N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée par
Zanou Abdelkader

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Généralisations d'inégalités du type de Hardy et applications aux espaces de Lebesgue avec un exposant variable $0<p(x)<1$.

Soutenue le 26/05/2022
Devant le jury composé de :

Président :	*Hakem Ali*	*Pr.*	*Univ.de Sidi-Bel Abbes*
Examinateurs :	*Belaidi Benharrat*	*Pr.*	*Univ.de Mostaganem*
	Benaissa Abbes	*Pr.*	*Univ.de Sidi-Bel Abbes*
	Halim Benali	*MCA.*	*Univ.de Tiaret*
Directeur de thèse :	*Senouci Abdelkader*	*Pr .*	*Univ.de Tiaret*
Co-Directeur de thèse :	*Amroun Noureddine*	*Pr.*	*Univ.de Sidi-Bel Abbes*

Année universitaire 2021/2022

REMERCIEMENTS

Louange à Notre Seigneur ALLAH le Haut tout puissant qui m'a donné la force et le courage pour élaborer ce travail. C'est à lui que j'exprime ma gratitude et ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus particuliers à Monsieur le Pr : **Senouci Abdelkader** Professeur à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, qui a accepté de diriger cete thèse, pour son aide et ses précieux conseils qui m'ont guidé tout au long de ce travail.

Je remercie Pr : **Amroun Noureddine** Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès de nous avoir supporté malgré sa surcharge pédagogique et scientifique.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements au Pr : **Hakem Ali** Professeur à l'université de Sidi-Bel Abes de m'avoir donné l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Pr. **Belaidi Benharrat** Professeur à l'université de Mostaganem. C'est un grand honneur pour qu'il ait acceptée d'être membre du jury de cette thèse.

Je remercie Pr. **Benaissa Abbes** Professeur à l'université de Sidi Bel Abbès, pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant d'être membre du jury de cette thèse.

Je remercie M.C.A. **Halim Benali** Maitre de conférence "A" à l'université de Tiaret, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de lire cette thèse et en acceptant à participer au jury de celle-ci.

Je voudrai aussi présenter ma gratitude à tous les professeurs qui ont attribué de près ou de loin à ma formation.

DÉDICACE

Je dédie cette thèse à ma mère Saada, mon père Mohamed, mon épouse Djamila, mes frères et soeurs et leurs enfants (**rahaf**) ... à toute la famille et amis proches et lointains.

Généralisations d'inégalités du type de Hardy et applications aux espaces de Lebesgue avec un exposant variable 0<p(x)<1

ZANOU Abdelkader

26/05/2022

Table des matières

Introduction

Dans le présent travail on considère quelques inégalités du type de Hardy dans les espaces classiques de Lebesgue et dans ceux de Lebesgue généralisés où le paramètre d'intégration est variable.

Les premières tentatives pour généraliser les espaces de Lebesgue classiques $L^p(0 < p \leq +\infty)$ ont été faites au début de l'année 1930 par W. Orlicz, où il a considéré l'espace fonctionnel $L^{\varphi}(X, \mu)$ défini par

$$L^{\varphi}(X, \mu) = \left\{ f \in M(X, \mu), \text{ tel que } \rho(\lambda f) = \int_X \varphi(\lambda |f(x)|)dx < +\infty, \; \lambda > 0 \right\}$$

où φ est une fonction convexe dite fonction d'Orlicz qui possède des propriétés analogues à celles de la fonction puissance, qui définit les espaces de Lebesgue usuels.

Par la suite H. Nakano s'est concentré sur l'étude des propriétées principales de la fonction ρ, ce qui l'a amené à définir une classe plus large d'espaces fonctionnels, appelés espaces modulaires. En 1959 W. Orlicz et J. Musielak ont développé la théorie des espaces de Musielak-Orlicz, qui sont un exemple d'espaces modulaires, défini de la même manière que les espaces d'Orlicz, en considérant une fonction φ définie sur $X \times [0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty]$; telle que, $\varphi(\cdot, t)$ est mesurable, et $\varphi(x, \cdot)$ est une fonction d'Orlicz, $\varphi(x, t)$ est appelée fonction d'Orlicz généralisée ou encore fonction de Musielak-Orlicz.

Notre travail consiste à l'étude de certaines propriétés d'un espace particulier de Musielak-Orlicz qui est l'espace de Lebesgue à exposant variable $p(x)$.

Ces espaces nous fournissent une approche differente de celle des espaces classiques de Lebesgue, autrement dit l'exposant variable $p(\cdot)$ nous permet de décrire avec plus de précision le comportement de chaque fonction.

La thèse comprend trois chapitres, une conclusion et une bibliographie.

Dans le premier chapitre, on donne un bref aperçu sur certaines propriétés de l'espace classique de Lebesgue, ensuite, on cite brièvement quelques inégalités classiques de Hardy.

Au deuxième chapitre, on expose deux travaux déjà soumis.

1) "**The weighted Hardy operators and quasi-monotone functions**" (Submitted, see [43]).

2) "**Some generalizations of integral inequalities for weighted Hardy operators with** $0 < p < 1$" (Submitted, see [42]).

Dans le chapitre trois, on cite quelques définitions et quelques inégalités auxiliaires (de Hölder, Minkowsky ... etc) dans l'espace $L^{p(x)}$. Ensuite, on considère brievement certaines notions telles que la complétude, la réflexivité, la séparabilité et autres relatives à cet espace qui est connu sous le nom de l'espace de Lebesgue généralisé, c'est à dire un espace de Lebesgue où le paramètre de sommabilité p est variable.

A la fin de ce chapitre on considère un travail déjà publié sous le titre "**Some integral inequalities for quasi-monotone functions in weighted variable**

exponent Lebesgue space with $0 < p(x) < 1$". Ici sont obtenues des inégalités pondérées pour les opérateurs de Hardy agissant d'un espace de Lebesgue pondéré à exposant variable vers un autre, pour les fonctions définies sur $(0, \infty)$ et satisfaisant des conditions de quasi-monotonie. Certains résultats obtenus dans [5] sont généralisés (Voir [35]).

A la fin du manuscrit on trouve une conclusion et une bibliographie assez détaillée.

Chapitre 1

Espaces classiques de Lebesgue

Dans ce chapitre, on considère quelques inégalités intégrales (de Hölder, Minkowsky ... etc), puis on cite certaines propriétés relatives aux espaces classiques de Lebesgue. A la fin de ce chapitre, on donne un bref aperçu sur certaines inégalités du type de Hardy.

1.1 Définitions et notation

Notations :.
1) On note par e le sous ensemble de Ω de mesure nulle.
2) On note par p.p pour dire presque partout.
3) $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.

Théorème 1.1.1 ***(Théorème de Fubini)***
Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ et $F \subset \mathbb{R}^m$ (un ensemble mesurable) et la fonction $f(x,y)$ intégrable sur $E \times F$. Alors pour presque tous les $x \in E$, $f(x,y)$ est intégrable sur F, pour presque tous les $y \in F$, $f(x,y)$ est intégrable sur E et :

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E \Big(\int_F f(x,y)dy\Big)dx = \int_F \Big(\int_E f(x,y)dx\Big)dy. \tag{1.1}$$

Preuve-Voir [25], [8].

Corollaire 1.1.1 *Si $f(x,y)$ est mesurable sur $E \times F$ et est finie l'une des intégrales :*

$$\int_E \Big(\int_F |f(x,y)|dy\Big)dx \ , \quad \int_F \Big(\int_E |f(x,y)|dx\Big)dy \ ,$$

alors toutes les intégrales de (1.1) existent et de plus cette dernière est vérifiée.

Dans ce qui suit on définit l'espace de Lebesgue classique.

Définition 1.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si :*

(1) f est mesurable sur Ω.
(2) $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f|^p dx \Big)^{1/p} < \infty$.

Exemple 1.1.1 *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_1 \\ -1 & \text{si } x \in E/E_1, \end{cases}$$

avec $E_1 \subset E$, E_1 non mesurable, alors

(1) n'est pas vérifieé.
(2) $\|f\|_{L^p(E)} = \Big(\int_E dx \Big)^{1/p} = |E|^{\frac{1}{p}} < \infty$, donc $f \notin L^p(E)$.

Définition 1.1.2 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $f : \Omega \to \mathbb{C}$*

$$ess \sup_{x \in \Omega} f(x) = \inf_{e \subset \Omega} \sup_{x \in \Omega/e} f(x); \tag{1.2}$$

$$ess \inf_{x \in \Omega} f(x) = \sup_{e \subset \Omega} \inf_{x \in \Omega/e} f(x). \tag{1.3}$$

Définition 1.1.3 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mesurable et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $|\Omega| > 0$. On dit que $f \in L^\infty(\Omega)$ si f est mesurable et*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty. \tag{1.4}$$

Remarque 1.1.1 *On pose $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ pour $|\Omega| = 0$.*

Théorème 1.1.2 ***(Théorème de Riesz)*** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable et f une fonction mesurable sur Ω, alors :*

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{1.5}$$

Preuve-. Voir [1], et [10].

1.2 Quelques inégalités intégrales

1.2.1 Inégalités de Hölder.

Lemme 1.2.1 *Soit $p \geq 1$, alors*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.6}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.2.2 *Pour $0 < p < 1$, on a*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.7}$$

Corollaire 1.2.1 *Soit $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors*

$$\forall A, B \geq 0, \quad \big(AB\big)^r \leq \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q. \tag{1.8}$$

Preuve-Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, et on applique l'inégalité (1.6) avec $a = A^r$ et $b = B^r$ on trouve

$$\big(AB\big)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q.$$

Lemme 1.2.3 *Soit Ω un ensemble mesurable, si les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ sont mesurables sur Ω, et g est non négative, alors :*

$$ess \inf_{x \in \Omega} f(x) \int_\Omega g(x)dx \leq \int f(x)g(x)dx \leq ess \sup_{x \in \Omega} f(x) \int_\Omega g(x)dx. \tag{1.9}$$

Preuve-Soit $e \subset \Omega$ tel que $|e| = 0$, alors

$$\int_\Omega fgdx = \int_{\Omega \backslash e} fgdx \leq \sup_{\Omega \backslash e} f(x) \int_\Omega gdx,$$

alors

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{\Omega / e} f(x) \int_\Omega g(x)dx,$$

d'où

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \inf_{x \in e} \sup_{x \in \Omega \backslash e} f(x) \int_\Omega gdx = ess \sup_{x \in \Omega} f(x) \int_\Omega gdx$$

D'une manière analogue on prouve l'inégalité gauche de (1.9).

Corollaire 1.2.2 *Soit Ω un ensemble mesurable, si les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont mesurables sur Ω et $f \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$, alors :*

$$\Big|\int_\Omega f(x)g(x)dx\Big| \;\leq\; \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^1(\Omega)}. \tag{1.10}$$

Preuve-

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega fgdx\Big| &\leq \int_\Omega |fg|dx \leq ess\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\int |g|dx \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Théorème 1.2.1 ***(Inégalité de Hölder)***

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $0 < p \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1/p + 1/q = 1$, alors :

(i) Si $1 \leq p \leq \infty$

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}, \tag{1.11}$$

(ii) Si $0 < p < 1$, $\forall x \in \Omega,\ g(x) \neq 0$

$$\int_\Omega |fg|dx \geq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.12}$$

Pour la preuve de (1.11) et (1.12) on utilise l'inégalité de Young (1.6) et (1.7).

Corollaire 1.2.3 *Soit $p > 0$, $p_1 \leq \infty$, $-\infty \leq p_2 \leq \infty$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$, alors*

(i) Si $p \leq p_1$

$$\|fg\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|g\|_{L^{p_2}(\Omega)}, \tag{1.13}$$

(ii) Si $p > p_1$, $\forall x \in \Omega,\ g(x) \neq 0$

$$\|fg\|_{L^p(\Omega)} \geq \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|g\|_{L^{p_2}(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Pour la preuve de (1.13) et (1.14) on applique respectivement (1.11) et (1.12) avec $\frac{1}{p_1/p} + \frac{1}{p_2/p} = 1$.

Proposition 1.2.1 *Soit* $p_i \in]1, \infty[$, $i = 1, 2, ..., k$, *et* $1 < r < \infty$ *tel que* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ *(les* p_i *sont dits* r *conjugués),* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, *alors*

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i \in L^r(\Omega) \text{ et } \|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)} \tag{1.15}$$

Preuve-Par récurrence.

Corollaire 1.2.4 *Soit* $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, *alors*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(\Omega)} \tag{1.16}$$

où $\alpha \in (0.1)$, *et tel que* $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Preuve-La preuve est analogue à (1.13).

Corollaire 1.2.5 *Soit* $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, *alors* $\forall \epsilon > 0$ *on a*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \alpha^{\alpha}\Big(1-\alpha\Big)^{1-\alpha}\Big(\epsilon^{1-\alpha}\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} + \epsilon^{-\alpha}\|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}\Big). \tag{1.17}$$

où $\alpha \in (0.1)$, *et tel que* $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Preuve-

L'inégalité (1.17) découle de l'inégalité (1.16) si on prend en considération

$$\|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\Omega)} . \|f\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(\Omega)} = \Big(\epsilon^{1-\alpha}\|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}\Big)^{\alpha}\Big(\epsilon^{-\alpha}\|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}\Big)^{1-\alpha}$$

et en utilisant aussi l'inégalité (1.6).

1.2.2 Inégalités de Minkowsky.

Lemme 1.2.4 *Soit* $f, g \in L^{\infty}(\Omega)$, *alors on a l'inégalité suivante :*

$$\|f_1 + f_2\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|f_2\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Preuve-Soit e_1 et e_2 deux ensembles tels que $|e_1| = |e_2| = 0$, on pose $e = e_1 \cup e_2$, alors $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\sup_{\Omega/e_i} |f_i| \leq \|f_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

et donc

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| &\leq \sup_{\Omega/e}(|f_1| + |f_2|) \leq \sup_{\Omega/e} |f_1| + \sup_{\Omega/e} |f_2| \\ &\leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon \\ \inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| &\leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon,\end{aligned}$$

on fait tendre ϵ vers 0, d'où :

$$\inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\|f_1 + f_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Théorème 1.2.2 ***(Inégalité de Minkowsky)*** *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$, alors :*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Preuve-Voir [10].

Corollaire 1.2.6 *Soient $m \in \mathbb{N}^\star$, et $f_k \in L^p(\Omega)$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., m\}$, $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.19}$$

Preuve-Par récurrence.

Corollaire 1.2.7 ***(Inégalité de Minkowsky pour les sommes infinies)*** *Soit $f_k \in L^p(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.20}$$

Preuve-On suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p(\Omega)} < \infty$.
A l'aide du critère de Cauchy pour les séries numériques et l'inégalité de Minkowsky

pour les sommes finies on montre que la somme $S_m = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L^p(\Omega)}$ est une suite de Cauchy et puisque L^p est complet, on déduit que

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^p(\Omega)}$$

on passe à la limite quand $m \to \infty$ et en vertu de la continuité des semi-normes $\sum_{k=1}^{m} f_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, lorsque $m \to \infty$, on a

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big\| f_k \Big\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.2.3 *Soit $0 < p < 1$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $f, g \in L^p(\Omega)$, alors*

$$\big\|f+g\big\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\Big(\big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} + \big\|g\big\|_{L^p(\Omega)}\Big) \tag{1.21}$$

Preuve-On utilise une conséquence de l'inégalité de Jensen :

$$\Big(a+b\Big)^p \leq c\Big(a^p + b^p\Big), \quad \forall a, b > 0 \tag{1.22}$$

si $p \geq 1$, $c = 2^{p-1}$ et si $0 < p < 1$, alors $c = 1$. On applique cette inégalité avec $a = |f|$ et $b = |g|$, on obtient :

$$\big\|f+g\big\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \big|f+g\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_\Omega \big|f\big|^p dx + \int_\Omega \big|g\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

on applique l'inégalité (1.22), avec $c = \max(1, 2^{\frac{1}{p}-1}) = 2^{\frac{1}{p}-1}$, et donc

$$\begin{aligned}\big\|f+g\big\|_{L^p(\Omega)} &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\Big(\Big(\int_\Omega \big|f\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega \big|g\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\Big(\big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} + \big\|g\big\|_{L^p(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

Lemme 1.2.5 *Soient $a_i > 0$, $i = 1, ..., m$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} a_i\Big)^p \leq c\Big(\sum_{k=1}^{m} a_i^p\Big) \tag{1.23}$$

avec $c = max(1, m^{p-1})$.

Preuve-On utilise l'inégalité de Jensen.

Corollaire 1.2.8 *Soit $0 < p < 1$, alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq m^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^{m} \Big\| f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.24}$$

Preuve-A partir du Corollaire 1.2.6 et du Lemme 1.2.5.

Théorème 1.2.4 ***(Inégalité intégrale de Minkowsky)*** *Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et $1 \leq p \leq \infty$, f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors*

$$\Big\| \int_F f(.,y)dy \Big\|_{L^p(E)} \leq \int_F \Big\| f(.,y) \Big\|_{L^p(E)} dy. \tag{1.25}$$

Remarque

Cette inégalité est interprétée de la manière suivante :
Si f est mesurable sur $E \times F$, pour presque tous les $y \in F$, $f(.,y) \in L^p$ et la fonction $\|f(.,y)\|_{L^p(E)}$ intégrable sur F, alors pour presque tous les $x \in E$, la fonction $f(x,.)$ est intégrable sur F, la fonction $\int_F f(.,y)dy \in L^p(E)$ est l'inégalite (1.25) est verifiée.

Preuve-Voir [10]. p. 316-317.

Théorème 1.2.5 *Soient $E \subset \mathbb{R}^m$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors pour $0 < q \leq p \leq \infty$ on a*

$$\Big\| \|f(x,y)\|_{L^q_y(F)} \Big\|_{L^p_x(E)} \leq \Big\| \|f(x,y)\|_{L^p_x(E)} \Big\|_{L^q_y(F)}. \tag{1.26}$$

Preuve-

$$\begin{aligned}
\Big\| \|f(x,y)\|_{L^q_y(F)} \Big\|_{L^p_x(E)} &= \Big\| \Big(\int_F |f(x,y)|^q dy \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p_x(E)} \\
&= \Big\| \int_F |f(x,y)|^q dy \Big\|^{\frac{1}{q}}_{L^{\frac{p}{q}}_x(E)} \\
&\leq \Big(\int_F \Big\| |f(x,y)|^q \Big\|_{L^{\frac{p}{q}}_x(E)} dy \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int_F \Big\| f(x,y) \Big\|^q_{L^p_x(E)} dy \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big\| \|f(x,y)\|_{L^p_x(E)} \Big\|_{L^q_y(F)}.
\end{aligned}$$

1.3 Propriétés

1.3.1 Dual de L^p.

Définition 1.3.1 *On dit que $l : E \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur E si :*

(1) $l(af + bg) = al(f) + bl(g)$ pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $f, g \in E$.

(2) $\big|l(f)\big| \leq c\big\|f\big\|_E$, où $c = \|l\|$.

Proposition 1.3.1 *L'application $l : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par*

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad g \in L^q(\Omega), \tag{1.27}$$

est une fonctionnelle linéaire continue.

L'ensemble des fonctionnelles linéaires sur $L^p(\Omega)$ est noté par $(L^p(\Omega))^*$.

Preuve-

1) La linéarité est évidente.
2) La continuité

$$\big|l(f)\big| = \Big|\int_\Omega f(x)g(x)dx\Big| \leq \int_\Omega \big|f(x)\big|\big|g(x)\big|dx,$$

par application de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\big|l(f)\big| &\leq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^q(\Omega)}\\ &\leq c\big\|f\big\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

avec $c = \big\|g\big\|_{L^q(\Omega)}$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque 1.3.1 *L'espace dual $(L^p(\Omega))^*$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ normé :*

$$\big\|l\big\| = \sup\{\big|l(f)\big| : \ \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\}. \tag{1.28}$$

1.3.2 Convergences dans L^p.

Définition 1.3.2 *On dit qu'une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ converge en mesure vers une fonction $f(x)$ si pour tout $\sigma > 0$ on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\{x \ : \ \big|f_n(x) - f(x)\big| \geq \sigma\}\Big| = 0. \tag{1.29}$$

Théorème 1.3.1 *Si une suite de fonctions mesurables $\{f_n(x)\}$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$, elle converge vers la même fonction $f(x)$ en mesure.*

Preuve-Voir [20] Chapitre V, §4 ; Théorème 7.

Théorème 1.3.2 *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables convergeant en mesure vers $f(x)$. Alors, de cette suite on peut extraire une sous suite $\{f_{n_k}(x)\}$ convergeant vers $f(x)$ presque partout .*

Preuve-Voir [20] Chapitre V, §4 ; Théorème 8.

Définition 1.3.3 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$. On dit que (f_n) converge faiblement vers f si*

$$\lim_{n\to\infty} l\big(f_n\big) = l\big(f\big) \text{ pour tout } l \in (L^p(\Omega))^*. \tag{1.30}$$

Théorème 1.3.3 *Soit $f \in L^p(\Omega)$ telle que $l(f) = 0$ pour toute $l \in (L^p(\Omega))^*$ alors $f = 0$. p.p.*

Preuve-. On distingue 3 cas :
a) $1 < p < \infty$, on pose

$$g(x) = \begin{cases} \big|f(x)\big|^{p-2}\overline{f(x)} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $f \in L^p(\Omega)$, alors $g \in L^q(\Omega)$, en effet :

$$\big\|g\big\|_{L^q} = \Big(\int_\Omega \big|g(x)\big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_\Omega \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_\Omega \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$= \big\|f\big\|_{L^p}^{p-1} < \infty.$$

De plus on a

$$l(f) = \int_\Omega g(x)f(x)dx = \int_\Omega \big|f(x)\big|^p dx = \big\|f\big\|_{L^p}^p.$$

Donc, si $l\big(f\big) = 0$ on a $\big\|f\big\|_{L^p}^p = 0$ d'où $\big\|f\big\|_{L^p} = 0$ et par suite $f = 0$ p.p.
b) $p = 1$, posons

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{\left|f(x)\right|} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $g \in L^\infty(\Omega)$, et

$$l(f) = \int_\Omega g(x)f(x)dx = \int_\Omega \big|f(x)\big|dx = \big\|f\big\|_{L^1}.$$

Donc, si $l\big(f\big) = 0$ on a $\|f\|_{L^1} = 0$ et donc $f = 0$ p.p.
c) $p = \infty$, on pose

$$A = \{x,\ |f(x)| > 0\}\ si\ f \neq 0.$$

Donc $|A| > 0$, et soit $B \subset A$ mesurable telle que $0 < |B| < \infty$, on prend

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $g \in L^1(\Omega)$, et

$$l(f) = \int_\Omega g(x)f(x)dx = \int_\Omega |f(x)|dx = \|f\|_{L^\infty}.$$

Donc, si $l\big(f\big) = 0$ on a $\|f\|_{L^\infty} = 0$ et donc $f = 0$ p.p.

Théorème 1.3.4 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$, alors :*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.31}$$

Preuve-On distingue deux cas :
a) $1 \leq p < \infty$.
On pose

$$l\big(f\big) = \int_\Omega gf dx, \quad avec\ g(x) = |f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}.$$

Alors d'après la preuve du théorème précédent on a $l\big(f\big) = \|f\|^p_{L^p}$ et par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f\|^p_{L^p} = l(f) = \lim_{n\to\infty} l\big(f_n\big) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega gf_n dx \leq \|g\|_{L^q} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p}.$$

Comme $\|g\|_{L^q} = \|f\|^{p-1}_{L^p}$ on a

$$\|f\|^p_{L^p} \leq \|f\|^{p-1}_{L^p} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p},$$

d'où

$$\|f\|_{L^p} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_{L^p}.$$

b) $p = \infty$, on pose $a = \|f\|_{L^\infty}$ et

$$A_\epsilon = \{x \in \Omega,\ |f(x)| > a - \epsilon\}.$$

Alors il existe une sous suite d'ensembles B_k tels que $A_\epsilon \cap B_k$ décroit vers A_ϵ, posons

$$g_{k,\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{si } x \in A_\epsilon \cap B_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De l'inégalité de Hölder on d'éduit

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_{k,\epsilon}f_n dx = \int_{A_\epsilon\cap B_k} 1\times\big|f(x)\big|dx \le \big|A_\epsilon\cap B_k\big|\lim_{n\to\infty}\big\|f\big\|_{L^\infty}.$$

Mais

$$\int_{A_\epsilon\cap B_k}\big|f(x)\big|dx \ge \big(a-\epsilon\big)\big|A_\epsilon\cap B_k\big|,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}\inf\big\|f_n\big\|_{L^\infty} \ge a-\epsilon = \big\|f\big\|_{L^\infty}-\epsilon.$$

On fait tendre ϵ vers 0, et on obtient le résultat.

Théorème 1.3.5 *Soit $1\le p\le\infty$. Alors le dual de $L^p(\Omega)$ est $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $l\big(f\big)=\int_\Omega f(x)g(x)dx$ pour une certaine $g\in L^q(\Omega)$ unique et de plus :*

$$\big\|l\big\| = \big\|g\big\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.32}$$

Preuve-Voir [25] théorème 2.14.

Définition 1.3.4 *On dit qu'une suite de fonctions $\big(f_n(x)\big)$ de L^p converge en moyenne vers $f(x)\in L^p$ avec $1\le p\le\infty$ si l'égalité suivante est vérifiée*

$$\lim_{n\to\infty}\big\|f_n-f\big\|_{L^p}=0. \tag{1.33}$$

Proposition 1.3.2 *Si une suite de fonctions $\big(f_n(x)\big)$ de L^p, $1\le p\le\infty$ converge en moyenne vers $f(x)$, alors elle converge faiblement vers la même fonction $f(x)$.*

Preuve-(A l'aide de l'inégalité de Hölder)
On a

$$\int_a^b\big|f_n(x)-f(x)\big|\big|g(x)\big|dx \le \big\|f_n-f\big\|_{L^p}\big\|g\big\|_{L^q}$$

par passage à la limite on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\big|f_n(x)-f(x)\big|\big|g(x)\big|dx \le \lim_{n\to\infty}\big\|f_n-f\big\|_{L^p}\big\|g\big\|_{L^q}$$

et comme f_n converge en moyenne vers f, alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\big|f_n(x)-f(x)\big|\big|g(x)\big|dx=0$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\Big(f_n(x)-f(x)\Big)\Big(g(x)\Big)dx=0$$

et donc f_n converge faiblement vers f.

Remarque 1.3.2 *Si $p=1$ alors la convergence faible est vérifiée $\forall g(x)$ mesurable et bornée, et donc la proposition 1.3.2 est aussi vérifiée.*

1.3.3 Complétude, réflexivité et séparabilité.

Théorème 1.3.6 *Soit* $1 \leq p < \infty$*, alors* L^p *est un espace de Banach.*

Preuve-. Voir [10].

Définition 1.3.5 *Soit* E *un espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* E *dans* E''*. On dit que* E *est réflexif si* $J(E) = E''$*.*

Théorème 1.3.7 L^p *est réflexif pour* $1 < p < \infty$*.*

Preuve-Voir [8] Chapitre IV.3. Théorème IV.10.

Définition 1.3.6 *On dit qu'un espace métrique* E *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $D \subset E$ *dénombrable et dense.*

Théorème 1.3.8 $L^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$*.*

Preuve-Voir [8] Chapitre IV.3. Théorème IV.13.

1.4 Inégalités classiques de Hardy pour $p \geq 1$.

1.4.1 Introduction.

Pendant les années vingt du dernier siecle, Hardy établit une inégalité intégrale connue de nos jours sous le nom de "Inégalité intégrale de Hardy"

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\Big)^p dx \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^\infty f^p(x)dx.$$

La constante $(\frac{p}{p-1})^p$ est la plus petite possible.

Pendant la 1^{ere} période (1906-1928), plusieurs mathématiciens comme G. H. Hardy, E. Landau, G .Polya, I .Schur et M. Riesz, ont contribué à l'etablissement et au developpement de cette inégalité (voir [22]), ce qui a donné naissance aux inégalités discrètes, continues et avec poids de Hardy.

À partir des années soixante grâce aux travaux de (P. Beesack 1961) (voir [7]), ont été etablis les liens entre la validité de l'inégalité de Hardy avec des fonctions de poids plus générales et l'existence de solutions (positives) de l'équation ordinaire

$$\frac{d}{dx}\Big(v(x)\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^{p-1}\Big) + u(x)y^{p-1} = 0.$$

D'autres approches ont été développées pendant cette même période, dont celles de (Portnov 1964) (voir [29]) et (Sysoeva 1965) (voir [37]) qui consistent à déterminer le poids u connaissant v, ou inversement, de sorte à ce que l'inégalité de Hardy soit vérifiée et l'approche de (Kufner et Triebel 1978) (voir [23]) qui expriment les poids en fonction d'une fonction auxiliaire. Mais la caractérisation des poids telle qu'elle est connue actuellement, apparait avec (Talenti 1969) (voir [38]) et (Tomaselli 1969) (voir [39]).

Définition 1.4.1 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, $x \in (0, \infty)$, *on définit :*

$$\big(H_1 f\big)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \tag{1.34}$$

(la valeur moyenne de la fonction f *dans l'intervalle* $(0, x)$*),*

$$\big(H_2 f\big)(x) = \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy. \tag{1.35}$$

1.4.2 Inégalité de Hardy avec poids.

Théorème 1.4.1 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *pour toute fonction* f *définie sommable sur l'intervalle* $(0, \infty)$, *on a :*

$$1) \Big\| x^\alpha \Big(H_1 f\Big)(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)} \leq \Big(\frac{1}{q} - \alpha\Big)^{-1} \Big\| x^\alpha f(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)}, \quad si\ \alpha < \frac{1}{q} \tag{1.36}$$

$$2) \Big\| x^\alpha \Big(H_2 f\Big)(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)} \leq \Big(\alpha - \frac{1}{q}\Big)^{-1} \Big\| x^\alpha f(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)}, \ si\ \alpha > \frac{1}{q}\ . \tag{1.37}$$

Preuve-.
1) Si $\alpha < \frac{1}{q}$ on pose

$$\begin{aligned} J &= \Big\| x^\alpha (H_1 f)(x) \Big\|_{L^p(0,\infty)} \\ &= \Big\| \int_0^x x^{\alpha-1} f(y) dy \Big\|_{L^p(0,\infty)} \end{aligned}$$

posons $z = \frac{y}{x}$ alors $dy = x dz$

$$\begin{aligned} J &= \Big\| \int_0^1 x^\alpha f(xz) dz \Big\|_{L^p(0,\infty)} \\ &\leq \int_0^1 \Big\| x^\alpha f(xz) \Big\|_{L^p_x(0,\infty)} dz \end{aligned}$$

on pose $t = xz$ alors $dt = zdx$ et donc $dx = \frac{dt}{z}$

$$\begin{aligned}\Big\|x^\alpha f(xz)\Big\|_{L^p_x(0,\infty)} &= \Big(\int_0^\infty x^{p\alpha}\big|f(xz)\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\Big(\int_0^\infty t^{p\alpha}\big|f(t)\big|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\Big\|t^\alpha f(t)\Big\|_{L^p(0,\infty)}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}J &\leq \int_0^1 z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\Big\|t^\alpha f(t)\Big\|_{L^p(0,\infty)} dz \\ &= \Big(1-\frac{1}{p}-\alpha\Big)^{-1}\Big\|t^\alpha f(t)\Big\|_{L^p(0,\infty)} \\ &= \Big(\frac{1}{q}-\alpha\Big)^{-1}\Big\|t^\alpha f(t)\Big\|_{L^p(0,\infty)}.\end{aligned}$$

2) Si $\alpha > \frac{1}{q}$ de manière analogue on démontre l'inégalité (1.37).

1.4.3 Une inégalité de Hardy dans $\mathbb{R}^n$.

On s'interesse à l'opérateur de Hardy $\widetilde{H}_n$ défini pour toute fonction $f \geq 0$ mesurable sur $\mathbb{R}^n$ par

$$(\widetilde{H}_n f)(r) = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)dy.$$

Théorème 1.4.2 *Soient $p \geq 1$ et $\alpha < np-1$, alors pour toute fonction f non-négative mesurable sur $\mathbb{R}^n$ on a*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)dy\Big)^p r^\alpha dr \leq \Big(\frac{np}{np-1-\alpha}\Big)^p \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)|x|^{\alpha-n+1}dx, \qquad (1.38)$$

et si $-1 < \alpha < np-1$ alors la constante $(\frac{np}{np-1-\alpha})^p$ est optimale.

Preuve-Voir [28].

Remarquons que pour $n = 1$ et f définie sur $(0,\infty)$ on obtient l'opérateur usuel de Hardy i.e.

$$(\widetilde{H}_1 f)(r) = (Hf)(r) = \frac{1}{r}\int_0^r f(y)dy.$$

Corollaire 1.4.1 *Soient $p > 1$ et $\alpha < p-1$, alors pour toute fonction f non-négative mesurable sur $(0,\infty)$ on a*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{r}\int_0^r f(y)dy\Big)^p r^\alpha dr \leq \Big(\frac{p}{p-1-\alpha}\Big)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx, \qquad (1.39)$$

et si $-1 < \alpha < p-1$, alors la constante $(\frac{p}{p-1-\alpha})^p$ est optimale.

Chapitre 2

Opérateurs de Hardy pondérés liés aux fonctions monotones et quasi-monotones

Le présent chapitre comprend deux travaux déjà soumis et un bref aperçu sur certaines applications. Au début on commence par exposer un travail déjà soumis (Voir [43]).

2.1 Opérateurs de Hardy pondérés et fonctions quasi-monotones

Certaines inégalités de type Hardy sont établis par W.T. Sulaiman. Le but de ce travail est d'étendre ces inégalités pour des opérateurs de Hardy pondérés avec des fonctions quasi-monotones. De plus, de nouvelles inégalités intégrales pondérées ont été obtenues.

2.1.1 Introduction

L'inégalité de Hardy classique (Voir [9]) a été prouvée pour $f(x) \geq 0$, $p > 1$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x)dx, \tag{2.1}$$

où

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt. \tag{2.2}$$

La constante $(\frac{p}{p-1})^p$ est la plus petite possible (optimale).

Cette inégalité a de nombreuses applications dans la théorie des équations différentielles (ordinaires et partielles) et a conduit à de nombreuses questions et connexions intéressantes entre différents domaines de l'analyse mathématiques.

Les inégalités suivantes ont été prouvées dans [36].

Soit $f \geq 0$, $g > 0$.

1. Si $\frac{x}{g(x)}$ est une fonction non croissante, $p > 1$ et $0 < a < 1$, alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \leq \frac{1}{a(p-1)(1-a)^{p-1}} \int_0^\infty \left(\frac{tf(t)}{g(t)}\right)^p dt. \tag{2.3}$$

2. Si $\frac{x}{g(x)}$ est une fonction non décroissante, $0 < p < 1$ et $a > 0$, alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \geq \frac{1}{a(1-p)(1+a)^{p-1}} \int_0^\infty \left(\frac{tf(t)}{g(t)}\right)^p dt. \tag{2.4}$$

3. Si $p \geq 2$, alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \int_0^\infty t^{-1} f^{p-1}(t) F(t) dt. \tag{2.5}$$

4. Si $p > 1$, $h \geq 0$, h fonction convexe et non décroissante, alors

$$\int_0^\infty h^p \left(\frac{F(x)}{x}\right) dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty h^p \left(f(t)\right) dt. \tag{2.6}$$

Les inégalités de Hardy pour les fonctions quasi-monotones sont considérées par exemple dans [9] et [17].

L'objectif de ce travail est de généraliser les inégalités (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) pour l'opérateur de Hardy pondéré et son dual avec des fonctions quasi-monotones. De plus, d'autres inégalités intégrales ont été obtenues pour des fonctions quasi-monotones.

Tout au long de cet travail, nous supposerons que les fonctions sont intégrables non négatives et que les intégrales sont supposées exister et sont finies.

2.1.2 Résultats principaux

Considérons l'opérateur de Hardy pondéré et son dual

$$F_w(x) = \int_0^x f_w(t)dt, \ F_w^*(x) = \int_x^\infty f_w(t)dt,$$

où $f_w(t) = f(t)w(t)$ et $g > 0$, $f \geq 0$ sont des fonctions Lebesgue mesurables sur $(0, \infty)$. Soient ω et $v > 0$ des fonctions de poids sur $(0, \infty)$, $V(x) = \int_0^x v(t)dt$, $V^*(x) = \int_x^\infty v(t)dt$, et $G_V(x) = g(x)V(x)$, $G_{V^*}(x) = g(x)V^*(x)$.

La définition suivante a été introduite dans [9].

Définition 2.1.1 *On dit qu'une fonction positive f est quasi-monotone sur $]0,\infty[$, si pour un nombre réel α, $x^\alpha f(x)$ est décroissante ou une fonction croissante de x. Plus précisément, étant donné $\beta \in \mathbb{R}$, on dit que $f \in Q_\beta$ si $x^{-\beta} f(x)$ est non-croissante et $f \in Q^\beta$ si $x^{-\beta} f(x)$ est non décroissante.*

Théorème 2.1.1 *Soient $p > 1$, $f \geq 0$, $g > 0$, $\frac{x}{g(x)} \in Q_\beta$, $0 < a < 1$ et $\beta < a(\frac{p-1}{p})$, alors*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F_w(x)}{G_V(x)}\right)^p dx \leq \frac{1}{(a(p-1)-p\beta)(1-a)^{p-1}} \int_0^\infty \left(\frac{tf_w(t)}{G_V(t)}\right)^p dt. \tag{2.7}$$

Preuve-Comme $\frac{x}{g(x)} \in Q_\beta$ et $V(x)$ est non décroissante, alors $\frac{x}{G_V(x)} \in Q_\beta$. Soit $K = \int_0^\infty \left(\frac{F_w(x)}{G_V(x)}\right)^p dx$, alors

$$K = \int_0^\infty G_V^{-p}(x)\left(\int_0^x f_w(t)dt\right)^p dx$$

$$= \int_0^\infty G_V^{-p}(x)\left(\int_0^x t^{a(1-\frac{1}{p})} f_w(t) t^{-a(1-\frac{1}{p})} dt\right)^p dx.$$

$\frac{x}{G_V(x)} \in Q_\beta$, implique que $\left(\frac{x}{G_V(x)}\right)^p \in Q_\beta$. En vertu de l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini, on obtient

$$K \leq \int_0^\infty G_V^{-p}(x)\left(\int_0^x t^{a(p-1)} f_w^p(t)dt\right)\left(\int_0^x t^{-a}dt\right)^{p-1} dx$$

$$= \frac{1}{(1-a)^{p-1}} \int_0^\infty x^{(1-a)(p-1)} G_V^{-p}(x) \int_0^x t^{a(p-1)} f_w^p(t)dtdx$$

$$= \frac{1}{(1-a)^{p-1}} \int_0^\infty t^{a(p-1)} f_w^p(t) \int_t^\infty x^{(1-a)(p-1)} G_V^{-p}(x)dxdt$$

$$\leq \frac{1}{(1-a)^{p-1}} \int_0^\infty t^{a(p-1)} f_w^p(t)\left(\frac{t^{1-\beta}}{G_V(t)}\right)^p \int_t^\infty x^{p\beta - a(p-1)-1} dxdt$$

$$= \frac{1}{(a(p-1)-p\beta)(1-a)^{p-1}} \int_0^\infty \left(\frac{tf_w(t)}{G_V(t)}\right)^p dt.$$

Remarque 2.1.1 *Si dans* (2.7)*, on pose $w(x) = 1$, $V(x) = 1$ et $\beta = 0$, on obtient l'inégalité* (2.3)*.*

Considérons maintenant l'inégalité inverse de (2.7).

Théorème 2.1.2 *Soient* $0 < p < 1$, $f \geq 0$, $g > 0$, $\frac{x}{g(x)} \in Q^{\beta}$, $a > 0$, $\beta < a\left(\frac{1-p}{p}\right)$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{F_w(x)}{G_{V^*}(x)}\right)^p dx \geq \frac{1}{(a(1-p)-p\beta)\,(1+a)^{p-1}} \int_0^{\infty} \left(\frac{tf_w(t)}{G_{V^*}(t)}\right)^p dt. \qquad (2.8)$$

Preuve-Comme $\frac{x}{g(x)} \in Q^{\beta}$ et $V^*(x)$ est non croissante, alors $\left(\frac{x}{G_{V^*}(x)}\right)^p \in Q^{\beta}$.

Soit $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{F_w(x)}{G_{V^*}(x)}\right)^p dx$, alors

$$I = \int_0^{\infty} G_{V^*}^{-p}(x) \left(\int_0^x f_w(t)dt\right)^p dx = \int_0^{\infty} G_{V^*}^{-p}(x) \left(\int_0^x t^{a(\frac{1}{p}-1)} f_w(t) t^{-a(\frac{1}{p}-1)} dt\right)^p dx.$$

Par application de l'inégalité inverse de Hölder et du théorème de Fubini, on aura

$$\begin{aligned}
I &\geq \int_0^{\infty} G_{V^*}^{-p}(x) \left(\int_0^x t^{a(1-p)} f_w^p(t)dt\right) \left(\int_0^x t^{+a}dt\right)^{p-1} dx \\
&= \frac{1}{(1+a)^{p-1}} \int_0^{\infty} x^{(1+a)(p-1)} G_{V^*}^{-p}(x) \int_0^x t^{a(1-p)} f_w^p(t)dtdx \\
&= \frac{1}{(1+a)^{p-1}} \int_0^{\infty} t^{a(1-p)} f_w^p(t) \int_t^{\infty} x^{(1+a)(p-1)} G_{V^*}^{-p}(x)dxdt \\
&\geq \frac{1}{(1+a)^{p-1}} \int_0^{\infty} t^{a(1-p)} f_w^p(t) \left(\frac{t^{1-\beta}}{G_{V^*}(t)}\right)^p \int_t^{\infty} x^{p\beta-a(1-p)-1}dxdt \\
&= \frac{1}{((a(1-p)-p\beta)\,(1+a)^{p-1}} \int_0^{\infty} \left(\frac{tf_w(t)}{G_{V^*}(t)}\right)^p dt.
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.2 *En posant* $w(x) = 1$, $V^*(x) = 1$ *et* $\beta = 0$, *dans* (2.8), *on obtient l'inégalité* (2.4).

Théorème 2.1.3 *Soient* $p > 1$, $f \geq 0$, $g > 0$, $\frac{x}{g(x)} \in Q^{\beta}$, $a > 1$ *et* $\beta > a(\frac{p-1}{p})$, *alors*

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{F_w^*(x)}{G_{V^*}(x)}\right)^p dx \leq \frac{1}{(a(p-1)-p\beta)\,(a-1)^{p-1}} \int_0^{\infty} \left(\frac{tf_w(t)}{G_{V^*}(t)}\right)^p dt. \qquad (2.9)$$

Preuve-Soit $K_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{F_w^*(x)}{G_{V^*}(x)}\right)^p dx$, Donc

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^{\infty} G_{V^*}^{-p}(x) \left(\int_x^{\infty} f_w(t)dt\right)^p dx \\
&= \int_0^{\infty} G_{V^*}^{-p}(x) \left(\int_x^{\infty} t^{a(1-\frac{1}{p})} f_w(t) t^{-a(1-\frac{1}{p})} dt\right)^p dx
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini, on a

$$
\begin{aligned}
K_1 &\leq \int_0^\infty G_{V^*}^{-p}(x)\left(\int_x^\infty t^{a(p-1)} f_w^p(t)dt\right)\left(\int_x^\infty t^{-a}dt\right)^{p-1} dx \\
&= \frac{1}{(a-1)^{p-1}}\int_0^\infty x^{(a-1)(p-1)} G_{V^*}^{-p}(x)\int_x^\infty t^{a(p-1)} f_w^p(t)dtdx \\
&= \frac{1}{(a-1)^{p-1}}\int_0^\infty t^{a(p-1)} f_w^p(t)\int_0^t x^{(1-a)(p-1)} G_{V^*}^{-p}(x)dxdt \\
&\leq \frac{1}{(a-1)^{p-1}}\int_0^\infty t^{a(p-1)} f_w^p(t)\left(\frac{t^{1-\beta}}{G_{V^*}(t)}\right)^p\int_0^t x^{p\beta-a(p-1)-1}dxdt \\
&= \frac{1}{(a(p-1)-p\beta)\,(a-1)^{p-1}}\int_0^\infty \left(\frac{tf_w(t)}{G_{V^*}(t)}\right)^p dt.
\end{aligned}
$$

Si dans (2.9), on pose $w(x)=1$, $V(x)^*=1$ et $\beta=0$, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.1 *Soient $p>1$, $f\geq 0$, $g>0$, $\frac{x}{g(x)}$ fonction non décroissante, $a>1$, alors*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F^*(x)}{g(x)}\right)^p dx \leq \frac{1}{(a(p-1)(a-1)^{p-1}}\int_0^\infty \left(\frac{tf(t)}{g(t)}\right)^p dt. \tag{2.10}$$

Théorème 2.1.4 *Soient $0<p<1$, $f\geq 0$, $g>0$, $\frac{x}{g(x)}\in Q^\beta$, $a<-1$, $\beta>a\left(\frac{1-p}{p}\right)$ et $\beta\in\mathbb{R}$, alors*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F_w^*(x)}{G_V(x)}\right)^p dx \geq \frac{1}{(p\beta-a(p-1))\left((-1)(1+a)\right)^{p-1}}\int_0^\infty \left(\frac{tf_w(t)}{G_V(t)}\right)^p dt. \tag{2.11}$$

La preuve est similaire à celle du théorème 2.1.1.
Si dans (2.11), $w(x)=1$, $V(x)=1$ et $\beta=0$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.2 *Soient $0<p<1$, $f\geq 0$, $g>0$, $\frac{x}{g(x)}$ une fonction non décroissante, $a<-1$, alors*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F_w^*(x)}{g(x)}\right)^p dx \geq \frac{1}{(a(1-p)-p\beta)\,(1+a)^{p-1}}\int_0^\infty \left(\frac{tf_w(t)}{g(t)}\right)^p dt. \tag{2.12}$$

Remarque 2.1.3 *Les inégalités* (2.10) *et* (2.12) *sont les analogues des inégalités* (2.3) *et* (2.4) *respectivement.*

Théorème 2.1.5 *Soient $p\geq 2$, $f\geq 0$, $g>0$, $\frac{x}{g(x)}\in Q_\beta$ et $\beta<\frac{1}{p}$, alors*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F_w(x)}{G_V(x)}\right)^p dx \leq \frac{1}{1-p\beta}\int_0^\infty G_V^{-1}(t)\left(\frac{tf_w(t)}{G_V(t)}\right)^{p-1} F_w(t)dt. \tag{2.13}$$

Preuve-En appliquant l'inégalité de Hölder avec les paramètres $p-1$ et son conjugué $\frac{p-1}{p-2}$ et l'hypothèse $\frac{x}{g(x)} \in Q_\beta$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{F_w(x)}{G_V(x)}\right)^p dx &= \int_0^\infty G_V^{-p}(x)F_w^{p-1}(x)F_w(x)dx \\
&= \int_0^\infty G_V^{-p}(x)F_w^{p-1}(x)\int_0^x f_w(t)dtdx \\
&= \int_0^\infty f_w(t)\int_t^\infty G_V^{-p}(x)F_w^{p-1}(x)dxdt \\
&= \int_0^\infty f_w(t)\int_t^\infty G_V^{-p}(x)\left(\int_0^x f_w(u)du\right)^{p-1} dxdt \\
&\leq \int_0^\infty f_w(t)\int_t^\infty G_V^{-p}(x)\int_0^x f_w^{p-1}(u)du\left(\int_0^x du\right)^{p-2} dxdt \\
&= \int_0^\infty f_w(t)\int_t^\infty G_V^{-p}(x)x^{p-2}\left(\int_0^x f_w^{p-1}(u)du\right) dxdt \\
&\leq \int_0^\infty f_w(t)\int_t^\infty f_w^{p-1}(u)\left(\frac{u^{1-\beta}}{G_V(u)}\right)^p\int_u^\infty x^{p\beta-2}dxdudt \\
&= \frac{1}{1-p\beta}\int_0^\infty f_w(t)\int_t^\infty f_w^{p-1}(u)\left(\frac{u^{1-\beta}}{G_V(u)}\right)^p u^{p\beta-1}dudt \\
&= \frac{1}{1-p\beta}\int_0^\infty f_w^{p-1}(u)u^{p\beta-1}\left(\frac{u^{1-\beta}}{G_V(u)}\right)^p\int_0^u f_w(t)dtdu \\
&= \frac{1}{1-p\beta}\int_0^\infty G_V^{-1}(u)\left(\frac{uf_w(u)}{G_V(u)}\right)^{p-1}F_w(u)du.
\end{aligned}$$

De plus, en fixant $V(x)=1$ et $g(x)=x$ dans le théorème 2.1.5, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.3 *Soient $p \geq 2$, $f \geq 0$, $\beta < \frac{1}{p}$, alors*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F_w(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{1}{1-p\beta}\int_0^\infty t^{-1}f_w^{p-1}(t)F_w(t)dt. \tag{2.14}$$

Remarque 2.1.4 *Si nous prenons $w=1$ et $\beta=0$ en* (2.14)*, on obtient l'inégalité* (2.5)*.*

Théorème 2.1.6 *Soient $p>1$, $\beta < \frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})$, $h>0$ une fonction convexe, $\frac{x}{g(x)} \in Q_\beta$, alors*

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{p\beta}h^p\left(x^{-\beta}\frac{F_w(x)}{G_V(x)}\right)dx \\
&\leq \left(\frac{p}{p-p^2\beta-1}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\int_0^\infty t^{p\beta}h^p\left(\frac{(t^{1-\beta}f_w(t))}{G_V(t)}\right)dt. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Preuve-En utilisant la convexité de h et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{p\beta}h^p\left(x^{-\beta}\frac{F_w(x)}{G_V(x)}\right)^p dx &= \int_0^\infty \left(x^\beta h\left(x^{-\beta}\frac{F_w(x)}{G_V(x)}\right)\right)^p dx \\
&= \int_0^\infty \left(x^\beta h\left(\frac{1}{x}\frac{x^{1-\beta}}{G_V(x)}\int_0^x f_w(t)dt\right)\right)^p dx \\
&\leq \int_0^\infty \left(\frac{x^\beta}{x}\int_0^x h\left(\frac{t^{1-\beta}f_w(t)}{G_V(t)}\right)dt\right)^p dx \\
&= \int_0^\infty x^{p(\beta-1)}\left(\int_0^x h\left(\frac{t^{1-\beta}f_w(t)}{G_V(t)}\right)dt\right)^p dx \\
&= \int_0^\infty x^{p(\beta-1)}\left(\int_0^x t^{\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})}h\left(\frac{t^{1-\beta}f_w(t)}{G_V(t)}\right)t^{-\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})}dt\right)^p dx \\
&\leq \int_0^\infty x^{p(\beta-1)}\int_0^x t^{1-\frac{1}{p}}h^p\left(\frac{t^{1-\beta}f_w(t)}{G_V(t)}\right)dt\left(\int_0^x t^{-\frac{1}{p}}dt\right)^{p-1} dx \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\int_0^\infty x^{p\beta+\frac{1}{p}-2}\int_0^x t^{1-\frac{1}{p}}h^p\left(\frac{t^{1-\beta}f_w(t)}{G_V(t)}\right)dtdx \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\int_0^\infty t^{1-\frac{1}{p}}h^p\left(\frac{t^{1-\beta}f_w(t)}{G_V(t)}\right)\int_t^\infty x^{p\beta+\frac{1}{p}-2}dxdt \\
&= \left(\frac{p}{p-p2\beta-1}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\int_0^\infty t^{p\beta}h^p\left(\frac{(t^{1-\beta}f_w(t))}{G_V(t)}\right)dt.
\end{aligned}$$

Si dans (2.15), on pose $V(x)=1$ et $g(x)=x$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.4 *Soient $p>1$, $\beta<\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})$, $f\geq 0$, $h>0$, h une fonction convexe et non décroissante, alors*

$$\int_0^\infty x^{p\beta}h^p\left(x^{-\beta}\frac{F_w(x)}{x}\right)dx \leq \left(\frac{p}{p-p^2\beta-1}\right)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\int_0^\infty t^{p\beta}h^p\left(t^{-\beta}f_w(t)\right)dt. \tag{2.16}$$

Remarque 2.1.5 *Si dans* (2.16)*, on pose $w=1$ et $\beta=0$, on obtient* (2.6).

Le lemme suivant a été démontré dans [36].

Lemme 2.1.1 *Soient $h\geq 0$ une fonction convexe, et $h(0)=0$, alors $h(x)/x$ est une non décroissante.*

Théorème 2.1.7 *Soient $p>1$, $h>0$ une fonction convexe, non décroissante, $h(0)=0$, $g>0$, $\frac{x}{g(x)}\in Q_\beta$ et $\beta<p-1$, alors*

$$\int_0^\infty \frac{x^{2-p+\beta}h\left(\frac{x^{-\beta}F_w(x)}{G_V(x)}\right)}{h(x)}dx \leq \frac{1}{p-\beta-1}\int_0^\infty \frac{t^{2-p+\beta}h\left(\frac{t^{-\beta}f_w(t)}{G_V(t)}\right)}{h(t)}dt. \tag{2.17}$$

Preuve-Soit $I_1 = \int_0^\infty \frac{x^{2-p+\beta} h\left(\frac{x^{-\beta} F_w(x)}{G_V(x)}\right)}{h(x)} dx,$
alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{x^{2-p+\beta} h\left(\frac{1}{x} \frac{x^{1-\beta}}{G_V(x)} \int_0^x f_w(t)dt\right)}{h(x)} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{2-p+\beta}}{h(x)} h\left(\frac{1}{x} \int_0^x \frac{x^{1-\beta}}{G_V(x)} f_w(t)dt\right) dx. \end{aligned}$$

Comme $\frac{x}{g(x)} \in Q_\beta$, h est convexe, non décroissant et $\frac{x}{G_V(x)} \in Q_\beta$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{2-p+\beta}}{h(x)} h\left(\frac{1}{x} \int_0^x \frac{x^{1-\beta}}{G_V(x)} f_w(t)dt\right) dx &\leq \int_0^\infty \frac{x^{2-p+\beta}}{h(x)} h\left(\frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^{1-\beta} f_w(t)}{G_V(t)} dt\right) dx \\ &\leq \int_0^\infty \frac{x^{1-p+\beta}}{h(x)} \int_0^x h\left(\frac{t^{1-\beta} f_w(t)}{G_V(t)}\right) dtdx. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini et le lemme 2.1.1, on aura

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{1-p+\beta}}{h(x)} \int_0^x h\left(\frac{t^{1-\beta} f_w(t)}{G_V(t)}\right) dtdx &= \int_0^\infty h\left(\frac{t^{1-\beta} f_w(t)}{G_V(t)}\right) \int_t^\infty \frac{x^{1-p+\beta}}{h(x)} dxdt \\ &\leq \int_0^\infty h\left(\frac{t^{1-\beta} f_w(t)}{G_V(t)}\right) \left(\frac{t}{h(t)}\right) \int_t^\infty x^{\beta-p} dxdt \\ &= \frac{1}{p-\beta-1} \int_0^\infty \frac{t^{2-p+\beta}}{h(t)} h\left(\frac{t^{1-\beta} f_w(t)}{G_V(t)}\right) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^\infty \frac{x^{2-p+\beta} h\left(\frac{x^{-\beta} F_w(x)}{G_V(x)}\right)}{h(x)} dx \leq \frac{1}{p-\beta-1} \int_0^\infty \frac{t^{2-p+\beta}}{h(t)} h\left(\frac{t^{1-\beta} f_w(t)}{G_V(t)}\right) dt.$$

Si dans (2.17), on pose $V(x) = 1$, $v = \omega = 1$ et $\beta = 0$, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.5 *Soit $p > 1$, $h > 0$ une fonction convexe, non décroissante $h(0) = 0$, $g > 0$, $\frac{x}{g(x)}$ non- fonction croissante, alors*

$$\int_0^\infty \frac{x^{2-p} h\left(\frac{x^{-\beta} F(x)}{g(x)}\right)}{h(x)} dx \leq \frac{1}{p-1} \int_0^\infty \frac{t^{2-p} h\left(\frac{t^1 f_w(t)}{g(t)}\right)}{h(t)} dt. \tag{2.18}$$

Définition 2.1.2 *Une fonction h est dite sous-multiplicative si $h(xy) \leq h(x)h(y)$.*

Théorème 2.1.8 *Soit $p > 1$, $f \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta < p$. Si $h \geq 0$ est une fonction convexe et sous-multiplicative, $h(0) = 0$ tel que $\frac{x}{h(x)} \in Q_\beta$, alors*

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-p}}{h^2(x)} h(F(x))dx \leq \frac{1}{p-\beta} \int_0^\infty \frac{t^{1-p}}{h(t)} h(f(t))dt. \tag{2.19}$$

Preuve-En utilisant l'hypothèse de convexité et de sous-multiplicativité de h, $\frac{x}{h(x)} \in Q_\beta$ et le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{1-p}}{h^2(x)} h(F(x))dx &= \int_0^\infty \frac{x^{1-p}}{h^2(x)} h\left(x\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right) dx \\
&\leq \int_0^\infty \frac{x^{-p}}{h(x)} \int_0^x h(f(t))dtdx \\
&= \int_0^\infty h(f(t)) \int_t^\infty \frac{x^{-p}}{h(x)} dxdt \\
&= \int_0^\infty h(f(t)) \int_t^\infty \frac{x^{1-\beta}}{h(x)} x^{\beta-p-1} dxdt \\
&\leq \int_0^\infty h(f(t)) \frac{t^{1-\beta}}{h(t)} \int_t^\infty x^{\beta-p-1} dxdt \\
&= \frac{1}{p-\beta} \int_0^\infty \frac{t^{1-p}}{h(t)} h(f(t))dt.
\end{aligned}$$

Si dans (2.19), on pose $\beta = 0$, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.6 *Soit $p > 1$, $f \geq 0$. Si $h \geq 0$ est une fonction sous-multiplicative, convexe et $h(0) = 0$, alors*

$$\int_0^\infty \frac{x^{1-p}}{h^2(x)} h(F(x))dx \leq \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{t^{1-p}}{h(t)} h(f(t))dt. \tag{2.20}$$

2.2 Quelques inégalités intégrales relatives aux opérateurs de Hardy usuels et généralisés avec une condition plus faible que la monotonie

Dans ce qui suit est obtenue une inégalité du type de Hardy sous une condition plus faible que la monotonie (voir [34]).

2.2.1 Une inégalité de Hardy avec une condition plus faible que la monotonie.

Lemme 2.2.1 *Soit $C_1 > 0$, $0 < p < 1$, $\alpha < np - 1$, et soit f une fonction non-négative et measurable sur $\mathbb{R}^n$ pour presque tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a :*

$$f(h) \leq \frac{C_1}{|h|^n}\Big(\int_{B_{(0,|h|)}} f^p(y)|y|^{\frac{n}{p'}p}dy\Big)^{1/p}. \tag{2.21}$$

Alors

$$\Big(\int_{B(0,r)} f(h)dh\Big)^p \leq p^p C_1^{p(1-p)} \int_{B(0,r)} f^p(y)|y|^{\frac{n}{p'}p}dy, \tag{2.22}$$

Théorème 2.2.1 *Soient $C_1 > 0$, $0 < p < 1$ et $\alpha < np - 1$, si f une fonction mesurable et non negative sur $\mathbb{R}^n$ et verifie $\forall r > 0$, $(\int_{B_r} f^p(y)|y|^{\frac{n}{p'}p}dy)^{\frac{1}{p}} < \infty$ et pour presque tout $h \in \mathbb{R}^n$:*

$$f(h) \leq \frac{C_1}{|h|^n}\Big(\int_{B_{|h|}} f^p(y)|y|^{\frac{n}{p'}p}dy\Big)^{1/p}. \tag{2.23}$$

Alors il existe $C_2 > 0$ telle que :

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(y)dy\Big)^p r^\alpha dr \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} f^p(y)|y|^{\alpha-n+1}dy \tag{2.24}$$

où

$$C_2 = \frac{1}{v_n^p}\frac{p^p\ C_1^{p(1-p)}}{np-\alpha-1} \tag{2.25}$$

est une constante optimale.

Si on pose dans le théorème précédent $n = 1$ on aura :

Corollaire 2.2.1 *Si $n = 1$, on trouve pour $\alpha < p - 1$ et pour presque tout $x > 0$:*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p x^\alpha dx \leq C_3 \int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx \tag{2.26}$$

où

$$C_3 = \frac{p^p \ C_1^{p(1-p)}}{p - \alpha - 1} \tag{2.27}$$

pour toute fonction f verifiant pour tout $r > 0$, $\Big(\int_0^r f^p(t)|t|^{p-1}dt\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$ et satisfaisant la condition suivante :

$$f(x) \leq \frac{C_1}{x}\Big(\int_0^x f^p(t)t^{p-1}dt\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.28}$$

où C_3 est optimale.

Le travail suivant est lié à l'opérateur généralisé de Hardy et a fait l'objet d'une publication (voir [3]).

2.2.2 Une inégalité pour l'opérateur de Hardy généralisé.

Soit w une fonction de poids définie sur $(0, \infty)$. L'opérateur de Hardy généralisé est défini comme suit :

$$(H_w f)(r) = \frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)w(x)dx,$$

où $0 < W(r) = \int_0^r w(t)dt < \infty$ pour tout $r > 0$.
Notons que si $w(x) \equiv 1$ alors l'opérateur précédent n'est autre que l'opérateur usuel de Hardy

$$(Hf)(r) = \frac{1}{r}\int_0^r f(x)dx.$$

Lemme 2.2.2 *Soient $0 < p < 1$, $C_6 > 0$, $A > 0$, w une fonction de poids definie sur $(0, \infty)$ qui satisfait la condition :*

$$w(t) \leq C_6 w(y) \quad pour \quad 0 < y < t < \infty. \tag{2.29}$$

Si f est une fonction measurable et non negative sur $(0, \infty)$, telle que pour presque tout $0 < t < \infty$, on ait

$$f(t) \leq A\Big(\int_0^t w(y)y^{p-1}dy\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big(\int_0^t f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.30}$$

alors pour tout $x > 0$

$$(H_w f)(x) \leq \frac{C_7}{x w(x)^{\frac{1}{p}}} \Big(\int_0^x f^p(y) w(y) y^{p-1} dy \Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.31}$$

où $C_7 = pA^{1-p} C_6^{\frac{2}{p}-1} p^{\frac{1}{p}-1}$.

Théorème 2.2.2 *Soient $0 < p < 1$, $C_6 > 0$, $A > 0$, w une functions de poids definie sur $(0, \infty)$ qui satisfait la condition (2.29), et $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$. Si f est une fonction non-negative mesurable sur $(0, \infty)$ satisfaisant l'inégalité (2.30), alors*

$$\|x^\alpha (H_w f)(x)\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leq C_8 \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p,w}(0,\infty)}, \tag{2.32}$$

où

$$C_8 = A^{1-p} C_6^{\frac{2}{p}-1} (1 - \alpha - \frac{1}{p})^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.33}$$

Si $w(x) \equiv 1$ alors $C_6 = 1$ et l'inégalité (2.30) devient

$$f(x) \leq A \Big(\int_0^x y^{p-1} dy \Big)^{-\frac{1}{p}} \Big(\int_0^x f^p(y) y^{p-1} dy \Big)^{\frac{1}{p}} = A \Big(\frac{x^p}{p} \Big)^{-\frac{1}{p}} \Big(\int_0^x f^p(y) y^{p-1} dy \Big)^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$f(x) \leq A p^{\frac{1}{p}} \frac{1}{x} \Big(\int_0^x f^p(y) y^{p-1} dy \Big)^{\frac{1}{p}},$$

On pose $C_9 = A p^{\frac{1}{p}}$, alors $C_9^{p(1-p)} = A^{p(1-p)} p^{1-p}$, d'où $pA^{p(1-p)} = p^p C_9^{p(1-p)}$, et donc on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2 *Soient $0 < p < 1$, $C > 0$, $A > 0$, $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$. Si f est une fonction non-negative mesurable sur $(0, \infty)$ qui satisfait l'inégalité*

$$f(x) \leq \frac{C_9}{x} \Big(\int_0^x f^p(y) y^{p-1} dy \Big)^{\frac{1}{p}},$$

alors on a

$$\|x^\alpha (Hf)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq C_{10} \|t^\alpha f(t)\|_{L_{p,}(0,\infty)}, \tag{2.34}$$

où

$$C_{10} = C_9^{1-p} p (1 - \alpha - \frac{1}{p})^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.35}$$

2.3 Quelques généralisations des inégalités intégrales pour les opérateurs de Hardy pondérés avec $0 < p < 1$

Le paragraphe suivant à fait l'objet d'un travail soumis (voir [42]).

Dans ce travail nous donnons quelques généralisations des résultats établis et prouvés par A.Senouci et al (Voir [3] et [6]).

2.3.1 Introduction

Soit f une fonction Lebesgue mesurable sur $(0, +\infty)$, et soit w une fonction de poids sur $(0, \infty)$ (c'est-à-dire une fonction Lebesgue mesurable et non négative). Pour $0 < p < 1$, $L_w^p(0, \infty)$ est l'espace de Lebesgue pondéré de toutes les fonctions Lebesgue mesurables à valeur réelle muni de la quasi-norme finie

$$\|f\|_{L_w^p(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'opérateur de Hardy pondéré est défini par

$$(H_w f)(x) = \frac{1}{W(x)} \int_0^x f(t)w(t)dt, \ x > 0,$$

avec $0 < W(x) = \int_0^x w(t)dt < \infty$ for all $x > 0$.

On note que pour $w(t) = 1 \ \forall t > 0$, l'opérateur H_w est l'opérateur de Hardy usuel

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

Dans [3] le lemme suivant a été prouvé.

Lemme 2.3.1 *Soit $0 < p < 1$, $c_1 > 0$, $A > 0$, w une fonction de poids sur $(0, \infty)$ telle que $w(x) \leq cw(y)$ pour $0 < y < x < \infty$. Si f est une fonction Lebesgue mesurable et non négative sur $(0, \infty)$ telle que pour presque tout $0 < t < \infty$,*

$$f(t) \leq A \left(\int_0^t w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{-1}{p}} \left(\int_0^t f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.36}$$

alors pour tout $x > 0$

$$(H_w f)(x) \leq \frac{c_2}{xw^{\frac{1}{p}}(x)} \left(\int_0^x f^p(y)w(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.37}$$

avec $c_2 = p^{\frac{1}{p}} A^{1-p} c_1^{\frac{2}{p}-1}$.

Soit H_w^* l'opérateur adjoint de H_w défini par :

$$(H_w^* f)(x) = w(x) \int_x^\infty \frac{f(t)}{W(t)} dt, \ x > 0.$$

Dans [6], le lemme suivant a été prouvé d'une manière analogue au lemme précédent dans [3].

Lemme 2.3.2 *Soit* $0 < p < 1$*,* $B > 0$*,* w *une fonction de poids sur* $(0, \infty)$ *telle que pour tout* $x > 0$*,* $\int_0^x w(t)dt < \infty$*. Si* f *est une fonction Lebesgue mesurable et non négative sur* $(0, \infty)$ *telle que pour presque tout* $0 < x < \infty$

$$\int_x^\infty f^p(y) w(y) y^{p-1} dy < \infty,$$

et

$$f(x) \leq \frac{B}{x} \left(\int_x^\infty f^p(y) w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x w(y) dy \right)^{\frac{1}{1-p}} w^{\frac{1}{1-p}}(x), \tag{2.38}$$

Alors pour $r > 0$

$$(H_w^* f)(r) \leq p B^{1-p} w(r) \left(\int_r^\infty f^p(y) w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.39}$$

Le théorème suivant a été établi dans [6].

Théorème 2.3.1 *Soit* $0 < p < 1$*,* $B > 0$*,* $x > 0$ *et* $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$ *. Si* f *est une fonction Lebesgue mesurable et non négative sur* $(0, \infty)$ *et satisfaisant la condition (2.39), alors*

$$\|\tau^\alpha (H^* f)(\tau)\|_{L^p(0,\infty)} \leq p B^{1-p} (\alpha p + 1)^{-\frac{1}{p}} \|y^{\alpha+1} f(y)\|_{L^p(0,\infty)}. \tag{2.40}$$

2.3.2 Résultats principaux

Le but de ce travail est de généraliser certains résultats obtenus dans [6].

Soit f une fonction Lebesgue mesurable sur $(0, \infty)$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 2.3.1 pour l'opérateur de Hardy pondéré.

Théorème 2.3.2 *Soit* $0 < p < 1$*,* $x > 0$*,* $B > 0$*,* w *une fonction de poids telle que* $w(r) < w(y) < \infty$ *pour* $0 < r < y < \infty$ *et* $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$*. Si* f *est une fonction Lebesgue mesurable et non négative sur* $(0, \infty)$ *satisfaisant la condition (2.39), alors*

$$\left\| r^\alpha (H_w^* f)(r) \right\|_{L^p(0,\infty)} \leq p B^{1-p} (p\alpha + 1)^{-\frac{1}{p}} \left\| y^{\alpha+1} f(y) w^{\frac{p+1}{p}}(y) \right\|_{L^p(0,\infty)}. \tag{2.41}$$

Preuve- De (2.39) il s'ensuit que

$$\left\| r^{\alpha}(H_w^* f)(r) \right\|_{L^p(0,\infty)} \leq pB^{1-p} \left\| r^{\alpha} w(r) \left(\int_r^{\infty} f^p(y) w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^p(0,\infty)}.$$

Soit

$$I = pB^{1-p} \left\| r^{\alpha p} w^p(r) \left(\int_r^{\infty} f^p(y) w(y) y^{p-1} dy \right) \right\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{p}}.$$

Par le théorème de fubini nous donne

$$I = pB^{1-p} \left\| f^p(y) w(y) y^{p-1} \left(\int_0^{y} r^{\alpha p} w^p(r) dr \right) \right\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{p}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &\leq pB^{1-p} \left\| f^p(y) w(y) w^p(y) y^{p-1} \left(\int_0^{y} r^{\alpha p} dr \right) \right\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{p}} \\
&= pB^{1-p} \left\| f^p(y) w(y) w^p(y) y^{p-1} \left(\int_y^{y} r^{\alpha p} dr \right) \right\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{p}} \\
&= pB^{1-p} \left\| f^p(y) w(y) w^p(y) y^{p-1} \left[\frac{r^{\alpha p+1}}{\alpha p+1} \right]_0^{y} \right\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{p}} \\
&= pB^{1-p} \left\| f^p(y) w(y) w^p(y) y^{p-1} \frac{y^{\alpha p+1}}{\alpha p+1} \right\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq pB^{1-p} \left\| f^p(y) y^{\alpha p+1} y^{p-1} \frac{w^{p+1}(y)}{\alpha p+1} \right\|_{L^1(0,\infty)}^{\frac{1}{p}} \\
&= p^{1-\frac{1}{p}} B^{1-p} (\alpha + \frac{1}{p})^{-\frac{1}{p}} \left\| w^{\frac{p+1}{p}}(y) y^{\alpha+1} f(y) \right\|_{L^p(0,\infty)}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.1 *Si on pose $w(x) = 1$ dans (2.41) on obtient le théorème 2.3.1.*

Maintenant, nous considérons l'opérateur $\left(\widetilde{H} f\right)(x) = \frac{1}{x} \int_x^{\infty} f(t) dt$ avec $f(x) \leq \frac{M}{x} \left(\int_x^{\infty} f^p(t) t^{p-1} dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

Lemme 2.3.3 *Soit $0 < p < 1$, $M > 0$ et $x > 0$. Si f est une fonction Lebesgue mesurable non négative sur $(0, \infty)$ telle que pour presque tout $0 < x < \infty$,*

$$\int_x^{\infty} f^p(t) t^{p-1} dt < \infty$$

et

$$f(x) \leq \frac{M}{x} \left(\int_x^{\infty} f^p(t) t^{p-1} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.42}$$

Alors

$$\left(\int_x^{\infty} f(t) dt \right)^p \leq K \int_x^{\infty} f^p(t) t^{p-1} dt, \tag{2.43}$$

où $K = p^p M^{p(1-p)}$.

Preuve- D'après (2.42) pour $t > 0$ il s'ensuit que

$$f^{1-p}(t) \le M^{1-p} t^{p-1} \left(\int_t^\infty f^p(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1-p}{p}}.$$

D'où

$$f(t) \le M^{1-p} f^p(t) t^{p-1} \left(\int_t^\infty f^p(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1-p}{p}},$$

$$= pM^{1-p}(-1) \left[\left(\int_t^\infty f^p(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}} \right]'.$$

En intégrant sur (x, ∞) on obtient

$$\int_x^\infty f(t)dt \le pM^{1-p} \left(\int_x^\infty f^p(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

Par conséquent

$$\left(\int_x^\infty f(t)dt \right)^p \le p^p M^{p(1-p)} \int_x^\infty f^p(y) y^{p-1} dy. \tag{2.44}$$

Théorème 2.3.3 *Soit $0 < p < 1$, $x > 0$ et $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$. Si f est une fonction Lebesgue mesurable non négative sur $(0, \infty)$ et satisfaisant (2.42) pour tout $x > 0$, alors*

$$\|x^\alpha (\widetilde{H} f)(x)\|_{L^p(0,\infty)} \le K_1 \|t^\alpha f(t)\|_{L^p(0,\infty)}, \tag{2.45}$$

où $K_1 = p^{1-\frac{1}{p}} (\alpha - 1 + \frac{1}{p})^{-\frac{1}{p}} M^{1-p}$.

Preuve- Soit $(\widetilde{H} f)(x) = \frac{1}{x} \int_x^\infty f(t)dt$, $0 < x < t < \infty$ et

$$J = \|x^\alpha (\widetilde{H} f)(x)\|_{L^p(0,\infty)}.$$

Par définition de J on a

$$J = \left[\int_0^\infty x^{p\alpha} (\widetilde{H} f)^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$= \left[\int_0^\infty x^{p(\alpha-1)} \left(\int_x^\infty f(t)dt \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Par (2.44) s'ensuit que

$$\left[\int_0^\infty x^{p(\alpha-1)} \left(\int_x^\infty f(t)dt \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \le pM^{1-p} \left[\int_0^\infty x^{p(\alpha-1)} \left(\int_x^\infty f^p(t) t^{p-1} dt \right) dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

par le théorème de Fubini et $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$, on obtient

$$\left[\int_0^\infty x^{p(\alpha-1)} \left(\int_x^\infty f^p(t) t^{p-1} dt\right) dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^\infty f^p(t) t^{p-1} \left(\int_0^t x^{p(\alpha-1)} dx\right) dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$= p^{-\frac{1}{p}} \left(\alpha - 1 + \frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty f^p(t) t^{p-1} t^{p(\alpha-1)+1} dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

D'où

$$\left[\int_0^\infty x^{p(\alpha-1)} \left(\int_x^\infty f(t) dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq M^{1-p} p^{1-\frac{1}{p}} \left(\alpha - 1 + \frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty f^p(t) t^{p\alpha} dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

2.4 Application

Dans le cadre des fonctions monotones et quasi-monotones, on cite une application (Pour plus de détaits voir [9]).

2.4.1 Une application aux espaces de Lorentz

Soit $f^\star$ la fonction rearrangement décroissante, avec f mesurable dans l'espace mesurable (Ω, μ). Les espaces de Lorantz $L^{p,q}$ sont usuellement définis en utilisant la quasi-norme

$$\|f\|^\star_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(f^\star(t) t^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.46}$$

où $0 < p, q < \infty$.
Il est bien connu que pour $p \neq 1$, la quasi-norme (2.46) est equivalente à la quasi-norme suivante

$$\|f\|^{\star\star}_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(H_1(f^\star)(t) t^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^\star(u) du\right)^q t^{\frac{-q}{p'}-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.47}$$

pour $p > 1$ et la quasi-norme

$$\|f\|^{\star\star}_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(H_2(f^\star)(t) t^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f^\star(u) du\right)^q t^{\frac{-q}{p'}-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.48}$$

pour $0 < p < 1$.

Corollaire 2.4.1 **(a)** *Soit $\alpha > \frac{1}{p'}$ et soit f une fonction non-négative et non-croissante.*

Si $0 < p < 1$, alors

$$\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L^p} \leq \|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L^p} \leq \left(pB\left(p, p\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L^p}.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, alors les inégalités sont valides dans le sens inverse.

(b) *Soit* $-\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p'}$ *et soit* f *une fonction non-négative et non-croissante.*

Si $0 < p < 1$, *alors*

$$\left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L^p} \leq \|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L^p} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L^p}.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, *alors les inégalitéssont vérifiées dans le sens inverse.*

(c) *Soit* $\alpha < -\frac{1}{p}$ *et soit* f *une fonction non-négative et non-d'ecroissante.*

Si $0 < p < 1$, *alors*

$$\|x^\alpha f(x)\|_{L^p} \leq \|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L^p} \leq (pB(p, -p\alpha))^{\frac{1}{p}} \|x^\alpha f(x)\|_{L^p}.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, *alors les inégalitéssont vérifiées dans le sens inverse.*

(d) *Les constantes de ces inégalités sont optimales (les plus petites possibles).*

En appliquant le corollaire précédent avec $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.4.1 **(a)** *Soit* $p > 1$. *Alors*

$$p' \|f\|^{\star}_{L^{p,q}} \leq \|f\|^{\star\star}_{L^{p,q}} \leq (p')^{\frac{1}{q}} \|f\|^{\star}_{L^{p,q}} \tag{2.49}$$

si $0 < q \leq 1$.

(b) *Soit* $0 < p < 1$. *Alors*

$$-p' \|f\|^{\star}_{L^{p,q}} \leq \|f\|^{\star\star}_{L^{p,q}} \leq \left(qB\left(q, -\frac{q}{p'}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|^{\star}_{L^{p,q}} \tag{2.50}$$

si $0 < q \leq 1$.

Si $1 \leq q$, *alors les inégalités (2.49) et (2.50) sont vérifiées dans le sens inverse. De plus, toutes les constantes de ces inégalités sont optimales (les plus petites possibles).*

Chapitre 3

Espaces $L^{p(x)}$.

Dans ce qui suit on définit les espaces de Lebesgue à exposants variables $L^{p(x)}$, qui sont un cas particulier des espaces de Musielak-Orlicz et une généralisation des espaces de Lebesgue classiques L^p.

Ces espaces sont différents des espaces de Lebesgue classiques par le fait que l'exposant "p" n'est pas une constante mais une fonction mesurable définie sur un ensemble mesurable à valeurs dans $[1, +\infty]$.

3.1 Définitions et inégalités intégrales.

3.1.1 Définitions.

Notations.

Soit Ω un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, $|\Omega| > 0$, o'u $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de Ω.

$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables telles que $p : \Omega \to [1, \infty]$.

On pose :

$$\Omega_a = \Omega_a(p) = \{x \in \Omega,\ p(x) = a,\ a \in [1, \infty]\},$$

en particulier : $\Omega_1 = \{x \in \Omega,\ p(x) = 1\}$ *et* $\Omega_\infty = \{x \in \Omega,\ p(x) = \infty\}$,

puis :

$$\Omega_0 = \Omega / (\Omega_1 \cup \Omega_\infty),$$

$$p^+ = \overline{p} = ess \sup_{x \in \Omega} p(x), \quad p^- = \underline{p} = ess \inf_{x \in \Omega} p(x),\ si\ |\Omega_0| > 0,$$

$$c_p = \left\|\chi_{\Omega_1}\right\|_\infty + \left\|\chi_{\Omega_0}\right\|_\infty + \left\|\chi_{\Omega_\infty}\right\|_\infty$$

$$r_p = 1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}},$$

où χ désigne la fonction caractéristique des ensembles correspondants.

Définition 3.1.1 *On note par $L^{p(x)}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f mesurables et telles que :*

$$\rho_p(f) = \int_{\Omega/\Omega_\infty} \big|f(x)\big|^{p(x)} dx + ess \sup_{x\in\Omega_\infty} \big|f(x)\big| < \infty. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.1 *La fonctionnelle $\rho_p(f) : L^{p(x)}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty)$ est appelée modular de l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Dans ce qui suit on cite certaines propriétés de $\rho_p(f)$.

Proposition 3.1.1 .

(1) $\rho_p(f) \geq 0$, $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega)$.

(2) $\rho_p(f) = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p.*

(3) $\rho_p(-f) = \rho_p(f)$, $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega)$.

(4) ρ_p *est convexe.*

(5) Si $\big|f(x)\big| \geq \big|g(x)\big|$ *pour* $x \in \Omega$ *presque partout, et si* $\rho_p(f) < \infty$, *alors* $\rho_p(f) \geq \rho_p(g)$.

(6) Si $0 < \rho_p(f) < \infty$, *alors l'application* $\lambda \to \rho_p\big(\frac{f}{\lambda}\big)$ *est continue et décroissante sur l'intervalle* $[1,\infty)$.

Preuve- Les propriétés (1) et (2) sont obtenues à partir des propriétés de l'intégrale de Lebesgue.
(3) Egalité évidente.
(4) voir [26].
(5) Est déduite d'une propriété de l'intégrale de Lebesgue.
(6) Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1$, alors

$$\frac{\big|f(x)\big|}{\lambda_1} \leq \frac{\big|f(x)\big|}{\lambda_2}$$

$$\int_\Omega \frac{\big|f(x)\big|}{\lambda_1} dx \leq \int_\Omega \frac{\big|f(x)\big|}{\lambda_2} dx.$$

donc $\rho_p\big(\lambda_1\big) \leq \rho_p\big(\lambda_2\big)$. La continuité est evidente.

Définition 3.1.2 *On définit sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante :*

$$\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda,\ \lambda > 0\ :\ \rho_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq 1\} \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.2 *Si* $p(x) = cste$

$$\rho_p(\frac{f}{\lambda}) = \int \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \;=\; \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p} dx$$
$$= \frac{1}{\lambda^p}\int_\Omega |f|^p \leq 1$$

On trouve

$$\int_\Omega |f|^p \leq \lambda^p \Longrightarrow \Big(\int_\Omega |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda$$

Donc

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \Big\{\inf \lambda > 0,\;\; tq\;\; \rho_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\} = \Big(\int_\Omega |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}.$$

Lemme 3.1.1 *Soit* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$*, alors*

$$\rho_p\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1 \;\forall f \;\; telle\;\; que \;\; 0 < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty. \tag{3.3}$$

Preuve-On prend une suite $\big(\lambda_n\big)$ décroissante qui converge vers $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$, d'où la suite $\big(\frac{|f|}{\lambda_n}\big)_n$ est croissante et converge vers $\dfrac{\big|f\big|}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}$, alors en vertu du lemme de Fatou et de la propriété (6) de la proposition 3.1.1 on obtient :

$$\int_\Omega \Big(\frac{\big|f\big|}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(\frac{\big|f\big|}{\lambda_n}\Big)^{p(x)} dx \leq 1.$$

Si $x \in \Omega_\infty$, (3.3) est évidente.
Finalement on a $\rho_p\Big(\dfrac{\big|f\big|}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1.$

Corollaire 3.1.1 *Pour tout* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *telle que* $0 < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty$

$$Si\;\; \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1, \;\;\; alors\;\; \rho_p\big(f\big) \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Preuve-On a

$$\Big(\frac{1}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \geq \frac{1}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \geq 1, \;\; où \;\; p(x) \geq 1$$

$$\frac{\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \leq \int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} dx \leq 1,$$

où la dernière inégalité découle du lemme 3.1.1 ; d'où $\rho_p\big(f\big) \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$.

Lemme 3.1.2 *Si $\overline{p} < \infty$ alors*

$$\rho_p\Big(\frac{f}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) = 1 \quad \forall f \text{ telle que } 0 < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty. \tag{3.5}$$

Preuve-. Posons
$$K = \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)} dx.$$
Soit $0 < \lambda \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ tel que $\big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\big)^{\overline{p}}.K \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}\rho_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) = \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx &= \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\Big|^{p(x)} \Big|\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)} dx \\ &\leq \Big(\frac{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\Big)^{\overline{p}} \int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)} dx \\ &= \Big(\frac{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\Big)^{\overline{p}} \rho_p\Big(\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big).\end{aligned}$$

Si $\rho_p\Big(\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) < 1$ alors $\rho_p\big(\frac{f}{\lambda}\big) \leq 1$ et donc on peut trouver $\lambda < \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ tel que $\rho_p\Big(\frac{f(x)}{\lambda}\Big) \leq 1$ qui contredit la définition de $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ (car $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf \lambda$ tel que $\rho_p\big(\frac{f(x)}{\lambda}\big) \leq 1$).
Alors $\rho_p\Big(\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \geq 1$ et d'après le lemme 3.1.1 on a

$$\rho_p\Big(\frac{f(x)}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) = 1.$$

Lemme 3.1.3 *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors*

$$\Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}} \leq \rho_p\Big(\frac{f}{\mu}\Big) \leq \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\underline{p}}, \ \textit{si} \ \ \mu \geq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \tag{3.6}$$

$$\Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\underline{p}} \leq \rho_p\Big(\frac{f}{\mu}\Big) \leq \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}}, \ \textit{si} \ \ 0 < \mu \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Preuve- On prouve (3.7). Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et soit $0 < \mu \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$, et donc $\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu} \geq 1$, on a

$$\rho_p\Big(\frac{f}{\mu}\Big) = \int_\Omega \Big|\frac{f}{\mu}\Big|^{p(x)} dx = \int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{p(x)} dx,$$

mais

$$\int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}} dx,$$

alors

$$\rho_p\Big(\frac{f}{\mu}\Big) \leq \int_\Omega \Big(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)^{p(x)} \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}} dx \leq \Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\mu}\Big)^{\overline{p}},$$

la dernière inégalité découle de (3.3).
Le même raisonnement est valable pour l'inégalité d'à gauche, et l'inégalité (3.6) est traitée d'une manière analogue à l'inégalité (3.7).

Lemme 3.1.4 *Soit* $0 < \underline{p} \leq \overline{p} \leq \infty$. *Si* $\rho_p\big(\frac{f}{a}\big) < b$, *pour* $a > 0$, $b > 0$, *alors*

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^v, \tag{3.8}$$

avec

$$v = \begin{cases} 1/\underline{p} & \text{si } b \geq 1 \\ \\ 1/\overline{p} & \text{si } b \leq 1. \end{cases}$$

Preuve- Soit $b \geq 1$ et $\rho_p\big(\frac{f}{a}\big) = \int_\Omega \big|\frac{f(x)}{a}\big|^{p(x)} dx < b$, alors

$$\int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{ab^{1/\underline{p}}}\Big|^{p(x)} dx \leq \frac{1}{b}\int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{a}\Big|^{p(x)} dx \leq 1,$$

et donc par définition de la norme dans $L^{p(x)}$ où $\lambda = ab^{1/\underline{p}}$, on a $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^{1/\underline{p}}$ pour $b \geq 1$.
D'une manière analogue on montre que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^{1/\overline{p}}$ pour $b \leq 1$, et donc $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^v$.

3.1.2 *Quelques exemples*

Exemple 3.1.1 *Soit* $\Omega = (-1, 1)$

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; -1 \leq x \leq 0, \\ 2 & si \;\; 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; -1 \leq x \leq 0, \\ 2 & si \;\; 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

alors

$$\rho_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx = \int_0^1 2^2 dx$$
$$= 4 < \infty,$$

d'où

$$f \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Exemple 3.1.2 *Soit* $\Omega =]0,1[$ *;*

$$p(x) = \frac{1}{x} \;\; et \;\; f(x) = 4^{-x} x^{\frac{-x}{2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\rho_p(f) &= \int_0^1 4^{-1} x^{\frac{-1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 x^{\frac{-1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{8} < \infty,\end{aligned}$$

d'oú $f \in L^{p(x)}(\Omega)$

Exemple 3.1.3 *Soit* $\Omega =]0,1[$, $p(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = x^{-x}$.

Donc

$$\rho_p(f) = \int_0^1 x^{-1} dx = |\ln x|_0^1 = \infty,$$

d'oú

$$f \notin L^{p(x)}(\Omega).$$

Exemple 3.1.4 *(Calcul de la norme dans* $L^{p(x)}(\Omega)$*).*

Soit $\Omega = (-1,1)$.

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; -1 \le x \le 0, \\ 2 & si \;\; 0 < x \le 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \;\; -1 \le x \le 0, \\ 1 & si \;\; 0 < x \le 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\rho_p(\frac{f}{\lambda}) &= \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{2}{\lambda}dx + \int_0^1 \frac{1}{\lambda^2}dx \\ &= \lambda^{-2} + 2\lambda^{-1} \leq 1.\end{aligned}$$

Donc on résoud l'inégalité

$$\lambda^{-2} + 2\lambda^{-1} - 1 \leq 0.$$

Posons $\lambda^{-1} = x > 0$, *on obtenu* $x^2 + 2x - 1 \leq 0$.
Alors $\Delta = 8$, *donc* $x_1 = -\sqrt{2} - 1, x_2 = \sqrt{2} - 1$.
Donc $S = [0, \sqrt{2} - 1]$, *alors* $\sup \lambda = \sqrt{2} - 1$ *et* $\inf \lambda = (\sqrt{2} - 1)^{-1}$,
d'oú

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = (\sqrt{2} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + 1.$$

Définition 3.1.3 *Soit* $p(x) \in [1, \infty)$ *alors on dit que la fonction* $q(x)$ *est la conjuguée de* $p(x)$ *si :*

$$q(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } x \in \Omega_1, \\ 1 & \text{pour } x \in \Omega_\infty, \\ \frac{p(x)}{p(x)-1} & \text{pour } x \in \Omega_0. \end{cases}$$

3.1.3 Inégalités de Hölder.

Théorème 3.1.1 ***(Inégalite de Hölder)*** *Soient* $p(x)$ *et* $q(x) \in \mathcal{P}(\Omega)$. *Alors l'inégalité*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq r_p \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}, \tag{3.9}$$

est vérifiée pour chaque $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $g \in L^{q(x)}(\Omega)$, *où* $r_p = 1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}}$ *avec* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ *; et* $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda,\ \lambda > 0\ :\ \rho_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq 1\}$.

Preuve- On suppose que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \neq 0$, $\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \neq 0$ et $|\Omega_0| \neq 0$. On pose $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}$ et $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}$, $p = p(x)$, $q = q(x)$, on applique l'inégalité $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (voir [15]), puis on intègre sur $\Omega_0 = \Omega/\Omega_1 \cup \Omega_\infty$ en utilisant l'inégalité (3.3), comme on a :

$$\rho_p\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1 \quad \forall f \textit{ telle que } 0 < \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty,$$

d'où en vertu de l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \frac{f(x)g(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}dx &\leq \int_{\Omega_0} \frac{1}{p}\Big|\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_0} \frac{1}{q}\Big|\frac{g}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{q(x)}dx \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}}\rho_p\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) + \frac{1}{\underline{q}}\rho_q\Big(\frac{g}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}} + \frac{1}{\underline{q}} \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}} + 1 - \frac{1}{\overline{p}}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} |f(x)g(x)|dx &\leq \Big(1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}}\Big)\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega_0)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega_0)} \\ &= r_p\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega_0)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega_0)}.\end{aligned}$$

Pour $x \in \Omega_1$ ou $x \in \Omega_\infty$ on retrouve l'inégalité de Hölder classique.

Remarque 3.1.3 *Si $p(x) = p = cste$, alors $\overline{p} = \underline{p}$ et $r_p = 1$, ainsi on retrouve l'inégalité classique de Hölder.*

Corollaire 3.1.2 *On peut définir sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante*

$$\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda,\ \lambda > 0\ :\ \int_{\Omega_0} \frac{2}{p(x)}\Big|\frac{f}{\lambda}\Big|^{p(x)}dx \leq 1\}, \tag{3.10}$$

avec laquelle on exprime l'inégalité de Hölder comme suit

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Preuve-On procède comme dans le Théorème 3.1.1, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}}dx &\leq \int_{\Omega_0} \frac{1}{p}\Big|\frac{f}{\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_0} \frac{1}{q}\Big|\frac{g}{\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{q(x)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{2}{p}\Big|\frac{f}{\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)}dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \frac{2}{q}\Big|\frac{g}{\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{q(x)}dx \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Omega_0} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega_0)}\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega_0)}.$$

Pour Ω_∞, Ω_1 on est ramené aux cas classiques.

Remarque 3.1.4 *Avec la norme (3.10) on retrouve l'inégaité de Hölder.*

3.1.4 Généralisation de l'inégalité de Hölder.

L'inégalité de Hölder pour $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{r(x)}$ est valable mais pas comme une conséquence directe de l'inégalité de Hölder comme dans le cas classique (car $\|f^{r(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{r(x)}}(\Omega)} \neq \|f\|^{r(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}$).

Lemme 3.1.5 *Soit* $0 < s(x) \leq p(x) < \overline{p} < \infty$, $x \in \Omega/\Omega_\infty$, *alors*

$$\|f\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \|f\|^{\overline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)}, \ pour \ \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1, \tag{3.11}$$

et

$$\|f\|^{\overline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \|f\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)}, \ pour \ \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1. \tag{3.12}$$

Preuve-Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ telle que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$, et soit $0 < s(x) \leq p(x) < \overline{p} < \infty$, $x \in \Omega/\Omega_\infty$, alors

$$\begin{aligned}
\|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} &= \inf\{\mu \geq 1, \ I_{\frac{p}{s}}\Big(\frac{f^{s(x)}}{\mu}\Big) \leq 1\} \\
&= \inf\{\mu \geq 1, \ \int_\Omega \Big|\frac{f(x)^{s(x)}}{\mu}\Big|^{\frac{p(x)}{s(x)}} dx \leq 1\} \\
&= \inf\{\mu \geq 1, \ \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\mu^{\frac{p(x)}{s(x)}}} dx \leq 1\}.
\end{aligned}$$

On pose $\lambda = (\mu^{s(x)^{-1}})$, alors $\mu = \lambda^{s(x)}$ et donc

$$\|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} = \inf\{\lambda^{s(x)} \geq 1, \ \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} dx \leq 1\}$$

, et comme $\lambda \geq 1$, alors

$$\lambda^{\underline{s}} \leq \lambda^{s(x)} \leq \lambda^{\overline{s}},$$

et donc

$$\|f^{\underline{s}}\|_{L^{\frac{p(x)}{\underline{s}}}(\Omega)} = \|f\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \|f\|^{\overline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} = \|f^{\overline{s}}\|_{L^{\frac{p(x)}{\overline{s}}}(\Omega)},$$

et d'une manière analogue on prouve la seconde inégalité.

Proposition 3.1.2 *Soit* $p(x) \geq 1$, $q(x) \geq 1$ *et* $r(x) \geq 1$ *avec* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{r(x)}$, *et soit* $\sup_{x\in\Omega/\Omega_\infty} r(x) < \infty$, *alors*

$$\|fg\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}, \tag{3.13}$$

avec $c = \sup \frac{r(x)}{p(x)} + \sup \frac{r(x)}{q(x)}$.

Preuve-On a l'inégalité du corollaire 1.2.1 :

$$\big(AB\big)^r \leq \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q.$$

On remplace dans cette inégalité A par $f/\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ et B par $g/\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega/\Omega_\infty} \Big|\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{r(x)}dx &\leq \sup\frac{r(x)}{p(x)}\int_{\Omega/\Omega_\infty}\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big|^{p(x)}dx \\ &+ \sup\frac{r(x)}{q(x)}\int_{\Omega/\Omega_\infty}\Big|\frac{g(x)}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big|^{q(x)}dx \\ &\leq \sup\frac{r(x)}{p(x)} + \sup\frac{r(x)}{q(x)} = c,\end{aligned}$$

donc

$$\rho_r\Big(\frac{f(x)g(x)}{c\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1.$$

Finalement on a

$$\big\|fg\big\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq c\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Remarque 3.1.5 *Si $r(x) = 1$, on retrouve l'inégalité (3.9) avec $c = r_p$.*

Remarque 3.1.6 *Si $p(x) = p = cste$, $q(x) = q = cste$, $r(x) = r = cste$, alors $c = 1$ et on retrouve l'une des inégalites classiques de Hölder.*

Lemme 3.1.6 *Soient $p_i(x) \geq 1$, $a_i \geq 0$, $i = 1, 2; ..., m$ tels que $\sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k(x)} = 1$, alors*

$$a_1a_2...a_m \leq \frac{a_1^{p_1(x)}}{p_1(x)} + \frac{a_2^{p_2(x)}}{p_2(x)} + ... + \frac{a_m^{p_m(x)}}{p_m(x)}. \tag{3.14}$$

Preuve-Voir [21].

Proposition 3.1.3 *Soit $p_k(x) \geq 1$, $k = 1, 2; ..., m$ tel que $\sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k(x)} = 1$ $x \in \Omega$, alors*

$$\int_\Omega \big|f_1(x)f_2(x)...f_m(x)\big|dx \leq c\big\|f_1\big\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)}\big\|f_2\big\|_{L^{p_2(x)}(\Omega)}...\big\|f_m\big\|_{L^{p_m(x)}(\Omega)}, \tag{3.15}$$

avec

$$c = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\underline{p}_k}. \tag{3.16}$$

Preuve-Découle du lemme 3.1.6 et du théorème 3.1.1.

Remarque 3.1.7 *Si $p_k(x) = p_k = cste$, alors $p_k(x) = \underline{p}_k$ et $c = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k(x)} = 1$, d'où l'inégalité généralisée classique de Hölder.*

Proposition 3.1.4 *Soit $p, q, r \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $1 \leq p(x) \leq r(x) \leq q(x) < \infty$ et $p(x) \neq q(x)$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$, on a*

$$\|f\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq c\|f\|^{u}_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^{v}_{L^{q(x)}(\Omega)}, \tag{3.17}$$

où

$$u = \begin{cases} ess\sup \frac{p(x)}{r(x)}\frac{q(x)-r(x)}{q(x)-p(x)} & \text{si } \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1, \\ \\ ess\inf \frac{p(x)}{r(x)}\frac{q(x)-r(x)}{q(x)-p(x)} & \text{si } \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1. \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} ess\sup \frac{q(x)}{r(x)}\frac{r(x)-p(x)}{q(x)-p(x)} & \text{si } \|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \geq 1, \\ \\ ess\inf \frac{q(x)}{r(x)}\frac{r(x)-p(x)}{q(x)-p(x)} & \text{si } \|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1. \end{cases}$$

(Ici on considère que $\frac{0}{0} = 1$).

Preuve-Soit $f \neq 0$, en premier lieu supposons que $r(x) < q(x)$ presque pour tout $x \in \Omega$, on prend des fonctions s, t telles que

$$s(x) = \frac{q(x)-p(x)}{q(x)-r(x)}, \quad t(x) = \frac{q(x)-p(x)}{r(x)-p(x)},$$

alors $s, t \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $1 < s(x), t(x) < \infty$ et $\frac{1}{s(x)} + \frac{1}{t(x)} = 1$, et donc en vertu du théorème 3.1.1, on obtient :

$$\rho_r\Big(\frac{f}{\|f\|^{u}_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^{v}_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq r_s\Big\|\frac{|f|^{\frac{p(x)}{s(x)}}}{\|f\|^{ur(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big\|_{L^{s(x)}(\Omega)}\Big\|\frac{|f|^{r(x)-\frac{p(x)}{s(x)}}}{\|f\|^{vr(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big\|_{L^{t(x)}(\Omega)},$$

et de la définition de u et l'inégalité (3.3) on a

$$\begin{aligned}\rho_s\Big(\frac{|f|^{\frac{p(x)}{s(x)}}}{\|f\|^{ur(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big) &= \int_\Omega \Big(\frac{|f|^{\frac{p(x)}{s(x)}s(x)}}{\|f\|^{ur(x)s(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)dx \\ &\leq \int_\Omega \Big(\frac{|f|^{p(x)}}{\|f\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)dx\end{aligned}$$

$$= \rho_p\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}}}\Big) \leq 1,$$

et de la même manière on montre que :

$$I_t\Big(\frac{|f|^{r(x)-\frac{p(x)}{s(x)}}}{\|f\|^{vr(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq \rho_q\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{q(x)}}}\Big) \leq 1,$$

comme $r_s \geq 1$ et de la convexité de ρ_r on déduit

$$\rho_r\Big(\frac{f}{r_s\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq \frac{1}{r_s}\rho_r\Big(\frac{f}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1,$$

et donc on a d'après la définition de la norme $\|.\|_{L^{r(x)}(\Omega)}$

$$\|f\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq c\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)},$$

avec $c = r_s$.
Maintenant, soient $r(x) = q(x)$, G tel que $G = \{x \in \Omega : \ r(x) = q(x)\}$, alors

$$ess \inf_{x\in\Omega} \frac{p(x)}{r(x)}\frac{q(x)-r(x)}{q(x)-p(x)} = 0, \quad ess \sup_{x\in\Omega} \frac{q(x)}{r(x)}\frac{r(x)-p(x)}{q(x)-p(x)} = 1,$$

et donc $\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$, $\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)} \geq \|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)}$ et

$$\rho_r\Big(\frac{f\chi_G}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) = \rho_q\Big(\frac{f\chi_G}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \ (car \ r(x) = q(x))$$

$$\leq \rho_q\Big(\frac{f\chi_G}{\|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq \rho_q\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq 1.$$

Et pour $r(x) < q(x)$ p.p $x \in \Omega/G$, voir la première partie de la preuve, donc

$$\rho_r\Big(\frac{f\chi_{\Omega/G}}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq r_s,$$

finalement

$$\rho_r\Big(\frac{f}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) \leq \rho_r\Big(\frac{f\chi_\Omega}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big) + \rho_r\Big(\frac{f\chi_{\Omega/G}}{\|f\|^u_{L^{p(x)}(\Omega)}\|f\|^v_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big)$$

$$\leq r_s + 1,$$

on trouve l'inégalité voulue mais avec comme constante $c = r_s + 1$.

3.1.5 Inégalités de Minkowsky.

On se propose de définir une autre norme qui est analogue à une norme définie dans les espaces d'Orlicz (voir [21]).

Définition 3.1.4 *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. On définit sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante :*

$$\|f\|_p = \sup_{\rho_q(\varphi)\leq 1} \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\Big| < \infty, \tag{3.18}$$

où $1/p(x) + 1/q(x) = 1$.

Proposition 3.1.5 ***(Inégalité de Minkowsky).***
Si $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors on a

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{3.19}$$

Preuve-On a

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p &= \sup_{\rho_q(\varphi)\leq 1} \Big| \int_\Omega \Big(f(x)+g(x)\Big)\varphi(x)dx\Big| \\ &\leq \sup_{\rho_q(\varphi)\leq 1} \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\Big| + \sup_{\rho_q(\varphi)\leq 1} \Big| \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx\Big| \\ &\leq \|f\|_p + \|g\|_p.\end{aligned}$$

Corollaire 3.1.3 *Soient $m \in \mathbb{N}$, $f_k \in L^{p(x)}(\Omega)$ pour tout $k = \{1, 2, ..., m\}$, alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^m f_k \Big\|_p \leq \sum_{k=1}^m \|f_k\|_p. \tag{3.20}$$

Preuve-Par récurrence à partir de la proposition (3.1.5).

Définition 3.1.5 *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. On peut définir sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante :*

$$\|f\|_p^{(1)} = \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq 1} \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\Big|, \tag{3.21}$$

avec $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$.

Proposition 3.1.6 *pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ on a l'équivalence des normes suivantes*

$$c\big\|f\big\|_p^{(1)} \leq \big\|f\big\|_p \leq \big\|f\big\|_p^{(1)}, \tag{3.22}$$

avec

$$c = 2^{1-\frac{\overline{q}}{\underline{q}}}. \tag{3.23}$$

Preuve-Voir [31].

Dans ce qui suit selon la norme (3.21), l'inégalité intégrale de Minkowsky est verifiée.

Proposition 3.1.7 *Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, tel que $\overline{p} < \infty$ et $\underline{p} > 1$, alors*

$$\Big\|\int_\Omega f(.,y)dy\Big\|_{p,\ x}^{(1)} \leq \int_\Omega \Big\|f(.,y)\Big\|_{p,\ x}^{(1)} dy. \tag{3.24}$$

Preuve-On a

$$\begin{aligned}
\Big\|\int_\Omega f(.,y)dy\Big\|_{p,\ x}^{(1)} &= \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq 1} \Big|\int_\Omega \Big(\int_\Omega f(x,y)dy\Big)\varphi(x)dx\Big| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega dy \int_\Omega \Big|\varphi(x)f(x,y)\Big|dx \\
&= \int_\Omega \Big(\sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega \Big|f(x,y)\varphi(x)\Big|dx\Big)dy \\
&= \int_\Omega \Big\|f(.,y)\Big\|_{p,\ x}^{(1)} dy.
\end{aligned}$$

Sous les mêmes conditions que la proposition 3.1.7 avec la norme (3.18), on obtient le resultat suivant.

Corollaire 3.1.4 *Soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, tel que $\overline{p} < \infty$ et $\underline{p} > 1$. Alors*

$$\Big\|\int_\Omega f(.,y)dy\Big\|_{p,\ x} \leq c\int_\Omega \Big\|f(.,y)\Big\|_{p,\ x} dy, \tag{3.25}$$

avec $c = 2^{-1+\frac{\overline{q}}{\underline{q}}}$.

Preuve-L'inégalité (3.25) découle de la proposition 3.1.6 et la proposition 3.1.7.

3.1.6 Inégalités de Hardy.

Dans ce paragraphe on cite deux résultats relatifs à l'inégalité de Hardy dans les espaces L^p classiques généralisés à $L^{p(x)}$.
1. On considère une inégalité du type de celle de Hardy dans $L^{p(x)}_{(0,l)}$:

$$\Big\|\frac{1}{x}Hf\Big\|_{L^{p(x)}(0,l)} \leq C\Big\|f\Big\|_{L^{p(x)}(0,l)}, \quad pour\ f \geq 0, \tag{3.26}$$

où $C > O$ est une constante qui dépend de l et $p(x)$, et $(Hf)(x) = \int_0^x f(t)dt$, $l > 0$, $f \in L^{p(x)}(0,l)$.
Cette inégalité a fait l'objet de différents travaux (voir [13], [16]), selon les résultats de ces derniers, la condition suffisante pour que (3.26) soit satisfaite est la suivante :

$$A = \lim_{x \to 0} \big|p(x) - p(0)\big| \ln\Big(\frac{1}{x}\Big) < \infty\ ,$$

où $p(x)$ est définie comme suit $p(x) : (0,l) \to [1,\infty)$, est une fonction mesurable sur $(0,l)$, $p(x) \neq \infty$ (pour plus de details voir [13].)
2. L'inégalité de Hardy classique liée aux intégrales fractionnaires peut être formulée comme suit :

$$\Big\|x^{\beta-\alpha}\int_0^x \frac{f(y)dy}{y^\beta(x-y)^{1-\alpha}}\Big\|_{L^p(0;b)} \leq C\Big\|f\Big\|_{L^p(0;b)}, \tag{3.27}$$

où $0 < \alpha < 1$, $\alpha - \frac{1}{p} < \beta < \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $0 < b \leq \infty$.
Pour plus de details voir [32].

Dans ce théorème on généralise (3.27) en supposant $0 < \alpha < n$, et $x_0 \in \overline{\Omega}$.

Théorème 3.1.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine borné et $p(x)$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$1 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty,\ \ x \in \overline{\Omega} \tag{3.28}$$

$$\big|p(x) - p(y)\big| \leq \frac{A}{\ln\frac{1}{|x-y|}}\ ,\quad \big|x-y\big| \leq \frac{1}{2}\ ,\ \ x,y \in \overline{\Omega}. \tag{3.29}$$

Alors l'inégalité de type Hardy est satisfaite :

$$\Big\|\big|x-x_0\big|^{\beta-\alpha}\int_\Omega \frac{f(y)dy}{|y-x_0|^\beta|x-y|^{n-\alpha}}\Big\|_{L^{p(x)}} \leq C\Big\|f\Big\|_{L^{p(x)}}, \tag{3.30}$$

quelque soit β dans l'intervalle

$$\alpha - \frac{x}{p(x_0)} < \beta < \frac{x}{q(x_0)}. \tag{3.31}$$

(Pour plus de details voir [32]).

Remarque 3.1.8 *La condition (3.29) est usuellement dite condition de Dini-Lepschitz.*

3.2 Quelques proporietés des espaces $L^{p(x)}$.

3.2.1 Quelques inégalités auxiliaires.

Lemme 3.2.1 *Soit* $\|f\|_p < \infty$ *et* $\rho_q(g) < \infty$, *alors*

$$\Big|\int_\Omega f(x)g(x)dx\Big| \leq \begin{cases} \|f\|_p & \text{si } \rho_q(g) \leq 1, \\ \rho_q(g)\|f\|_p & \text{si } \rho_q(g) > 1. \end{cases}$$

Preuve-Pour la preuve voir [21].

Lemme 3.2.2 *Soit* $1 < p(x) < \infty$ *et* $\rho_p\big(f\big) < \infty$, *si* $\|f\|_p \leq 1$, *alors*

$$\rho_p\big(f\big) \leq 1. \tag{3.32}$$

Preuve-Soit $|\Omega_1| = |\Omega_\infty| = 0$.
Supposons le contraire : $\rho_p\big(f\big) > 1$, on rappelle que l'application $\lambda \to \rho_p\big(\frac{f}{\lambda}\big)$ est continue et décroissante, alors il existe $\lambda > 1$ tel que $\rho_p\big(\frac{f}{\lambda}\big) = 1$ (car si $\lambda = 1$ implique que $\rho_p\big(f\big) > 1$ et $\rho_p\big(f\big) = 1$ en même temps, donc c'est impossible ; et de même pour $\lambda < 1$ impossibilité).
Posons

$$g(x) = \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)-1} sign f(x),\ x \in \Omega.$$

On a

$$\rho_q\big(g\big) = \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)(p(x)-1)}|sign f(x)|dx = \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)}dx = \rho_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) = 1,$$

et donc

$$\|f\|_p \geq \int_\Omega |f(x)g(x)|dx = \int_\Omega |f(x)|\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)-1}|sign f(x)|dx$$

$$= \lambda \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)}dx = \lambda\rho_p\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) = \lambda > 1,$$

qui contredit le fait que $\|f\|_p \leq 1$.

Proposition 3.2.1 *Soit* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *tel que* $\|f\|_p \leq 1$, *alors*

$$\rho_p\big(f\big) \leq c_p\|f\|_p, \tag{3.33}$$

où $c_p = \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty$.

Preuve-Voir [21].

3.2.2 Espaces $L^{p(x)}$ et $\widetilde{L}^{p(x)}$.

Proposition 3.2.2 *Soit $q(x)$ telle que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, alors pour $1 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty$: l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ coïncide avec l'espace*

$$\widetilde{L}^{p(x)}(\Omega) = \Big\{ f(x) : \ \Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \Big| < \infty \text{ pour tout } \varphi(x) \in L^{q(x)}(\Omega) \Big\}. \quad (3.34)$$

Preuve-Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ donc $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty$ alors d'après l'inégalité de Hölder (3.1.1), on a

$$\Big| \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \Big| \leq r_p \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)} < \infty,$$

pour tout $\varphi \in L^{q(x)}(\Omega)$. Donc $f \in \widetilde{L}^{p(x)}(\Omega)$.
Inversement, soit $f \in \widetilde{L}^{p(x)}(\Omega)$ et donc $\|f\|_p < \infty$.
Au début on suppose que $\|f\|_p \leq 1$, et on pose

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} |f(x)|^{p(x)-1} & \text{si } x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre maintenant que $\varphi_0(x) \in L^{q(x)}(\Omega)$ et $\rho_q(\varphi_0) \leq 1$.
Supposons que $\rho_q(\varphi_0) > 1$, alors

$$\begin{aligned} \rho_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx &= \int_\Omega |f(x)|^{q(x)\big(p(x)-1\big)} dx \\ &= \int_\Omega \Big(|f(x)|^{p(x)-1} \Big)^{q(x)} dx \\ &\geq \int_{\Omega/\Omega_\infty(q)} |\varphi_0(x)|^{q(x)} dx > 1. \end{aligned}$$

Soit

$$f_{N,k}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq k \text{ et } |f(x)| \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\varphi_{N,k}(x) = |f_{N,k}|^{p(x)-1} \in L^{q(x)}(\Omega)$. A partir de de l'inégalité $\rho_p\big(f\big) > 1$, on peut déduire qu'il existe $N_0 \to \infty$ et $k_0 \to \infty$, tel que

$$\int_{\Omega/\Omega_\infty(p)} |f_{N_0,k_0}(x)|^{p(x)} dx > 1. \quad (3.35)$$

Donc

$$1 < \rho_p\big(f_{N_0,k_0}\big) \leq \|f_{N_0,k_0}\|_p \|f_{N_0,k_0}^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

A partir du lemme (3.1.3), on obtient

$$1 < \|f_{N_0,k_0}\|_p \max\{ \Big[\rho_p\big(f_{N_0,k_0}\big)\Big]^{\frac{1}{\overline{q}}}, \Big[\rho_p\big(f_{N_0,k_0}\big)\Big]^{\frac{1}{\underline{q}'}} \},$$

donc

$$\min\{\left[\rho_p\big(f_{N_0,k_0}\big)\right]^{1-\frac{1}{q}},\left[\rho_p\big(f_{N_0,k_0}\big)\right]^{1-\frac{1}{q'}}\}\leq\left\|f_{N_0,k_0}\right\|_p,$$

de l'inégalité (3.35) découle $1<\left\|f_{N_0,k_0}\right\|_p$, d'où on déduit que

$$\sup_{\rho_q(\varphi)\leq 1}\Big|\int_\Omega f(x)\varphi_{N,k}(x)dx\Big|>1,$$

où

$$\varphi_{N,k}(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{si } |x|\leq k \; et \; |f(x)|\leq N,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

et donc $\rho_q\big(\varphi_{N,k}\big)\leq\rho_q\big(\varphi\big)$ ce qui contredit la supposition que $\|f\|_p\leq 1$. Donc $\varphi_0(x)\in L^{q(x)}(\Omega)$ et $\rho_q\big(\varphi_0\big)\leq 1$, alors

$$\int_{\Omega_0}\left|f(x)\right|^{p(x)}dx\leq 1.$$

Ensuite, soit $\|f\|_p>1$, alors $\frac{f(x)}{\|f\|_p}\in L^{p(x)}(\Omega)$ comme elle est démontrée en première étape et donc $f\in L^{p(x)}(\Omega)$ grâce à la linéarité de $L^{p(x)}(\Omega)$ sous la condition $\overline{p}<\infty$.

3.2.3 Complétude, réflexivité et separabilité.

Proposition 3.2.3 *L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est complet.*

Preuve-Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy de fonctions de $L^{p(x)}(\Omega)$ et soit $\epsilon>0$, alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\int_\Omega\left|f_m(x)-f_n(x)\right||g(x)|dx<\epsilon, \tag{3.36}$$

pour tout $m,n\geq n_0$ et pour tout g telle que $\rho_q\big(g\big)\leq 1$ On décompose Ω sous forme d'ensembles disjoints G_k de mesure finie et on définit les fonctions $g_k=\Big(1+\left|G_k\right|\Big)^{-1}\chi_{G_k},\ k\in\mathbb{N}$. Alors

$$\rho_q\big(g_k\big)=\int_{G_k}\Big(1+\left|G_k\right|\Big)^{-q(x)}dx+\Big(1+\left|G_k\right|\Big)^{-1}\leq 1.$$

En remplaçant g par g_k dans (3.36), on trouve

$$\int_{G_k}\left|f_m(x)-f_n(x)\right|\Big(1+\left|G_k\right|\Big)^{-1}dx\leq\epsilon,$$

d'où

$$\int_{G_k}\left|f_m(x)-f_n(x)\right|dx\leq\epsilon\Big(1+\left|G_k\right|\Big),\ m,n\geq n_0,\ k\in\mathbb{N}.$$

Ceci montre que la suite $\{f_n\}$ est de Cauchy dans $L^1(G_k)$, et donc convergente dans chaque $L^1(G_k)$, et par récurrence on trouve une sous suite $\{f_n^{(k)}\}_n$ et une fonctions $f^{(k)} \in L^1(G_k)$ telle que $f_n^{(k)}(x) \to f^{(k)}(x)$ pour $x \in G_k$ presque partout, $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$f_m^{(l)}(x) \to \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x)\chi_{G_k}(x) = f(x), \text{ pour } x \in \Omega \text{ p.p.}$$

En remplaçant f_m par $f_m^{(l)}$ dans (3.36) et en utilisant le lemme de Fatou on trouve

$$\int_\Omega \big|f(x) - f_n(x)\big|\big|g(x)\big|dx \leq \sup_m \int_\Omega \big|f_m^{(l)} - f_n(x)\big|\big|g(x)\big|dx \leq \epsilon$$

pour tout $n \geq n_0$ et chaque g avec $\rho_q\big(g\big) \leq 1$. Ainsi $\big\|f - f_n\big\|_p \leq \epsilon$.

Conclusion : $L^{p(x)}$ est un espace de Banach.

Théorème 3.2.1 *Les conditions suivantes sont equivalentes :*

(i) $p \in L^\infty(\Omega)$.

(ii) Pour chaque fonctionnelle linéaire continue G *sur* $L^{p(x)}(\Omega)$ *il existe une seule fonction* $g \in L^{q(x)}(\Omega)$ *telle que*

$$G(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \ , \quad f \in L^{p(x)}(\Omega), \tag{3.37}$$

où la norme de $G(f)$ *verifie* $c_p^{-1}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq \|G\| \leq r_p\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}$.

Preuve-Voir [21]. Théorème 2.6.

Corollaire 3.2.1 .

(i) L'espace dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ *est* $L^{q(x)}(\Omega)$ *si et seulement si* $p \in L^\infty(\Omega)$. *(*$q(x)$ *est la fonction conjuguée de* $p(x)$, $q(x) \in \mathcal{P}(\Omega)$*).*

(ii) $L^{p(x)}$ *est réflexif si et seulement si*

$$1 < \underline{p} \leq \overline{p} < \infty.$$

Preuve-Voir [21]. Corollaire 2.7.

Théorème 3.2.2 *Si* $\overline{p} < \infty$*, alors* $L^{p(x)}$ *est séparable.*

Preuve-Voir [21].

Remarque 3.2.1 *1. Si $p = cste$, $\underline{p} = \overline{p} = p$, d'où d'aprés corollaire 3.2.1 (ii) L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$ (résultat connu pour les espaces classiques de Lebesgue). 2. Si $p = cste$, $1 \leq \overline{p} = p < \infty$, L^p est séparable (résultat est bien connu pour les espaces classiques de Lebesgue).*

3.2.4 Convergences.

Proposition 3.2.4 *Si $\overline{p} < \infty$ alors :*

$$\rho_p\big(f_n\big) \to 0 \text{ si et seulement si } \big\|f_n\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \to 0. \tag{3.38}$$

Preuve-.
Si $\big\|f_n\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \to 0$, alors à partir de la proposition 3.2.1, $\rho_p\big(f_n\big) \to 0$ quand $n \to \infty$. Maintenant, soit $\rho_p\big(f_n\big) \to 0$, et soit $\epsilon \in \big(0;1\big]$ pour n suffisamment grand, on a $\rho_p\big(f_n\big) < \epsilon \leq 1$, et donc

$$\begin{aligned}\rho_p\Big(f_n\rho_p\big(f_n\big)^{-\frac{1}{\overline{p}}}\Big) &= \int_{\Omega/\Omega_\infty} \big|f_n(x)\rho_p\big(f_n\big)^{-\frac{1}{\overline{p}}}\big|^{p(x)}dx + \sup_{x\in\Omega_\infty} vrai\big|f_n(x)\rho_p\big(f_n\big)^{-\frac{1}{\overline{p}}}\big| \\ &\leq \rho_p\big(f_n\big)^{-1}\int_{\Omega/\Omega_\infty} \big|f_n(x)\big|^{p(x)}dx + \rho_p\big(f_n\big)^{-\frac{1}{\overline{p}}} \sup_{x\in\Omega_\infty} vrai\big|f_n(x)\big| \\ &= \rho_p\big(f_n\big)^{-1}\rho_p\big(f_n\big) = 1.\end{aligned}$$

Si on prend $\lambda = \rho_p(f_n)^{\frac{1}{p}}$, on ontient

$$\big\|f_n\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \rho_p\big(f_n\big)^{\frac{1}{\overline{p}}} < \epsilon^{\frac{1}{\overline{p}}}.$$

Finalement $\big\|f_n\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \to 0$.

Proposition 3.2.5 *Soit $\overline{p} < \infty$ si $f_n \to 0$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$, alors $f_n \to 0$ en mesure.*

Preuve-.
On suppose le contraire. Donc il existe $\epsilon, \delta \in \big(0;1\big]$ et une sous-suite $\{n_k\}$ telle que

$$\inf_k \Big|\{x \in \Omega : \ \big|f_{n_k}(x)\big| > \epsilon\}\Big| \geq \delta,$$

alors d'après la proposition 3.2.4 on trouve $\rho_p\big(f_{n_k}\big) \geq \delta\epsilon^{\overline{p}}$ et cela contredit le fait que $f_n \to 0$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$.

3.2.5 Injection.

Définition 3.2.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach. On écrit*

$$X \hookrightarrow Y \text{ si },\tag{3.39}$$

X est continument injecté dans Y.

Proposition 3.2.6 *Soit $0 < \left|\Omega\right| < \infty$, et $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors*

$$L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega) \text{ si et seulement si } p(x) \leq q(x) \text{ p.p } x \in \Omega,\tag{3.40}$$

où la norme de l'opérateur d'injection n'excède pas $|\Omega| + 1$.

Preuve-Voir [21].

Remarque 3.2.2 *Ce resultat est une généralisation du cas classique concernant l'injection d'espaces.*

Proposition 3.2.7 *Soient $1 \leq \underline{q} \leq q(x) \leq \overline{q} \leq \infty$, $\forall f \in L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q(x)}(\mathbb{R}^n),\tag{3.41}$$

et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left\|f\right\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq c \max\Big(\left\|f\right\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \left\|f\right\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}\Big).\tag{3.42}$$

Preuve-Première étape, soit $\overline{q} < \infty$ et $\lambda > 0$ alors

$$\rho_q\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)} dx$$

$$\leq \int_{\{x:\ |f(x)| \leq \lambda\}} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{\underline{q}} dx + \int_{\{x:\ |f(x)| > \lambda\}} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{\overline{q}} dx$$

$$\leq \Big(\frac{\left\|f\right\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\Big)^{\underline{q}} + \Big(\frac{\left\|f\right\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\Big)^{\overline{q}}.$$

Si $\lambda = 2\max\Big(\left\|f\right\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \left\|f\right\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}\Big)$ alors on a

$$\rho_q\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\underline{q}} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\overline{q}} \leq 1.$$

Deuxième étape $\overline{q} = \infty$ alors $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} vrai\big|f(x)\big| < \infty$. Soit $\lambda = 2\max\Big(\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \big\|f\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\Big)$, alors

$$\begin{aligned}
\rho_q\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) &= \int_{\mathbb{R}^n/\Omega_\infty}\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)}dx + \sup_{\Omega_\infty} vrai\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big| \\
&\leq \Big(\frac{\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\Big)^{\underline{q}} + \frac{\big\|f\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{\lambda} \\
&\leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\underline{q}} + \frac{1}{2} \leq 1.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\big\|f\big\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\max\Big(\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \big\|f\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\Big).$$

Et finalement on conclue que

$$\big\|f\big\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq 2\max\Big(\big\|f\big\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \big\|f\big\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}\Big).$$

Lemme 3.2.3 ***(Propriété de la semi-additivité)***

Soit $\Omega' \cup \Omega'' = \Omega$ (avec $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$), et soit $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\overline{p} < \infty$. Alors $\forall f \in L^{p(x)}(\Omega)$ on a

$$\max\{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega')}, \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega'')}\} \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega')} + \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega'')}. \tag{3.43}$$

Preuve-On pose $a = \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega')}$, et $b = \big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega'')}$ et on suppose que $a \geq b$; alors

$$\int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\max(a,b)}\Big|^{p(x)}dx \geq \int_{\Omega'}\Big|\frac{f(x)}{a}\Big|^{p(x)}dx = I_{p_{\Omega'}}\Big(\frac{f}{\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}\Big) = 1.$$

D'après le lemme 3.1.3, on peut écrire

$$\Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}{a}\Big)^{\overline{p}} \geq 1$$

$$\Big(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}{a}\Big)^{\overline{p}} \geq \rho_p\Big(\frac{f}{a}\Big) \geq 1,$$

d'où

$$\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{a} \geq \frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}{a} \geq 1,$$

et donc $\big\|f\big\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq \max\big(a,b\big)$, où la dernière égalité découle du Lemme 3.1.2. Et pour démontrer l'inégalité de droite, on pose

$$\frac{f(x)}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{\chi_{\Omega'}f(x)}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{\chi_{\Omega''}f(x)}{b},$$

et donc

$$\int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{a+b}\Big|^{p(x)}dx \leq \int_\Omega \Big|\frac{a}{a+b}\frac{\chi_{\Omega'}f(x)}{a}\Big|^{p(x)}dx + \int_\Omega \Big|\frac{b}{a+b}\frac{\chi_{\Omega''}f(x)}{b}\Big|^{p(x)}dx$$
$$\leq (\frac{a}{a+b})^{\underline{p}} + (\frac{b}{a+b})^{\underline{p}}$$
$$\leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

D'où $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq a+b$ (d'après la définition de $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$).

Lemme 3.2.4 *Soit* $0 < p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x) \leq \infty$ *et* $|\Omega_\infty(p_2)| = 0$, *alors*

$$L^{p_1(x)}(\Omega) \cap L^{p_2(x)}(\Omega) \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \subseteq L^{p_1(x)}(\Omega) + L^{p_2(x)}(\Omega), \tag{3.44}$$

où $L^{p_1(x)}(\Omega) + L^{p_2(x)}(\Omega)$ *désigne la somme arithmétique des espaces.*

Preuve-Découle du lemme 3.2.3.

3.2.6 $p(x)$-continuité.

Définition 3.2.2 *Soit* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, *on dit que* f *est* $p(x)$*-continue si*

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta(\epsilon) > 0 \text{ telle que } \rho_p\big(f_h - f\big) < \epsilon \text{ pour } h \in \mathbb{R}^n,\ \big|h\big| < \delta,$$

où $f_h(x) = f(x+h),\ x \in \mathbb{R}^n$, *autrement dit*

$$\lim_{h\to 0}\int |f(x+h) - f(x)|^{p(x)}dx = 0.$$

Remarque 3.2.3 *Il existe des fonctions* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *qui ne sont pas* $p(x)$*-continues. Voir exemple ci-dessous.*

Exemple 3.2.1 *Soient* $n = 1$, $\Omega = \big(-1, 1\big)$ *et* $1 \leq r < s < \infty$

$$p(x) = \begin{cases} r & \text{si } x \in \big[0;1\big), \\ s & \text{si } x \in \big(-1;0\big). \end{cases}$$

Et

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{s}} & \text{si } x \in \big[0;1\big), \\ 0 & \text{si } x \in \big(-1;0\big). \end{cases}$$

Alors f *n'est pas* $p(x)$*-continue.*

Preuve-.
On a
$$\int_{-1}^{1} \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx = \lambda^{-r} \int_0^1 \big|x\big|^{-\frac{r}{s}} dx < \infty.$$
Alors $f \in L^{p(x)}(\Omega)$.
Soit $h \in \big(0;1\big)$, alors

$$f(x+h) = \begin{cases} \big(x+h\big)^{-\frac{1}{s}} & \text{si } x+h \in \big[0;1\big) \; donc \; x \in \big[-h;1-h\big) \\ 0 & \text{si } x+h \in \big(-1;0\big) \; donc \; x \in \big(-1-h;-h\big). \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \rho_p\Big(\frac{f_h}{\lambda}\Big) &= \int_{-1-h}^{1-h} \Big|\frac{f(x+h)}{\lambda}\Big|^{p(x)} dx \\ &= \lambda^{-s} \int_{-h}^{0} \big|x+h\big|^{-1} dx + \lambda^{-r} \int_0^{1-h} \big|x+h\big|^{-\frac{r}{s}} dx \\ &\geq \lambda^{-s} \int_{-h}^{0} \big|x+h\big|^{-1} dx = \infty, \quad pour\ tout\ \lambda > 0, \end{aligned}$$

donc $f_h \notin L^{p(x)}(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$.

Remarque 3.2.4 *Cet exemple nous montre bien que l'espace $L^{p(x)}$ n'est pas invariant par rapport à la translation.*

Théorème 3.2.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contient une boule $B(x_0, r) = \{x \in \Omega,$ $\big|x - x_0\big| < r\}$ sur laquelle la fonction p est continue et non constante, alors il existe une fonction $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ pour laquelle f n'est pas $p(x)$-continue.*

Preuve-Voir [21].

Remarque 3.2.5 *Ici on note l'une des plus importantes différences entre les espaces classiques et généralisés de Lebsgue c'est-à-dire dans les espaces L^p la norme est invariante par rapport à la translation, alors que dans $L^{p(x)}$ elle ne l'est pas.*

3.3 Quelques inégalités intégrales pour les fonctions quasi-monotones dans les espaces de Lebesgue pondérés à exposant variable avec $0 < p(x) < 1$

Le présent travail a fait l'objet d'une publication internationnale parue (voir [35]), le lien :DOI : https ://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-4-58-65

Le but de ce travail est d'obtenir des inégalités de Hardy pondérées pour des fonctions quasi-monotones dans les espaces de Lebesgue à exposants variables avec $0 < p(x) < 1$.

3.3.1 Introduction

Pour la première fois l'espace de Lebesgue à exposant variable est apparu dans la littérature déjà dans les années trente du siècle dernier, introduit par W. Orlicz. Au début ces espaces avaient un intérêt théorique. Plus tard à la fin du siècle dernier, leur première application au-delà de la théorie des espaces de fonctions, était dans les problèmes variationnels et des études de $p(x)$-Laplacien, (Voir Zhikov [40], [41]), qui à son tour a donné une impulsion essentielle pour le développement de cette théorie. Une vaste recherche de ces espaces a également été largement stimulée par des applications à divers problèmes de mathématiques appliquées, par exemple, dans la modélisation de l'électrorhéologie fluides [30].

L'espace de Lebesgue à exposant variable est apparu comme un cas particulier du des espaces de Musielak-Orlicz espaces introduits par H. Nakano et développés par J. Musielak et W. Orlicz.

Les espaces de Lebesgue $L^{p(x)}$ à exposant variable pour $p(x) \geq 1$ sont apparus pour la première fois dans la littérature dans [27]. Le développement ultérieur de cette théorie a été lié à la théorie des fonctions modulaires.

De nombreuses recherches sont consacrées au problème de la bornétude de l'opérateur de Hardy dans les espaces de Lebesgue $L^{p(x)}$ pour $p(x) \geq 1$ (voir par exemple [4] et [27]). Mais les recherches sur l'inégalité de Hardy dans les espaces de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}$ pour $0 < p(x) < 1$ sont beaucoup moins connues.

Il est bien connu que pour les espaces L_p avec $0 < p < 1$, les inégalités de Hardy ne sont pas satisfaites pour une fonction mesurable non-négative arbitraire, mais sont satisfaites pour des fonctions quasi-monotones non-négatives avec des constantes optimales (voir [9] pour plus de détails).

L'objet de ce travail est d'obtenir des inégalités pondérées pour les opérateurs de Hardy agissant d'un espace de Lebesgue pondéré à exposant variable vers un autre espace de Lebesgue pondéré à exposant variable avec $0 < p(x) < 1$, pour les fonctions quasi-monotonies. Certains résultats obtenus dans [5] sont généralisés.

3.3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous énonçons les définitions, lemmes, corollaires et théorèmes suivants qui sont utiles dans les preuves des Résultats principaux.

Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien à n dimension, les points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et Ω un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $p(x)$ soit une fonction mesurable sur Ω tel que $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq \overline{p} < 1$, $\underline{p} = \text{ess}\inf_{x\in\Omega} p(x)$, $\overline{p} = \text{ess}\sup_{x\in\Omega} p(x)$ et ω est une fonction de poids, c'est-à-dire une fonction mesurable positive sur Ω.

Définition 3.3.1 *On note Par $L_{p(x),\omega(x)}(\Omega)$ à l'ensemble de tous les fonctions Lebesgue mesurable f sur Ω telle que*

$$\rho_{p(x),\omega(x)}(f) = \int_\Omega (|f(x)|\omega(x))^{p(x)} dx < \infty. \tag{3.45}$$

On note que l'expression

$$\|f\|_{L_{p(x),\omega(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda > 0;\ \int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda}\Big)^{p(x)} dx \leq 1\} \tag{3.46}$$

définit une quasi-norme sur $L_{p(x),\omega(x)}(\Omega)$. $L_{p(x),\omega(x)}(\Omega)$ est un espace quasi-Banach muni par cette quasi-norme (voir [31]).

Dans [5] le corollaire suivant a été prouvé.

Corollaire 3.3.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble measurable et p, q deux functions Lebesgue measurable sur Ω, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < \infty$ et $r(x) = \frac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}$. Supposer que ω_1 et ω_2 sont des fonctions de poids dans Ω satisfaisant la condition :*

$$\Big\|\frac{\omega_1}{\omega_2}\Big\|_{L_{r(x)}(\Omega)} < \infty.$$

Alors l'inégalité

$$\|f\|_{L_{p(x),\omega_1}(\Omega)} \leq (A_1 + B_1 + \|\chi_{\Omega_2}\|_{L^\infty(\Omega)})^{\frac{1}{\underline{p}}} \Big\|\frac{\omega_1}{\omega_2}\Big\|_{L_{r(x)}(\Omega)} \|f\|_{L_{q(x)\omega_2(x)}(\Omega)} \tag{3.47}$$

tient pour chaque $f \in L_{q(x),\omega_2(x)}(\Omega)$, avec

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega :\ p(x) < q(x)\}, \qquad \Omega_2 = \{x \in \Omega :\ p(x) = q(x)\},$$

$$A_1 = \sup_{x\in\Omega_1} \frac{p(x)}{q(x)},\ B_1 = \sup_{x\in\Omega_1} \frac{q(x) - p(x)}{q(x)}.$$

Le lemme suivant est connu et a été prouvé (Voir [4]).

Lemme 3.3.1 *Soient* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ *deux sous-ensembles measurable, p une function Lebesgue measurable sur* Ω_1 *et q une function Lebesgue measurable sur* Ω_2, $1 \leq \underline{p} \leq p(x) \leq q(y) \leq \overline{q} < \infty$ *pour tous* $x \in \Omega_1$ *et* $y \in \Omega_2$. *If* $p \in C(\Omega_1)$, $q \in C(\Omega_2)$, *alors l'inégalité*

$$\Big\| \|f\|_{L_{p(x)}(\Omega_1)} \Big\|_{L_{q(x)}(\Omega_2)} \leq C_{p,q} \Big\| \|f\|_{L_{q(x)}(\Omega_2)} \Big\|_{L_{p(x)}(\Omega_1)} \tag{3.48}$$

est valide, avec

$$C_{p,q} = \Big(\|\chi_{\Delta_1}\|_\infty + \|\chi_{\Delta_2}\|_\infty + \frac{\overline{p}}{\underline{q}} + \frac{\underline{p}}{\overline{q}} \Big) (\|\chi_{\Delta_1}\|_\infty + \|\chi_{\Delta_2}\|_\infty), \tag{3.49}$$

$$\underline{q} = \operatorname{ess}\inf_{\Omega_2} q(x), \quad \overline{q} = \operatorname{ess}\sup_{\Omega_2} q(x),$$

$$\Delta_1 = \{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2;\ p(x) = q(y)\}, \qquad \Delta_2 = (\Omega_1 \times \Omega_2) \backslash \Delta_1,$$

$C(\Omega_1)$, $C(\Omega_2)$ *sont des espaces des fonctions continues sur* Ω_1, Ω_2 *et* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *est toute fonction mesurable telle que* $\Big\| \|f\|_{L_{q(x)}(\Omega_2)} \Big\|_{L_{p(x)}(\Omega_1)} < \infty$.

Les théorèmes suivants ont été établis dans [5].

Théorème 3.3.1 *Soient p, q des functions Lebesgue mesurables sur* $(0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x) - \underline{p}}$, $x \in (0,\infty)$ *et f une function non-néegative et non-croissante définie sur* $(0,\infty)$. *Supposons que* ω_1 *et* ω_2 *soient des fonctions de pondération défini sur* $(0,\infty)$.

Alors l'inégalité

$$\|Hf\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}} C_{p,q} d_p \Bigg\| \frac{t^{\frac{1}{\underline{p}'}} \|\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}}{\omega_1(x)} \Bigg\|_{L_{r(x)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)} \tag{3.50}$$

est vérifiée, avec

$$C_{p,q} = \left(\|\chi_{\Delta_1}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \|\chi_{\Delta_2}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \underline{p} \left(\frac{1}{\underline{q}} - \frac{1}{\overline{q}} \right) \right) \Big(\|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)} + \|\chi_{S_2}\|_{L_\infty(0,\infty)} \Big),$$

$S_1 = \{x \in (0,\infty) :\ p(x) = \underline{p}\}$, $S_2 = (0,\infty) \backslash S_1$ *and*

$$d_p = \Big(1 + \frac{\overline{p} - \underline{p}}{\overline{p}} + \|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)} \Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}.$$

Théorème 3.3.2 *Soient p, q des functions Lebesgue measurables sur* $(0,1)$, $0<\underline{p}\leq p(x)\leq q(x)\leq\overline{q}<1$, $r(x)=\frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$, $x\in(0,1)$ *et f est une function non-négative et non-décroissante definie sur* $(0,1)$. *Supposons que ω_1 et ω_2 soient des fonctions de poids définies sur* $(0,1)$.

Alors l'inégalité

$$\|Hf\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,1)}\leq \underline{p}^{\frac{1}{p}}C_{p,q}d_p\left\|\frac{\left\|\frac{(x-t)^{1/\overline{p}'}\omega_2(x)}{x}\right\|_{L_{q(x)}(t,1)}}{\omega_1(x)}\right\|_{L_{r(x)}(0,1)}\|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,1)} \tag{3.51}$$

est vérifiée, avec $C_{p,q}$ et d_p des constantes du Theorem 3.3.1.

La définition suivante a été introduite dans [9].

Définition 3.3.2 *On dit qu'une fonction non négative f est quasi-monotone sur* $]0,\infty[$, *si pour un certain nombre réel α, $x^\alpha f(x)$ est décroissante ou un fonction croissante de x. Plus précisément, étant donné $\beta\in\mathbb{R}$, on dit que $f\in Q_\beta$ si $x^{-\beta}f(x)$ est non-croissante et $f\in Q^\beta$ si $x^{-\beta}f(x)$ est non décroissante.*

La proposition suivante a été établie dans [9].

Proposition 3.3.1 (*a*) *Soit $-\infty<\beta<\infty$, $f\in Q_\beta$, $0\leq a<\infty$ pour $\beta>-1$ et $0<a<b\leq\infty$ pour $\beta\leq -1$. Si $0<p\leq 1$ et $\beta\neq -1$, alors*

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p\leq p|\beta+1|^{1-p}\int_a^b\left(\frac{|y^{\beta+1}-a^{\beta+1}|}{y^\beta}\right)^{p-1}f^p(y)dy. \tag{3.52}$$

Si $0<p\leq 1$ et $\beta=-1$, alors

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p\leq p\int_a^b\left(y\,\ln\frac{y}{a}\right)^{p-1}f^p(y)dy. \tag{3.53}$$

Les inégalités sont dans le sens inverse si $1\leq p<\infty$.

(*b*) *Soit $-\infty<\beta<\infty$, $f\in Q^\beta$ et $0\leq a<b\leq\infty$ pour $\beta<-1$ et $0\leq a<b<\infty$ pour $\beta\geq -1$. Si $0<p\leq 1$ et $\beta\neq -1$, alors*

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p\leq p|\beta+1|^{1-p}\int_a^b\left(\frac{|y^{\beta+1}-b^{\beta+1}|}{y^\beta}\right)^{p-1}f^p(y)dy. \tag{3.54}$$

Si $0<p\leq 1$ et $\beta=-1$, alors

$$\left(\int_a^b f(y)dy\right)^p \leq p\int_a^b \left(y\ \ln\frac{b}{y}\right)^{p-1} f^p(y)dy. \tag{3.55}$$

Les inégalités sont en sens inverse si $1 \leq p < \infty$.

(*c*) *Les constantes de ces inégalités sont optimales (plus petits) possible dans tous les cas.*

Si dans (3.52), on pose $a = 0$ et en (3.54) on pose $b = \infty$, on obtient des cas suivants de la Proposition qui sont utiles dans les preuves des résultats principaux.

Corollaire 3.3.2 *Soit* $0 < p \leq 1$.

(*a*) *Si* $\beta > -1$, $f \in Q_\beta$ *et* $0 < b \leq \infty$, *alors*

$$\left(\int_0^b f(y)dy\right)^p \leq p(\beta+1)^{1-p}\int_0^b y^{p-1} f^p(y)dy. \tag{3.56}$$

(*b*) *Si* $\beta < -1$, $f \in Q^\beta$ *et* $0 \leq a < \infty$, *alors*

$$\left(\int_a^\infty f(y)dy\right)^p \leq p|\beta+1|^{1-p}\int_a^\infty y^{p-1} f^p(y)dy. \tag{3.57}$$

Si dans (3.54), on prend $a = 0$, $b = x$, $\beta > -1$, on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.3 *Si* $0 < p \leq 1$, $\beta > -1$, $f \in Q^\beta$ *et* $0 \leq x < \infty$, *alors*

$$\left(\int_0^x f(y)dy\right)^p \leq p(\beta+1)^{1-p}\int_0^x \left[y^{-\beta}\left(x^{\beta+1} - y^{\beta+1}\right)\right]^{p-1} f^p(y)dy. \tag{3.58}$$

3.3.3 Résultats principaux

Considérons les opérateurs de Hardy

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \quad (H_2 f)(x) = \ frac1x \int_x^\infty f(t)dt,$$

où f est une fonction Lebesgue mesurable et non négative sur $(0, \infty)$.

Théorème 3.3.3 *Soient* p, q *des fonctions de Lebesgue mesurables sur* $(0, \infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$, *pour* $x \in (0, \infty)$, $\beta > -1$ *and* $f \in Q_\beta$. *Supposons que* ω_1 *et* ω_2 *soient des fonctions de poids définies sur* $(0, \infty)$.

Alors l'inégalité

$$\|H_1 f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}(\beta+1)^{-\frac{1}{p'}} C_{p,q} d_p \left\| \frac{t^{\frac{1}{\underline{p}'}} \|\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}}{\omega_1(x)} \right\|_{L_{r(x)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)} \tag{3.59}$$

est vérifiée, avec

$$C_{p,q}=\left(\|\chi_{\Delta_1}\|_{L_\infty(0,\infty)}+\|\chi_{\Delta_2}\|_{L_\infty(0,\infty)}+\underline{p}\left(\frac{1}{\underline{q}}-\frac{1}{\overline{q}}\right)\right)\Big(\|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)}+\|\chi_{S_2}\|_{L_\infty(0,\infty)}\Big),$$

$S_1=\{x\in(0,\infty):\ p(x)=\underline{p}\}$, $S_2=(0,\infty)\backslash S_1$ *et*

$$d_p=\Big(1+\frac{\overline{p}-\underline{p}}{\overline{p}}+\|\chi_{S_1}\|_{L_\infty(0,\infty)}\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}.$$

Preuve-En appliquant le corollaire 3.3.2 (a) avec $p=\underline{p}$, on obtient

$$\|H_1f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)}=\|\omega_2(x)H_1f\|_{L_{q(x)}(0,\infty)}=\Big\|\frac{\omega_2(x)}{x}\int_0^x f(t)dt\Big\|_{L_{q(x)}(0,\infty)}$$
$$\leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}(\beta+1)^{-\frac{1}{\underline{p}'}}\Big\|\frac{\omega_2(x)}{x}\Big(\int_0^x f^{\underline{p}}(t)t^{\underline{p}-1}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}\Big\|_{L_{q(x)}(0,\infty)}.$$

Let

$$J_1=\Big\|\frac{\omega_2(x)}{x}\Big(\int_0^x f^{\underline{p}}(t)t^{\underline{p}-1}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}\Big\|_{L_{q(x)}(0,\infty)},$$

then

$$J_1=\Big\|\Big(\int_0^\infty f^{\underline{p}}(t)\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}t^{\underline{p}-1}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}\Big\|_{L_{q(x)}(0,\infty)}$$
$$=\Big\|\Big(\int_0^\infty f^{\underline{p}}(t)\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}t^{\underline{p}-1}dt\Big)\Big\|^{\frac{1}{\underline{p}}}_{L_{\frac{q(x)}{\underline{p}}}(0,\infty)}$$
$$=\Big\|\Big\|f^{\underline{p}}(t)\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}t^{\underline{p}-1}\Big\|_{L_1(0,\infty)}\Big\|^{\frac{1}{\underline{p}}}_{L_{\frac{q(x)}{\underline{p}}}(0,\infty)}.$$

Ensuite, en appliquant le lemme 3.3.1, on obtient

$$J_1\leq C_{p,q}\Big(\int_0^\infty\Big\|[f^{\underline{p}}(t)]\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}t^{\underline{p}-1}\Big\|_{L_{\frac{q(x)}{\underline{p}}}(0,\infty)}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$
$$=C_{p,q}\Big(\int_0^\infty f^{\underline{p}}(t)t^{\underline{p}-1}\Big\|\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}\Big\|_{L_{\frac{q(x)}{\underline{p}}}(0,\infty)}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$
$$=C_{p,q}\Big(\int_0^\infty f^{\underline{p}}(t)t^{\underline{p}-1}\Big\|\frac{\omega_2(x)}{x}\Big\|^{\underline{p}}_{L_{q(x)}(t,\infty)}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$
$$=C_{p,q}\Big\|f(t)t^{\frac{1}{\underline{p}'}}\Big\|\frac{\omega_2(x)}{x}\Big\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}\Big\|_{L_{\underline{p}}(0,\infty)}.$$

Soit $J_2=\Big\|f(t)t^{\frac{1}{\underline{p}'}}\Big\|\frac{\omega_2(x)}{x}\Big\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}\Big\|_{L_{\underline{p}}(0,\infty)}$, puis en appliquant le corollaire 3.3.1, on obtient

$$J_2\leq d_p\Big\|\frac{t^{\frac{1}{\underline{p}'}}\|\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}}{\omega_1(x)}\Big\|_{L_{r(x)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)},$$

par conséquent

$$\|H_1f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}(\beta+1)^{-\frac{1}{\underline{p}'}}C_{p,q}d_p\Bigg\|\frac{t^{\frac{1}{\underline{p}'}}\|\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}}{\omega_1(x)}\Bigg\|_{L_{r(x)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)}.$$

Remarque 3.3.1 Si dans l'inégalité (3.59) on pose $\beta = 0$, on obtient l'inégalité (3.50) du théorème 3.3.1

En utilisant le corollaire 3.3.2 (b) avec $a = 0$, le théorème suivant se démontre de manière similaire.

Théorème 3.3.4 *Soient p, q des fonctions mesurables de Lebesgue sur $(0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$, pour $x \in (0,\infty)$, $\beta < -1$ et $f \in Q^\beta$. Supposons que ω_1 et ω_2 soient des fonctions de poids définies sur $(0,\infty)$. Alors l'inégalité*

$$\|H_1f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}|\beta+1|^{-\frac{1}{\underline{p}'}}C_{p,q}d_p\Bigg\|\frac{t^{\frac{1}{\underline{p}'}}\|\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(0,t)}}{\omega_1(x)}\Bigg\|_{L_{r(x)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)} \tag{3.60}$$

est vérifiée, avec $C_{p,q}$ et d_p sont les constantes du théorème 3.3.3.

Théorème 3.3.5 *Soit p, q des fonctions Lebesgue mesurables sur $(0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$, pour $x \in (0,\infty)$, $\beta > -1$ and $f \in Q^\beta$. Supposons que ω_1 et ω_2 soient des fonctions de poids définies sur $(0,\infty)$.*

Alors l'inégalité

$$\|H_1f\|_{L_{q(x),\omega_2}(0,\infty)}$$

$$\leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}(\beta+1)^{-\frac{1}{\underline{p}'}}C_{p,q}d_p\Bigg\|\frac{\|[t^{-\beta}(x^{\beta+1}-t^{\beta+1})]^{\frac{1}{\underline{p}'}}\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}}{\omega_1(x)}\Bigg\|_{L_{r(x)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)} \tag{3.61}$$

est vérifiée, avec $C_{p,q}$ et d_p sont les constantes du théorème 3.3.3.

Preuve-En appliquant le corollaire 3.3.3 avec $p = \underline{p}$, on a

$$\|H_1f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)} = \|\omega_2(x)H_1f\|_{L_{q(x)}(0,\infty)} = \left\|\frac{\omega_2(x)}{x}\int_0^x f(t)dt\right\|_{L_{q(x)}(0,\infty)}$$

$$\leq \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}|\beta+1|^{-\frac{1}{\underline{p}'}}\left\|\frac{\omega_2(x)}{x}\left(\int_0^x[t^{-\beta}(x^{\beta+1}-t^{\beta+1})]^{\underline{p}-1}f^{p}(t)dt\right)^{\frac{1}{\underline{p}}}\right\|_{L_{q(x)}(0,\infty)}.$$

Soit $K_1 = \Big\| \frac{\omega_2(x)}{x}\Big(\int_0^x [t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{p-1} f^p(t)dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_{L_{q(x)}(0,\infty)}$, alors

$$K_1 = \Big\|\Big(\int_0^x f^{\underline{p}}(t)\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\underline{p}-1}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}\Big\|_{L_{q(x)}(0,\infty)}$$

$$= \Big\|\Big(\int_0^1 f^{\underline{p}}(t)\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\underline{p}-1}dt\Big)\Big\|^{\frac{1}{\underline{p}}}_{L_{\frac{q(x)}{\underline{p}}}(0,\infty)}.$$

Ensuite, en utilisant le lemme 3.3.1, on obtient

$$I_1 \le C_{p,q}\Big(\int_0^1 \Big\|[f^{\underline{p}}(t)]\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\underline{p}-1}\Big\|_{L_{\frac{q(x)}{\underline{p}}}(0,\infty)}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$

$$= C_{p,q}\Big(\int_0^1 f^{\underline{p}}(t)\Big\|\chi_{(0,x)}(t)\Big[\frac{[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\frac{1}{\underline{p}'}}\omega_2(x)}{x}\Big]^{\underline{p}}\Big\|_{L_{\frac{q(x)}{\underline{p}}}(0,\infty)}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$

$$= C_{p,q}\Big(\int_0^1 f^{\underline{p}}(t)\Big\|\frac{[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\frac{1}{\underline{p}'}}\omega_2(x)}{x}\Big\|^{\underline{p}}_{L_{q(x)}(t,\infty)}dt\Big)^{\frac{1}{\underline{p}}}$$

$$= C_{p,q}\Big\|f(t)\Big\|\frac{[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\frac{1}{\underline{p}'}}\omega_2(x)}{x}\Big\|_{L_{q(x)}(t,1)}\Big\|_{L_{\underline{p}}(0,\infty)}.$$

Soit

$$K_2 = \Big\|f(t)[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\frac{1}{\underline{p}'}}\Big\|\frac{\omega_2(x)}{x}\Big\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}\Big\|_{L_{\underline{p}}(0,\infty)},$$

puis en appliquant le corollaire 3.3.1, on obtient

$$K_2 \le d_p\Big\|\frac{[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\frac{1}{\underline{p}'}}\|\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}}{\omega_1(x)}\Big\|_{L_{r(x)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)},$$

par conséquent

$$\|H_1 f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)}$$

$$\le \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}(\beta+1)^{-\frac{1}{\underline{p}'}}C_{p,q}d_p\Big\|\frac{\|[t^{-\beta}(x^{\beta+1} - t^{\beta+1})]^{\frac{1}{\underline{p}'}}\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}}{\omega_1(x)}\Big\|_{L_{r(x)}(0,\infty)}\|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)}.$$

Remarque 3.3.2 Si dans l'inégalité (3.61) on pose $\beta = 0$, on obtient l'inégalité (3.51) du théorème 3.3.2.

Remarque 3.3.3 Pour une constante $p(x) = q(x) = p$ et $\omega_1(x) = \omega_2(x) = x^\alpha$, les inégalités (3.59), (3.60) et (3.61) avec des constantes optimales possible, ont été prouvées dans [9]. Les inégalités (3.59) et (3.61) pour $\beta = 0$, ont été prouvées précédemment dans [11] et [12].

Considérons maintenant le cas $\beta = -1$.

Théorème 3.3.6 *Soit p, q des fonctions mesurables de Lebesgue sur $(0,\infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \overline{q} < 1$, $r(x) = \frac{\underline{p}p(x)}{p(x)-\underline{p}}$ pour $x \in (0,\infty)$ et $\beta = -1$. Supposons que ω_1 et ω_2 soient des fonctions de poids défini sur $(0,\infty)$.*

1) Si $f \in Q_{-1}$, alors l'inégalité

$$\|H_2 f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{p}} C_{p,q} d_p \left\| \frac{t^{\frac{1}{p'}} (\ln\frac{t}{x})^{\frac{1}{p'}} \|\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(0,t)}}{\omega_1(x)} \right\|_{L_{r(x)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)} \tag{3.62}$$

est vérifiée.

2) Si $f \in Q^{-1}$, alors l'inégalité

$$\|H_1 f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{p}} C_{p,q} d_p \left\| \frac{t^{\frac{1}{p'}} (\ln\frac{x}{t})^{\frac{1}{p'}} \|\frac{\omega_2(x)}{x}\|_{L_{q(x)}(t,\infty)}}{\omega_1(x)} \right\|_{L_{r(x)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)} \tag{3.63}$$

est vérifiée.

Preuve-1) Soit $a = x$ et $b = +\infty$ dans (3.53), alors

$$\left(\int_x^\infty f(t)dt\right) \leq p^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^\infty (t\ \ln\frac{t}{x})^{p-1} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous appliquons cette inégalité avec $p = \underline{p}$ et le reste est similaire à la preuve du théorème 3.3.3.

2) Soit $a = 0$ et $b = x$ dans (3.55). Le reste est similaire à la preuve du théorème 3.3.3.

Conclusion

R.A. Bandaliev [5] a obtenu des inégalités intégrales du type de Hardy pour les fonctions monotones dans les espaces de Lebesgue généralisés pour $0 < p(x) < 1$.

Dans le présent travail, les résultats de R.A. Bandaliev [5] ont été étendus aux fonctions quasi-monotones qui sont des notions plus générales que la monotonie.

Comme perspectives, premièrement on peut envisager de généraliser les differents résultats à n fonctions, en cherchant les meilleures constantes (optimales ou les plus petites possibles) dans les différentes inégalités intégrales. Deuxièment on se pose la question sur l'extension de certains résultats obtenus aux espaces de Musielak-Orlicz.

Bibliographie

[1] Adams.R.A., Sobolev spaces, Academic Press, Inc., Boston, 1978.

[2] N. Azzouz, V. I. Burenkov, A. Senouci, A weighted Hardy-type inequality for $0 < p < 1$ with sharp constant. M.I.A. Volume 18, number 2 (2015). 787-799.

[3] N. Azzouz, B. Halim, A. Senouci, An inequality for the weighted Hardy operator for $0 < p < 1$. Eurasian Mathematical journal., ISSN 2077-9879. Volume 4, Number 3(2013), 60-65.

[4] R.A. Bandaliev, On an inequality in Lebesgue space with mixed norm and with variable summability exponent, Mat. Zametki, 3(84) (2008), 323-333. (in Russian). English translation : Math. Notes, 3(84) (2008), 303-313.

[5] R.A. Bandaliev, On Hardy-type inequalitys in weighted variable exponent spaces $L_{p(x),w}$ for $0 < p < 1$. Eurasian Mathematical journal., ISSN 2077-9879. Volume 4, Number 4(2013), 5-16.

[6] S. A. Bendaoud, A. Senouci, Inequalities for weighted Hardy operators in weighted variable exponent Lebesgue space with $0 < p(x) < 1$, Eurasian Mathematical journal, ISSN 2077-9879, Volume9, Number 1 (2018), 30-39.

[7] P. R. Beesack, Hardy's inequality and its extensions. Pacific J. Math., n 11 (1961) : 39-61.

[8] H. Brezis, Analyse fonctionnelle Théorie et applocation, MASSON, Paris 1983.

[9] J. Bergh, V. Burenkov, L.-E. Persson, *Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasi-monotone functions.* Acta Sci. Math. (Szeged) 59 (1994), 223-241.

[10] V. I. Burenkov, Main inequalities in L_p , Moscow-university 1989.

[11] V.I. Burenkov, *Function spaces. Main integral inequalities connected with the Lebesgue spaces.* Publishing house of the Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 1989. 96 pp. (in Russian).

[12] V. I. Burenkov, On the exact constant in the Hardy inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions, Trudy Matem. Inst. Steklov 194(1992), 58-62 (in Russian) ; English translation in proc. Steklov Inst. Math. 1993, no4. (194), 59-63.

[13] D. Cruz-Uribe, SFO and F. I. Mamedov. On a general weighted Hardy type inequality in the variable exponent Lebesgue space. Revista Mat. Comp. DOI : 10.1007/s13163-011-0076-5.

[14] D.V.Cruz-Uribe and A.Fiorenza, Variable Lebesgue spaces, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Springer Basel (2013).

[15] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, SPIN Springer's internal project number, December 2, 2010.

[16] L. Diening and S. Samko, Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces. Fract. Calc. and Appl. Anal., 10(1) (2007), 1-17.

[17] M.L. Goldman, Hardy type inequalities on the cone of quasi-monotone functions, Research Report No : 98/31. Khabarovsk : Computer Center Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciencese, 1998, 1-69.

[18] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1952.

[19] G. H. Hardy, Note on a theorem of Hilbert, Math. Z., 6 (1920), 314-317.

[20] A. Kolmongorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition MIR, Moscou, 2^{eme} edition, 1973.

[21] O. Kovacik, J. Rakosnik, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 41(1991), No. 4, 592-618.

[22] A. Kufner, L. Maligranda, et L.E. Persson. The prehistory of the Hardy inequality. Amer. Math. Monthly 113 (2006) : 715-732.

[23] A. Kufner, et H. Triebel. Generalisation of Hardy's inequality. Confer. Sem. Mat. Univ. Bari , $n°$ 156 (1978) : 1-21.

[24] N. Levinson., Generalizations of inequality of Hardy, Duke Maths. J., 31 (1964), 389-394.

[25] E. Lieb, M. Loss, Analysis. American Mathematical Society. volume 14. 2000, Primary 28-01, 42-01, 46-01, 49-01.

[26] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Springer, Berlin (1983).

[27] W. Orlicz, *Über konjugierte Exponentenfolgen*. Stud. Math. 3 (1931), 200-212.

[28] A. Ouardani, Les inégalité de Hardy et leurs variants. Magisteur. Univ-Tiaret 2008.

[29] V. R. Portnov, Two imbeddings for the spaces Lp, and their applications (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, $n°$ 155 (1964) : 761-764.

[30] M. Rúžička, *Electrorheological fluids : modeling and mathematical theory*. Lecture Notes in Mathematics, 1748, Springer, Berlin (2000).

[31] S.G. Samko, *Differentiation and integration of variable order and the variable exponent Lebesgue spaces*. Proc. Inter. Conf. "Operator theory for complex and hypercomplex analysis", Mexico, 1994, Contemp. Math. 212 (1998), 203-219.

[32] S. G. Samko, Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces. Fract. Calc. and Appl. Anal. 2003, vol. 6, no 4, 355-362.

[33] S. G. Samko, Hardy-Littlewood-Stein-Weiss inequality in the Lebesgue space with variable exponent, An international journal theory and applications, Volume 6, Number 4 (2003).

[34] A. Senouci, T. Tararykova, Hardy-type inequality for $0 < p < 1$. Evraziiskii Matematicheskii Zhurnal, 2 (2007), 112-116.

[35] **A. Senouci, A. Zanou, Some integral inequalities for quasi-monotone functions in weighted variable exponent Lebesgue spaces with $0 < p(x) < 1$, Eurasian Mathematical journal, ISSN 2077-9879 Volume 11, Number 4 (2020), 58 – 65.**

[36] W. T. Sulaiman, *SomeHardy type inequalities*, Applied Mathematics Letters, 25 (2012), 520-525.

[37] F. A. Sysoeva, Generalistions of a certain Hardy inequality. Izv. Vyss. Uceb. Zaved. Mathematika 6, no 49 (1965) : 140-143.

[38] G. Talenti, Asseroazioni sopra una classe di disuguaghanza. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, no 39 (1969) : 171-185.

[39] G. N. Tomaselli, A class of inequalities. Ball. Un. Mat. Ital., no 2 (1969) : 622-631.

[40] V. V. Zhikov, Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, Math. USSR, Izv. 29,33-66(1987).

[41] Zhikov V.V., *On some variational problems*. Russian J. Math. Phys. 5 (1), 105-116, 1997.

[42] **A.zanou, A.Senouci, Some generalizations of integral inequalities for weighted Hardy operators with $0 < p < 1$, Models optimisation and mathematical analysis (submitted).**

[43] **A.zanou, A.Senouci, The weighted Hardy operators and quasi-monotone functions, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics (submitted).**

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse aux espaces classiques de Lebesgue et aux espaces pondérés de Lebesgue avec un paramètre d'intégration variable, $0 < p(x) < 1$. Plusieurs inégalités intégrales sont établies et prouvées. De plus quelques résultats sont généralisés.

Mots clés : Inégalités, opérateurs de Hardy, exposant variable

Abstract

In this thesis we consider the classical Lebesgue spaces and the weighted variable exponent Lebesgue spaces with $0 < p(x) < 1$. Some integral inequalities were established for $0 < p(x) < 1$. Moreover certain generalizations were obtained.

Key words : Inequalities, Hardy operators, variable exponent.

ملخّص

في هذَه الأَطروحة، قمنَا بتعميم بعض المتبَاينَات التكَاملية لموءثرَات من النوع هَاردي بَالنسبة لصنف التوَابع الشبه رتيبة، و كذَا صنف التوَابع التي تحقّق خَاصية أضعف من الرتَابة في فضَاءَات لوبيغ الكلَاسيكية و فضَاءَات لوبيغ المعمّمة ذَات أس تكَاملي متغير حيث $0 < p(x) < 1$.

كلمَات مفتَاحية : متبَاينَات، موءثرَات هَاردي، أس متغير.