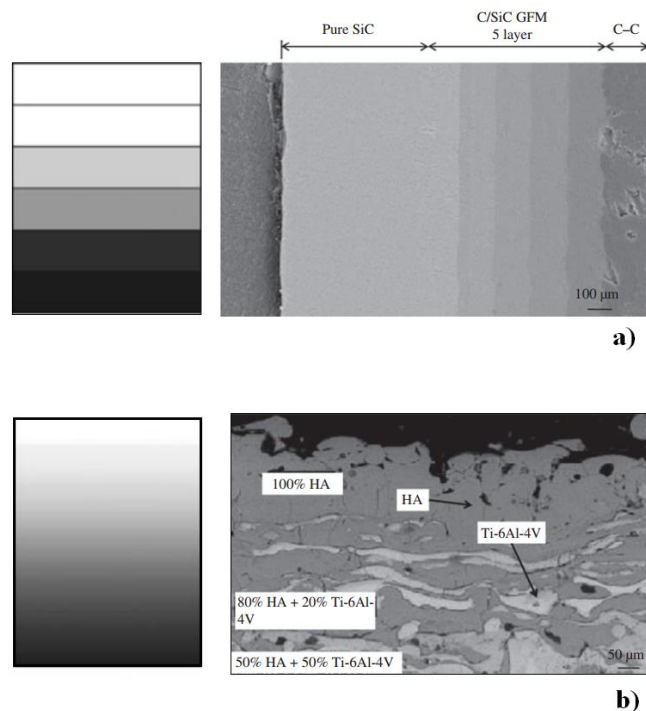


Figure I.1 Deux types de structures graduées :

a) Structure par couche [KIM 05a], b) Structure continue [KHO 03]

Les matériaux FGMs sont très souvent composés de céramique et métal permettant ainsi de bénéficier d'une combinaison de leurs avantages respectifs. Nous citons comme exemple le cas pour lequel ces matériaux ont été conçus, où le but était d'utiliser un matériau composite apte à résister une température de 2000 °K sur un côté sans que cette dernière se transmette à l'autre côté [MAH17]. Dans ce cas, un matériau FGM dont la face supérieure est complètement céramique qui varie graduellement à travers l'épaisseur jusqu'à la face inférieure 100% métal répondra aux exigences des chercheurs. Le choix des deux matériaux est essentiellement dû à leurs caractéristiques complémentaires :

Céramique :

- Résistance thermique ;
- Résistance à l'oxydation ;
- Faible conductivité thermique.
- Faible coefficient de dilatation thermique.

Métal :

- Résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

La transition graduelle entre les deux matériaux permettra d'éliminer les problèmes de l'interface ainsi que de relaxer les contraintes thermiques. En modifiant la microstructure de transition, il est possible d'optimiser la distribution de la déformation, la température et des contraintes, ce qui est demandé lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (Moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu [JIA 95, KAW 97].

Comparés aux matériaux composites traditionnels, les matériaux FG se distinguent par leurs caractéristiques macroscopiquement inhomogènes étant donné qu'ils se composent de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Koizumi [KOI 96] a résumé cette différence dans la figure (I.2) ci-dessous, tandis que Yoshihisa [YOS 04] a établi un modèle simple montrant les différences entre les matériaux FG et les matériaux composites conventionnels illustré dans la figure (I.3).

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.2 Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM [KOI 96]

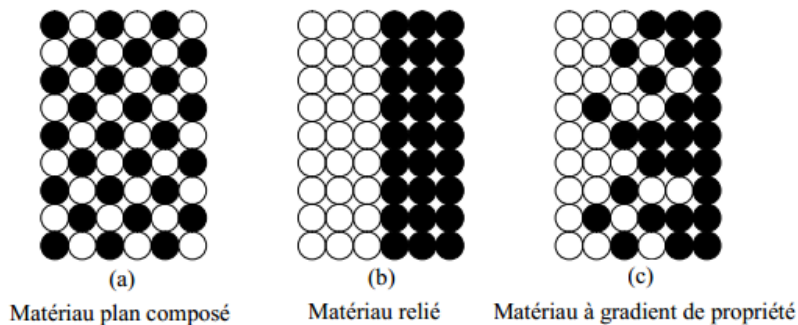


Figure I.3 Différence de la distribution [YOS 04]

1.4 Domaines d'applications des FGMs

Les caractéristiques uniques des matériaux FG ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs durant les dernières décennies, ce qui a favorisé leurs utilisations dans la majorité des domaines d'ingénierie. Bien que, originellement, ces matériaux étaient destinés pour les domaines aérospatial et aéronautique, ces derniers ont été utilisés dans l'industrie automobile, biomédicale, défense, électrique/électronique et thermoélectronique.

a. Domaine aérospatial

Les FGMs peuvent résister à un gradient thermique très élevé, ce qui le rend appropriés pour une utilisation dans des structures et des corps d'avion spatial, des composants de moteur de fusée, etc. Si la technique de traitement est améliorée, les FGMs sont prometteurs et peuvent être utilisées dans des domaines plus larges de l'aérospatiale. Par exemple le centre de recherche de la NASA propose de développer des pièces FGM pour des navettes spatiales [DOM 05] (Figure I.5(a)). Des problématiques similaires existent sur d'autres pièces aérospatiales telles que les pales de turbines [XIA 03] (Figure I.5(b)).

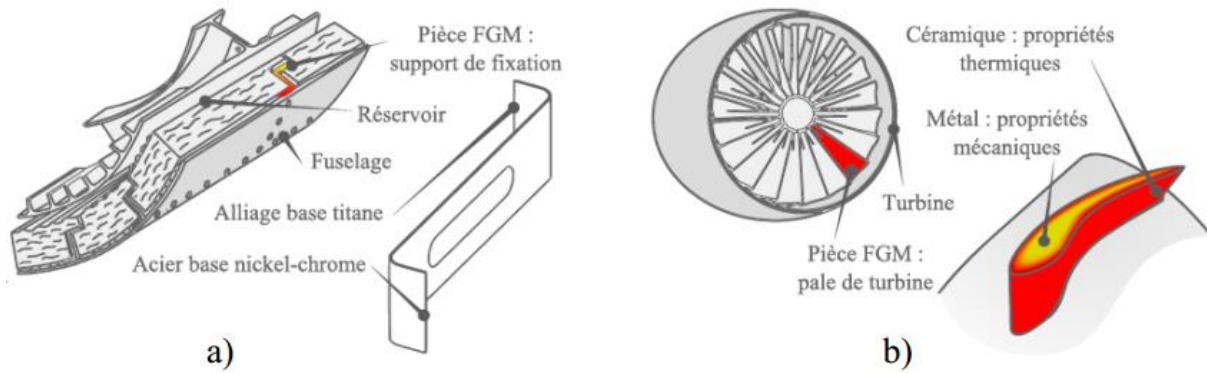


Figure I.4 Pièces FGM dans le domaine aérospatial [MUL13]

a) Pièce FGM pour navettes spatiales, b) Pale de turbine.

b. Industrie de la défense

Les matériaux FG sont utilisés dans l'industrie de défense dans des applications comme des gilets pare-balles, l'épée japonaise traditionnelle et dans des blindages ainsi que le corps de véhicules pare-balles.

c. Industrie marine

Les matériaux fonctionnellement classés trouvent également leur application dans l'industrie maritime. Les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie marine et sous-marine comprennent l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes sonar, le système de tuyauterie composite et la coque cylindrique sous pression.

d. Industrie d'énergie

Les industries d'énergie ont constamment besoin de différents types de FGM, afin d'améliorer l'efficacité de leurs équipements. Certaines applications des matériaux FG dans l'industrie d'énergie incluent le mur intérieur des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et les équipements sous pression, la pile à combustible, le revêtement des lames de turbine ainsi que le revêtement des barrières thermiques.

e. Médecine

Dans le domaine biomédical, les raisons pour utiliser un gradient sont plus variées. Il est possible, par exemple, d'utiliser un gradient de matériaux pour combiner les propriétés mécaniques et la résistance à l'usure sur une prothèse de hanche [BAN 09]. La FGM a trouvé une large gamme d'applications dans les applications dentaires et orthopédiques pour le remplacement des dents et des os (Figure I.6) [WAT04].



Figure I.5 Pièces FGM dans le domaine médecine (Implant dentaire)

f. Autres industries

L'application des matériaux FG inclut aussi divers domaines, exemple, les outils de coupe pour améliorer la force thermique de l'outil de coupe, les lames de rasoir de Fer Aluminure/Acier inoxydable, dans les équipements de sécurité, comme des bouteilles d'air de lutte contre les incendies, les cadres de monocle et les casques. D'autres équipements, comme, le scanner IRM des tubes cryogéniques, les récipients sous pression, les réservoirs à carburant, les cas d'ordinateur portable, les instruments de musique et les tables radiographiques.

I.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux FGM consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. L'un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi-phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au « modèle de Voigt » [SHE 09].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (I.1)$$

P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du Constituant i , La sommation des fractions volumiques de tous les constituants du matériau FGM est égale à l'unité.

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (I.2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique (c) et du métal inoxydable en général (m). Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (I.3)$$

$$\text{avec : } V_c + V_m = 1 \quad (I.4)$$

Le matériau FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

La figure (I.7) représente un exemple de la géométrie de la plaque en FGM, les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Elles varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z), soit :

$$E = E(z) \text{ et } \nu = \nu(z) \quad (I.5)$$

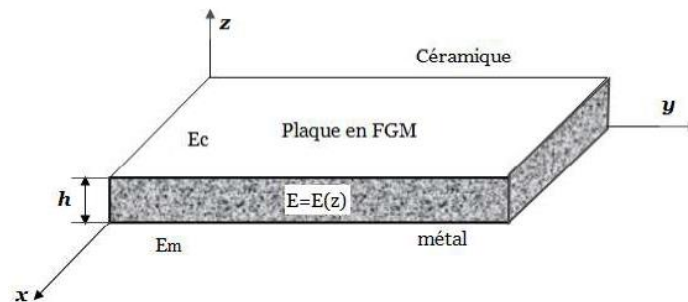


Figure I.6 Géométrie d'une plaque FGM

Jin et Batra [JIN 96] indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la distribution obéissant à une distribution en loi de puissance P-FGM s'écrit comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h}\right)^p \quad (\text{I.5})$$

où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ est déterminée, les propriétés matérielles de la loi P-FGM se déterminent par la loi des mélanges comme suit [BAO 95] :

$$E(z) = (E_c - E_m)V(z) + E_m \quad (\text{I.6})$$

où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = +h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la Figure I.7). Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

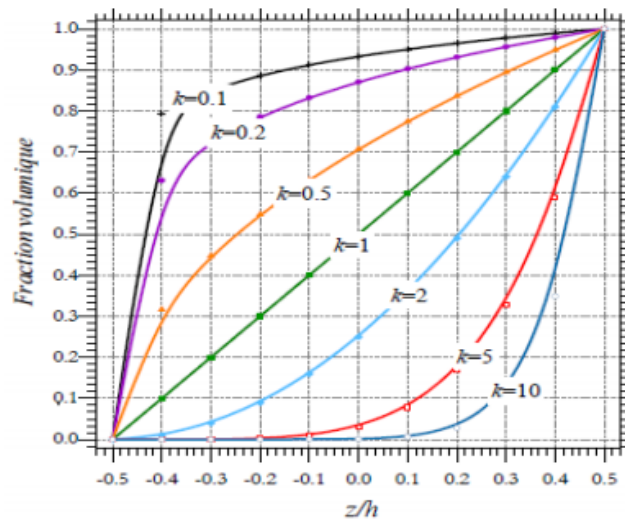


Figure I.7 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur selon la loi P-FGM

I.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chi et Chung [CHI 03] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_c(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2}\right)^k \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7})$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{pour : } 0 \leq z \leq +h/2 \quad (\text{I.8})$$

En utilisant la loi de Voigt, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)] \quad \text{pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + [1 - V_m(z)] \quad \text{pour : } 0 \leq z \leq +h/2 \quad (\text{I.10})$$

L'allure de ces deux fonctions de puissance est sous forme de sigmoïde. De ce fait, la loi de distribution est notée par S-FGM. Elle est représentée sur la figure (1.8). On remarque que cette distribution est antisymétrique par rapport au plan moyen.

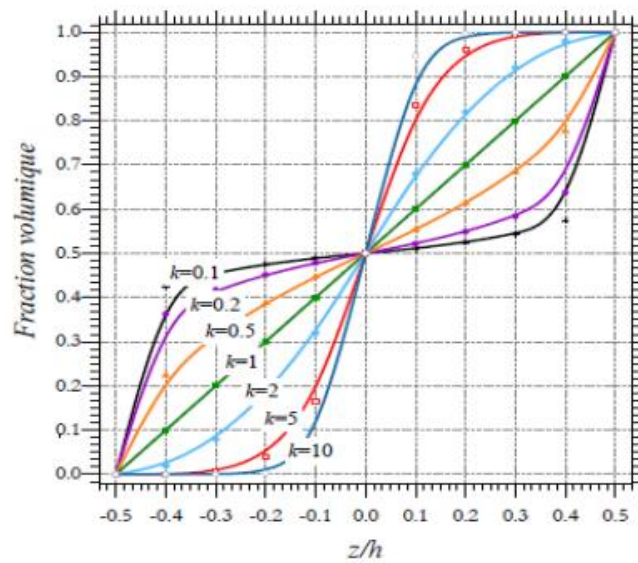


Figure I.8 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur selon la loi S-FGM

I.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Une fonction exponentielle a été utilisée par Delale en 1983 [DEL 83] pour représenter les propriétés matérielles des FGM. Elle est de la forme :

$$E(z) = E_c e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.11})$$

avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad (\text{I.12})$$

Un exemple de la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représenté sur la Figure I.9 Variation

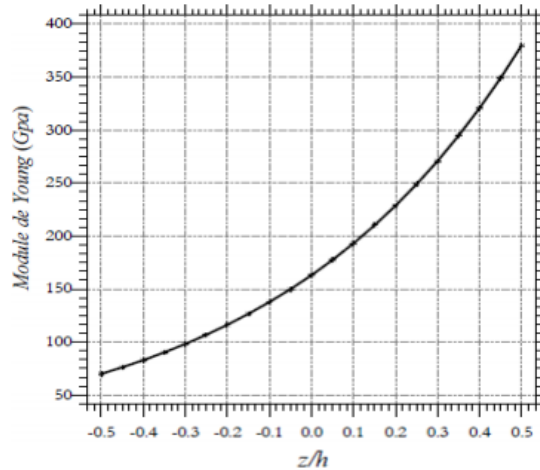


Figure I.9 Variation du module de Young à travers l'épaisseur selon la loi E-FGM

I.6 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM

Les FGMs constituent un vaste domaine de recherche et attirent aujourd'hui une attention considérable dans la société de la science et de l'ingénierie des matériaux. Ces dernières années, les FGMs ont connu des développements remarquables dans les méthodes de fabrication. Les FGMs peuvent être produites en utilisant plusieurs techniques de traitement bien connues, des plus classiques aux plus avancées.

Un certain nombre de documents de recherche ont été publiés jusqu'à ce jour sur les techniques de traitement des FGMs donnant de nouvelles méthodes de fabrication des FGM sur la base des techniques de traitement constructif et de traitement par transport de masse.

Dans le traitement constructif, la FGM est réalisée couche par couche en commençant par une distribution appropriée dans laquelle les gradients sont littéralement fabriqués dans l'espace, tandis que dans le transport de masse, les gradients à l'intérieur d'un composant dépendent des phénomènes de transport naturels, tels que la conduction thermique, la diffusion de espèces atomiques et écoulement de fluide [CHA 21]. Basé sur la voie de traitement, différentes méthodes de fabrication sont disponibles, comme la métallurgie des poudres, coulée centrifuge, CVD, PVD, fabrication additive AM ...etc. (Figure I.11).

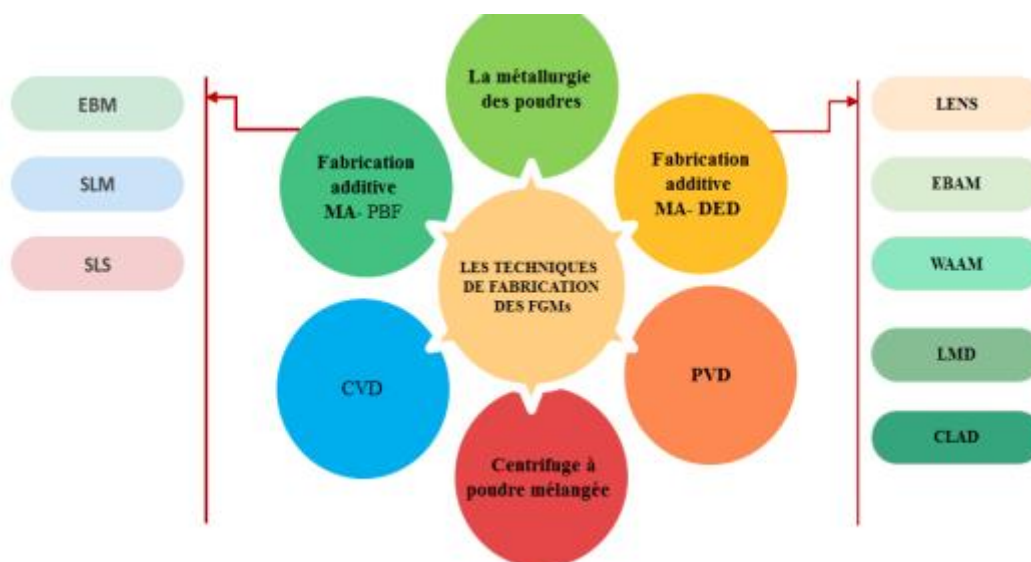


Figure I.10 Techniques de fabrication des FGMs [HOU 21]

Dans les sous-sections suivantes, les techniques existantes et les plus à jour pour la fabrication des FGMs sont expliquées en détail.

I.6.1 Méthode de la métallurgie des poudres (Powder metallurgy)

La métallurgie des poudres est l'une des méthodes les plus importantes de production des FGMs en raison de sa large plage de contrôle sur la composition et la microstructure et la capacité de formation de forme. La métallurgie des poudres offre plus d'avantages grâce à des coûts plus bas, une plus grande disponibilité des matières premières, un équipement de traitement plus simple, une consommation d'énergie plus faible et des temps de traitement plus courts. Dans le traitement des poudres, le gradient est généralement produit en mélangeant différentes poudres dans des rapports variables et en empilant les mélanges de poudres en couches séparées. Plusieurs techniques ont été introduites pour la préparation de poudre telle que par des réactions chimiques, un dépôt électrolytique, un broyage. Ces techniques permettent des taux de production en masse de matériaux sous forme de poudre et elles sont généralement proposées dans une plage de taille contrôlable de la population finale de grains [ZHU 01]. Pour le traitement des poudres, la considération principale est centrée sur la précision des quantités de pesée et la dispersion des poudres mélangées. Ces éléments influenceront les propriétés de la structure et doivent être manipulés de manière très prudente. Les étapes les plus importantes du processus PM sont respectivement le pesage de la poudre, le mélange de la poudre, le compactage et le frittage [ZHU 01]. Un exemple d'un processus de fabrication typique par la métallurgie des poudres est schématiquement illustré sur la figure (I.11), elle s'exécute dans quatre (04) étapes [KIE 03]:

- La première étape se limite dans le choix des matériaux à utiliser comme métal et comme céramique, de les peser et puis les mélanger (Figure I.11.a),
- La deuxième étape consiste à mélanger chaque mixture en poudre de manière uniforme par un broyeur en forme de V (Figure I.11.b),
- La troisième étape est de jalonner la poudre pré-mélangée selon une distribution pré-définie de la composition (Figure I.11.c).

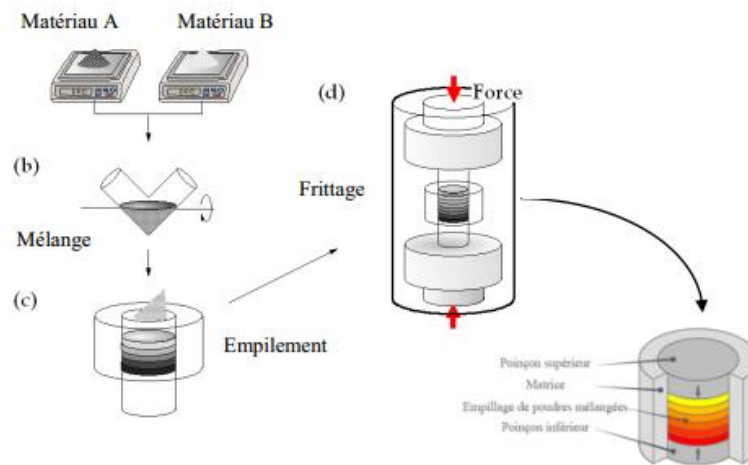


Figure I.11 Procédé de fabrication de FGM avec métallurgie des poudres [WAT 11]

Cependant, la limitation dans la fabrication de FGM avec métallurgie des poudres est la complexité en mode de densification car la densification est basée sur la fraction dominante de poudre qui, ainsi, se traduit par une distorsion et une variation de retrait des couches.

I.6.2 Méthode centrifuge à poudre mélangée (Centrifugat Casting)

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les pièces cylindriques en FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure [KIE 03]. Un mélange composé d'un métal fondu et d'une poudre métallique, tous deux de densité différente, est soumis à une force centrifuge au sein d'une enceinte annulaire à laquelle une rotation rapide est appliquée. Les particules métalliques sont soumises à des forces différentes dont on peut exploiter l'action pour établir une distribution de concentration volumique radiale de la phase divisée [BIE 04]. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. Un exemple d'un processus de fabrication typique par le coulage centrifuge est montré sur la figure (I.12), elle s'exécute dans quatre (04) étapes [WAT 11] :

- Comme première étape du procédé, un mélange de poudre de particules métalliques de matrice A, et particules de dispersion B, est inséré dans un moule de filage, comme illustré sur la figure (I.12a).
- Ensuite, le lingot de métal matriciel A, est fondu et versé dans le moule à filer avec un mélange de poudre A + B, comme le montre la figure (I.12b).
- En conséquence, le métal de matrice fondu A, pénètre dans l'espace entre les particules par la pression de la force centrifuge, comme le montre la figure (I.12c).
- En conséquence, le métal de matrice fondu A, pénètre dans l'espace entre les particules par la pression de la force centrifuge, comme le montre la figure (I.12d).
- Enfin, un anneau FGM avec des particules de dispersion B, réparties sur sa surface, peut être obtenu, comme le montre la figure (I.12e).

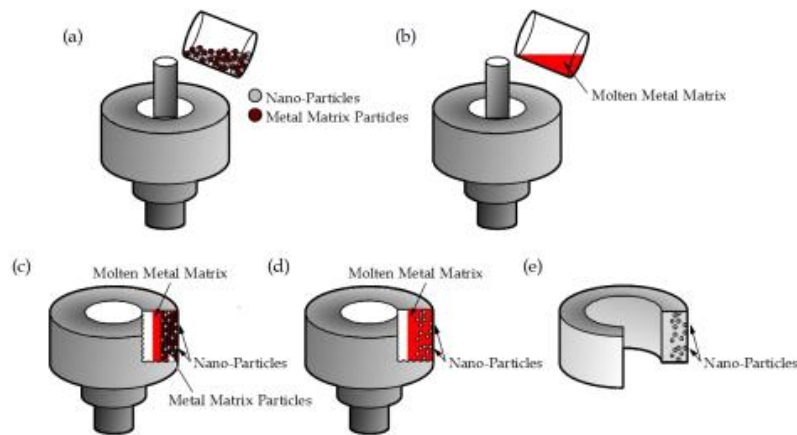


Figure I.12 Description schématique de la méthode centrifuge à poudre mélangée

La coulée centrifuge des FGMs dépend de la teneur en matrice fondue, de la vitesse de rotation et de la vitesse des conditions de sédimentation de la particule pour obtenir une production contrôlée et souhaitée en masse [WAT 11]. Le procédé de fonderie par centrifugation (vertical ou horizontal) permet de réaliser assez facilement un gradient de microstructure dans l'épaisseur à faible coût. C'est la méthode la plus utilisée pour produire des FGMs à base d'aluminium, de cuivre ou d'autres matériaux ferreux.

Cependant, cette technique est limitée dans la production de composants FGM avec des formes géométriques régulières. Son inconvénient principal provient de la difficulté à assurer la parfaite maîtrise ou le contrôle du mouvement des grains de poudre au sein du milieu visqueux qui constitue le bain métallique fondu [WAT 11, 98].

I.6.3 Techniques à base de gaz

L'un des moyens les plus courants de produire des FGMs est de produire des revêtements de surface et d'induire une gradation de surface. Les procédés à base de gaz font partie de ces méthodes à base de revêtement et le dépôt chimique/ physique en phase vapeur sont des méthodes populaire dans ce groupe.

I.6.3.1 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Le procédé dépôt chimique en phase vapeur (CVD) est un processus adopté pour fabriquer des matériaux solides de haute qualité à l'aide d'un système de dépôt sous vide. De nombreux procédés CVD sont utilisés pour produire un film mince lisse avec des propriétés graduées telles que la pression atmosphérique, la basse pression, l'ultravide, le filament chaud, l'injection de liquide assistée par laser, assistée par électrons et directe.

Le procédé CVD, diverses sources d'énergie peuvent être utilisées, y compris la lumière, la chaleur et le plasma, pour déposer des matériaux sur une surface (Figure I.13). Les gaz utilisés sont généralement sous forme d'hydruure, de bromure et de chlorure [SAL 20].

Récemment, Le procédé dépôt chimique en phase vapeur a été utilisé pour produire un film FGM mince pour des applications de revêtement avec des propriétés graduées afin d'améliorer les propriétés mécaniques ainsi que la résistance à la corrosion, à l'usure et la résistance à la fatigue thermique [SAS 94].

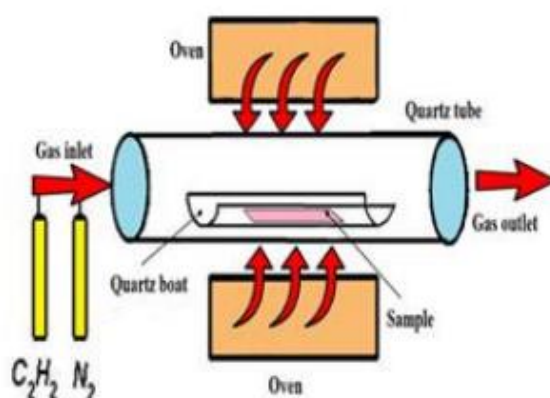


Figure I.13 Représentation schématique de la méthode de dépôt chimique en phase vapeur

[SAL 20]

I.6.3.2 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (PVD) (Figure I.15) à base de gaz fait partie essentielle dans la fabrication de FGM minces en raison de ses énormes avantages tels que la production de films minces très purs avec une structure graduée, peut créer une grande variété de composés. Dans ce processus, le matériau se transforme de la phase condensée en phase vapeur et se réarrange ensuite en phase condensée sous la forme d'un film mince ou d'un revêtement sur le substrat. La méthode PVD est l'une des méthodes du dépôt de métal de base aux alliages et respectueuse de l'environnement par rapport à d'autres techniques [RAJ 20]. Les avantages du procédé PVD sont sa capacité à produire différents types de revêtements (organiques et inorganiques), respectueux de l'environnement et obtenant des revêtements durables avec des propriétés favorables, mais malheureusement, il fonctionne sous des températures et des conditions de vide élevées.

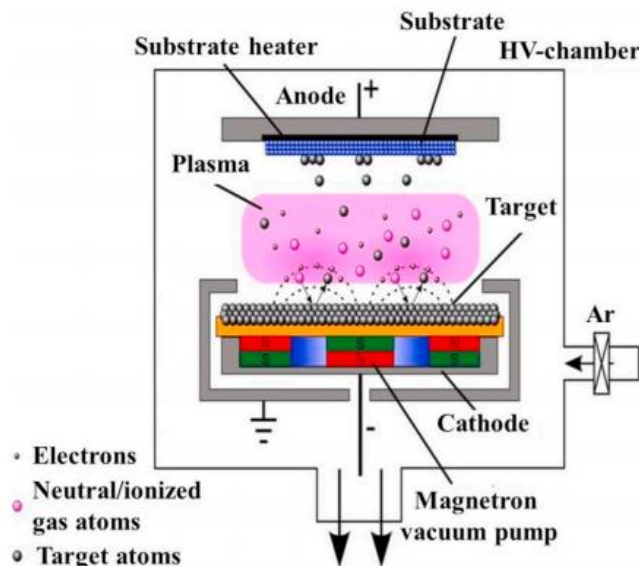


Figure I.14 Méthode de dépôt physique en phase vapeur (PVD) [SAL 20]

La méthode PVD a de nombreuses applications, telles que l'aérospatiale et l'automobile, grâce à l'amélioration des propriétés mécaniques et de la résistance à l'usure par la formation de la couche mince aux propriétés graduées [SHA 15], l'électronique, la chimie, les semi-conducteurs, les panneaux solaires. Le dépôt physique en phase vapeur (PVD) présente beaucoup d'avantages par rapport au dépôt chimique en phase vapeur, car les films sont denses, le processus est facile à contrôler et il n'y a pas de pollution [YAN 92].

I.6.4 Traitement de fabrication additive pour les FGMs (FA)

Les techniques de fabrication additive (FA) sont devenues une méthode très populaire pour la production de FGM, car ces méthodes ont la capacité de fabriquer des structures poreuses complexes avec une résolution même nanométrique [ZHA 19]. Ces techniques AM font partie des meilleures

options pour les applications biomédicales et implantaires, car elles sont rapides et économiques, et surtout, elles peuvent être ajustées avec précision pour répondre aux besoins spécifiques du patient, tels que la forme, la dimension et même la texture des tissus vivants associés [JAV 18].

Dans la fabrication additive (FA) des FGMs, les composants 3D sont construits couche par couche à l'aide de différents processus, y compris des processus laser à base de poudre de fusion sur lit de poudre (PBF) et de dépôt d'énergie dirigé (DED) [ZHA 19].

Toutes ces techniques de fabrication additive sont utilisées pour fabriquer des FGMs dans un court intervalle de temps et le processus peut être contrôlé numériquement, donc toutes ces méthodes entrent dans la rubrique de la fabrication rapide. Ces méthodes ont un énorme potentiel industriel et peuvent être commercialisées pour la fabrication de FGM en masse. Ces technologies sont ensuite détaillées.

I.6.4.1 Fusion sur lit de poudre PBF

La technologie **PBF** utilise également des lasers pour construire des prototypes en FGM, et couvre diverses méthodes, notamment la fusion par faisceau d'électrons (EBM), le frittage sélectif au laser (SLS) et le SLM. Cependant, plutôt que d'utiliser de multiples matériaux et des processus laser constants, le PBF utilise la densité d'énergie et des structures spéciales pour obtenir des variations fonctionnellement graduées. La poudre est sélectivement fondue par un faisceau laser dans des régions spécifiques à plusieurs reprises, empilant ainsi une seule couche pour former le produit final.

a) Technologie EBM

La fusion par faisceau d'électrons (**Electron Beam Melting**) est l'une des technologies de fusion sur lit de poudre, dans laquelle la poudre métallique est fondue et fusionnée couche par couche à l'aide d'un faisceau d'électrons élevé (Figure I.16).

La fabrication des matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) par technique de faisceau d'électrons (EBM) avec des densités graduelles continues sont étudiés pour la précision dimensionnelle, les propriétés de compression, la fractographie et l'effet de direction de construction par rapport aux homologues à densité uniforme du même volume [JAV 18].

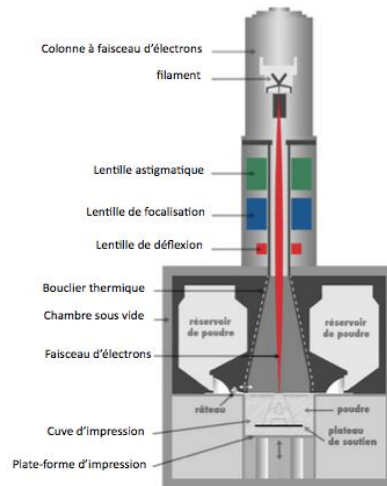


Figure I.15 Technologie EBM

b) Frittage laser sélectif (SLS)

Le procédé frittage laser sélectif (Selective Laser Sintering) est un procédé de fabrication additive par agglomération de poudres et fusion partielle (Figure I.17). Dans le cas de la technologie SLS, la poudre est chauffée à une température proche de la température de fusion de façon à accélérer la vitesse de balayage laser et aussi diminuer la puissance du laser (ce qui représente la pièce la plus onéreuse d'une machine). *Jepson et al.* [JEP 97] a utilisé la technique SLS pour produire des pièces FGMs appropriées aux applications qui nécessitent une dureté et une résistance à l'usure tout en conservant un certain degré de ductilité.

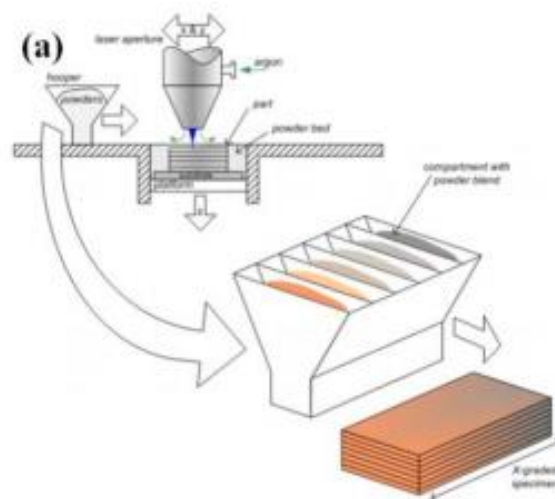


Figure I.16 Principe d'élaboration de FGM par le procédé PBF-SLS

c) Fusion Laser Sélective (SLM)

Le procédé Fusion Laser Sélective (**Selective Laser Melting**) se différencie de la technologie SLS par le fait que la matière est fondue sous l'action du laser (Figure I.18). L'énergie nécessaire à la fusion du matériau est apportée par un laser qui balaye de son faisceau la zone de construction recouverte de poudres et cela couche par couche [KRU 04]. Le procédé de fabrication se déroule de la manière suivante : le râtelier amène une couche de poudre qui est fusionnée à la couche inférieure par laser de très forte puissance. La plateforme mobile descend d'une couche et ainsi de suite. La fabrication additive par procédé SLM appliquée aux FGM présente un potentiel exceptionnel pour la réalisation de structures et de pièces complexes [MUM 06]. Les paramètres de traitement laser utilisés avaient été spécifiquement optimisés pour la production de pièces FGM à haute température qui sont généralement utilisées dans les composants des moteurs à réaction.

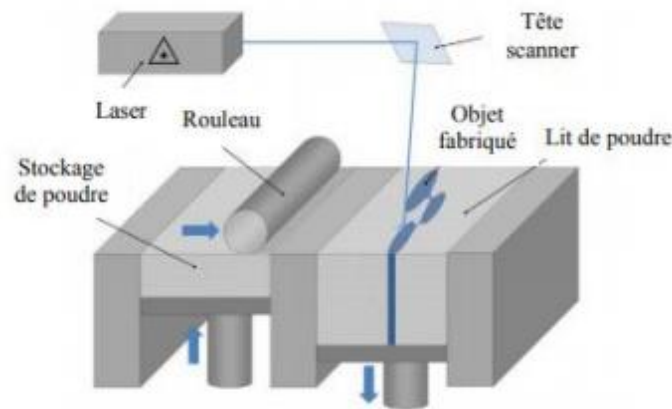


Figure I.17 Principe de fonctionnement du procédé PBF-SLM

La différence majeure entre la technologie EBM et la technologie SLM réside dans le fait que l'apport de chaleur se fait par l'intermédiaire d'un faisceau d'électrons. Le faisceau d'électrons permet d'augmenter la densité d'énergie ainsi que la vitesse de balayage du faisceau qui est beaucoup plus rapide que la tête scanner du laser. En effet, le balayage du faisceau d'électrons n'est pas réalisé par une tête de scanner avec des miroirs motorisés mais par l'intermédiaire de lentilles.

I.6.4.2 Dépôt d'énergie dirigée (DED)

Le dépôt d'énergie dirigée (Directed Energy Deposition) est un procédé de fabrication additive. Le DED forme des objets 3D en faisant fondre le matériau lors de son dépôt à l'aide d'énergie thermique focalisée comme le laser, le faisceau d'électrons ou l'arc plasma. La source d'énergie et la buse d'alimentation en matériau sont manipulées à l'aide d'un système de portique ou d'un bras robotique [LEE 08]. Les systèmes de poudre DED peuvent utiliser plusieurs buses permettant de mélanger différents matériaux pour obtenir des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) [LIU 03]. Le DED

peut être classé dans les groupes suivants en fonction de la source d'énergie qu'il utilise pour faire fondre le matériau.

a) Mise en forme de filet par laser (LENS)

Les systèmes DED basés sur le laser tels que la mise en forme de filet par laser (Laser Engineering Net Shaping) utilisent le laser comme principale source d'énergie. LENS est une extension du processus de revêtement laser dans lequel plusieurs couches sont déposées pour former un objet prédéfini (Figure I.19). Les poudres sont soufflées à travers la buse dans un bain de fusion créé par un faisceau laser sur le substrat pour former une ligne déposée. Plusieurs lignes sont déposées les unes à côté des autres pour former une couche. Le processus de création de couches est répété jusqu'à ce qu'un objet se forme.

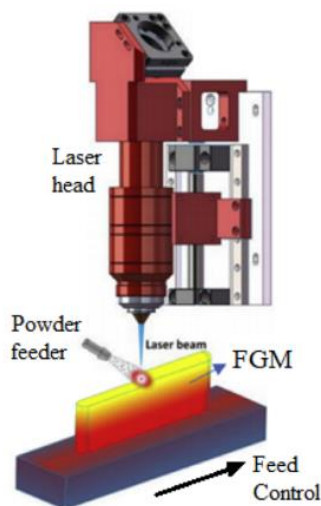


Figure I.18 Technologie LENS[LI 18]

L'adoption de la technique **LENS** permet qu'un nombre incalculable de FGM peut être fabriqué sous des formes complexes, car la vitesse de dépôt de poudre élémentaire peut être contrôlée pour chaque chargeur pendant la fabrication de chaque couche et le produit final peut être obtenu en quelques heures [RAN 03]. Le premier attribut de ce type découle de la capacité de LENS à créer des structures poreuses à gradation fonctionnelle exploitées pour des applications d'implants orthopédiques.

b) Fabrication additive par faisceau d'électrons (EBAM)

Les systèmes DED basés sur des faisceaux d'électrons tels que la fabrication additive par faisceau d'électrons (Electron Beam Additive Manufacturing) utilisent un faisceau d'électrons pour faire fondre la matière première en poudre (Figure I.20).

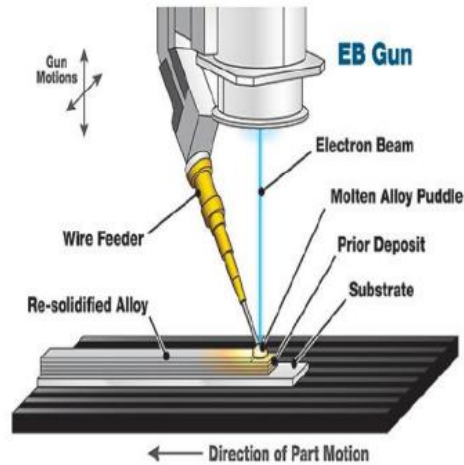


Figure I.19 Technologie EBAM

La technologie EBAM peut également produire divers types de matériaux à classification fonctionnelle (FGM) en utilisant plusieurs buses d'alimentation en fil comme le montre la figure (I.20) pour un seul pistolet EBAM [BHA 17]. Le revêtement et le type en vrac de FGM peuvent être formés de manière continue ou discontinue.

c) Fabrication additive à l'arc à fil (WAAM)

Les systèmes DED basés sur le plasma ou l'arc électrique tels que la fabrication additive à l'arc à fil (Wire And Arc Deposition) utilisent un arc électrique pour faire fondre le fil, l'objet final étant entièrement formé à partir du matériau de soudure déposé (Figure I.21).

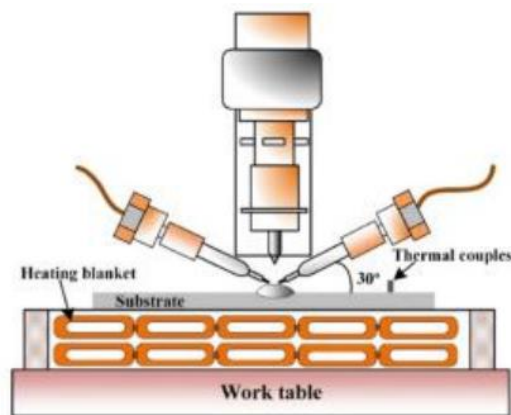


Figure I.20 Diagramme schématique de procédés WAAM de système d'alimentation à deux fils

Shen et al. [SHE 15] et Wang et al. [WAN 18] sont réussis à fabriquer des composites fonctionnellement classés en utilisant WAAM avec un système d'alimentation à deux fils ayant un rapport de vitesse d'alimentation en fil réglable afin de contrôler la composition du matériau et également d'atteindre la vitesse de dépôt souhaitée.

d) Dépôt de matériau par laser (LMD)

Les systèmes DED à base de poudres telles que le dépôt automatique d'une couche de matériau par laser (Laser Metal Deposition) alimentent la poudre à travers la buse et fondue par un faisceau laser ou un faisceau d'électrons (figure I.22a) [ABD 19].

Traitement LMD multi-matériaux alimenté en poudre : plusieurs matériaux en poudre différents (par exemple, les matériaux A et B) peuvent être mélangés in situ par une chambre de mélange de poudre intégrée dans la pointe de la buse [BRU 18]. Le dépôt de métal au laser (LMD) a été utilisé pour explorer un nouveau processus de fabrication pour produire un matériau fonctionnellement gradué (figure I.22c) [LI 17].

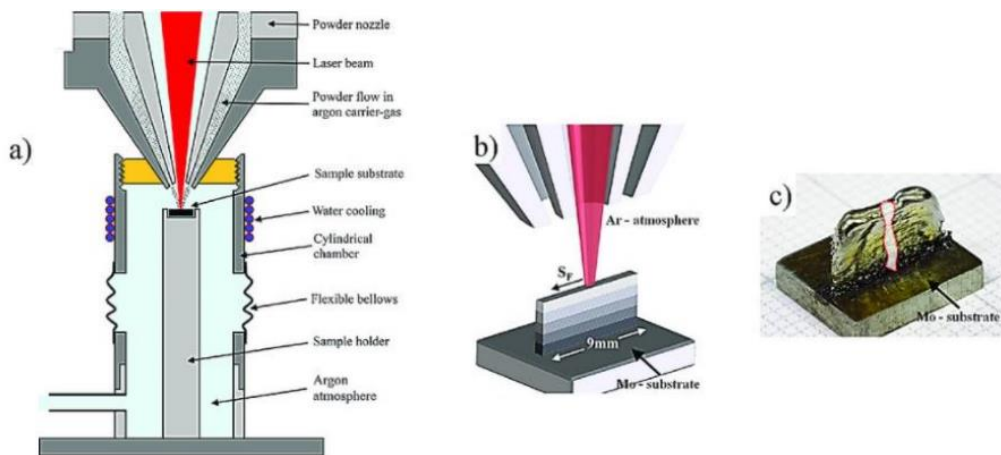


Figure I.21a) Projection poudre ou installation expérimentale de dépôt de métal laser LMD

b) gradient de matériau constitué de cinq mélanges de poudre,

c) Photo d'une structure FGM

e) Construction laser additive directe (CLAD)

La méthode construction laser additive directe (Construction Laser Additive Direct) permet de construire, couche par couche, des objets directement importés depuis un fichier numérique CAO (conception assistée par ordinateur). Cette technique fonctionne plus précisément sur le principe de dépôt sous énergie concentrée (Figure I.22). Les outils développés et mis en place sur le procédé DED-CLAD ont permis de fabriquer des pièces à gradients de composition chimique et par conséquent, à gradient de propriétés microstructurale et mécanique [MUL 13]. Ces développements consistent en un système d'alimentation en matériaux d'apport composés de plusieurs distributeurs, d'un cyclone permettant de contrôler le débit de gaz en sortie de buse et d'homogénéiser le mélange de poudres et d'une buse de fabrication additive plus résistante aux fortes températures.

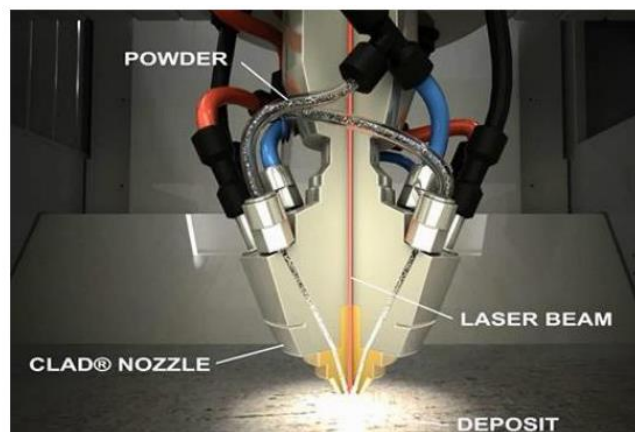


Figure I.22 Technologie CLAD (dépôt de métal par laser)

Ensemble, ils constituent le système d'injection différentielle. Le système d'injection différentielle développé et mis en place sur le procédé DED-CLAD permet aujourd'hui de réaliser des pièces FGM [SCH 17].

Les systèmes DED peuvent différer des systèmes PBF, car les poudres utilisées sont souvent de plus grandes tailles et nécessitent une densité d'énergie plus élevée [YUS 17].

f) Extrusion de matière

Un processus de fabrication par extrusion de matière (**FEF**) capable de fabriquer des pièces et des structures tridimensionnelles (3D) avec des matériaux composites gradués. Le développement du procédé comprend la conception et la fabrication d'une machine à portique avec un mécanisme à triple extrudeuse et le matériel électronique et le logiciel informatique associés pour fabriquer des pièces fonctionnellement calibrées à partir de plusieurs pâtes. La Figure (I.24) montre l'équipement FEF à triple extrudeuse [LEU 11].

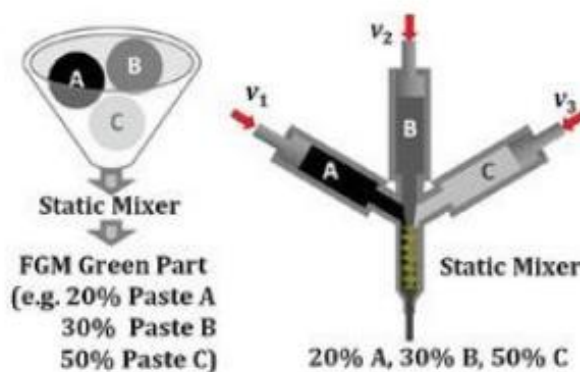


Figure I.23 Procédé d'extrusion de matière (triple extrudeuse) [LEU 12]

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs), leurs caractéristiques et leurs domaines d'application. Les différentes méthodes de fabrication ont été mises en évidence et les différentes lois de variation de leurs propriétés sont également présentées.

Le prochain chapitre abordera une étude bibliographique sur les travaux existants sur les structures fissurées en FGMs, en se basant sur la détermination du facteur d'intensité de contraintes.

CHAPITRE II

Étude bibliographique

II.1. Introduction

Ce chapitre présente les notions théoriques de la mécanique de rupture nécessaire pour aborder l'étude numérique du comportement en rupture des matériaux FGMs. Tout d'abord les notions essentielles de la mécanique de rupture fragile en statique sont exposées, ensuite les principales méthodes numériques existantes pour évaluer les facteurs d'intensité de contraintes sont exposées. Enfin, nous présentons une revue de quelques travaux scientifiques portant sur la rupture des matériaux FGMs, en mettant l'accent sur les différentes approches utilisées.

II.2 Mécanique linéaire de la rupture

La présence de défauts dans les structures affaiblit leur résistance mécanique, peut entraîner leur ruine, et être à l'origine de catastrophes graves. Afin d'éviter celles-ci, les ingénieurs et les scientifiques doivent donc être capable de prédire le comportement des structures fissurées, et d'en garantir l'intégrité.

Selon les cas, la présence de fissures peut être constatée lors d'inspection si le composant est accessible au contrôle, ou supposée lorsque l'on souhaite évaluer la sûreté d'un composant.

La mécanique de la rupture est la science qui étudie le comportement des structures fissurées. Elle fournit les outils nécessaires pour l'analyse de l'intégrité de structures. Il s'agit d'un domaine scientifique relativement récent puisqu'il est apparu après la première guerre mondiale, notamment avec les études de Griffith en 1920 et d'Irwin en 1957.

Depuis cette date, le développement de la mécanique de la rupture s'étend aux problèmes non linéaires matériellement et géométriquement, aux problèmes de bifurcation des fissures en modes mixtes et plus récemment aux composites et aux techniques numériques de résolution.

II.2.1. Modes élémentaires de fissuration

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées de la fissure (Figure II.1), ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements.

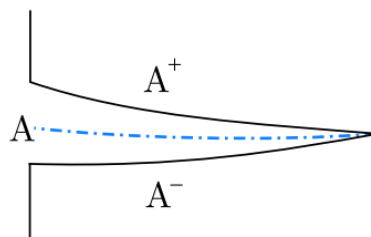


Figure II. 1 Séparation d'un milieu de part et d'autre d'une Interface A

Cette séparation est appelée fissure et modifie les champs de déplacements, de déformations et de contraintes. La discontinuité du champ de déplacement se caractérise par un saut de déplacement $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$. Selon la direction de la sollicitation, trois modes de rupture principaux sont considérés (Figure II. 1). Les flèches indiquent les déplacements relatifs des deux lèvres.

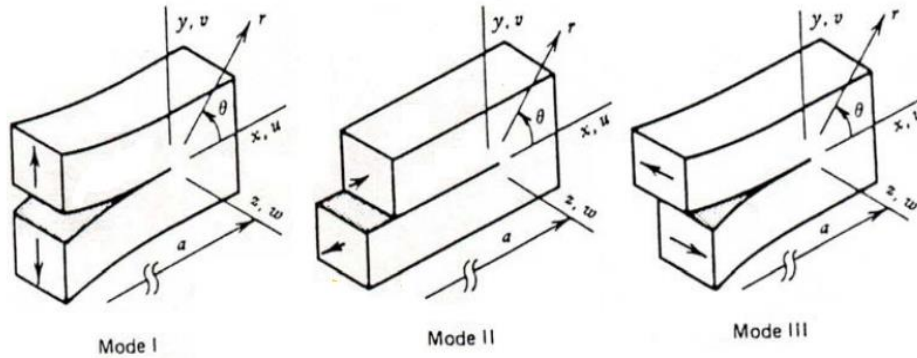


Figure II. 2 Mode d'ouverture des fissures

- **Mode I** : « mode d'ouverture de la fissure »; où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation.
- **Mode II** : « mode de cisaillement dans le plan »; où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.
- **Mode III** : « mode de cisaillement hors plan »; où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

Le mode I est physiquement le plus important car il est lié à la rupture par traction qui dans le cas des matériaux fragiles, provoque une ouverture de fissure qui pourra conduire facilement à la rupture. Les modes II et III sont liés aux contraintes de cisaillement dont le mode de rupture n'est pas facile à contrôler.

II.2.2. Processus de fissuration

Dans le cas général, la fissuration se produit dans un matériau suivant quatre étapes :

- a) La plastification locale au voisinage des défauts et singularités géométriques ou matériels: le degré de la singularité a une influence primordiale sur l'ampleur de la zone plastique ainsi que sur la concentration de contraintes.
- b) La formation des fissures: cette étape peut se réaliser à partir des traitements de surface, des traitements ou chargement thermique générant des contraintes résiduelles dépassant largement le seuil plastique.

c) La propagation des fissures réelles naissantes : cette propagation peut être brutale ou successive. Souvent on assiste à une propagation successive faisant augmenter la taille de la fissure jusqu'à atteindre une taille critique, entraînant une propagation brutale.

d) Cette propagation brutale constitue la dernière étape, elle peut être accompagnée de grandes déformations généralisées (striction) ou sans déformations importantes (rupture fragile).

La mécanique de la rupture étudie l'interaction entre la discontinuité géométrique (fissure) et le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité. Schématiquement, on peut distinguer dans un milieu fissuré trois zones successives, (Figure II.3).

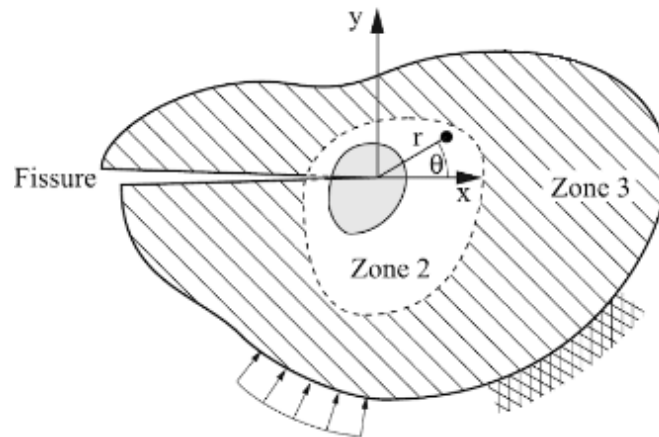


Figure II. 3 : Zone délimitant le voisinage d'une pointe d'une fissure dans un milieu élastique

Zone 1 : Zone d'élaboration

Elle se trouve à la pointe de la fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause de contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. La taille de cette zone est généralement très petite, de l'ordre de quelques cristaux.

Zone 2 : Zone singulière

La zone dans laquelle les champs de déplacements, déformations et de contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. Cette zone est petite vis-à-vis du solide, mais elle est grande par rapport aux cristaux.

Dans cette zone, les composantes du champ de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ($r \rightarrow 0$), et plus exactement, la singularité est en $r^{-1/2}$ en milieu élastique linéaire d'où le nom de la zone singulière ou zone fine. Ainsi la singularité en $r^{-1/2}$ ne sera pas valable en dessous d'un certain rayon dit plastique (r_p). Les valeurs de r_p autour de la pointe de fissure déterminent la forme de la zone plastique qui, en fonction de sa taille, on dira que la rupture est fragile ou ductile.

Zone 3 : Zone extérieure

Les champs lointains se raccordent d'une part à la zone singulière et d'autre part aux conditions aux limites de chargement et de déplacement. Dans cette zone, les champs de déplacements, les déformations et les contraintes varient peu.

II.2.3 Paramètres pour étudier la zone singulière

En général, trois paramètres peuvent être utilisés pour étudier les caractéristiques de la zone singulière: le facteur d'intensité de contrainte K , le taux de restitution d'énergie G , et l'intégrale J . K est le paramètre de l'approche locale directe. G et J sont les paramètres de l'approche énergétique globale.

a) Le taux de restitution d'énergie G

Griffith [GRI 21] est le premier à aborder le problème des corps fissurés d'un point de vue énergétique. Par l'analyse du bilan énergétique, le taux de restitution d'énergie, noté G , a été introduit; c'est l'énergie nécessaire pour faire progresser une longueur unitaire de la fissure, elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W du milieu fissuré pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a , à une autre où la fissure se trouve augmentée d'une unité de longueur da :

$$G = -\frac{dW}{da} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{où :} \quad W = W_e + W_{ext} \quad (\text{II.2})$$

avec :

W_{ext} : Energie potentielle des forces extérieures

$W_e = \int_V \bar{W}_e dV$: Energie de déformation élastique

$\bar{W}_e = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$: Densité d'énergie de déformation élastique

Pour une fissure en milieu bidimensionnel, d'épaisseur b , on écrit :

$$G = \frac{1}{b} \frac{dW}{\Delta a} \quad (\text{II.3})$$

Dans un corps élastique contenant une fissure, l'extension de celle-ci est possible lorsque l'énergie disponible G atteindra une valeur critique G_C , qui représente la valeur au-delà de laquelle on aura théoriquement création de deux nouvelles surfaces, soit ($G = G_C = 2\gamma$).

avec : γ est énergie libre de création de surface.

Néanmoins, on a constaté expérimentalement que la fissure ne croit que pour des valeurs :

$$G \geq G_C \quad (\text{II.4})$$

G est indépendant de la géométrie de la structure

b) Approche d'intensité de contraintes

La deuxième approche considère les champs de contrainte et de déformation locaux autour de la pointe de fissure dans un matériau linéaire élastique. Ces champs peuvent être définis uniquement par un paramètre K , appelé *facteur d'intensité de contraintes* (FIC). La rupture peut intervenir lorsque K atteint une valeur critique K_C .

La théorie d'élasticité permet de calculer le champ de contraintes au voisinage du fond de fissure dans une plaque de dimensions finies. Westergaard [WES 39] a développé des relations qui relient ces contraintes en tête de fissure de longueur $2a$ dans une plaque de dimension infinie, soumise à une contrainte de traction σ perpendiculaire au plan de la fissure, (Figure II.4).

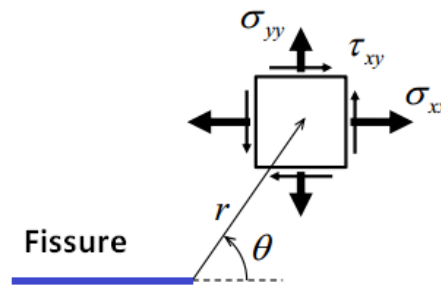


Figure II.4 Champ de contraintes au voisinage de la pointe de fissure

Au voisinage de la fissure, les contraintes sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Où : r et θ sont les coordonnées polaires du point considéré.

Le champ de déplacements est décrit par les relations :

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Où μ est le module de cisaillement et $\kappa = (3 - 4\nu)$ en état de déformation plane, et $\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$ en état de contrainte plane.

Les deux paramètres : le taux de restitution d'énergie élastique G et le facteur d'intensité de contraintes K permettent de décrire le comportement mécanique des fissures. Le premier est un paramètre global qui quantifie la variation d'énergie qui accompagne la propagation de la fissure, le second est un paramètre local.

En mode I, pour les matériaux élastiques linéaire K et G sont liés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} G_I = \frac{K_I^2}{E} & \text{En contrainte plane} \\ G_I = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) & \text{En déformation plane} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Dans le cas général, on a :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (\text{II.8})$$

Les paramètres K_I , K_{II} et K_{III} représentent les facteurs d'intensité de contraintes respectivement en mode I, II et III qui traduisent l'état de contrainte au voisinage du fond de fissure.

L'équation (II.8) peut être mise sous la forme suivante :

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (\text{II.9})$$

d'où :

$$G_I = \frac{K_I^2}{E^*}, G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E^*} \text{ et } G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (\text{I.10})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} E^* = E & \text{En contrainte plane} \\ E^* = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{En déformation plane} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

c) Intégrale de contour J

Dans le cadre de la mécanique de rupture, Rice [RIC 68] a utilisé une intégrale de contour définie par Eshelby appelée intégrale J [ESH 56, ESH 69]; cette approche s'applique à des matériaux présentant un comportement élastique linéaire ou élasto-plastique. Cette intégrale se présente par la relation (II.12), avec les notations de la figure (II.5).

$$G = J = \int_r W dy - \vec{T} \frac{\vec{\partial} u}{\partial x} ds \quad (\text{II.12})$$

Où: W est la densité de déformation d'énergie élastique (ou plastique pour les matériaux plastifiés), \vec{n} la normale au contour, \vec{T} le vecteur contraint en un point et \vec{u} le vecteur de déplacement au même

point. ds est l'élément de contour. Cette intégrale est indépendante du contour, à condition que le contour se trouve en milieu élastique linéaire.

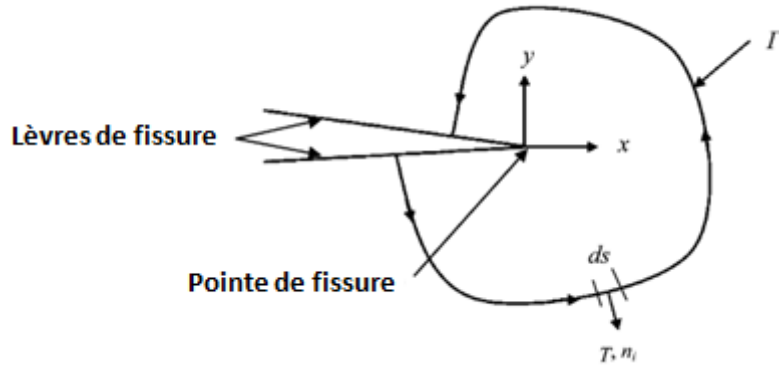


Figure II. 5 Intégrale de contour J

Pour un matériau globalement élastique, il est démontré que le taux de restitution d'énergie G est directement lié aux facteurs d'intensité de contraintes par :

$$J = G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (\text{II.13})$$

d) Contrainte élastique T (T-stress)

Généralement, le comportement à la rupture est caractérisé par un seul paramètre tel le facteur d'intensité de contraintes. Traditionnellement, ce facteur a été utilisé pour déterminer l'amorçage et la propagation des fissures dans les matériaux fragiles. Cependant, un deuxième paramètre de rupture, la contrainte T (ou T-stress), a été utilisé dans le but de connaître l'effet du confinement de la structure et du chargement à la pointe de la fissure, bien que la signification physique de ce paramètre reste illisible.

Pour une fissure dans un matériau élastique et isotrope, sollicité en mode d'ouverture sous contraintes planes, les deux premiers termes intervenant dans l'expression des contraintes sont:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{xi} \delta_{xj} + O(r^{1/2}) \quad \text{I.14}$$

avec:

f_{ij} : Fonction de l'angle θ ,

$\delta_{xi} \delta_{xj}$: Symbole de Kronecker.

On peut écrire dans le plan (x, y) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) & 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.15})$$

Le développement de (II.15) devient:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + T + O(r^{1/2}) \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + O(r^{1/2}) \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + O(r^{1/2}) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Le paramètre T-stress est défini comme étant une contrainte constante activant parallèlement dans le sens de propagation de la fissure. Son amplification est proportionnelle à la contrainte nominale à la pointe de la fissure. La figure (II.6) illustre la contrainte d'ouverture le long du ligament avec et sans la présence de la contrainte T.

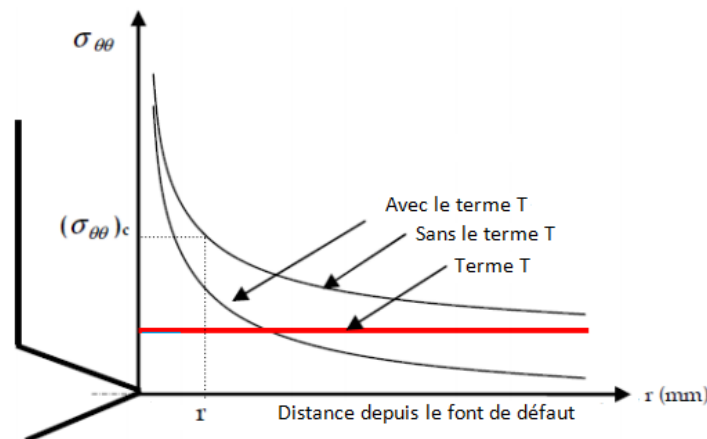


Figure 0.6 Evolution de la contrainte d'ouverture le long du ligament en présence du terme T

Afin de déterminer le T-stress, plusieurs méthodes ont été proposées pour les éprouvettes normalisées en mécanique de la rupture (Leavers et Radon [LEE 82], Kfourri [KFO 86], Sham [SHA 89, 91], Wang et Parks [WAN 92], Toshio et Parks [TOS 92]). Une étude sur un modèle tridimensionnel a été menée par Henry et Luxmoore [HEN 95] pour les plaques contenant des fissures centrales. Yang et Ravi-Chandar [YAN 99] ont développé une méthode de différence des contraintes pour évaluer le T-stress dans un problème de fissure. Ayatollahi et al. [AYA 99] ont déterminé la contrainte-T en utilisant une analyse par éléments finis, ils ont obtenu des valeurs stables le long du ligament. Maleski et al. [MAL 04] ont étendu la méthode de Dally et Sanford pour calculer le FIC et le T-stress en mode I. Ils ont utilisé des rosettes rectangulaires pour évaluer la contrainte-T. Meliani et al. [MEL 10] ont estimé la

contrainte T et les chemins de fissures émanant des entailles en U. L'estimation du T-stress était basée sur la méthode de différence des contraintes. Bouchelarm et al. [BOU 17, 18] ont proposé une méthode analytique basée sur l'approche généralisée de Werstergaard pour déterminer le FIC et le T-stress sans l'intervention des paramètres géométriques. Cette méthode a été appliquée pour déterminer la position optimale pour l'emplacement des rosettes afin d'éliminer les erreurs dues aux termes d'ordres supérieur.

Dans le cas des matériaux FGM sollicité sous chargement mécanique, Paulino et Kim [PAU 03, 04, 05] ont déterminé le T-stress en se basant sur la méthode de l'intégrale M :

$$T = M_{local} \frac{E_{tip}^*}{f} \quad (II.17)$$

f est calculé par :

$$f = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} \sigma_{ij}^{aux} n_j d\Gamma \quad (II.18)$$

Dans le cas des matériaux FGM sollicité sous chargement thermique, KC et Kim [KC 08] ont déterminé le T-stress par :

$$T = M_{local} \frac{E_{tip}^*}{f} - C_{tip} \alpha_{tip} \Delta \theta_{tip} E_{tip}^* \quad (II.19)$$

Dag [DAG 07], Dag et Yildirim [DAG 09], Dag et al. [DAG 12] ont examiné la contrainte T par la formulation :

$$T = - \frac{\sqrt{2\pi} E_{tip}^*}{8K_{II}} S \quad (II.20)$$

II.3. Evaluation numérique des FICs

Le facteur d'intensité de contraintes qui décrit l'ensemble de la singularité spatial du champ de contrainte au voisinage du front de la fissure, dépend de la géométrie du corps fissuré, de ses dimensions et du mode de sollicitation. Actuellement, plusieurs méthodes existent disponible dans la littérature pour évaluer les FICs à partir des solutions données par les méthodes numériques. On distingue principalement l'approche locale et l'approche globale.

II.3.1 Approche locale

Cette méthode est basée sur l'analyse des champs de contraintes et de déplacements au voisinage de la pointe de la fissure. On peut citer dans cette catégorie :

a) Technique DCT (Displacement correlation technique)

La technique de corrélation de déplacement DCT est l'une des méthodes les plus simples pour évaluer les FICs en mode mixte pour les matériaux élastiques linéaires. Il consiste à corréler les résultats numériques de déplacement avec des solutions analytiques. Cette corrélation est effectuée sur les points (2, 3, 4 et 5) localisés sur les lèvres de la fissure (Figure II.8) [FEH99].

$$\begin{cases} K_I = \frac{\mu}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(v_2 - v_4) - (v_3 - v_5)] \\ K_{II} = \frac{\mu}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(u_2 - u_4) - (v_3 - v_5)] \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

u et v représentent les déplacements suivant les directions x et y , respectivement (Fig. II.7). μ et L sont le module de cisaillement et la longueur de l'élément singulier.

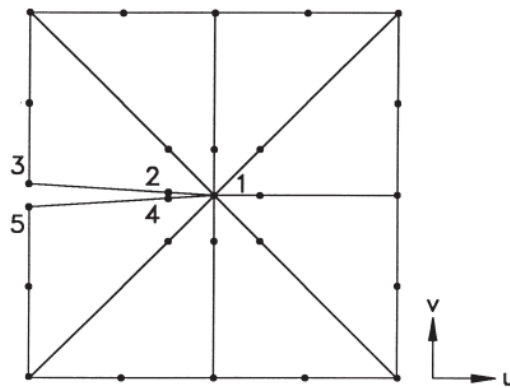


Figure 0.7 Élément singulier autour de la pointe de fissure

En utilisant cette technique, Boulenouar [BOU20] et Ait Ferhat [AIT 21] ont analysé numériquement le comportement en rupture d'une fissure centrale inclinée dans un disque en FGM. Dag and Ilhan [DAG08] et Topal and Dag [TOP13] ont validé au moyen de cette méthode, les valeurs des FICs obtenus par l'approche énergétique. Yildirim et al. [YIL08] ont aussi analysé par la méthode DCT, le comportement de délaminage des revêtements de FGM orthotropes.

b) Technique QPDT (Quarter point displacement technique)

Cette méthode utilise uniquement les deux nœuds adjacents à la fissure pour calculer les FICs, comme le montre la figure (II.7). La technique QPDT est similaire à celle utilisée par le DCT et propose les relations suivantes [FEH 99] :

$$\begin{cases} K_I = \frac{\mu}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(v_2 - v_4)] \\ K_{II} = \frac{\mu}{1+k} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(u_2 - u_4)] \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

c) Technique DET (Displacement extrapolation technique)

En s'appuyant sur les éléments singuliers de Barsoum [BAR 74], les FICs peuvent être calculés par [BOU 13]:

$$\begin{cases} K_I = \frac{E}{3(1+\nu)(1+k)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(\nu_2 - \nu_4) - \frac{(\nu_3 - \nu_5)}{2} \right] \\ K_{II} = \frac{E}{3(1+\nu)(1+k)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_2 - u_4) - \frac{(u_3 - u_5)}{2} \right] \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Cette approche est basée sur une idée simple initialement développée par Barsoum, et qui consiste à éviter le problème de la singularité en portant une modification géométrique aux éléments finis quadratiques au front de la fissure. Cette technique est très couramment employée dans les matériaux gradués ; Hebbar et al. [HEB20] et Ait Ferhat et Boulenouar [AIT20a] ont utilisé la méthode d'extrapolation pour analyser le comportement en rupture des matériaux FGM, en se basant sur des exemples d'applications suffisamment variés. Benamara et al. [BEN17a, 17b] et Chafi et Boulenouar [CHA19] ont traité le problème de fissuration dans les matériaux gradués, en se basant sur la MEF combinée avec la technique DET.

d) Technique CTSM (Crack tip stress method)

Cette technique a été proposée à l'origine par Nisitani [NIS 99, 03, 04a] pour le but de déterminer le FIC numériquement par la MEF. Le principe s'articule sur le calcul du FIC K_I du problème inconnu par :

$$F_I = \sigma_y \frac{F_I^* \sigma^*}{\sigma_y^* \sigma} \sqrt{\frac{a^*}{a}} \quad (\text{II.29})$$

avec:

$$\begin{cases} F_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} \\ F_I^* = \frac{K_I^*}{\sigma^* \sqrt{\pi a^*}} \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

σ_y et σ_y^* indiquent les valeurs de la contrainte normale à la pointe de fissure de longueur a (problème inconnu) et de longueur a^* (problème de référence), respectivement.

K_I et K_I^* indiquent les valeurs du FIC en mode-I du problème inconnu et de référence respectivement.

II.3.2 Approche globale

Il est à signaler que l'évaluation de ces facteurs d'intensité à partir des intégrales dépend généralement du contour choisi. L'utilisation des contours très rapprochés de la pointe de la fissure ne conduit pas, malheureusement, à des valeurs correctes de ces facteurs. Dans ce qui suit nous allons exposer deux techniques d'évaluation basées sur la méthode des intégrales d'interaction à savoir; la méthode de l'intégrale M et la méthode de l'intégrale J_k .

a) Méthode de l'intégrale M

Lorsque la fissure est sollicitée en mode mixte, il devient nécessaire de déterminer les différents facteurs d'intensité de contraintes séparément. A partir de l'intégrale J , Yau et al. [YAU 80] ont proposé une méthode pour les déterminer; cette méthode appelée intégrale d'interaction est très largement utilisée [GOS 02].

Le concept est basé sur l'utilisation de deux états indépendants (1) et (2), d'un corps fissuré élastique, homogène et isotrope. L'état (1) correspond au champ réel qui satisfait le problème de conditions aux limites, tandis que l'état (2) est un champ auxiliaire arbitraire.

La superposition des deux états conduit à un nouveau décrit par l'exposant (0). Dans le cas d'une fissure rectiligne et libre d'effort (sans frottement ni contact, hypothèses de l'intégrale J), l'intégrale J de l'état (0) est :

$$J^{(0)} = \int_{\Gamma} (W^{(0)} \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1}) n_j ds \quad (\text{II.31})$$

où Γ correspond au contour d'intégration et $W^{(0)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)})$.

Après développements et réarrangement des termes, nous obtenons

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (\text{II.32})$$

avec $J^{(1)}$ et $J^{(2)}$ les intégrales J des états (1) et (2) respectivement, et $M^{(1,2)}$, appelée *l'intégrale d'interaction* pour les états (1) et (2), est donnée par :

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_j ds \quad (\text{II.33})$$

où $W^{(1,2)}$ est l'énergie de déformation d'interaction définie par $W^{(0)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)})$. En utilisant l'équation (II.32) pour l'état (0), et après développement et simplification, nous aboutissons à l'écriture de $J^{(0)}$ sous la forme :

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (\text{II.34})$$

La comparaison des deux équations conduit à la relation :

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) = M \quad (\text{II.35})$$

Par conséquent, les FICs de l'état réel (1) peuvent être déterminés en évaluant l'intégrale d'interaction $M^{(1,2)}$ pour un choix judicieux des champs asymptotiques de l'état auxiliaire (2). Nous optons pour les trois états des modes purs asymptotiques définis par Westergaard, de sorte que :

- En mode I pur, $K_I^{(2)} = 1$, $K_{II}^{(2)} = 0$, $K_{III}^{(2)} = 0$, détermine $K_I^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction par la relation :

$$K_I^{(1)} = K_I = \frac{2}{E^*} M \quad (\text{II.36})$$

- En mode II pur, $K_I^{(2)} = 0$, $K_{II}^{(2)} = 1$, $K_{III}^{(2)} = 0$, détermine $K_{II}^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction par la relation :

$$K_{II}^{(1)} = K_{II} = \frac{2}{E^*} M \quad (\text{II.37})$$

b) Méthode de l'intégrale J_k

Cette technique a été utilisée dans plusieurs travaux scientifiques [YIL 04, 05, 06, 08], [TOP 13], [DAG 06, 07, 08, 10, 12,13]. Elle est basée sur l'intégrale J proposée par Rice, transférée dans le domaine d'intégrale, nommé l'intégrale J_k .

L'intégrale J peut s'écrire séparément en deux modes J_1 et J_2 (Mode-I et Mode-II) [BEN 06]:

$$\begin{cases} J_1 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,1})_{expl} q d\Omega \\ \text{et } J_2 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,2} - W \delta_{2j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl} q d\Omega + \int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) n_2^+ q d\Gamma \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

où : q est une fonction et $q_{,j}$ est la dérivée de la fonction q par rapport aux coordonnées.

W est la fonction de densité d'énergie de déformation mécanique.

$(W_{,1})_{expl}$ et $(W_{,2})_{expl}$ sont les dérivées de W par rapport aux coordonnées x et y , respectivement.

$u_{,1}$ et $u_{,2}$ sont les dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, respectivement.

Ω est la surface d'intégration.

$(W^+ - W^-)$ est la notation de densité d'énergie de déformation mécanique sur les faces de la fissure.

La relation entre J_1, J_2 et les FICs K_I, K_{II} sont données par [KIM 02a].

$$\begin{cases} J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \\ J_2 = \frac{2K_I K_{II}}{E'} \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Après le développement des relations (II.41), on trouve :

$$\begin{cases} K_I^4 - E' J_1 K_I^2 + \frac{1}{4} (E')^2 (J_2)^2 = 0 \\ K_{II}^4 - E' J_1 K_{II}^2 + \frac{1}{4} (E')^2 (J_2)^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

La résolution du système d'équations (II.40) nous permet de déterminer les FICs K_I et K_{II} . Le choix des FICs est lié aux déplacements normaux et tangentiels au voisinage de la pointe de fissure. Une description détaillée et l'implémentation numérique de cette technique est illustrée dans le dernier chapitre.

II. 4. Comportement en rupture des matériaux FGMs

Le traitement des structures fissurées a fait l'objet de plusieurs travaux scientifiques permettant de répondre aux difficultés posées par l'amorçage et la propagation de fissure. L'étude du comportement de fissures est un axe fondamental qui repose sur la détermination des paramètres de rupture combinés avec les méthodes numériques, notamment le FIC.

Dans le cas des matériaux fonctionnellement gradués, des solutions analytiques pour étudier le comportement de fissures sont limités à des géométries relativement simples et aussi à des conditions de chargement. Le premier modèle analytique a été proposé par Erdogan et al. [ERD 91], afin de décrire le comportement de fissures des plaques FGM. Ces auteurs ont traité le problème d'élasticité plane pour deux demi-plans collés contenant une fissure perpendiculaire à l'interface et d'identifier l'effet de variation de propriétés des matériaux à proximité du plan de diffusion sur le FIC. Gu et al. [GU 99] ont proposé une simple méthode basée sur l'intégrale de domaine équivalent afin de déterminer ensuite le FIC dans les poutres et les cylindres en FGM.

Un nombre important d'études sur l'analyse du comportement en rupture des matériaux gradués, telles que les pipes, les plaques et les poutres en FGM, sollicitées sous chargement statique et dynamique, ont été rapportées dans la littérature. Dans cette partie d'étude, nous présentons une revue de quelques travaux scientifiques portant sur la rupture des matériaux fonctionnellement gradués, en mettant l'accent sur les différentes approches utilisées pour déterminer le FIC, sous l'effet du chargement mécanique et thermique.

- **Chargement mécanique**

La modélisation d'un milieu fissuré en FGM sous chargement mécanique est retenue par plusieurs travaux, en utilisant différentes approches numériques. Rao et Rahman [RAO03] ont étudié le comportement des plaques fissurées en FGM de géométrie arbitraire par la méthode sans maillage dite EFGM « Element-Free Galerkin Method », combinée par les intégrales d'interaction. Mirahmadi et al. [MIR16] ont analysé le comportement des fissures radiales dans un cylindre en FGM, par la détermination des FICs, à partir de la méthode des fonctions de poids et l'intégrale J . Ait Ferhat et al. [AIT20a] et Hebbbar et al. [HEB 20] ont traité le comportement en rupture des éprouvettes de flexion et des disques circulaires utilisé par la technique DET. Kim et Paulino [KIM 02a, 02b, 03a, 03b, 03c] ont utilisé les approches de l'intégrale J_k et l'intégrale M et MCC, pour traiter le comportement des plaques fissurées en FGM. Un bon rapprochement est observé entre les trois techniques. Anlas et al. [ANL00] ont évalué les FICs dans une plaque en FGM, sollicitée sous chargement mécanique uniforme. Les calculs numériques sont réalisés par la technique de l'intégrale J et le taux de restitution d'énergie. Les résultats obtenus sont comparés par des résultats analytiques existants. Guo et al. [GUO 04] ont introduit l'effet du chargement de pression interne, la flexion et le déplacement imposé pour analyser théoriquement le problème de fissure dans les structures FGM orthotrope. Boulenouar [BOU 20] a examiné l'évolution des FICs en mode mixte dans un disque en FGM, contenant une fissure centrale en utilisant la technique DCT. La modélisation des structures fissurées en FGM orthotropes est investiguée aussi par Shojaee et Daneshmand [SHO15], Bayesteh et Mohammadi [BAY13], en se basant sur la XFEM combinée avec l'intégrale-M.

Dans le cas de la propagation de fissures dans les matériaux FGM, de nombreuses méthodes ont été proposées et développées sous l'effet du chargement mécanique. Haider et Hassanein [HAI17] ont adopté la méthode sans maillage XEFGM combinée avec la méthode de l'intégrale d'interaction pour simuler l'extension de fissures dans des poutres en verre/époxy, soumises à une flexion non proportionnelle. Chafi et Boulenouar [CHA19], Benamara et al. [BEN17a, 17b] ont prédit le trajet éventuel de fissuration dans des plaques minces en FGM. Dans le même contexte, Chen et al. [CHE18] et Ooi et al. [OOI15] ont présenté la méthode numérique SBFEM « Scaled Boundary Finite Element Method » pour traiter le problème de propagation de fissures. Hirshikesh et al. [HIR19] ont développé la formulation par EF et les équations de champ de phases pour étudier le phénomène de fissuration dans les matériaux FGMs. Les FICs sont déterminés par l'extrapolation des déplacements, en se basant sur les expressions asymptotiques. Kim and Paulino [KIM04, 07] ont implémenté la technique de l'intégrale M dans le code de calcul Franc 2D, pour le but de simuler le phénomène de fissuration. Ma et al. [MA08] ont analysé par la méthode XFEM et l'intégrale M le trajet de propagation dans le cas des éprouvettes de flexion 4-points en FGM.

- **Chargement thermique**

Les FGM sont apparus en 1984 dans une université Japonaise dont le but de réaliser un engin spatial ayant un revêtement pouvant résister à des conditions thermiques très sévères. Cette idée a permis de résoudre le problème de l'interface entre deux matériaux par l'élimination de discontinuités et d'améliorer la résistance au délaminage et à la propagation des fissures. L'étude d'un milieu fissuré en FGM sous chargement thermique a attiré l'attention de plusieurs chercheurs, en utilisant différentes approches numériques. Yildirim [YIL06] a pris en compte les conditions de chargement thermique en régime permanent et transitoire pour analyser l'évolution de FIC dans les matériaux FGMs. Le calcul numérique est effectué par l'intégrale de domaine équivalent découplée avec la MEF.

Dag [DAG07] a présenté une méthode de calcul basée sur l'intégrale J_k pour établir l'évolution des FICs dans les structures fissurées en FGM, soumises à un chargement thermique. Dag [DAG06], Dag et al. [DAG10] ont considéré la méthode de l'intégrale J_k en conjonction avec la MEF pour examiner la rupture des matériaux FGMs orthotropes soumises à des charges thermiques. Une nouvelle formulation de l'intégrale d'interaction a été mise en place par Moghaddam et Alfano [MOG 18] pour présenter une analyse thermomécanique non couplée et d'extraire ensuite les FICs pour le cas des fissures surfaciques. Chen et al. [CHE 00] ont analysé l'influence de la non-homogénéité sur la méthode de l'intégrale J standard. Ces auteurs ont proposé une autre méthode modifiée de l'intégrale J . Jin et Paulino [JIN01] ont considéré une fissure débouchante dans une couche en FGM pour déterminer le FIC thermique (FICT), sous les conditions du chargement thermique transitoire. Garg et Pant [GAR17] ont suggéré la méthode sans maillage combinée avec l'approche de l'intégral d'interaction pour examiner le problème de rupture thermoélastique des FGMs. Mahbadi [MAH17] a traité le cas d'un disque circulaire en FGM contenant une fissure radiale, soumise à un chargement de traction et un changement de température uniforme. Sous l'effet des contraintes thermomécaniques, Yildirim et al. [YIL 05] ont examiné le problème de fissures de surface dans une couche de revêtement de barrière thermique. Kosker et al. [KOS10] ont examiné par la MEF tridimensionnelles et la technique de corrélation de déplacement, l'évolution des FICs pour une fissure semi-elliptique amorcée dans un revêtement en FGM, prenant en compte l'effet des contraintes thermiques transitoires. Takabi [TAK16] a effectué une étude analytique et numérique thermomécanique d'un tube à paroi épaisse en FGM, soumis à un chargement de pression interne combiné avec des contraintes thermiques. Yildirim et Erdogan [YIL04] ont considéré la technique des éléments enrichis pour évaluer les FICs dans des structures en FGMs, sous l'effet du chargement thermique uniforme. Rangaraj et Kokini [RAN 04] ont examiné la propagation quasi-statique de fissures dans les revêtements de barrière thermique, par la technique de la zone cohésive. Zhang et al. [ZHA18] ont utilisé la méthode numérique NMM « Numerical Manifold Method » pour analyser le comportement en rupture des structures en FGMs soumises à des contraintes thermomécaniques. Récemment, Ait

Ferhat et al. [AIT 20c] ont exploité la MEF combinée avec la méthode de déplacement généralisé GDC pour analyser les FICs sous chargement mécanique et thermomécanique.

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une brève description de quelques notions de base de la mécanique linéaire de la rupture. Ensuite, nous avons exposé les principales approches pour déterminer les FICs en mode mixte, en se basant sur des approches locales et énergétiques. Une étude bibliographique de quelques recherches scientifiques liée au comportement en rupture des matériaux FGMs est présentée, en mettant l'accent sur les différentes méthodes numériques exploitées.

CHAPITRE III

Étude par EF du comportement en rupture des matériaux FGMs

III.1 Introduction

Jusqu'à présent, à travers les études citées précédemment, nous avons constaté que la méthode des éléments finis est un outil puissant pour résoudre les problèmes de rupture. Le point fort de cet outil est sa capacité à prendre en compte la complexité du chargement, la géométrie de la pièce étudiée ainsi que le comportement linéaire et non linéaire du matériau. Néanmoins, son point faible est le coût de calcul, en particulier pour un problème concernant la propagation de fissure sous chargement thermomécanique.

Le traitement des structures fissurées en FGM a fait l'objet de plusieurs études analytique et numérique, permettant de répondre aux difficultés posées par l'amorçage et la propagation de fissure. L'étude du comportement de fissures est un axe fondamental qui repose sur la détermination des paramètres de rupture combinées avec les méthodes numériques, notamment le FIC.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une analyse numérique par la MEF, du comportement en rupture des structures en FGMs. Des exemples d'applications ont été testés, comparés et validés dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture MLR, en se basant sur le code de calcul par éléments finis ANSYS.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons présenté l'extension de la méthode CTSM (*Crack tip stress method*) afin de déterminer le facteur de correction dans le cas des matériaux FGMs, sous les conditions imposées dans cette étude.

III.2 Modélisation de la singularité et l'évaluation du FIC

Pour présenter une étude numérique d'une structure fissurée par la MEF, il est préférable d'utiliser des éléments spéciaux autour de la pointe de fissure. Cette approche est basée sur une idée simple initialement développée par Barsoum [BAR 74], et qui consiste à éviter le problème de la singularité en portant une modification géométrique aux éléments finis quadratiques au front de la fissure (Figure III.1).

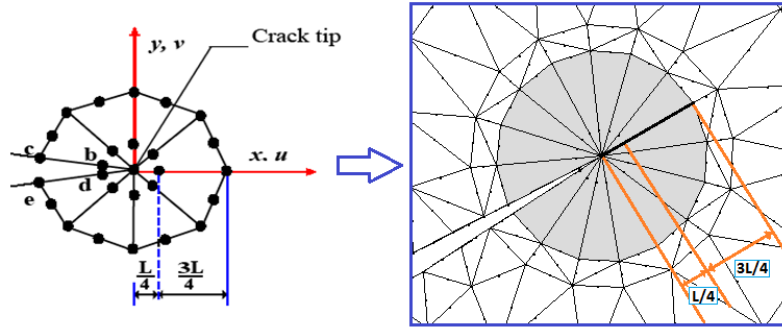


Figure III.1. Eléments singuliers avec nœuds au quart des côtés

La mécanique linéaire de la rupture est basée sur la détermination des facteurs d'intensité des contraintes (FICs). Il est donc important d'élaborer un modèle numérique capable de calculer ces facteurs pour différentes géométries des structures fissurées.

Dans la première partie de ce chapitre, deux techniques sont utilisées pour analyser la variation des facteurs d'intensité des contraintes, en considérant :

Méthode d'extrapolation de déplacement DET (*Displacement Extrapolation Technique*) : En mode mixte, les facteurs K_I et K_{II} sont calculés par [BEN17a, 17b, CHA19]. Évolution des FICs par cette méthode est illustrée dans l'annexe (A.1)

$$K_I = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(v_b - v_d) - \frac{(v_c - v_e)}{2} \right] \quad (\text{III.1})$$

$$K_{II} = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_b - u_d) - \frac{(u_c - u_e)}{2} \right] \quad (\text{III.2})$$

Méthode de corrélation de déplacement DCT (*Displacement Correlation Technique*): Les paramètres K_I et K_{II} sont donnés par [BOU20]:

$$K_I = \frac{\mu_{tip}}{k_{tip}+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(v_b - v_d) - (v_c - v_e) \right] \quad (\text{III.3})$$

$$K_{II} = \frac{\mu_{tip}}{k_{tip}+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_b - u_d) - (u_c - u_e) \right] \quad (\text{III.4})$$

Où :

E_{tip} , ν_{tip} et μ_{tip} sont le module de Young, le coefficient de poisson et le module de cisaillement, respectivement. Ces paramètres sont calculés à la pointe de fissure.

En élasticité linéaire, le paramètre k_{tip} égal à $\left(\frac{3-\nu_{tip}}{1+\nu_{tip}}\right)$ en état de contrainte plane et égale à $(3 - 4\nu_{tip})$ en état de déformation plane.

L est la longueur de l'élément singulier. u et v sont, respectivement, les déplacements suivant les directions x et y (Figure III.1).

On note ici que, les FICs K_I et K_{II} sont déterminés à l'aide d'un sous-programme implanté dans le code par éléments finis ANSYS 18.0, en utilisant le langage de script APDL (*ANSYS Parametric Design Language*).

III.3 Modélisation numérique du comportement mécanique des FGMs

Les propriétés mécaniques de la plaque en FGM sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul ANSYS. Ce programme permet de localiser les coordonnées du centre de chaque élément du maillage (e_i) et de calculer ensuite, le module élastique $E(x)$ et le coefficient de Poisson $\nu(x)$, en utilisant les lois de mélange.

III.4 Etude par EF du comportement en rupture des FGMs

Afin de démontrer la robustesse et l'efficacité de notre technique de calcul, plusieurs cas sont étudiés, les résultats obtenus ont été comparés avec d'autres travaux numériques et théoriques disponibles dans la littérature.

- Disque en FGM contenant une fissure centrale inclinée
- Poutre de flexion 3-points avec une fissure parallèle à la gradation du matériau
- Plaque mince en FGM contenant une fissure centrale, sollicitée en mode I

✓ Exemple 1 : Disque en FGM contenant une fissure centrale inclinée

Cette étude porte sur l'exemple d'un disque en FGM contenant une fissure centrale inclinée par rapport à l'horizontale avec l'angle $\theta = 30^\circ$. Un maillage spécial est utilisé au voisinage de deux pointes de fissure pour caractériser la singularité. Le reste du disque est maillé par des éléments triangulaires et quadrangulaires. La figure (III.2) représente la géométrie et le maillage de la plaque et au voisinage proche de la fissure centrale.

Le module élastique E est géré par la fonction exponentielle [HEB20, BOU 20]:

$$E(R) = Ee^{\beta R}, \quad R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (\text{III.5})$$

avec :

X_1 et X_2 sont des coordonnées cartésiennes et R est le rayon du disque.

Afin de réaliser notre étude numérique, sous les conditions des contraintes planes, nous avons utilisé les données suivantes :

$$\begin{cases} a = 1, R = 10, \\ \beta a = -0.75, -0.50, -0.25, 0, 0.25, 0.50, 0.75 \\ E = 1, \nu = 0.3 \end{cases}$$

- **Chargement et conditions aux limites**

Une charge ponctuelle $P = 100$ unités est appliquée à la partie supérieure et inférieure du disque, aux nœuds de coordonnées $(0, +10)$ et $(0, -10)$. Les déplacements u_1 et u_2 sont nuls au nœud de coordonnées $(X_1, X_2) = (-10, 0)$, et $u_2 = 0$ au nœud de coordonnées $(X_1, X_2) = (10, 0)$. Les conditions aux limites appliquées sont illustrées dans la figure (III.2a).

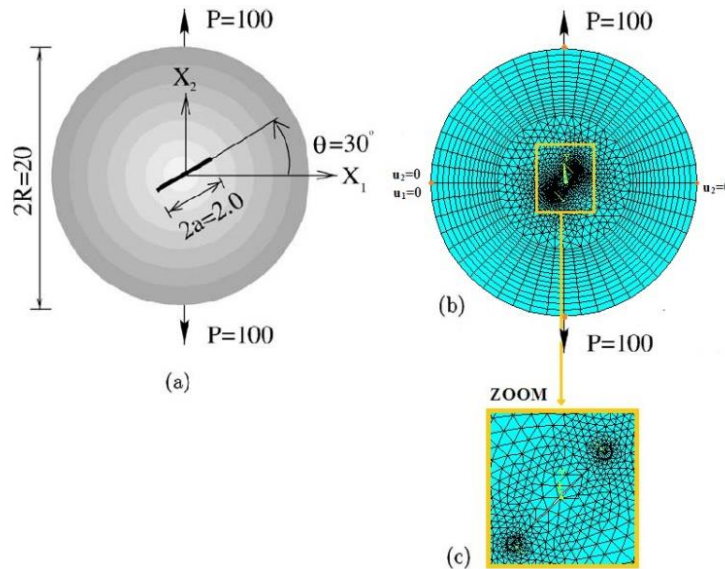


Figure III.2. a) Fissure centrale inclinée dans un disque circulaire en FGM,
 (b) Maillage globale du disque,
 (c) Maillage détaillé au voisinage de deux pointes de fissure.

En utilisant les méthodes locales DET et DCT, les figures (III.3a) et (III.3b) représentent, respectivement, la variation des FICs K_I et K_{II} en fonction du paramètre β (avec $a/R=0.1$ et $\theta=30^\circ$). Les résultats obtenus par EF sont comparés avec ceux obtenus numériquement par l'intégrale d'interaction ou l'intégrale M (*Interaction Integral Method*) [KIM 03b] et la méthode MCC (*Modified Crack Closure*) [KIM 03a]. Cette étude comparative montre un bon rapprochement entre les techniques locales et énergétiques.

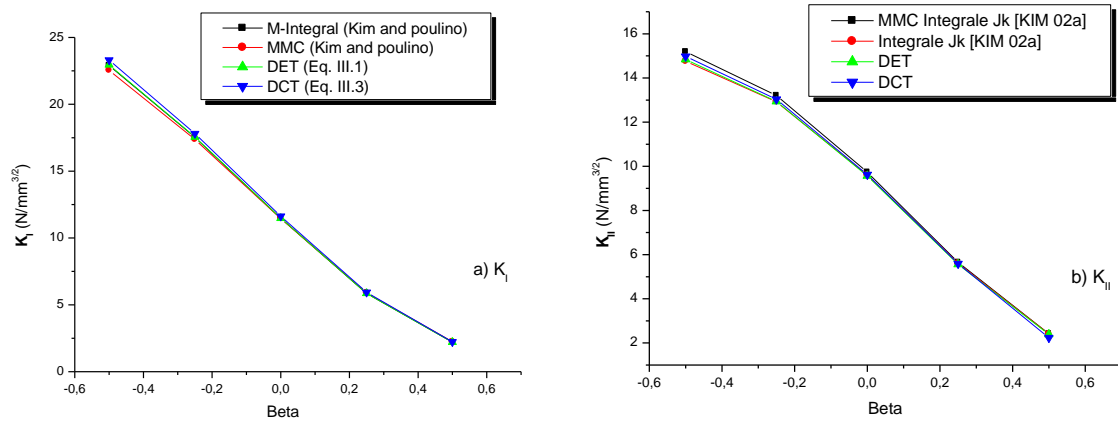


Figure III.3. Variation de K_I et K_{II} en fonction de β :

a) Variation de K_I , b) Variation de K_{II} .

Pour des raisons de symétrie dans la géométrie et le chargement, la variation des FICs K_I et K_{II} en fonction des angles d'orientation θ est étudiée uniquement dans l'intervalle $[90^\circ, -90^\circ]$.

Les figures (III.4) et (III.5) montrent la variation des facteurs K_I et K_{II} en fonction des angles positifs et négatifs de la fissure par la méthode DCT, en faisant varier le rapport (a/R) .

Nous pouvons constater que :

- Lorsque l'angle d'inclinaison θ est nul, le facteur K_I est maximal (mode I), puis il diminue progressivement vers des valeurs négatives avec l'augmentation de l'angle θ . Les valeurs négatives de K_{II} obtenues pour des orientations varient entre $[90^\circ, 76^\circ]$ et $[-90^\circ, -76^\circ]$. Ces orientations présentent un risque de propagation de la fissure par cisaillement.
- Le FIC K_I augmente avec le rapport (a/R) . Pour chaque rapport, les courbes tracées pour les angles négatifs et positifs présentent une symétrie entre elles par rapport à l'axe des ordonnées (yy'), comme le montre la figure (III.4).
- Dans le cas des angles positifs (Figure III.5), le facteur K_{II} est nul lorsque l'angle est nul ou bien atteint ($\theta = 90^\circ$) et augmente ensuite proportionnellement en fonction de l'angle jusqu'à une valeur maximale correspond à un angle $\theta = 45^\circ$ à partir duquel la courbe prend une allure descendante avec l'augmentation de l'angle θ . Cette évolution a été remarquée dans la littérature dans le cas des matériaux homogènes [BOU13a, KIM02].
- Pour un rapport (a/R) donné, les valeurs de K_{II} obtenus pour les angles négatifs et positifs sont symétriques entre elles par rapport au repère $N(0,0)$ (Figure III.5). Ces résultats montrent que l'évolution de K_{II} dépend du sens d'orientation de la fissure.

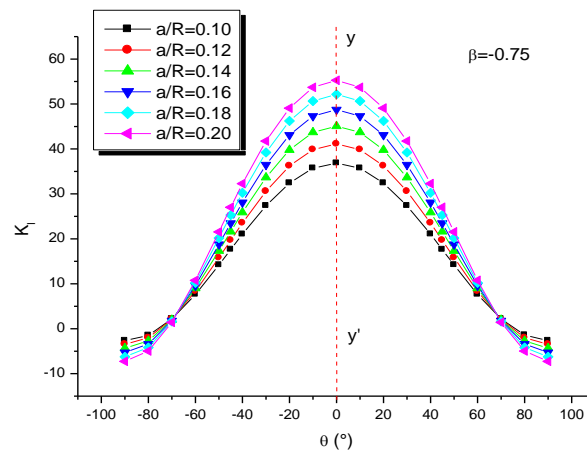


Figure III.4. Variation du facteur d'intensité des contraintes K_I en fonction des angles d'inclinaison ($\beta = -0.75$).

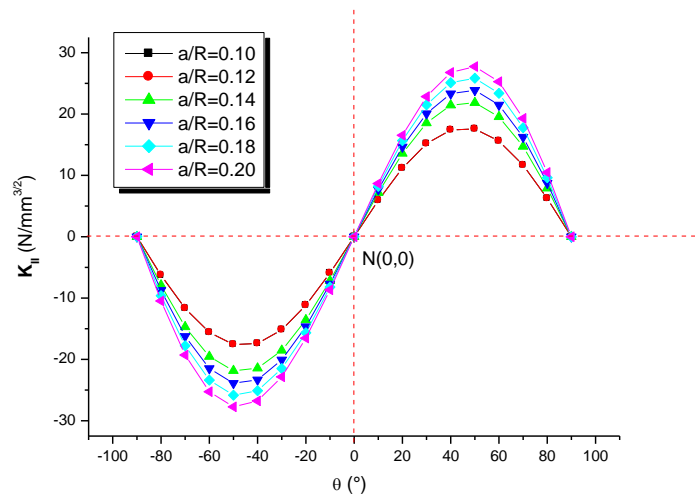


Figure III.5. Variation du facteur d'intensité des contraintes K_{II} en fonction des angles d'inclinaison ($\beta = -0.75$).

La figure (III.6) résume la variation des FICs K_I et K_{II} en fonction des angles positifs et négatifs de la fissure pour la valeur de $\beta = -0.50$. L'évolution des facteurs K_I et K_{II} a été tracée dans le même plan. On peut constater la même variation des allures de K_I et K_{II} que celle obtenue pour $\beta = -0.75$. Le FIC K_I est maximal lorsque l'angle est nul, puis il décroît progressivement vers des valeurs négatives avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison θ . L'intervalle des valeurs négatives varie en fonction du matériau, c.-à-d. en fonction du paramètre β de l'équation (III.5). Il est à noter que l'évolution K_I et K_{II} pour d'autres valeurs de β (-0.25, 0, 0.25, 0.50 et 0.75) est illustrée dans l'annexe (A.2).

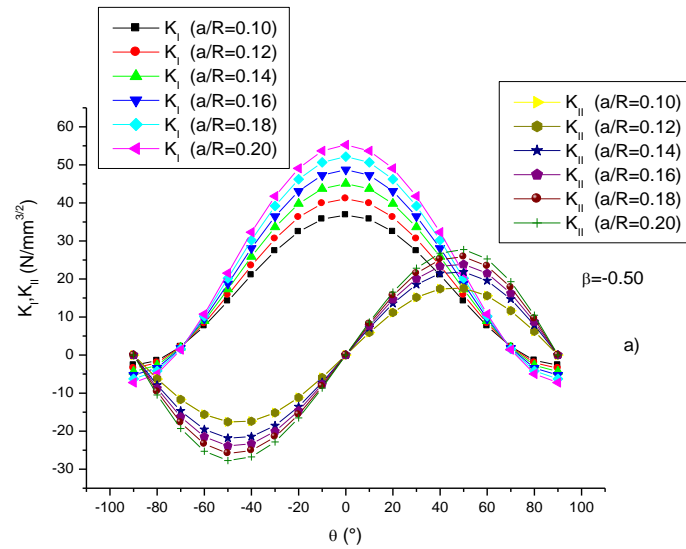


Figure III.6. Variation de K_I et K_{II} en fonction des angles d'inclinaison ($\beta = -0.50$)

✓ **Exemple 2 : Poutre de flexion 3-points avec une fissure parallèle à la gradation du matériau**

Dans cet exemple, on considère une poutre de flexion 3-points, contenant une fissure de longueur a , amorcée parallèlement à la gradation matérielle, comme le montre la figure (III.7). Les dimensions de la poutre sont: $L = 54$ unités, $2H = 10$ unités, et $t = 1$ unité. Une force $P = 1$ unité est appliquée au milieu de la poutre.

Le module élastique de la poutre est donné par la relation linéaire [RAO 03, AIT 20b, KIM 02a] :

$$E(x_2) = Ax_2 + B \quad (\text{III.6})$$

$$\text{avec:} \quad \begin{cases} A = \frac{E_2 - E_1}{2h} \\ B = \frac{E_2 + E_1}{2} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Où E_1 , E_2 sont les propriétés matérielles de FGM. Le coefficient de Poisson ν est supposé constant.

Les données suivantes sont utilisées dans la présente analyse : $2h = 1$ unité, $E_1 = 1$ unité et $E_2/E_1 = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10$ et 20 .

La poutre de flexion est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds avec un maillage rayonnant et régulier autour de la pointe de fissure (Figure III.8). La détermination de K_I pour les trois longueurs de fissure ($a = 4.5, 5.0$ et 5.5 unités) est effectuée sous les conditions de contrainte plane, en utilisant les méthodes locales.

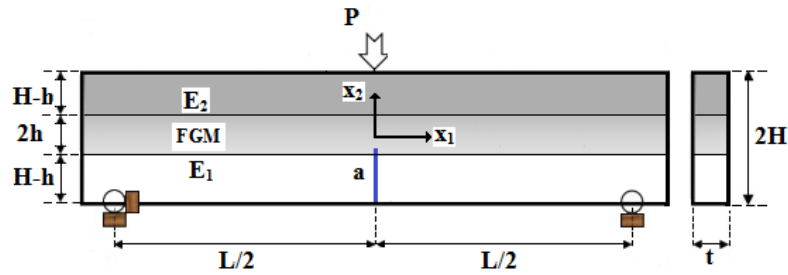


Figure III.7. Géométrie de l'éprouvette de flexion 3 points en FGM.

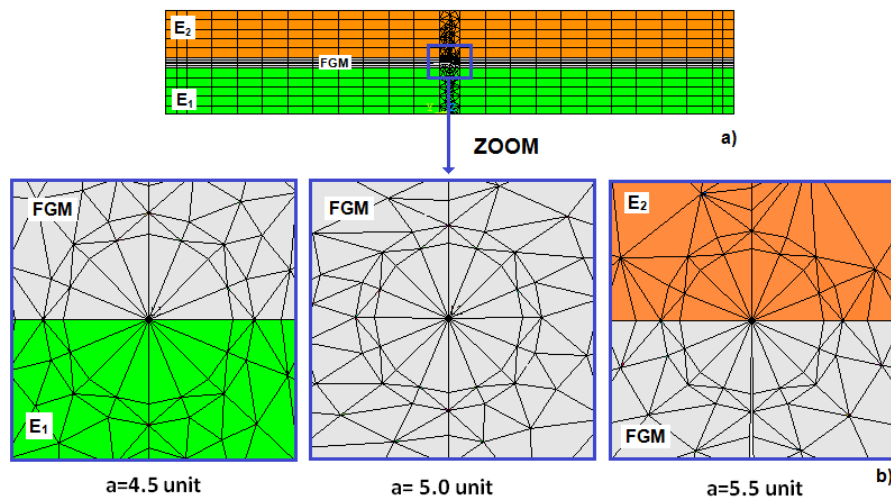


Figure III.8. Maillage de l'éprouvette de flexion 3 points

(a) Maillage global,

(b) Maillage au voisinage de la pointe de fissure pour différentes tailles de fissure.

Pour les trois tailles de la pré-fissure, nous avons illustré sur la figure (III.9), l'évolution du FIC normalisé $\left(\frac{K_I\sqrt{H}}{P}\right)$ en fonction du rapport $\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$. Les résultats obtenus par la technique d'extrapolation du déplacement sont comparés avec ceux obtenus par les méthodes : MMC, Intégrale J_k et DCT, respectivement.

Les courbes tracées montrent que les résultats obtenus par DET sont identiques avec ceux présentés par les autres approches. Cette comparaison nous permet de conclure que la technique utilisée pour traiter les matériaux gradués fissurés, décrit correctement le champ de contrainte au voisinage de la pointe de fissure.

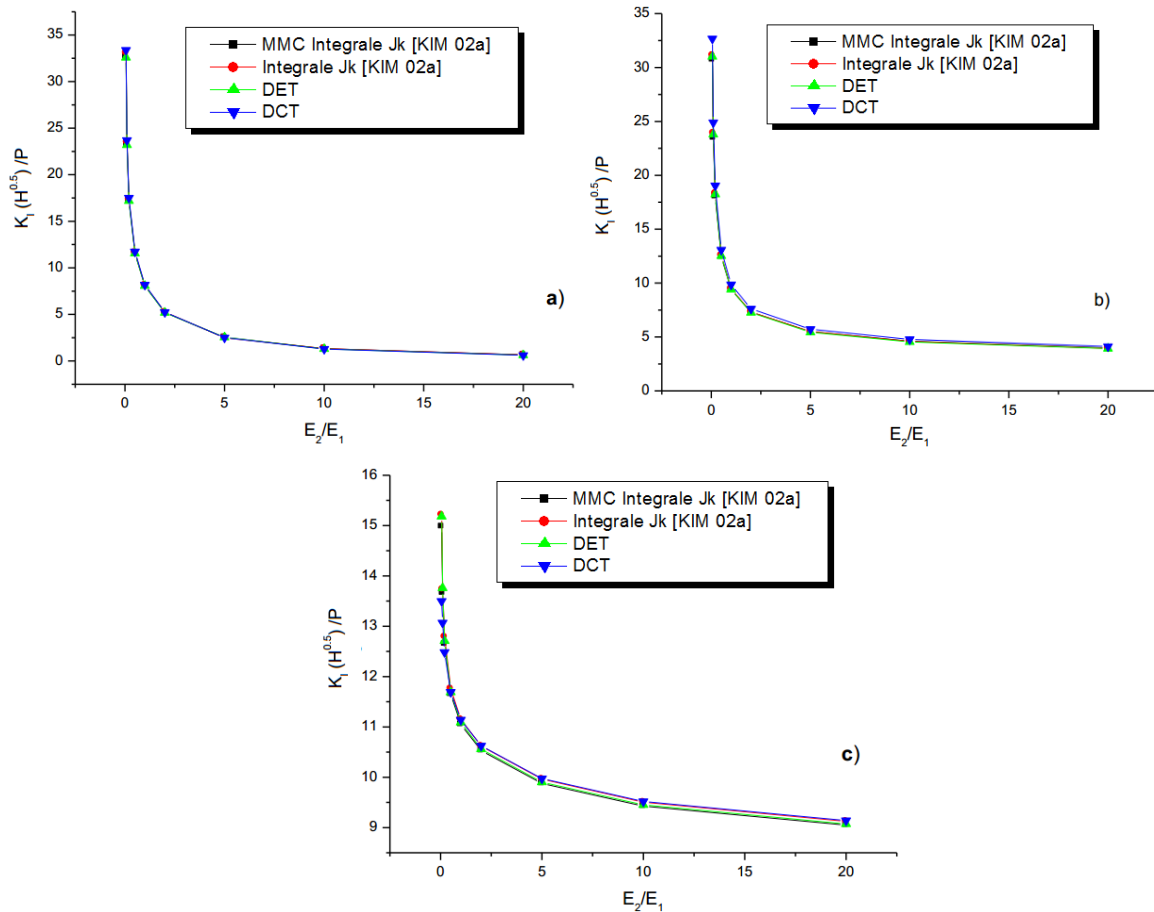


Figure III.9. Variation de FIC normalisé ($K_I \sqrt{H} / P$) en fonction de E_2/E_1 :

a) $a/2H = 0.45$ b) $a/2H = 0.5$ c) $a/2H = 0.55$

✓ Exemple 3 : Plaque mince en FGM contenant une fissure centrale

Nous proposons ici, un exemple d'une plaque mince de dimensions $4W$ (longueur) et $2W$ (largeur), contenant une fissure centrale de longueur $2a$. La dégradation du matériau est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées passant par le centre de la fissure. La plaque est sollicitée en traction uniaxiale sous une contrainte σ , appliquée sur les bords supérieur et inférieur (Fig. III.10a).

Pour des raisons de symétrie de la géométrie et du chargement, seul un quart de la plaque a été modélisé par des éléments iso-paramétriques quadratiques à huit nœuds. La singularité en pointe de fissure est modélisée par des éléments spéciaux.

Pour simplifier la présentation et pouvoir considérer un état de contraintes planes, nous nous limiterons à une étude bidimensionnelle où l'effet de l'épaisseur de la plaque est négligeable. La figure (III.10b) illustre la discrétisation par EF et les conditions aux limites.

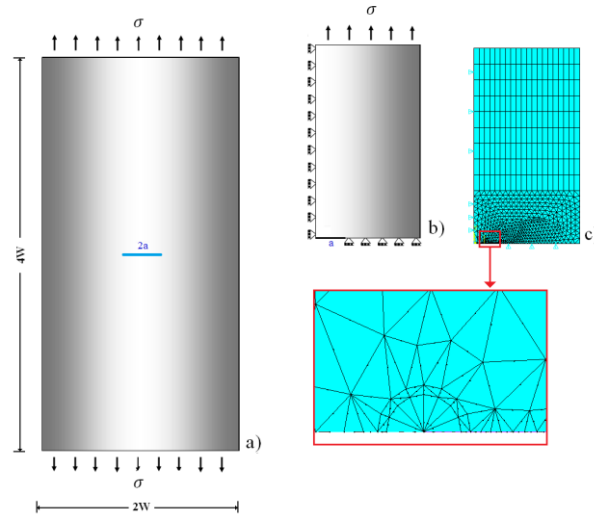


Figure III.10. a) *Modèle géométrique*

b) *Chargement et conditions aux limites*, c) *Discrétisation par EF*

En théorie, la solution de Westergaard [WES 39] pour la distribution normale des contraintes σ_y au voisinage d'une fissure centrale de longueur $2a$ dans une plaque infinie en matériau homogène est donnée par :

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \quad (\text{III.8a})$$

Dans le cas d'une plaque en FGM, Ravi Chandran et Barsoum [RAV 03] ont montré que la distribution normale des contraintes au voisinage d'une fissure de longueur $2a$ peut s'écrire :

$$\sigma_y = \frac{E(x)}{E_0} \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \quad (\text{III.8b})$$

E_0 est le module d'élasticité au niveau de la couche passant par le centre de la fissure ($x = 0$)

$E(x)$ représente la variation du module d'élasticité entre E_0 et E_w (Figure III.11).

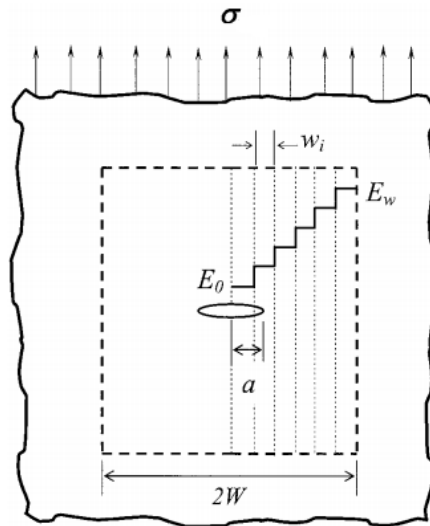


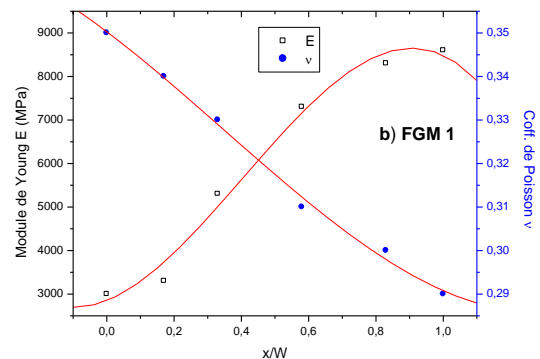
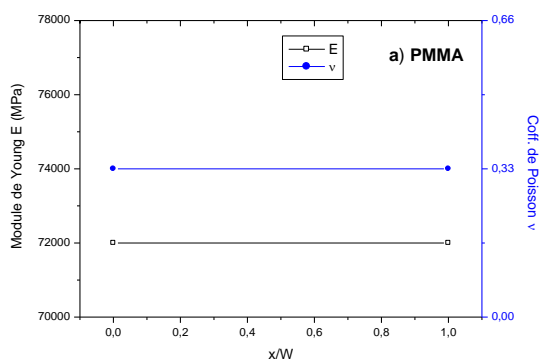
Figure III.11. Fissure centrale dans une plaque infinie en FGM (en couches)

Dans cette partie d'étude, on considère deux matériaux FGM et un matériau homogène, notés respectivement FGM1, FGM2 et PMMA. Les propriétés mécaniques sont déterminées expérimentalement par Hirschikesh et al. [HIR 19], Marur et Tippur [MAR 00] et Liu et al. [LIU 17], respectivement. La figure (III.12) illustre la variation des propriétés mécaniques obtenues pour les trois matériaux.

Pour le but de modéliser numériquement le comportement mécanique de ces matériaux, la variation des propriétés élastiques $E(x)$ et $\nu(x)$ sont régis par les équations (III.9). Il est à noter que la difficulté de trouver la solution analytique pour une évolution non linéaire d'ordre élevé, nous a obligé à limiter notre choix par une équation polynomiale d'ordre 3. Le tableau (III.1) récapitule les constants des propriétés mécaniques déterminés pour les 03 matériaux.

$$\begin{cases} E(x) = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 \\ \nu(x) = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 \end{cases} \quad (III.9)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 : sont des constantes à déterminer.



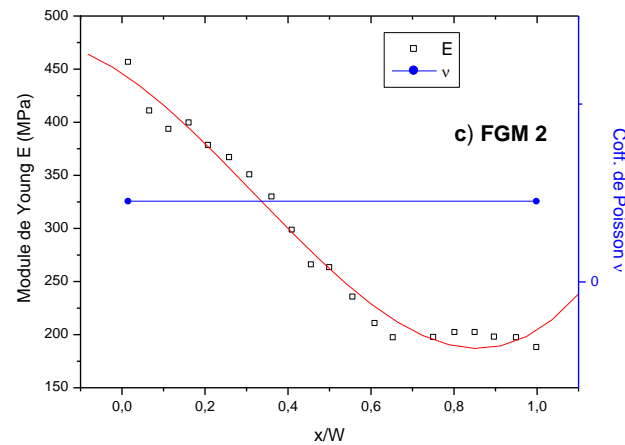


Figure III.12. Variation des propriétés élastiques des matériaux étudiés :

a) PMMA, b) FGM1, c) FGM2

Cst	Module de Young $E(x)$			Coefficient de Poisson $\nu(x)$		
	PMMA	FGM1	FGM2	PMMA	FGM1	FGM2
α_1	0	-0.01179	9.81557E-5	0	-2.675e-8	0
α_2	0	1.43269	-0.0155	0	-2.795e-6	0
α_3	0	31.01151	-1.46066	0	-5.833e-4	0
α_4	72000	2848.95417	445.605	0.33	0.3503	0.45

Tab 1. Paramètres matériels de la variation des propriétés mécaniques

a) Distribution des contraintes normales

Sur la figure (III.13), nous avons tracé la distribution des contraintes normales derrière le front de fissure, en utilisant l'équation (III.10). Les résultats obtenus analytiquement pour les deux matériaux FGMs et le matériau PMMA sont comparés avec ceux obtenus numériquement par la MEF, en considérant les rapports $a/W = 0.1, 0.3$ et 0.5 .

Nous constatons d'une part, que les contraintes normales sont plus importantes à la pointe de fissure, elles diminuent au fur et à mesure que l'on s'éloigne du fond de la fissure, d'autre part, l'augmentation dans la taille de la fissure provoque une augmentation des les contraintes concentrées à la pointe de fissure. La comparaison montre une concordance parfaite entre l'approche numérique et le calcul analytique.

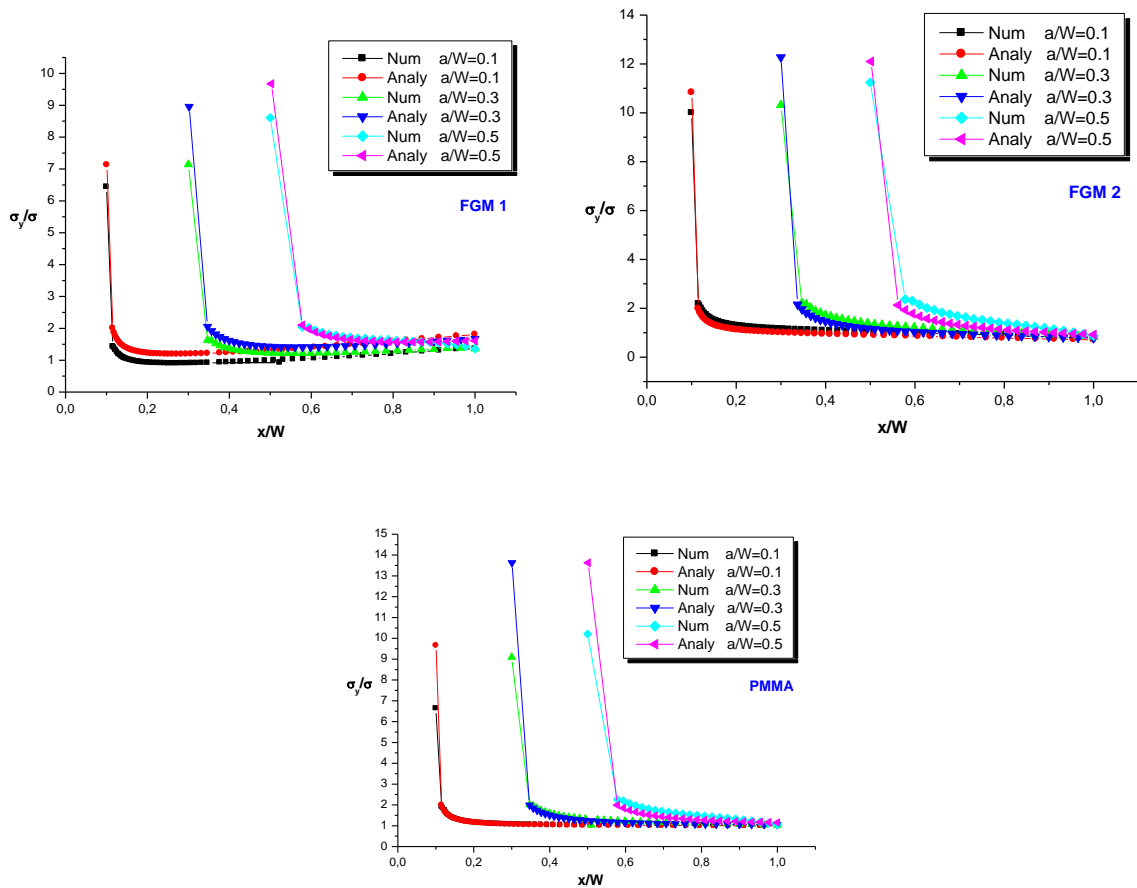


Figure III.13. Distribution des contraintes normales
 a) FGM 1, b) FGM 2, c) PMMA

b) Facteurs d'intensités de contraintes

L'expression analytique du FIC K_I en fonction des termes correctifs peuvent être déterminés à partir de la relation:

$$K_I = F \sigma \sqrt{\pi a} \tag{III.10}$$

F est le facteur de forme dépendant des rapports (a/W) et (E_w/E_0).

Dans le cas d'une plaque en FGM contenant une fissure centrale horizontale, Ravi Chandran et Barsoum [RAV 03] ont montré que le FIC K_I peut s'écrire sous la forme :

$$K_I = \frac{W \sigma \sqrt{\pi a}}{\int_a^w \frac{E(x)}{E_a \sqrt{1 - (\frac{a}{x})^2}} dx} \tag{III.11}$$

Avec:

$$F = \frac{W}{\int_a^w \frac{E(x)}{E_a \sqrt{1 - (\frac{a}{x})^2}} dx} \tag{III.12}$$

La détermination du FIC K_I pour les trois matériaux passe par le calcul mathématique de l'Equation (III.11). Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont illustrés sur la figure (III.14), celle-ci montre la variation du FIC normalisé en fonction du rapport a/W . Nous constatons qu'une augmentation dans la taille de la fissure provoque une augmentation dans le FIC normalisé ($\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$) indépendamment des propriétés mécaniques des matériaux. Les résultats numériques obtenus présentent un accord très acceptable avec le calcul analytique de l'Equation (III.11).

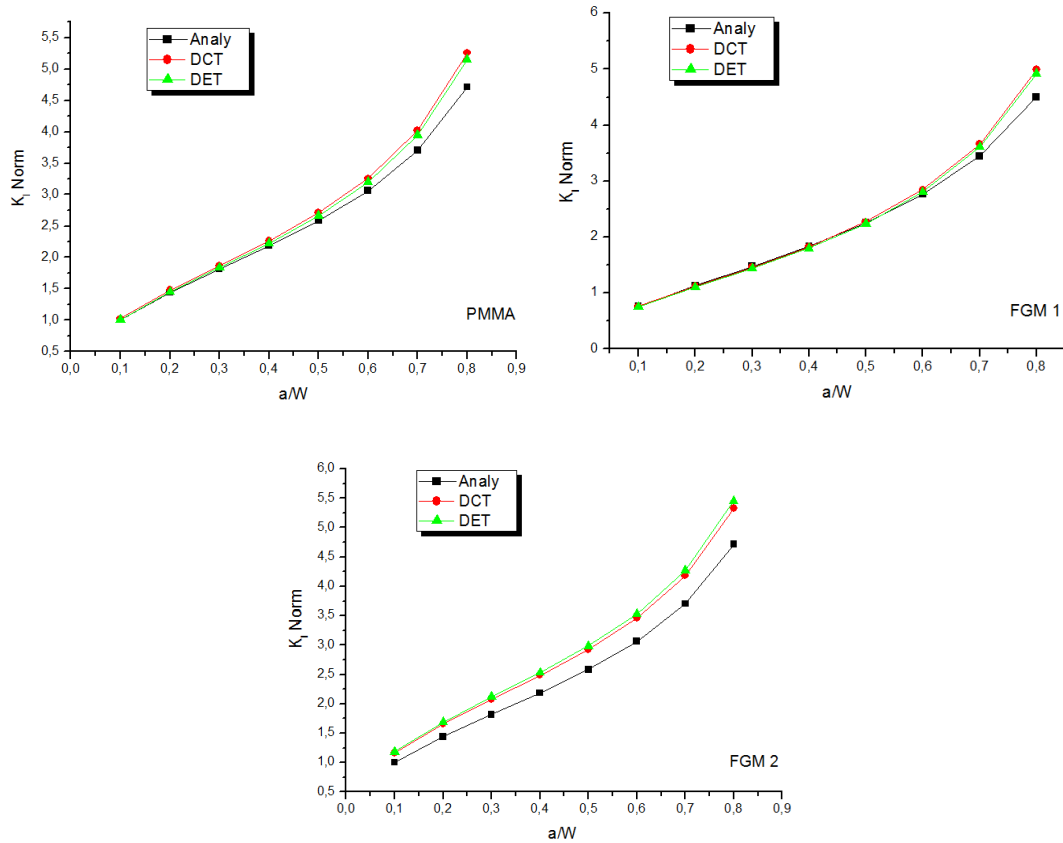


Figure III.14. Variation du FIC K_I norm en fonction de a/W

a) PMMA, b) FGM 1, c) FGM 2

c) Calcul du FIC par la technique CTSM (Crack tip stress method)

La méthode CTSM (Crack tip stress method) a été proposée à l'origine par Nisitani [NIS 04a, b] pour le but de déterminer le FIC numériquement par la MEF, en se basant sur la détermination du champ de contraintes concentrées à la pointe de fissure.

En considérant le même maillage des éléments singuliers autour du fond de fissure, le principe de cette technique repose sur la relation :

$$\frac{K_I}{K_I^*} \approx \frac{\sigma_y}{\sigma_y^*} \approx cst \quad (III.13)$$

où $\frac{K_I}{K_I^*}$ est le rapport des FICs et $\frac{\sigma_y}{\sigma_y^*}$ est le rapport des contraintes normales concentrées à la pointe de fissure. σ_y et σ_y^* indiquent les valeurs de la contrainte normale à la pointe de fissure de longueur a (problème inconnu) et longueur a^* (problème de référence), respectivement.

K_I et K_I^* indiquent respectivement les valeurs du FIC en mode-I du problème inconnu et de référence.

Ceci nous permettra d'écrire :

$$\frac{K_I}{\sigma_y} \approx \frac{K_I^*}{\sigma_y^*} \quad (\text{III.14})$$

En connaissant la valeur des contraintes appliquées σ , σ^* et la valeur du FIC K_I^* du problème de référence, le FIC K_I du problème inconnu peut être évalué par :

$$F_I = F_I^* \frac{\sigma_y \sigma^*}{\sigma_y^* \sigma} \sqrt{\frac{a^*}{a}} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} F_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} \\ F_I^* = \frac{K_I^*}{\sigma^* \sqrt{\pi a^*}} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à étudier l'extension de la méthode CTSM dans le cas des matériaux FGMs. De ce fait, en reprenant le modèle géométrique de la plaque mince en FGM schématisée par la figure (III.10). Ravi Chandran et Barsoum [RAV 03] ont supposé que le module élastique $E(x)$ est géré par la fonction:

$$E(x) = E_0 + (E_w - E_0) \left(\frac{x}{W}\right)^n \quad \text{avec } n = 1,2,3 \dots \quad (\text{III.17})$$

E_0 est le module d'élasticité au niveau de la couche passant par le centre de la fissure ($x = 0$),

E_w est le module d'élasticité donné à l'extrémité de l'éprouvette ($x = w$).

A l'aide du code de calcul Matlab, nous avons tracé sur la figure (III.15) l'évolution du module de Young $E(x)$ sur la distance W , en considérant le rapport $\frac{E_w}{E_0} = 5$ et 0.2.

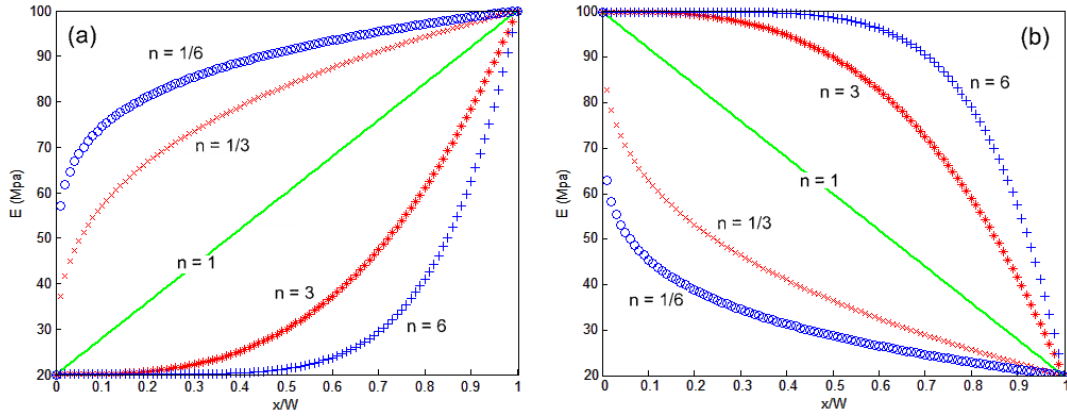


Figure III.15. Variation du module élastique $E(x)$;

(a) $E_w/E_0=5$ (avec $E_w=100$ GPa et $E_0=20$ GPa),

(b) $E_w/E_0=0.2$ (avec $E_w=20$ GPa et $E_0=100$ GPa).

Dans le cas des matériaux FGM, le calcul du facteur de forme F_I de l'Equation (III.12), par la technique proposée CTSM, passe par le calcul des paramètres F_I^* , σ_y^* et σ_y , en utilisant la méthode numérique DET.

Les résultats de $F_I\left(\frac{a}{W}, \frac{E_w}{E_0}\right)$ obtenus par DET sont considérés comme des résultats de référence. Dans l'étude présentée ici, on se limite au cas où $\left(\frac{a}{a^*}\right) = 1$. Analytiquement, la détermination du facteur F_I , donné pour chaque exposant (n_i), est assurée par un développement mathématique.

Si on pose $\alpha = \left(\frac{a}{W}\right)$ et $R = \left(\frac{E_w}{E_0}\right)$, les résultats obtenus sont recalculés et donnés par les équations (III.18). Un exemple de ce développement est illustré dans l'Annexe (A.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{I(n=1)} = \frac{[1+(R-1)\alpha]}{\sqrt{1-\alpha^2} + \left(\frac{R-1}{2}\right)[\sqrt{1-\alpha^2} + \alpha^2 \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)]} \\ F_{I(n=2)} = \frac{[1+(R-1)\alpha^2]}{\sqrt{1-\alpha^2} + \left(\frac{R-1}{3}\right)[\sqrt{1-\alpha^2} + 2\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}]} \\ F_{I(n=3)} = \frac{[1+(R-1)\alpha^3]}{\sqrt{1-\alpha^2} + \left(\frac{R-1}{4}\right)[\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{3}{2}\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{3}{2}\alpha^4 \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)]} \\ F_{I(n=4)} = \frac{[1+(R-1)\alpha^4]}{\sqrt{1-\alpha^2} + \left(\frac{R-1}{5}\right)[\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{4}{3}\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{8}{3}\alpha^4\sqrt{1-\alpha^2}]} \\ F_{I(n=5)} = \frac{[1+(R-1)\alpha^5]}{\sqrt{1-\alpha^2} + \left(\frac{R-1}{6}\right)[\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{5}{4}\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{30}{16}\alpha^4\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{30}{16}\alpha^6 \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)]} \\ F_{I(n=6)} = \frac{[1+(R-1)\alpha^6]}{\sqrt{1-\alpha^2} + \left(\frac{R-1}{7}\right)[\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{6}{5}\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{8}{5}\alpha^4\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{16}{5}\alpha^6\sqrt{1-\alpha^2}]} \end{array} \right. \quad (III.18)$$

Afin de valider les calculs numériques par la MEF, les figures ci-dessous illustrent une comparaison des résultats de F_I (avec $F_I = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$) obtenus par la méthode DET, DCT et ceux obtenus analytiquement, pour différents valeurs des rapports R et (a/W), (avec $n = 1$ et $R = 2, 3, 4$ et 5). Cet exemple de comparaison montre une concordance parfaite entre l'approche numérique et théorique.

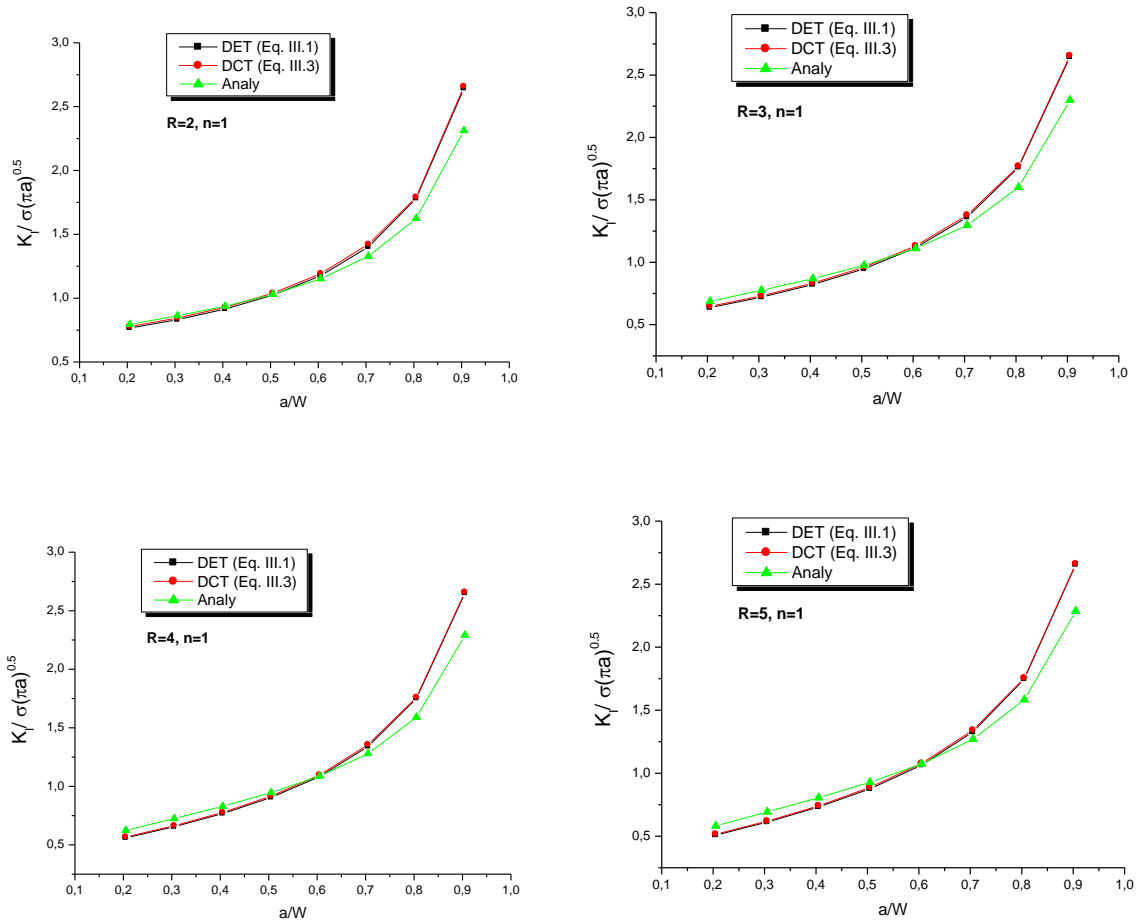


Figure III.16. Comparaison entre le calcul numérique et analytique du facteur F_I (avec $n = 1, R = 2, 3, 4$ et 5)

d) Validation de la méthode CTSM

Les résultats obtenus du facteur de correction F_I par la technique proposée CTSM (Eq.III.15), DCT (Eq.III.3) et le calcul analytique sont fournis à titre de comparaison dans les tableaux ci-dessous (pour $n = 2$ et 3). Ces tableaux illustrent également l'erreur relative calculée entre ces approches, en utilisant la relation :

$$Error = \frac{|F_{I,CTSM} - F_{I,méthode}|}{F_{I,méthode}} \tag{III.19}$$

Les figures (III.17) et (III.18) illustrent respectivement une comparaison graphique entre les résultats de F_I obtenus par CSTM, DCT et le développement analytique, pour $R > 1$ et $R < 1$ (avec $n = 2$). On remarque un grand rapprochement entre les trois techniques. Dans cette étude, plusieurs cas ont été envisagés, dont les résultats obtenus sont regroupés dans l'annexe (A.4).

Cette étude comparative nous permet de conclure que la méthode CSTM présente un bon accord avec le calcul numérique et le développement analytique. Dans tous les cas, l'erreur relative maximale ne dépasse pas 0.20%.

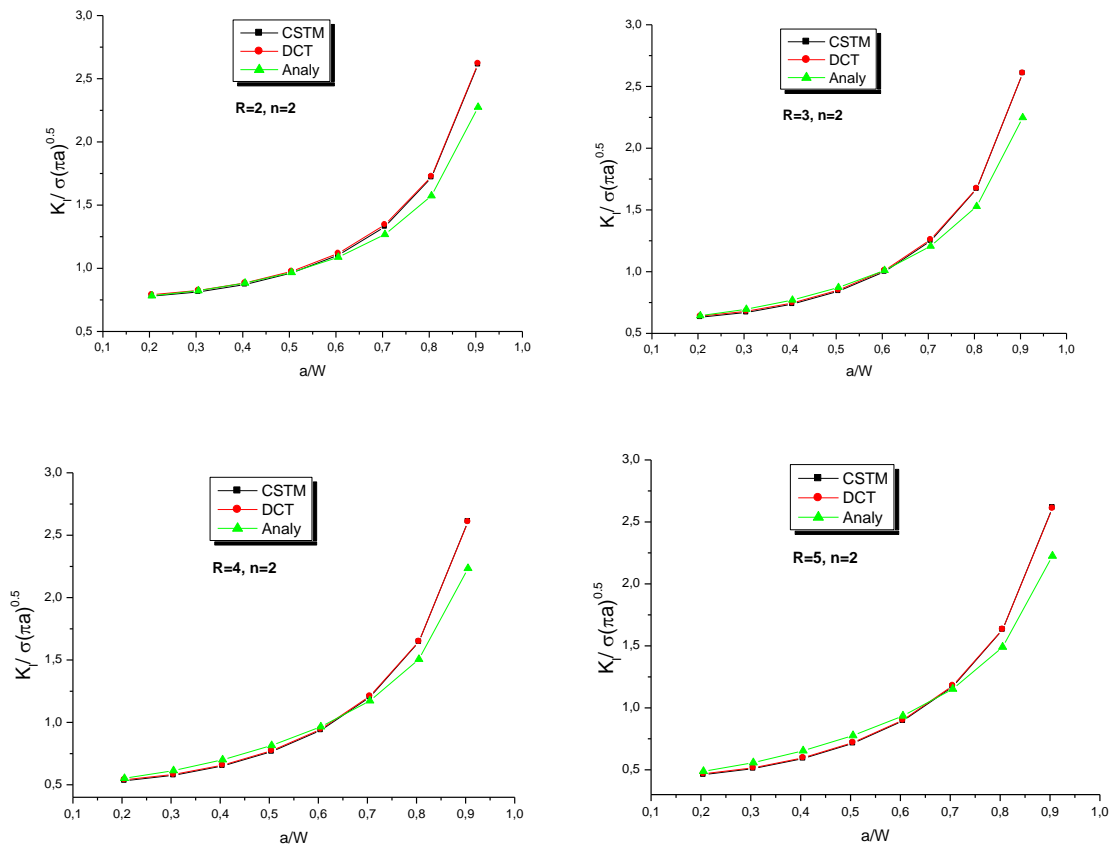
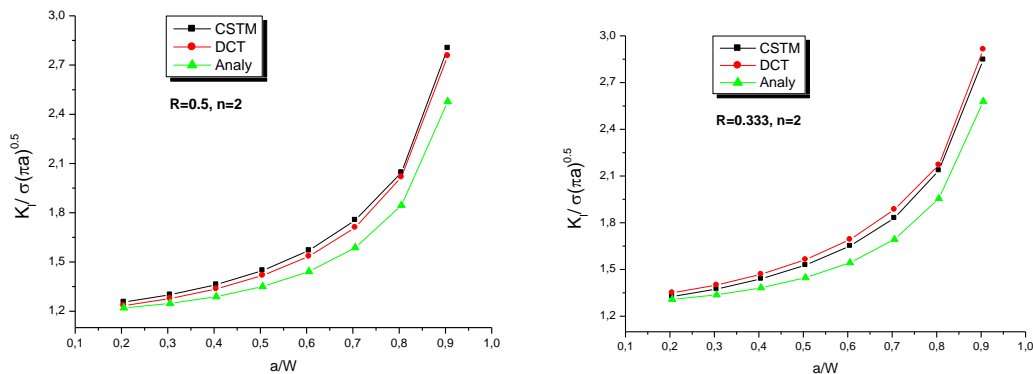


Figure III.17. Evolution de $\left(\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}\right)$ en fonction de $\left(\frac{a}{W}\right)$
 Validation du calcul par CSTM (avec $n = 2$, $R = 2, 3, 4$ et 5)



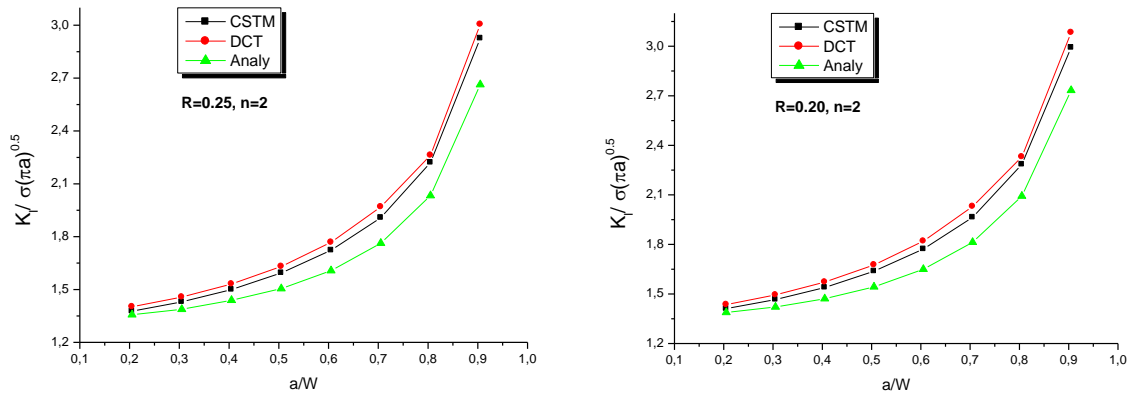


Figure III.18. Evolution de $\left(\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}\right)$ en fonction de $\left(\frac{a}{W}\right)$
 Validation du calcul par CSTM (avec $n = 2$, $R = 0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

a/W	Calcul (n=2)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=2$		$E_w/E_0=3$		$E_w/E_0=4$		$E_w/E_0=5$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	0.778	/	0.63	/	0.531	/	0.461	/
	DCT	0.791	0.02	0.64	0.02	0.539	0.01	0.467	0.01
	Analy	0.782	0.01	0.642	0.02	0.552	0.04	0.488	0.06
0.305	CTSM	0.812	/	0.669	/	0.575	/	0.509	/
	DCT	0.825	0.02	0.678	0.01	0.583	0.01	0.515	0.01
	Analy	0.8225	0.01	0.695	0.04	0.614	0.06	0.558	0.09
0.405	CTSM	0.871	/	0.736	/	0.651	/	0.591	/
	DCT	0.883	0.01	0.745	0.01	0.658	0.01	0.597	0.01
	Analy	0.882	0.01	0.77	0.04	0.701	0.07	0.653	0.09
0.505	CTSM	0.963	/	0.841	/	0.765	/	0.713	/
	DCT	0.975	0.01	0.85	0.01	0.773	0.01	0.719	0.01
	Analy	0.967	0.00	0.871	0.03	0.814	0.06	0.776	0.08
0.605	CTSM	1.104	/	1	/	0.937	/	0.894	/
	DCT	1.118	0.01	1.01	0.01	0.945	0.01	0.901	0.01
	Analy	1.087	0.02	1.009	0.01	0.964	0.03	0.935	0.04
0.705	CTSM	1.328	/	1.248	/	1.202	/	1.171	/
	DCT	1.344	0.01	1.259	0.01	1.21	0.01	1.178	0.01
	Analy	1.268	0.05	1.207	0.03	1.173	0.02	1.151	0.02
0.805	CTSM	1.719	/	1.67	/	1.645	/	1.631	/
	DCT	1.726	0.00	1.675	0.00	1.648	0.00	1.632	0.00
	Analy	1.573	0.09	1.529	0.09	1.503	0.09	1.49	0.09
0.905	CTSM	2.612	/	2.608	/	2.61	/	2.615	/
	DCT	2.621	0.00	2.609	0.00	2.607	0.00	2.609	0.00
	Analy	2.275	0.15	2.247	0.16	2.233	0.17	2.225	0.18

Tab 2. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
 (avec $n = 2$, $E_w/E_0 = 2, 3, 4$ et 5)

a/W	Calcul (n=2)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=0.5$		$E_w/E_0=0.333$		$E_w/E_0=0.25$		$E_w/E_0=0.20$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	1.256	/	1.326	/	1.377	/	1.411	/
	DCT	1.234	0.02	1.35	0.02	1.402	0.02	1.436	0.02
	Analy	1.22	0.03	1.308	0.01	1.357	0.01	1.388	0.02
0.305	CTSM	1.3	/	1.374	/	1.43	/	1.466	/
	DCT	1.277	0.02	1.4	0.02	1.457	0.02	1.494	0.02
	Analy	1.247	0.04	1.337	0.03	1.388	0.03	1.421	0.03
0.405	CTSM	1.362	/	1.44	/	1.5	/	1.539	/
	DCT	1.336	0.02	1.469	0.02	1.531	0.02	1.572	0.02
	Analy	1.289	0.06	1.382	0.04	1.439	0.04	1.471	0.05
0.505	CTSM	1.448	/	1.528	/	1.594	/	1.638	/
	DCT	1.418	0.02	1.563	0.02	1.631	0.02	1.676	0.02
	Analy	1.35	0.07	1.447	0.06	1.505	0.06	1.543	0.06
0.605	CTSM	1.57	/	1.651	/	1.723	/	1.772	/
	DCT	1.534	0.02	1.692	0.02	1.768	0.03	1.82	0.03
	Analy	1.442	0.09	1.543	0.07	1.607	0.07	1.65	0.07
0.705	CTSM	1.7551	/	1.83	/	1.908	/	1.964	/
	DCT	1.71	0.03	1.885	0.03	1.969	0.03	2.03	0.03
	Analy	1.587	0.11	1.693	0.08	1.763	0.08	1.813	1.00
0.805	CTSM	2.045	/	2.136	/	2.221	/	2.285	/
	DCT	2.018	0.01	2.171	0.02	2.262	0.02	2.33	0.02
	Analy	1.845	0.11	1.955	0.09	2.033	0.09	2.093	0.09
0.905	CTSM	2.803	/	2.847	/	2.926	/	2.992	/
	DCT	2.756	0.02	2.913	0.02	3.005	0.03	3.083	0.03
	Analy	2.477	0.13	2.579	0.10	2.663	0.10	2.733	0.09

Tab 3. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec $n = 2$, $E_w/E_0 = 0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

a/W	Calcul (n=3)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=2$		$E_w/E_0=3$		$E_w/E_0=4$		$E_w/E_0=5$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	0.822	/	0.687	/	0.591	/	0.518	/
	DCT	0.836	0.02	0.698	0.02	0.6	0.02	0.526	0.02
	Analy	0.813	0.01	0.677	0.01	0.581	0.02	0.51	0.02
0.305	CTSM	0.842	/	0.701	/	0.603	/	0.53	/
	DCT	0.855	0.02	0.711	0.01	0.611	0.01	0.537	0.01
	Analy	0.836	0.01	0.701	0.00	0.608	0.01	0.54	0.02
0.405	CTSM	0.881	/	0.738	/	0.64	/	0.569	/
	DCT	0.894	0.01	0.747	0.01	0.647	0.01	0.575	0.01
	Analy	0.877	0.00	0.747	0.01	0.66	0.03	0.598	0.05
0.505	CTSM	0.952	/	0.811	/	0.718	/	0.652	/
	DCT	0.965	0.01	0.82	0.01	0.724	0.01	0.656	0.01
	Analy	0.946	0.01	0.825	0.02	0.747	0.04	0.693	0.06
0.605	CTSM	1.074	/	0.942	/	0.859	/	0.8	/
	DCT	1.086	0.01	0.95	0.01	0.863	0.00	0.803	0.00
	Analy	1.053	0.02	0.947	0.01	0.882	0.03	0.838	0.05
0.705	CTSM	1.283	/	1.172	/	1.104	/	1.057	/
	DCT	1.296	0.01	1.179	0.01	1.107	0.00	1.059	0.00
	Analy	1.226	0.05	1.139	0.03	1.088	0.01	1.055	0.00
0.805	CTSM	1.667	/	1.591	/	1.548	/	1.521	/
	DCT	1.673	0.00	1.593	0.00	1.548	0.00	1.519	0.00
	Analy	1.532	0.09	1.466	0.09	1.43	0.08	1.407	0.08
0.905	CTSM	2.577	/	2.559	/	2.556	/	2.558	/
	DCT	2.581	0.00	2.554	0.00	2.545	0.00	2.543	0.01
	Analy	2.241	0.15	2.2	0.16	2.179	0.17	2.165	0.18

Tab 4. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec $n = 3$, $E_w/E_0 = 2, 3, 4$ et 5)

a/W	Calcul (n=3)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=0.5$		$E_w/E_0=0.333$		$E_w/E_0=0.25$		$E_w/E_0=0.20$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	1.181	/	1.244	/	1.278	/	1.3	/
	DCT	1.201	0.02	1.266	0.02	1.301	0.02	1.32	0.02
	Analy	1.174	0.01	1.236	0.01	1.269	0.01	1.29	0.01
0.305	CTSM	1.23	/	1.301	/	1.339	/	1.364	/
	DCT	1.252	0.02	1.324	1.00	1.364	0.02	1.389	0.02
	Analy	1.211	0.02	1.278	0.02	1.314	0.02	1.337	0.02
0.405	CTSM	1.301	/	1.381	/	1.425	/	1.453	/
	DCT	1.325	0.02	1.407	0.02	1.452	0.02	1.481	0.02
	Analy	1.265	0.03	1.338	0.03	1.379	0.03	1.405	0.03
0.505	CTSM	1.398	/	1.489	/	1.54	/	1.574	/
	DCT	1.426	0.02	1.52	0.02	1.574	0.02	1.608	0.02
	Analy	1.34	0.04	1.421	0.05	1.467	0.05	1.497	0.05
0.605	CTSM	1.533	/	1.637	/	1.697	/	1.737	/
	DCT	1.567	0.02	1.676	0.02	1.739	0.02	1.781	0.02
	Analy	1.446	0.06	1.538	0.06	1.591	0.07	1.626	0.07
0.705	CTSM	1.729	/	1.846	/	1.917	/	1.966	/
	DCT	1.774	0.03	1.899	0.03	1.976	0.03	2.028	0.03
	Analy	1.606	0.08	1.71	0.08	1.774	0.08	1.817	0.08
0.805	CTSM	2.058	/	2.186	/	2.271	/	2.332	/
	DCT	2.086	0.01	2.222	0.02	2.312	0.02	2.377	0.02
	Analy	1.879	0.10	1.997	0.09	2.075	0.09	2.132	0.09
0.905	CTSM	2.803	/	2.921	/	3.014	/	3.089	/
	DCT	2.856	0.02	2.995	0.02	3.102	0.03	3.189	0.03
	Analy	2.519	0.11	2.645	0.10	2.742	0.10	2.819	0.10

Tab 5. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec $n = 3$, $E_w/E_0 = 0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à examiner l'extension de la présente méthode dans le cas général. Pour illustrer cette idée, nous considérons :

$$\left(\frac{K_I}{\sigma_y}\right) \approx \left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right) \quad (\text{III.20})$$

$$K_I \approx \sigma_y \left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right) \quad (\text{III.21})$$

Introduisons l'expression (III.10), nous obtenons :

$$F_I \sigma \sqrt{\pi a} \approx \sigma_y \cdot \left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right) \quad (\text{III.22})$$

Ce qui nous donne:

$$F_I \approx \frac{\sigma_y \cdot \left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (\text{III.23})$$

L'analyse de l'équation (III.23) nous a conduit à étudier sur la figure (III.19) un exemple de l'évolution des paramètres K_I^* , σ_y^* et $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction du rapport $\left(\frac{a^*}{W}\right)$, (pour $R = 2$, $n = 1$ et $\frac{a^*}{W} \leq 0.705$), ce qui nous permet d'écrire :

$$\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right) = f\left(\frac{a^*}{W}\right) \quad (\text{III.24})$$

Le facteur de forme F_I peut s'écrire:
$$\frac{\sigma_y \cdot f\left(\frac{a^*}{W}\right)}{\sigma\sqrt{\pi a}} \tag{III.25}$$

L'évolution de $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction du rapport $\left(\frac{a^*}{W}\right)$ dans la figure (III.19) peut être gérée par une équation polynomiale d'ordre 3, donnée par :

$$\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right) = f\left(\frac{a^*}{W}\right) = b + c \cdot \left(\frac{a^*}{W}\right) + d \cdot \left(\frac{a^*}{W}\right)^2 + e \cdot \left(\frac{a^*}{W}\right)^3 \tag{III.26}$$

b, c, d et e : sont des constants à déterminer.

Il est à noter, à titre exemple, que l'évolution de $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction du rapport $\left(\frac{a^*}{W}\right)$, pour différents rapports R et de l'exposant n reste constante comme le montre les figures (III.20) et (III.21), respectivement.

Après la détermination des constantes de l'Equation (III.26), nous avons essayé de valider l'application de la présente méthode dans le cas général, notée CTSM-G. A cet effet, nous avons illustré sur les figures (III.22) une comparaison graphique entre les résultats obtenus par CTSM, DCT et l'Equation (III.25).

Les résultats obtenus de F_I sont tracés pour l'exposant $n = 1$ et les différents rapports de R (avec $R = 2, 3, 4$ et 5). On remarque un grand rapprochement avec ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis.

Cette étude comparative nous permet de conclure que la méthode CTSM-G formulée par l'Equation (III.25) présente des résultats très acceptables pour généraliser le calcul du facteur F_I sur tous les matériaux gradués.

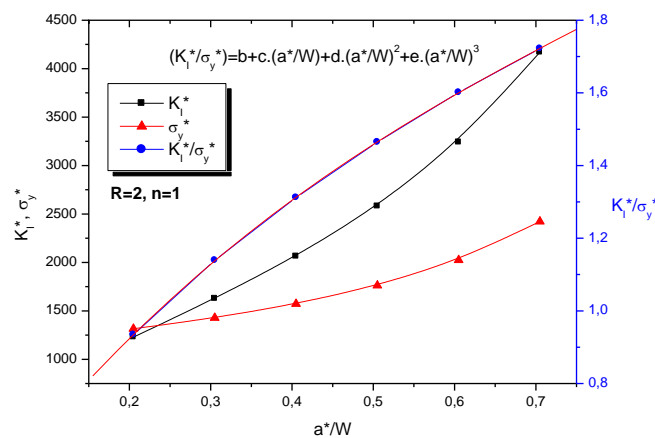


Figure III.19. Evolution de K_I^*, σ_y^* et $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction de $\left(\frac{a^*}{W}\right)$ par DET

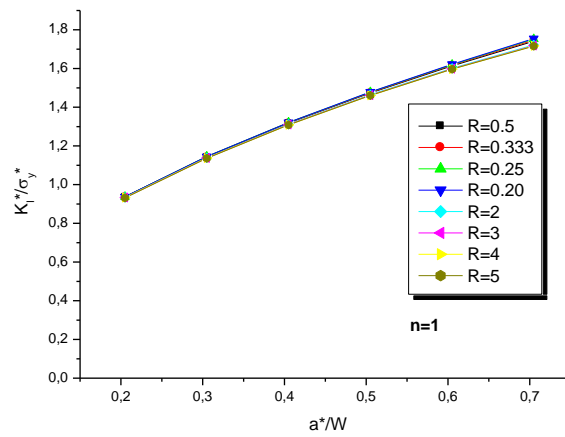


Figure III.20. Evolution de $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction du rapport $\left(\frac{a^*}{W}\right)$, pour différents rapports R (avec $n = 1$)

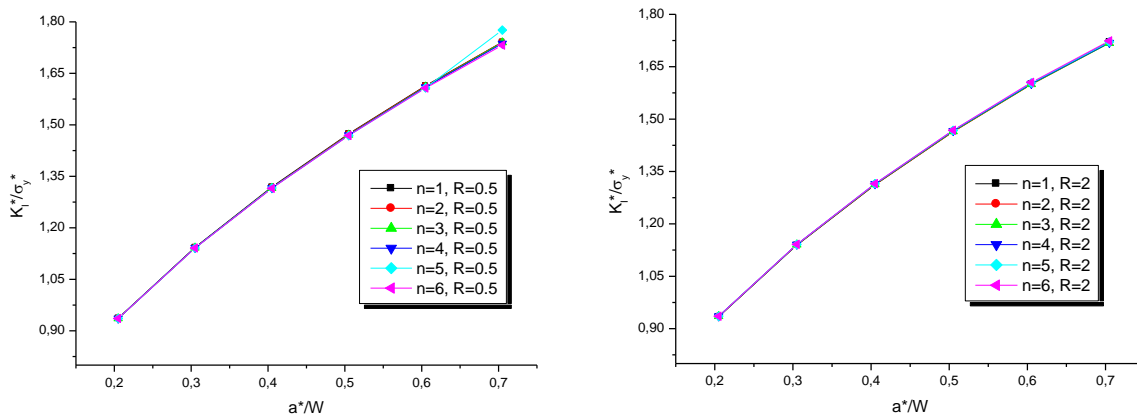
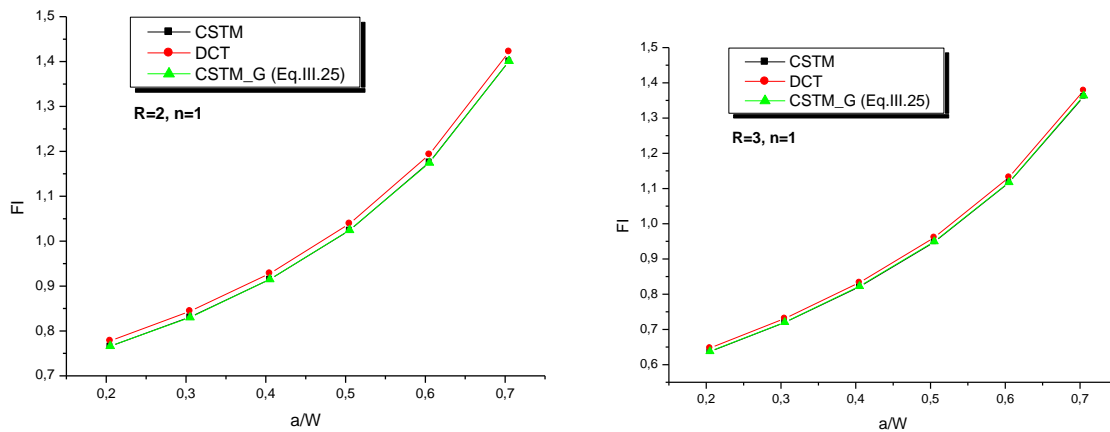


Figure III.21. Evolution de $\left(\frac{K_I^*}{\sigma_y^*}\right)$ en fonction du rapport $\left(\frac{a^*}{W}\right)$, pour différentes valeurs de l'exposant n (avec $R = 0.5$ et 2)



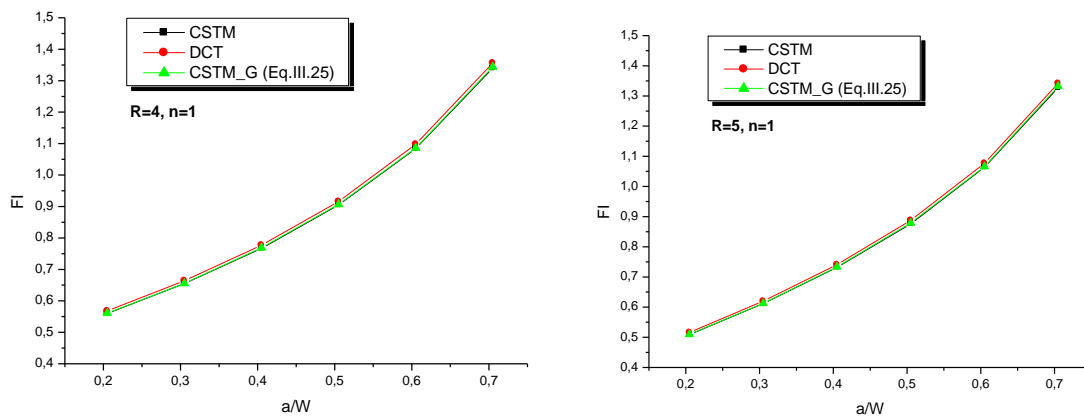


Figure III.22. Evolution de facteur F_I en fonction de $\left(\frac{a}{W}\right)$
Validation du calcul par CSTM-G (avec $n = 1$, $R = 2, 3, 4$ et 5)

III.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour le but de présenter une étude numérique du comportement en rupture des matériaux à gradient fonctionnel. Cette étude s'articule essentiellement sur le calcul par l'approche locale qui utilise des informations du champ des déplacements au voisinage de la pointe de la fissure.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons examiné l'extension de la méthode CTSM (*Crack-tip stress method*) dans le cas des matériaux FGMs afin de déterminer ensuite le facteur de correction sous des conditions imposées dans cette étude.

Des exemples d'application ont été testés et comparés afin de montrer la validation de notre implémentation numérique et le développement analytique. Les trois techniques exploitées DET, DCT et CTSM-G présentent une grande concordance avec le calcul théorique et les méthodes numériques disponibles dans la littérature.

CHAPITRE IV

Formulation & Implémentation numérique de l'intégrale J_k

IV.1 Introduction

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus efficaces aujourd'hui pour la résolution des problèmes pratiques de rupture, elle constitue un outil industriel utilisé pour les problèmes usuels de calcul des structures et figure désormais dans les programmes d'enseignement des écoles d'ingénieurs. De plus, la disponibilité des logiciels généraux d'analyse structurale par éléments finis ainsi que les progrès de l'information ont bouleversé les méthodes de travail de l'ingénieur qui peut aujourd'hui résoudre les problèmes les plus complexes avec un degré de raffinement qui ne serait pas envisageable avec les méthodes traditionnelles. L'existence de ces logiciels n'atténue en rien le rôle et la responsabilité de l'ingénieur. Au contraire, pour bien maîtriser cette technique, il lui est indispensable de connaître ses principes de base, la formulation et les propriétés des éléments utilisés ainsi que les caractéristiques des méthodes de résolution.

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour évaluer l'état de contrainte au voisinage de fissure, en se basant sur la détermination des FICs. Parmi elles, la méthode d'intégrale d'interaction qui a fait l'objet de plusieurs études pour analyser la problématique de la fissuration en mode mixte.

L'objectif de ce chapitre est de présenter des aspects numériques liés à l'implémentation de la méthode d'intégrale d'interaction pour le but d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte, dans le cas des matériaux gradués. Le présent développement est basé sur le calcul par éléments finis, en se basant sur le couplage des codes Ansys et Matlab. Afin de valider l'exactitude et la fiabilité de cette technique, les résultats obtenus sont comparés avec d'autres travaux numériques, analytiques et expérimentaux de la littérature.

IV.2 Présentation de la technique d'extraction

IV.2.1 Théorie : Formulation de l'intégrale

La technique d'extraction que nous avons retenue dans cette étude a été utilisée dans plusieurs travaux scientifiques [YIL 04, 05, 06, 08], [TOP 13], [DAG 06, 07, 08, 10, 12,13]. Elle est basée sur la méthode de Rice, transférée dans le domaine d'intégrale, nommé l'intégrale J_k .

Considérons un corps solide bidimensionnel fissuré (Figure IV.1). Sous les conditions de déformation plane et de contrainte plane, la formulation l'intégrale J_k au fond de fissure peut être écrite sous la forme [EIS 87] :

$$J_k = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} (W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma \right\} \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.1})$$

Où :

Γ_ε : Contour fermé quelconque entourant la pointe de fissure (Figure. IV.1)

u_i : Vecteur de déplacement

W : Densité d'énergie de déformation

n_k : Normale unitaire extérieure au contour Γ_ε

σ_{ij} : Composants de contrainte

$n_{i,k}$: Composants de déplacement

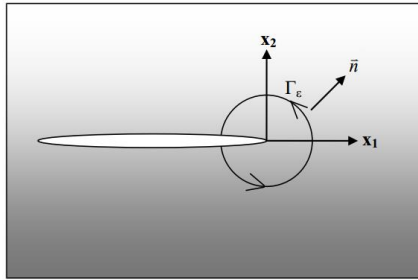


Figure IV.1. Contour d'intégration Γ_ε entourant la pointe de fissure

La solution de l'intégrale J_k indiquée par l'équation (IV.1) fait intervenir la solution d'une autre intégrale définie sur le contour voisin Γ (Eq. IV.2). La figure (IV.2) illustre le contour Γ décomposé en quatre contours ouverts.

$$I_k = \oint_{\Gamma} \{ \sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj} \} q n_j d\Gamma \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.2})$$

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_c^+ + \Gamma_e + \Gamma_c^- \quad (\text{IV.3})$$

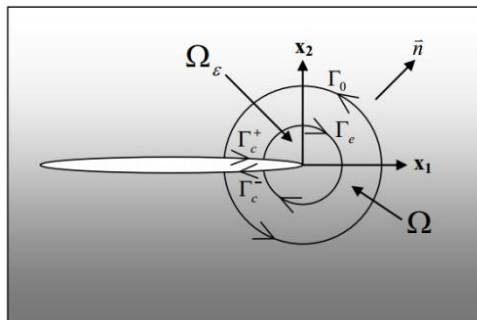


Figure IV.2. Illustration du contour Γ autour de la pointe de fissure

Afin d'exprimer J_k en termes d'intégrales de surface et de ligne, on définit une autre intégrale de ligne noté I_k évaluée sur Γ par :

$$I_k = \oint_{\Gamma} \{ \sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj} \} q n_j d\Gamma \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.4})$$

où δ_{kj} est le delta de Kronecker.

q est une fonction d'interpolation qui est égale à l'unité sur la courbe intérieure Γ_e et zéro sur la courbe extérieure Γ_0 . n_j est le vecteur unitaire normal au contour d'intégration.

En utilisant le théorème de divergence (Annexe A.5), I_k peut être converti en intégrale de surface comme suit :

$$I_k = \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_{i,k} q - W \delta_{kj} q) d\Omega \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.5})$$

L'intégrale I_k peut alors être redéfinie de la manière suivante [FAR 13]:

$$I_k = \oint_{\Gamma} \{ \sigma_{ij} u_{i,k} q - W \delta_{kj} q \} n_j d\Gamma = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,k})_{expl} q d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,k})_{expl} d\Omega \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.6})$$

$(W_{,k})_{expl}$ sont les dérivées explicites de W par rapport aux coordonnées x et y , respectivement.

Pour la simplification, nous définissons une nouvelle fonction b_k par :

$$b_k = (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q n_j \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.7})$$

En utilisant la fonction b_k , l'intégrale I_k peut être divisée en quatre intégrales de ligne:

$$I_k = \oint_{\Gamma} b_k d\Gamma = \oint_{\Gamma_e} b_k d\Gamma + \oint_{\Gamma_c^+} b_k d\Gamma + \oint_{\Gamma_c^-} b_k d\Gamma + \oint_{\Gamma_0} b_k d\Gamma \quad (k = 1, 2) \quad (\text{IV.8a})$$

En changeant l'orientation de Γ_e , on obtient une nouvelle courbe identique à la courbe de la figure (IV.1) et sachant que q est égal à zéro sur Γ_0 , I_k peut s'écrire comme suit :

$$I_k = \oint_{\Gamma} b_k d\Gamma = - \oint_{\Gamma_e} b_k d\Gamma + \oint_{\Gamma_c^+} b_k d\Gamma + \oint_{\Gamma_c^-} b_k d\Gamma \quad (k = 1, 2) \quad (\text{IV.8b})$$

En substituant la fonction b_k (Eq. IV.4) dans l'intégrale définie sur Γ_{ε} par l'intégrale J_k , on obtient :

$$\oint_{\Gamma} b_k d\Gamma = \underbrace{\oint_{\Gamma_{\varepsilon}} (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q n_j d\Gamma}_{J_k \text{-intégrale}} + \oint_{\Gamma_c^+} b_k d\Gamma + \oint_{\Gamma_c^-} b_k d\Gamma \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.9})$$

Après le développement de l'intégrale J_k , ce dernier peut s'écrire sous la forme [EYÜ 08b] :

$$J_k = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,k})_{expl} q d\Omega - \oint_{\Gamma_c^+} (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q n_j d\Gamma - \oint_{\Gamma_c^-} (\sigma_{ij} u_{i,k} - W \delta_{kj}) q n_j d\Gamma \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.10})$$

Ω est l'aire entre le fond de fissure et le contour Γ_0 . Les surfaces des fissures étant des surfaces libres et qu'aucune contrainte n'est présentée sur elles, donc sur les faces des fissures (domaines Γ_c^+ et Γ_c^-), nous avons :

$$\sigma_{ij}u_{i,k}n_j = 0 \quad (\text{IV.11})$$

L'intégrale J_k peut être encore simplifiée comme suit :

$$\begin{aligned} J_k = & \iint_{\Omega} (\sigma_{ij}u_{i,k} - W\delta_{kj})q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,k})_{expl} q d\Omega + \int_{\Gamma_c^+} (W^+ n_k^+) q d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_c^-} (W^- n_k^-) q d\Gamma \quad (i, j, k = 1, 2) \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Puisque : $n_k^+ = n_k^-$, on obtient :

$$J_k = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij}u_{i,k} - W\delta_{kj})q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,k})_{expl} q d\Omega + \int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) q n_k^+ d\Gamma \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (\text{IV.13})$$

D'après l'équation (IV.12), en considérant également que sur Γ_c^+ et Γ_c^- , n_1 est égal à zéro, nous pouvons écrire les composantes de l'intégrale J_k sur un domaine fini défini comme :

$$J_1 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij}u_{i,1} - W\delta_{1j})q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,1})_{expl} q d\Omega \quad (\text{IV.14})$$

$$\text{et } J_2 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij}u_{i,2} - W\delta_{2j})q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl} q d\Omega - \int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) q d\Gamma \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{IV.15})$$

où : q est une fonction et $q_{,j}$ est la dérivée de la fonction q par rapport aux coordonnées.

W est la fonction de densité d'énergie de déformation mécanique.

$(W_{,1})_{expl}$ et $(W_{,2})_{expl}$ sont respectivement les dérivées explicites de W par rapport aux coordonnées x et y .

$u_{i,1}$ et $u_{i,2}$ sont les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_i}{\partial y}$, respectivement.

Ω est la surface d'intégration.

Le terme $(W^+ - W^-)$ représente la différence de la densité d'énergie de déformation sur la lèvres supérieure et inférieure de la fissure, respectivement (Figure IV.3), tel que :

$$(W^+ - W^-) = W(r, \pi) - W(r, -\pi) \quad (\text{IV.16})$$

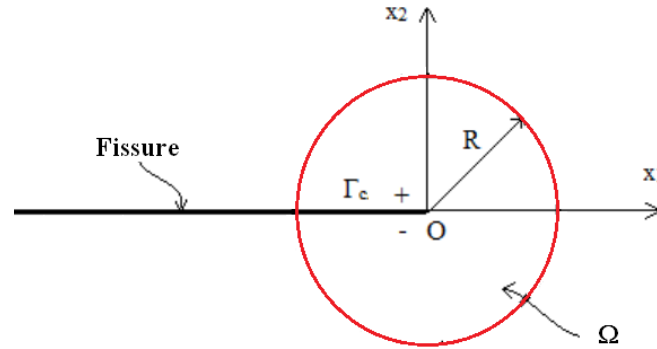


Figure IV.3. Nouveaux domaines d'intégration d'après le théorème de divergence

Après avoir défini tous les paramètres des équations (IV.38a, b), la solution des intégrales peut être traitée en utilisant la quadrature de Gauss standard, mais le seul problème avec le calcul de l'intégrale dans l'expression de J_2 (Eq. IV.15) est la discontinuité sur terme $(W^+ - W^-)$. De ce fait, Eischen [EIS 87] a proposé une solution de ce problème, en se basant sur la division de l'intervalle d'intégration en deux parties, une partie est loin du fond de fissure, et l'autre serait près du fond de fissure qui inclut la singularité sur le domaine. L'illustration des deux intervalles de calcul est présentée par la figure (IV.4).

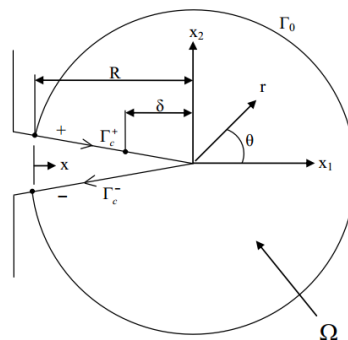


Figure IV.4. Représentation de la géométrie du modèle

La solution de la deuxième partie peut être obtenue par l'approximation asymptotique de la différence de densité d'énergie de déformation mécanique. On considère donc :

$$\int_{\Gamma} (W^+ - W^-) q d\Gamma = \int_0^R (W^+ - W^-) q ds = \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) q ds + \int_{R-\delta}^R (W^+ - W^-) q ds \quad (\text{IV.17})$$

$$\text{avec:} \quad q = 1 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{R} \quad (\text{IV.18})$$

L'équation (IV.18) représente un cône circulaire centré à l'origine (pointe de fissure), de rayon de base R et de la hauteur égal à 1. q Prend des valeurs variant entre 0 et 1, comme le montre la figure (IV.5)

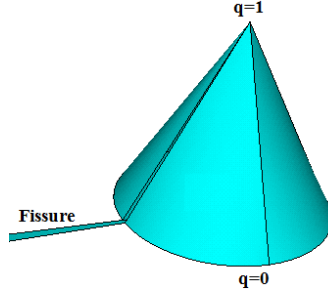


Figure IV.5. Représentation de la fonction q

Ce qui donne [EYÜ 08b]:

$$\int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) q d\Gamma \approx \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) q dx + \int_{R-\delta}^R \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi r}} \right) q dx \quad (\text{IV.19})$$

T : Contrainte T (T -stress),

R et δ : Paramètres géométriques (Figure IV.5).

En évaluant l'intégrale (IV.19), on obtient :

$$\int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) q d\Gamma \approx \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) q dx + \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}} \frac{2T(3R-\delta)}{3R} \quad (\text{IV.20})$$

Alors l'intégrale J_2 peut enfin s'écrire comme suit :

$$J_2 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,2} - W \delta_{2j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl} q d\Omega - \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) q dx - \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}} \left[\frac{2T(3R-\delta)}{3R} \right] \quad (\text{IV.21})$$

IV.2.2 Calcul des FICs en mode mixte et la contrainte T :

La relation entre J_1 , J_2 et les FICs K_I , K_{II} sont données par [KIM 02a] :

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (\text{IV.22a})$$

$$J_2 = \frac{2K_I K_{II}}{E'} \quad (\text{IV.22b})$$

E' est le module de Young, $E' = E$ en contrainte plane, et $E' = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)$ en déformation plane.

Afin d'évaluer J_2 , nous définissons d'abord une nouvelle variable \hat{J}_2 sous la forme suivante :

$$\hat{J}_2 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,2} q_{,j} - W \delta_{2j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl} q d\Omega - \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) \frac{x}{R} dx \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{IV.23})$$

La quantité \hat{J}_2 peut s'écrire en fonction de contrainte T , R et δ comme suit:

$$\hat{J}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{2\pi} \frac{8K_{II}T(3R-\delta)}{3E'R}} = \frac{2K_I K_{II}}{E'} \quad (\text{IV.24})$$

La quantité \hat{J}_2 est calculée numériquement sur un domaine donné pour deux valeurs de δ (δ_1 et δ_2), comme le montre la figure (IV.6).

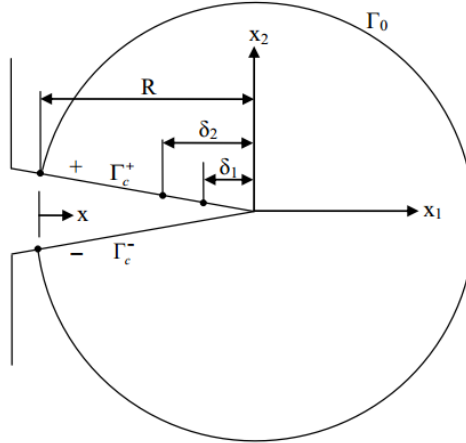


Figure IV.6 Distances δ_1 et δ_2

Quand δ_1 et δ_2 sont substitués dans l'équation (IV.24), les paramètres \hat{J}_2^1 et \hat{J}_2^2 peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \hat{J}_2^1 = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} - \sqrt{\frac{\delta_1}{2\pi} \frac{8K_{II}T(3R-\delta_1)}{3E'R}} \\ \hat{J}_2^2 = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} - \sqrt{\frac{\delta_2}{2\pi} \frac{8K_{II}T(3R-\delta_2)}{3E'R}} \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

On pose:
$$G = -\frac{8K_{II}T}{\sqrt{2\pi}E'} \quad (\text{IV.26})$$

Introduisons les expressions (IV.22b) et (IV.26) dans (IV.25), nous obtenons :

$$\begin{cases} \hat{J}_2^1 = J_2 + G\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) \\ \hat{J}_2^2 = J_2 + G\sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right) \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

La soustraction entre les équations (IV.27a) et (IV.27b) donne :

$$G = \frac{\hat{J}_2^1 - \hat{J}_2^2}{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right)} \quad (\text{IV.28})$$

En insérant l'équation (IV.28) dans (IV.27a), nous obtenons l'expression suivante :

$$\hat{J}_2^1 = J_2 + \frac{\hat{J}_2^1 - \hat{J}_2^2}{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right)} \sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) \quad (\text{IV.29})$$

Ceci implique que :

$$J_2 = \frac{\sqrt{\delta_1(1-\frac{\delta_1}{3R})}J_2' - \sqrt{\delta_2(1-\frac{\delta_2}{3R})}J_2'}{\sqrt{\delta_1(1-\frac{\delta_1}{3R})} - \sqrt{\delta_2(1-\frac{\delta_2}{3R})}} \quad (\text{IV.30})$$

La relation (IV.41b) nous permet d'écrire :

$$K_{II} = -\frac{E'J_2}{2K_I} \quad (\text{IV.31})$$

Substituons l'expression (IV.31) dans (IV.27a), nous obtenons :

$$J_1 = \frac{K_I^2 + \left(\frac{E'J_2}{2K_I}\right)^2}{E'} \quad (\text{IV.32})$$

La relation (IV.32) nous permet d'écrire :

$$K_I^4 - E'J_1K_I^2 + \frac{1}{4}(E')^2(J_2)^2 = 0 \quad (\text{IV.33a})$$

De même manière, nous trouvons :

$$K_{II}^4 - E'J_1K_{II}^2 + \frac{1}{4}(E')^2(J_2)^2 = 0 \quad (\text{IV.33b})$$

Les racines des équations (IV.33a) et (IV.33b) sont données par [BEN 06] :

$$\begin{cases} R_2 = \left\{ \frac{E'}{2} (J_1 + \sqrt{(J_1)^2 - (J_2)^2}) \right\}^{1/2} \\ R_2 = - \left\{ \frac{E'}{2} (J_1 + \sqrt{(J_1)^2 - (J_2)^2}) \right\}^{1/2} \\ R_3 = \left\{ \frac{E'}{2} (J_1 + \sqrt{(J_1)^2 - (J_2)^2}) \right\}^{1/2} \\ R_4 = - \left\{ \frac{E'}{2} (J_1 + \sqrt{(J_1)^2 - (J_2)^2}) \right\}^{1/2} \end{cases} \quad (\text{IV.34})$$

Une des quatre racines donne le FIC en mode-I K_I , et le facteur FIC en mode-II K_{II} .

Il est à noter que les signes des FICs sont liés aux déplacements normaux et tangentiels au voisinage de la pointe de fissure, définis par :

$$\begin{cases} \Delta_n = u_2^+ - u_2^- \\ \Delta_t = u_1^+ - u_1^- \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

Les indices (+) et (-) indiquent les lèvres supérieures et inférieures de la fissure, respectivement.

Δ_n et Δ_t sont calculés au voisinage de la pointe de fissure. Si Δ_n est positif, implique que la fissure est ouverte (c.-à-d. $K_I > 0$). De même manière, K_{II} est positif, si $\Delta_t > 0$ [BEN 06, KIM03c]. Une description détaillée de l'utilisation de cette technique est donnée dans les références [BEN 06, EYÜ 08, FAR 13].

IV.3 Méthode des éléments finis

IV.3.1 Couplage Ansys- Matlab

Le modèle théorique pour déterminer les FICs présenté ci-dessus est implémenté numériquement dans le code de calcul Ansys 16.0, en utilisant le langage de script APDL (*ANSYS Parametric Design Language*). Les données obtenues par ce code sont transférées et traitées ensuite dans le code Matlab.

Il est à noter que la méthode l'intégrale J_k est l'une des méthodes la plus compatible avec la formulation de la MEF. De ce fait, nous nous intéressons dans une première phase à la présentation des démarches nécessaires qui permettent la résolution d'un problème par éléments finis, sous un chargement mécanique. La résolution par éléments finis comporte trois étapes :

- **Première étape** : Préparation des données ou Pré-processing pour définir le problème (géométrie, le type d'élément fini ; les propriétés physiques des matériaux, le maillage).

On note ici que les propriétés mécaniques des matériaux FGMs sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul Ansys 16.0, au moyen de langage de script APDL. Ce programme permet de localiser les coordonnées du centre de chaque élément du maillage et de calculer ensuite, le module élastique $E(x)$ et le coefficient de Poisson $\nu(x)$, selon la loi de mélange choisie.

- **Deuxième étape** : Traitement ou Processing : assigner les conditions aux limites pour résoudre le système d'équations.

- **Troisième étape** : Post-processing : analyse et visualisation des résultats.

Après cette dernière étape, les résultats numériques nécessaires pour ce travail seront enregistrés et organisés en plusieurs fichiers «texte», sous forme de matrices. La description de chaque fichier texte est représentée ci-dessous :

Fichier «*Out_Stress* » : permet de lire les contraintes nodales.

Fichier « *Out_Strain* » : permet de lire les déformations nodales.

Fichier«*Out_Displ* » : permet de lire les déplacements nodaux.

Fichier « *Out_Coord* » : permet de lire les coordonnées nodales.

Fichier « *Out_Prop* »: permet de lire les propriétés mécaniques des éléments.

Fichier « *Out_Data* »: permet de lire d'autres données pour effectuer le calcul.

Dans une seconde phase, nous avons exploité le code de calcul Matlab pour importer les données obtenues par le code Ansys APDL et les transférer ensuite dans le code Matlab pour le but d'analyser et de déterminer les paramètres de rupture : Intégrale J_k et les FICs en mode mixte.

Il est à noter que le choix de Matlab dans cette étude est basé sur son approche matricielle qui permet de traiter les données sans aucune limitation de taille et de réaliser des calculs numériques de façon fiable et rapide. Matlab est un environnement puissant, complet et facile à utiliser pour le calcul scientifique. Le lien entre Matlab et Ansys va permettre d'obtenir des résultats plus précis. De plus, avec cette interaction, des problèmes avec des géométries plus complexes pourront être traités. La figure (IV.7) résume les démarches principales effectuées par les codes Ansys et Matlab.

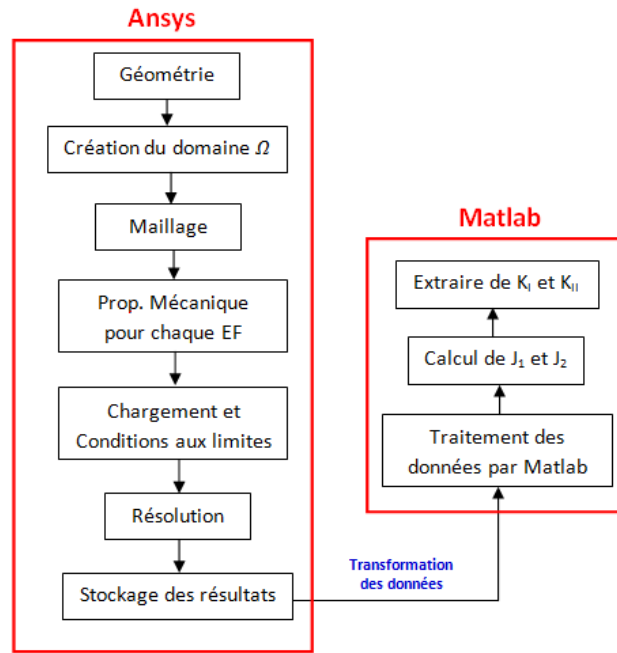


Figure IV.7 Organigramme de programmation par Ansys APDL

IV.3.2 Stratégie et mise en œuvre de l'implémentation

Du point de vue numérique, la méthode d'intégral d'interaction sélectionnée dans cette étude est la plus compatible avec la formulation de la méthode des éléments finis.

En supposant que le nombre de divisions d'éléments finis dans le domaine circulaire est N_1 , le nombre d'éléments finis le long du chemin intégral sur la surface supérieure de la fissure est égal à N_2 et sur la surface inférieure est égal à N_3 . J_1 et \hat{J}_2 sont exprimés sous la forme discrétisée suivante :

$$J_1 = \sum_{n=1}^{N_1} P_n \quad \text{et} \quad \hat{J}_2 = \sum_{n=1}^{N_1} Q_n + \sum_{j=1}^{N_2} R_j + \sum_{i=1}^{N_3} S_i \quad (\text{IV.36})$$

avec :

$$P_n = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ \sigma_{ij} u_{i,1} q_{,j} - W q_{,1} \} |Jac|_n d\xi d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (W_{,1})_{expl} q |Jac|_n d\xi d\eta \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{IV.37})$$

$$Q_n = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ \sigma_{ij} u_{i,2} q_{,j} - W q_{,2} \} |Jac|_n d\xi d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (W_{,2})_{expl} q |Jac|_n d\xi d\eta \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{IV.38})$$

$$R_j = - \int_{x_{j-1}^+}^{x_j^+} W^+ q ds \quad (\text{IV.39})$$

$$S_j = \int_{x_{j-1}^-}^{x_j^-} W^- q ds \quad (IV.40)$$

où : $|Jac|$ est le déterminant de la matrice de Jacobienne Jac

L'implémentation de la résolution du problème par la présente approche (Eq. IV.36) s'est faite selon les étapes suivantes :

1- Détermination du domaine d'intégration :

Dessignons un cercle d'origine la pointe de fissure, de rayons R , la surface du cercle représente un ensemble d'éléments appelé $J domain$ (domaine Ω) (Fig. IV.8a). L'intégration de contour se transforme à un intégrale de domaine à l'aide de la fonction q défini par l'équation (IV.18).

La méthode des éléments finis demande le calcul d'intégrales sur chacun des éléments du maillage. A cet effet, on fait l'intégration sur les éléments de $J domain$, en choisissant les points de Gauss pour chaque élément de $J domain$ (Figure IV.8b) avec :

$$J domain = [élé_1, élé_2, élé_3, \dots, élé_n] \quad (IV.41)$$

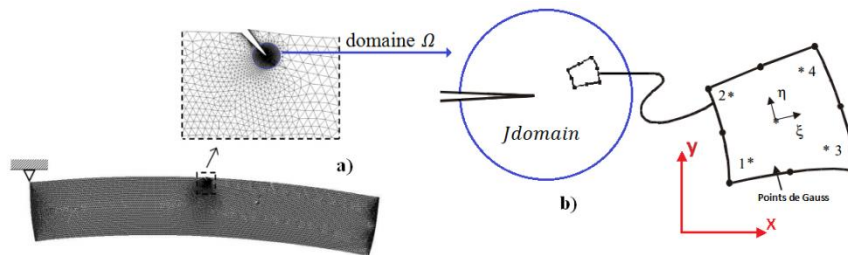


Figure IV.8. Cercle d'origine la pointe de fissure :

a) Domaine Ω ; b) Points de Gauss

2- Initialisation de calcul :

$P_n = 0, Q_n = 0, R_j = 0$ et $S_i = 0$: Pour faire des sommations itératives.

3- Pour chaque élément de l'ensemble $J domain$, pour chaque point d'intégration (ξ_i, η_i) , on calcule:

- a) Les fonctions de formes N_i et leurs dérivées $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$. Pour le cas d'un élément isoparamétrique à 8 nœuds $Q8$ (Figure IV.9), les fonctions N_i sont déterminée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta), \\ N_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta), \\ N_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta), \\ N_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta), \\ N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 - \xi^2), \\ N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \\ N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \xi^2), \\ N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 - \eta^2). \end{array} \right. \quad (\text{IV.42})$$

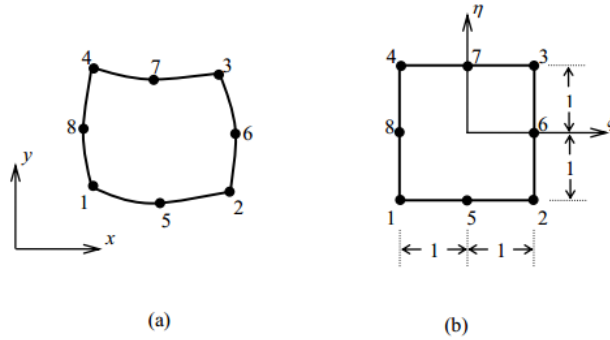


Figure IV.9. Transformation géométrique de l'élément $Q8$:

(a) Système de coordonnées cartésiennes ; (b) Système de coordonnées isoparamétriques

b) Calcul de jacobien Jac et son inverse Jac^{-1} :

Pour chaque élément, la matrice *Jacobienne* s'exprime en fonction des dérivées des fonctions connues de transformation géométrique et des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. En effet:

$$Jac = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

$$\Rightarrow Jac = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \eta & -(1 - \eta) & \cdots & -(1 + \eta) \\ 1 + \xi & -(1 - \xi) & \cdots & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

La transformation suivante garantit la transformation de l'élément réel à l'élément de référence :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = Jac \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.45})$$

La transformation inverse est assurée par la matrice Jacobienne inverse Jac^{-1} telle que :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = Jac^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.46)}$$

La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

4- Détermination des valeurs de la fonction q :

Les valeurs de la fonction q seront évaluées à chaque point des éléments J domain, q prend des valeurs variant entre 0 et 1, comme le montre la figure (IV.10).

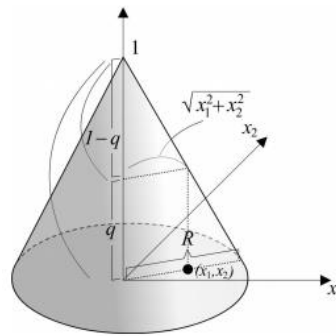


Figure IV.10. Représentation schématique de la fonction q

5- Calcul les dérivations des champs de déplacements $u_{i,1}$ et $u_{i,2}$ avec :

$$\begin{cases} u_{1,1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ u_{2,1} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ u_{1,2} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ u_{2,2} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{cases} \quad \text{IV.47)}$$

Les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont calculées par les relations:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \end{cases} \quad \text{IV.48)}$$

6- Calcul de la densité d'énergie de déformation :

La densité d'énergie de déformation mécanique W est définie par :

$$W = \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m & : \text{En CP} \\ \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{33} \varepsilon_{33}^m & : \text{En DP} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2) \quad \text{IV.49)}$$

$$\Rightarrow W = \begin{cases} \frac{1}{2}[\sigma_{11}\varepsilon_{11}^m + \sigma_{12}\varepsilon_{12}^m + \sigma_{21}\varepsilon_{21}^m + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^m] & : \text{En CP} \\ \frac{1}{2}[\sigma_{11}\varepsilon_{11}^m + \sigma_{12}\varepsilon_{12}^m + \sigma_{21}\varepsilon_{21}^m + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^m + \sigma_{33}\varepsilon_{33}^m] & : \text{En DP} \end{cases} \quad (\text{IV.50})$$

où ε_{ij}^m est la déformation mécanique. Les composantes de la déformation mécanique sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^m = \varepsilon_{11} - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_{22}^m = \varepsilon_{22} - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_{33}^m = \varepsilon_{33} - \alpha_3 \Delta T \\ \varepsilon_{12}^m = \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13}^m = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23}^m = \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} = 0 : \text{en DP} \end{cases} \quad (\text{IV.47})$$

α_1, α_2 et α_3 : sont des coefficients de dilatation thermique,

ΔT : Correspond au changement de la température.

Sous un chargement mécanique, les contraintes σ_{ij} et les déformations ε_{ij} sont reliées entre eux par :

$$\text{En contrainte plane : } \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{cases} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

$$\text{En déformation plane : } \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{cases} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{cases} \quad (\text{V.52})$$

7- Calcul des intégrales J_1 et J_2 :

Les paramètres J_1 et J_2 sont déterminés à partir des relations :

$$J_1 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij}u_{i,1} - W\delta_{1j})q_{,j}d\Omega - \iint_{\Lambda} (W_{,1})_{expl}q d\Omega \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{IV.53})$$

$$J_2 = \frac{\sqrt{\delta_1(1-\frac{\delta_1}{3R})}\widehat{J}_2^2 - \sqrt{\delta_2(1-\frac{\delta_2}{3R})}\widehat{J}_2^1}{\sqrt{\delta_1(1-\frac{\delta_1}{3R})} - \sqrt{\delta_2(1-\frac{\delta_2}{3R})}} \quad (\text{IV.54})$$

avec :

$$J_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\sigma_{ij}u_{i,1}q_{,j} - W_{q,1}\} |Jac|_n d\xi d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (W_{,1})_{expl} \cdot q \cdot |Jac|_n d\xi d\eta \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{IV.55})$$

$$\widehat{J}_2 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij}u_{i,2} - W\delta_{2j})q_{,j}d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl}q d\Omega - \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-)q ds \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{IV.56})$$

$$\Rightarrow \widehat{J}_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\sigma_{ij}u_{i,2}q_{,j} - W_{q,2}\} |Jac|_n d\xi d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (W_{,2})_{expl} \cdot q \cdot |Jac|_n d\xi d\eta - \int_{x_{j-1}^+}^{x_j^+} W^+ q ds + \int_{x_{j-1}^-}^{x_j^-} W^- q ds \quad (\text{IV.57})$$

$(i, j = 1, 2)$

Nous calculons ensuite les intégrales J_1 et \hat{J}_2 par la sommation itérative, en utilisant:

$$J_1 = \sum_{n=1}^{N_1} P_n \quad \text{et} \quad \hat{J}_2 = \sum_{n=1}^{N_1} Q_n + \sum_{j=1}^{N_2} R_j + \sum_{i=1}^{N_3} S_i \quad (\text{IV.58})$$

8- Extraire des FICs en mode mixte :

Après avoir calculé J_1 et J_2 , les FICs K_I et K_{II} sont déterminés ensuite par les relations :

$$\begin{cases} K_I^4 - E' J_1 K_I^2 + \frac{1}{4} (E')^2 (J_2)^2 = 0 \\ K_{II}^4 - E' J_1 K_{II}^2 + \frac{1}{4} (E')^2 (J_2)^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.59})$$

Les racines de système d'équations (IV.59) sont données par les équations (IV.34 a~d).

Il à noter que dans le cas des matériaux FGM, le module de Young calculé $E' = E_{tip}$ en contrainte plane, et $E' = \left(\frac{E_{tip}}{1-\nu^2} \right)$ en déformation plane. E_{tip} est calculé à la pointe de fissure.

IV.4 Exemples d'application et validation

Dans cette section, On se propose de tester l'efficacité et la robustesse de la technique d'extraction des FICs. De ce fait, trois exemples de validation sont traités. Les résultats obtenus sont comparés avec d'autres travaux numériques et expérimentaux. Les calculs sont menés sur des éléments standards de type quadrangles à 8 nœuds.

✓ Exemple 1 : Plaque pré-fissurée sollicitée en traction uni-axiale

• Cas d'un matériau homogène :

Dans cet exemple, nous nous intéressons à vérifier l'efficacité du programme réalisé dans le cas des matériaux homogènes. A cet effet, nous avons considéré une plaque mince de hauteur H et de largeur w , avec $H/w = 2$. La plaque est sollicitée en traction uni-axiale dans la direction verticale sous la contrainte appliquée d'amplitude $\sigma = 1$ unité. Elle comporte une fissure inclinée de longueur $a = 0.4/\sin(45^\circ)$ unité, inclinée par rapport au plan de chargement avec l'angle $\alpha = 45^\circ$, comme le montre la figure (IV.11a). Les propriétés mécaniques sont les suivantes: Module de Young $E = 1$ unité et Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

La structure considérée est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds et particulièrement des éléments spéciaux ont été utilisés pour caractériser la singularité en tête de la fissure (Figure IV.11b). Ce maillage nous servira de calculer les FICs K_I et K_{II} par des méthodes du champ de déplacement. Les calculs numériques sont réalisés sous les conditions de contrainte plane. Le calcul des FICs K_I et

K_{II} par la présente approche est réalisé à l'aide d'un contour d'intégration circulaire, de rayon R_1 (Figure IV.11c).

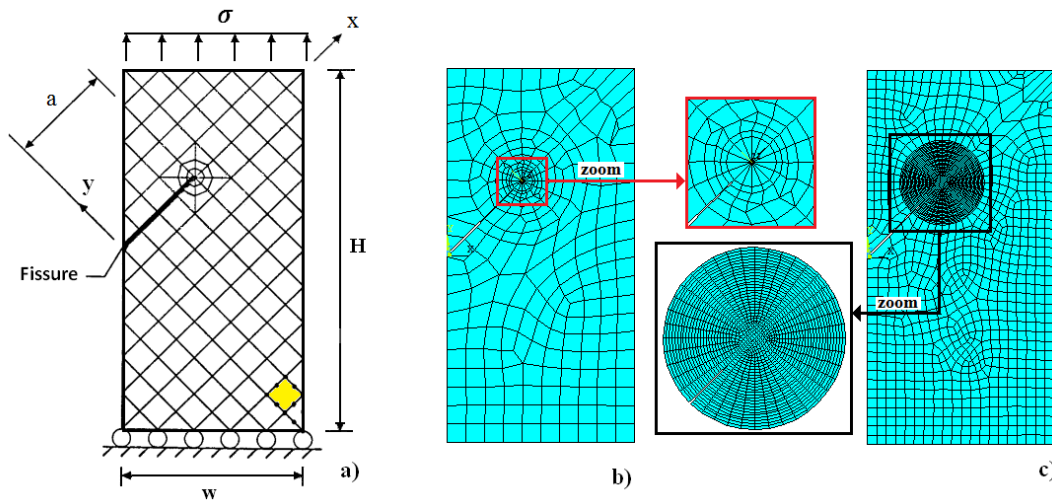


Figure IV.11. (a) Représentation schématique de la plaque fissurée [EIS 87],
 (b) Maillage globale de la plaque avec des éléments singuliers,
 (c) Maillage globale de la plaque sans des éléments singuliers: Présente approche

Le maillage à 2680 éléments et 6521 nœuds permet de déterminer $K_I/\sigma\sqrt{\pi a} = 1.412$ et $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a} = 0.677$ par la technique de l'intégrale J_k , ce qui représente une erreur de 0.14% et 0.83% par rapport aux valeurs de référence fournies dans la référence [EIS 87] ($K_I/\sigma\sqrt{\pi a} = 1.401$ et $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a} = 0.625$).

Le tableau (IV.1) illustre les valeurs des FICs normalisés, en utilisant des approches locales et globales. Les résultats obtenus sont comparés avec d'autres résultats numériques de Eischen [EIS 87] et ceux obtenus par BOWIE [BOW73]. Cette comparaison indique une bonne concordance entre les résultats obtenus et ceux réalisés par d'autres méthodes. Cette comparaison nous permet de conclure que la technique utilisée dans le cas des matériaux fragiles, décrit correctement le champ de contrainte au voisinage de la pointe de fissure, sollicité en mode mixte.

Tableau IV.1. Calcul des FICs par des approches locales et globales (avec: $R_1/a = 0.10$)

Méthodes	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$
Approche locale (DET) : Présente étude	1.449	0.606
Approche locale(DCT) : Présente étude	1.426	0.608
Approche globale (Intégrale J_k) : Présente étude	1.412	0.677
Approche locale [EIS 87]	1.438	0.605
Approche globale [EIS87]	1.410	0.625
Bowie [BOW73]	1.450	0.620

Pour mieux illustrer et vérifier l'indépendance des contours d'intégration sur l'évaluation des FICs par l'approche globale, des différents domaines Ω sont créés à partir des contours entourant la pointe de fissure. Chaque contour englobe le contour précédemment défini auquel on ajoute des éléments directement en contact avec lui. L'intégrale J_k a été calculée à travers 04 domaines (avec: $R_1/a=0.10, 0.20, 0.30$ et 0.40), comme le montre la figure (IV.12).

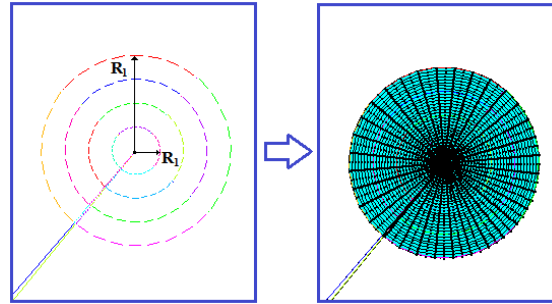


Figure IV.12. Définition des domaines d'intégration autour de la pointe de fissure

La figure (IV.13 a,b) présente l'évolution des FICs normalisés ($\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ et $\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$) en fonction des angles d'orientation α dans l'intervalle $[50^\circ, -50^\circ]$, respectivement. L'analyse de cette figure montre clairement que les valeurs des FICs normalisés sont indépendantes du domaine choisi ; cette propriété s'accorde bien avec la littérature pour des développements numériques basés sur la méthode d'intégrale d'interaction.

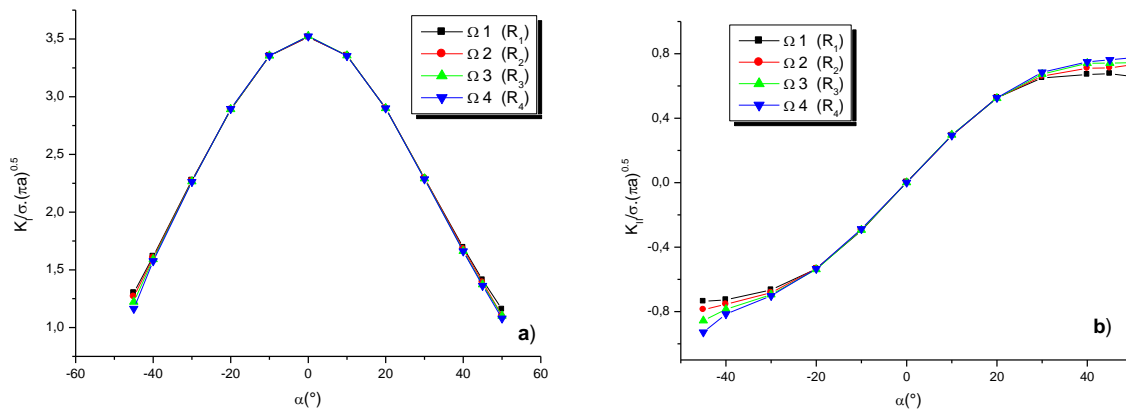


Figure IV.13. Variation des FICs normalisés en fonction des angles d'inclinaison α

Il est clair que la longueur de la fissure a un effet prépondérant sur les critères de propagation de la fissure; son analyse est donc déterminante. Nous avons étudié numériquement l'influence de la taille de la fissure sur la variation des valeurs de FIC en mode d'ouverture de la fissure ($\alpha=0$).

Pour cet exemple, nous disposons d'une valeur analytique de K_I provenant des solutions exactes auxquelles sont apportées des termes correctifs [BOU 13] :

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{IV.60 a})$$

avec :

$$Y = 1.12 - 0.231(a/w) + 10.55(a/w)^2 - 21.72(a/w)^3 + 30.39(a/w)^4 \quad \text{pour: } a/w \leq 0.6 \quad (\text{IV.60 b})$$

w : Largeur de la plaque

Les résultats obtenus analytiquement sont comparés avec ceux obtenus par l'approche analytique, la méthode locale DCT et l'approche énergétique de l'intégrale J_k . Il est à remarquer cependant que les courbes tracées sur la figure (IV.14) présentent des résultats identiques, à partir du rapport $a/w \geq 0.15$, loin du bord de l'éprouvette.

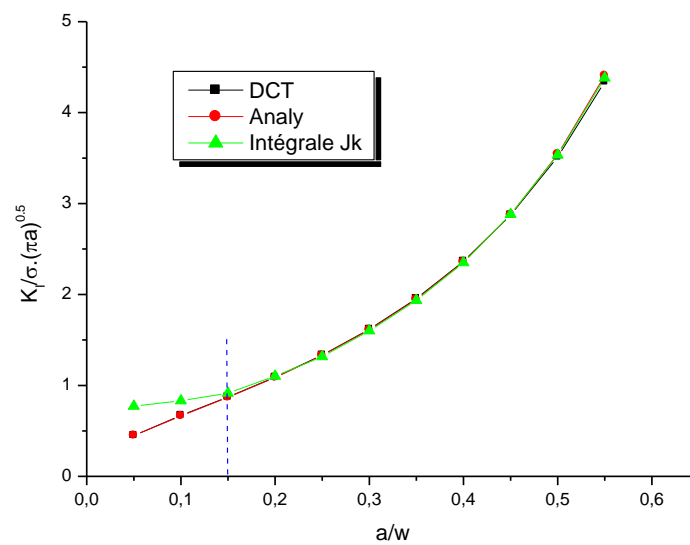


Figure IV.14. Variation du FIC normalisé en fonction de (a/w)

- **Cas d'un matériau FGM :**

Reprenons ici l'exemple précédent avec les mêmes dimensions, la base de la plaque est encadrée suivant les deux directions et l'autre extrémité est soumise à une contrainte $\sigma = 1$ unité, (Figure IV.15a).

La structure considérée est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds avec des éléments singuliers pour calculer les FICs par les méthodes du champ de déplacement (Figure IV.15b, c). Le calcul numérique est effectué toujours sous l'hypothèse de contraintes planes.

- Propriétés mécaniques de la plaque en FGM [AIT 21, KIM 02] :

$$E(x) = E_1 \exp(\lambda x) \quad \text{si: } 0 \leq x \leq w \quad (\text{IV.61})$$

avec : $E = E_1(0) = 1$, $E = E_2(w)$ et $\lambda = \ln(E_2/E_1)$.

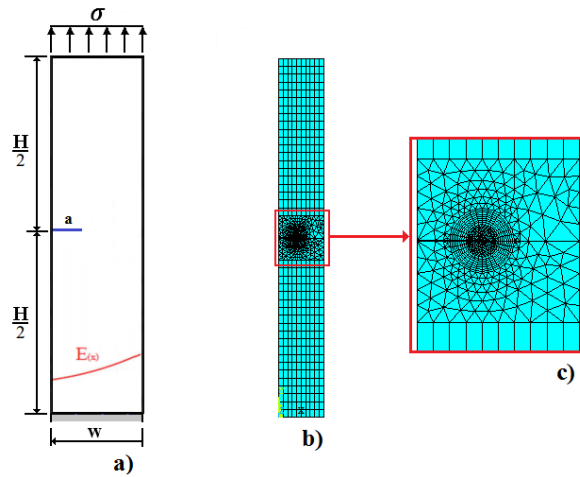
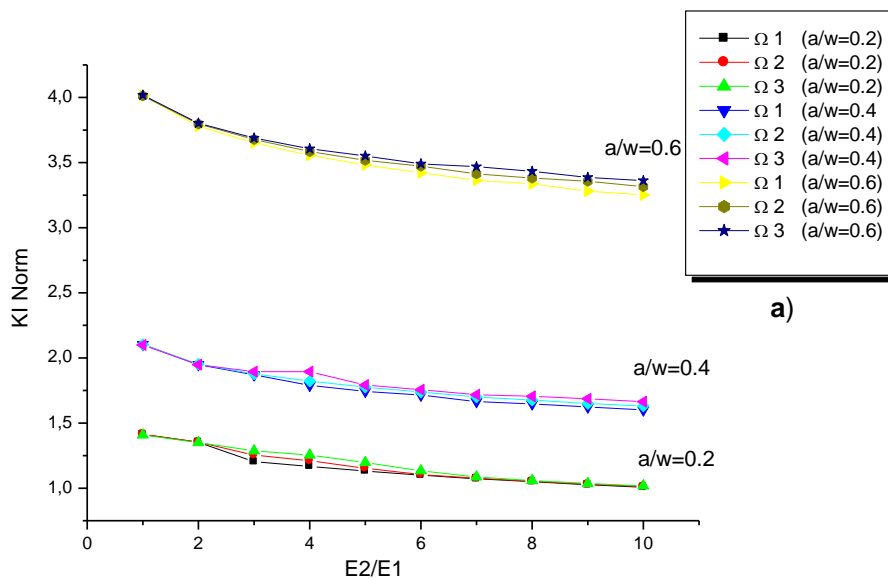


Figure IV.15. (a) Représentation schématique d'une plaque FGM fissurée
 (b) Maillage globale de la plaque,
 (c) Maillage détaillé au voisinage de la fissure.

Dans le but de justifier l'indépendance des contours d'intégration sur l'évaluation du FIC par l'approche globale dans le cas du matériau FGM, nous avons créé trois domaines Ω entourant la pointe de fissure. Chaque contour englobe le contour précédemment. La figure (IV.16) montre la variation des valeurs de FIC normalisés ($K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$) évaluée par la présente approche en fonction du rapport (E_2/E_1). Les résultats obtenus sont tracés pour différentes tailles de fissure (avec $a/w = 0.2, 0.4, 0.6$). On peut constater clairement que les valeurs des FICs normalisés sont indépendantes du domaine choisi, quel que soit la taille de la fissure dans le matériau gradué.



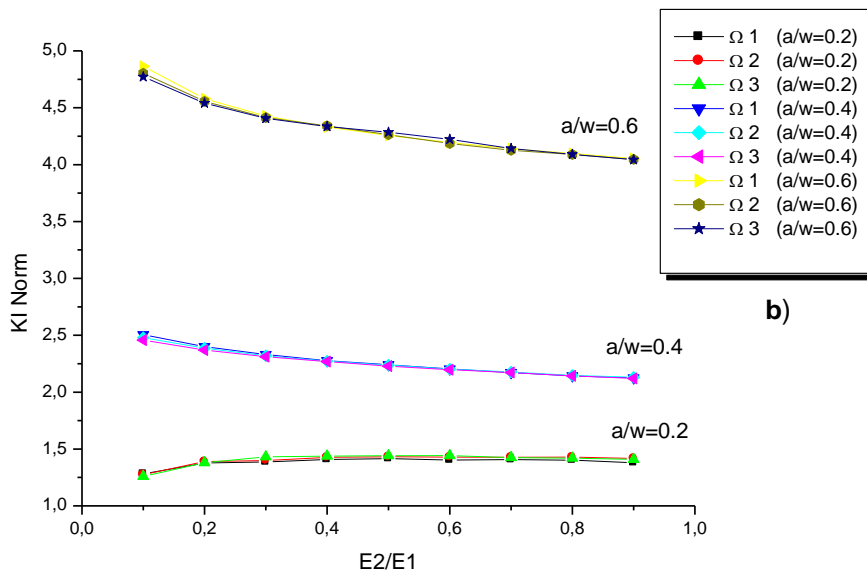
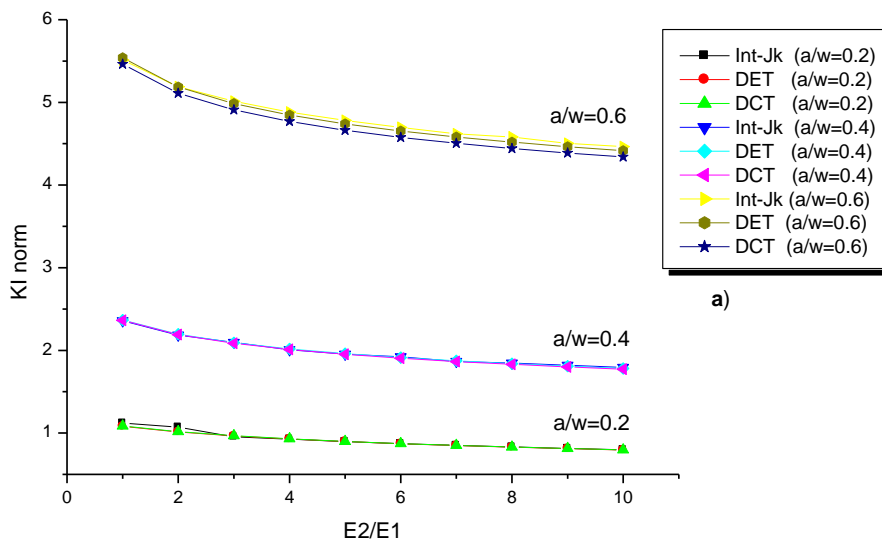


Figure IV.16. Indépendance du domaine d'intégration

a) $\frac{E_2}{E_1} \geq 1$, b) $\frac{E_2}{E_1} < 1$

Les figures (IV.17a) et (IV.17b) illustrent l'évolution du $FICK_I$ en fonction du rapport (a/w) , en utilisant les rapports $(\frac{E_2}{E_1} \geq 1)$ et $(\frac{E_2}{E_1} < 1)$, respectivement. Les résultats obtenus par l'approche de l'intégrale J_k sont calculés suffisamment loin de la pointe de fissure et sont comparés ensuite avec ceux calculés par les méthodes locales. Les courbes tracées montrent un bon accord entre les approches locales et globales.



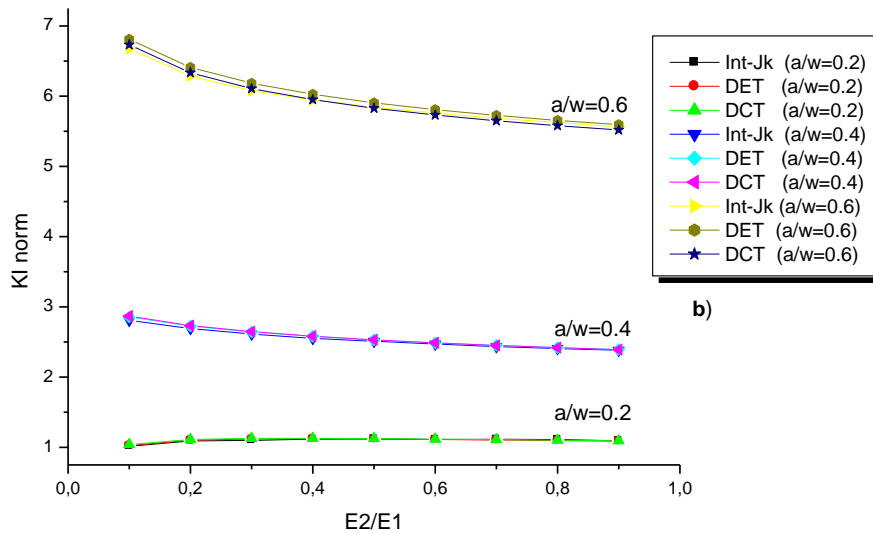


Figure IV.17. Résultats du FIC K_I pour différentes tailles de fissure avec :

a) $\frac{E_2}{E_1} \geq 1$, b) $\frac{E_2}{E_1} < 1$

✓ Exemple 2 : Epreuve de flexion 4-points en FGM

Dans cet exemple, on considère une éprouvette de flexion 4-points en FGM (Epoxy/Glass). L'éprouvette contenant une fissure de longueur $a = 5.5\text{mm}$, supposée amorcer perpendiculairement à la gradation matérielle. Trois positions de fissure sont considérées dans la zone graduée (avec : $\xi = 0.17, 0.58$ et 1 , respectivement). La figure (IV.19) illustre la géométrie de l'éprouvette, les forces appliquées et les conditions aux limites. Les dimensions sont données en (mm).

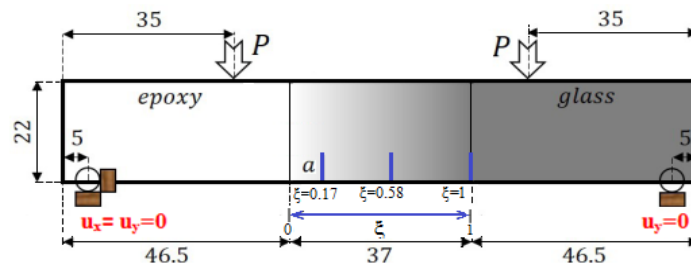


Figure IV.18. Epreuve de flexion 4-points en FGM

Propriétés mécaniques :

La figure (IV.20) montre la variation des propriétés mécaniques (E , ν et K_{IC}). Les valeurs numériques le long de la région graduée ($0 \leq \xi \leq 1$), sont illustrées dans le tableau (IV.2).

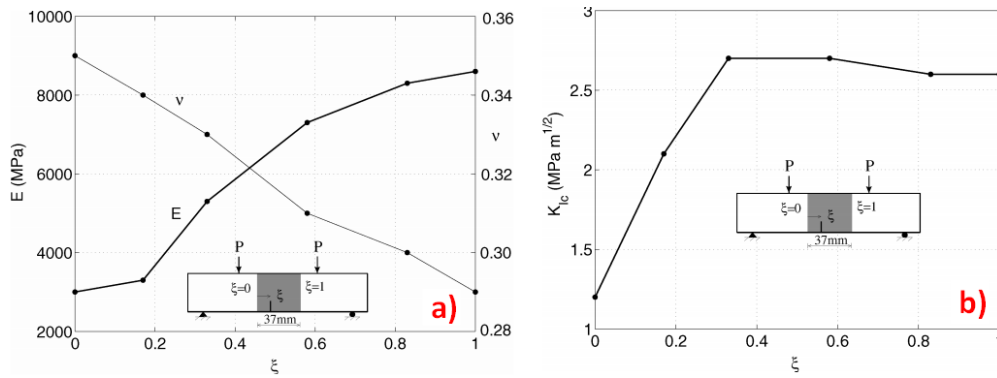


Figure IV.19. Evolution des propriétés élastiques dans la zone graduée ($0 \leq \xi \leq 1$):

- a) Module de Young E et Coefficient de Poisson ν ,
- b) Ténacité du matériau K_{Ic} .

ξ	E (MPa)	ν	K_{Ic} (MPa \sqrt{m})
$0 \leq$	3000	0.35	1.2
0.17	3300	0.34	2.1
0.33	5300	0.33	2.7
0.58	7300	0.31	2.7
0.83	8300	0.3	2.6
$1 \geq$	8600	0.29	2.6

Tableau IV.2. Propriétés mécaniques

Pour calculer les FICs par l'approche de l'intégrale J_k , le domaine (Ω) est créé autour de la pointe de fissure de rayon $R = \frac{a}{7.5}$. La poutre en FGM est maillée par des éléments quadratiques. Les figures (IV.21a) et (IV.21b) illustrent respectivement le maillage global de l'éprouvette avec différentes positions de la fissure ξ et le domaine (Ω) autour de la pointe de fissure.

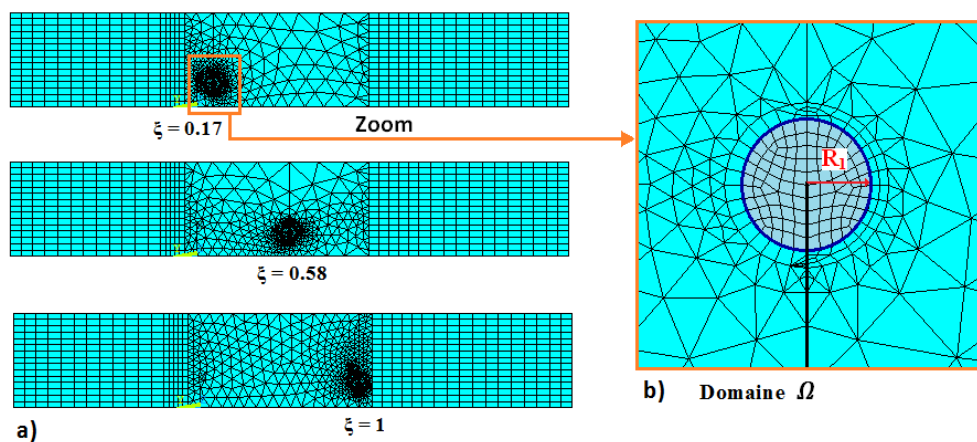
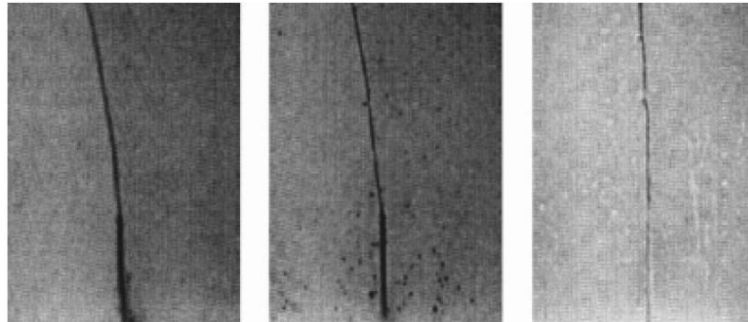


Figure IV.20. Maillage de l'éprouvette de flexion 4-points en FGM
 (a) Différentes positions de la fissure, (b) Domaine d'intégration Ω

Nous avons exposé sur les figures (IV.21a-c) les résultats expérimentaux de Rousseau et Tippur [ROU00], obtenus sur les angles d'amorçage de fissures θ_0 et les chemins de fissuration, en considérant les trois positions $\xi = 0.17, 0.58$ et 1 . Ces résultats sont proposés pour le but de valider notre modèle de calcul.



a) $\xi=0.17$ ($\theta_0=6.95^\circ$), b) $\xi=0.58$ ($\theta_0=4^\circ$), c) $\xi=1$ ($\theta_0=0.5^\circ$)

Figure IV.21. Résultats expérimentaux des angles d'amorçage θ_0 et des chemins de propagation [ROU 00].

✓ Calcul le chargement critique appliqué P_{cr}

Pour une fissure localisée à la position $\xi = 0.17$, nous avons évalué par la présente approche le chargement critique appliqué P_{cr} et les FICs K_I et K_{II} . Les résultats obtenus sur le tableau (IV.3) sont comparés avec ceux obtenues par d'autres méthodes numériques. Le calcul comparatif montre un bon rapprochement entre les techniques locales et énergétiques.

Tableau IV.3. Comparaison entre P_{cr} , K_I et K_{II} (avec $\xi = 0.17$)

$\xi = 0.17$			
	P_{cr} (N)	K_I (MPa. \sqrt{m})	K_{II} (MPa. \sqrt{m})
Intégrale J_k : Présente étude	254	2.110	-0.131
Intégrale M [AIT 21]	257	2.170	-0.129
Kim et Paulino [KIM 04]	253.3	2.122	-0.129
Khazal and Saleh [KHA 19]	255	2.087	-0.116

Calcul l'angle initial de propagation

Dans cette partie d'étude, nous avons adopté le critère de la densité d'énergie de déformation minimale (SED) proposé par SIH [SIH 73, 74], afin de déterminer numériquement l'angle initial de direction θ_0 . Selon ce critère, la fissure se propage dans la direction le long de laquelle le facteur de la densité d'énergie de déformation S est minimum, avec :

$$S = \frac{1}{\pi r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2) \quad (IV.5)$$

Les constantes a_{ij} représentent des fonctions de l'angle polaire θ , du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1+\nu}{8E} [(3-4\nu-\cos\theta)(1+\cos\theta)] \\ a_{22} = \frac{1+\nu}{8E} [4(1-\nu)(1-\cos\theta) + (1+\cos\theta)(3\cos\theta-1)] \\ a_{12} = \frac{1+\nu}{8E} [(2\sin\theta)(\cos\theta-(1-2\nu))] \end{cases}$$

La direction de propagation de fissure est définie alors comme suit:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \geq 0 \quad (IV.6)$$

Le tableau (IV.4) compare l'angle initiale de propagation θ_0 obtenu par la présente approche avec ceux rapportés dans les références [ROU 00, KIM 07, CHA19, COM 07, KHA 19] en considérant les données expérimentales de Rosseau et Tippur [ROU 00] et les résultats numériques basés sur les méthodes MEF, X-FEM et XEFGM. Le calcul effectué montre un très bon accord avec les profils numérique et expérimental.

Tableau IV.4. Comparaison entre les angles d'amorçage θ_0

Angles d'amorçage θ_0 (°)						
Position de fissure ξ	Présente Etude	Rousseau et Tippur(Exp) [ROU 00]	Ait Ferhat (MEF) [AIT 21]	Chafi et Boulenouar (MEF)[CHA 19]	Khazal et Saleh (XEFGM) [KHA 19]	Comi et Mariani (X-MEF) [COM 07]
$\xi = 0.17$	7.01°	7°	6.98°	6.95°	6.90°	7.22°
$\xi = 0.58$	3.89°	4°	4.06°	4.04°	4.02°	4.07°
$\xi = 1.00$	0.54°	0.5°	0.46°	0.57°	0.60°	1.02°

✓ Evolution de l'angle initial de propagation dans la zone graduée

La figure (IV.22) illustre l'évolution de l'angle initial de fissuration θ_0 dans la zone graduée, évalué numériquement par la méthode d'extrapolation DET et la méthode de l'intégrale de domaine, respectivement. On peut remarquer clairement que l'angle de bifurcation θ_0 augmente et atteint sa valeur maximale lorsque la fissure est localisée à la position $\xi = 0.25$. Ensuite, cet angle diminue progressivement lorsque la position de fissure continue de se déplacer vers la position $\xi = 1$. L'étude comparative montre un bon accord entre la simulation numérique et le résultat expérimental obtenu pour les trois positions de fissure $\xi = 0.17, 0.58$ et 1 , respectivement. La procédure numérique donne donc un résultat très satisfaisant, pour le cas des fissures situées perpendiculairement à la gradation matérielle.

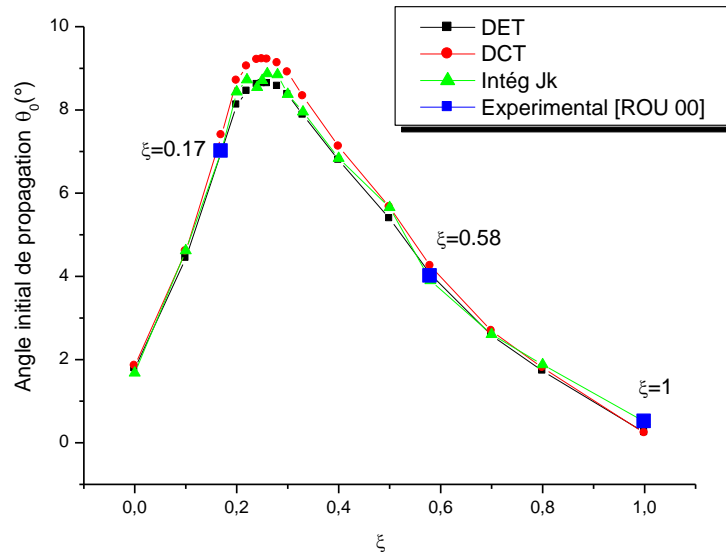


Figure IV.22. Evolution de l'angle de bifurcation θ_0 dans la zone graduée

IV.5 Conclusion

Nous avons élaboré dans ce chapitre une stratégie pour estimer les FICs en mode mixte dans le cas des matériaux gradués. Le présent développement de la technique d'extraction des FICs est basé sur l'approche énergétique « *Intégrale J_k* », en utilisant un calcul numérique combiné entre le code de calcul par éléments finis Ansys et le code Matlab.

La bonne performance du programme développé a été clairement démontrée et validée par des approches numériques, analytiques et expérimentales, à travers trois exemples d'applications. L'indépendance du domaine d'intégration est justifiée dans le cas des matériaux gradués, pour des contours suffisamment loin de la pointe de fissure. Il est à noter que la détermination du FIC par cette approche est affectée par l'effet de bord de l'éprouvette, comparativement aux calculs obtenus par les méthodes locales.

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail s'inscrit dans le cadre général de l'étude numérique du comportement en rupture des matériaux à gradient fonctionnel, sous les conditions de chargement mécanique. Afin d'orienter notre étude dans une bonne direction, il était indispensable, dans un premier temps, de dresser un bilan des études sur les techniques d'évaluation du FIC dans le cas des matériaux FGMs. Dans la littérature, il existe deux méthodes plus largement utilisées, la première méthode c'est une approche locale qui déduit le FIC à partir des informations du champ de déplacement ou de contrainte au voisinage de la fissure, la deuxième méthode dite « globale ou énergétique », s'appuie sur le concept du taux de restitution d'énergie.

Dans cette étude, la modélisation numérique des propriétés mécaniques des matériaux FGMs sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul par EF. Ce programme permet de localiser automatiquement les coordonnées du centre pour chaque élément du maillage, afin de calculer ensuite les propriétés matérielles, par la prise en compte de la loi de mélanges.

Dans ce manuscrit, deux approches locales basées sur le champ de déplacement sont exploitées, il s'agit des méthodes DET et DCT. La méthode CTSM (*Crack-tip stress method*) basée sur le champ de contraintes, proposée pour les matériaux isotropes et homogènes, a été exploitée et examinée dans le cas des matériaux FGMs sollicités en mode-I. A cet effet, des exemples d'applications ont été testés et comparés par des approches analytiques et numériques afin de montrer la robustesse de ces approches locales.

Les calculs numériques réalisés par la MEF ont montré que le modèle intégré capable de décrire correctement le champ de contraintes et de déformations au voisinage du fond de fissure, par l'évaluation des FICs.

Dans le cadre d'évaluation des FICs par l'approche énergétique, nous avons utilisé la méthode d'intégrale d'interaction, dite « Intégrale J_k ». Pour ce faire, les calculs par éléments finis étaient menés par le couplage de deux codes de calcul Ansys et Matlab.

La bonne performance du programme développé a été clairement démontrée et validée, par des approches numériques et expérimentales, à travers des exemples d'applications suffisamment variés.

D'une manière générale, les résultats du FIC présentés dans cette thèse ont été calculés pour plusieurs combinaisons, en considérant la forme de la plaque, la loi de mélange constituant le matériau FGM et l'orientation de la fissure par rapport au sens de dégradation des propriétés matérielles.

Comme perspective, l'étude par les approches proposées CSTM-G et l'intégrale J_k pourra être élargie aux autres axes de recherche concernant le comportement en rupture des matériaux FGMs anisotropes et l'interaction des fissures avec l'interface au sein d'un couple FGM/Matériau homogène. Il est aussi prévu de développer le présent modèle aux problèmes bidimensionnels sous l'effet des contraintes thermiques.

Référence bibliographiques

- [ABA06] Abanto-Bueno J. & Lambros J. (2006). An Experimental Study of Mixed Mode Crack Initiation and Growth in Functionally Graded Materials, *Experimental Mechanics*, 46, 179-196
- [ABD 97] Abdizadeh, H. (1997). Elaboration et caractérisation de composites duplex" Composites laminaires tri-couches à base d'alumine". Thèse de doctorat, Lyon, INSA.
- [ABO 12] Abotula, S., Kidane, A., Vijaya, B., Chalivendra, B., Shukla, A. (2012). Dynamic curving cracks in functionally graded materials under thermo-mechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*. 49(13), 1637-1655.
- [AIT 20a] Ait Ferhat, Y., Boulenouar, A. (2020). Computation of SIFs for cracked FGMs under mechanical and thermal loadings. *Archives of Mechanical Technology and Materials*, 40(1), 12-19.
- [AIT 20b] Ait Ferhat, Y., Boulenouar, A. (2020). Computation of SIFs for cracks in FGMs and TBC under mechanical and thermal loadings. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*, 1-10.
- [AIT 20c] Ait Ferhat, Y., Boulenouar, A., Benamara, N., Benabou, L. (2020). Generalized displacement correlation method for mechanical and thermal fracture of FGM. *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, 9(1), 2050004-2565.
- [ANL 00] Anlas, G., Santare, M. H., & Lambros, J. (2000). Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal of Fracture*, 104(2), 131-143.
- [ANL 02] Anlas, G., Lambros, J., Santare, M. H. (2002). Dominance of asymptotic crack tip fields in elastic functionally graded materials. *International Journal of Fracture*, 115(2), 193-204.
- [ANT 99] Antunes, F. V., Ferreira, J. M., Byrne, J. (1999). Stress intensity factor calculation based on the work of external forces. *International journal of fracture*, 98(1), 1-14.
- [AYA 99] Ayatollahi. M. R, M. J. Pavier, and D. J. Smith. (1998). Determination of T -stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading, *International Journal of Fracture*, 4505
- [BAH 03] Bahr, H. A., Balke, H., Fett, T., Hofinger, I., Kirchhoff, G., Munz, D., Yang, Y. Y. (2003). Cracks in functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 2-16.
- [BAK 17] Bakhshizadeh, A., ZamaniNejad, M., DavoudiKashkoli, M. (2017). Time-dependent hygro-thermal creep analysis of pressurized FGM rotating thick cylindrical shells subjected to uniform magnetic field. *Journal of Solid Mechanics*, 9(3), 663-679.
- [BAO 95] Bao, G., Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal
-

-
- coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), 2853-2871.
- [BAR 74] Barsoum, R. S. (1974). Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 10(4), 603-605.
- [BAR 08] Baron, C., Naili, S. (2008). Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(9), 722-730.
- [BAY 13] Bayesteh, H., Mohammadi, S. (2013). XFEM fracture analysis of orthotropic functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, 44(1), 8-25.
- [BEC 01] Becker Jr, T. L., Cannon, R. M., Ritchie, R. O. (2001). Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(32-33), 5545-5563.
- [BEL 15] Belkorissat, I., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Bedia, E. A., & Mahmoud, S. R. (2015). On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model. *Steel Composite Structure*, 18(4), 1063-1081.
- [BEN 06] Bengi, D. (2006). Thermal stress intensity factor evaluation for inclined cracks in functionally graded materials using J_k -integral method, Thèse de maîtrise, Middle East Technical University, Turkey.
- [BEN 12] Benmessaoud, A.(2012). Contribution à la modélisation dynamique des structures fissurées soumises à des sollicitations sismiques par la méthode des éléments finis étendue (X-FEM), Mémoire de Magister, université de Djelfa.
- [BEN 17a] Benamara, N., Boulenouar, A., Aminallah, M., Benseddiq, N. (2017). On the mixed-mode crack propagation in FGMs plates: comparison of different criteria. *Structural Engineering and Mechanics*. 61(3), 371-379.
- [BEN 17b] Benamara, N., Boulenouar, A., Aminallah, M. (2017). Strain energy density prediction of mixed-mode crack propagation in functionally graded materials. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 61(1), 60-67.
- [BER 10] Berthelot, J. M. (2010). Mécanique des matériaux et structures composites. *Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés*. Livre, éditions Lavoisier.
- [BHA10] Bhadauria, S.S., Pathak, K.K., Hora, M.S. (2010). Finite Element Modeling of Crack Initiation Angle under Mixed Mode (I/II) Fracture, *Journal of Solid Mechanics*, 2(3), 231-247
- [BOC 86] Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M. (1986). Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites. *Journal of the American Ceramic Society*, 69(8), C-191.
- [BOH 14] Bohidar, S. K., Sharma, R., & Mishra, P. R. (2014). Functionally graded materials: A critical review. *International Journal of Research*, 1(4), 289-301.
- [BOU00] Bouchard, P., Bay, F., Chastel, Y., Tovenà, I. (2000). Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 189(3), 723-742.
- [BOU 13a] Boulenouar, A., Benseddiq, N., Mazari, M. (2013). Strain energy density prediction of crack propagation for 2D linear elastic materials. *Theoretical And Applied Fracture Mechanics*, 67-
-

68, 29-37.

- [BOU13b] Boulenouar, A., Benseddiq, N., & Mazari, M. (2013). Two-dimensional numerical estimation of stress intensity factors and crack propagation in linear elastic analysis. *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 3(5), 506-510.
- [BOU 14] Boulenouar, A., Benseddiq, N., Mazari, M., & Benamara, N. (2014). FE model for linear-elastic mixed mode loading: estimation of SIFs and crack propagation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 52, 373-383.
- [BOU19] Boulenouar, A., Bendida, N. (2019). Crack growth path simulation in a cement mantle of THR using crack box technique. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 57(2),317-329.
- [BOU 20] Boulenouar A. (2020). Numerical Study of the Fracture Behavior of a FGM Circular Disk. *Journal of Mineral and Material Science*, 1(2), 1006
- [BOU 17] Bouchelarm, M. A., Mazari, M., & Benseddiq, N. (2017). Stress intensity factor KI and T-stress determination in HDPE material. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 17(5), 919-934.
- [BOU 18] Bouchelarm M.A, (2018). Prédiction de la rupture par une approche à deux paramètres (FIC et T-stress). Application aux canalisations sous pression en polyéthylène haute densité (PEHD). Thèse de Doctorat, UDL- Sidi Bel Abbes.
- [CHA70] Chan, S.K., Tuba, I.S., Wilson, W.K., (1970). On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2, 1-17
- [CHA 19] Chafi, M., Boulenouar, A. (2019). A numerical modelling of mixed mode crack initiation and growth in functionally graded materials. *Materials Research*, 22(3).
- [CHE 00] Chen, J., Wu, L., Du, S. (2000). A modified J integral for functionally graded materials. *Mechanics research communications*, 27(3), 301-306.
- [CHE 18] Chen, X., Luo, T., Ooi, E. T., Ooi, E. H., & Song, C. (2018). A quadtree-polygon-based scaled boundary finite element method for crack propagation modeling in functionally graded materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 94, 120-133.
- [CHI 03] Chi, S. H., Chung, Y. L. (2003). Cracking in coating-substrate composites with multi-layered and FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(10), 1227-1243.
- [CHI 06] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2006). Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43(13), 3657-3674.
- [CHO05] Choi, B., Zhou, Z., Chudnovsky, A., Stivala, S., Sehanobish, K., Bosnyak, C. (2005). Fracture initiation associated with chemical degradation: observation and modeling. *International Journal of Solids and Structures*, 42(2), 681-695.
- [CHU 02] Chung, K. H., & Yang, W. H. (2002). Fracture mechanics analysis on the bonded repair of a skin/stiffener with an inclined central crack. *Composite structures*, 55(3), 269-276.
- [COM 07] Comi, C., & Mariani, S. (2007). Extended finite element simulation of quasi-brittle fracture in functionally graded materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44), 4013-4026.
-

-
- [DAG 06] Dag, S. (2006). Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach. *Engineering fracture mechanics*, 73(18), 2802-2828.
- [DAG 07] Dag, S. (2007). Mixed-Mode Fracture Analysis of Functionally Graded Materials Under Thermal Stresses: A New Approach Using J k-Integral. *Journal of Thermal Stresses*, 30(3), 269-296.
- [DAG 08] Dag, S., & Ilhan, K. A. (2008). Mixed-mode fracture analysis of orthotropic functionally graded material coatings using analytical and computational methods. *Journal of applied mechanics*, 75(5).
- [DAG 10] Dag, S., Arman, E. E., & Yildirim, B. (2010). Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using Jk-integral. *International Journal of Solids and Structures*, 47(25-26), 3480-3488.
- [DAG 12] Dag, S., Yildirim, B., Arslan, O., & Arman, E. E. (2012). Hygrothermal fracture analysis of orthotropic materials using J k-Integral. *Journal of Thermal Stresses*, 35(7), 596-613.
- [DAG 13] Dag, S., Yildirim, B., & Topal, S. (2013). Computational methods for inclined cracks in orthotropic functionally graded materials under thermal stresses. *Journal of thermal stresses*, 36(10), 1001-1026.
- [DEL 83] Delale, F. Erdogan, F., (1983). The crack problem for a non-homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50(3), pp. 609-614.
- [DEL 85] Delorenzi, H. G. (1985). Energy release rate calculations by the finite element method. *Engineering fracture mechanics*, 21(1), 129-143.
- [DES 83] Destuynder, P. (1983). Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 2(1), 113-135.
- [DOR 86] Dorlot, J. M., Bailon, J.P., Masounave, J. (1986). « les Matériaux » Livre , Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal.
- [DUF 04] DufLOT, M., (2004). Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture, Thèse de doctorat en sciences appliquées, Université de Liège.
- [EIS 87] Eischen, J. W. (1987). Fracture of nonhomogeneous materials. *International Journal of Fracture*, 34(1), 3-22.
- [ELM 18] Elmeiche, A., Bouamama, M., Megueni, A. (2018). Dynamic analysis of FGM nanobeams under moving load considering shear deformation effect. *International Journal of Scientific Engineering Research*, 9(3), 1212-1221.
- [ERD 63] Erdogan, F., Sih, G. (1963). On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal Of Basic Engineering*, 85(4), 519-525
- [ERD 91] Erdogan, F., Kaya, A. C., & Joseph, P. F. (1991). The crack problem in bonded nonhomogeneous materials. *Applied mechanics transaction Journal of ASME*, 58(6), 410-416.
- [ERD 95] Erdogan, F. (1995). Fracture mechanics of functionally graded materials. *Composites Engineering*, 5(7), 753-770.
-

-
- [ERD 96] Erdogan, F., & Wu, B. H. (1996). Crack problems in FGM layers under thermal stresses. *Journal of thermal stresses*, 19(3), 237-265.
- [ERD 97] Erdogan, F., & Wu, B. H. (1997). The surface crack problem for a plate with functionally graded properties, *Applied mechanics transaction Journal of ASME*, 449-456
- [ESH 15] Eshraghi, I., Soltani, N. (2015). Stress intensity factor calculation for internal circumferential cracks in functionally graded cylinders using the weight function approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 134, 1-19.
- [EYÜ 08] Eyüp, E. A., (2008) J_k-Integral formulation and implementation for thermally loaded orthotropic functionally graded materials, Thesis, Middle East Technical University, Turkey.
- [FAR 13] Farid, S., (2013). Hygrothermal fracture analysis of fibrous composites with variable fiber spacing using J_k-Integral, Thesis, Middle East Technical University, Turkey.
- [FEH 99] Fehel Barry D., Truman Kevin Z., (1999). An evaluation of fracture mechanics quarter-point displacement techniques used for computing stress intensity factors, *Engineering Structures*. 21, 406-415
- [FIO 06] Fiordalisi, S. (2006). Modélisation tridimensionnelle de la fermeture induite par plasticité lors de la propagation d'une fissure de fatigue dans l'acier 304L, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique.
- [FOR 11] Foroutan, M., Moradi-Dastjerdi, R. (2011). Dynamic analysis of functionally graded material cylinders under an impact load by a mesh-free method. *ActaMechanica*, 219(3-4), 281-290.
- [GAR 17] Garg, S., & Pant, M. (2017). Numerical simulation of adiabatic and isothermal cracks in functionally graded materials using optimized element-free Galerkin method. *Journal of Thermal Stresses*, 40(7), 846-865.
- [GOS 98] Gosz, M., Dolbow, J., & Moran, B. (1998). Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 35(15), 1763-1783.
- [GOS 02] Gosz, M., & Moran, B. (2002). An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(3), 299-319.
- [GOU 15] Gouasmi, S., Megueni, A., Bouchikhi, A. S., Zouggar, K., Sahli, A. (2015). On the reduction of stress concentration factor around a notch using a functionally graded layer. *Materials Research*, 18(5), 971-977.
- [GOU 16] Gouasmi, S. (2016). Modélisation numérique du comportement en rupture des structures en matériaux composites gradués. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès de Sidi Bel Abbes, Algérie.
- [GRA 02] Gravouil, A., Moës, N., & Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part II: Level set update. *International journal for numerical methods in engineering*, 53(11), 2569-2586.
- [GRI 21] Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221(582), 163-198.
-

-
- [GU 97a] Gu, P., Asaro, R. J. (1997). Crack deflection in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 34(24), 3085-3098.
- [GU 97b] Gu, P., Asaro, R. J. (1997). Cracks in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 34(1), 1-17.
- [GU 99] Gu, P., Dao, M. & Asaro, R. J. (1999). A simplified method for calculating the crack tip field of functionally graded materials using the domain integral. *Journal of Applied Mechanics*, 66,101 -108.
- [GUI 00] Guinea, G. V., Planas, J., Elices, M. (2000). KI evaluation by the displacement extrapolation technique. *Engineering fracture mechanics*, 66(3), 243-255.
- [GUI 18] Guidara, M., Bouaziz, M., Dallali, M., Schmitt, C., Haj Taieb, E., Azari, Z. (2018). HDPE pipe failure analysis under over pressure in presence of defect. *Design and Modeling of Mechanical Systems-III*, 1027-1038.
- [GUO 04] Guo, L. C., Wu, L. Z., Zeng, T., Ma, L. (2004). Mode I crack problem for a functionally graded orthotropic strip. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23(2), 219-234.
- [GÜR 99] Gürdal, Z., Haftka, R. T., & Hajela, P. (1999). Design and optimization of laminated composite materials. Livre, édition John Wiley & Sons.
- [HAI 17] Haider, I. K., Khazal, M.H. (2017). Analysis of mixed-mode crack tip in functionally graded beams by using xefgm. *Iraqi journal of mechanical and material engineering*, 17(3), 496-514.
- [HEB 20] Hebbar I., A. Boulenouar, A., Ait Ferhat, Y. (2020). Two dimensional fracture analysis of FGM under mechanical loading, *Journal of materials and engineering structures*, 7, 241-252.
- [HEL 14] Helal, W. M., & Shi, D. (2014). Optimum material gradient for functionally graded rectangular plate with the finite element method. *Indian Journal of Materials Science*, 2014.1-7.
- [HEN 75] Henshell, R. D., & Shaw, K. G. (1975). Crack tip finite elements are necessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9(3), 495-507.
- [HEN 95] Henry. B. S, and A. R. Luxmoore,(1995). Three-dimensional evaluation of the T-stress in centre cracked plates, *International Journal of Fracture*, 70 (1), 35-50,
- [HIR 19] Hirshikesh, Natarajan, S., Annabattula, R. K., & Martínez-Pañeda, E. (2019). Phase field modelling of crack propagation in functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, 169, 239-248.
- [HON 97] Honein, T., Herrmann, G. (1997). Conservation laws in nonhomogeneous plane elastostatics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(5), 789-805.
- [HON 10] Hon, Y., Wu, L., Guo, L., He, Q., & Du, S. (2010). Interaction integral method for the interfacial fracture problems of two nonhomogeneous materials. *Mechanics of Materials*, 42(4), 435-450.
- [HOU 11] Houari, MSA. (2011). Analyse des contraintes thermo-élastique : lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès de Sidi Bel Abbes, Algérie.
- [HOU 21] Houari A. (2021). L'endommagement dans les plaques entaillées en FGM, Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès de Sidi Bel Abbes, Algérie.
-

-
- [ICH 01] Ichikawa, K. (2001). Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts. *Springer Science & Business Media*.
- [IRW 49] Irwin, G. R. (1949). Fracturing of metals, *Metallurgia*, 39(231), 133-137.
- [IRW 57] Irwin, G. R. (1997). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate., *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361-364.
- [JAI 06] Jain, N., Chona, R., Shukla, A. (2007). Asymptotic stress fields for thermomechanically loaded cracks in FGMS. *Fatigue and Fracture Mechanics*. 35(1), 309-320.
- [JIN 94] Jin, Z. H., Noda, N. (1994). Crack-tip singular fields in nonhomogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 61(3), 738-740.
- [JIN 96a] Jin, Z. H., Batra, R. C. (1996). Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. *Journal of Thermal Stresses*, 19(4), 317-339.
- [JIN 96b] Jin, Z. H., Batra, R. C. (1996). Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(8), 1221-1235.
- [JIN 01] Jin, Z. H., & Paulino, G. H. (2001). Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *International Journal of Fracture*, 107(1), 73-98.
- [JIN 03] Jin, Z. H., Paulino, G. H., Dodds Jr, R. H. (2003). Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(14), 1885-1912.
- [JIN 04] Jin, Z. H., Dodds Jr, R. H. (2004). Crack growth resistance behavior of a functionally graded material: computational studies. *Engineering Fracture Mechanics*, 71(12), 1651-1672.
- [KAW 87] Kawasaki, A., Watanabe, R. (1987). Finite element analysis of thermal stress of the metal/ceramic multi-layer composites with controlled compositional gradients. *Japan Institute of Metals, Journal*, 51, 525-529.
- [KAW 96] Kawasaki, A., Watanabe, R., Yuki, M., Nakanishi, Y., Onabe, H. (1996). Effect of microstructure on thermal shock cracking of functionally graded thermal barrier coatings studied by burner heating test. *Materials Transactions, JIM*, 37(4), 788-795.
- [KAW 02] Kawasaki, A. and Watanabe R. (2002). Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 1713-1728.
- [KC 08] KC, A., Kim, J. H. (2008). Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(8), 2542-2565.
- [KHA 04] Khan, S., Khraisheh, M. (2004). A new criterion for mixed mode fracture initiation based on the crack tip plastic core region. *International Journal of Plasticity*, 20(1), 55-84.
- [KHA 19] Khazal, H., & Saleh, N. A. (2019). XEFGM for crack propagation analysis of functionally graded materials under mixed-mode and non-proportional loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(11), 975-983.
-

-
- [KHO 03] Khor KA, Gu YW, Quek CH, Cheang P. (2003), *Surf. Coat. Technol.* 168, 195–201.
- [KID 10] Kidane, A., Vijaya, B., Chalivendra, V.B., Shukla, A., Chona, R. (2010). Mixed-mode dynamic crack propagation in graded materials under thermo-mechanical loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 77(14), 2864-2880.
- [KIE 03] Kieback, B., Neubrand, A., & Riedel, H. (2003). Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 81-106.
- [KIM 97] Kim, A. S., Suresh, S., Shih, C. F. (1997). Plasticity effects on fracture normal to interfaces with homogeneous and graded compositions. *International Journal of Solids and Structures*, 34(26), 3415-3432.
- [KIM 02a] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2002). Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8), 1903-1935.
- [KIM 02b] Kim, J. H., Paulino, G. H. (2002). Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(14-16), 1557-1586.
- [KIM 03a] Kim J.H., Paulino G.H., (2003). Mixed-mode J-integral formulation and implementation using graded elements for fracture analysis of nonhomogeneous orthotropic materials, *Mechanics of Materials*. 35, 107-128.
- [KIM 03b] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2003). The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 40(15), 3967-4001.
- [KIM 03c] Kim, J. H., Paulino, G. H. (2003). An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(10), 1457-1497.
- [KIM 04] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2004). Simulation of crack propagation in functionally graded materials under mixed-mode and non-proportional loading. *Mechanics and Materials in Design*, 1(1), 63-94.
- [KIM 05a] Kim JI, Kim WJ, Choi DJ, Park JY, Ryu WS. (2005) Carbon N. Y., 43, 1749–1757.
- [KIM 05] Kim, J. H., Paulino, G. H. (2005). Consistent formulations of the interaction integral method for fracture of functionally graded materials. *Journal applied mechanics - Trans ASME*. 72, 351-64.
- [KIM 07] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2007). On fracture criteria for mixed-mode crack propagation in functionally graded materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(4), 227-244.
- [KOI 93] Koizumi M. (1993). The concept of FGM. Ceramic transaction, *Funct Gradient Mater*, 34, 3-10.
- [KOI 97] Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4.
- [KON 95] Kong, X., Schlüter, N., Dahl, W. (1995). Effect of triaxial stress on mixed-mode
-

-
- fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 52(2), 379-388.
- [KOS 10] Kosker, S., Dag, S., Yildirim, B. (2010). Three dimensional modeling of inclined surface cracks in FGM coatings. *Materials Science Forum*. 631, 109-114.
- [LEE 08] Lee, K. H., Chalivendra, V. B., Shukla, A. (2008). Dynamic crack-tip stress and displacement fields under thermomechanical loading in functionally graded materials. *Journal of Applied Mechanics*, 75(5). 1-7.
- [LEE 82] Leever. P. S, and J. C. Radon,(1982).Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries, *International Journal of Fracture*, 19(4), 311-325
- [LIU 00] Liu, G.R., Yan, L. (2000). A modified meshless local Petrov-Galerkin method for solid mechanics. *In Advances in Computational Engineering and Sciences*, Atluri N.K. and Brust F.W. Eds., *Tech. Science Press, Palmdale, CA*, 1374-1379.
- [LIU 17] Liu, Y. J., Li, Y. X., & Xie, W. (2017). Modeling of multiple crack propagation in 2-D elastic solids by the fast multipole boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 172, 1-16.
- [MA 08] MA, L., Zhi-Yong, W.,& Lin-Zhi Wu. (2008). Simulation of crack propagation in functionally graded materials, *XXII ICTAM*, Adelaide, Australia.
- [MAH 17] Mahbadi, H. (2017). Stress intensity factor of radial cracks in isotropic functionally graded solid cylinders. *Engineering Fracture Mechanics*, 180, 115-131.
- [MAK 14] Makwana, A. B., Panchal, K. C., & Gandhi, A. H. (2014). Stress analysis of functionally graded material plate with cut-out. *International Journal of Advanced Mechanical Engineering*, 4(5) 495-500.
- MAL 04 Maleski. M. J, M. S. Kirugulige, and H. V. Tippur,(2004).A method for measuring mode I crack tip constraint under static and dynamic loading conditions. *Experimental Mechanics*, 44(5), 522-532.
- [MAR 00] Marur, P. R., Tippur, H., V. (2000). Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient. *International Journal of Solids and Structures*, 37(38), 5353-5370.
- [MAR 15] Martínez-Pañeda, E., Gallego, R. (2015). Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 11(4), 405-424.
- [MAT 04] Matthew, C., Walters M.C., Glaucio, H., Paulino, G.H., Robert, H., Dodds, JR. (2004). Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*. 41(3-4), 1081-1118.
- [MEL 10] Meliani. M. H, Z. Azari, G. Pluvinage, and Y. G. Matvienko, (2010). The effective T-stress estimation and crack paths emanating from U-notches, *Engineering Fracture Mechanics*, 77(11), 1682-1692.
- [MIR 16] Mirahmadi, H., Azimi, M., & Mirjavadi, S. S. (2016). Calculation of stress intensity factor for functionally graded cylinders with two radial cracks using the weight function method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 85, 447-456.
-

-
- [MIY 13] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., Ford, R. G. (Eds.). (2013). Functionally graded materials: design, processing and applications .*Springer Science Business Media*,5.
- [MOË 99] Moës, N., Dolbow, J., &Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1), 131-150.
- [MOG 11] Moghaddam, A. S., Ghajar, R., Alfano, M. (2011). Finite element evaluation of stress intensity factors in curved non-planar cracks in FGMs. *Mechanics research communications*, 38(1), 17-23.
- [MOG 18] Moghaddam, A.S., Alfano, M. (2018). Thermoelastic analysis of surface cracks in FGMs hollow cylinders using the interaction energy integral method. *Engineering Fracture Mechanics*. 202, 103-115.
- [MOR 87] Moran, B., Shih, C. F. (1987). A general treatment of crack tip contour integrals. *International journal of fracture*, 35(4), 295-310.
- [MOR 07] Morais, A. B. (2007). Calculation of stress intensity factors by the force method. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(5), 739-750.
- [NAK 89] Nakamura, T., & Parks, D. M. (1989). Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*, 25(12), 1411-1426.
- [NAK 91] Nakamura, T. (1991). Three-dimensional stress fields of elastic interface cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 58, 939-946.
- [NAM 12] Nami, M. R., &Eskandari, H. (2012). Three-dimensional investigations of stress intensity factors in a thermo-mechanically loaded cracked FGM hollow cylinder. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 89, 222-229.
- [NAR 11] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi. (2011). "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions»; John Wiley & Sons, 110.
- [NAT 19] Natarajan, S., & Annabattula, R. K. (2019). A FEniCS implementation of the phase field method for quasi-static brittle fracture. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 13(2), 380-396.
- [NEJ 13] Nejad, M. Z., Abedi, M., Lotfian, M. H., & Ghannad, M. (2013). Elastic analysis of exponential FGM disks subjected to internal and external pressure. *Central European Journal of Engineering*, 3(3), 459-465.
- [NIS 99] Nisitani H., Kawamura T., Fujisaki W., and Fukuda T. (1999). *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers* (in Japanese), 65-629, Series A, p.26.
- [NIS 03] Nisitani H. and Teranishi T. and Fukuyama K. (2003). Stress Intensity Factors of an Infinite Solid with Two Cavities having a Crack Emanating from the Cavity under Tension, *Key Engineering Materials*, 261-263 669-674.
- [NIS 04] Nisitani H. and Teranishi T. (2003). FEM Analysis of a Crack in Bimaterial Plate Based on the Crack Tip Stress Method, *Key Engineering Materials*, 243-244, 387-392
-

-
- [OMO 97] Omori, M., Okubo, A., Kang, G. H., & Hirai, T. (1996). Preparation and properties of polyimide/Cu functionally graded material. *Functionally Graded Materials*, 24(996), 767-772.
- [OOI 15] Ooi, E. T., Natarajan, S., Song, C., & Tin-Loi, F. (2015). Crack propagation modelling in functionally graded materials using scaled boundary polygons. *International Journal of Fracture*, 192(1), 87-105.
- [ÖZG 08] Özge, K. (2008). Computational 3d fracture analysis in axisymmetric media. , Thesis, Middle East Technical University, Turkey.
- [PAR 65] Paris, P. C. and Sih, G. C., (1965), Stress analysis of cracks, Fracture toughness testing and its applications: *ASTM International*, 30-81.
- [PET 98] Petrovic, J. J., & Mc Clellan, K. J. (1998). Ceramic/polymer functionally graded material (FGM) lightweight armor system (No. LA-UR-98-2614). Los Alamos National Lab., NM (United States), 8-13.
- [PU 78] Pu, S.L., Hussein, M.A., (1978). The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems. *Int. J. num. Meth. Eng.*, 12, 1727-1742.
- [RAN 03] Rangaraj, S., Kokini, K. (2003). Estimating the fracture resistance of functionally graded thermal barrier coatings from thermal shock tests. *Surface and Coatings Technology*, 173(2-3), 201-212.
- [RAN 04] Rangaraj, S., Kokini, K. (2004). A study of thermal fracture in functionally graded thermal barrier coatings using a cohesive zone model. *Journal of Engineering Materials and Technologie*, 126(1), 103-115.
- [RAO 03] Rao, B. N., Rahman, S. (2003). Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engineering fracture mechanics*, 70(1), 1-27.
- [RAJ 77] Raju, I. S., & Newman Jr, J. C. (1977). Three dimensional finite-element analysis of finite-thickness fracture specimens. Livre, edition Work of the US Gov. Public Use Permitted.
- [RAJ 79] Raju, I. S., & Newman Jr, J. C. (1979). Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engineering fracture mechanics*, 11(4), 817-829.
- [RAJ 08] Rajan, T. P. D., Pillai, R. M., & Pai, B. C. (2008). Functionally graded Al-Al₃Ni in situ intermetallic composites: fabrication and microstructural characterization. *Journal of alloys and compounds*, 453(1-2), 4-7.
- [RAV 03] Ravi K.S. Chandran and Barsoum I., (2003). Determination of stress intensity factor solutions for cracks in finite-width functionally graded materials, *International Journal of Fracture*, 121, 183-203.
- [RÉT 05] Réthoré J. (2005). Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique de fissures. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [RIC 68] Rice, J. (1968). A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2), 379.
- [ROU 00] Rousseau, C. E., & Tippur, H. V. (2000). Compositionally graded materials with cracks normal to the elastic gradient. *Acta Materialia*, 48(16), 4021-4033.
-

-
- [ROU 14] Roumeli, E. (2014). *Structure and properties of cross linked high density polyethylene nano composite materials*, Thèse de doctorat, Université Aristote de Thessalonique (AUTH). Faculté des sciences. Département de physique.
- [RYB 77] Rybicki, E. F., & Kanninen, M. F. (1977). A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering fracture mechanics*, 9(4), 931-938.
- [SAB 95] Sabir, B. (1995). The performance of isoparametric finite elements in stress intensity factor determination. *International Journal of Fracture*, 72(3), 259-275.
- [SAH 15] Sahu, Y. K., Moulick, S. K. (2015). Analysis of semi-elliptical crack in a thick walled cylinder using FEM. *International Journal of Advanced Engineering Research and Studies. Studies/IV/II/Jan.-March*, 231, 235.
- [SAN 00] Sansoz, F. (2000). Propagation des petites fissures de fatigue dans les zones de concentration de contraintes dans le superalliage N18, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [SHE 16] Shen, H. S. (2016). *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. Livre Edition CRC press.
- [SHI 76] Shih, C.F., Delorenzi, H.G. (1976). Crack extension modelling with singular quadratic isoparametric elements, *International Journal of Fracture*, 12, 647-651
- [SHI 88] Shivakumar, K. N., Tan, P. W., & Newman Jr, J. C. (1988). A virtual crack-closure technique for calculating stress intensity factors for cracked three dimensional bodies., *International Journal of Fracture*, 36, 43-50.
- [SHI 88] Shih, C. F., & Asaro, R. J. (1988). Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: part I-small scale yielding. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 299-316.
- [SIH 74] Sih, G. (1974). Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, 10(3), 305-321.
- [SHO 15] Shojaee, S., Daneshmand, A. (2015). Crack analysis in media with orthotropic functionally graded materials using extended isogeometric analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 147, 203-227.
- [SWA 17] Swaminathan, K., & Sangeetha, D. M. (2017). Thermal analysis of FGM plates-A critical review of various modeling techniques and solution methods. *Composite Structures*, 160, 43-60.
- [TAK 90] Takahashi, H., Hashida, T. (1990). Development of an evaluation method of functionally gradient materials. *International Journal Series A Solid Mechanics Strength of materials*, 33(3), 281-287.
- [TAK 16] Takabi, B. (2016). Thermomechanical transient analysis of a thick-hollow FGM cylinder. *Engineering Solid Mechanics*, 4(1), 25-32.
- [TOH 06] Tohgo, K., Hadano, A. (2006). Characterization of fracture process in ceramic-metal functionally graded material under three-point-bending. *JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering*, 49(3), 321-330.
-

-
- [TOK 99] Tokita, M. (1999). Development of large-size ceramic/metal bulk FGM fabricated by spark plasma sintering. *Materials science forum*, 308, 83-88.
- [TOK 05] Tokita, M. (2005). Development of square-shaped large-size WC/Co/Ni system FGM fabricated by spark plasma sintering (SPS) method and its industrial applications. *Materials Science Forum*, 492, 711-718.
- [TOP 13] Topal, S., Dag, S. (2013). Hygrothermal Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Materials Using-Integral-Based Methods. *Mathematical Problems in Engineering*, 1-11
- [TOS 92] Toshio. N and D. M. Parks (1992), Determination of elastic T-stress along three-dimensional crack fronts using an interaction integral, *International Journal of Solids and Structures*, 29 (13), 1597-1611.
- [TRU 08] Trung-Kien N. (2008). Quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectives des plaques hétérogènes, Thèse de doctorat, Université Paris-East.
- [UDU 14] Udupa, G., Rao, S. S., &Gangadharan, K. V. (2014). Functionally graded composite materials: an overview. *Procedia Materials Science*, 5, 1291-1299.
- [VIN 17] Vincent A. (2017). Les nouveaux matériaux composites pour l'aéronautique, Livre édition mediachimie 76-83.
- [WAL 98] Walters, M. C., Paulino, G. H., Dodds Jr, R. H. (2005). Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(11), 1635-1663.
- [VOI 89] Voigt W. (1889), Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper, *Wied Ann. Physik* 38, 573-587.
- [WEL 63] Wells, A. A. (1963). Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British Welding Journal*, 10.
- [WES 39] Westergaard, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of applied mechanics*, 6(2), 49-53.
- [YAN 99] Yang. B, and K. Ravi-Chandar, (1999). Evaluation of elastic T-stress by the stress difference method, *Engineering Fracture Mechanics*, 64(5), 589-605,
- [YAM 90] Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., &Shiota, I. (1990). Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials. *Sendai, Japan*.
- [YAU 80] Yau, J. F., Wang, S. S. et Corten, H. T. (1980). A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47, 335-341.
- [YIL 04] Yildirim, B., Erdogan, F. (2004). Edge crack problems in homogenous and functionally graded material thermal barrier coatings under uniform thermal loading. *Journal of Thermal Stresses*, 27(4), 311-329.
- [YIL 05] Yildirim, BF., Dag, S., & Erdogan, F. (2005). Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading. *International journal of Fracture*, 132(4), 371-397.
- [YIL 06] Yildirim, B. (2006). An equivalent domain integral method for fracture analysis of functionally
-

graded materials under thermal stresses. *Journal of Thermal Stresses*, 29(4), 371-397.

- [YIL 08] Yildirim, B., Yılmaz, S., Kadioğlu, S. (2008). Delamination of compressively stressed orthotropic functionally graded material coatings under thermal loading. *Journal of applied mechanics*, 75(5).
- [YOS 04] Yoshihisa, U., (2004). Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications. *Composites Part B*, 39, 39-51.
- [YUE 03] Yue, Z. Q., Xiao, H. T., Tham, L. G. (2003). Boundary element analysis of crack problems in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14), 3273-3291.
- [ZEG 04] Zegloul, A. (2003). Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture. Livre édition arts et métiers paris tech.
- [ZHA 18] Zhang, H. H., Liu, S. M., Han, S. Y., & Fan, L. F. (2018). Modeling of 2D cracked FGMs under thermo-mechanical loadings with the numerical manifold method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 148, 103-117.
- [ZHU 19] Zhu, N., Oterkus, E. (2020). Calculation of stress intensity factor using displacement extrapolation method in peridynamic framework. *Journal of Mechanics*, 36(2), 235-243.
-

Annexes

Annexe (A.1) :

Évolution des FICs :

Pour les solides élastiques linéaires et sous chargement de mode-I, le déplacement normal au plan de la fissure, v est exprimé par :

$$v = K_I \frac{(1+\nu)}{4E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(1+2k) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{A_1(1+\nu)r}{E} (k-3) \sin \theta + \frac{A_2(1+\nu)r^{\frac{3}{2}}}{E} \left[\frac{(2k-1)}{3} \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right] + \dots \quad (1)$$

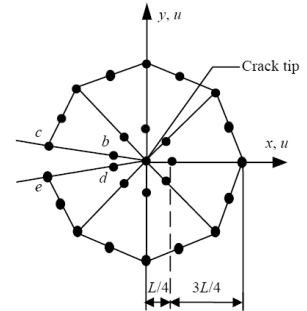
Où K_I est le FIC en mode-I, E est le module d'élasticité, ν est le coefficient de Poisson, k est défini par $(3-4\nu)$ en contraintes planes et $(3-4\nu)/(1+\nu)$ en contraintes planes,

r et θ sont les coordonnées polaires définies en pointe de fissure, et A_i sont des paramètres dépendant de la géométrie et de la charge appliquée.

Les déplacements aux nœuds b, c, d et e sont extrapolés en considérant l'éq. (1) le long des faces de la fissure $\theta = \pm\pi$. La particularisation pour les nœuds b et c sur l'élément singulier à la face supérieure de la fissure donne (Fig. III.1):

$$v_b = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1+\nu)(1+k)}{4E} + \sqrt{L} - \frac{A_2(1+\nu)(1+k)}{12E} L^{\frac{3}{2}} + O(L^{\frac{5}{2}}) \quad (2)$$

$$v_c = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1+\nu)(1+k)}{2E} + \sqrt{L} - \frac{2A_2(1+\nu)(1+k)}{12E} L^{\frac{3}{2}} + O(L^{\frac{5}{2}}) \quad (3)$$



Où L , est la longueur du côté de l'élément relié à la pointe de fissure.

En utilisant les équations (2) et (3), le FIC K_I peut être obtenu comme :

$$K_I = \frac{E}{3(1+\nu)(1+k)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [(8v_b - v_d)] \quad (4)$$

Les déplacements nodaux aux deux autres nœuds (d et e) peuvent être estimés par la même technique. Si on considère les quatre déplacements nodaux, le FIC K_I peut être exprimé comme suit :

$$K_I = \frac{E}{3(1+\nu)(1+k)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(v_b - v_d) - \frac{(v_c - v_e)}{2} \right] \quad (5)$$

Le déplacement tangent au plan de la fissure, u sous chargement en mode-II pur, est donné par :

$$u = K_{II} \frac{(1+\nu)}{4E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(1+2k) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{A_1(1+\nu)r}{E} (k-3) \sin \theta + \frac{A_2(1+\nu)r^{\frac{3}{2}}}{E} \left[\frac{(2k-1)}{3} \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right] + \dots (6)$$

Où K_{II} est le FIC sous chargement en mode-II pur.

De même, en utilisant les déplacements nodaux des quatre nœuds, le FIC K_{II} peut être exprimé comme suit :

$$K_{II} = \frac{E}{3(1+\nu)(1+k)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_b - u_d) - \frac{(u_c - u_e)}{2} \right] \quad (7)$$

Pour les matériaux FGM isotropes, les propriétés élastiques E et ν sont évaluées en pointe de fissure. Les FICs en mode mixte K_I et K_{II} sont donnés par [24-25] :

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(v_b - v_d) - \frac{(v_c - v_e)}{2} \right] \\ K_{II} &= \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_b - u_d) - \frac{(u_c - u_e)}{2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Annexe (A.2) : Fissure centrale inclinée dans un disque en FGM (Résultats)

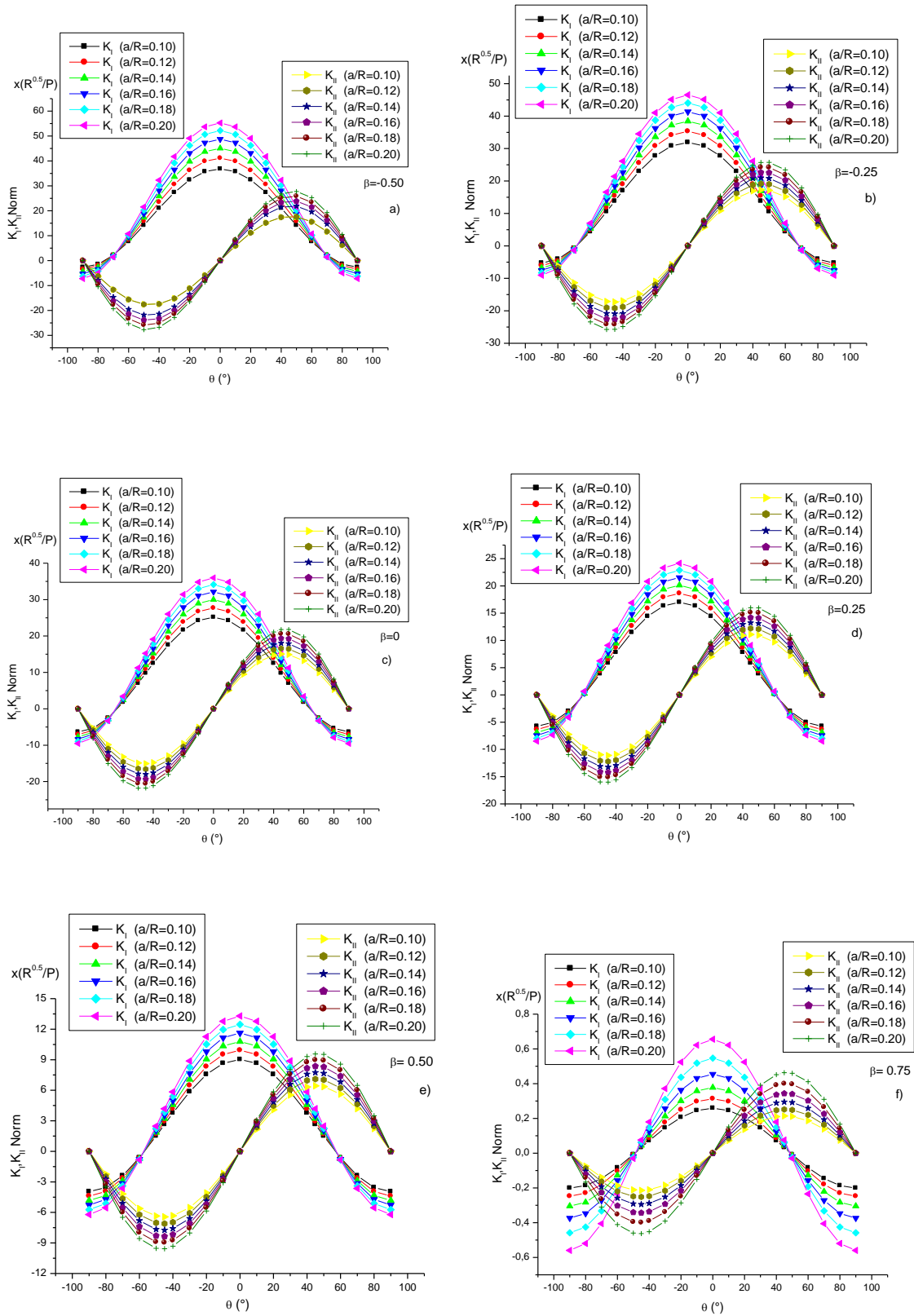


Figure 4. Variation de K_I et K_{II} en fonction des angles d'inclinaison avec β (-0.50, -0.25, 0, 0.25, 0.50 et 0.75).

Annexe (A.3) : Développement analytique

Le module élastique $E(x)$ dans notre exemple est géré par la fonction [RAV 03]:

$$E(x) = E_0 + (E_w - E_0) \left(\frac{x}{W}\right)^n \quad n=1,2,3,\dots \quad (1)$$

$$\sigma W = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{E_0}{E_a} \int_a^W \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \left(\frac{E_w - E_0}{W^n E_a}\right) \int_a^W \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right] \quad (2)$$

$$\sigma W = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\int_a^W \frac{E(x)}{E_a \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx \right] \quad (3)$$

On remplace l'éq.(1) dans (3) on obtient :

$$\sigma W = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{E_0}{E_a} \int_a^W \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx + \frac{E_w - E_0}{E_a W^n} \int_a^W \frac{x^n}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx \right] \quad (4)$$

Utilisation de l'intégrale par partie, nous permet de trouver, pour $n=1$ par exemple :

$$\int_a^W \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \quad (5)$$

Ceci implique que:

$$\sigma W = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{E_0}{E_a} (\sqrt{W^2 - a^2} + \frac{E_w - E_0}{E_a W^n} \left(\frac{1}{2} W \sqrt{W^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{W + \sqrt{W^2 - a^2}}{a} \right) \right) \right] \quad (6)$$

Si on suppose que $R = E_w/E_0$; $\alpha = a/W$, l'éq. (6) devient :

$$\sigma = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{E_0}{E_a} (\sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{E_w - E_0}{E_a} \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} - \alpha^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \right) \right) \right] \quad (7)$$

L'expression analytique du FIC K_I en fonction des termes correctifs peuvent déterminés à partir de la relation:

$$K_I = F \sigma \sqrt{\pi a} \quad (8)$$

F est un facteur de forme dépendant des rapports (a/W) et (E_w/E_0) .

Donc le coefficient F peut être exprimé comme suit :

$$F_{(n=1)}(\alpha, R) = \frac{[1 + (R-1)\alpha]}{\sqrt{1 - \alpha^2} + \left(\frac{R-1}{2}\right) [\sqrt{1 - \alpha^2} + \alpha^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}\right)]} \quad (9)$$

Pour $n=6$, nous avons l'équation (4) :

$$\sigma W = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{E_0}{E_a} \int_a^W \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx + \frac{E_w - E_0}{E_a W^n} \int_a^W \frac{x^n}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx \right] \quad (10)$$

Utilisation de l'intégrale par partie, nous permet de trouver (pour n=6) :

$$\int_a^w \frac{x^n}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx = x^n \sqrt{x^2 - a^2} - n \int_a^w x^{n-1} \sqrt{x^2 - a^2} dx \quad (11)$$

Ceci implique que :

$$\sigma W = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{E_0}{E_a} \int_a^w \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx + \frac{E_w - E_0}{E_a w^6} \left(\int_a^w \frac{x^7}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \right) \right] \quad (12)$$

$$\sigma W = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{E_0}{E_a} \sqrt{w^2 - a^2} + \frac{E_w - E_0}{E_a w^7} \left(a^6 \sqrt{w^2 - a^2} + a^4 \sqrt{w^2 - a^2}^3 + \frac{3}{5} a^2 \sqrt{w^2 - a^2}^5 \right) + \frac{1}{7} \sqrt{w^2 - a^2}^7 \right] \quad (13)$$

Si on suppose que $R = E_w/E_0$; $\alpha = a/W$, l'éq. (13) devient :

$$\sigma = \frac{K_a}{\sqrt{\pi a}} \left[\frac{E_0}{E_a} \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{E_w - E_0}{E_a} \left(\alpha^6 \sqrt{1 - \alpha^2} + \alpha^4 \sqrt{1 - \alpha^2}^3 + \frac{3}{5} \alpha^2 \sqrt{w^2 - a^2}^5 \right) + \frac{1}{7} \sqrt{1 - \alpha^2}^7 \right] \quad (14)$$

Donc le coefficient F peut être exprimé comme suit :

$$F_{(n=6)}(\alpha, R) = \frac{[1 + (R-1)\alpha^6]}{\sqrt{1 - \alpha^2} + \left(\frac{R-1}{7}\right) \left[\sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{6}{5} \alpha^2 \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{8}{5} \alpha^4 \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{16}{5} \alpha^6 \sqrt{1 - \alpha^2} \right]} \quad (15)$$

Annexe (A.4) : Comparaison des résultats du FIC normalisé

a/W	Calcul (n=1)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=2$		$E_w/E_0=3$		$E_w/E_0=4$		$E_w/E_0=5$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	0.766	/	0.637	/	0.56	/	0.509	/
	DCT	0.778	0.02	0.647	0.02	0.568	0.01	0.516	0.01
	Analy	0.795	0.04	0.687	0.07	0.624	0.10	0.582	0.13
0.305	CTSM	0.831	/	0.72	/	0.655	/	0.612	/
	DCT	0.844	0.02	0.731	0.02	0.664	0.01	0.62	0.01
	Analy	0.862	0.04	0.776	0.07	0.725	0.10	0.693	0.12
0.405	CTSM	0.915	/	0.821	/	0.767	/	0.732	/
	DCT	0.928	0.01	0.833	0.01	0.777	0.01	0.741	0.01
	Analy	0.937	0.02	0.869	0.06	0.83	0.08	0.806	0.09
0.505	CTSM	1.024	/	0.948	/	0.905	/	0.876	/
	DCT	1.039	0.01	0.961	0.01	0.916	0.01	0.888	0.01
	Analy	1.03	0.01	0.976	0.03	0.947	0.04	0.928	0.06
0.605	CTSM	1.176	/	1.117	/	1.084	/	1.064	/
	DCT	1.193	0.01	1.132	0.01	1.098	0.01	1.077	0.01
	Analy	1.152	0.02	1.111	0.01	1.088	0.00	1.074	0.01
0.705	CTSM	1.401	/	1.361	/	1.34	/	1.327	/
	DCT	1.422	0.01	1.378	0.01	1.356	0.01	1.342	0.01
	Analy	1.328	0.05	1.297	0.05	1.28	0.05	1.27	0.04
0.805	CTSM	1.781	/	1.761	/	1.752	/	1.748	/
	DCT	1.791	0.01	1.769	0.00	1.76	0.00	1.755	0.00
	Analy	1.625	0.10	1.602	0.10	1.591	0.10	1.584	0.10
0.905	CTSM	2.643	/	2.645	/	2.65	/	2.655	/
	DCT	2.658	0.01	2.656	0.00	2.658	0.00	2.66	0.00
	Analy	2.312	0.14	2.298	0.15	2.291	0.16	2.287	0.16

Tab 1. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=1, $E_w/E_0=2, 3, 4$ et 5)

a/W	Calcul (n=1)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=0.5$		$E_w/E_0=0.333$		$E_w/E_0=0.25$		$E_w/E_0=0.20$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	1.299	/	1.441	/	1.527	/	1.586	/
	DCT	1.323	0.02	1.468	0.02	1.556	0.02	1.617	0.02
	Analy	1.263	0.03	1.391	0.04	1.469	0.04	1.522	0.04
0.305	CTSM	1.313	/	1.447	/	1.532	/	1.59	/
	DCT	1.338	0.02	1.476	0.02	1.563	0.02	1.623	0.02
	Analy	1.262	0.04	1.38	0.05	1.453	0.05	1.505	0.06
0.405	CTSM	1.344	/	1.473	/	1.556	/	1.614	/
	DCT	1.371	0.02	1.505	0.02	1.59	0.02	1.65	0.02
	Analy	1.282	0.05	1.391	0.06	1.463	0.06	1.513	0.07
0.505	CTSM	1.401	/	1.524	/	1.605	/	1.664	/
	DCT	1.43	0.02	1.559	0.02	1.644	0.02	1.706	0.02
	Analy	1.325	0.06	1.428	0.07	1.498	0.07	1.549	0.07
0.605	CTSM	1.495	/	1.61	/	1.69	/	1.75	/
	DCT	1.528	0.02	1.651	0.02	1.736	0.03	1.8	0.03
	Analy	1.401	0.07	1.499	0.07	1.568	0.08	1.62	0.08
0.705	CTSM	1.653	/	1.757	/	1.834	/	1.894	/
	DCT	1.694	0.02	1.807	0.03	1.892	0.03	1.957	0.03
	Analy	1.534	0.08	1.625	0.08	1.694	0.08	1.747	0.08
0.805	CTSM	1.951	/	2.038	/	2.108	/	2.166	/
	DCT	1.974	0.01	2.067	0.01	2.143	0.02	2.206	0.02
	Analy	1.787	0.09	1.861	0.10	1.933	0.09	1.988	0.09
0.905	CTSM	2.7	/	2.751	/	2.8	/	2.846	/
	DCT	2.74	0.01	2.803	0.02	2.862	0.02	2.917	0.02
	Analy	2.422	0.11	2.485	0.11	2.542	0.10	2.593	0.10

Tab 2. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec $n=1$, $E_w/E_0=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

a/W	Calcul (n=2)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=2$		$E_w/E_0=3$		$E_w/E_0=4$		$E_w/E_0=5$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	0.778	/	0.63	/	0.531	/	0.461	/
	DCT	0.791	0.02	0.64	0.02	0.539	0.01	0.467	0.01
	Analy	0.782	0.01	0.642	0.02	0.552	0.04	0.488	0.06
0.305	CTSM	0.812	/	0.669	/	0.575	/	0.509	/
	DCT	0.825	0.02	0.678	0.01	0.583	0.01	0.515	0.01
	Analy	0.8225	0.01	0.695	0.04	0.614	0.06	0.558	0.09
0.405	CTSM	0.871	/	0.736	/	0.651	/	0.591	/
	DCT	0.883	0.01	0.745	0.01	0.658	0.01	0.597	0.01
	Analy	0.882	0.01	0.77	0.04	0.701	0.07	0.653	0.09
0.505	CTSM	0.963	/	0.841	/	0.765	/	0.713	/
	DCT	0.975	0.01	0.85	0.01	0.773	0.01	0.719	0.01
	Analy	0.967	0.00	0.871	0.03	0.814	0.06	0.776	0.08
0.605	CTSM	1.104	/	1	/	0.937	/	0.894	/
	DCT	1.118	0.01	1.01	0.01	0.945	0.01	0.901	0.01
	Analy	1.087	0.02	1.009	0.01	0.964	0.03	0.935	0.04
0.705	CTSM	1.328	/	1.248	/	1.202	/	1.171	/
	DCT	1.344	0.01	1.259	0.01	1.21	0.01	1.178	0.01
	Analy	1.268	0.05	1.207	0.03	1.173	0.02	1.151	0.02
0.805	CTSM	1.719	/	1.67	/	1.645	/	1.631	/
	DCT	1.726	0.00	1.675	0.00	1.648	0.00	1.632	0.00
	Analy	1.573	0.09	1.529	0.09	1.503	0.09	1.49	0.09
0.905	CTSM	2.612	/	2.608	/	2.61	/	2.615	/
	DCT	2.621	0.00	2.609	0.00	2.607	0.00	2.609	0.00
	Analy	2.275	0.15	2.247	0.16	2.233	0.17	2.225	0.18

Tab 3. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec $n=2$, $E_w/E_0=2, 3, 4$ et 5)

a/W	Calcul (n=2)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=0.5$		$E_w/E_0=0.333$		$E_w/E_0=0.25$		$E_w/E_0=0.20$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	1.256	/	1.326	/	1.377	/	1.411	/
	DCT	1.234	0.02	1.35	0.02	1.402	0.02	1.436	0.02
	Analy	1.22	0.03	1.308	0.01	1.357	0.01	1.388	0.02
0.305	CTSM	1.3	/	1.374	/	1.43	/	1.466	/
	DCT	1.277	0.02	1.4	0.02	1.457	0.02	1.494	0.02
	Analy	1.247	0.04	1.337	0.03	1.388	0.03	1.421	0.03
0.405	CTSM	1.362	/	1.44	/	1.5	/	1.539	/
	DCT	1.336	0.02	1.469	0.02	1.531	0.02	1.572	0.02
	Analy	1.289	0.06	1.382	0.04	1.439	0.04	1.471	0.05
0.505	CTSM	1.448	/	1.528	/	1.594	/	1.638	/
	DCT	1.418	0.02	1.563	0.02	1.631	0.02	1.676	0.02
	Analy	1.35	0.07	1.447	0.06	1.505	0.06	1.543	0.06
0.605	CTSM	1.57	/	1.651	/	1.723	/	1.772	/
	DCT	1.534	0.02	1.692	0.02	1.768	0.03	1.82	0.03
	Analy	1.442	0.09	1.543	0.07	1.607	0.07	1.65	0.07
0.705	CTSM	1.7551	/	1.83	/	1.908	/	1.964	/
	DCT	1.71	0.03	1.885	0.03	1.969	0.03	2.03	0.03
	Analy	1.587	0.11	1.693	0.08	1.763	0.08	1.813	0.10
0.805	CTSM	2.045	/	2.136	/	2.221	/	2.285	/
	DCT	2.018	0.01	2.171	0.02	2.262	0.02	2.33	0.02
	Analy	1.845	0.11	1.955	0.09	2.033	0.09	2.093	0.09
0.905	CTSM	2.803	/	2.847	/	2.926	/	2.992	/
	DCT	2.756	0.02	2.913	0.02	3.005	0.03	3.083	0.03
	Analy	2.477	0.13	2.579	0.10	2.663	0.10	2.733	0.09

Tab 4. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec $n=2$, $E_w/E_0=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

a/W	Calcul (n=3)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=2$		$E_w/E_0=3$		$E_w/E_0=4$		$E_w/E_0=5$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	0.822	/	0.687	/	0.591	/	0.518	/
	DCT	0.836	0.02	0.698	0.02	0.6	0.02	0.526	0.02
	Analy	0.813	0.01	0.677	0.01	0.581	0.02	0.51	0.02
0.305	CTSM	0.842	/	0.701	/	0.603	/	0.53	/
	DCT	0.855	0.02	0.711	0.01	0.611	0.01	0.537	0.01
	Analy	0.836	0.01	0.701	0.00	0.608	0.01	0.54	0.02
0.405	CTSM	0.881	/	0.738	/	0.64	/	0.569	/
	DCT	0.894	0.01	0.747	0.01	0.647	0.01	0.575	0.01
	Analy	0.877	0.00	0.747	0.01	0.66	0.03	0.598	0.05
0.505	CTSM	0.952	/	0.811	/	0.718	/	0.652	/
	DCT	0.965	0.01	0.82	0.01	0.724	0.01	0.656	0.01
	Analy	0.946	0.01	0.825	0.02	0.747	0.04	0.693	0.06
0.605	CTSM	1.074	/	0.942	/	0.859	/	0.8	/
	DCT	1.086	0.01	0.95	0.01	0.863	0.00	0.803	0.00
	Analy	1.053	0.02	0.947	0.01	0.882	0.03	0.838	0.05
0.705	CTSM	1.283	/	1.172	/	1.104	/	1.057	/
	DCT	1.296	0.01	1.179	0.01	1.107	0.00	1.059	0.00
	Analy	1.226	0.05	1.139	0.03	1.088	0.01	1.055	0.00
0.805	CTSM	1.667	/	1.591	/	1.548	/	1.521	/
	DCT	1.673	0.00	1.593	0.00	1.548	0.00	1.519	0.00
	Analy	1.532	0.09	1.466	0.09	1.43	0.08	1.407	0.08
0.905	CTSM	2.577	/	2.559	/	2.556	/	2.558	/
	DCT	2.581	0.00	2.554	0.00	2.545	0.00	2.543	0.01
	Analy	2.241	0.15	2.2	0.16	2.179	0.17	2.165	0.18

Tab 5. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=3, $E_w/E_0=2, 3, 4$ et 5)

a/W	Calcul (n=3)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=0.5$		$E_w/E_0=0.333$		$E_w/E_0=0.25$		$E_w/E_0=0.20$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	1.181	/	1.244	/	1.278	/	1.3	/
	DCT	1.201	0.02	1.266	0.02	1.301	0.02	1.32	0.02
	Analy	1.174	0.01	1.236	0.01	1.269	0.01	1.29	0.01
0.305	CTSM	1.23	/	1.301	/	1.339	/	1.364	/
	DCT	1.252	0.02	1.324	1.00	1.364	0.02	1.389	0.02
	Analy	1.211	0.02	1.278	0.02	1.314	0.02	1.337	0.02
0.405	CTSM	1.301	/	1.381	/	1.425	/	1.453	/
	DCT	1.325	0.02	1.407	0.02	1.452	0.02	1.481	0.02
	Analy	1.265	0.03	1.338	0.03	1.379	0.03	1.405	0.03
0.505	CTSM	1.398	/	1.489	/	1.54	/	1.574	/
	DCT	1.426	0.02	1.52	0.02	1.574	0.02	1.608	0.02
	Analy	1.34	0.04	1.421	0.05	1.467	0.05	1.497	0.05
0.605	CTSM	1.533	/	1.637	/	1.697	/	1.737	/
	DCT	1.567	0.02	1.676	0.02	1.739	0.02	1.781	0.02
	Analy	1.446	0.06	1.538	0.06	1.591	0.07	1.626	0.07
0.705	CTSM	1.729	/	1.846	/	1.917	/	1.966	/
	DCT	1.774	0.03	1.899	0.03	1.976	0.03	2.028	0.03
	Analy	1.606	0.08	1.71	0.08	1.774	0.08	1.817	0.08
0.805	CTSM	2.058	/	2.186	/	2.271	/	2.332	/
	DCT	2.086	0.01	2.222	0.02	2.312	0.02	2.377	0.02
	Analy	1.879	0.10	1.997	0.09	2.075	0.09	2.132	0.09
0.905	CTSM	2.803	/	2.921	/	3.014	/	3.089	/
	DCT	2.856	0.02	2.995	0.02	3.102	0.03	3.189	0.03
	Analy	2.519	0.11	2.645	0.10	2.742	0.10	2.819	0.10

Tab 6. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=3, $E_w/E_0=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

a/W	Calcul (n=4)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=2$		$E_w/E_0=3$		$E_w/E_0=4$		$E_w/E_0=5$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	0.857	/	0.739	/	0.651	/	0.582	/
	DCT	0.872	0.02	0.751	0.02	0.662	0.02	0.592	0.02
	Analy	0.844	0.02	0.719	0.03	0.627	0.04	0.556	0.05
0.305	CTSM	0.874	/	0.746	/	0.653	/	0.581	/
	DCT	0.889	0.02	0.758	0.02	0.663	0.02	0.589	0.01
	Analy	0.851	0.03	0.746	0.00	0.638	0.02	0.566	0.03
0.405	CTSM	0.906	/	0.768	/	0.669	/	0.595	/
	DCT	0.92	0.02	0.779	0.01	0.678	0.01	0.602	0.01
	Analy	0.892	0.02	0.76	0.01	0.666	0.00	0.596	0.00
0.505	CTSM	0.964	/	0.818	/	0.718	/	0.644	/
	DCT	0.977	0.01	0.828	0.01	0.724	0.01	0.648	0.01
	Analy	0.947	0.02	0.815	0.00	0.725	0.01	0.66	0.02
0.605	CTSM	1.067	/	0.922	/	0.825	/	0.755	/
	DCT	1.08	0.01	0.929	0.01	0.828	0.00	0.756	0.00
	Analy	1.04	0.03	0.916	0.01	0.835	0.01	0.779	0.03
0.705	CTSM	1.257	/	1.124	/	1.039	/	0.98	/
	DCT	1.27	0.01	1.129	0.00	1.04	0.00	0.978	0.00
	Analy	1.2	0.05	1.092	0.03	1.026	0.01	0.981	0.00
0.805	CTSM	1.627	/	1.526	/	1.466	/	1.426	/
	DCT	1.632	0.00	1.525	0.00	1.463	0.00	1.422	0.00
	Analy	1.498	0.09	1.413	0.08	1.365	0.07	1.333	0.07
0.905	CTSM	2.541	/	2.508	/	2.496	/	2.493	/
	DCT	2.541	0.00	2.497	0.00	2.479	0.01	2.471	0.01
	Analy	2.211	0.15	2.156	0.16	2.127	0.17	2.109	0.18

Tab 7. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=4, $E_w/E_0=2, 3, 4$ et 5)

a/W	Calcul (n=4)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=0.5$		$E_w/E_0=0.333$		$E_w/E_0=0.25$		$E_w/E_0=0.20$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	1.146	/	1.194	/	1.219	/	1.235	/
	DCT	1.166	0.02	1.214	0.02	1.24	0.02	1.256	0.02
	Analy	1.141	0.00	1.188	0.01	1.213	0.00	1.228	0.01
0.305	CTSM	1.195	/	1.249	/	1.277	/	1.295	/
	DCT	1.216	0.02	1.271	0.02	1.3	0.02	1.318	0.02
	Analy	1.181	0.01	1.232	0.01	1.26	0.01	1.277	0.01
0.405	CTSM	1.268	/	1.33	/	1.364	/	1.385	/
	DCT	1.291	0.02	1.355	0.02	1.39	0.02	1.411	0.02
	Analy	1.238	0.02	1.297	0.03	1.328	0.03	1.348	0.03
0.505	CTSM	1.372	/	1.446	/	1.487	/	1.513	/
	DCT	1.398	0.02	1.475	0.02	1.517	0.02	1.544	0.02
	Analy	1.32	0.04	1.388	0.04	1.425	0.04	1.449	0.04
0.605	CTSM	1.518	/	1.608	/	1.658	/	1.691	/
	DCT	1.55	0.02	1.644	0.02	1.697	0.02	1.731	0.02
	Analy	1.437	0.06	1.517	0.06	1.562	0.06	1.591	0.06
0.705	CTSM	1.731	/	1.839	/	1.902	/	1.944	/
	DCT	1.774	0.02	1.889	0.03	1.957	0.03	2.002	0.03
	Analy	1.609	0.08	1.705	0.08	1.762	0.08	1.799	0.08
0.805	CTSM	2.079	/	2.209	/	2.29	/	2.346	/
	DCT	2.108	0.01	2.244	0.02	2.33	0.02	2.39	0.02
	Analy	1.898	0.10	2.015	0.10	2.092	0.09	2.141	0.10
0.905	CTSM	2.841	/	2.977	/	3.077	/	3.154	/
	DCT	2.898	0.02	3.054	0.03	3.169	0.03	3.258	0.03
	Analy	2.553	0.11	2.693	0.11	2.795	0.10	2.873	0.10

Tab 8. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=4, $E_w/E_0=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

a/W	Calcul (n=5)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=2$		$E_w/E_0=3$		$E_w/E_0=4$		$E_w/E_0=5$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	0.883	/	0.779	/	0.699	/	0.635	/
	DCT	0.899	0.02	0.792	0.02	0.71	0.02	0.646	0.02
	Analy	0.869	0.02	0.756	0.03	0.669	0.04	0.6	0.06
0.305	CTSM	0.902	/	0.787	/	0.7	/	0.632	/
	DCT	0.917	0.02	0.8	0.02	0.712	0.02	0.642	0.02
	Analy	0.885	0.02	0.765	0.03	0.675	0.04	0.603	0.05
0.405	CTSM	0.932	/	0.804	/	0.709	/	0.636	/
	DCT	0.947	0.02	0.816	0.01	0.719	0.01	0.644	0.01
	Analy	0.912	0.02	0.785	0.02	0.69	0.03	0.618	0.03
0.505	CTSM	0.983	/	0.841	/	0.739	/	0.662	/
	DCT	0.997	0.01	0.852	0.01	0.747	0.01	0.668	0.01
	Analy	0.958	0.03	0.825	0.02	0.729	0.01	0.658	0.01
0.605	CTSM	1.073	/	0.923	/	0.818	/	0.741	/
	DCT	1.088	0.01	0.931	0.01	823	1.00	0.743	0.00
	Analy	1.039	0.03	0.905	0.02	0.814	0.00	0.748	0.01
0.705	CTSM	1.246	/	1.097	/	1	/	0.93	/
	DCT	1.259	0.01	1.102	0.00	1	0.00	0.927	0.00
	Analy	1.186	0.05	1.061	0.03	0.982	0.02	926	1.00
0.805	CTSM	1.598	/	1.474	/	1.399	/	1.348	/
	DCT	1.601	0.00	1.472	0.00	1.394	0.00	1.341	0.01
	Analy	1.473	0.08	1.37	0.08	1.309	0.07	1.269	0.06
0.905	CTSM	2.507	/	2.456	/	2.434	/	2.424	/
	DCT	2.504	0.00	2.442	0.01	2.412	0.01	2.397	0.01
	Analy	2.183	0.15	2.115	0.16	2.078	0.17	2.055	0.18

Tab 9. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=5, $E_w/E_0=2, 3, 4$ et 5)

a/W	Calcul (n=5)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=0.5$		$E_w/E_0=0.333$		$E_w/E_0=0.25$		$E_w/E_0=0.20$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	1.124	/	1.161	/	1.181	/	1.193	/
	DCT	1.144	0.02	1.182	0.02	1.202	0.02	1.214	0.02
	Analy	1.12	0.00	1.157	0.00	1.176	0.00	1.188	0.00
0.305	CTSM	1.171	/	1.213	/	1.235	/	1.249	/
	DCT	1.191	0.02	1.234	0.02	1.257	0.02	1.271	0.02
	Analy	1.158	0.01	1.199	0.01	1.221	0.01	1.234	0.01
0.405	CTSM	1.242	/	1.292	/	1.319	/	1.336	/
	DCT	1.264	0.02	1.316	0.02	1.343	0.02	1.36	0.02
	Analy	1.216	0.02	1.264	0.02	1.289	0.02	1.305	0.02
0.505	CTSM	1.347	/	1.409	/	1.442	/	1.463	/
	DCT	1.372	0.02	1.436	0.02	1.47	0.02	1.491	0.02
	Analy	1.3	0.04	1.357	0.04	1.388	0.04	1.407	0.04
0.605	CTSM	1.498	/	1.576	/	1.619	/	1.646	/
	DCT	1.529	0.02	1.61	0.02	1.654	0.02	1.683	0.02
	Analy	1.422	0.05	1.492	0.06	1.53	0.06	1.551	0.06
0.705	CTSM	1.723	/	1.822	/	1.877	/	1.914	/
	DCT	1.764	0.02	1.869	0.03	1.928	0.03	1.967	0.03
	Analy	1.604	0.07	1.692	0.08	1.742	0.08	1.774	0.08
0.805	CTSM	2.09	/	2.216	/	2.292	/	2.344	/
	DCT	2.118	0.01	2.25	0.02	2.331	0.02	2.385	0.02
	Analy	1.906	0.10	2.021	0.10	2.09	0.10	2.137	0.10
0.905	CTSM	2.873	/	3.018	/	3.121	/	3.198	/
	DCT	2.931	0.02	3.098	0.03	3.216	0.03	3.303	0.03
	Analy	1.906	0.51	2.727	0.11	3.83	0.19	2.907	0.10

Tab 10. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=5, $E_w/E_0=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

a/W	Calcul (n=6)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=2$		$E_w/E_0=3$		$E_w/E_0=4$		$E_w/E_0=5$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	0.902	/	0.809	/	0.736	/	0.676	/
	DCT	0.918	0.02	0.8231	0.02	0.748	0.02	0.688	0.02
	Analy	0.888	0.02	0.785	0.03	0.704	0.05	0.638	0.06
0.305	CTSM	0.923	/	0.82	/	0.74	/	0.676	/
	DCT	0.938	0.02	0.833	0.02	0.752	0.02	0.687	0.02
	Analy	0.905	0.02	0.795	0.03	0.709	0.04	0.64	0.06
0.405	CTSM	0.954	/	0.837	/	0.748	/	0.677	/
	DCT	0.97	0.02	0.85	0.02	0.759	0.01	0.687	0.01
	Analy	0.931	0.02	0.812	0.03	0.72	0.04	0.648	0.04
0.505	CTSM	1.003	/	0.869	/	0.769	/	0.692	/
	DCT	1.019	0.02	0.881	0.01	0.779	0.01	0.7	0.01
	Analy	0.974	0.03	0.844	0.03	0.747	0.56	0.672	0.03
0.605	CTSM	1.086	/	0.936	/	0.828	/	0.748	/
	DCT	1.102	0.01	0.946	0.01	0.835	0.01	0.751	0.00
	Analy	1.046	0.04	0.908	0.03	0.811	0.02	0.738	0.01
0.705	CTSM	1.244	/	1.086	/	0.98	/	0.902	/
	DCT	1.258	0.01	1.092	0.01	0.98	0.00	0.899	0.00
	Analy	1.18	0.05	1.044	0.04	0.954	0.03	0.889	0.01
0.805	CTSM	1.576	/	1.435	/	1.346	/	1.285	/
	DCT	1.58	0.00	1.432	0.00	1.34	0.00	1.277	0.01
	Analy	1.454	0.08	1.335	0.07	1.263	0.07	1.215	0.06
0.905	CTSM	2.474	/	2.406	/	2.374	/	2.356	/
	DCT	2.47	0.00	2.389	0.01	2.348	0.01	2.325	0.01
	Analy	2.158	0.15	2.076	0.16	2.032	0.17	2.003	0.18

Tab 11. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=6, $E_w/E_0=2, 3, 4$ et 5)

a/W	Calcul (n=6)	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$							
		$E_w/E_0=0.5$		$E_w/E_0=0.333$		$E_w/E_0=0.25$		$E_w/E_0=0.20$	
		F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)	F	Erreur (%)
0.205	CTSM	1.109	/	1.14	/	1.156	/	1.166	/
	DCT	1.128	0.02	1.159	0.02	1.176	0.02	1.186	0.02
	Analy	1.104	0.00	1.135	0.00	1.151	0.00	1.161	0.00
0.305	CTSM	1.153	/	1.188	/	1.206	/	1.218	/
	DCT	1.173	0.02	1.209	0.02	1.227	0.02	1.239	0.02
	Analy	1.141	0.01	1.175	0.01	1.193	0.01	1.204	0.01
0.405	CTSM	1.223	/	1.264	/	1.286	/	1.3	/
	DCT	1.244	0.02	1.287	0.02	1.309	0.02	1.323	0.02
	Analy	1.198	0.02	1.238	0.02	1.259	0.02	1.272	0.02
0.505	CTSM	1.326	/	1.378	/	1.406	/	1.423	/
	DCT	1.351	0.02	1.404	0.02	1.432	0.02	1.45	0.02
	Analy	1.283	0.03	1.331	0.04	1.356	0.04	1.372	0.04
0.605	CTSM	1.479	/	1.547	/	1.583	/	1.606	/
	DCT	1.509	0.02	1.579	0.02	1.616	0.02	1.64	0.02
	Analy	1.407	0.05	1.468	0.05	1.5	0.06	1.521	0.06
0.705	CTSM	1.711	/	1.8	/	1.85	/	1.882	/
	DCT	1.75	0.02	1.845	0.02	1.897	0.02	1.931	0.38
	Analy	1.595	0.07	1.675	0.07	1.719	0.08	1.747	1.00
0.805	CTSM	2.093	/	2.214	/	2.285	/	2.332	/
	DCT	2.12	0.01	2.247	0.01	2.321	0.02	2.371	0.02
	Analy	1.909	0.10	2.018	0.10	2.082	0.10	2.125	0.10
0.905	CTSM	2.897	/	3.05	/	3.153	/	3.228	/
	DCT	2.957	0.02	3.13	0.03	3.247	0.03	3.332	0.03
	Analy	2.598	0.12	2.751	0.11	2854	1.00	2.929	0.10

Tab 12. Comparaison des résultats obtenus par la méthode CTSM
(avec n=6, $E_w/E_0=0.5, 0.333, 0.25$ et 0.2)

Annexe (A.5) : Théorème de divergence [FAR 13]

Le théorème de divergence, également connu sous le nom de théorème de *Gauss-Ostrogradsky*, peut être énoncé comme suit :

$$\int_V (\nabla \cdot F) dV = \int_{\partial V} F \cdot \hat{n} da \quad (1)$$

Où, V est une région de l'espace et ∂V est la limite de V . Ce qui signifie qu'une intégrale de volume de divergence de F sur V se transforme en une intégrale de surface de F sur ∂V .

Un cas particulier de ce théorème serait de considérer A comme une région sur le plan et Γ comme la frontière de la région et serait une ligne. Donc:

$$\int_A \nabla \cdot F dA = \oint_{\Gamma} F \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (2)$$

Il peut s'écrire comme :

$$\int_A \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (F_x n_x + F_y n_y) d\Gamma \quad (3)$$

En notation indicelle :

$$\int_A \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (F_i n_i) d\Gamma \quad (A.4)$$