

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES



FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL  
& TRAVAUX PUBLICS  
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



**THESE**

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures & matériaux**

Soutenue par

**Mr. SAHOUANE Abdelkader**

Sujet de thèse :

---

---

**ETUDE DE LA REPONSE MECANIQUE DES STRUCTURES EN  
FGM AVEC LA CONSIDERATION DE L'EFFET DU  
CISAILLEMENT TRANSVERSE**

---

---

Soutenu le : -- / -- / 2022, devant le Jury composé de :

TOUNSI Abdelouahed	Professeur UDL SBA	Président
HADJI Lazreg	Professeur UIK de Tiaret	Directeur de la thèse
BOURADA Mohamed	Professeur UDL SBA	Co-Directeur de la thèse
SAIDI Hayat	MCA UDL SBA	Examinatrice
AIT AMAR MEZIANE Mohamed	Professeur UIK de Tiaret	Examinateur
BOURADA Fouad	MCA U de Tissemsilt	Examinateur

Année universitaire : 2021-2022

---

# Remerciement

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur **HADJI Lazreg**, et Professeur **BOURADA Mohamed**.

Avant tous, je remercie **ALLAH** pour le succès dans la réalisation de ce travail.

En suite je présente mes sincère remerciement a Monsieur **HADJI Lazreg** qu'il ma accompagné de premier pas du choix du sujet de ce travail jusqu'a la fin de rédaction de cet thèse ainsi que Professeur **BOURADA Mohamed** de l'université Djillali Liabes de SIDI BELABBES. Je le remercie vivement pour leur soutien en tant que Co-rapporteur.

Ainsi j'exprime mes remerciements au Monsieur **président jury**, pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je voudrais remercier membres jury pour avoir accepté de participer à ce jury chacun par son nom;

J'adresse aussi mes remerciements réitérés à tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail et chaque amis à m'encouragé au longue mon cycle de formation.

---

## Dédicace

Je Dédie ce modeste travail :

A ma mère et ma seule sœur "Khaira",

A ma femme "Aicha",

A mes petites filles "Ferdous , Kaouther et Aya",

A mes frères et ces familles sans exception.

A mes chers amis.

Et enfin à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

---

# RÉSUMÉ

Ce travail présente une analyse de vibration libre de poutres à gradation évalués en utilisant une théorie originale de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDBT). Cette théorie n'utilise que trois inconnues, mais elle satisfait les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés mécaniques de la poutre sont supposées varier de manière continue dans le sens de l'épaisseur par une simple distribution de loi de puissance en termes de fractions volumiques des constituants. Afin d'étudier la réponse de vibration libre, les équations de mouvement pour l'analyse dynamique sont déterminées via le principe de Hamilton. La technique de la solution Navier est adoptée pour dériver des solutions analytiques pour les poutres simplement appuyées. L'exactitude et l'efficacité du modèle proposé sont vérifiées par comparaison avec des recherches antérieures.

**Mots-clés:** vibrations libres; poutres à gradation évalués; le principe de Hamilton ; solution Navier

---

## ABSTRACT

This work presents a free vibration analysis of functionally graded beams by employing an original high order shear deformation theory (HSDBT). This theory use only three unknowns, but it satisfies the stress free boundary conditions on the top and bottom surfaces of the beam without requiring any shear correction factors. The mechanical properties of the beam are assumed to vary continuously in the thickness direction by a simple power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. In order to investigate the free vibration response, the equations of motion for the dynamic analysis are determined via the Hamilton's principle. The Navier solution technique is adopted to derive analytical solutions for simply supported beams. The accuracy and effectiveness of proposed model are verified by comparison with previous research.

**Keywords:** free vibration; functionally graded beams; Hamilton's principle; Navier solution.

---

## ملخص

هذا العمل عبارة عن تحليل الإهتزاز الحر للعوارض المتدرجة وظيفيًا من خلال استخدام نظرية تشوه القص بدرجة عليا. تستخدم هذه النظرية ثلاثة مجاهيل فقط ، ولكنها تلبّي شروط انعدام إجهادات القص على مستوى الجهة العليا والسفلى للعوارض دون الحاجة إلى أي عوامل تصحيح القص. يُفترض أن الخصائص الميكانيكية للعوارض متدرجة باستمرار في اتجاه السُمك وفق قانون أسّي بسيط من حيث كسور حجم المكونات. من أجل دراسة الإستجابة للإهتزاز الحر ، يتم تحديد معادلات الحركة للتحليل الديناميكي من خلال مبدأ هاملتون. و تم اعتماد تقنية حل نافي لاشتقاق حلول تحليلية للعوارض ذات المساند البسيطة. يتم التحقق من دقة وفعالية النموذج المقترح من خلال المقارنة مع الأبحاث السابقة.

**الكلمات المفتاحية :** الاهتزاز الحر. عوارض متدرجة وظيفيا مبدأ هاملتون ؛ حل نافي.

---

## Liste des Figures et des Tableaux

<b>Figure I.1.</b> Orientation d'un matériau FGM .....	3
<b>Figure I.2.</b> Représentation d'un matériau FGM.....	3
<b>Figure I.3:</b> Dépôt de vapeur chimique (CVD).[Ansari, 2010] .....	5
<b>Figure I.4:</b> Dépôt de vapeur physique (PVD).[Seol, 2012] .....	6
<b>Figure I.5:</b> Dépôt de projection plasma (PSF).[Malandrino, 2009] .....	6
<b>Figure I.6:</b> Métallurgie des poudres (PM).[Popoola, 2016] .....	6
<b>Figure I.7:</b> Méthode de coulée centrifuge.[Watanabe, 2011] .....	7
<b>Figure I.8:</b> Méthode de solide forme libre (SFF).[Chen, 2019] .....	8
<b>Figure I.9:</b> Frittage/Fusion sélectif au laser (SLS/SLM).[Leu, 2012] .....	9
<b>Figure I.10:</b> Modèles analytiques pour une couche en FGM.....	9
<b>Figure I.11:</b> Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (P-FGM). .....	12
<b>Figure I.12:</b> Variation du module de Young à travers l'épaisseur (E-FGM).....	13
<b>Figure I.13:</b> Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM).....	13
<b>Figure II.1:</b> Géométrie de poutre. ....	18
<b>Figure II.2:</b> Cinématique de poutre d'Euler-Bernoulli.....	21
<b>Figure II.3:</b> Cinématique de poutre Timoshenko.....	22
<b>Figure II.4:</b> Cinématique de poutre d'ordre élevé. ....	24
<b>Figure II.5:</b> Variation de la fonction de forme.....	27
<b>Figure II.6:</b> Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'z$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	27
<b>Figure IV.1:</b> Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM. ....	3
<b>Figure V.1:</b> Variation des trois premières fréquences non dimensionnelles.....	60
<b>Figure V.2:</b> Variation des paramètres de fréquences avec le rapport .....	62
<b>Figure V.3:</b> Variation des paramètres de fréquences avec le rapport .....	62
<b>Tableau IV.1 :</b> Propriétés des matériaux utilisés dans la poutre FGM.....	5
<b>Tableau (V.1):</b> Fréquence fondamentale non dimensionnelle.....	61
<b>Tableau (V.2):</b> Trois premières fréquences non dimensionnelles.....	63

---

***INTRODUCTION***  
***GENERALE***

---

---

# Introduction générale

Les matériaux à gradient évalué (FGM) "Functionally graded materials (FGMs)" sont des nouvelle classe de matériaux composites avec des propriétés graduées et qui sont de nouveaux concepts dans la conception structurelle des matériaux et ont de nombreuses applications dans l'ingénierie aérospatiale, l'aéronautique, l'industrie automobile, le nucléaire et du génie civil. Les FGM avec la variation continue des microstructures et des propriétés devraient avoir la réduction des contraintes résiduelles et thermiques. Les FGM peuvent également être conçus pour prendre une meilleure force de liaison adhésive entre les métaux et les céramiques. Les structures en métal-céramique multifonctionnelles conviennent aux applications où la ténacité et la dureté sont deux exigences essentielles pour les applications d'ingénierie et de recherche scientifique.

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Par conséquent, les études consacrées à la compréhension du comportement dynamique des poutres et plaques FGM ont reçu de plus en plus d'attention ces dernières années.

Cette thèse explorera l'analyse des vibrations libres des poutres FGM est étudiée. La théorie proposée n'a que trois inconnues et trois équations directrices, mais elle satisfait les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés mécaniques des plaques sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur selon une loi de distribution de puissance en fonction des fractions volumiques des constituants. Les équations de mouvement du poutre intéressantes pour l'analyse des vibrations libres sont déterminées par le principe de Hamilton. Ces équations sont ensuite résolues en utilisant la procédure de Navier. L'exactitude des résultats de cette théorie est vérifiée par comparaison avec d'autres HSDBT disponibles dans la littérature.

Le travail effectué est entamé par une définition des matériaux à gradient évalués (FGM) avec un aperçu sur l'histoire de ces matériaux avancés ainsi que ces principales procédures de fabrication tout avec une visualisation de leurs applications dans des différents domaines.

En suite en a présenté brièvement les théories des poutres exploités pour la modélisation des structures (FGM) ainsi que ces hypothèses fondamentales.

---

Le troisième chapitre est un aperçu sur les travaux ultérieurs effectués pour divers structures (FGM) tel que les poutres , les plaques, les coques et d'autres structures FGM.

Le chapitre suivant c'est une explication de la nouvelle théorie proposée pour l'analyse des vibrations libres des poutres FGM d'où on a déterminé les lois de variation des matériaux et on a décrit les équations du mouvement avec des solutions analytiques.

Enfin le dernier chapitre comporte une analyse et discussion sur les résultats obtenus à travers des divers exemples numériques présenté pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction de la flexion et de la vibration libre des poutres FGM simplement appuyées.

Le travail effectué est clôturé par une conclusion générale et perspectives.

---

# ***CHAPITRE I :***

***Définition des matériaux a gradient  
évalués 'FGM' et de leurs applications***

---

## I.1 Introduction:

Chaque jour, le développement des matériaux est continu pour enrichir et améliorer les propriétés des matériaux, les utilisations limitées des métaux purs et les propriétés de ces métaux ne peuvent contrôler pour atteindre les propriétés requises être adaptées aux nouvelles technologies. Les matériaux se sont développés du fer aux métaux purs aux matériaux composites largement utilisés aujourd'hui. Le développement des matériaux revient à l'âge du bronze jusqu'à présent et il se développera continuellement à l'avenir. D'autre part, les alliages sont considérés comme plus résistants que les métaux purs et polyvalents en raison de leur capacité à produire les propriétés requises. Des nombreuses recherches sont effectués au but de mélanger différents matériaux métalliques et non métalliques pour développer leur résistance, leurs propriétés physiques et chimiques et produire des matériaux de faction multiples. [Shahistha, 2014]

## I.2 Historique des matériaux FGM:

En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Principalement pour être à même de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de la chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps protéger l'intérieur contre une surchauffe ment.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. [KOIZUMI, 1993]

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche

superficielle du matériau.

- Ténacité du matériau coté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau. [ABDI, 1997]

L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute température) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans l'étape suivante (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de formes plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

### **I.3 Définition et le concept d'un matériau FGM :**

Les matériaux composites stratifiés offrent la flexibilité de conception nécessaire pour obtenir la rigidité et la résistance souhaitables grâce au choix du schéma de stratification, la constitution anisotrope des structures composites stratifiées entraîne souvent des concentrations de contraintes à proximité du matériau et des discontinuités géométriques pouvant entraîner des dommages sous forme de délaminage de matrice, fissuration et séparation de la liaison adhésive.

[Reddy, 2004]

Les FGM (**F**unctionally **G**raded **M**aterials) atténuent ces problèmes car elles consistent en une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre. La nature continue de la variation diminue les concentrations de contraintes qui deviennent gênantes dans un matériau composite stratifié. De plus, la transition douce entre les différentes propriétés du matériau réduit

les contraintes thermiques et résiduelles [Reddy, 2000]. Dans la plupart des cas, le matériau passe d'un métal sur une surface à une céramique ou principalement de la céramique sur la surface opposée, avec une transition douce. De plus, les propriétés du matériau peuvent changer dans n'importe quelle orientation à travers un matériau, mais la majorité des applications à ce jour concernent un matériau dans lequel les propriétés changent à travers l'épaisseur selon l'axe (Z) du matériau qui est représenté sur la figure 1 ci-dessous.

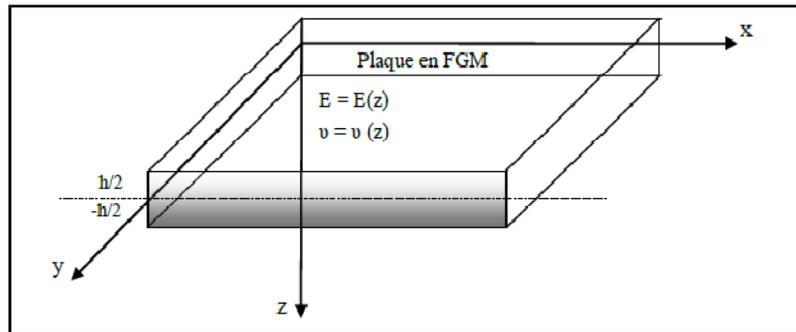


Figure I.1. Orientation d'un matériau FGM

Le matériau FGM passe d'un métal à une céramique en augmentant le pourcentage de matériau céramique présent dans le métal jusqu'à ce que le pourcentage approprié soit atteint ou qu'une céramique pure soit obtenue comme il est indiqué au figure 2.

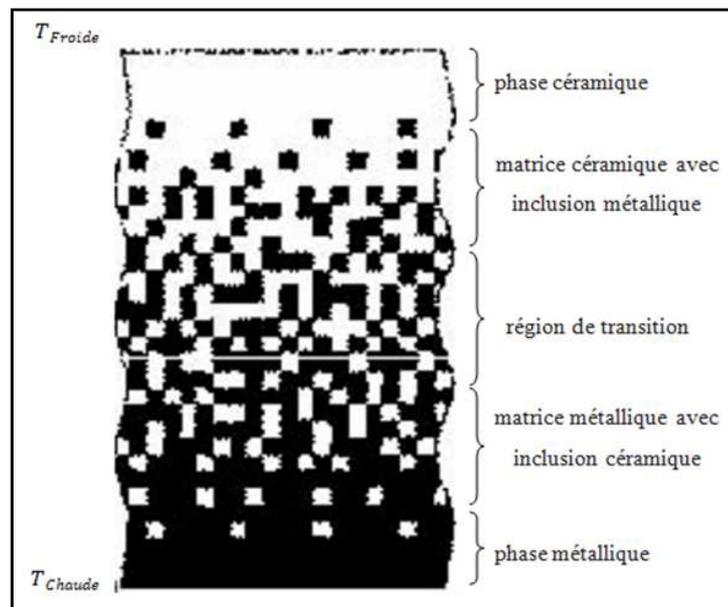


Figure I.2. Représentation d'un matériau FGM

Comme vu ci-dessus, le matériau ne présente pas de changement brusque des propriétés du matériau en un point quelconque de l'épaisseur, mais le changement est douce et progressif.

Ce type de matériau est utilisé généralement où il y a un gradient de température extrême qui est mentionné par ( $T_{Chaude}$ ) et ( $T_{Froide}$ ) sur la figure 2. La face céramique du matériau est généralement exposée à une température élevée, tandis que la face métallique est généralement soumise à une température relativement plus froide. La transition douce des propriétés du matériau permet d'obtenir un matériau dont les propriétés fournissent une protection thermique ainsi qu'une intégrité structurelle sans présenté un point de rupture dans la structure. Un point de défaillance unique est d'une importance cruciale dans le programme spatial car la NASA a utilisé des revêtement de protection thermique stratifiées sur la structure métallique de la navette spatiale pour gérer les températures extrêmes de rentrée dans l'atmosphère terrestre. Ces revêtements sont susceptibles de «se fissurer et se détacher à l'interface en raison d'une transition brusque entre les coefficients de dilatation thermique. [Cobb, 2006]

Les capacités du matériau sont assez flexibles car on peut varier les matériaux utilisés ainsi que la fonction à laquelle ils passent d'une surface à l'autre. Un métal et une céramique spécifiques peuvent être choisis pour l'application particulière afin de capitaliser sur les caractéristiques positives de chacun des matériaux. En outre, la fonction entre les deux matériaux extérieurs peut être mathématiquement maximisée et adaptée spécifiquement pour répondre aux besoins de l'application souhaitée. [Cooley, 2005]

#### **I.4 L'intérêt d'utilisation des FGM :**

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.[ ISSAD, 2019]

#### **I.5 Procédures de fabrication des matériaux FGM :**

Les matériaux a gradient évalué FGM sont préparé par la diffusion et la liaison entre les atomes de différents matériaux, de manière à atteindre l'objectif d'une connexion permanente et de bonnes performances. Actuellement, il existe de nombreux méthodes de préparation de

matériaux FGM, parmi ces procédures en vas cité les plus importants techniques utilisées a l'industrie de fabrication des FGM.

**I.5.1 Technique de dépôt de vapeur :**

Il existe plusieurs techniques de dépôt en phase vapeur, on peut citer : dépôt par pulvérisation cathodique, dépôt de vapeur chimique (CVD) et le dépôt physique en phase vapeur (PVD). Ces méthodes de dépôt en phase vapeur sont utilisées pour déposer des revêtements de surface fonctionnellement gradués et ils donnent microstructure excellents, mais ils ne peuvent être utilisés pour le dépôt de revêtement de surface mince. Ils consomment beaucoup d'énergie et produisent des gaz toxiques. [Groves, 1997]

Il existe d'autres méthodes utilisées dans la production de revêtement de fonctionnellement graduée comme : projection plasma, l'électrodéposition, électro phorétique, déposition assistée par faisceau ioniques (IBAD), auto-propagation synthèse à haute température (SHS), etc. [Knoppers, 2005]. Ces procédés sont généralement lents et consommatrices d'énergie ils ne sont pas rentables pour être utilisé dans la production de masse FGM.

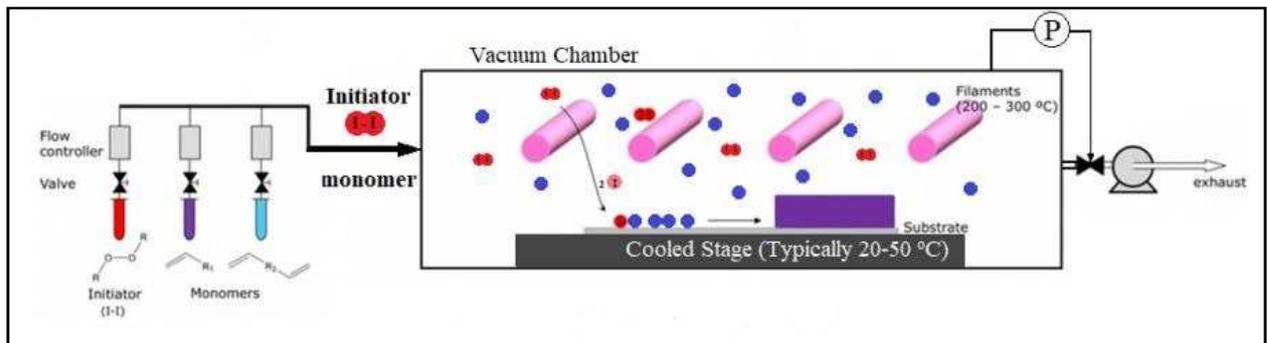


Figure I.3: Dépôt de vapeur chimique (CVD).[Ansari, 2010]

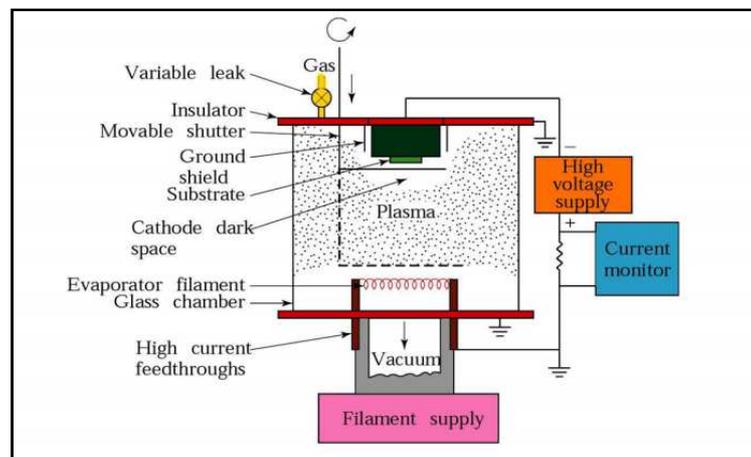


Figure I.4: Dépôt de vapeur physique (PVD).[Seol, 2012]

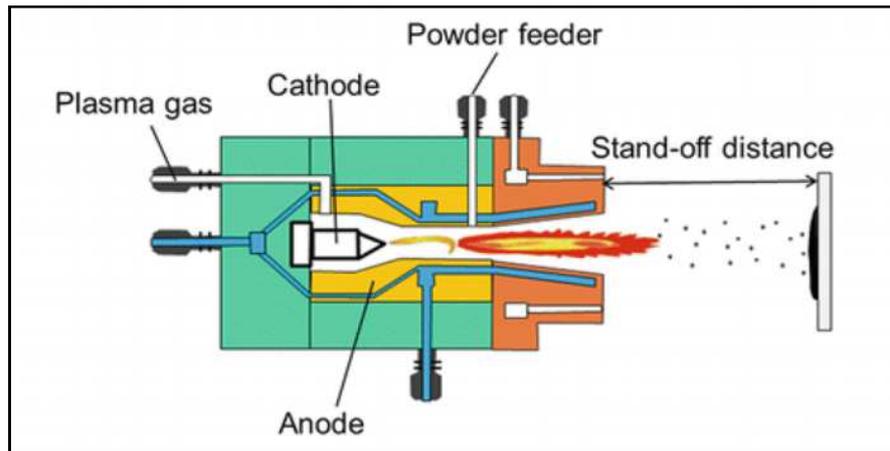


Figure I.5: Dépôt de projection plasma (PSF).[Malandrino, 2009]

### I.5.2 Métallurgie des poudres :

La métallurgie des poudres est la première méthode de production des matériaux des matériaux de fonctionnement gradués. La technique de production de la métallurgie des poudres se compose généralement de trois étapes comme suit:

- pesée et de mélange de poudre en fonction de la préconçus distribution spatiale comme dicté par l'exigence fonctionnelle,
- l'empilage et la condensation de la pré-mélangé des poudres,
- Enfin le frittage du mélange pour le transformer en poudre, [Nemat-Alla, 2001]

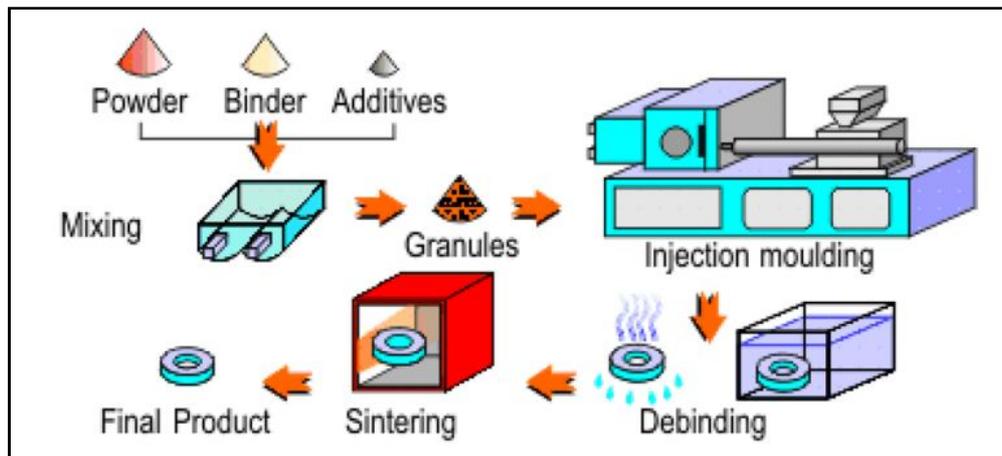


Figure I.6: Métallurgie des poudres (PM).[Popoola, 2016]

### I.5.3 Méthode de centrifuge :

Cette méthode centrifuge qui produit des matériaux de fonctionnellement gradués est la est la même technique que la coulée centrifuge où les deux utilisent la force de gravité pendant la

rotation du moule pour produire du matériau gradué. La raison principale de l'utilisation de cette méthode pour produire les matériaux gradués c'est la différence entre les densités de matériau et la rotation du moule. On peut obtenir la graduation des matériaux en continu, mais il y a des problèmes tels que la forme qui produit est juste un cylindre. Et le deuxième problème lié à cette méthode, c'est une limitation du type de gradient qui est produit par un processus naturel (force centrifuge et différence de densité).

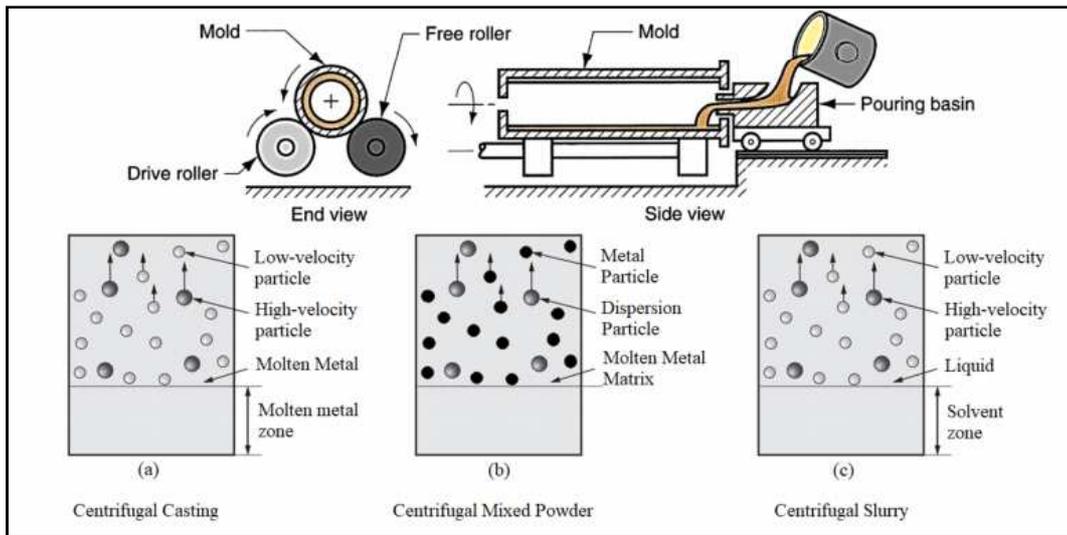


Figure I.7: Méthode de coulée centrifuge.[Watanabe, 2011]

#### I.5.4 Méthode de fabrication en solide de forme libre (SFF)

C'est une méthode de fabrication alternative qui présente de nombreux avantages tels que la vitesse de production élevée, la faible consommation d'énergie requise, l'utilisation optimale des matériaux, la production d'une forme compliquée avec une brise de conception d'où les conceptions dessinent sur CAO (programme AutoCAD) et la prennent directement. cette méthode se compose de cinq étapes essentielles:

- dessiner la conception sur programme (AutoCAD),
- convertir les données en fichier STL (Standard Triangulation Language),
- convertir le fichier (STL) en profils 2D,
- la construction du composant couche par couche,
- enlèvement et finition du composant,

Il y a nombreux technologies de la méthode de fabrication solide de forme libre, les processus laser sont principalement utilisés pour produire les matériaux de fonctionnellement gradué. Cette technologie comprend la méthode basée sur la gaine laser, le frittage sélectif au

laser (SLS), l'impression 3D (3-DP) et la fusion sélective au laser (SLM). Système laser de revêtement et fusion.

Laser Sélective a la capacité de produire des composants plus denses. La technique de solide forme libre est considérée comme un processus de fabrication plus flexible par rapport à d'autres processus, mais la finition de surface est médiocre, [Watanabe, 2009].

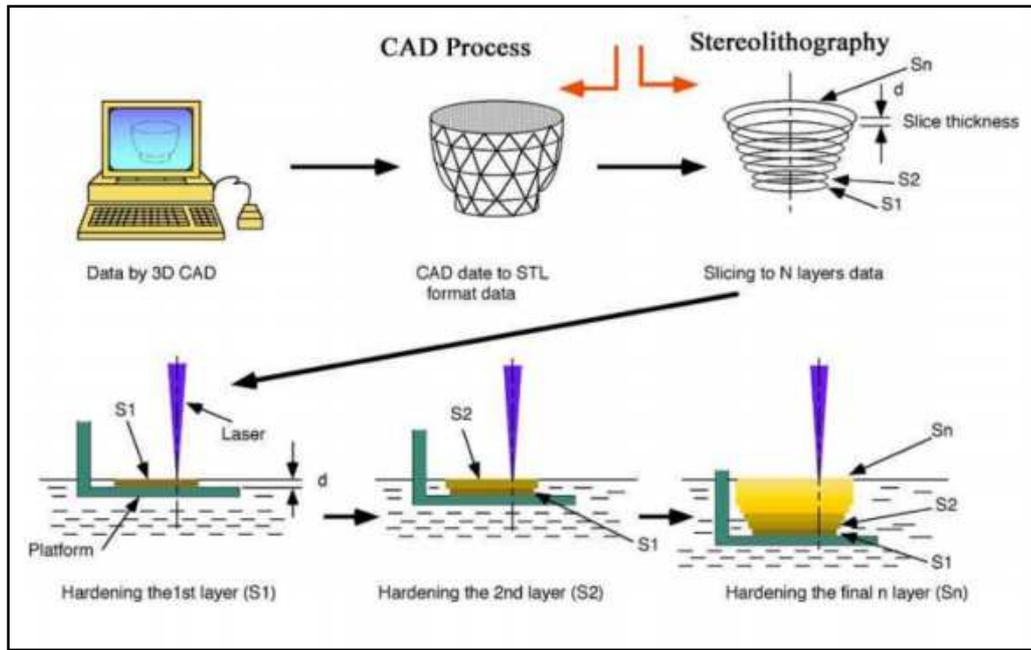


Figure I.8: Méthode de solide forme libre (SFF).[Chen, 2019]

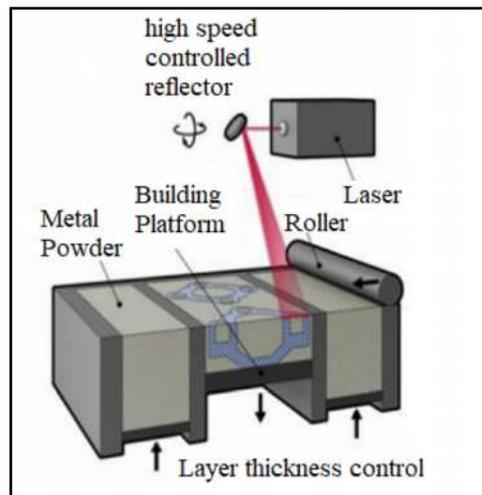


Figure I.9: Frittage/Fusion sélectif au laser (SLS/SLM).[Leu, 2012]

### I.6 Propriétés matérielles effectives des FGM:

Généralement les matériaux à gradient évalués FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des matériaux à fonctionnel gradues FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé Figure (I.10a), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur ( $z$ ).
2. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le matériau à gradient évalué FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal Figure (I.10b);

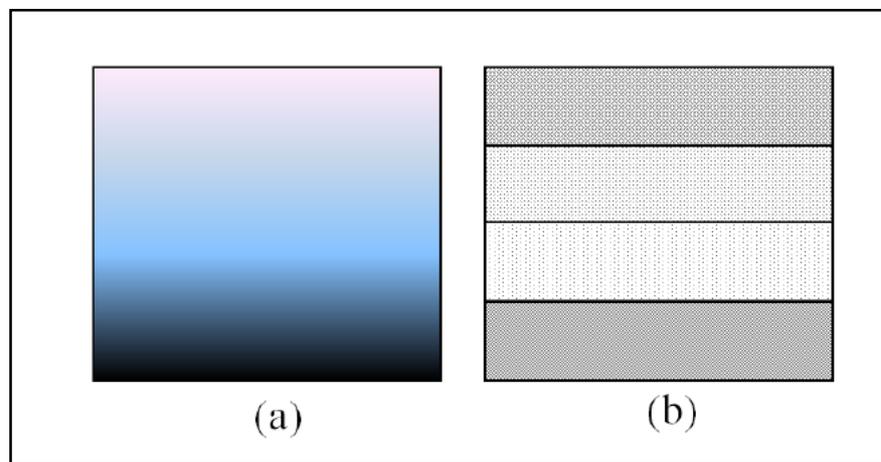


Figure I.10: Modèles analytiques pour une couche en FGM.

### I.7 Lois du comportement des matériaux FGM :

Les propriétés mécaniques des matériaux a gradient évalués sont liées à la microstructure sollicitée. La nature des phases, leurs pourcentages, leurs morphologies sont des paramètres qui

vont jouer sur les propriétés mécaniques. Différentes voies peuvent être utilisées pour modéliser le comportement de matériaux multi-phases : Loi de mélange ou modélisation numérique de la microstructure [Texier, 2013]. Différentes lois de mélange existent et découlent des travaux menés sur composites. Nous citons à titre d'exemple : le modèle de Voigt, Reuss, Hirsch-Dougill, Les approches de Tsai-Pagano ou de Popovics qui sont des cas particuliers du modèle de Hirsch-Dougill, Modèle de Hashin-Shtrikman,..etc

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [Shen, 2009].

$$P_F = \sum_{i=1}^n P_i V_{Fi} \quad (\text{I.1})$$

avec  $P_i$  et  $V_{Fi}$  sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant  $i$ , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_{Fi} = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plu part des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à:

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (\text{I.3})$$

Avec :

$$V_c + V_m = 1 \quad (\text{I.4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

Les coordonnées (x) et (y) définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe (z) est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit :

$$E = E(z) \text{ et } \nu = \nu(z) \quad (\text{I.5})$$

Jin et Batra [Jin, 1996], Ziou et autres [Ziou, 2016] indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la structure FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.7.1 Fonction puissance (P-FGM) :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V_c(z) = \left(\frac{z+\frac{h}{2}}{h}\right)^p \quad (\text{I.6})$$

Où ( $p$ ) est un paramètre matériels et ( $h$ ) est l'épaisseur de structure. Une fois la fraction volumique locale « $V_c(z)$ » à été définie, les propriétés matérielles d'une structure P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao, 1995]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V_c(z) \quad (\text{I.7})$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure  $z = -\frac{h}{2}$  et de la surface supérieure  $z = +\frac{h}{2}$  de la structure FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la structure P-FGM est représentée sur la Figure (I.11). Il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour « $p < 1$  », et augmente rapidement près de la surface supérieure pour « $p > 1$  ».

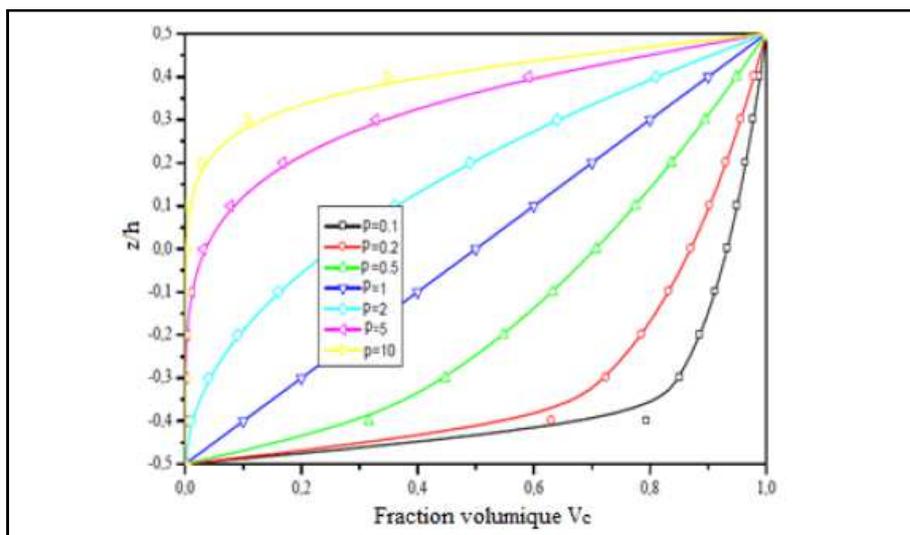


Figure I.11: Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (P-FGM).

### I.7.2 Fonction exponentielle (E-FGM) :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [Delale, 1983] :

$$E(z) = E_m e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{I.8a})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad (\text{I.8b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure E-FGM est représentée dans la figure (I.12).

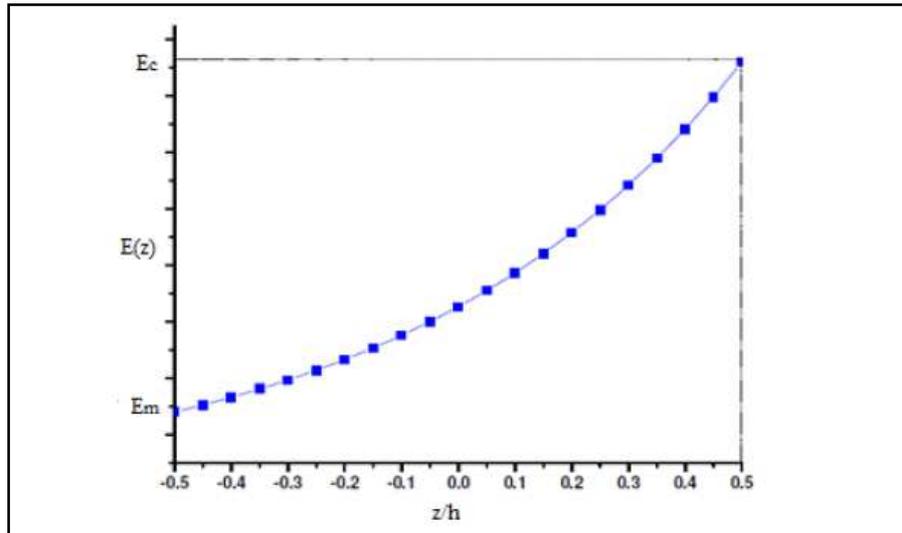


Figure I.12: Variation du module de Young à travers l'épaisseur (E-FGM).

### I.7.3 Fonction sigmoïde (S-FGM) :

Chung et chi [Chi, 2003] ont défini la fraction de volume de la structure FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_c(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2}+z}{\frac{h}{2}}\right)^p \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9a})$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2}-z}{\frac{h}{2}}\right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq -\frac{h}{2} \quad (\text{I.9b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)]E_m \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.10a})$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + [1 - V_m(z)]E_m \quad \text{pour } 0 \leq z \leq -\frac{h}{2} \quad (\text{I.10b})$$

la variation du module de Young selon les équations (I.9.a) et (I.9b) est représenté sur la figure (I.13) avec des distributions sigmoïdes.

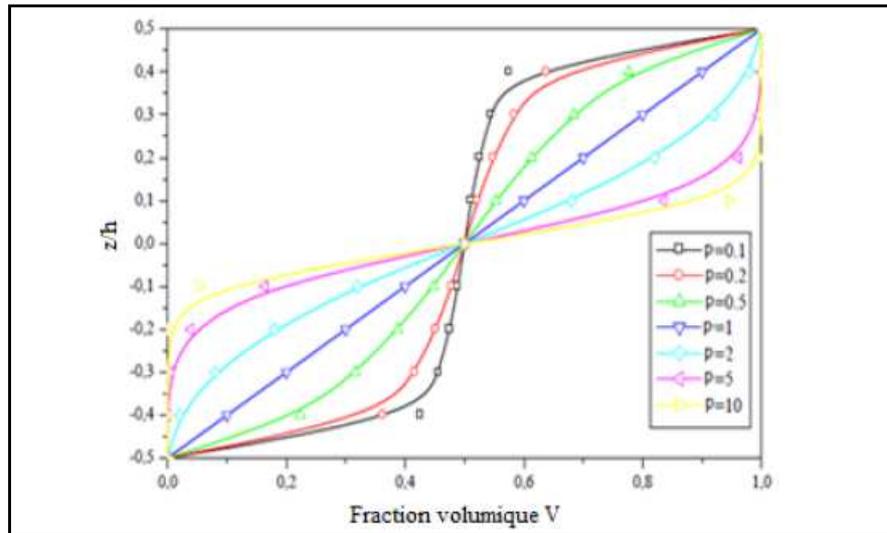


Figure I.13: Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM).

## I.8 les domaines d'applications de FGM :

les matériaux de fonctionnement évalués FGM peuvent résister à un gradient thermique très élevé puisque il sont développés essentiellement a cet effet, ce qui le rend approprié pour une utilisation dans des structures et corps d'avion spatial, un composant de moteur de fusée, etc.

pendant les dernières années les FGM sont progressivement améliorées, aujourd'hui on peut être les utilisées dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

### I.8.1 Domaine aérospatial :

L'aérospatial est le premier domaine a amélioré, développé et exploité les matériaux de fonctionnement évalués FGM dans les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les roues de turbine, les revêtements de lame de turbine, les casquettes de nez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales comme ils sont utilisés pour les murs structurels qui combinent des propriétés d'isolation thermiques et sonores.

**I.8.2 Domaine de l'industrie biomédical :**

Le matériau de gradient est commun dans la nature, comme la coquille de la structure en couches, le squelette animal dur et résistant et la peau humaine en couches. Le développement médical des matériaux FGM rend l'assistance médicale aux patients plus opportune et plus efficace. Le matériau fonctionnellement évalué présente les caractéristiques de résistance spécifique élevée, de module spécifique élevé, de résistance à l'abrasion et de biocompatibilité. Sur cette base, l'articulation artificielle développée confère à la prothèse artificielle et au squelette du patient une forte force de liaison et une durabilité fiable, montrant une bonne biocompatibilité, mais également une bonne auto-guérison et une bonne réparation des propriétés régénératrices. Avec ses propriétés supérieures, les matériaux FGM ayant de bonnes perspectives d'application dans les domaines biomédicaux, tels que les os, les dents et le cœur artificiels.

**I.8.3 domaine de la défense et secteur militaire :**

Les matériaux FGM ayant des applications très larges dans l'industrie de défense et tous secteurs militaires, comme des gilets pare-balles, l'épée japonaise traditionnelle et dans des blindages ainsi que le corps de véhicules pare-balles grâce à la capacité du FGM d'offrir des propriétés résistant à la pénétration en évitant la propagation des fissures est une propriété attirante qui favorise l'exploitation de ce matériau.

**I.8.4 Domaine marine :**

On peut visualisé l'applications des matériaux FGM dans l'industrie marine dans le puits de propulseur, bouteilles de plongée, les dômes de sonar, le système de tuyauterie composé et dans la coque de pression cylindrique.

**I.8.5 Domaine d'énergie nucléaire :**

La haute résistance mécanique, la résistance à la chaleur et la résistance à la corrosion des matériaux FGM fournissent une garantie fiable pour le développement de nouvelle génération de l'industrie nucléaire. La production d'énergie nucléaire, l'énergie nucléaire et le stockage des armes nucléaires sont extrêmement dangereux. Une fois l'accident déclenché, il aura de graves conséquences. Par conséquent, il est impératif d'assurer sa sécurité. Dans l'application du réacteur de fusion nucléaire, un bon effet de relaxation des contraintes thermiques est montré, ce qui rend la réaction de fusion nucléaire plus sûre. En tant que matériau de haute résistance, résistant à la chaleur et de blindage, les matériaux de fonctionnellement évalués FGM présentent

une grande supériorité dans les matériaux de construction des fours nucléaires et les matériaux des parois internes des fours nucléaires, ce qui protège considérablement la sécurité de l'industrie nucléaire. [Zhao, 2014]

#### **I.8.6 Domaine électromagnétique :**

En raison de la distribution graduelle des matériaux fonctionnellement gradués, les structures spéciales ont des propriétés spéciales. Dans le champ électromagnétique, la structure à gradient a la fonction de gradient piézoélectrique et la fonction de gradient électromagnétique, et peut être utilisée pour fabriquer des matériaux de blindage électromagnétique, des filtres céramiques, des oscillateurs à ultrasons, etc. [Wang, 2005]. Et l'application de matériaux fonctionnellement classés sur des disques, des aimants permanents, des électroaimants et des oscillateurs peut réduire la masse et la taille des dispositifs correspondants et améliorer leurs performances. [Li, 2000]

#### **I.8.7 Domaine optique:**

La dureté du verre ordinaire est élevée, mais sa fragilité est importante. En raison de l'incertitude de l'environnement extérieur, la durée de vie du verre est considérablement réduite. Dans le même temps, la transmission du verre ordinaire ne peut pas être modifiée avec le changement d'environnement, ce qui aura un certain impact sur la production, la vie et le travail. Par conséquent, l'amélioration des propriétés mécaniques et optiques du verre est devenue une direction importante dans le domaine du développement. [Wu, 2007]. En ajoutant des éléments et des matériaux avec différents indices de réfraction au matériau fonctionnellement gradué, les propriétés optiques du verre peuvent être modifiées en fonction de l'environnement. Les chercheurs concernés ont préparé avec succès des matériaux tels que des lasers en verre, des lentilles en fibre optique, des films antireflets et du verre décoloré.

#### **I.8.8 Domaine énergétique :**

Les matériaux fonctionnellement gradués ont également des propriétés spéciales basées sur la résistance à la chaleur, la résistance à la corrosion et la résistance aux chocs thermiques. En particulier, le développement de divers matériaux à fonction graduée spéciale a fait de FGM, il joue un rôle important dans le domaine de l'énergie. Par exemple, dans l'aspect du système de génération d'énergie, l'application d'un matériau de conversion d'énergie thermoélectrique à

gradient rend l'émetteur non fissuré dans l'environnement de travail à haute température de 1860°C et réduit considérablement la contrainte thermique du système. Pendant ce temps, l'application du substrat de dégagement de chaleur à l'électrode basse température du système montre également une conductivité thermique élevée et une vitesse exothermique de rayonnement. [Huang, 2016]

Les matériaux FGM fournissent également une barrière thermique d'où ils sont utilisés comme revêtement protecteur sur les aubes de turbine dans les moteurs à turbine à gaz.

### **I.8.9 Domaine de l'industrie automobile :**

L'utilisation de matériaux FGM dans l'industrie automobile est restée toujours limitée jusqu'à ce jour là, à cause du coût élevé de production. Cependant, le matériau est utilisé dans les parties très importantes de l'automobile, où le coût élevé présente et justifie son utilisation. Les applications présentes incluent les pochettes de cylindre de moteur pour des pistons de moteur diesel, pour les ressorts à lames, pour les bougies, les chambres de combustion, les puits d'énergie, les amortisseurs, les volants, quelques parties du corps de la voiture, le verre de fenêtre et des freins de voiture de course. Aussi, les matériaux FGM sont utilisés dans des revêtements des corps améliorés pour des voitures et cela inclut les revêtements gradués avec des particules, comme le dioxyde/mica. [BRAIRI, 2019]

### **I.8.10 Domaine de l'industrie sportif :**

Les matériaux FG sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tel que les clubs de golf, des raquettes de tennis et des skis.

### **I.8.11 Autres applications des FGM :**

En plus de ces domaines cités au dessus, les matériaux FGM peuvent être exploités par divers domaines, exemple, les outils de coupe pour améliorer la force thermique de l'outil de coupe, les lames de rasoir de Fer-Aluminure/Acier inoxydable, dans les extincteurs d'incendies, les cadres de monocle et les casques, le scanner IRM des tubes cryogéniques, les récipients sous pression, les réservoirs à carburant, les cas d'ordinateur portable, les instruments de musique et les tables radiographiques.

**I.9 Conclusion:**

Dans ce chapitre, nous avons fait un aperçu sur les matériaux à gradient évalués (FGM), au point de vue notion de l'existence, l'historique, développement, les modes de fabrication et son participation au révolution des matériaux où on a cité les domaines concernés par les applications de ce moderne matériaux. d'autre part on a expliqué la manière de la présentation et la modélisation mathématique du comportement des structures FGM.

---

## ***CHAPITRE II :***

### ***Les théories des poutres FGM***

---

## II.1 Introduction :

La théorie des poutres est un outil supplémentaire pour déterminer des solutions analytiques en considérant des hypothèses additionnelles. L'avantage des solutions analytiques sur les prévisions obtenues par des méthodes numériques est de permettre de visualiser l'influence de différents paramètres (de forme, de taille, de comportement du matériau, d'hétérogénéité).

Ceci permet de mieux comprendre un système mécanique ou de mieux optimiser son architecture, dans le cadre d'une première approche d'un problème de mécanique.

Il existe des solides élancés auxquels on peut raisonnablement appliquer une description cinématique et une description des efforts intérieurs plus simples que celles de la théorie générale des milieux continus.

## II.2 Définition d'une poutre :

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé "arbre" quand il est soumis à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation. [BOUAMAMA, 2019]

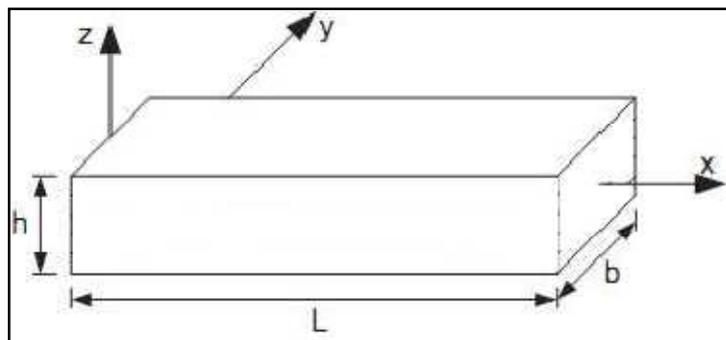


Figure II.1: Géométrie de poutre.

### II.3 La théorie des poutres :

La théorie des poutres c'est le modèles utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. La construction d'une théorie de poutre consiste à reprendre, pour un milieu curviligne, le cheminement suivi pour le milieu continu. Les étapes successives du traitement sont donc la définition d'une cinématique, l'application des équations d'équilibre, l'introduction des lois de comportement. On en déduit des relations globales entre forces, couples, flèches et angles de rotation des sections.

### II.4 Les modèles classiques :

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [Reissner, 1961], [Yang, 1966], les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées, la normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée.

### II.5 Les principes fondamentales de la théorie des poutres :

La théorie des poutres est basée sur deux hypothèses principales, principe de Saint venant et principe de Navier Bernoulli généralisé.

#### II.5.1 Principe de Saint venant :

Le principe de saint venant s'énonce : La contrainte en un point éloigné des points d'applications d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place suffisamment loin du point d'application des charges.

#### II.5.2 Principe de Navier Bernoulli généralisé :

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul .Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre S très aplaties. De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes symétries, prend sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial.

Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes :

- Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section.
- La variation du gauchissement, infiniment voisines.
- Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre.

## II.6 Différents théories des poutres FGM :

L'obtention d'une théorie de poutre nécessite l'introduction de certaines hypothèses, qui représentent des simplifications acceptables de la réalité. Plusieurs théories jouent sur la prise en compte ou non de l'effet du cisaillement. Dans ce qui suit, on abordera les différents modèles les plus célèbres dans la littérature.

### II.6.1 Théorie classique des poutres (CBT) :

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines. Dans cette théorie, le modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur de la poutre. L'hypothèse de cette théorie sont :

- Après déformation, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre).
- La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section plane reste plane.
- La fonction  $f(z)$ , qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est nulle.

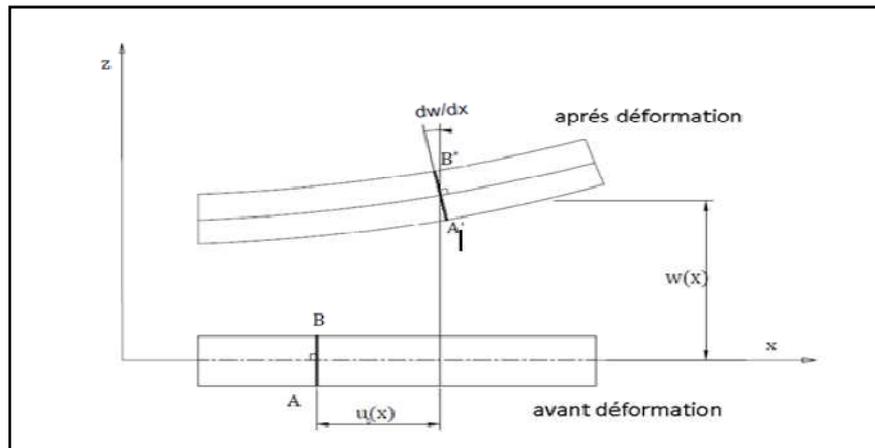


Figure II.2: Cinématique de poutre d'Euler-Bernoulli.

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CBT), le déplacement d'un point « M » est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \cdot w_{0,x}(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$u(x, z, t)$  : C'est le déplacement suivant la direction de (X).

$w(x, z, t)$  : C'est le déplacement dans la direction de ( Z ) ou bien la flèche.

$u_0(x, t)$  et  $w_0(x, t)$  : sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes ( X ) et ( Z ).

La rotation autour de l'axe (Y), provoquée par la flexion est:

$$w_{0,t}(x, t) = \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II.2})$$

Par définition, la distorsion est définie par la relation suivante :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

La distorsion est nulle, donc la contrainte de cisaillement est nulle puisque :

$$\sigma_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} \quad (\text{II.4})$$

Lorsque cette théorie est utilisée pour résoudre numériquement le problème des poutres, les solutions sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de cisaillement transversal.

### II.6.2 Théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT) :

Cette théorie est connue que le modèle de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes. Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.3). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko en 1921, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses [Timoshenko, 1972].

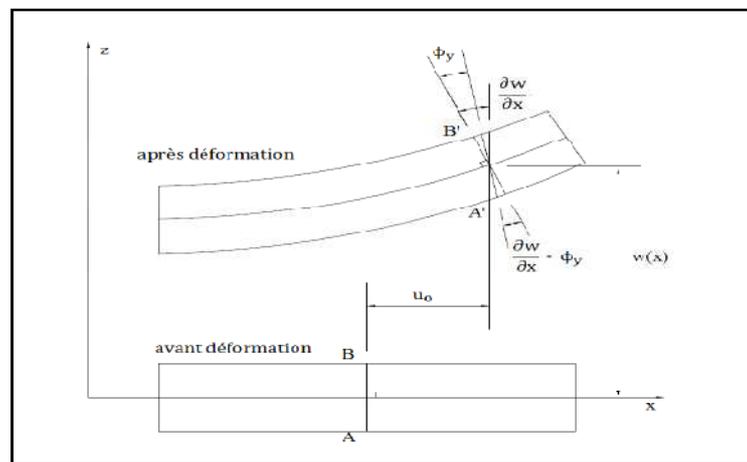


Figure II.3: Cinématique de poutre Timoshenko.

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction  $f(z)$  est égale à  $(z)$ . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \cdot w_{0,x}(x, t) + z \cdot \varphi_0(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.5a})$$

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) + z \cdot \psi_0(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.5b})$$

d'où :

$\varphi_0(x, t)$  : C'est la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\psi_0(x, t) = \varphi_0(x, t) - w_0(x, t) \quad (\text{II.6})$$

$\psi_0(x, t)$  : Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

La distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\gamma_{xz}(x, t) = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = \varphi_0(x, t) \quad (\text{II.7})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} = G_{xz} \cdot \varphi_0(x, t) \quad (\text{II.8})$$

d'où :

$G_{xz}$  : c'est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement. Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction (ks) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par (Mindlin et Deresiewicz). ( Cowper et Murty ) ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « ks » pour différentes sections de la poutre.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est «la théorie d'ordre élevé».

### II.6.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDBT) :

Par contre de la théorie classique et la théorie de Timoshenko, Dans la théorie d'ordre élevé la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.3). La fonction  $f(z)$  représente le gauchissement et sa dérivée  $f'(z)$  le cisaillement.

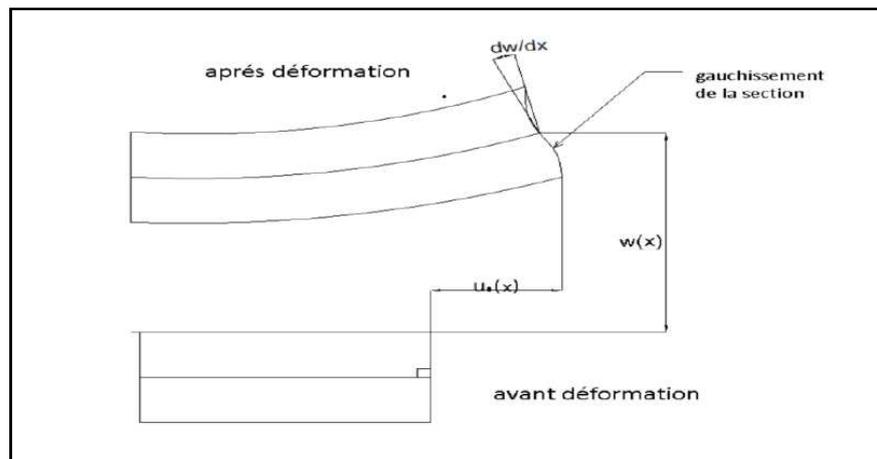


Figure II.4: Cinématique de poutre d'ordre élevé.

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [Nguyen, 2004], La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [Lo, 1977].

$$u_0(x, z) = u_0(x) + z\psi(x) + z^2\zeta(x) + z^3\phi(x) \quad (\text{II.9})$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement " il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction  $f(z)$  .

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \cdot w_{0,x}(x, t) + f(z) \cdot \varphi_0(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$$\gamma_{xz}(x, t) = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} = f'(z) \varphi_0(x, t) \quad (\text{II.11})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$f'(z) \Big|_z = f' \left( \mp \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (\text{II.12})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (II.12).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement  $f(z)$ , quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons par ordre chronologique :

L'approche de [Reissner, 1945] :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (\text{II.13})$$

L'approche d' [Ambartsumyan, 1969] :

$$f(z) = \frac{1}{2}z \left( \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{3}z^2 \right) \quad (\text{II.14})$$

L'approche de [Levinson, 1980] et [Reddy, 1984] :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

Dans ce modèle polynomiale, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de [Touratier, 1991] :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \quad (\text{II.16})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \quad (\text{II.17})$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

L'approche de [Soldatos, 1993]:

$$f(z) = -h \sin h \left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.18})$$

L'approche de [Karama, 2003]:

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.19})$$

[Aydogdu, 2009] propose un nouveau modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \alpha^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2 / \ln \alpha}; \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.20})$$

L'approche de [Mantari, 2012] :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{\pi}{2h} z \right] \quad (\text{II.21})$$

L'approche de [Nguyen, 2015] :

$$f(z) = \cot^{-1}\left(\frac{h}{z}\right) - \frac{16z^3}{15h^3} \quad (\text{II.22})$$

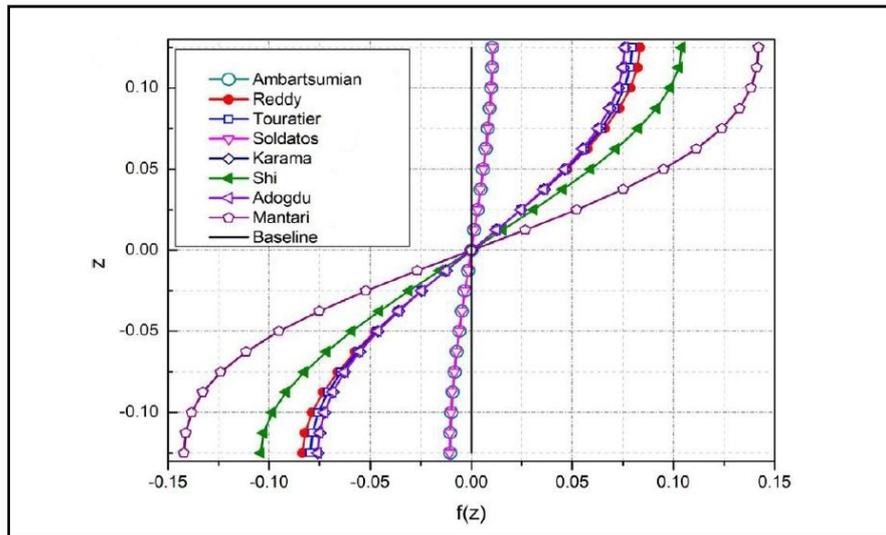


Figure II.5: Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

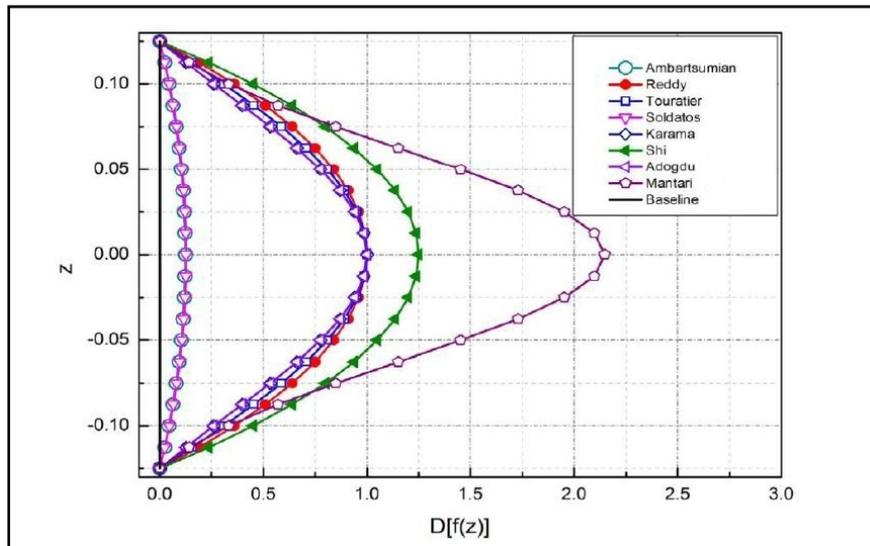


Figure II.6: Variation de la dérivée de la fonction de forme  $f'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur.

**II.7 Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes théories des poutres FGM. Ces théories sont divisées en deux parties, selon la prise en compte du cisaillement ou non, globalement on distingue trois types qu'on les trouvés dans la littérature, Théorie classique des poutres (CBT) connu par théorie d'Euler-Bernoulli, Théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDBT) dite théorie de Timoshenko et Théorie d'ordre Supérieur (HSDBT)

---

## ***CHAPITRE III :***

***Investigation sur les travaux réalisés  
sur les structures FGM***

---

### III.1 Introduction :

Des nombreux ouvrages ont été consacrés à l'étude des structures en matériaux à gradient évalué (FGM), des recherches énormément variées sont présentées dans la littérature, ils ont traité les problèmes de la stabilité, du flambement et la vibration des structures FGM à savoir les poutres, les plaques, les coques et d'autres FGM.

### III.2 Analyse de la stabilité des structures (FGM) :

#### III.2.1 Les poutres en (FGM) :

Ke et Wang [Ke, 2011] ont montré à travers des plusieurs études que l'effet de la taille des matériaux sur la stabilité dynamique des micro-poutres en FGM ne peut être pris en compte que lorsque le paramètre d'échelle de longueur a la même valeur que celui de l'épaisseur de la poutre. Autres chercheurs tel que Piovan et Machado [Piovan, 2011] ont suggéré que les zones dynamiquement instables des poutres FGM à parois minces varient inversement à la rigidité élastique. Azizi et autres [Azizi, 2012] ont fait une analyse de la stabilité sur des MEMS piézoélectriques FGM (Micro-Electro-Mechanical Systems) et ont déduit que pour que les micro-poutres piézoélectriques FGM soient dans l'état stable, une fréquence d'excitation et une quantité de tension AC appropriées sont nécessaires. Pour l'analyse statique, la stabilité des micro-poutres FGM capacitifs ne change pas lorsque la température de la source change, à condition que la tension appliquée reste constante. D'autre part, dans le cas d'une analyse dynamique, la température affecte la stabilité. Zamanzadeh et son groupe [Zamanzadeh, 2013] ont suggéré que pour l'analyse du comportement mécanique, l'échelle de longueur des matériaux doit être prise en considération. Esfahani et ses collègues [Esfahani, 2013] ont étudié le phénomène du flambement thermique, ils ont constaté que le flambement et le post-flambement des poutres FGM reposant sur une fondation élastique non linéaire dépendent de la température de son constituant. De plus, la température critique de flambement est affectée par les coefficients de fondation élastique, lorsque la charge thermique est soumise à une augmentation de température uniforme ou à une conduction thermique. Komijani et ses collaborateurs [Komijani, 2014] ont trouvé que les paramètres linéaires et non linéaires d'une fondation sont responsables de la résistance au flambement des poutres FGM. [Kolakowski, 2016] a effectué une recherche sur la stabilité dynamique des poutres trapézoïdales en FGM. Il a été trouvé une relation entre les flambements statiques et dynamiques de la structure et les flambements locaux primaires et secondaires. Nguyen et autres [Nguyen, 2017] ont travaillé sur la stabilité en flexion-torsionnelle des poutres FGM. Il a été observé que la poutre longue n'est pas favorable au

mode de flexion, et dans le cas de torsion, la poutre courte n'est pas idéale. Une autre étude a été faite sur la vibration et la stabilité des poutres FGM poreuses reposant sur des fondations élastiques par [Fazzolari, 2018]. Il a utilisé des différentes théories mathématiques, divers paramètres des matériaux ont été pris en compte pour étudier la fréquence et la charge de flambement des poutres FGM.

### III.2.2 Les plaques en (FGM) :

Bouazza et ses collaborateurs [Bouazza, 2010] ont étudié le flambement élastique des plaques rectangulaires en FGM, et il s'avère que la stabilité augmente lorsque les paramètres géométriques augmentent sous une charge uniforme et linéaire. En outre, la différence de température critique de flambement des plaques épaisses en FGM est sensiblement affectée par la déformation de cisaillement transversale. Jalali et autres [Jalali, 2010] ont étudié des plaques circulaires stratifiées de fonctionnellement graduées ayant des épaisseurs différentes et des températures constantes en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre FSDT. Il a été constaté que le facteur de flambement thermique augmente avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique et la diminution du rapport d'épaisseur des plaques. Jedrysiak et Michalak [Jedrysiak, 2011] ont proposé un modèle pour les problèmes dynamiques et de stabilité des structures FGM en plaques minces. Naderi et Saidi [Naderi, 2011] ont proposé la solution exacte de l'analyse de la stabilité des plaques sectorielles en FGM reposant sur une fondation élastique. Il a été déduit que la charge critique de flambement peut être réduite en augmentant le paramètre de Winkler et l'indice de la loi de puissance. La fondation élastique et l'épaisseur de la plaque peuvent grandement affecter la charge critique de flambement et la stabilité des plaques FGM ayant des bords circulaires libres. Houari et ses collègues [Houari, 2011] ont utilisé la théorie des plaques raffinées à deux variables pour l'analyse de flexion thermoélastique de plaques sandwich FGM. La théorie présentée une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et donne lieu à une variation de contrainte de cisaillement transversale de telle sorte que les contraintes de cisaillement transversales varient paraboliquement sur l'épaisseur. Il a été conclu que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement de flexion thermoélastique de plaques FGM. Daouadji et ses collaborateurs [Daouadji, 2012] ont présenté une formulation théorique, des solutions de Naviers de plaques rectangulaires basées sur un nouveau modèle de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse statique et dynamique des plaques FGM. Ils ont effectué des études paramétriques pour varier la fraction volumique de céramique, les profils de fraction

volumique, les rapports d'aspect et les rapports longueur/épaisseur. Les résultats sont en bon accord avec d'autres résultats disponibles dans la littérature. Tounsi et ses collègues [Tounsi, 2013] ont présenté une théorie raffinée de la déformation par cisaillement trigonométrique (RTSDT) prenant en compte les effets de la déformation par cisaillement transverse pour l'analyse de flexion thermoélastique de plaques sandwich. La théorie présentée ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, les composantes de déplacement sont exprimées par une représentation en série trigonométrique à travers l'épaisseur de la plaque pour développer une théorie bidimensionnelle et donnent lieu à une variation de contrainte de cisaillement transverse de telle sorte que les contraintes de cisaillement transversales varient paraboliquement sur l'épaisseur. [Bateni, 2013] Bateni et autres ont fait une étude complète sur la stabilité des plaques FGM, ils ont déduit l'importance des conditions aux limites dans le plan pour l'analyse du flambement. [Nabian, 2013] a suggéré que la tension d'arrachement et la pression hydrostatique acceptables pour les microplaques FGM se situent dans la zone stable. Les résultats obtenus ont été jugés utiles pour la conception des MEMS ( Micro-Electro-Mechanical Systems). [Zhang, 2013] Zhang et autres ont analysé la stabilité et la bifurcation des plaques FGM et ont trouvé la solution numérique qui correspond à la prédiction analytique en utilisant la méthode Runge-Kutta du quatrième ordre. [Kiani, 2014] Kiani et Eslami ont travaillé sur la stabilité thermo-inertielle non linéaire des plaques FGM. Il a été conclu que la rotation des plaques FGM peut les stabiliser à partir d'une région instable sous charge thermique. Pendant la rotation, un phénomène de rupture peut se produire. [Swaminathan, 2014] Swaminathan et Naveenkumar ont proposé un modèle de calcul pour l'analyse de la stabilité des plaques en FGM. Des différents modèles de calcul avec différents degrés de liberté qui reconnaissent les conséquences des déformations transversales et de cisaillement ont été examinés et ont conclu que la charge critique de flambement des plaques FGM peut être atteinte par la théorie des déformations d'ordre supérieur. L'analyse de la stabilité dynamique des S-FGM en utilisant la théorie des plaques raffinées à quatre variables a été étudiée par Han et ses collaborateurs [Han, 2015]. Les résultats montrent que sous une charge dynamique, la fréquence non dimensionnelle reste constante quelle que soit la variation de la rigidité du S-FGM. Cependant, sous une charge statique, les fréquences d'excitation non dimensionnelles peuvent être réduites proportionnellement par le rapport d'épaisseur. En outre, la zone d'instabilité des plaques de S-FGM est directement proportionnelle au facteur de charge statique et aux paramètres du milieu élastique. La charge critique de flambement et la température des microplaques de FGM sous charge mécanique et thermique ont été analysées par Mirsalehi et d'autres chercheurs [Mirsalehi, 2015]. Il a été remarqué que la charge critique et la température varient toutes deux en fonction du paramètre d'échelle de

longueur, sauf dans le cas où l'épaisseur de la plaque est suffisamment élevée par rapport à la longueur. Cependant, la charge critique et la température varient inversement en fonction de la longueur de la plaque et de la fraction de volume, à condition que le volume soit constant pour une longueur donnée. Rezaee et Jahangiri [Rezaee, 2015] ont travaillé sur la vibration chaotique et la stabilité des plaques aéroélastiques piézoélectriques en FGM. Des résultats utiles ont été obtenus pour l'amplitude de résonance, le point de bifurcation et la largeur de la zone de résonance sous différentes excitations (forçage, paramétrique, pression dynamique, aérodynamique supersonique et piézoélectrique). De plus, l'amplitude de la réponse du système est directement proportionnelle au comportement hystérique. Ashoori et Sadough [Ashoori, 2016] ont effectué une analyse de la stabilité thermique non linéaire et traiter le phénomène d'encliquetage dans les plaques circulaires en FGM. Les résultats montrent que la pré-charge thermique provoque un comportement d'encliquetage dans les plaques de FGM dépendant de la microstructure et de la taille. La pré-charge thermique provoque une instabilité de bifurcation dans les plaques circulaires FGM à condition que la température augmente d'une manière uniforme.

### III.2.3 Les coques en (FGM)

[Matsunaga, 2009] a présenté une théorie de la déformation d'ordre supérieur bidimensionnelle (2D) pour étudié de flambement des coques cylindriques circulaires en FGM. Il été trouvé que les fréquences propres, la contrainte de flambement, la distribution du déplacement et les composantes de la contrainte des coques cylindriques circulaires FGM peuvent être anticipées avec précision par l'utilisation de la théorie de la déformation d'ordre supérieur 2D. [Sofiyev, 2009] a utilisé la méthode Galerkin pour obtenue la pression de flambement, les fréquences cycliques fondamentales, et le nombre d'ondes pertinentes des coques coniques FGM. [Deniz, 2013] a étudié l'effet des revêtements composites FGM sur la charge axiale critique qu'il est dépend de la fraction volumique ou des paramètres géométriques des coques FGM. [Sahmani, 2013] et ces collègues sont trouvés que la zone d'instabilité des microcoques FGM est inversement proportionnelle au paramètre d'échelle de longueur sans dimension et directement proportionnelle au facteur de charge statique. [Dung, 2014] est travaillé sur la stabilité des coques tronconiques FGM. Les résultats obtenues montrent que la charge critique de flambement et la stabilité augmentent lorsqu'une quantité de raidisseurs augmente sur une coque conique, et qu'elle est fortement affectée par les paramètres de fondation. [Shen, 2014] constate que la stabilité dynamique d'une coque FGM périodique transportant un fluide pour différentes portées de densité de fluide sans dimension peut être

améliorée en augmentant la longueur d'une coque, et la structure principale de la coque devrait adopter la périodicité, alors que la stabilité dynamique varie inversement avec la densité d'une coque. [Anh, 2015] est fait une analyse de la stabilité des coques de FGM sur une fondation élastique. La pression externe et la fondation élastique jouent un rôle important dans la charge de flambement de bifurcation, la capacité de résistance à la température, et la charge mécanique des coques de FGM. [Huang, 2015] a étudié l'analyse du flambement élasto-plastique des coques cylindriques en FGM soumises à une pression externe. il se base sur la théorie de la déformation J2, il a été souligné que les zones de flambement élastique, élasto-plastique et plastique des coques cylindriques en FGM peuvent être différenciées. [Duc, 2016] montre que la capacité de chargement, le flambement et le post-flambement des coques cylindriques elliptiques ES-FGM sont énormément affectés par les paramètres géométriques, la fraction volumique, les raidisseurs et la fondation élastique. Sofiyev et Kuruoğlu [Sofiyev, 2016] ont effectué une analyse de la stabilité des coques coniques en FGM. Divers résultats ont été obtenus, montrant le comportement de la charge axiale critique, tant dimensionnelle que non dimensionnelle, sous l'impact de nombreux paramètres tels que la contrainte de cisaillement, l'indice de fraction volumique, la couche de FGM, l'épaisseur du noyau et l'angle du semi-vertex.

#### III.2.4 Autres structures en (FGM) :

Des études des comportements de flambement et de post-flambement des panneaux cylindriques en FGM sont présentés par [Duc, 2010] et [Tung, 2010], ils ont conclu que les matériaux et les paramètres géométriques peuvent tous deux affecter le comportement de post-flambement des panneaux cylindriques en FGM. Batani et Eslami [Batani, 2014] ont trouvé à travers les recherches que les arcs peu profonds en FGM peuvent suivre une trajectoire d'équilibre et devenir instables en fonction de la limite de charge critique des forces internes. Sedighi et ses collaborateurs [Sedighi, 2015] ont étudié l'analyse de la stabilité dynamique des FGM-NEMS asymétriques (structure nano électromécanique). Les résultats montrent que la tension de tirage des nanostructures varie proportionnellement à la contrainte de surface et inversement aux paramètres non locaux. La tension d'amorçage et l'amplitude des nanostructures ne peuvent pas être examinées sans la conductivité finie du FGM. Récemment, Barati et Shahverdi [Barati, 2017] ont étudié l'analyse de la stabilité des panneaux FGM supersoniques poreux. Il a été constaté que la stabilité des panneaux FGM dépend de la nature de la porosité et du taux d'humidité des panneaux FGM. Deng et des autres chercheurs [Deng, 2017] ont évalué la stabilité des tuyaux en FGM à plusieurs portées. La stabilité des tuyaux en FGM varie proportionnellement à l'exposant de fraction volumique, alors que les fréquences et vitesses

naturelles varient proportionnellement à l'exposant de fraction volumique et varient inversement avec les paramètres non locaux. [Huang, 2017] Huang et ses collègues ont trouvé que la fraction volumique et le rayon par rapport à l'épaisseur jouent un rôle important dans la pression hydrostatique de flambement critique et le flambement élastoplastique des anneaux circulaires en FGM.

### III.3 Analyse du flambement des structures (FGM) :

#### III.3.1 Les poutres en (FGM) :

L'une des recherches cible l'analyse du flambement des micro-poutres en FGM par l'utilisant de la théorie de contrainte doublée modifiée a été réalisée par Nateghi et ses collègues [Nateghi, 2012]. Il a été constaté que la déviation de la charge de flambement peut être obtenue par la théorie de la contrainte doublée modifiée et d'autres théories classiques. En outre, le coefficient de Poisson joue un rôle important dans le flambement des micro-poutres en FGM. Sahmani et Ansari [Sahmani, 2013] ont effectué une analyse de flambement des micro-poutres en FGM soumises à un effet thermique. Il a été révélé que la charge critique de flambement des micro-poutres FGM en milieu élastique diminue avec l'augmentation de la température à condition que le rapport d'élanement soit élevé. Dans le même sujet, Şimşek et Reddy [Şimşek, 2013] ont étudié le flambement des micro-poutres FGM à l'aide de la théorie de la contrainte doublée modifiée. Ils ont montré que la charge critique de flambement peut être augmentée en incluant une constante de milieu élastique. Lanc et autres [Lanc, 2015] ont fait une analyse du flambement des poutres FGM Sandwich en considérant différentes conditions aux limites. Il a été déduit que la diminution du flambement critique dans toutes les conditions aux limites a une relation directe avec le rapport d'épaisseur peau-cœur-peau de la poutre en caisson. De plus, la répartition des matériaux sur un volume de poutre en caisson joue un rôle important dans la charge de flambement critique. Nguyen et autres [Nguyen, 2015] ont introduit une nouvelle théorie de déformation par cisaillement qui répartit la contrainte de cisaillement transversale dans les poutres FGM Sandwich de manière hyperbolique. Les résultats obtenus à travers à cette nouvelle théorie tiennent compte de la charge de flambement critique en considérant des paramètres tels que l'indice de loi de puissance, le rapport longueur/profondeur et l'épaisseur de la peau à l'âme et correspondent à d'autres théories existantes. Huang et ses collaborateurs [Huang, 2016] ont examiné le flambement des poutres FGM axiales en utilisant la théorie de Timoshenko. Il a été conclu que le gradient et le paramètre géométrique jouent un rôle significatif dans la détermination de la charge critique de flambement. Nguyen et autres

[Nguyen, 2016] ont utilisé la théorie de la déformation quasi-cisaillement pour analyser le flambement des poutres FGM Sandwich. Divers paramètres tels que l'indice de loi de puissance, le rapport entre l'épaisseur de la couche de peau et l'épaisseur de la couche du noyau et le rapport entre la portée et la profondeur ont été étudiés pour la charge critique de flambement. Les résultats obtenus coïncident avec les résultats précédents rapportés dans la littérature. [Şimşek, 2016] a examiné les influences de la gradation du matériau, de la déformation en cisaillement et des différentes conditions aux limites sur le comportement au flambement des poutres (2D-FGM). Il a constaté que l'indice de gradient, le flambement des poutres FGM Timoshenko bidimensionnelles peut être contrôlé. [Heydari, 2017] et [Shafiei, 2017] a travers des plusieurs recherches, ils ont constaté que l'effet de l'indice de puissance de la poutre poreuse FGM est plus important s'il varie dans la direction de l'axe par opposition à la direction de l'épaisseur. En outre, la charge de flambement non dimensionnelle diminue lorsque la fraction volumique augmente. [Li, 2017] a étudié le flambement des poutres à gradation fonctionnelle axiale basée sur la théorie du gradient de déformation non local. Les résultats obtenus montrent que la charge de flambement critique a une relation directe avec le paramètre d'échelle de longueur et une relation inverse avec le paramètre non local. En outre, sur la base du paramètre dépendant de la taille, un effet d'assouplissement et de durcissement de la rigidité peut être produit par les poutres FGM axiales sur la charge de flambement critique. Nguyen et autres [Nguyen, 2017] ont analysé le flambement latéral des poutres FGM en sections ouvertes. Les résultats révèlent que les paramètres de flambement dépendent de la variation de l'indice de fraction volumique. De plus, il a été expliqué que le rapport du moment final et le noyau céramique ont un effet considérable sur la capacité de flambement.

### III.3.2 Les plaques en (FGM) :

Boghadi et Saidi [Bodaghi, 2010] ont étudié l'analyse du flambement des plaques rectangulaires en FGM. Les résultats montrent que la charge de flambement critique a une relation inverse avec le rapport hauteur/largeur, alors que la charge de flambement augmente avec l'épaisseur de la plaque FGM. El Meiche et ses collègues [El Meiche, 2011] ont étudié la charge de flambement de la plaque sandwich FGM en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique, le nombre de fonctions inconnues impliquées n'est que de quatre. Les résultats sont en bon accord avec d'autres théories de déformation d'ordre élevées avec plus de fonctions inconnues. Bourada et autres [Bourada, 2012] ont utilisé une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwich en FGM. Les charges thermiques sont supposées comme des augmentations de

température uniformes, linéaires et non linéaires dans la direction de l'épaisseur. Enfin ils ont discuté sur les effets des rapports d'aspect et d'épaisseur, de l'indice de gradient, du type de chargement et du type de plaque sandwich sur le flambement critique. Ghannadpour et autres [Ghannadpour, 2012] ont fait des expériences sur la température critique de flambement des plaques FGM. Il est rapporté que la température critique de flambement est directement proportionnelle au rapport de hauteur/largeur et inversement proportionnelle au rapport de la largeur à l'épaisseur. Thai et Choi [Thai, 2012a] ont proposé une théorie simple et raffinée pour l'analyse du flambement des plaques FGM. Les résultats obtenus montrent que la charge de flambement critique non dimensionnelle diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance. De plus, la charge de flambement critique non dimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport de module  $E_m/E_c$ , du rapport d'aspect  $b/a$  et du rapport d'épaisseur  $a/h$  des plaques FGM. Au même titre [Asemi, 2013] a conclu que sous les charges de cisaillement, la charge de flambement diminue en augmentant la surface de la plaque rectangulaire. Ait Amar et ses collaborateurs [Ait Amar, 2014] ont présenté une théorie efficace et simple de la déformation par cisaillement pour le flambement d'une plaque sandwich en FGM reposant sur des fondations élastiques dans diverses conditions aux limites. Les résultats numériques obtenus montrent que la théorie actuelle a une précision comparable aux théories existantes de déformation par cisaillement d'ordre supérieur qui contiennent plus d'inconnues. Jabari et autres chercheurs [Jabbari, 2014] ont fait une analyse du flambement de la plaque poreuse circulaire en FGM soumise à un champ magnétique transversal. La conclusion de l'analyse révèle que le champ magnétique critique varie inversement avec la porosité de la plaque et la compression du fluide dans les pores des matériaux. D'autre part les effets des fissures et des découpes sur le comportement au flambement des plaques de FGM sous charge thermique et mécanique sont examinés par Natarajan et ses collaborateurs [Natarajan, 2014]. Il a été conclu que la charge de flambement critique a une relation inverse avec le nombre de fissures, la longueur d'une fissure et l'indice de gradient de la plaque FGM. Au même titre, Panahandeh et Amiri [Panahandeh, 2014] ont étudié le flambement des plaques FGM fissurées reposant sur une fondation élastique Pasternak. Les résultats montrent que l'augmentation du rapport entre les fissures et la largeur diminue la charge critique de flambement. Cependant, l'augmentation de la rigidité de la fondation élastique et de l'angle de la fissure entraîne une augmentation de la charge de flambement critique à condition que le rapport entre la fissure et la largeur ne soit pas assez grand pour une charge uni-axiale. Kulkarni et autres [Kulkarni, 2015] ont proposé une nouvelle solution pour l'analyse du flambement des plaques FGM à l'aide de la théorie de la déformation trigonométrique inverse cotangentielle (ITSdT). Les résultats obtenus ont été comparés aux

résultats d'autres théories. Lal et Ahlawat [Lal, 2015] ont étudié le flambement des plaques circulaires en FGM par l'utilisation d'une approche semi-analytique, à savoir une méthode de transformation différentielle. ils ont conclu que les plaques céramiques isotropes sont plus utiles que les plaques FGM pour obtenir une charge de flambement critique. En outre, la charge de flambement critique dans les plaques de FGM serrées est plus importante que dans les plaques de FGM simplement appuyées, à condition que l'indice de fraction volumique soit le même. Mantari et Monge [Mantari, 2016] ont suggéré une optimisation du flambement pour examiner le flambement des plaques sandwich FGM. Dong et Li [Dong, 2017] a travers ces recherches, ont trouvé que la charge de flambement critique est en relation directe avec l'épaisseur de la plaque FGM. Joshi et ses collègues [Joshi, 2017] ont proposé une relation non classique pour le phénomène de flambement thermique géométriquement linéaire d'une microplaque fissurée. ils ont conclu que l'existence de fissures dans les microplaques FGM diminue la température critique de flambement. De plus, la charge de flambement thermique a une relation directe avec l'épaisseur des microplaques FGM fissurées.

### III.3.3 Les coques en (FGM) :

[Sofiyev, 2010] a présenté une analyse du flambement des coques tronconiques et cylindriques en FGM sous pression hydrostatique. Il a été conclu que la gradation des matériaux sur un volume a un effet énorme sur la pression de flambement. Une autre analyse du vibration et du flambement des coques cylindriques en FGM à deux couches a été réalisée par Sepiani et ses collègues [Sepiani, 2010]. Il a été constaté que la fréquence fondamentale des coques cylindriques en FGM sous l'effet des forces statiques et périodiques est très affectée par le cisaillement transversal, l'inertie rotative, la composition du matériau et le mode de déformation. [Sofiyev, 2011] a étudié l'influence de la charge combinée critique et des profils de composition sur les coques circulaires en FGM avec et sans fondation Winkler et Pasternak. Il a conclu que les profils de composition, les rapports longueur/rayon et rayon/hauteur, et une fondation élastique ont un effet considérable sur les charges axiales et combinées critiques des coques tronconiques en FGM. Huang et ses collègues [Huang, 2011] ont travaillé sur l'analyse de flambement des coques cylindriques en FGM sous l'effet d'une charge de flexion pur non uniforme sur la section de la coque. Les résultats trouvés indiquent que le moment critique de flambement d'une coque a une relation directe avec son épaisseur. Satouri et autres chercheurs [Satouri, 2015] ont analysé le flambement des coques cylindriques de FGM en deux dimensions avec l'application de la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre. Les résultats obtenus montrent que la charge critique de flambement varie directement en fonction du

rapport entre l'épaisseur et le rayon. La rigidité du côté extérieur de la coque permet de résister à un flambement important par rapport à la rigidité à l'intérieur de la coque. De plus, l'épaisseur du cylindre a également un effet considérable sur la capacité de la coque à supporter la charge de flambement. [Sofiyev, 2015] a présenté une solution de flambement des coques tronconiques en FGM de forme fermée sous les deux pressions; hydrostatique et latérale critique, en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement (SDT). Sun et autres [Sun, 2015] ont étudié l'influence de la déformation de cisaillement transversale et de la sensibilité imparfaite sur le flambement des coques cylindriques en FGM soumises à une compression axiale dans un environnement thermique pour différentes conditions aux limites. Zhang et ses collaborateurs [Zhang, 2015] ont analysé le flambement des coques en élastomère FGM soumises à la compression et à la pression. Les résultats montrent que la pression latérale et la charge de compression axiale critique subissent toutes deux leurs effets si l'une d'elles est présente. Une autre analyse du flambement des microcoques FGM soumises à une charge axiale et radiale a été réalisée par Lou et autres [Lou, 2016]. Il ont montré que l'existence d'une pression radiale externe provoque une diminution de la charge critique de flambement. De plus, la charge de flambement critique est plus élevée sans tenir compte de la déformation de pré-flambement. Seifi et Avatefi [Seifi, 2016] ont étudié les conséquences de la pression interne sur le flambement des coques cylindriques en FGM. Il a été conclu que les défauts diminuent considérablement le moment de flexion critique et modifient le mode de flambement. L'augmentation du pourcentage de céramique, du rayon et de l'épaisseur augmente la charge de flambement tandis que la longueur du cylindre n'a pas d'effets considérables dans des coques parfaites. Sofeyev et Kuruoglu [Sofiyev, 2016] ont évalué l'effet d'une coque tronconique en FGM sur la pression latérale critique et hydrostatique dans diverses conditions limites. Wang et ses collègues [Wang, 2018] ont étudié le flambement des coques cylindriques en FGM renforcés par des plaquettes de graphène. Les résultats obtenus montrent que la charge de flambement a une relation directe avec la fonction de poids et le rapport longueur/épaisseur des plaquettes de graphène. Dans le cas où une découpe est nécessaire dans les coques en FGM, la géométrie de la découpe sur les bords de la coque est supposée être carrée ou rectangulaire pour une meilleure performance de flambement.

#### III.3.4 Autres structures en (FGM) :

En plus des études susmentionnés sur les coques, les plaques et les poutres FGM, des autres analyses de flambement ont été effectuées sur les structures en FGM. Oyekoya et ses collaborateurs [Oyekoya, 2009] ont suggéré des critères de conception optimisés pour les structures composites FGM afin d'améliorer la charge critique de flambement. Singh et Li

[Singh, 2009] ont proposé un modèle mathématique à faible dimension comprenant la méthode d'itération des valeurs propres de Newton (NEIM) pour calculer la charge de flambement de la colonne de gaz combustible de manière adéquate. Huang et Li [Huang, 2010] ont introduit un nouveau modèle tenant compte de la déformation en cisaillement pour analyser les effets du gradient radial sur les charges de flambement des poteaux élastiques à section transversale circulaire en FGM. La méthode s'est avérée simple et les résultats ont été comparés avec d'autres théories existantes comme celles de Timoshenko, Reddy-Bickford et Euler-Bernoulli. Bich et ses collègues [Bich, 2012] ont examiné le flambement d'un panneau conique en FGM soumis à une charge mécanique. Les résultats montrent que le paramètre géométrique et la gradation du matériau affectent de manière significative le comportement de flambement des panneaux coniques en FGM. Wu et autres [Wu, 2013] ont effectué une analyse de flambement du cylindre circulaire creux en FGM sous compression axiale et pression externe combinées. Des résultats utiles ont été obtenus, montrant les changements de la charge critique la plus faible sous différents paramètres comme le rapport d'aspect de la longueur sur rayon et rayon sur épaisseur, l'indice de gradient et l'intensité de la charge. [Hajlaoui, 2015] a prolongé ces travaux pour développer un élément de coque solide supposé amélioré pour étudier le comportement des structures FGM sous des charges de flambement. Il a conclu que la contrainte de flambement du P-FGM a une relation inverse avec la loi de puissance. En outre, l'augmentation du rapport rayon/épaisseur entraîne une diminution de la contrainte de flambement. De nombreuses recherches ont été effectuées pour l'analyse du flambement des FGM soumises à différentes charges (mécaniques, thermiques, de cisaillement, axiales et radiales), pressions (uni-axiales, bi-axiales et hydrostatiques), effet thermique, champ magnétique transversal, etc., à l'aide de théories mathématiques approfondies, à savoir HOSDT, SDT, MCST, ITSDT, QSDT, SDT hyperbolique et la théorie du poutre de Timochenko. Il ressort de la littérature que, parmi divers autres facteurs, la gradation des matériaux sur un volume, le profil de composition et les paramètres géométriques des FGM jouent un rôle essentiel dans le flambement. En outre, la plupart des chercheurs ont examiné la relation entre divers indices, rapports (indice de loi de puissance, indice de gradient, rapport d'élanement, rapport de module et rapport d'aspect) et les charges de flambement. Peu d'études ont également été trouvées sur l'analyse du flambement en ce qui concerne les fissures dans les FGM [Zhang, 2019].

### III.4 Analyse des vibrations libres des structures (FGM) :

#### III.4.1 Les poutres en (FGM) :

Rahmani et autres [Rahmani, 2009] ont étudié la vibration libre d'une structure en sandwich ayant un noyau syntaxique FGM à l'aide de la théorie des panneaux sandwich d'ordre supérieur. Les résultats obtenus révèlent que l'inhomogénéité du matériau joue un rôle important dans les modes propres de la poutre. De plus, les fréquences propres ont une relation inverse avec le rapport entre la portée et l'épaisseur. Simsek et Kocatürk [Simsek, 2009] ont étudié la vibration libre des poutres FGM soumises à une charge harmonique mobile concentrée. Il a été conclu que l'exposant de la loi de puissance joue un rôle important dans l'analyse de la vibration libre en tenant compte de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Sina et autres [Sina, 2009] ont appliqué une nouvelle théorie des poutres pour étudier la vibration libre des poutres FGM. Une analyse complète a été présentée concernant les formes de mode des poutres FGM en utilisant la théorie des poutres à déformation par cisaillement du premier ordre (FSDBT1 et FSDBT2) et la théorie classique des poutres. Il a été démontré que l'exposant de la loi de puissance, la distribution de la loi de puissance, le mode de vibration, la géométrie de la structure et l'épaisseur affectent grandement la vibration libre des poutres FGM. Huang et Li [Huang, 2010] ont proposé une nouvelle méthode basée sur les équations intégrales de Fredholm et ont évalué la fréquence propre des poutres FGM ayant une section transversale non uniforme en tenant compte de la rigidité à la flexion, de la densité de masse et du paramètre de gradient axial. Les résultats ont été jugés utiles pour la conception de structures de poutres non homogènes. Alshorbagy et ses collaborateurs [Alshorbagy, 2011] ont utilisé la méthode des éléments finis pour élaborer la vibration libre des poutres en FGM. Il a été montré que le présent modèle est efficace pour comparer la poutre conique de largeur ou profondeur linéairement variable et les poutres graduées de non-homogénéité polynomiale spéciale. De plus, il a été suggéré d'utiliser les théories de Timoshenko ou de Reddy pour étudier l'effet du rapport d'élancement. Sur la base de la théorie du poutre de Timoshenko, les micro-poutres de FGM ont été analysés par Ansari et autres [Ansari, 2011]. La fréquence propre sans dimension a été examinée par rapport à divers paramètres tels que l'indice de gradient, le rapport d'élancement, le mode de la poutre et l'épaisseur de la poutre en utilisant la théorie classique, la théorie de la contrainte doublée modifiée (MCST) et la théorie du gradient de déformation (SGT). Il a été conclu que les micro-poutres de FGM ont une valeur de fréquence propre sans dimension plus élevée que les autres micro-poutres et moins que les micro-poutres de carbure de silicium (SiC). De plus, les micro-poutres de FGM ont des fréquences intermédiaires dans les micro-poutres métalliques et céramiques. Alshorbagy et autres [Alshorbagy, 2011] ont présenté une analyse des vibrations libres des poutres FGM en utilisant la méthode numériques des éléments finis, d'où les équations de mouvement des poutres FGM sont dérivées à l'aide de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli

et du principe de travail virtuel. Il a été déduit que la fréquence sans dimension a une relation directe avec l'exposant de la loi de puissance (lorsque le rapport est inférieur à un) et les déviations dynamiques normalisées. Hein et Feklistova [Hein, 2011] ont utilisé l'approche par ondelettes de Haar pour trouver les fréquences des poutres en FGM en utilisant différentes géométries, densités de masse et coefficients aux limites. Les résultats montrent que l'approche par ondelettes de Haar est capable de calculer des fréquences pour les poutres avec différentes formes, rigidité, densité de masse, petits ou grands coefficients aux limites de translation et de rotation. L'avantage de la nouvelle approche c'est sa simplicité. Shahba et ses collaborateurs [Shahba, 2011] ont analysé la vibration libre des poutres coniques de Timoshenko en FGM. Les résultats montrent que la fréquence propre diminue avec le rapport de conicité. Yousefi et Rastgoo [Yousefi, 2011] ont utilisé la méthode de Ritz pour analyser la vibration libre des poutres courbes spatial en FGM qui se présentent sous la forme d'un ressort hélicoïdal cylindrique. Il a été rapporté qu'en augmentant le nombre de tours et l'angle de pas d'hélice, le paramètre de fréquence augmente. Shahba et Rajasekaran [Shahba, 2012] ont utilisé la méthode des éléments de transformation différentielle (DTEM) et la méthode des éléments de quadrature différentielle (DQEM) d'ordre inférieur pour déterminer les fréquences transversales et longitudinales des poutres en FGM d'Euler-Bernoulli. Les résultats montrent que la DTEM est rapide par rapport à la DTM (la méthode de transformation différentielle), et que les résultats obtenus sont plus précis. Thai et Vo [Thai, 2012b] ont développé des théories de fortes similitudes avec la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli dans certains aspects, pour l'analyse de flexion et la vibration libre de poutres FGM. Les théories développées tiennent compte de la variation d'ordre supérieur de la déformation de cisaillement transverse à travers la profondeur de la poutre, et satisfont les conditions aux limites. Il a été conclu que les effets de déformation par cisaillement réduisent les fréquences propres des poutres de FGM. Wattanasakulpong et ses collaborateurs [Wattanasakulpong, 2012] ont utilisé une théorie améliorée de la déformation par cisaillement du troisième ordre pour formuler une équation déterminante pour prédire la vibration libre de poutres en couches de FGM, il a été conclu que la position de la masse ajoutée au poutre a un effet substantiel sur les fréquences. Wei et autres [Wei, 2012] ont utilisé la méthode de la matrice de transformation pour étudier l'effet du nombre et de l'emplacement des fissures, de l'inertie rotative et de la déformation par cisaillement sur les fréquences des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Les résultats montrent que l'existence de fissures dans les poutres de FGM diminue les fréquences et modifie le mode de vibration. De plus, l'inertie en rotation a un effet négligeable, et la déformation en cisaillement a un effet significatif sur la vibration libre des poutres en FGM. Aydin [Aydin, 2013] a étudié la vibration libre des poutres

FGM contenant un nombre arbitraire de fissures à bord ouvert. L'étude est basée sur une poutre Euler-Bernoulli et des ressorts de rotation sans masse reliant deux segments intacts de la poutre. Une étude paramétrique détaillée a été effectuée pour examiner les influences de la profondeur des fissures, de l'emplacement des fissures, du nombre total de fissures, de la distribution des propriétés des matériaux et des conditions aux limites sur les fréquences propres des poutres FGM endommagées par un déterminant du troisième ordre. Les résultats montrent que la fréquence diminue lorsque les fissures se développent à un point où le moment de flexion est concentré. En plus, par rapport aux études précédentes, cette diminution de l'ordre des déterminants peut conduire à des avantages significatifs dans le temps de calcul. Huang et autres [Huang, 2013] ont présenté une nouvelle approche pour étudier les comportements de vibration des poutres de Timoshenko à gradation fonctionnelle axiale avec une section transversale non uniforme pour obtenir des fréquences propres d'ordre supérieur et inférieur de manière efficace. Une autre analyse de la vibration libre des poutres rectangulaires en FGM chargées axialement a été réalisée par Nguyen et ses collaborateurs [Nguyen, 2013]. Il a été conclu qu'en changeant le mode de force axiale de la tension à la compression, les fréquences propres disparaissent. De plus, la fréquence propre augmente sous l'effet du coefficient de Poisson. Paradhan et Chakraverty [Pradhan, 2013] ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour examiner la vibration libre des poutres d'Euler et Timoshenko en FGM. L'objectif de ce travail est d'étudier les effets des fractions volumiques constituantes, des rapports d'élanement et des théories des poutres sur les fréquences propres. Civalek et Akgöz [Akgöz, 2013] ont étudié la réponse aux vibrations libres d'une micro-poutre FGM en porte-à-faux conique en conjonction avec la poutre de Euler-Bernoulli et la théorie des contraintes doublées modifiées. Il a été conclu que les fréquences sans dimension augmentent en augmentant le rapport du module de Young des surfaces supérieure et inférieure du poutre jusqu'à ce que la valeur de l'indice de loi de puissance soit faible. Ziane et ses collaborateurs [Ziane, 2013] ont utilisé la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) pour calculer les fréquences propres des poutres en caisson FGM à parois épaisses et minces. Il a été conclu que les fréquences propres de torsion sont directement proportionnelles au rapport entre l'épaisseur et le côté. Hadji et ses collaborateurs [Hadji, 2014] ont développé une théorie des poutres de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse des vibrations statiques et libres de poutres FGM. La théorie tient compte de la variation d'ordre supérieur de la déformation de cisaillement transversale sur la profondeur de la poutre. La précision des solutions a été vérifiée par comparaison des résultats obtenus avec les solutions existantes. Aghazadeh et autres [Aghazadeh, 2014] ont utilisé trois théories de poutre, à savoir la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie du poutre de Timoshenko et la théorie des poutres

à déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT) pour étudier la vibration libre des poutres FGM ayant un paramètre d'échelle de longueur variable. Les résultats montrent qu'en augmentant le paramètre d'échelle de longueur, la fréquence du mode de déformation transversale augmente. Il a également été déclaré que la méthode présentée peut être utile pour analyser et concevoir des poutres FGM à petite échelle. Li et ses collègues [Li, 2014] ont étudié des poutres FGM à moyeu rotatif en utilisant la théorie de la dynamique couplée rigide-flexible. Le modèle dynamique développé ici peut être utilisé dans la conception de matériaux gradués des poutres FGM pour obtenir des caractéristiques dynamiques spécifiées. Liu et Shu [Liu, 2014a] ont développé une solution analytique pour étudié l'impact de la délaminage sur les fréquences des poutres FGM de manière exponentielle en utilisant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, les hypothèses de "mode libre" et de "mode contraint". Il a été conclu que les fréquences en mode contraint et en mode libre augmentent en augmentant le rapport du module de Young jusqu'à une unité, à condition que l'effet de délaminage n'existe pas. Au même titre [Liu, 2014b] a conclu que le délaminage entraîne une augmentation des fréquences propres de la poutre FGM et cet effet devient plus important en augmentant le rapport du module de Young et en diminuant les propriétés des matériaux. Mashat et ses collaborateurs [Mashat, 2014] ont utilisé la formulation unifiée de Carrera (CUF) et d'autres théories pour analyser la vibration libre des poutres FGM. Il est conclu que pour déterminer avec précision les fréquences de flexion et de torsion des poutres à parois épaisses et minces en FGM, il faut utiliser des théories d'ordre supérieur. En outre, le (CUF) est utile pour obtenir divers modèles unidimensionnels. Yang et autres [Yang, 2014] ont présenté une méthode d'équation intégrale de domaine limite sans maillage pour analyser les comportements de vibration libre des structures de FGM Sur la base de la théorie de l'élasticité bidimensionnelle, cette méthode conserve l'avantage de réduction de dimensionnalité du méthode des éléments aux limites (BEM) classique et utilise des solutions fondamentales élastostatiques simples. Enfin ils ont démontré efficacité et sa précision élevées de la présente méthode par des exemples numériques. Hadji et autres [Hadji, 2015] ont utilisé une théorie raffinée de la déformation par cisaillement exponentielle pour l'analyse des vibrations libres d'une poutre FGM en tenant compte des porosités qui peuvent éventuellement se produire à l'intérieur des FGM pendant leur fabrication. Des exemples illustratifs sont également donnés pour montrer les effets de gradients variables, de fraction volumique de porosité, de rapports d'aspect et de rapports épaisseur/longueur sur la vibration libre des poutres FGM. Jin et Wang [Jin, 2015b] ont évalué les fréquences des poutres de FGM en utilisant la méthode des éléments en quadrature de forme faible. Les résultats se sont avérés être en bon accord avec ceux de la littérature existante. Şimşek [Şimşek, 2015] a étudié la vibration libre du

poutre de Timoshenko bidirectionnel (BD) de FGM en utilisant la théorie du poutre de Timoshenko. Il a été signalé que pour répondre aux exigences de conception du (BD) FGM, il faut tenir compte de l'indice de gradient de matériau et des propriétés. Calim [Calim, 2016] a examiné les vibrations libres et forcées des poutres FGM Timoshenko sur des fondations élastiques/viscoélastiques. Il a été avéré que le gradient de matériau est un paramètre important qui joue un rôle vital dans les fréquences propres et fondamentales de la structure FGM. [Calim, 2016] a ajouté que la variation de l'indice de gradient de matière affecte la période de vibration et le déplacement du poutre de Timochenko en FGM. Chen et ses collaborateurs [Chen, 2016] ont étudié les caractéristiques de vibration libre et forcée des poutres poreuses en FGM avec une distribution de porosité non uniforme dont les modules d'élasticité et la densité de masse sont échelonnés de manière non linéaire le long de la direction de l'épaisseur. Il a été rapporté que l'augmentation de la porosité des poutres FGM entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale des poutres ayant 10 couches de porosité mais diminue pour les poutres ayant 20 couches de porosité. Jing et ses collaborateurs [Jing, 2016] ont utilisé la théorie des poutres de Timoshenko et la méthode des éléments finis pour étudier les vibrations statiques et libres des poutres FGM. Il a été rapporté que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de l'exposant de la fraction volumique et augmentent avec l'augmentation du rapport entre la portée et la profondeur. [Li, 2016b] ont présenté un modèle de poutre de Timoshenko dépendant de la taille, qui tient compte de la variation de la loi de puissance sur l'épaisseur d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM) à deux constituants. Il a été conclu que les fréquences propres des poutres FGM peuvent être contrôlées en classant le matériau selon l'épaisseur et l'indice de loi de puissance. La déformation par cisaillement a un impact plus considérable sur les fréquences d'ordre supérieur que sur les fréquences d'ordre inférieur. En outre, les poutres de FGM peuvent exercer un impact de durcissement et de ramollissement de la rigidité en fonction de la valeur comparative du paramètre des caractéristiques du matériau et du paramètre non local. Rezaiee-Pajand et Hozhabrossadati [Rezaiee-Pajand, 2016] ont présenté une analyse des vibrations libre de deux systèmes à double poutre pour étudié l'effet de la rigidité du ressort, de la masse suspendue et du paramètre de gradient sur des poutres FGM à double axe. Il a été conclu que la fréquence des poutres FGM est directement proportionnelle au facteur de constante du ressort et inversement proportionnelle à l'épaisseur de la poutre. Tossapanon et Wattanasakulpong [Tossapanon, 2016] ont étudié la vibration des poutres sandwich FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres comprenant des ressorts à couche Winkler et de cisaillement. Il est révélé que les constantes de ressort des fondations élastiques ont un impact significatif sur les résultats de vibration des poutres. Zhao et autres [Zhao, 2016] ont présenté

une nouvelle approche basée sur la théorie des polynômes de Chebyshev pour analyser les vibrations libres de poutres Euler-Bernoulli et Timoshenko à gradation fonctionnelle axiale avec des sections transversales non uniformes. La méthode adoptée s'est avérée pratique, et les résultats obtenus sont comparés à ceux d'autres méthodes. Lee et son collègue [Lee, 2017] ont développé une méthode de matrice de transfert exacte pour analyser les caractéristiques de vibration libre d'une poutre FGM. La matrice de transfert pour la poutre FGM est déduite de la relation des déplacements et des forces aux deux extrémités de la poutre. Ils ont démontré l'exactitude de la méthode proposée par comparaison des fréquences propres calculées à celles discutées dans les articles précédents. Hadji et autres [Hadji, 2017] ont développé diverses théories des poutres de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour la propagation des ondes dans des poutres FGM. Il a été discuté en détail sur l'effet des distributions de fractions volumiques sur la propagation des ondes d'une poutre FGM. Il a été conclu que les résultats obtenus peuvent être utilisés dans les techniques d'inspection par ultrasons et la surveillance de l'état de la structure. D'après les recherches de Fang et ses collègues [Fang, 2018], il a été conclu que le paramètre d'échelle de longueur et la variation du gradient de matériau jouent un rôle essentiel dans la déformation des micro-poutres FGM en rotation en fonction de leur taille.

#### III.4.2 Les plaques en (FGM) :

Une analyse de vibration libre des plaques FGM épaisses a été établie par Malekzadeh [Malekzadeh, 2009] en utilisant la théorie élastique tridimensionnelle. Il a été conclu que les paramètres de fréquence propre sont fortement affectés par le coefficient élastique de la couche de cisaillement à condition que le coefficient élastique de Winkler ait une valeur modérée. Zhao et autres [Zhao, 2009] ont utilisé la méthode  $k_p$ -Ritz sans élément pour analyser la vibration libre des plaques en FGM. Les résultats obtenus montrent que l'exposant de fraction volumique et le rapport de longueur/épaisseur ont un effet considérable sur la fréquence des plaques de FGM. De plus, la fréquence des plaques FGM augmente également avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison au-dessus de  $30^\circ$ . Hashemi et autres chercheurs [Hosseini, 2010] ont utilisé la théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) pour analyser la vibration libre des plaques rectangulaires moyennement épaisses en FGM. Il a été révélé que le paramètre de fréquence augmente avec l'augmentation de la fondation de Winkler et Pasternak, le paramètre de rigidité et le rapport d'aspect (hauteur/largeur, épaisseur/longueur). Cependant, il diminue avec l'épaisseur d'une plaque. De plus, le paramètre de fréquence propre normalisé a une relation directe avec le paramètre de rigidité des fondations jusqu'à la valeur de l'indice de gradient critique. Liu et autres [Liu, 2010] ont expliqué les conséquences de l'inhomogénéité des

matériaux dans le plan sur la fréquence fondamentale des plaques de FGM. Ait Atmane et ses collaborateurs [Ait Atmane, 2010] ont examiné l'analyse des vibrations libres de plaques FGM simplement supportées reposant sur une fondation élastique Winkler-Pasternak par une nouvelle théorie de déformation par cisaillement plus élevée. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier. Hadji et autres [Hadji, 2011] ont utilisé la théorie des plaques raffinées à quatre variables (RPT) pour l'analyse des vibrations libres de plaques rectangulaires sandwich à matériau à gradation fonctionnelle (FGM). Ils ont comparé les résultats obtenus avec ceux des théories classiques, du premier ordre et des autres théories d'ordre supérieur, il s'avère que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement de vibration libre des plaques sandwich en FGM. Benachour et ses collaborateurs [Benachour, 2011] ont utilisé la théorie raffinées des plaques à quatre variables pour analyser la vibration libre des plaques en FGM. Les effets de divers paramètres comme le rapport d'aspect, le rapport longueur/épaisseur et l'indice de gradient sur la vibration libre ont été donnés à l'aide d'exemples. Les résultats montrent un bon accord avec les autres théories existantes et que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement de vibration libre des plaques FGM. Hashemi et autres [Hashemi, 2011] ont étudié la vibration libre des plaques rectangulaires de FGM en utilisant la théorie de Reddy basé sur la déformation par cisaillement des plaques du troisième ordre. L'approche présentée peut être utilisée pour prévoir les modes dans le plan et hors plan des plaques de FGM. De plus, le paramètre de fréquence diminue en augmentant le rapport d'aspect (épaisseur/longueur, du rapport hauteur/largeur) des plaques en FGM. Jodaei et ses collègues [Jodaei, 2012] ont présenté une analyse tridimensionnelle des plaques annulaires en FGM à l'aide de la méthode de quadrature différentielle basée sur l'espace d'état (SSDQM) et de la modélisation comparative du comportement par réseau de neurones artificiels (ANN) pour différentes conditions aux limites. Les résultats révèlent que l'ANN est une méthode utile pour prédire la fréquence propre alors que la SSDQM a une vitesse de convergence rapide. Il a également été révélé par Zahedinejad et ses collaborateurs [Zahedinejad, 2010] que la fréquence propre est directement proportionnelle au nombre d'ondes circonférentielles. Thai et Choi [Thai, 2012a], Benfarhat et ses collaborateurs [Benferhat, 2016] ont étudié le comportement en vibration libre des plaques FGM reposant sur des fondation élastique en prenant en compte l'effet des déformations transversales de cisaillement. Ils ont conclu que la fréquence non dimensionnelle des plaques FGM sur les fondations de Winkler est réduite par l'augmentation de l'indice de la loi de puissance, et elle n'a aucun effet sur les plaques de MGF montées sur les fondations de Pasternak. [Dozio, 2014] a suggéré l'utilisation de théories d'ordre supérieur pour les plaques de FGM. Il a été rapporté que les théories d'ordre supérieur sont favorables à

l'utilisation lorsque le rapport longueur/épaisseur est inférieur à 10 et qu'un ou deux bords serrés sont inclus dans les plaques de FGM. En outre, la fréquence exacte de nombreuses plaques de FGM avec différentes conditions aux limites a également été présentée. [Jędrysiak, 2014] a analysé la fréquence des plaques minces en FGM à microstructure par l'application de la méthode de modélisation de tolérance. Il a été suggéré que tous les modèles présentés peuvent être appliqués pour analyser des fréquences de vibration libre plus basses. De plus, les fréquences de vibration libre plus basses et plus élevées ont une relation inverse avec le rapport de module de Young. Akavci et Tanrikulu [Akavci, 2015] ont présenté des théories de déformation de cisaillement bidimensionnelles (2D) et quasi tridimensionnelles (quasi-3D) pour l'analyse des vibrations statiques et libres de plaques en FGM à l'aide d'une nouvelle fonction de forme hyperbolique. Il est rapporté que la déformation normale transversale joue un rôle important dans la vibration libre des plaques FGM, tout comme la déformation de cisaillement transversale. Chen et autres chercheurs [Chen, 2015] ont appliqué la méthode d'interpolation du voisin naturel local sans maille pour étudier la vibration libre des plaques de FGM. Il a été suggéré que la méthode n'est pas utile pour l'analyse des plaques très fines. Li et Zhang [Li, 2016a] ont examiné la vibration libre des plaques rotatives en FGM. Il a été rapporté que le phénomène de croisement des fréquences ne se manifeste pas à la fois sur les plaques en porte-à-faux rotatives et sur les plaques FGM. Thang et ses collègues [Thang, 2018] ont étudié l'influence positive des raidisseurs sur la vibration des plaques FGM sur la base d'une approche exacte via la solution de Navier. Ils ont conclu que la fréquence fondamentale des plaques S-FGM augmente en augmentant le nombre de raidisseurs transversaux et longitudinaux. Zur [Zur, 2018] a analysé la vibration libre des plaques circulaires FGM à support élastique en utilisant la fonction de Quasi-Green. Il a été constaté que les fréquences sans dimension des plaques FGM se sont avérées inférieures à celles des plaques céramiques. De plus, les plaques FGM sont considérablement affectées par la rigidité et la position du support circulaire.

#### III.4.3 Les coques en (FGM) :

Cinefra et autres chercheurs [Cinefra, 2010] ont proposé un modèle à cinématique variable qui est une extension de la solution unifiée de Carrera, pour étudier la vibration libre des coques multicouches en FGM. Il a été signalé que le modèle présenté peut être utilisé pour analyser les coques multicouches en raison de sa grande précision. Fadaee et autres [Fadaee, 2013] ont utilisé les théories de Donnell et Sander pour obtenir la solution de forme fermée des coques sphériques de FGM à deux arêtes opposées simplement appuyées dans différentes conditions aux limites. Les résultats indiquent que le paramètre de fréquence a une relation

directe avec le rapport de courbure. Neves et ses collaborateurs [Neves, 2013] ont analysé la vibration libre des coques de FGM en utilisant la formule unifiée de Carrera fusionnée avec la méthode de collocation de la fonction de base radiale. Les résultats montrent que la fréquence fondamentale diminue avec une augmentation des rayons de courbure et de l'exposant de la loi de puissance. Ebrahimi et Najafizadeh [Ebrahimi, 2014] ont fait l'analyse de la vibration libre d'une coque cylindrique circulaire bidimensionnelle en FGM. Les résultats de cette étude montrent que la fréquence propre du matériau peut être modifiée afin de répondre aux résultats attendus par la manipulation des fractions volumiques constituantes. Tornabene et autres [Tornabene, 2014] ont utilisé différents modèles mathématiques pour analyser la vibration libre des coques à double courbure en FGM. Parmi les conclusions obtenus, il a été rapporté que des résultats précis pour les fréquences propres ne sont pas nécessairement obtenus en augmentant le nombre de théories d'ordre supérieur. Jin et ses collaborateurs [Jin, 2015a] ont adopté la méthode de Fourier Ritz pour étudier la vibration libre des coques FGM laminées. Kim [Kim, 2015] a évalué la vibration libre des coques en FGM reposant sur une fondation élastique ayant un bord oblique à l'aide de la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT). Il a été constaté que la fréquence des coques de FGM diminue avec l'augmentation de l'angle oblique. De plus, la fréquence propre peut être ajustée en changeant le profil du matériau. Tadi Beni et autres [Tadi Beni, 2015] ont trouvé qu'une valeur plus élevée du paramètre d'échelle de longueur augmente la fréquence propre des coques en FGM. Xie et ses collaborateurs [Xie, 2015] ont présenté une approche de solution basée sur la méthode de Discrétisation en ondelettes de Haar (HWD) pour l'analyse des vibrations libres des coques de révolution sphériques et paraboliques en FGM avec des conditions aux limites arbitraires. Il a été rapporté que les fréquences des coques en FGM ont une relation inverse avec l'exposant du matériau, le rapport longueur/rayon et l'angle du semivertex. Au même titre [Tadi Beni, 2015] et [Thang, 2018] ont déduit que les fréquences ont une relation directe avec l'épaisseur des coques de FGM à travers des recherches élaborées. Wang et Wu [Wang, 2017] ont ajouté que le nombre d'ondes circonférentielles joue également un rôle important dans les fréquences propres des coques cylindriques circulaires poreuse en FGM. Bahadori et Najafizadeh [Bahadori, 2015] ont évalué les vibrations libres des coques cylindriques 2D reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak à l'aide de la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT). Il a été conclu que les fréquences propres des coques cylindriques 2D augmentent avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance et du module de cisaillement de la fondation. De plus, une valeur plus élevée du rapport hauteur/rayon augmente les fréquences propres, tandis [Wang, 2017] a souligné qu'une valeur plus élevée du rapport longueur/rayon diminue la

fréquence propre des coques cylindriques en FGM. Chen et autres [Chen, 2017] ont rapporté que l'épaisseur et le matériau de l'enveloppe affectent grandement la fréquence fondamentale des enveloppes en FGM. Punera et Kant [Punera, 2017] ont appliqué différentes théories supérieures pour évaluer l'effet des paramètres géométriques et matériels sur la fréquence des coques cylindriques ouvertes en FGM.

#### III.4.4 Autres structures en (FGM) :

SobhaniAragh et Yas [Sobhani Aragh, 2010] ont obtenu des résultats utiles pour la fréquence propre normalisée de l'orientation des fibres de FGM et du panneau cylindrique de fraction volumique en utilisant la méthode de quadrature différentielle (DQM). Zahedinejad et ses collaborateurs [Zahedinejad, 2010] ont proposé une analyse tridimensionnelle des vibrations libres des panneaux courbes en FGM dans diverses conditions aux limites en utilisant la DQM. Akbari et ses collaborateurs [Akbari, 2014] ont analysé la vibration libre de panneaux coniques ouverts en FGM avec des supports de type Lévy. Il a été conclu que le nombre de mode circonférentiel du paramètre de fréquence fondamental a une relation directe avec la flexion du support et l'ouverture du panneau conique de FGM. Fantuzzi et ses collaborateurs [Fantuzzi, 2016] ont proposé des modèles de coques en 2D et 3D pour étudier la vibration libre des panneaux cylindriques et sphériques en FGM. Il a été conclu que l'utilisation de la quadrature différentielle généralisée bidimensionnelle (2D-GDQ) est une nécessité absolue pour l'évaluation de la vibration libre des panneaux cylindriques et sphériques FGM d'une manière efficace. De plus, offre d'obtenues des fréquences 3D exactes.

#### III.5 conclusion :

Ce chapitre donne un aperçu sur les travaux effectués sur les structures en matériaux a gradient évalué (FGM) au point de vue de stabilité, du flambement et de l'analyse des vibrations libres par des différents auteurs dans le monde entier. Ces travaux sont purement analytiques, ou basées sur des méthodes numériques. La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) a été largement utilisé dans les solutions numériques des FGM. Cependant, la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) être utilisée pour obtenir des résultats plus précis et exacte. En plus d'autres théories mathématiques ont été utilisé tel que la méthode des éléments de quadrature différentielle (DQEM), utilisé la méthode des éléments de transformation différentielle (DTEM), la théorie du gradient de déformation (SGT), la théorie de

la contrainte doublée modifiée (MCST), la méthode de quadrature différentielle (DQM) et la méthode de quadrature différentielle basée sur l'espace d'état (SSDQM).

---

# ***CHAPITRE IV :***

***Analyse de l'effet de cisaillement  
transverse sur la réponse mécanique  
des structures en FGM***

---

**IV.1 Introduction :**

Une nouvelle classe de matériaux connue sous le nom de « matériaux à gradient évalués » (FGM) a attiré beaucoup d'attention en tant que matériaux de structure avancés dans de nombreux éléments structurels utilisés dans des situations où de grands gradients de température sont rencontrés. Les FGM sont conçues pour que les propriétés des matériaux varient en douceur et en continu à travers l'épaisseur de la surface d'une céramique exposée à haute température à celle d'un métal sur l'autre surface. La composition du matériau change progressivement dans le sens de l'épaisseur. Les FGM sont largement utilisées dans les domaines de la mécanique, de l'aérospatiale, du nucléaire et du génie civil. Par conséquent, les études consacrées à la compréhension du comportement dynamique des poutres et plaques FGM ont reçu de plus en plus d'attention ces dernières années. Thai et Vo [Thai, 2012b] ont obtenu une solution analytique de type Navier pour la flexion et la vibration de poutres à gradient évalués sur la base de diverses théories de poutre de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Tounsi et al. [Tounsi, 2013] utilisent une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée pour la flexion thermo-élastique de plaques sandwich à gradient évalués. Li et Batra [Li, 2013] ont dérivé des relations analytiques entre la charge critique de flambement d'une poutre de Timoshenko à gradient évalués et Euler-Bernoulli pour diverses conditions aux limites. Nguyen et al. [Nguyen, 2013] a appliqué la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour l'analyse des vibrations statiques et libres de poutres à gradient évalués et obtenu une solution analytique selon la procédure de solution de Navier.

Ansari et al. [Ansari, 2013] ont étudié la flexion, le flambage et la vibration libre en fonction de la taille des micro-poutres Timoshenko à gradient évalués en se basant sur la théorie du gradient de déformation la plus générale. Pradhan et al. [Pradhan, 2013] analysent la vibration libre des poutres à gradient évalués d'Euler et de Timoshenko par la méthode de Rayleigh-Ritz. Xu et al. [Xu, 2014] ont présenté les solutions d'élasticité bidimensionnelle des poutres à gradient évalués avec une épaisseur variable. Bourada et al. [Bourada, 2015] ont utilisé une nouvelle théorie simple des déformations normales et de cisaillement pour les poutres à gradient évalués. Bennai et al. [Bennai, 2015] ont utilisé une nouvelle théorie de déformation normale et de cisaillement d'ordre supérieur pour les poutres sandwich à gradient évalués. Akbaş [Akbaş, 2015] a étudié la propagation des ondes d'une poutre à gradient évalués dans des environnements thermiques. Bounouara et al. [Bounouara, 2016] ont utilisé une théorie non locale de déformation en cisaillement d'ordre zéro pour la vibration libre de plaques nanométriques à gradient évalués reposant sur une fondation élastique. Récemment, Sayyad et

Ghugal [Sayyad, 2017] ont passé en revue toutes les méthodes numériques et analytiques disponibles dans la littérature pour l'analyse des poutres et des plaques composites. Ghumare et Sayyad [Ghumare, 2017] ont développé une nouvelle théorie de déformation normale et de cisaillement d'ordre 5 pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres à gradient évalués. Kahya et Turan [Kahya, 2017] ont développé une formulation par éléments finis pour l'analyse de flambement et de vibration des poutres à gradient évalués basée sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre. Akbaş [Akbaş, 2017a] a étudié les effets thermiques sur la vibration des poutres profondes à gradient évalués avec porosité. Akbaş [Akbaş, 2017b] a développé la vibration libre des poutres micro-échelles à gradient évalués fissurées par les bords en se basant sur la théorie modifiée de la contrainte de couple. Akbaş [Akbaş, 2018a] a analysé la vibration forcée des micro-poutres fissurées à gradient évalués. [Akbaş, 2018b] a analysé la vibration forcée des poutres profondes poreuses à gradient évalués. El-Haina et al. [El-Haina, 2017] ont utilisé une approche analytique simple pour le flambement thermique de plaques sandwiches épaisses à gradient évalués. Menasria et al. [Menasria, 2017] ont utilisé un nouveau et simple HSDT pour l'analyse de la stabilité thermique des plaques sandwiches FGM. Récemment, Tounsi et ses collaborateurs (Fourn et al. [Fourn, 2018], Chikh et al. [Chikh, 2017], Abdelaziz et al. [Abdelaziz, 2017], Attia et al. [Attia, 2018], Bellifa et al. [Bellifa, 2017], Mokhtar et al. [Mokhtar, 2018], Bouhadra et al. [Bouhadra, 2018], Khiloun et al. [Khiloun, 2019]) ont développé des nouvelles théories de plaques de déformation en cisaillement impliquant seulement quatre fonctions inconnues. Mahmoud et al. [Mahmoud, 2017] ont utilisé une nouvelle théorie de plaques de déformation en cisaillement avec effet d'étirement pour l'analyse de flambement des plaques sandwich à gradient évalués. Zouatnia et al. [Zouatnia, 2017] ont développé une solution analytique pour les réponses en flexion et en vibration des poutres à gradient évalués avec des porosités. Younsi et al. [Younsi, 2018] ont utilisé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement quasi-3D et 2D pour l'analyse de la flexion et des vibrations libres des plaques FGM. Ould Larbi et al. [Ould Larbi, 2018] ont étudié une solution analytique pour la vibration libre d'une poutre à gradient évalués en utilisant une théorie simple de déformation en cisaillement du premier ordre. Zouatnia et al. [Zouatnia, 2019] ont étudié l'effet des modèles micromécaniques sur la flexion de la poutre FGM en utilisant une nouvelle théorie hyperbolique de déformation en cisaillement. Hadji et al. [Hadji, 2019] ont développé une solution analytique pour les réponses en flexion et en vibration libre des poutres à gradient évalués avec porosités : Effet des modèles micromécaniques.

Dans le présent article, l'analyse des vibrations libres des poutres FGM est étudiée. La théorie proposée n'a que trois inconnues et trois équations directrices, mais elle satisfait les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés mécaniques des plaques sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur selon une loi de distribution de puissance en fonction des fractions volumiques des constituants. Les équations de mouvement du poutre intéressantes pour l'analyse des vibrations libres sont déterminées par le principe de Hamilton. Ces équations sont ensuite résolues en utilisant la procédure de Navier. L'exactitude des résultats de cette théorie est vérifiée par comparaison avec d'autres HSDBT disponibles dans la littérature.

#### IV.2 Cinématique :

Considérons une poutre à gradient évalués de longueur  $L$  et de section rectangulaire  $b \times h$ ,  $b$  étant la largeur et  $h$  la hauteur. Les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont prises respectivement le long de la longueur, de la largeur et de la hauteur de la poutre, comme indiqué sur la figure 1.

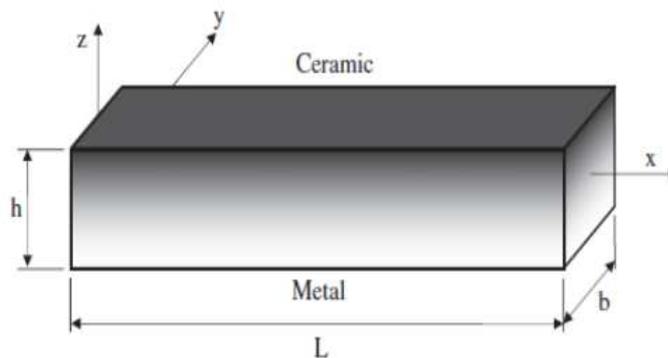


Figure IV.1: Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM.

La formulation est limitée au comportement élastique linéaire du matériau. Le champ de déplacement de la théorie originale actuelle de la poutre à déformation par cisaillement est choisi sur la base des hypothèses suivantes :

- Les déplacements axiaux et transversaux sont divisés en composantes de flexion et de cisaillement ;
- La composante de flexion du déplacement axial est similaire à celle donnée par le CBT ;
- La composante de cisaillement du déplacement axial donne lieu à une variation d'ordre supérieur de la déformation de cisaillement et donc de la contrainte de cisaillement à travers la

profondeur de la poutre de telle manière que la contrainte de cisaillement disparaît sur les surfaces supérieure et inférieure.

Sur la base de ces hypothèses, les champs de déplacement de la présente théorie originale des poutres à déformation par cisaillement sont donnés sous une forme générale comme suit.

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{(IV.1a)}$$

$$v(x, z, t) = 0 \quad \text{(IV.1b)}$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad \text{(IV.1c)}$$

Où  $u_0$  est le déplacement axial d'un point sur le plan médian de la poutre ;  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal d'un point sur le plan médian de la poutre ; et  $f(z)$  est une fonction de forme déterminant la distribution de la déformation et de la contrainte de cisaillement transversales à travers la profondeur de la poutre. Les fonctions de forme  $f(z)$  sont choisies pour satisfaire les conditions limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, ainsi un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. Dans ce travail, le HSDBT original actuel est obtenu en fixant.

$$f(z) = \frac{1}{2} h \tanh\left(\frac{2z}{h}\right) - \frac{3}{4} \frac{z^3}{h^2 \cosh(1)^2} \quad \text{(IV.2)}$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'Eq. (IV.1) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad \text{(IV.3a)}$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \quad \text{(IV.3b)}$$

où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{(IV.3c)}$$

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad \text{et} \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad \text{(IV.3d)}$$

L'état de contrainte dans la poutre est donné par la loi de Hooke généralisé comme suit :

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad \text{(IV.4a)}$$

où

$$Q_{11}(z) = E(z) \quad \text{et} \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad \text{(IV.4b)}$$

### IV.3 Lois de variation des matériaux :

Propriétés	Métal		Céramique	
	Aluminium (Al)	Alumine (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	Alumine (ZrO <sub>3</sub> )	Nitride de silicium (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> )
E (GPa)	70	380	200	322.2
P (kg/m <sup>3</sup> )	2702	3800	5700	2370

Tableau IV.1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la poutre FGM.

Les propriétés matérielles de la poutre FGM telles que le module de Young **E** et la masse volumique **ρ** sont considérés comme variant de façon continue dans l'épaisseur du poutre selon la variation de la loi de puissance comme suit (Benahmed et al. [Benahmed, 2017], Bouafia et al. [Bouafia, 2017])

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{p1} + E_m \quad \text{(IV.5a)}$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{p2} + \rho_m \quad \text{(IV.5b)}$$

Où  $(E_c, \rho_c)$  et  $(E_m, \rho_m)$  sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement, et p1, p2 sont des constantes. Le coefficient de Poisson  $\nu$  est considéré comme étant constant et égal à 0,3 tout au long des analyses. (Zidi et al. [Zidi, 2017], Menasria et al. [Menasria, 2017]). La valeur de p (p1 ou p2) égale à zéro représente une poutre entièrement céramique et p infini, une poutre entièrement métallique. La distribution de la composition de la céramique et du métal est linéaire pour p=1. Les valeurs typiques pour le métal et la céramique utilisés dans la poutre FGM sont répertoriées dans le tableau IV.1.

#### IV.4 Équations de mouvement :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique comme [Reddy, 2002].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Où :  $t$  est le temps;  $t_1$  et  $t_2$  sont les temps initial et final, respectivement ;  $\delta U$  est la variation virtuel de l'énergie de déformation; et  $\delta T$  est la variation virtuel de l'énergie cinétique de la poutre FGM. La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être définie comme suit :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx \\ &= \int_0^L \left( N \frac{d\delta u_0}{dx} - M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d\delta w_s}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Où :  $N$ ,  $M_b$ ,  $M_s$  et  $Q$  sont les résultantes de contraintes définies comme suit :

$$(N, M_b, M_s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f) \sigma_x dz \quad \text{et} \quad Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g \tau_{xz} dz \quad (\text{IV.8})$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_1 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta \dot{w}_b \delta \dot{w}_s)] - I_2 \left( \dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} + \frac{d\dot{w}_b}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) \right. \\ &\quad + I_4 \left( \frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) + I_3 \left( \dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) + I_6 \left( \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} \right) \\ &\quad \left. + I_5 \left( \frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable temporelle  $t$ ;  $\rho(z)$  est la densité de masse, et  $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$  sont les inerties de masse définies comme suit :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f, z^2, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV.10})$$

Substituant les expressions pour  $\delta U$  et  $\delta T$  des équations (IV.7), (IV.9) dans l'équation (IV.6), et en intégrant par parties par rapport aux variables d'espace et de temps, en rassemblant les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations du mouvement pour la poutre FGM résultantes sont :

$$\delta u_0 : \frac{dN_x}{dx} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - I_3 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (\text{IV.11a})$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} = I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_4 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - I_5 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{IV.11b})$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ_{xz}}{dx} = I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_3 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_5 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - I_6 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{IV.11c})$$

Par substitution des résultantes des contraintes de l'équation (IV.8) dans l'équation (IV.11), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $\delta u_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ ) comme suit :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - I_3 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (\text{IV.12a})$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} = I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_3 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_4 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - I_5 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{IV.12b})$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_3 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_5 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - I_6 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{IV.12c})$$

Où :

$A_{11}$ ,  $D_{11}$ , etc., sont la rigidité de la poutre, définie par :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (\text{IV.13a})$$

Et

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV.13b})$$

#### IV.5 Solution analytique :

Les équations du mouvement admettent les solutions de Navier pour poutres simplement appuyées. Les variables  $u_0$ ,  $w_b$  et  $w_s$  peut être écrit en supposant les variations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{bm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{sm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

Où :

$U_m, W_{bm}$  et  $W_{sm}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée au (m) nième mode propre,  $i = \sqrt{-1}$  et  $\lambda = m\pi/L$ .

Substituant les expansions de  $u_0, w_b, w_s$  à partir des Éqs (IV.14) dans les équations du mouvement Éq (IV.12), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_m \\ W_{bm} \\ W_{sm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ Q_m \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

où :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_1 \lambda^2, \quad a_{12} = -B_{11} \lambda^3, \quad a_{13} = -B_{11}^s \lambda^3, \quad a_{22} = D_{11} \lambda^4, \\ a_{23} &= D_{11}^s \lambda^4, \quad a_{33} = H_{11} \lambda^4 \end{aligned} \quad (\text{IV.16a})$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1, \quad m_{12} = -I_2 \lambda, \quad m_{13} = -I_3 \lambda, \quad m_{22} = I_1 + I_4 \lambda^2, \\ m_{23} &= I_1 + I_5 \lambda^2, \quad m_{33} = I_1 + I_6 \lambda^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.16b})$$

---

# ***CHAPITRE V :***

## ***Validation et comparaison des résultats***

---

### V.1 Résultats et discussion :

Dans cette section, des divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction de la flexion et de la vibration libre des poutres FGM simplement appuyées.

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision du présent HSDBT dans la prédiction des comportements dynamiques des poutres FGM simplement appuyées. Au but de vérification, les résultats obtenus par le HSDBT proposé sont comparés aux données existantes dans la littérature et discutés pour vérifier l'exactitude du présent HSDBT dans la prédiction des comportements dynamiques des poutres FGM simplement appuyées.

Le tableau (V.1) montre le fondamental non dimensionnel fréquences  $\bar{\omega}$  de poutres ( $Al/Al_2O_2$ ) simplement appuyée pour différentes valeurs rapport portée/hauteur  $L/h$  avec  $p_1=p_2=p=0, 0,5, 1, 2, 5, 10$ .

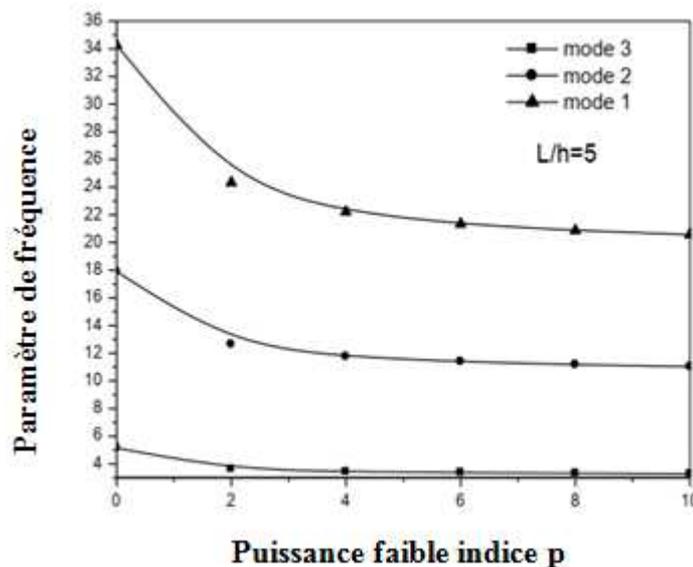


Figure V.1: Variation des trois premières fréquences non dimensionnelles  $\bar{\omega}$  par rapport à l'indice de loi de puissance  $p(L/h = 5)$

Tableau (V.1): Fréquence fondamentale non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  de poutre FGM

L/h	Théorie	k					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Présente	5.1534	4.4112	3.9909	3.6265	3.3997	3.2815
	TBT	5.1527	4.4107	3.9904	3.6262	3.4012	3.2816
	SBT	5.1531	4.4110	3.9907	3.6263	3.3998	3.2811
	HBT	5.1527	4.4107	3.9904	3.6265	3.4014	3.2817
	EBT	5.1542	4.4118	3.9914	3.6267	3.3991	3.2814
	CPT	5.3953	4.5931	3.1484	3.7793	3.5949	3.4921
20	Présente	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6484	3.5389
	TBT	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
	SBT	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6484	3.5389
	HBT	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
	EBT	5.4604	4.6512	4.2051	3.8361	3.6483	3.5390
	CPT	5.4777	4.6641	4.2163	3.8472	3.6628	3.5547

Les fréquences calculées sont comparées avec ceux donnés par Thai et al. [Thai, 2012] en utilisant diverses théories des poutres. Un excellent accord entre les solutions actuelles et les résultats de Thai et al. [Thai, 2012] est trouvé. Les trois premières fréquences non dimensionnelles des poutres FGM prédits par la présente théorie sont présentés dans le tableau (V.2) pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance ( $p$ ) et rapport portée/hauteur  $L/h$ . Les résultats obtenus sont comparés à ceux de Tai et al. [Thai, 2012] en utilisant diverses théories des poutres. On peut voir que la théorie actuelle et toutes les théories de poutre de déformation de cisaillement de Thai et al. [Thai, 2012] donnent les mêmes fréquences, alors que le CBT les surestime pour tous les cas considérés. La différence entre les fréquences des théories de poutre CBT et de déformation de cisaillement est significative pour les modes plus élevés et pour les petits rapports portée/hauteur  $L/h$ .

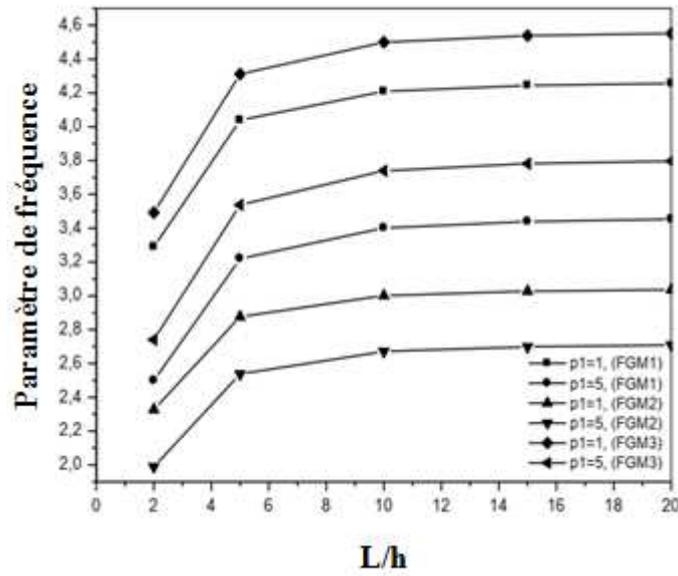


Figure V.2: Variation des paramètres de fréquences avec le rapport  $L/h$  et l'indice  $p_1$  ( $p_2 = 1$ )

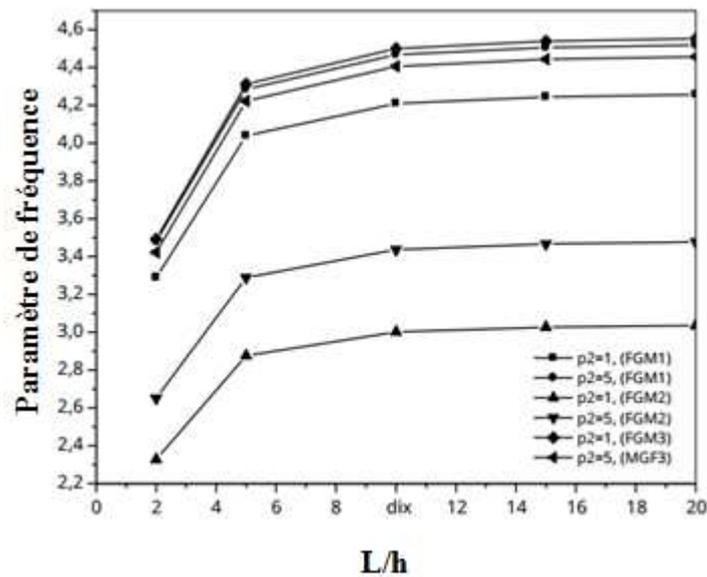


Figure V.3: Variation des paramètres de fréquences avec le rapport  $L/h$  et l'indice  $p_2$  ( $p_1 = 1$ )

Tableau (V.2): Trois premières fréquences non dimensionnelles  $\bar{\omega}$  de poutres FGM

L/h	Théorie	k						
		0	0.5	1	2	5	10	
5	1	Présente	5.1534	4.4112	3.9909	3.6265	3.3997	3.2815
		TBT	5.1527	4.4107	3.9904	3.6262	3.4012	3.2816
		SBT	5.1531	4.4110	3.9907	3.6263	3.3998	3.2811
		HBT	5.1527	4.4107	3.9904	3.6265	3.4014	3.2817
		EBT	5.1542	4.4118	3.9914	3.6267	3.3991	3.2814
		CPT	5.3953	4.5931	3.1484	3.7793	3.5949	3.4921
	2	Présente	17.8906	15.4659	14.0163	12.6427	11.5322	11.0257
		TBT	17.8812	15.4588	14.0100	12.6405	11.5431	11.0240
		SBT	17.8868	15.4631	14.0138	12.6411	11.5324	11.0216
		HBT	17.8810	15.4587	14.0098	12.6407	11.5444	11.0246
		EBT	17.8996	15.4728	14.0224	12.6466	11.5281	11.0264
		CPT	20.6187	17.5415	15.7982	14.3260	13.5876	13.2376
	3	Présente	34.2481	29.8675	27.1246	24.3307	21.6958	20.5715
		TBT	34.2097	29.8382	27.0979	24.3152	21.7158	20.5561
		SBT	34.2344	29.8569	27.1152	24.3237	21.6943	20.5581
		HBT	34.2085	29.8373	27.0971	24.3151	21.7187	20.5569
		EBT	34.2819	29.8929	27.1480	24.3482	21.6924	20.5815
		CPT	43.3483	36.8308	33.0278	29.7458	28.0850	27.4752
20	1	Présente	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6484	3.5389
		TBT	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
		SBT	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6484	3.5389
		HBT	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
		EBT	5.4604	4.6512	4.2051	3.8361	3.6483	3.5390
		CPT	5.4777	4.6641	4.2163	3.8472	3.6628	3.5547
	2	Présente	21.5740	18.3968	16.6349	15.1619	14.3726	13.9260
		TBT	21.5732	18.3962	16.6344	15.1619	14.3746	13.9263
		SBT	21.5736	18.3965	16.6347	15.1617	14.3728	13.9255
		HBT	21.5732	18.3962	16.6344	15.1619	14.3748	13.9264
		EBT	21.5748	18.3974	16.6355	15.1621	14.3718	13.9258
		CPT	21.8438	18.5987	16.8100	15.3334	14.5959	14.1676
	3	Présente	47.5967	40.6555	36.7704	33.4688	31.5694	30.5360
		TBT	47.5930	40.6526	36.7679	33.4689	31.5780	30.5369
		SBT	47.5950	40.6542	36.7692	33.4681	31.5699	30.5337
		HBT	47.5930	40.6526	36.7679	33.4691	31.5789	30.5373
		EBT	47.6008	40.6586	36.7730	33.4701	31.5655	30.5349
		CPT	48.8999	41.6328	37.6173	34.2954	32.6357	31.6883

L'effet de l'indice de loi de puissance  $p$  sur les trois premières fréquences des poutres FGM est illustré à la figure (V.2). On observe qu'une augmentation de la valeur de l'indice de puissance  $p$  conduit à une réduction de la fréquence. Les valeurs de fréquence les plus élevées sont obtenues pour les poutres entièrement en céramique ( $p=0$ ) tandis que les valeurs de fréquence les plus basses sont obtenues pour les poutres entièrement métalliques ( $p=\infty$ ).

Ceci est dû au fait qu'une augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance entraîne une diminution de la valeur du module d'élasticité.

Pour rendre les effets des indices de rapport et de puissance plus évidents, les figures (V.3) et (V.4) sont présentées pour poutres  $Al/Al_2O_3$  (FGM1),  $Al/ZrO_2$  (FGM2) et  $Al/Si_3N_4$  (FGM3), afin de montrer la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle avec du rapport  $L/h$  et respectivement de l'indices de puissance  $p_i$  ( $i=1,2$ ).

D'après ces résultats, la fréquence fondamentale non dimensionnelle fondamentale augmente avec le rapport  $L/h$  lorsque  $L/h < 10$ . On constate que la fréquence non dimensionnelle être indépendante du rapport longueur-épaisseur  $L/h$  pour  $L/h > 10$ . Il est montré à partir de la Figure (V.3) que l'effet de  $p_1$  est de rendre la poutre plus rigide lorsque cet indice de gradient est réduit. Cependant, en diminuant le deuxième indice de puissance  $p_2$ , la poutre devienne souple comme le montre la figure (V.4). De plus, c'est observé que la fréquence fondamentale non dimensionnelle est approximativement insensible à  $p_2$  pour la poutre (FGM3) d'aluminium/le silicium.

## V.2 Conclusion :

Ce travail présente une analyse de vibration libre pour les poutres FGM en employant un HSDBT original avec seulement 3 variables inconnues. Les équations du mouvement sont obtenues par le principe de Hamilton. Ces équations sont résolues par la procédure de Navier. Les résultats ont été comparés avec les solutions de plusieurs théories. Il est conclu que les résultats du HSDBT original proposé présentent un excellent accord avec les autres théories utilisées pour la comparaison des problèmes de vibration libre.

---

***CONCLUSION GENERALE***  
***ET PERSPECTIVE***

---

---

## Conclusion générale et perspectives

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur l'étude de la réponse mécanique des structures en matériaux à gradient de propriété (FGM) avec la considération de l'effet du cisaillement transverse, nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les fréquences de vibrations utilisant la théorie de cisaillement raffinée des poutres. Les solutions exactes pour les problèmes des poutres qui dépendent de la fonction de gauchissement sont très limitées ; ceci nous a conduits à évaluer un nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existant basé sur des approximations du champ de déplacements. Cette procédure de résolution exacte est basée sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement.

Des solutions de forme close pour l'analyse de la vibration libre des poutres fonctionnellement graduées sont développées sur la prétention que les déplacements transversaux de cisaillement varient comme fonction parabolique suivant l'épaisseur de la poutre. Pour les poutres en P-FGM, les équations de mouvement sont obtenus en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour trouver les solutions analytiques de la poutre FGM avec des conditions aux frontières sous formes d'appuis simples. La comparaison des résultats de la présente théorie raffinée avec les résultats de la littérature, a permis de dégager plusieurs points :

- Un excellent accord entre les solutions de la présente théorie et les résultats existantes dans la littérature.
- La théorie classique des poutres 'CBT' surestime les fréquences de vibration par rapport à la théorie de cisaillement raffinée.
- L'augmentation de la valeur de l'indice de puissance  $p$  conduit à une réduction de la fréquence de vibration de la poutre.
- Les valeurs de fréquence les plus élevées sont obtenues pour les poutres entièrement en céramique ( $p=0$ ) tandis que les valeurs de fréquence les plus basses sont obtenues pour les poutres entièrement métalliques ( $p=\infty$ ).
- La différence entre les fréquences de vibration obtenue par la théorie classique des poutres 'CBT' est significative pour les modes plus élevés et pour les petits rapports portée/hauteur  $L/h$ .

---

En conclusion, on peut dire que la théorie des poutres raffinée proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de la vibration libre des poutres FGM.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'étudier le problème de gauchissement, et l'utilisation de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- Prise en compte de la distribution graduelle arbitraire du matériau FGM ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour résoudre les problèmes de vibration sous chargement thermique ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis ;
- Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués. La méthode des éléments permettra de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

Finalement, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution de notre laboratoire dans le domaine de recherches des matériaux composites en matériaux à gradient évalué (FGM), précisément leurs comportements vis à vis des conditions de chargements statiques et vibratoires.

---

***REFERENCES***

***BIBLIOGRAPHIQUES***

---

---

## Références bibliographiques

- [Abdelaziz, 2017] Abdelaziz, H.H., Ait Amar Meziane, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabli, A.S. (2017), “An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions”, *Steel Compos. Struct.*, 25(6) 693-704.
- [ABDI, 1997] Abdi, 1997. Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex, « Composites Laminaires TriCouches A Base D'alumine », Thèse Docteur D'état, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon Et L'université Claude Bernard Lyon I-France, 1997, 212p.
- [Aghazadeh, 2014] Aghazadeh. R, Cigeroglu. E, and Dag. S, «Static and free vibration analyses of small-scale functionally graded beams possessing a variable length scale parameter using different beam theories», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 46, pp. 1–11, 2014.
- [Ait Amar, 2014] Ait Amar Meziane, A. HadjHenni, and A. Tounsi, «An Efficient and Simple Refined Theory for Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates under Various Boundary Conditions», *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol.16, no, 3, pp. 293–318, 2014.
- [Ait Atmane, 2010] Ait Atmane.H, Tounsi. A, Mechab. I, Adda Bedia. E.A, «Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory». *Int. J. Mech. Mater. esign*; 6 (2): 113-121, 2010.
- [Akavci, 2015] Akavci. S. S and Tanrikulu. A. H, «Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories», *Composites Part B: Engineering*, vol. 83, pp. 203–215, 2015.
- [Akbari, 2014] Akbari. M, Kiani. Y, Aghdam. M. M, and Eslami. M. R, «Free vibration of FGM Lévy conical panels», *Composite Structures*, vol. 116, pp. 732–746, 2014.
- [Akbaş, 2015] Akbaş. S.D, «Wave propagation of a Functionally graded beam in thermal environments», *Steel Compos. Struct*, Vol.19, no.6, pp.1421-1447, 2015.
- [Akbaş, 2017a] Akbaş. S.D, «Thermal effects on the vibration of functionally graded deep beams with porosity», *Int. J. Appl.Mech*, Vol.9, no.05, pp.1750076, 2017.
- [Akbaş, 2017b] Akbaş. S.D, «Free vibration of edge cracked functionally graded microscale beams based on the modified couple stress theory», *Int. J. Struct. Stab. Dyn*, Vol.17, no.03,1750033, 2017.

- 
- [Akbaş, 2018a] Akbaş. S.D, «Forced vibration analysis of cracked functionally graded microbeams», *Adv. Nano Res*, Vol.6, no.01, pp.39-55, 2018.
- [Akbaş, 2018b] Akbaş. S.D, «Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams», *Compos. Struct*, Vol.186, pp.293-302, 2018.
- [Akgöz, 2013] Akgöz. B and Civalek. Ö, «Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler microbeams based on the modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 98, pp. 314–322, 2013.
- [Alshorbagy, 2011] Alshorbagy. A. E, Eltaher. M. A, and Mahmoud. F, «Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, no. 1, pp. 412–425, 2011.
- [Alshorbagy, 2011] Alshorbagy. A. E, Eltaher. M. A, and Mahmoud. F. F, «Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, no. 1, pp. 412–425, 2011.
- [Ambartsumyan, 1969] Ambartsumyan, S. A. (1969). Basic equations and relations in the theory of anisotropic bodies with different moduli in tension and compression. *MTT*, 3, 51-61.
- [Anh, 2015] Anh. V. T. T, Bich. D. H, and Duc. N. D, «Nonlinear stability analysis of thin FGM annular spherical shells on elastic foundations under external pressure and thermal loads», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 50, pp. 28–38, 2015.
- [Ansari, 2010] Ansari A, Alhoshan M, Alsalhi M, Aldwayyan A (2010) Prospects of nanotechnology in clinical immunodiagnosics. *Sensors* 10:6535–6581. <https://doi.org/10.3390/s100706535>
- [Ansari, 2011] Ansari. R, Gholami. R, and Sahmani. S, «Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory», *Composite Structures*, vol. 94, no. 1, pp. 221–228, 2011.
- [Ansaria, 2013] Ansaria. R, Gholami. R, Shojaeia. M.F, Mohammadia. V and Sahmania. S, «Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded Timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory», *Compos. Struct*, Vol.100, pp.385-397, 2013.
- [Asemi, 2013] Asemi. K, Shariyat. M, Salehi. M, and Ashrafi. H, «A full compatible three-dimensional elasticity element for buckling analysis of FGM rectangular plates subjected to various combinations of biaxial normal and shear loads», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 74, pp. 9–21, 2013

- 
- [Asemi, 2014] Asemi. K, Salehi. M, and Akhlaghi. M, «Three dimensional biaxial buckling analysis of functionally graded annular sector plate fully or partially supported on Winkler elastic foundation», *Aerospace Science and Technology*, vol. 39, pp. 426–441, 2014.
- [Ashoori, 2016] Ashoori. A. R and Sadough Vanini. S. A, «Nonlinear thermal stability and snap-through behavior of circular microstructure-dependent FGM plates», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 59, pp. 323–332, 2016.
- [Attia, 2018] Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Afaf, A.S. (2018), “A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations”, *Struct. Eng. Mech.*, 65(4), 453-464.
- [Aydin, 2013] Aydin. K, «Free vibration of functionally graded beams with arbitrary number of surface cracks», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 42, pp. 112–124, 2013.
- [Aydogdu, 2009] Aydogdu, M. (2009). A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending buckling and vibration. *Physica E*, 41, 1651–1655.
- [Azizi, 2012] Azizi. S, Ghazavi. M.-R, Esmailzadeh Khadem. S, Yang . J, and Rezazadeh. G, «Stability analysis of a parametrically excited functionally graded piezoelectric, MEM system», *Current Applied Physics*, vol. 12, no. 2, pp. 456–466, 2012.
- [Bahadori, 2015] Bahadori. R and Najafizadeh. M. M, «Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded axisymmetric cylindrical shell on Winkler– elastic foundation by First-order Shear Deformation Theory and using Navier-differential quadrature solution methods», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 16, pp. 4877–4894, 2015.
- [Bao, 1995] BAO. G, WANG. L. (1995), —Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal
- [Barati, 2017] Barati. M. R and Shahverdi. H, «Aero-thermal stability analysis of higher-order refined supersonic FGM panels with even and uneven porosity distributions», *Journal of Fluids and Structures*, vol. 73, pp. 125–136, 2017.
- [Bateni, 2013] Bateni. M, Kiani. Y, and Eslami. M. R, «A comprehensive study on stability of FGM plates», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 75, pp. 134–144, 2013.
- [Bateni, 2014] Bateni. M and Eslami. M. R, «Non-linear in-plane stability analysis of FGM circular shallow arches under central concentrated force», *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 60, pp. 58–69, 2014.

- 
- [Bellifa, 2017]** Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct.*, 25(3), 257-270.
- [Benachour, 2011]** Benachour. A, Tahar. H. D, Atmane. H. A, Tounsi. A, and Ahmed. M. S, «A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient», *Composites Part B: Engineering*, vol. 42, no. 6, pp. 1386–1394, 2011.
- [Benferhat, 2016]** Benferhat. R, Daouadji. T. H, and M. Mansour. S, «Free vibration analysis of FG plates resting on an elastic foundation and based on the neutral surface concept using higher-order shear deformation theory», *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 344, no. 9, pp. 631–641, 2016.
- [Bennai, 2015]** Bennai. R, Ait Atmane. H and Tounsi. A, «A new higherorder shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams», *Steel Compos. Struct*, Vol.19, no.3, pp.521-546, 2015
- [Bich, 2012]** Bich. D. H, Phuong. N. T, and Tung. H. V, «Buckling of functionally graded conical panels under mechanical loads», *Composite Structures*, vol. 94, no. 4, pp. 1379–1384, 2012.
- [Bodaghi, 2010]** Bodaghi. M and Saidi. A. R, «Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, no. 11, pp. 3659–3673, 2010.
- [Bouamama, 2019]** BOUAMAMA. M, Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM, thèse de doctorat Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, 2019.
- [Bouazza, 2010]** Bouazza. M, Tounsi. A, Adda-Bedia. E. A, and Megueni. A, «Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: an analytical approach», *Computational Materials Science*, vol. 49, no. 4, pp. 865–870, 2010.
- [Bouhadra, 2018]** Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Benyoucef, S. and Mahmoud, S.R. (2018), “Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates”, *Struct. Eng. Mech.*, 66(1), 61-73.
- [Bounouara, 2016]** Bounouara. F, Benrahou. K.H, Belkorissat. I and Tounsi. A, «A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation», *Steel Compos. Struct*, Vol.20, no.2, pp.227-249, 2016.
- [Bourada, 2012]** Bourada.M., A. Tounsi, M. S. Houari, and E. A. Adda Bedia, «A New Four-Variable Refined Plate Theory for Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates», *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 14, pp. 5–33, 2012.

- 
- [Bourada, 2015]** Bourada. M, Kaci. A, Houari. M.S.A and Tounsi. A, «A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams», *Steel Compos. Struct*, Vol.18, no.2, pp.409- 423, 2015.
- [Brairi, 2019]** BRAIRI. S, Analyse de la dégradation des structures FGM renforcées par FRP précontraints. thèse de doctorat Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, 2019.
- [Calim, 2016]** Calim. F. F, «Free and forced vibration analysis of axially functionally graded Timoshenko beams on two-parameter viscoelastic foundation», *Composites Part B: Engineering*, vol. 103, pp. 98–112, 2016.
- [Chen, 2015]** Chen. S. S, Xu. C. J, Tong. G. S, and Wei. X, «Free vibration of moderately thick functionally graded plates by a local natural neighbor interpolation method», *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 61, pp. 114–126, 2015.
- [Chen, 2016]** Chen. D, Yang. J, and Kitipornchai. S, «Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 108-109, pp. 14–22, 2016.
- [Chen, 2017]** Chen. H, Wang. A, Hao. Y, and Zhang. W, «Free vibration of FGM sandwich doubly-curved shallow shell based on a new shear deformation theory with stretching effects», *Composite Structures*, vol. 179, pp. 50–60, 2017.
- [Chen, 2019]** Chen F, Zhang C, Chen F, Huang Z, Jia M, Chen G, Ye Y, Lin Y, Liu W, Chen B, Shen Q, Zhang L, Lavernia EJ (2019) Additive manufacturing of functionally graded materials: a review. *Mater Sci Eng A* 764:138209. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138209>
- [Chi, 2003]** Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- [Chikh, 2017]** Chikh. A, Touns. A, Hebali. H. and Mahmoud. S.R, «Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT», *Smart Struct. Syst*, Vol.19, no.03, pp.289-297, 2017.
- [Cinefra, 2010]** Cinefra. M, Belouettar. S, Soave. M, and Carrera. E, «Variable kinematic models applied to free-vibration analysis of functionally graded material shells», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 29, no. 6, pp. 1078–1087, 2010.
- [Cobb, 2006]** Cobb, Richard. Class Notes, Structural Dynamics. School of Engineering and Management, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB OH, 2006.
- [Cooley, 2005]** Cooley, William G., Palazotto, Anthony N. “Finite Element Analysis of Functionally Graded Shell Panels Under Thermal Loading.” Orlando FL: IMECE Conference, IMECE2005-82776, 2005.

- 
- [Daouadji, 2012] Daouadji.T.H, A. Tounsi, L.Hadji, A.Hadj Henni, E.Adda Bedia,«*A theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plats*», *Materials Physics and Mechanics*, 14 (2012) 110-128, Received: May 11, 2012.
- [Delale, 1983] Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non homogeneous plane.*ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- [Deng, 2017] Deng. J, Liu. Y, Zhang. Z, and Liu. W, «Size-dependent vibration and stability of multi-span viscoelastic functionally graded material conveying fluid using a hybrid method», *Composite Structures*, vol. 179, pp. 590–600, 2017.
- [Deng, 2017] Deng. H, Chen. k, Cheng. W, and Zhao. S, «Vibration and buckling analysis of double-functionally graded Timoshenko beam system on Winkler- elastic foundation», *Composite Structures*, vol. 160, pp. 152–168, 2017.
- [Deniz, 2013] Deniz. A, «Non-linear stability analysis of truncated conical shell with functionally graded composite coatings in the finite deflection», *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 318–326, 2013.
- [Dhatt, 1969] Dhatt.G, «Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchoff hypothesis», *Proc. ASCE Symp. On Application of FEM in civil engineering*, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., pages 255-278, 1969.
- [Dong, 2017] Dong. H, and Li. Y. H, «A unified nonlinear analytical solution of bending, buckling and vibration for the temperature-dependent FG rectangular plates subjected to thermal load», *Composite Structures*, vol. 159, pp. 689–701, 2017.
- [Dozio, 2014] Dozio. L, «Exact free vibration analysis of Lévy FGM plates with higher-order shear and normal deformation theories», *Composite Structures*, vol. 111, pp. 415–425, 2014.
- [Duc, 2010] Duc. N. D and Tung. H. V, «Nonlinear analysis of stability for functionally graded cylindrical panels under axial compression», *Computational Materials Science*, vol. 49, no. 4, pp. S313–S316, 2010.
- [Duc, 2016] Duc. N. D, Tuan. N. D, Tran. P, Cong. P. H, and Nguyen. P. D, «Nonlinear stability of eccentrically stiffened S-FGM elliptical cylindrical shells in thermal environment», *Thin-Walled Structures*, vol. 108, pp. 280–290, 2016.
- [Dung, 2014] Dung. D. V, Hoa L. K, and Nga. N. T, «On the stability of functionally graded truncated conical shells reinforced by functionally graded stiffeners and surrounded by an elastic medium», *Composite Structures*, vol. 108, pp. 77–90, 2014.

- 
- [Ebrahimi, 2014]** Ebrahimi. M. J and Najafizadeh. M. M, «Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 38, no. 1, pp. 308–324, 2014.
- [El Meiche, 2011]** El Meiche. N, Tounsi. A, Ziane. N, Mechab. I, and Adda Bedia. E. A, «A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 4, pp. 237–247, 2011.
- [El-Haina, 2017]** El-Haina. F, Bakora, A, Bousahla. A.A, Tounsi. A and Mahmoud, S.R, «A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates», *Struct. Eng. Mech*, Vol.63, no.05, pp.585- 595, 2017.
- [Esfahani, 2013]** Esfahani. S. E, Kiani. Y, and Eslami. M. R, «Non-linear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on non-linear hardening elastic foundations», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 69, pp. 10–20, 2013.
- [Fadaee, 2013]** Fadaee. M, Atashipour. S. R, and Hosseini-Hashemi. S, «Free vibration analysis of Lévy-type functionally graded spherical shell panel using a new exact closed-form solution», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 77, pp. 227–238, 2013.
- [Fang, 2018]** Fang. J, Gu. J, and Wang. H, «Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 136, pp. 188–199, 2018.
- [Fantuzzi, 2016]** Fantuzzi. N, Brischetto. S, Tornabene. F, and Viola. E, «2D and 3D shell models for the free vibration investigation of functionally graded cylindrical and spherical panels», *Composite Structures*, vol. 154, pp. 573–590, 2016.
- [Fazzolari, 2018]** Fazzolari. F. A, «Generalized exponential, polynomial and trigonometric theories for vibration and stability analysis of porous FG sandwich beams resting on elastic foundations», *Composites Part B: Engineering*, vol. 136, pp. 254–271, 2018.
- [Fourn, 2018]** Fourn. H, Ait Atmane. H, Bourada. M, Bousahla. A.A, Tounsi. A and Mahmoud. S.R, «A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates», *Steel Compos. Struct*, Vol.27, no.01, pp.109-122, 2018.
- [Ghannad, 2012]** Ghannadpour. S. A. M, Ovesy. H. R, and Nassirnia. M, «Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method», *Computers and Structures*, vol. 108-109, pp. 93–99, 2012.
- [Ghumare, 2017]** Ghumare. S.M and Sayyad. A.S, «A new fifth-order shear and normal deformation theory for static bending and elastic buckling of P-FGM beams», *Lat. Am. J. Solid. Struct*, Vol.14, pp.1-19, 2017.

- 
- [Giunta, 2011] Giunta. G, Crisafulli. D, Belouetta. S, and Carrera. E, «Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams», *Composite Structures*, vol. 94, no. 1, pp. 68–74, 2011.
- [Groves, 1997] Groves, J.F. and Wadley, H.N.G., 1997. Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), pp.57-69.
- [Hadji, 2011] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A.«Free vibration of functionally graded sandwich plates using fourvariable refined plate theory», *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942, (2011).
- [Hadji, 2014] Hadji. L, Daouadji. T.H, Tounsi, A, and Adda Bedia. E.A,«A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam», *Steel and Composite Structures*, Vol. 16, no.5, pp.507-519, 2014.
- [Hadji, 2015] Hadji. L, Daouadji. T.H, and Adda Bedia, E.A, «A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities», *Geomechanics and Engineering*, Vol. 9, no.3, pp. 361-372, 2015.
- [Hadji, 2017] Hadji. L, Zouatnia. N and Kassoul. A, «Wave propagation in functionally graded beams using various higher-order shear deformation beams theories», *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 62, no.2, pp. 143-149, 2017.
- [Hadji, 2019] Hadji, L., Zouatnia, N. and Bernard, F. (2019), “An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities: Effect of the micromechanical models”, *Struct. Eng. Mech.*, 69(2), 231-241.
- [Hajlaoui, 2015] Hajlaoui. A, Jarraya. A, El Bikri. K, and Dammak. F, «Buckling analysis of functionally graded materials structures with enhanced solid-shell elements and transverse shear correction», *Composite Structures*, vol. 132, pp. 87–97, 2015.
- [Han, 2015] Han. S.-C, Park. W.-T, and Jung. W.-Y, «A four-variable refined plate theory for dynamic stability analysis of S-FGM plates based on physical neutral surface», *Composite Structures*, vol. 131, pp. 1081–1089, 2015.
- [Hashemi, 2011] Hashemi. S. H, Fadaee. M, and Atashipour. S. R, «Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure», *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 722–735, 2011.
- [Hein, 2011] Hein. H and Feklistova. L, «Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using wavelets», *Engineering Structures*, vol. 33, no. 12, pp. 3696–3701, 2011.

- 
- [Heydari, 2017] Heydari. A, Jalali. A, and Nemati. A, «Buckling analysis of circular functionally graded plate under uniform radial compression including shear deformation with linear and quadratic thickness variation on the elastic foundation», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 41, pp. 494–507, 2017.
- [Hosseini, 2010] Hosseini.-H. S., Rokni. D. T. H, Akhavan. H, and Omid. M, «Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, no. 5, pp. 1276–1291, 2010.
- [Houari, 2011] Houari, M.S.A, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A. and Addabedia,E.A, «Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates», *J. Thermal Stresses*, 34(4), 315-334. 2011.
- [Huang, 2010] Huang. Y and Li. X. F, «Buckling of functionally graded circular columns including shear deformation», *Materials & Design*, vol. 31, no. 7, pp. 3159–3166, 2010.
- [Huang, 2010] Huang. Y and Li. X.-F, «A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 11, pp. 2291–2303, 2010.
- [Huang, 2011] Huang. H, Han. Q, and Wei. D, «Buckling of FGM cylindrical shells subjected to pure bending load», *Composite Structures*, vol. 93, no. 11, pp. 2945–2952, 2011.
- [Huang, 2013] Huang. Y, Yang. L.-E, and Luo. Q.-Z, «Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section», *Composites Part B: Engineering*, vol. 45, no. 1, pp. 1493–1498, 2013.
- [Huang, 2015] Huang. H and Han. Q, «Stability of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells with inelastic material properties», *Thin-Walled Structures*, vol. 92, pp. 21–28, 2015.
- [Huang, 2016] Huang Rukai. Optimization design and research progress of functionally graded thermoelectric materials [J]. *Journal of Chifeng University (NATURAL SCIENCE EDITION)*, 2016, 32 (24): 33 - 34.
- [Huang, 2016] Huang. Y, Zhang. M, and Rong. H, «Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory», *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 29, no. 2, pp. 200–207, 2016.
- [Huang, 2017] Huang. H, Zhang. Y, and Han. Q, «Stability of hydrostatic-pressured FGM thick rings with material nonlinearity», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 45, pp. 55–64, 2017.
- [ISSAD, 2019] Investigation sur le comportement mécanique des plaques épaisse isotropes et orthotropes 2019.

- 
- [Jabbari, 2014] Jabbari. M, Mojahedin. A, and Haghi. M, «Buckling analysis of thin circular FG plates made of saturated porous-soft ferromagnetic materials in transverse magnetic field», *Thin-Walled Structures*, vol. 85, pp. 50–56, 2014.
- [Jalali, 2010] Jalali. S. K, Naei. M. H, and Poursolhjouy. A, «Thermal stability analysis of circular functionally graded sandwich plates of variable thickness using pseudo-spectral method», *Materials and Design*, vol. 31, no. 10, pp. 4755–4763, 2010.
- [Jędrysiak, 2011] Jędrysiak. J and Michalak. B, «On the modelling of stability problems for thin plates with functionally graded structure», *Thin-Walled Structures*, vol. 49, no. 5, pp. 627–635, 2011.
- [Jędrysiak, 2014] Jędrysiak. J, «Free vibrations of thin functionally graded plates with microstructure», *Engineering Structures*, vol. 75, pp. 99–112, 2014.
- [Jin, 1996] Jin. Z. H, Batra. R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339
- [Jin, 2015] Jin. G, Shi. S, Su. Z, Li. S, and Liu. Z, «A modified Fourier–Ritz approach for free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with general boundary conditions», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 93, pp. 256–269, 2015.
- [Jin, 2015b] Jin. C and Wang. X, «Accurate free vibration analysis of Euler functionally graded beams by the weak form quadrature element method», *Composite Structures*, vol. 125, pp. 41–50, 2015.
- [Jing, 2016] Jing. L.-l, Ming. P.-j, Zhang. W.-P, Fu. L.-R, and Cao. Y.-P, «Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination Timoshenko theory and finite volume method», *Composite Structures*, vol. 138, pp. 192–213, 2016.
- [Jodaei, 2012] Jodaei. A, Jalal. M, and Yas. M. H, «Free vibration analysis of functionally graded annular plates by state-space based differential quadrature method and comparative modeling by ANN», *Composites Part B: Engineering*, vol. 43, no. 2, pp. 340–353, 2012.
- [Joshi, 2017] Joshi. P. V, Gupta. A, Jain. N. K, Salhotra. R, Rawani. A. M, and Ramtekkar. G. D, «Effect of thermal environment on free vibration and buckling of partially cracked isotropic and FGM micro plates based on a non classical Kirchhoff’s plate theory: an analytical approach», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 131-132, pp. 155–170, 2017.
- [Kahya, 2017] Kahya. V and Turan. M, «Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first order shear deformation theory», *Compos. Part B Eng*, Vol.109, pp.108-115, 2017.

- 
- [Karama, 2003]** Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of solids and structures*, 40(6),1525-1546.
- [Ke, 2011]** Ke. L.-L and Wang. Y.-S, «Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 342–350, 2011.
- [Kiani, 2014]** Kiani. Y and Eslami. M. R, «Nonlinear thermo-inertial stability of thin circular FGM plates», *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 2, pp. 1057–1073, 2014.
- [Kim, 2015]** Kim. Y.-W, «Free vibration analysis of FGM cylindrical shell partially resting on elastic foundation with an oblique edge», *Composites Part B: Engineering*, vol. 70, pp. 263–276, 2015.
- [Knoppers, 2005]** Knoppers, G.E., Gunnink, J.W., Van Den Hout, J. and Van Vliet, W., 2005, December. The reality of functionally graded material products. In *Intelligent Production Machines and Systems-First I\* PROMS Virtual Conference: Proceedings and CD-ROM set*, Elsevier (p. 467).
- [KOIZUMI, 1993]** Koizumi, M, 1993. « The concept ofFG », *Ceram Trans, Funct Gradient Mater*, **34**, 3-10, (1993).
- [Kolakowski, 2016]** Kolakowski. Z, «Some aspects of interactive dynamic stability of thin-walled trapezoidal FGM beam-columns under axial load», *Thin-Walled Structures*, vol. 98, pp. 431–442, 2016.
- [Komijani, 2014]** Komijani. M, Esfahani. S. E, Reddy. J. N, Liu. Y. P, and Eslami. M. R, «Nonlinear thermal stability and vibration of pre/post-buckled temperature- and microstructure-dependent functionally graded beams resting on elastic foundation», *Composite Structures*, vol. 112, pp. 292–307, 2014.
- [Kulkarni, 2015]** Kulkarni. K, Singh. B. N, and Maiti. D. K, «Analytical solution for bending and buckling analysis of functionally graded plates using inverse trigonometric shear deformation theory», *Composite Structures*, vol. 134, pp. 147–157, 2015.
- [Lal, 2015]** Lal. R and Ahlawat. N, «Axisymmetric vibrations and buckling analysis of functionally graded circular plates via differential transform method», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 52, pp. 85–94, 2015.
- [Lanc, 2015]** Lanc. D, Vo. T. P, Turkalj. G, and Lee. J, «Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams», *Thin-Walled Structures*, vol. 86, pp. 148–156, 2015.

- 
- [Lanc, 2015] Lanc. D, Vo. T. P, Turkalj. G, and J. Lee, «Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams», *Thin-Walled Structures*, vol. 86, pp. 148–156, 2015.
- [Lee, 2017] Lee. J. W and Lee. J. Y, «Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 122, pp. 1–17, 2017.
- [Leu, 2012] . Leu MC, Deuser BK, Tang L, Landers RG, Hilmas GE, Watts JL (2012) Freeze-form extrusion fabrication of functionally graded materials. *CIRP Ann Manuf Technol* 61:223–226. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2012.03.050>
- [Levinson, 1980] Levinson, M. (1980). An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7(6), 343-350.
- [Li, 2000] Li Yaotian. Research and application of functionally gradient materials [J]. *Metal Functional Materials*, 2000, 7 (4): 15 - 23.
- [Li, 2013] Li, S.R. and Batra, R.C, «Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler-Bernoulli beams», *Compos. Struct*, Vol. 95, pp. 5-9, 2013.
- [Li, 2014] Li. L, Zhang. D. G, and Zhu. W. D, «Free vibration analysis of a rotating hub–functionally graded material beam system with the dynamic stiffening effect», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 5, pp. 1526–1541, 2014.
- [Li, 2016] Li. L and Zhang. D. G, «Free vibration analysis of rotating functionally graded rectangular plates», *Composite Structures*, vol. 136, pp. 493–504, 2016.
- [Li, 2016b] Li. L, Li X, and Hu. Y, «Free vibration analysis of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material», *International Journal of Engineering Science*, vol. 102, pp. 77–92, 2016.
- [Li, 2017] Li. X, Li. L, Hu. Y, Ding. Z, and Deng. W, «Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory», *Composite Structures*, vol. 165, pp. 250–265, 2017.
- [Liu, 2010] Liu. D. Y, Wang. C. Y, and Chen. W. Q, «Free vibration of FGM plates with in-plane material inhomogeneity», *Composite Structures*, vol. 92, no. 5, pp. 1047–1051, 2010.
- [Liu, 2014a] Liu.Y and Shu. D. W, «Free vibration analysis of exponential functionally graded beams with a single delamination», *Composites Part B: Engineering*, vol. 59, pp. 166–172, 2014.

- 
- [Liu, 2014b] Liu. Y, Xiao. J, and Shu. D, «Free vibration of exponential functionally graded beams with single delamination», *Procedia Engineering*, vol. 75, pp. 164–168, 2014.
- [Lo, 1977] Lo, K. H., Christensen, R. M., & Wu, E. M. (1977). A high-order theory of plate deformation—Part 1: Homogeneous plates. *Journal of applied mechanics*, 44(4), 663-668.
- [Lou, 2015] Lou. J and He. L, «Closed-form solutions for nonlinear bending and free vibration of functionally graded microplates based on the modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 131, pp. 810–820, 2015.
- [Lou, 2016] Lou. J, He. L, Wu. H, and Du. J, «Pre-buckling and buckling analyses of functionally graded under axial and radial loads based on the modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 142, pp. 226–237, 2016.
- [Mahmoud, 2017] Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2017), “A new shear deformation plate theory with stretching effect for buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.*, 24(5), 569-578.
- [Malandrino, 2009] Malandrino G (2009) Chemical vapour deposition. In: Jones C, Hitchman M (eds) *Precursors, processes and applications*. *Angewandte Chemie International Edition*, 48, pp 7478–7479
- [Malekzadeh, 2009] Malekzadeh. P, «Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations», *Composite Structures*, vol. 89, no. 3, pp. 367–373, 2009.
- [Mantari, 2012] Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499.
- [Mantari, 2016] Mantari. J. L and Monge. J. C, «Buckling, free vibration and bending analysis of functionally graded sandwich plates based on an optimized hyperbolic unified formulation», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 119, pp. 170–186, 2016.
- [Mashat, 2014] Mashat. D. S, Carrera. E, Zenkour. A. M, Al Khateeb. S. A, and Filippi. M, «Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements», *Composites Part B: Engineering*, vol. 59, pp. 269–278, 2014.
- [Matsunaga, 2009] Matsunaga. H, «Free vibration and stability of functionally graded circular cylindrical shells according to a 2D higher-order deformation theory», *Composite Structures*, vol. 88, no. 4, pp. 519–531, 2009.
- [Menasria, 2017] Menasria. A., Bouhadra, A, Tounsi. A, Bousahla, A.A and Mahmoud. S.R, «A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates», *Steel Compos. Struct*, Vol.25, no.02, pp.157-175, 2017.

- 
- [Menasria, 2017] Menasria, A., Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.*, 25(2), 157-175.
- [Mirsalehi, 2015] Mirsalehi. M, Azhari. M, and Amoushahi. H, «Stability of thin FGM microplate subjected to mechanical and thermal loading based on the modified couple stress theory and spline finite strip method», *Aerospace Science and Technology*, vol. 47, pp. 356–366, 2015.
- [Mokhtar, 2018] Mokhtar, Y., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2018), “A novel shear deformation theory for buckling analysis of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity theory”, *Smart Struct. Syst.*, 21(4), 397-405.
- [Nabian, 2013] Nabian. A, Rezazadeh. G, Almassi. M, and Borgheei. A. M, «On the stability of a functionally graded rectangular micro-plate subjected to hydrostatic and nonlinear electrostatic pressures», *Acta Mechanica Sinica*, vol. 26, no. 2, pp. 205–220, 2013.
- [Naderi, 2011] Naderi. A and Saidi. A. R, «Exact solution for stability analysis of moderately thick functionally graded sector plates on elastic foundation», *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 629–638, 2011.
- [Natarajan, 2014] Natarajan. S, Chakraborty. S, Ganapathi. M, and Subramanian. M, «A parametric study on the buckling of functionally graded material plates with internal discontinuities using the partition of unity method», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 44, pp. 136–147, 2014.
- [Nateghi, 2012] Nateghi. A, Salamat.T. M, Rezapour. J, and Daneshian. B, «Size dependent buckling analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 10, pp. 4971–4987, 2012.
- [Nemat-Alla, 2001] Nemat-Alla, M. M, Ata, M. H. , Bayoumi, M. R., and Khair-Eldeen, W., 2011 Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of Aluminium/Steel functionally graded material. *Materials Sciences and Applications*, vol. 2, pp. 1708-1718.
- [Neves, 2013] Neves. A. M. A, Ferreira. A. J. M, Carrera. E et al., «Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique», *Composites Part B: Engineering*, vol. 44, no. 1, pp. 657–674, 2013.
- [Nguyen, 2004] Nguyen, V. T. (2004). Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque (Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech).

- 
- [Nguyen, 2013] Nguyen. T.-K, Vo. T. P, and Thai. H.-T, «Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 55, pp. 147–157, 2013.
- [Nguyen, 2013] Nguyen, T.K., Vo, T.P. and Thai, H.T., «Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory», *Compos. Part B Eng*, Vol. 55, pp. 147-157, 2013.
- [Nguyen, 2015] Nguyen, T. K., Nguyen, T. T. P., Vo, T. P., & Thai, H. T. (2015). Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 76, 273-285.
- [Nguyen, 2015] Nguyen. T.-K, Truong. -P. N. T, Vo. T. P, and Thai. H.-T, «Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 76, pp. 273–285, 2015.
- [Nguyen, 2016] Nguyen. T.-K, Vo. T. P, Nguyen. B.-D, and Lee. J, «An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory», *Composite Structures*, vol. 156, pp. 238–252, 2016.
- [Nguyen, 2017] Nguyen. T.-T, Thang. P. T, and Lee. J, «Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams», *Thin-Walled Structures*, vol. 110, pp. 88–96, 2017.
- [Nguyen, 2017] Nguyen. T.-T, Thang. P. T, and Lee. J, «Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams», *Composite Structures*, vol. 160, pp. 952–963, 2017.
- [Ould Larbi, 2018] Ould Larbi, L., Hadji, L., Ait Amar Meziane, M. and Adda Bedia, E.A. (2018), “An analytical solution for free vibration of functionally graded beam using a simple first-order shear deformation theory”, *Wind Struct.*, 27(4), 247-254.
- [Oyekoya, 2009] Oyekoya. O. O, Mba. D. U, and El-Zafrany. A. M, «Buckling and vibration analysis of functionally graded composite structures using the finite element method», *Composite Structures*, vol. 89, no. 1, pp. 134–142, 2009.
- [Panahandeh, 2014] Panahandeh.S. D and Amiri Rad. A, «Buckling of cracked functionally graded plates supported by foundation», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 88, pp. 221–231, 2014.
- [Pandey, 2015] Pandey. S and Pradyumna. S, «A finite element formulation for free vibration analysis of functionally graded sandwich shells», *Composite Structures*, vol. 133, pp. 438–450, 2015.
- [Piovan, 2011] Piovan. M. T and Machado S. P, «Thermoelastic dynamic stability of thin-walled beams with graded material properties», *Thin-Walled Structures*, vol. 49, no. 3, pp. 437–447, 2011.

- 
- [Popoola, 2016]** Popoola P, Farotade G, Fatoba G, Popoola O (2016) Laser engineering net shaping method in the area of development of functionally graded materials (FGMs) for aero engine applications. In: Paul MC (ed) A Review, from "Fiber Laser", Chap 17, pp 383–400. ISBN: 978-953-51-2257-9
- [Pradhan, 2013]** Pradhan. K. K and Chakraverty. S, «Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method», *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 175–184, 2013.
- [Punera, 2017]** Punera. D and Kant. T, «Free vibration of functionally graded open cylindrical shells based on several refined higher order displacement models», *Thin-Walled Structures*, vol. 119, pp. 707–726, 2017.
- [Rahmani, 2009]** Rahmani. O, Khalili. S. M. R, Malekzadeh. K, and Hadavinia. H, «Free vibration analysis of sandwich structures with a flexible functionally graded syntactic core», *Composite Structures*, vol. 91, no. 2, pp. 229–235, 2009.
- [Reddy, 1984]** Reddy, J. N. 1984. "A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 51 (4): 745. doi:10.1115/1.3167719.
- [Reddy, 2000]** Reddy, J.N. "Analysis of Functionally Graded Plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:663-384, College Station TX: John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [Reddy, 2004]** Reddy, J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells* (2<sup>nd</sup> Edition). Boca Raton FL: CRC Press, LLC, 2004.
- [Reissner, 1961]** Reissner E & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous anisotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [Réssiner, 1945]** Reissner E., "L'effet de la déformation du cisaillement transversal sur la flexion des plaques élastiques". *J. Appl. Mech.* , 1945, 12 (2), 69-77.
- [Rezaee, 2015]** Rezaee. M and Jahangiri. R, «Nonlinear and chaotic vibration and stability analysis of an aero-elastic piezoelectric FG plate under parametric and primary excitations», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 344, pp. 277–296, 2015.
- [Rezaiee, 2016]** Rezaiee-Pajand. M and Hozhabrossadati. S. M, «Analytical and numerical method for free vibration of double-axially functionally graded beams», *Composite Structures*, vol. 152, pp. 488–498, 2016.
- [Sahmani, 2013]** Sahmani. S, Ansari. R, Gholami. R, and Darvizeh. A, «Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable based on the modified couple stress elasticity theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 44–53, 2013

- 
- [Sahmani, 2013] Sahmani. S and Ansari. R, «Size-dependent buckling analysis of functionally graded third-order shear deformable microbeams including thermal environment effect», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 23, pp. 9499–9515, 2013.
- [Satouri, 2015] Satouri. S, Kargarnovin. M. H, Allahkarami. F, and Asanjarani. A, «Application of third order shear deformation theory in buckling analysis of 2D-functionally graded cylindrical shell reinforced by axial stiffeners», *Composites Part B: Engineering*, vol. 79, pp. 236–253, 2015.
- [Sayyad, 2017] Sayyad. A.S. and Ghugal. Y.M, «Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams : A critical review of literature», *Compos. Struct*, Vol.171, pp.486-504, 2017.
- [Sedighi, 2015] Sedighi. H. M, Keivani. M, and Abadyan. M, «Modified continuum model for stability analysis of asymmetric FGM double-sided NEMS: corrections due to finite conductivity, surface energy and nonlocal effect», *Composites Part B: Engineering*, vol. 83, pp. 117–133, 2015.
- [Seifi, 2016] Seifi. R and Avatefi. M, «Effects of internal pressure on bending buckling of imperfect functionally graded thin cylinders», *Composite Structures*, vol. 157, pp. 12–24, 2016.
- [Seol, 2012] Seol Y, Kang T, Cho D (2012) Solid freeform fabrication technology applied to tissue engineering with various biomaterials. *Soft Matter* View 8:1730–1735. <https://doi.org/10.1039/c1sm06863f>
- [Sepiani, 2010] Sepiani. H. A, Rastgoo. A, Ebrahimi. F, and Ghorbanpour Arani. A, «Vibration and buckling analysis of two-layered functionally graded cylindrical shell, considering the effects of transverse shear and rotary inertia», *Materials and Design*, vol. 31, no. 3, pp. 1063–1069, 2010.
- [Shafiei, 2017] Shafiei. N and Kazemi. M, «Buckling analysis on the bi-dimensional functionally graded porous tapered nano-/micro-scale beams», *Aerospace Science and Technology*, vol. 66, pp. 1–11, 2017.
- [Shahba, 2011] Shahba. A, Attarnejad. R, Marvi. M. T, and Hajilar. S, «Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions», *Composites Part B: Engineering*, vol. 42, no. 4, pp. 801–808, 2011.
- [Shahba, 2012] Shahba. A and Rajasekaran. S, «Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 7, pp. 3094–3111, 2012.

- 
- [Shahistha, 2014] Shahistha A., Varghese B., Baby A., A review on functionally graded materials. *The International Journal of Engineering and Science (IJES)*, Volume 3, Issue 6, Pages 90-101, ISSN (e): 2319 - 1813 ISSN (p): 2319 - 1805, 2014.
- [Shen, 2009] Shen, H.-S. (2009), "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [Shen, 2014] Shen. H, Païdoussis. M. P, Wen. J, Yu. D, and. Wen. X, «The beam-mode stability of periodic functionally-graded-material shells conveying fluid», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 10, pp. 2735–2749, 2014.
- [Şimşek, 2009] Şimşek. M and Kocatürk. T, «Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load», *Composite Structures*, vol. 90, no. 4, pp. 465–473, 2009.
- [Şimşek, 2013] Şimşek. M and Reddy. J. N, «A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 101, pp. 47–58, 2013.
- [Şimşek, 2015] Şimşek. M, «Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions», *Composite Structures*, vol. 133, pp. 968–978, 2015.
- [Şimşek, 2016] Şimşek. M, «Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions», *Composite Structures*, vol. 149, pp. 304–314, 2016.
- [Şimşek, 2017] Şimşek. M and Al-shujairi. M, «Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads», *Composites Part B: Engineering*, vol. 108, pp. 18–34, 2017.
- [Sina, 2009] Sina. S. A, Navazi. H. M, and Haddadpour. H, «An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams», *Materials and Design*, vol. 30, no. 3, pp. 741–747, 2009.
- [Singh, 2009] Singh. K. V and Li. G, «Buckling of functionally graded and elastically restrained non-uniform columns», *Composites Part B: Engineering*, vol. 40, no. 5, pp. 393–403, 2009.
- [Sobhani, 2010] Sobhani A. B and Yas. M. H, «Three-dimensional free vibration of functionally graded fiber orientation and volume fraction cylindrical panels», *Materials and Design*, vol. 31, no. 9, pp. 4543–4552, 2010.

- 
- [Sofiyev, 2009] Sofiyev. AH, «The vibration and stability behavior of freely supported FGM conical shells subjected to external pressure», *Composite Structures*, vol. 89, no. 3, pp. 356–366, 2009.
- [Sofiyev, 2010] Sofiyev. A. H, «Buckling analysis of FGM circular shells under combined loads and resting on the type elastic foundation», *Mechanics Research Communications*, vol. 37, no. 6, pp. 539–544, 2010.
- [Sofiyev, 2011] Sofiyev. A. H, «Thermal buckling of FGM shells resting on a two-parameter elastic foundation», *Thin-Walled Structures*, vol. 49, no. 10, pp. 1304–1311, 2011.
- [Sofiyev, 2015] Sofiyev. A. H, «Buckling analysis of freely-supported functionally graded truncated conical shells under external pressures», *Composite Structures*, vol. 132, pp. 746–758, 2015.
- [Sofiyev, 2016] Sofiyev. A. H and Kuruoğlu. N, «The stability of FGM truncated conical shells under combined axial and external mechanical loads in the framework of the shear deformation theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 92, pp. 463–476, 2016.
- [Soldatos, 1993] Soldatos, K. P., & Timarci, T. (1993). A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25(1-4), 165-171.
- [Sun, 2015] Sun. J, Xu. X, Lim. C. W, and Qiao. W, «Accurate buckling analysis for shear deformable FGM cylindrical shells under axial compression and thermal loads», *Composite Structures*, vol. 123, pp. 246–256, 2015.
- [Swaminathan, 2014] Swaminathan. K and Naveenkumar. D. T, «Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates-analytical solutions», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 47, pp. 349–361, 2014.
- [Tadi Beni, 2015] Tadi Beni. Y, Mehralian. F, and. Razavi. H, «Free vibration analysis of size-dependent shear deformable functionally graded cylindrical shell on the basis of modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 120, pp. 65–78, 2015.
- [Texier, 2013] Texier damien, 2013: « Mesure et évolution des gradients de propriétés mécaniques dans le système superalliage à base de nickel MC2 revêtu MCrAlY », Institut national polytechnique de toulouse (INP Toulouse France)
- [Thai, 2012] Thai. H.-T and Choi. D.-H, «A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation», *Composites Part B: Engineering*, vol. 43, no. 5, pp. 2335–2347, 2012.
- [Thai, 2012] Thai, H.T. and Vo, T.P. (2012), “Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories”, *Int. J. Mech. Sci.*, 62, 57-66.

- 
- [**Thai, 2012a**] Thai. H.-T and Choi. D.-H, «An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 3, pp. 1008–1022, 2012.
- [**Thai, 2012b**] Thai. H.-T and Vo. T. P, «Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 62, no. 1, pp. 57–66, 2012.
- [**Thang, 2018**] Thang. P. T and Lee. J, «Free vibration characteristics of sigmoid-functionally graded plates reinforced by longitudinal and transversal stiffeners», *Ocean Engineering*, vol. 148, pp. 53–61, 2018.
- [**Timoshenko, 1972**] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1972). *Mechanics of Materials*. van Nostrand Reinhold Company. New York.
- [**Tornabene, 2014**] Tornabene. F, Fantuzzi. N, and Bacciocchi. M, «Free vibrations of free-form doubly-curved shells made of functionally graded materials using higher-order equivalent single layer theories», *Composites Part B: Engineering*, vol. 67, pp. 490–509, 2014.
- [**Tossapanon, 2016**] Tossapanon. P and Wattanasakulpong. N, «Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation», *Composite Structures*, vol. 142, pp. 215–225, 2016.
- [**Tounsi, 2013**] Tounsi M. S. A. Houari, S. Benyoucef, and E. A. Adda Bedia, «A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates», *Aerospace Science and Technology*, vol. 24, no. 1, pp. 209–220, 2013.
- [**Touratier, 1991**] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, 29(8), 901-916.
- [**Tung, 2010**] Tung. H. V and Duc. N. D, «Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads», *Composite Structures*, vol. 92, no. 5, pp. 1184–1191, 2010.
- [**Wang, 2005**] Wang Baochen. Electromagnetic centrifugal casting of ceramic particle reinforced aluminum matrix composites [D]. 2005.
- [**Wang, 2017**] Wang. Y and Wu. D, «Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory», *Aerospace Science and Technology*, vol. 66, pp. 83–91, 2017.
- [**Wang, 2018**] Wang, Y, Feng, C, Zhao, Z, an. Yang, J, «Eigenvalue buckling of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets (GPL)», *Composite Structures*, vol. 202, pp. 38–46, 2018.

- 
- [Watanabe, 2009] Watanabe, Y., Inaguma, Y., Sato, H., and Miura-Fujiwara, E. A., Novel fabrication method for functionally graded materials under centrifugal force: the centrifugal mixed-Powder method. *Materials*, Vol. 2, No. 4, pp.2510-2525, 2009..
- [Watanabe, 2011] Watanabe Y, Miura-Fujiwara E, Sato H (2011) Fabrication of functionally graded materials by combination of centrifugal force and sintering method. *J Jpn Soc Powder Powder Metall* 58:11–17
- [Wattana, 2012] Wattanasakulpong. N, Gangadhara Prusty. B, Kelly. D. W, and Hoffman. M, «Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation», *Materials and Design (1980-2015)*, vol. 36, pp. 182–190, 2012.
- [Wei, 2012] Wei. D, Liu. Y, and Xiang. Z, «An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 7, pp. 1686–1700, 2012.
- [Wu, 2007] Wu Botao, Qiao Yanbo, Ren Jin. Optical properties of Ni<sup>2+</sup> doped transparent ZnO.Ai<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.SiO<sub>2</sub> glass ceramics [J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2007, 29: 251 - 253.
- [Wu, 2013] Wu. C.-P, Chen. Y.-C, and Peng. S.-T, «Buckling analysis of functionally graded material circular hollow cylinders under combined axial compression and external pressure», *Thin-Walled Structures*, vol. 69, pp. 54–66, 2013.
- [Xie, 2015] Xie. X, Zheng. H, and Jin. G, «Free vibration of four-parameter functionally graded spherical and parabolic shells of revolution with arbitrary boundary conditions», *Composites Part B: Engineering*, vol. 77, pp. 59–73, 2015.
- [Xu, 2014] Xu. Y, Yu. T. and Zhou. D, «Two-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded beams with variable thickness», *Meccanica*, Vol. 49, pp. 2479-2489, 2014.
- [Yang, 1966] P.C. Yang, C.H. Norris & Y. Stravinsky: «Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plate». *Int. J. Sol. Struct.*, Volume 2, pages: 665-684, 1966.
- [Yang, 2014] Yang. Y, Kou. K. P, Iu. V. P, Lam. C. C, and Zhang. C, «Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded structures by a boundary–domain integral equation method», *Composite Structures*, vol. 110, pp. 342–353, 2014.
- [Younsi, 2018] Younsi, A., Tounsi, A., Zaoui, F.Z., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2018), “Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates”, *Geomech. Eng.*, 14(6), 519-532.
- [Yousefi, 2011] Yousefi. A and Rastgoo. A, «Free vibration of functionally graded spatial curved beams», *Composite Structures*, vol. 93, no. 11, pp. 3048–3056, 2011.

- 
- [Zahedinejad, 2010]** Zahedinejad. P, Malekzadeh. P, Farid. M, and Karami. G, «A semi-analytical three-dimensional free vibration analysis of functionally graded curved panels», *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 87, no. 8, pp. 470–480, 2010.
- [Zamanzadeh, 2013]** Zamanzadeh, M, Rezazadeh, G, Jafarsadeghi-poornaki, I, and Shabani. R, «Static and dynamic stability modeling of a capacitive FGM micro-beam in presence of temperature changes», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 10-11, pp. 6964–6978, 2013.
- [Zhang, 2013]** Zhang. X, Chen. F, and Zhang. H, «Stability and local bifurcation analysis of functionally graded material plate under transversal and in-plane excitations», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 10-11, pp. 6639–6651, 2013.
- [Zhang, 2015]** Zhang. Y, Huang. H, and Han. Q, «Buckling of elastoplastic functionally graded cylindrical shells under combined compression and pressure», *Composites Part B: Engineering*, vol. 69, pp. 120–126, 2015.
- [Zhang, 2019]** Zhang. N, Khan. T, Guo.H, Shi. S , Zhong. W, and Zhang. W, «Functionally Graded Materials: An Overview of Stability, Buckling, and Free Vibration Analysis», *Advances in Materials Science and Engineering*, vol. 2019.
- [Zhao, 2009]** Zhao. X, Lee. Y. Y, and Liew. K. M, «Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319, no. 3–5, pp. 918–939, 2009.
- [Zhao, 2011]** Zhao. X and Liew. K. M, «Free vibration analysis of functionally graded conical shell panels by a method», *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 649–664, 2011.
- [Zhao, 2014]** Zhao. P, Guo. S.B, Liu. G.H, Chen. Y.X, Li J.T. Fast fabrication of W–Cu functionally graded material by high-gravity combustion synthesis and melt-in- filtration [J]. *Nuclear Materials*, 2014, 445: 26 - 29.
- [Zhao, 2016]** Zhao. Y, Huang. Y, and Guo. M, «A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory», *Composite Structures*, vol. 168, pp. 277–284, 2017.
- [Ziane, 2013]** Ziane. N, Meftah. S. A, Belhadj. H. A, Tounsi. A, and Bedia. E. A. A, «Free vibration analysis of thin and thick-walled FGM box beams», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 66, pp. 273–282, 2013.
- [Ziou, 2016]** Ziou.H, Guenfoud.H, Guenfoud.M (2016), Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. *International Journal of Structural Engineering*; 7(3), 239-261.

- 
- [Zouatnia, 2017]** Zouatnia, N., Hadji, L. and Kassoul, A. (2017), “Effect of the micromechanical models on the bending of FGM beam using a new hyperbolic shear deformation theory”, *Wind Struct.*, 25(4), 329-342.
- [Zouatnia, 2019]** Zouatnia, N. and Hadji, L. (2019), “Effect of the micromechanical models on the bending of FGM beam using a new hyperbolic shear deformation theory”, *Earthq. Struct.*, 16(2), 177-183.
- [Žur, 2018]** Žur. K. K, «Quasi-Green’s function approach to free vibration analysis of elastically supported functionally graded circular plates», *Composite Structures*, vol. 183, pp. 600–610, 2018.