

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DJILALI LIABÈS
SIDI BEL ABBÈS

LABORATOIRE DES MATÉRIAUX & HYDROLOGIE



FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mr. Mohammed Cherif RAHMANI

Intitulée

**ÉTUDE DE L'INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LE
COMPORTEMENT MECANIQUE DES PLAQUES FGM**

Soutenue le : / / devant le jury composé de :

BOURADA MOHAMED	Pr	Président	Université Djilali Liabès SBA
KACI ABDELHAKIM	Pr	Directeur de thèse	Université de Saida
TOUNSI ABDELOUAHED	Pr	Co-directeur de thèse	Université Djilali Liabès SBA
BENYOUCEF SAMIR	Pr	Examineur	Université Djilali Liabès SBA
YEGHNEM REDHA	Pr	Examineur	Université de Saida
BACHIR BOUIADJRA RABAB	MCA	Examinatrice	Université de Mascara
HOUARI MOHAMMED SID AHMED	Pr	Invité	Université de Mascara

2021-2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicaces

À la mémoire de mes très chers parents ;

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire Matériaux et Hydraulique LM&H de la faculté de technologie de l'université Djilali Lyabes de Sidi Belabbes. Je remercie le Professeur BOURADA Mohamed de m'avoir accueilli dans ce laboratoire et de l'intérêt qu'il a accordé à cette thèse.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, le professeur KACI Abdelkrim, de s'être engagé dans ce travail. Les échanges que nous avons eus ainsi que la rigueur scientifique dont il a fait preuve m'ont grandement servi dans ce travail.

Mes remerciements vont aussi à mon co-directeur de thèse, le professeur TOUNSI Abdelouahed pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de co-encadrer ce travail doctoral.

Je remercie ensuite l'ensemble des membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail : MM. BENYOUCEF S. et YEGHNEM R., et Mme BACHIR BOUIADJRA R. d'avoir accepté d'examiner cette thèse ; M. HOAURI MOHAMED S. pour avoir accepté l'invitation à participer au jury ; et enfin M. BOURADA Mohamed pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Aussi je n'oublie pas de remercier les membres du laboratoire LM&H, qui m'ont offert un environnement de travail sain et motivant, je citerai en particulier le directeur du laboratoire le Pr BOURADA Mohamed, ainsi que M^{elle} BENYOUCEF Houria (ingénieure du laboratoire LM&H), pour ces encouragements et sa bienveillance, Le Dr BOURADA Fouad pour ces conseils.

Enfin, j'adresse toute ma gratitude à ma sœur Nadia, pour son soutien moral et matériel, sans qui ce travail n'aurait, sans doute, jamais abouti.

ملخص

تم فحص تأثير الظروف الحدودية على الانحناء وسلوك الاهتزاز الحر لألواح الساندويتش المتدرجة وظيفياً والمرتكزة على أساس مرن ثنائي المعلمتين باستخدام نظرية القص الجديدة الأصلية عالية الترتيب. استخدمنا مبدأ هاملتون هنا لاشتقاق معادلات الحركة. يتم تقليل عدد المجاهيل والمعادلات الحاكمة للنظرية الحالية، مما يسهل الاستخدام. تتضمن هذه النظرية متغيرات التكامل غير محددة وتحتوي فقط على أربعة مجاهيل حيث لا يتم استخدام أي عامل تصحيح للقص، أي أقل مما نجد في النظرية التقليدية لإجهاد القص الأول (FSDT). على عكس أي نظرية أخرى، فإن عدد الوظائف غير المعروفة التي ينطوي عليها مجال الإزاحة هو أربعة فقط، مقابل خمسة أو ستة أو أكثر في حالة نظريات تشوه القص الأخرى. يتم استخدام نهج Galerkin لألواح FGM بستة ظروف حدودية مختلفة. يتم التحقق من دقة الحل المقترح من خلال مقارنته بالحلول الأخرى المتوفرة في الأدبيات.

الكلمات الرئيسية: أطباق شطيرة. مواد متدرجة وظيفياً، نظرية جديدة للتشوه القصي بأربعة مجاهيل، وظروف حدية مختلفة.

Abstract

The influence of boundary conditions on the bending and free vibration behavior of functionally graded sandwich plates resting on a two-parameter elastic foundation is examined using an original novel high order shear theory. We used the Hamilton's principle herein to derive the equations of motion. The number of unknowns and governing equations of the present theory is reduced, and hence makes it simple to use. This theory includes indeterminate integral variables and contains only four unknowns in which any shear correction factor not used, with even less than the conventional theory of first shear strain (FSDT). Unlike any other theory, the number of unknown functions involved in displacement field is only four, as against five, six or more in the case of other shear deformation theories. Galerkin's approach is utilized for FGM sandwich plates with six different boundary conditions. The accuracy of the proposed solution is checked by comparing it with other closed form solutions available in the literature.

Keywords: sandwich plates; functionally graded materials FGM; new four-unknown refined shear deformation theory and various boundary conditions.

Résumé

À l'aide d'une nouvelle théorie originale de cisaillement d'ordre élevé, il est proposé d'examiner l'influence des conditions aux limites sur le comportement mécanique et vibratoire des plaques sandwich à gradient de propriété, reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes de la présente théorie est réduit, ce qui la rend plus simple à utiliser. Cette théorie inclut des variables d'intégration indéterminées et ne contient que quatre inconnues dans lesquelles aucun facteur de correction du cisaillement n'est utilisé, c'est-à-dire moins que la théorie conventionnelle de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT). L'approche de Galerkin est utilisée pour les plaques sandwich FGM avec différentes conditions aux limites. L'exactitude de la solution proposée est vérifiée en la comparant avec d'autres solutions de forme proche disponibles dans la littérature.

Mots clés : plaques sandwich ; matériaux FGM ; nouvelle théorie raffinée de déformation en cisaillement à quatre inconnues et diverses conditions aux limites.

Liste des tableaux

TABLEAU I-1 : COMPARAISON ENTRE LES PROPRIETES DE LA CERAMIQUE ET DU METAL (KACI & TOUNSI, 2012)	13
TABLEAU II-1 : EXEMPLE D'EFFICACITE STRUCTURELLE DES PANNEAUX SANDWICH EN TERMES DE POIDS. (PETRAS, 1999).....	35
TABLEAU II-2 : PROPRIETES MECANQUES TYPIQUES DE CERTAINS MATERIAUX DE PEAUX COURAMMENT UTILISES, ADAPTE DE (BADER, 2017; OLSSON, 1987).....	37
TABLEAU II-3: COMPILATION DE QUELQUES MODELES MULTI-PARAMETRE. ADAPTE DE (J. HORVATH, 2002).....	47
TABLEAU IV-1 : VALEUR DE A', B', k1, k2 POUR DIFFERENTES CONDITIONS AUX LIMITES.	65
TABLEAU IV-2: LES FONCTIONS ADMISSIBLES Xm et $Yn(y)$	74
TABLEAU V-1 : PROPRIETES MATERIELLES UTILISEES DANS LA PLAQUE SANDWICH FG ...	76
TABLEAU V-2 : FLEXION MAXIMALE w * DES PLAQUES CARREES ET RECTANGULAIRES HOMOGENES, SIMPLEMENT APPUYEES SOUS DES CHARGES UNIFORMES....	77
TABLEAU V-3 : DEFORMATIONS ADIMENSIONNELLES $10w$ * DE PLAQUES HOMOGENES REPOSANT SUR DES FONDATIONS ELASTIQUES ET SOUMISES A DES CHARGEMENTS UNIFORMEMENT REPARTIS.	78
TABLEAU V-4 : DEFORMATION ADIMENSIONNELLE(w), CONTRAINTE NORMALE ET DE CISAILLEMENT DE PLAQUES SANDWICH FG SOUMISES A UN CHARGEMENT SINUSOÏDALE.	78
TABLEAU V-5 : DEFORMATION ADIMENSIONNELLE w DE PLAQUES SANDWICH FG CARREES A/H=10.....	81
TABLEAU V-6: COMPARAISON DE LA VIBRATION LIBRE ($\omega b^2 \pi^2 \rho h D$) D'UNE PLAQUE CARREE HOMOGENE ENCREE (A/B=1, P=0) REPOSANT SUR DES FONDATIONS ELASTIQUES DE PASTERNAK ($K_s = 10$).....	88
TABLEAU V-7: COMPARAISON DE LA VIBRATION LIBRE ($\omega b^2 \pi^2 \rho h D$) D'UNE PLAQUE CARREE HOMOGENE (A/B=1, P=0) REPOSANT SUR DES FONDATIONS ELASTIQUES DE WINKLER (M=N=1, H/B=0.015, N=0.15, $K_s=0$).....	88

TABLEAU V-8: EFFETS DES RIGIDITES ELASTIQUES DE LA FONDATION K_W AND K_S ET DU RAPPORT COTE/EPAISSEUR A/H SUR LA VIBRATION LIBRE $\bar{\omega}$ DE DIVERS TYPES DE PLAQUES SANDWICH FG CARREES SIMPLEMENT APPUYEES. 89

TABLEAU V-9: FREQUENCE FONDAMENTALE SANS DIMENSION DES PLAQUES CARREES SANDWICH ($A/H=10$) AVEC DIFFERENTES CONDITIONS AUX LIMITES. 90

Liste des figures

FIGURE 1 : EVOLUTION DES MATERIAUX DANS LE TEMPS (SESHADRI, 2014)	2
FIGURE I-1: MATERIAU COMPOSITE (BERTHELOT, 2012), 5EME ED.	9
FIGURE I-2 : CLASSIFICATION DES TYPES DE RENFORTS (GOMET, 2008).....	10
FIGURE I-3 : COMPOSITE MONOCOUCHE. (DEBBACHE, 2012).....	10
FIGURE I-4: STRATIFIE CONSTITUE DE COUCHES PARFAITEMENT LIEES. (GOMET, 2008) ..	11
FIGURE I-5 : PRINCIPE DE LA STRUCTURE SANDWICH (RAMAKRISHNAN, 2014)	11
FIGURE I-6 : TYPES DE FGMs (A) GRADIENT DE MATERIAU (B) GRADIENT DE POROSITE (C) GRADIENT MICROSTRUCTURE DU AL-SiC-GRAPHITE. (RAJAN & PAI, 2014)	13
FIGURE I-7: APERÇU HISTORIQUE DES PRINCIPAUX JALONS DE LA RECHERCHE SUR LES FGM. ADAPTE DE (SALEH, JIANG, MA, ET AL., 2020).	14
FIGURE I-8 : ORGANIGRAMME DE TECHNIQUE DE LA METALLURGIE DES POUDRES POUR LA PRODUCTION DES FGM. (SAIYATHIBRAHIM ET AL., 2015).....	15
FIGURE I-9: ILLUSTRATION SCHEMATIQUE MONTRANT LE PROCESSUS DE LA METHODE CENTRIFUGE. ADAPTE DE (WATANABE ET AL., 2009)	16
FIGURE I-10: ILLUSTRATION SCHEMATIQUE DU PROCEDE DE COULAGE EN BANDES (ENCYCLOPEADIA BRITANNICA ONLINE, 1997).....	17
FIGURE I-11: (A) DIAGRAMME SCHEMATIQUE DU PROCESSUS EPD, ET (B) CONCEPT DU PROCESSUS EPD POUR LA PRODUCTION DE FGM. ADAPTE DE (PUT ET AL., 2003)	18
FIGURE I-12: DIAGRAMME SCHEMATIQUE DU PROCEDE DE PULVERISATION THERMIQUE. ADAPTE DE (METCO, 2013)	19
FIGURE I-13: DIAGRAMME SCHEMATIQUE DU PROCESSUS PVD. ADAPTE DE (THIN-FILM TECHNONOLOGIES, S. D.).....	20
FIGURE I-14: APPLICATIONS DES FGM DANS LES INDUSTRIES, ADAPTE DE (GAYEN ET AL., 2019)	21
FIGURE I-15: STRUCTURE D'UN ELEMENT EN BETON A GRADIENT DE PROPRIETES, SOURCE : (PROGRAMME DE RECHERCHE ILEK : LE BETON DEGRADE, 2021). 23	

FIGURE I-16: DISTRIBUTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE D'UNE DALLE FGM LE LONG DE L'ÉPAISSEUR.(BOGGARAPU ET AL., 2021).....	25
FIGURE I-17: VARIATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DANS UNE PLAQUE P-FGM.	26
FIGURE I-18: VARIATION DU MODULE DE YOUNG SELON LA LOI E-FGM.....	26
FIGURE I-19 : VARIATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DANS UNE PLAQUE S-FGM	27
FIGURE II-1: SCHEMA D'UN SANDWICH. (MUKUNDAN, 2005).....	35
FIGURE II-2: PRINCIPALES FORMES D'AMES DE SANDWICH (ZENKERT, 1995).....	37
FIGURE II-3: CONFIGURATION DE LA PLAQUE SANDWICH FGM. (DAIKH, 2018)	38
FIGURE II-4: COMPOSITION DES PLAQUES SANDWICH FGM (SAOULA & BOUDERBA, 2019)	39
FIGURE II-5: VARIATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DANS UNE PLAQUE SANDWICH P-FGM.(SOBHY & ZENKOUR, 2015).....	40
FIGURE II-6: VARIATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DU MATERIAU CERAMIQUE A TRAVERS L'ÉPAISSEUR D'UNE PLAQUE SANDWICH ISOTROPE (A) FGM ET (1-2-1), (B) TYPE-B, (C) TYPE-A (AME DURE), AND (D) TYPE-A (AME MOLLE) POUR DIFFERENTES VALEURS DE (P). (GARG ET AL. 2021)	42
FIGURE II-7: EXEMPLE DE PLAQUE REPOSANT SUR FONDATION DE TYPE WINKLER. STRAUGHAN CITE PAR (SEGHINI, 2020)	43
FIGURE II-8: LA REPOSE CONTRAINTE-DEFORMATION DU SOL. (TERZAGHI & PECK, 1948).....	44
FIGURE II-9: SCHEMA DU MODEL DE WINKLER (CASELUNGHE & ERIKSSON, 2012).....	45
FIGURE II-10: A GAUCHE, DEPLACEMENT VERTICAL MODELISE SELON WINKLER. A DROITE, DEPLACEMENT VERTICAL SOUVENT OBSERVE DANS LA REALITE. ADAPTE DE (KERR, 1964)	46
FIGURE II-11: MODELE DE FONDATION DE FILONENKO-BRODICH (KERR, 1965).....	48
FIGURE II-12: MODELE DE FONDATION DE HETENYI (HETENYI, 1950).....	48
FIGURE II-13 : MODELE DE PASTERNAK (1954) : (A) MODELE DE BASE, (B) ETAT DE CONTRAINTE D'UN ELEMENT INFINITESIMAL DE LA COUCHE DE CISAILEMENT. ADAPTE DE (MADHAV ET AL., 2015).....	49
FIGURE III-1: DEPLACEMENT DU PLAN MOYEN AVEC MISE EN EVIDENCE DE LA ROTATION D'UNE FIBRE NORMALE. (CONTRIBUTEURS DE WIKIPEDIA, 2015A).....	53

FIGURE III-2: SCHEMATISATION DES DEFORMATIONS DES PLAQUES PAR LA THEORIE (FSDT). (J. N. REDDY, 1984)	55
FIGURE III-3: MODELE DES PLAQUES DANS LE CAS DE LA THEORIE DE DEFORMATION EN CISAILLEMENT	56
FIGURE IV-1: GEOMETRIE DE LA PLAQUE SANDWICH FG REPOSANT SUR DES FONDATIONS ELASTIQUES.	61
FIGURE V-1: EFFET DE L'HETEROGENEITE (P) SUR LA DEFORMATION (W) D'UNE PLAQUE SANDWICH FG (A/H=10)	83
FIGURE V-2: DEFORMATION CENTRALE ADIMENSIONNELLE (w) EN FONCTION DU RAPPORT COTE/EPAISSEUR A/H D'UNE PLAQUE SANDWICH FGM CARREE REPOSANT SUR UNE FONDATION ELASTIQUE (Kw=100, Ks=10).	84
FIGURE V-3: CONTRAINTE AXIALE σ_x A TRAVERS L'EPAISSEUR DES PLAQUES SANDWICH FGM CARREES SYMETRIQUES ET ASYMETRIQUES SIMPLEMENT APPUYEES (P=2) POUR DIFFERENTES VALEURS DU MODULE DE WINKLER Kw AVEC Ks =10 ET A/H = 10.	85
FIGURE V-4: CONTRAINTE DE CISAILLEMENT (τ_{xy}) A TRAVERS L'EPAISSEUR DES PLAQUES SANDWICH FGM CARREES SYMETRIQUES ET ASYMETRIQUES SIMPLEMENT APPUYEES (P=2) POUR DIFFERENTES VALEURS DU MODULE DE WINKLER Kw AVEC Ks =10 ET A/H = 10.	86
FIGURE V-5: DEFORMATION ADIMENSIONNELLE(w) EN FONCTION DU RAPPORT ENTRE LE COTE ET L'EPAISSEUR A/H DE LA PLAQUE SANDWICH FGM CARREE (1-2-1) REPOSANT SUR UNE FONDATION ELASTIQUE DE WINKLER AVEC DIFFERENTES CONDITIONS AUX LIMITES (P=0.5).....	86
FIGURE V-6 : DEFORMATION ADIMENSIONNELLE w EN FONCTION DU RAPPORT DE FORME B/A D'UNE PLAQUE SANDWICH EN APPUI SIMPLE ET ENCREE POUR DIFFERENTES VALEURS DE RIGIDITE DE LA FONDATION Kw ET Ks (A/H=10, P=0.5).	87
FIGURE V-7: EFFET DU PARAMETRE D'HETEROGENEITE (P) SUR LA FREQUENCE SANS DIMENSION (ω) DES PLAQUES SANDWICH FG CARREES (A/H=10).	91
FIGURE V-8: VIBRATION LIBRE(ω) EN FONCTION DU RAPPORT A/H, POUR DIFFERENTES VALEURS DU PARAMETRE D'HETEROGENEITE P ET DIFFERENTS TYPES DE PLAQUES SANDWICH FGM CARREES REPOSANT SUR DES FONDATIONS ELASTIQUES (Kw=Ks=10).....	92
FIGURE V-9: VIBRATION LIBRE ω EN FONCTION DU RAPPORT COTE/EPAISSEUR A/H DE LA PLAQUE CARREE SANDWICH (1-2-1) EGM REPOSANT SUR LA FONDATION	

ELASTIQUE DE WINKLER AVEC DIFFERENTES CONDITIONS AUX LIMITES
($P=0.5$)..... 93

FIGURE V-10: VIBRATION LIBRE ω EN FONCTION DU RAPPORT B/A D'UNE PLAQUE
SANDWICH SIMPLEMENT APPUYEE ET ENCREE POUR DIFFERENTES VALEURS
DE RIGIDITE DE LA FONDATION K_W ET K_S ($A/H=10$, $P=0.5$) 93

Liste des notations

\int	Intégrale
[]	Matrice
{ }	Vecteur
df	Dérivée de la fonction f
Σ	Somme
2D	Bi-dimensionnelle
FGM	Functionally Graded Materials
PM	Powder metallurgy
P.V.D	Powder Vapor Deposition
C.V.D	Chemical Vapor Deposition
CPT	Classical plate theory
FSDT	First order shear deformation theory
HSDT	High order shear deformation theory
EPD	Electrophoretic particule deposition
$f(z)$	La fonction de cisaillement
$g(z)$	Dérivée de la fonction de cisaillement
x, y, z	Les axes de coordonnées cartésiennes
a, b, h	Dimensions de la plaque
u, v, w	Composantes de déplacement
u_0, v_0 et w_0	Déplacement du plan moyen dans le plan (0, x, y,z)
w_b	Composante de déplacement de flexion
w_s	Composante de déplacement de cisaillement
ω	Vibration libre
q	Charge répartie
t	Temps
k^b	La courbure due à la flexion
k^s	La courbure due au cisaillement
Q_{ij}	Composantes de rigidité

U	Energie de déformation
V	Travail des efforts extérieurs
K	Energie cinétique
$E(z)$	Module de Young à travers l'épaisseur en fonction de (z)
E_0	Module de Young de la face homogène.
E_c	Module de Young de la céramique.
E_m	Module de Young du Métal.
V_f	Fraction volumique
V_c	Fraction volumique de la céramique.
$G(z)$	Module de Cisaillement à travers l'épaisseur en fonction de (z)
A	l'aire de la plaque.
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux dans la plaque
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion dans la plaque
S_{xz}, S_{xy}	Efforts tranchants dans la plaque
A_{ij}, B_{ij}	Les rigidités de la plaque
D_{ij} et H_{ij}	Les rigidités de la plaque
$I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2$	Les inerties massiques
m_{ij}	Coefficient de la matrice masse
σ	Contraintes normale
τ	Contrainte de cisaillement
ε	Déformation
γ	déformation de distorsion
ν	Coefficient de Poisson
ρ	Masse volumique
K et G	le module de compressibilité et de cisaillement locaux
$\phi_x(x, y)$ et $\phi_y(x, y)$	Les rotations autour des axes x, y .
$\Psi(z)$	fonction de cisaillement transverse
k_w	Rigidité de Winkler (fondation)
k_s	Rigidité en cisaillement (fondation)
f_e	Densité de la force de réaction de la fondation

Table des matières

Dédicace	I
Remerciements	II
ملخص.....	III
Abstract	IV
Résumé.....	V
Liste des tableaux	VI
Liste des figures	VIII
Liste des notations	XII
Table des matières	XIV
Introduction générale	1
Chapitre-I Généralités sur les FGM	7
I.1 Introduction.....	8
I.2 Les matériaux composites.....	8
I.2.1. Constituants des matériaux composites.....	8
I.2.2. Les matériaux composites structuraux	10
I.3 Définition des matériaux FGM :	12
I.4 Historique.....	13
I.5 Revue des méthodes d'élaboration des FGM	14
I.5.1. Métallurgie des poudres (Powder Metallurgy PM)	14
I.5.2. Coulage centrifuge :	15
I.5.3. Coulage Séquentiel en Barbotine (slip casting) :	16
I.5.4. Coulage en bande :	17
I.5.5. Méthodes d'électrodéposition	17
I.5.6. Projection thermique	18
I.5.7. C. V. D. et P. V. D (Chemical and physical vapour deposite)	19
I.5.8. Frittage et Infiltration.....	20
I.6 Domaines d'applications :	21
I.7 Application de la technologie du FGM en génie civil	22
I.7.1. Le Béton à gradient de propriétés :.....	23
I.7.2. Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil :	24
I.8 Les propriétés matérielles des plaques FGM	24
I.8.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM)	25
I.8.2. Loi de mélange exponentielle (E-FGM).....	26
I.8.3. Loi de mélange sigmoïde (S-FGM)	27
I.8.4. Modèle de Mori-Tanaka	28
I.9 Etat de l'art sur les plaques sandwich FGM	29
I.10 Conclusion	32

Chapitre-II Structures sandwich FGM et fondations élastiques	33
II.1 Introduction.....	34
II.2 Généralités sur les plaques sandwich.....	34
II.2.1. Les constituants des plaques sandwich.....	36
II.2.1.1. Les peaux	36
II.2.1.2. L'âme	37
II.2.1.3. L'interface.....	38
II.2.2. Propriétés matérielles des plaques sandwich en FGM	38
II.2.2.1. Plaque Sandwich en P-FGM :.....	39
II.3 Les fondations élastiques	43
II.3.1. Le module de réaction	44
II.3.2. Les Modèles d'interaction sol-structure	44
II.3.2.1. Modèle de Winkler	45
II.3.2.2. Les modèles à deux paramètres	46
II.4 Conclusion	50
 Chapitre-III Théories des plaques	51
III.1 Introduction.....	52
III.2 Théories des plaques :.....	52
III.2.1. Modèle classique de Love - Kirchhoff (CPT) :.....	52
III.2.2. Modèle de déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin-Reissner (FSDT) :.....	54
III.2.3. Modèle de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :.....	55
a. Modèle de Reddy (1997,1999)	56
b. Touratier (Touratier 1991)	57
c. Karama.....	57
d. Soldatos.....	57
III.2.4. La théorie raffinée de déformation des plaques :	57
III.3 Conclusion :	59
 Chapitre-IV Etude analytique de l'influence des conditions aux limites sur la flexion et la vibration libre des plaques sandwich FGM	60
IV.1 Introduction.....	61
IV.2 Propriétés matérielle de la plaque sandwich FG.....	61
IV.3 Equations constitutives	62
IV.4 Équations gouvernantes	65
IV.5 Équations du mouvement en termes de déplacements.....	69
IV.6 Solutions exactes pour les plaques sandwich FGM.....	70
IV.7 Conclusion	74
 Chapitre-V Résultats numériques et discussions	75
V.1 Introduction.....	76
V.2 Propriétés matérielles.....	76
V.3 Analyse de la flexion	77
V.4 Analyse de la vibration libre	87
V.5 Conclusions.....	94
 CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE	97
BIBLIOGRAPHIE	99

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GENERALE :

Les matériaux utilisés dans la fabrication d'objets tant artisanaux qu'industriels, mais aussi de produits et systèmes nécessaires à la réalisation d'équipement et de constructions sont des indicateurs phares d'avancement technique.

La réalisation de nouveaux objectifs appelés par le développement est en grande partie tributaire de la mise au point de matériaux et de procédés de transformation et d'assemblage nouveaux, présentant un niveau de performance inédit et amélioré.

Les matériaux ont eu et ont toujours une grande importance dans la vie quotidienne de l'homme. À leurs époques, les premières civilisations humaines ont vu leurs destins intimement liés au développement des matériaux qui étaient largement utilisés, on parle alors de l'âge de pierre, du bronze et du fer. La figure 1 montre l'évolution des matériaux sur une période de temps commençant à 10000 avant notre ère. Il est clairement entendu que les matériaux ont eu une grande influence sur la vie humaine ; il est donc nécessaire de comprendre le comportement des matériaux et leurs méthodes de traitement pour diverses applications. (Sarithchandra et al., 2018)

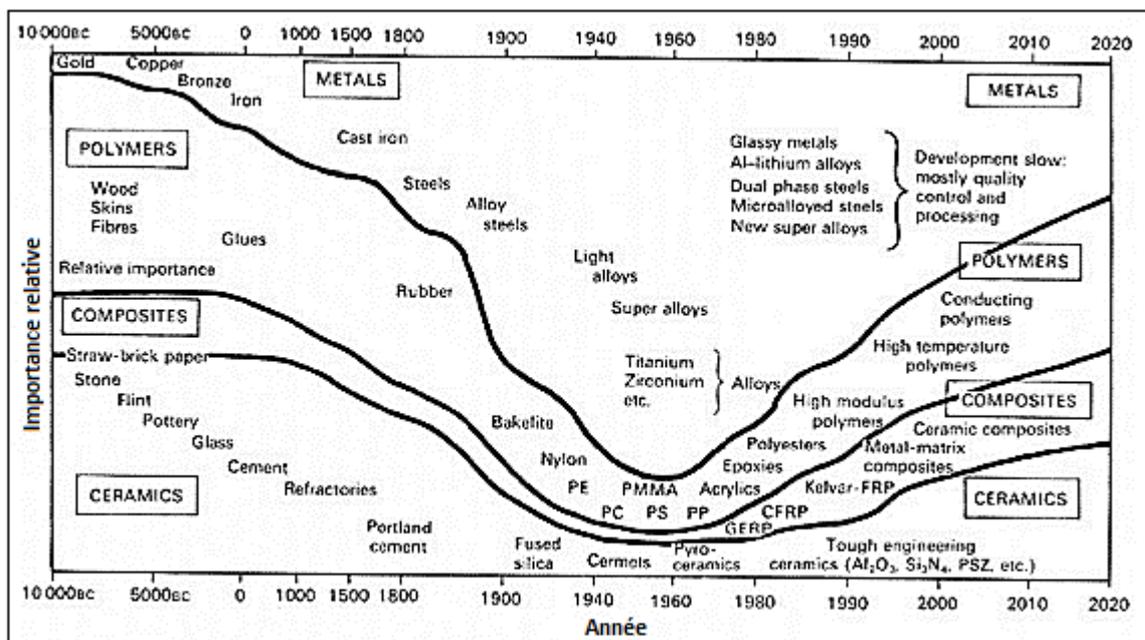


Figure 1 : Evolution des matériaux dans le temps. (Seshadri, 2014)

Les matériaux peuvent être subdivisé de plusieurs façons ; en fonction de leurs origines : naturels ou synthétiques développés par l'homme à l'aide de diverses méthodes pour

diverses applications. Les matériaux sont également classés en traditionnels, ils sont bien connus, les moins chers, ils bénéficient d'une connaissance largement répandue des conditions de leur mise en œuvre ; et en matériaux avancés qui proviennent d'extrapolations de matériaux traditionnels par l'optimisation de certaines propriétés. Il n'y a pas de rupture technologique majeure. De même, ces derniers ont leurs propres limites. En conséquence de quoi, pour relever les défis des nouvelles technologies, les spécialistes des matériaux et les chercheurs ont développé des matériaux nouveaux apportant des propriétés nouvelles, voire révolutionnaires, entraînant une rupture technologique tels que les matériaux composites, les matériaux intelligents, les alliages à haute entropie, etc. en utilisant divers procédés.

Le progrès des technologies modernes continue d'imposer des exigences plus strictes pour les matériaux d'ingénierie avec une demande de performances mécaniques améliorées ; en outre, il existe un besoin pressant de matériaux plus efficaces sur le plan énergétique et plus respectueux de l'environnement. Pour relever ce défi, on cherche continuellement de nouveaux matériaux présentant des combinaisons sans précédent de propriétés et de fonctionnalités, telles que la rigidité, la force, la ductilité, la ténacité, avec un poids et un coût minimaux. Malheureusement, bon nombre de ces propriétés dont les meilleurs exemples sont la résistance et la ductilité ont tendance à s'exclure mutuellement (Launey & Ritchie, 2009; Ritchie, 2011). Par conséquent, le développement de nouveaux matériaux structurels reste un invariable exercice de compromis.

Une solution rationnelle à ce problème consiste à adapter les propriétés locales des matériaux pour répondre à leurs exigences spécifiques, en plaçant des compositions et des architectures optimisées dans les régions appropriées, générant ainsi des avantages multiples au sein d'un seul matériau pour créer des propriétés globales améliorées (Liu et al., 2017). Par exemple, les performances mécaniques des matériaux structurels peuvent être intelligemment améliorées en concevant une résistance et une ductilité supérieures dans les régions subissant les niveaux les plus élevés de contrainte et de déformation, respectivement (Suresh, 2001; Suresh & Mortensen, 1997). Dans un tel scénario, il est possible de faire en sorte que les matériaux présentent des attributs spécifiques au site, par exemple la composition, l'architecture et les propriétés résultantes, grâce à l'inclusion de divers degrés d'hétérogénéités ou de **gradients**. Le terme "gradient" est employé ici dans son sens large pour décrire la nature non uniforme des matériaux, souvent près des surfaces ou des interfaces internes, par opposition à une stricte homogénéité ; il représente également des transitions graduelles plutôt que des changements brusques, entre des caractéristiques nano-

/micro-structurelles dissemblables. Il est reconnu depuis longtemps que l'introduction de gradients spatiaux peut améliorer efficacement les performances mécaniques et fonctionnelles des matériaux, par exemple en atténuant les concentrations de contraintes ou les singularités, en améliorant la liaison inter-faciale et en permettant de nouvelles fonctions (Becker Jr et al., 2001). En effet, la création de gradients, ou plus précisément le développement de matériaux dits à gradient de propriété (MGF), offre une voie prometteuse pour répondre aux demandes d'applications émergentes des matériaux.

En ce qui concerne ces gradients et ces hétérogénéités, la nature constitue une riche source d'inspiration pour la conception et la fabrication de matériaux et de composants synthétiques de haute performance (Meyers et al., 2013; Studart, 2013, 2015). Bien que l'idée de matériaux à gradient de propriété (FGM) soit relativement nouvelle dans le domaine de la conception technique (le concept a été proposé pour la première fois dans les années 1980 au Japon (Koizumi & Niino, 1995; Miyamoto, 1999), ce motif de conception est utilisé depuis longtemps dans les matériaux biologiques (Amini & Miserez, 2013; Dunlop et al., 2011; Meyers et al., 2013; Naleway et al., 2015; Studart, 2013). Dans le contexte de la conception des matériaux et des processus d'évolution, les gradients sont fondamentalement associés aux changements de deux sortes d'ingrédients, à savoir les compositions/constituants chimiques et les caractéristiques structurelles qui impliquent en outre l'agencement, la distribution, les dimensions et les orientations des unités structurelles. En outre, les interfaces jouent un rôle essentiel dans le maintien de l'intégrité structurelle et le soutien des fonctions spécifiques des matériaux biologiques (Barthelat et al., 2016; Dunlop et al., 2011).

Une fois la caractéristique de gradation identifiée comme porteuse de solution aux problèmes structuraux rencontrés sur les matériaux composites, il s'agissait maintenant de poser le cadre théorique permettant la modélisation et la prévision du comportement de ces nouveaux matériaux à gradient de propriété, basé sur une intégration précise des connaissances (Mercier et al., 2002). Ainsi, les chercheurs se sont penchés sur le cas des formes d'éléments les plus utilisés dans les différents domaines d'ingénierie, à savoir les poutres et plaques minces, et même épaisses. Des modèles théoriques de prédiction du comportement des plaques FGM vont être vérifiés tout au long de ces 30 dernières années, partant des modèles déjà existant pour les éléments homogènes constitués d'un élément unique et isotrope, et basés sur les théories des poutres et plaques déjà bien connues. Les plaques à gradient de propriété (FGM) les plus étudiées vont être les plaques constituées de métal et de céramique

qui allient entre la rigidité et l'usinabilité du métal, et la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique.

Nous citerons dans ce travail, la théorie classique des plaques minces « CPT », la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre « FSDT » et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé « HSDT ».

Dans notre démarche, il s'agit de vérifier une nouvelle théorie des plaques, basée sur le modèle de déformation en cisaillement des plaques d'ordre élevé HSDT, pour étudier la flexion et la vibration libre d'une plaque sandwich FG sous diverses conditions aux limites.

La théorie proposée dans ce travail vise aussi à réduire le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes en incluant des termes d'intégration dans le champ de déplacement proposé. Les solutions analytiques de la flexion et de la vibration pour quatre conditions aux limites différentes seront illustrées.

La présente thèse sera développée en 5 chapitres :

Le premier chapitre sera consacré à la présentation des matériaux à gradient de propriété, dans un premier temps nous aborderons les matériaux composites de façon générale, nous enchaînerons par la suite sur la genèse des FGM, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. Nous terminerons le chapitre par les applications des FGM dans le génie civil.

Dans le deuxième chapitre nous nous intéresserons aux types de matériau sujet de cette étude à savoir les plaques sandwich FGM, ainsi qu'aux principes théoriques et pratiques des fondations élastiques.

Dans le troisième chapitre nous ferons une présentation bibliographique des différentes théories de déformation des plaques, nous évoquerons leurs avantages et inconvénients. Nous verrons aussi dans ce chapitre les différentes adaptations de ces théories au matériau FGM, via les lois de mélange.

Dans le chapitre 4, on se propose d'étudier l'influence des conditions aux limites sur le comportement en flexion et en vibration libre des plaques sandwich à gradient de propriétés reposant sur une fondation élastique à deux paramètres, en utilisant une nouvelle théorie originale de cisaillement d'ordre élevé. Le nombre d'inconnues et d'équations de la présente théorie est réduit, ce qui la rend plus simple à utiliser. Cette théorie inclut des variables

intégrales indéterminées et ne contient que quatre inconnues. Aucun facteur de correction de cisaillement n'est utilisé ici.

Le chapitre 5 sera consacré à la présentation et discussion des résultats numériques des réponses en flexion et en vibration libre pour plusieurs configurations de plaques sandwich FGM, sous différentes conditions aux limites. Les discussions porteront sur la comparaison des résultats obtenus par la présente théorie avec ceux existants dans la littérature.

Chapitre I

GENERALITES SUR LES FGM

I.1 Introduction

Les matériaux composites et les matériaux avancés ont connu une évolution exponentielle durant la 2^{ème} moitié du XX^{ème} siècle. Avant cette période, les techniciens pouvaient compter uniquement sur les matériaux métalliques pour répondre à leurs besoins de résistance et de rigidité. Issus des industries pétrochimiques, de nouveaux produits ont permis des combinaisons jusque-là inédites aboutissant à des nouveaux matériaux appelés « composites », ces derniers sont caractérisés par des propriétés de résistance élevée mais aussi de souplesse et de légèreté.

La plupart des composites sont fabriqués à partir d'un matériau de masse (la matrice) dans lequel on y incorpore des fibres ou des fragments d'un autre matériau plus résistant (les renforts). Les ingénieurs disposent de nombreux choix au cours du processus de fabrication pour déterminer les compositions qui permettront d'obtenir les propriétés recherchées.

Les matériaux composites sont aujourd'hui indispensables dans beaucoup de domaines industriels tels que l'industrie automobile, l'aéronautique et l'aérospatiale, aussi dans les domaines de la construction et le transport routier.

I.2 Les matériaux composites

D'après (Berthelot, 1996) 2^{ème} éd., un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

Un matériau composite est un matériau constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Dans un matériau composite intègre, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues, ou de particules élémentaires solides. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques.

I.2.1 Constituants des matériaux composites

Les matériaux composites sont constitués principalement :

- D'une matrice à laquelle sont ajoutés, dans certains composites des charges ;
- D'un renfort.

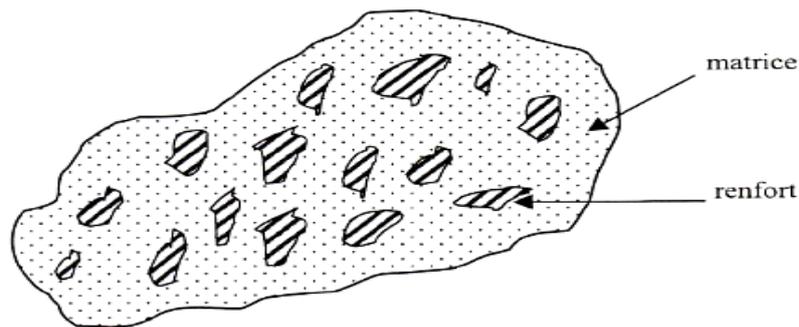


Figure I-1: Matériau composite (Berthelot, 2012), 5^{ème} éd.

a. La matrice

La matrice constitue la masse dans laquelle vont être incorporés les autres matériaux, il s'agit généralement d'une résine polymère. Il existe plusieurs types de résines chacune répondant à des domaines particuliers d'utilisation. Les matrices métalliques, céramiques ou carbone ont par exemple un bon rendement dans les applications nécessitant une bonne tenue aux hautes températures. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes (Gomet, 2008).

Les matrices peuvent être divisées en deux grandes familles, minérale et organique dans lesquelles on retrouve :

- Les matrices minérales
 - o Céramiques
 - o Métalliques
- Les matrices organiques
 - o Thermoplastiques
 - o Thermodurcissables

b. Les renforts

Fondamentalement, les renforts assurent l'essentielle de la résistance mécanique dans un matériau composite. Le renfort représente en quelque sorte le squelette ou l'armature du composite. Les renforts sont sélectionnés en fonction des caractéristiques recherchés, mais aussi en fonction de leurs prix de revient. Les renforts constitués de fibres se présentent sous différentes formes : Linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus). La

classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I-2 ci-dessous.

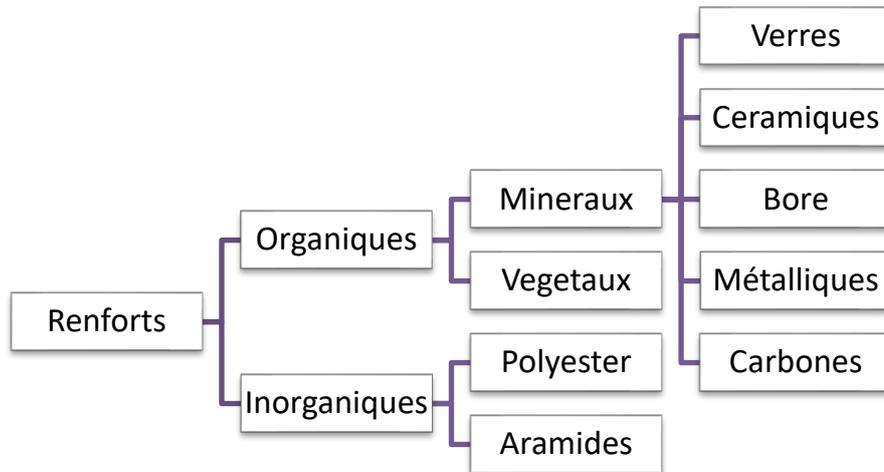


Figure I-2 : Classification des types de renforts (Gomet, 2008)

I.2.2. Les matériaux composites structuraux

Ils sont généralement classés en trois catégories : Les monocouches, les stratifiés et les sandwiches. La rigidité de ces matériaux est fonction du nombre de couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc.

a. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les monocouches sont différenciées par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles 1D, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes (Figure I.3).

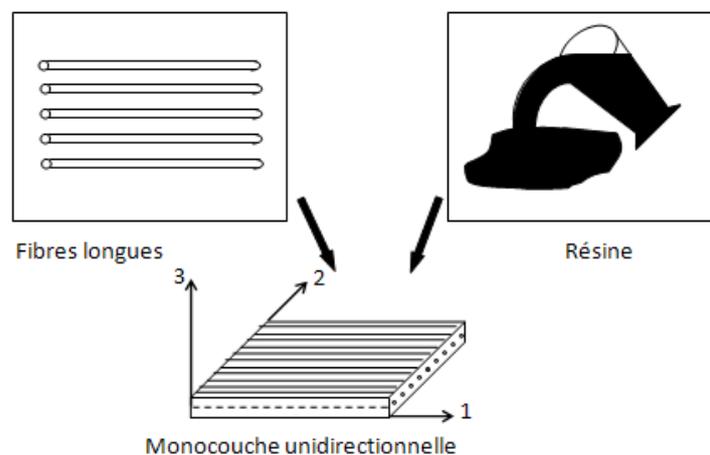


Figure I-3 : Composite monocouches. (Debbache, 2012)

b. Les stratifiées

Les structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale, ces couches sont nommées plis. Les pièces structurales sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

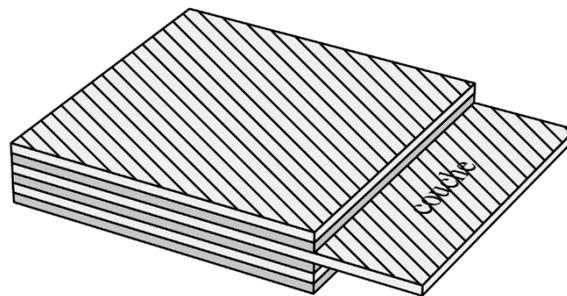


Figure I-4: Stratifié constitué de couches parfaitement liées. (Gomet, 2008)

c. Les sandwichs

Les structures sandwich sont des systèmes composites présentant un faible poids et des caractéristiques de résistance et de rigidité élevées. Les plaques ou poutres sandwich typiques sont constituées de deux couches de peau minces séparées par un noyau interne épais. L'utilisation de feuilles de revêtement minces et résistantes collées à des matériaux d'âme plus épais et légers a permis à l'industrie de réduire les coûts de production. Les contraintes de traction et de compression sont principalement supportées par les peaux, tandis que les contraintes de cisaillement transversal sont principalement subies par le noyau.

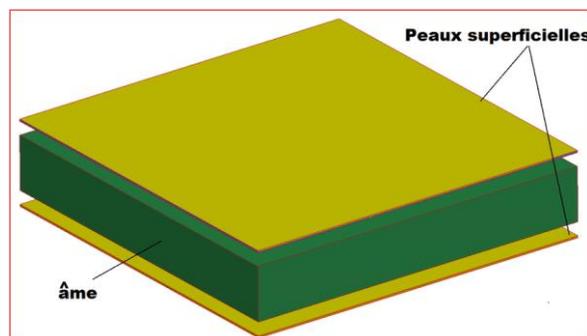


Figure I-5 : Principe de la structure sandwich (Ramakrishnan, 2014)

I.3 Définition des matériaux FGM :

Avec l'avènement de nouvelles techniques de fabrication, les sciences des matériaux ont marqué une transition des métaux conventionnels vers les matériaux composites avancés et les matériaux intelligents. Cependant, chacune de ces avancées a ses inconvénients en raison de leurs applications limitées.

Le matériau composite qui présente d'excellentes propriétés, souffre d'une faiblesse au niveau de l'interface renfort/matrice, en effet sous de haute contrainte mécaniques ou thermiques, les constituants du composites (matrice et renfort au sein d'une même couche, ou bien entre plis successifs au sein de structure sandwich par exemple) vont se désolidariser, ceci est due à la variation brusque des contraintes de déformation d'un constituant à l'autre dans la masse du matériau.

Pour surmonter cet inconvénient, des chercheurs japonais ont introduit dans les années 1980 une nouvelle classe de matériaux composites appelés matériau à gradient de propriété (en anglais functionally graded materials FGM). Ces matériaux sont également appelés matériaux d'ingénierie avancés en raison de leur capacité à résister dans des conditions environnementales difficiles sans altération significative des propriétés des matériaux constitutifs pendant leur service. Les FGM présentent un gradient de composition d'un matériau à l'autre, ce qui, dans les composites traditionnels, entraîne des propriétés compromettantes des matériaux constitutifs dans les mélanges homogènes. Le gradient de composition permet aux FGM de présenter une variation graduelle dans les propriétés des matériaux. (Boggarapu et al., 2021)

Le principal avantage structurel des FGM par rapport aux composites traditionnels est donc leur bonne tenue face au phénomène de laminage induit par la variation brutale de la réponse au sein de l'élément aux conditions de chargement, grâce à l'inclusion du matériau secondaire dans le matériau existant de façon progressive, produisant une transition douce entre deux matériaux distincts.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I-1 ci-dessous (Kaci & Tounsi, 2012) :

Tableau I-1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Kaci & Tounsi, 2012)

La face à haute température	Céramique	Bonne résistance thermique ; Bonne résistance à l'oxydation ; Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « Couches intermédiaires »	Céramique-métal	Élimination des problèmes de l'interface ; Relaxation les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	Bonne résistance mécanique ; Conductivité thermique élevée, Très bonne ténacité.

Dans certains cas, le matériau FGM est constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch et al., 1986). Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels.

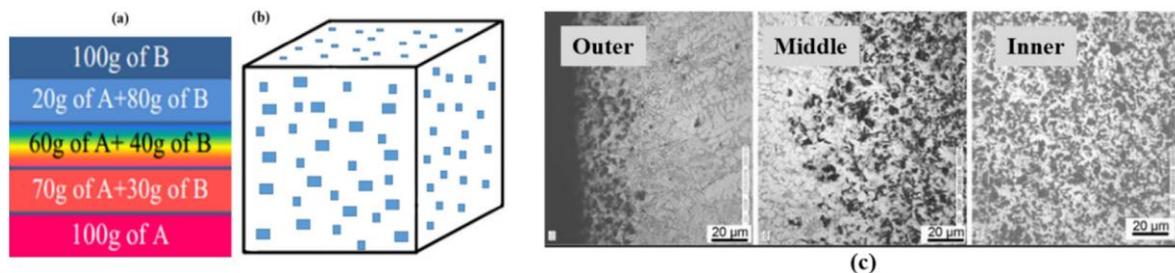


Figure I-6 : Types de FGMs (a) Gradient de matériau (b) Gradient de porosité (c) Gradient microstructure du Al-SiC-Graphite. (Rajan & Pai, 2014)

I.4 Historique

Les premières recherches sur les FGM ont eu lieu au Japon dans les 1980, à cette époque plusieurs programmes ont été conduits afin de développer l'architecture et les techniques de fabrication des FGM, et d'étudier également ces matériaux répondants aux exigences thermiques imposées par les nouvelles applications dans le domaine aérospatiale.

A partir des années 90, la recherche scientifique s'est accélérée et les FGM ont connu une évolution rapide. Le champ d'application des FGM s'est élargi vers d'autres domaines d'industrie notamment le domaine énergétique et biomédical.

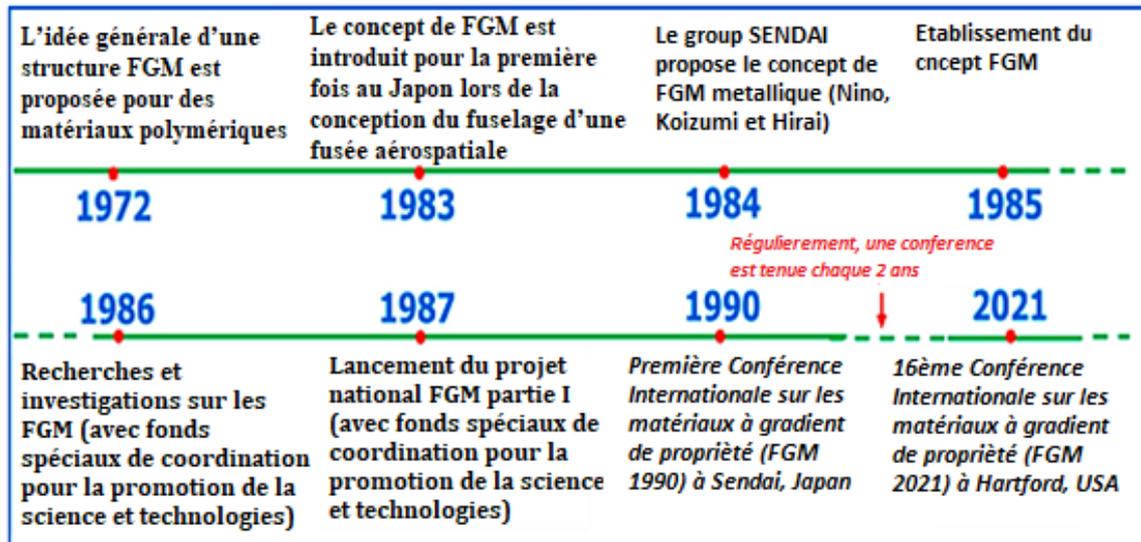


Figure I-7: Aperçu historique des principaux jalons de la recherche sur les FGM. Adapté de (Saleh, Jiang, Ma, et al., 2020).

I.5 Revue des méthodes d'élaboration des FGM

En générale, les constituants de base d'un FGM sont : les céramiques et les métaux. L'élaboration d'un matériau dense et gradué à partir de ces deux matériaux dépend des techniques et les méthodes de fabrication.

La fabrication des FGM implique un traitement en deux phases appelées gradation et consolidation. La gradation quant à elle implique la construction d'une structure spatiale inhomogène en trois étapes, à savoir la constitution de la structure à partir de matériaux de base ou de poudres, suivie d'une homogénéisation dans laquelle les interfaces nettes seront réduites par le transport de la matière et finalement la ségrégation, qui convertit le matériau homogène en une structure graduée. La structure ainsi obtenue est par la suite transformée en une masse solide par un processus appelé consolidation. Des gradients continus sont produits dans les processus d'homogénéisation et de ségrégation (Bhaskar & Varadan, 2001). Plusieurs techniques ont été élaborées pour la fabrication des FGM en fonction de la nature et des propriétés des composants utilisés, mais aussi en fonction des propriétés recherchées, dans ce qui suit nous passerons en revue les principales d'entre-elles.

I.5.1 Métallurgie des poudres (Powder Metallurgy PM)

Dans cette technique, les matériaux de base sont utilisés sous de forme de poudre déposée par couche successive dans un moule en acier.

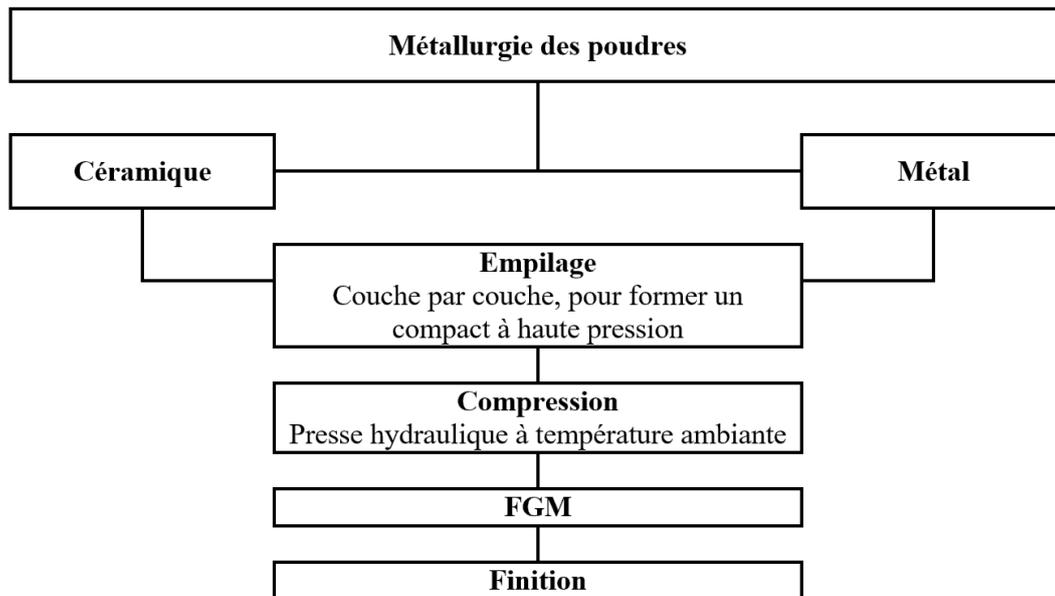


Figure I-8 : Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM. (Saiyathibrahim et al., 2015)

Le procédé de métallurgie des poudres a la capacité de produire des produits de forme presque nette avec la composition et la microstructure requises. Il propose des produits à faible coût avec une faible consommation d'énergie. Les FGM sont préparés dans des techniques de frittage de poudre en empilant différents types de mélanges de poudre dans différentes couches des composants (Übeyli et al., 2014).

L'épaisseur de la région graduée est comprise entre 0,2mm et 1mm. Elle se fait en trois étapes de base : pesée et mélange, empilement et compactage des poudres pré-mélangées, et enfin frittage. Les mélangeurs de poudre sont préparés selon les exigences fonctionnelles des composants. Les méthodes de préparation de la poudre, la taille des particules de poudre, la composition chimique, etc. influenceraient les propriétés du produit final. L'inconvénient du procédé est qu'il produit des composants à porosité plus élevée par rapport à d'autres procédés de fabrication. (Bishop et al., 1993)

I.5.2. Coulage centrifuge :

Dans cette méthode, la force centrifuge est le principal moteur pour la fabrication de FGM en volume, on obtient une gradation continue avec des caractéristiques spécifiques à de nombreuses applications industrielles (Watanabe et al., 2001). En raison de la force centrifuge créée par la rotation du moule, la distribution inégale se produit entre deux ou plusieurs phases des matériaux à travers le moule dans la direction radiale (Fukui &

Watanabe, 1996). Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle ne produit que des composants cylindriques.

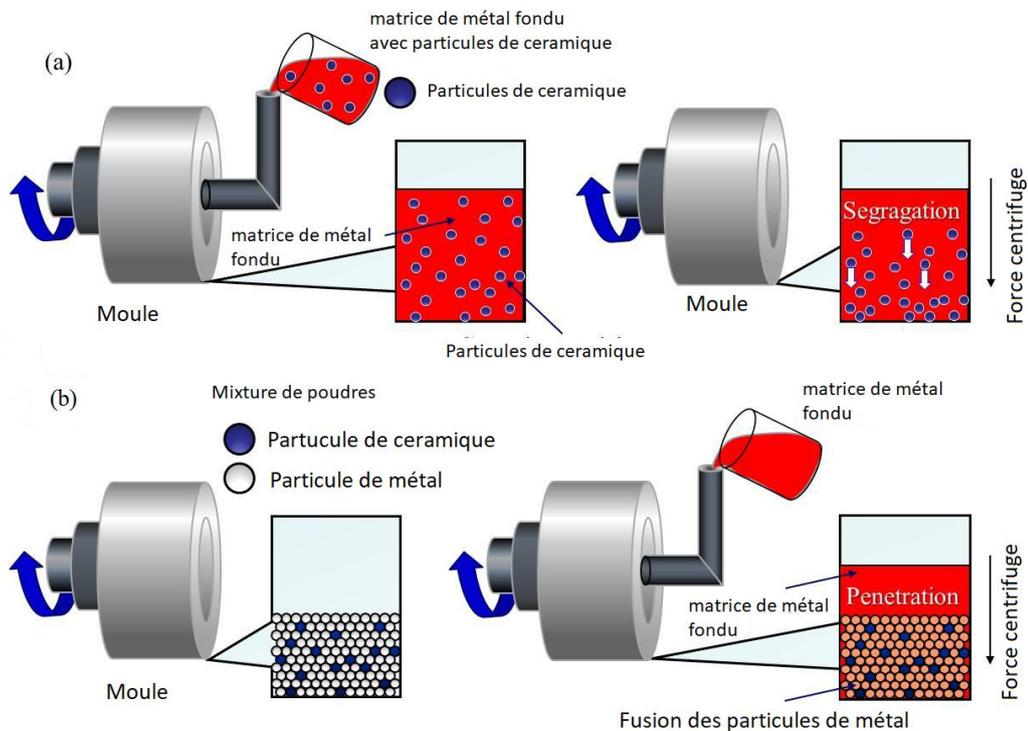


Figure I-9: illustration schématique montrant le processus de la méthode centrifuge. Adapté de (Watanabe et al., 2009)

I.5.3. Coulage Séquentiel en Barbotine (slip casting) :

Il s'agit d'une technique de filtration où la poudre en suspension est versée dans un moule en plâtre poreux. Une partie de l'eau contenue dans la suspension filtre à travers le moule en plâtre par capillarité, laissant un tesson (couche de poudre compacte). On obtient un corps en cru après séchage. Pour la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé, par contre l'eau contenue dans la deuxième couche migre à travers le tesson déjà formé, soit sous l'effet du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique (Moya et al., 1992) ou bien sous l'effet d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches. Le gradient sera formé en changeant la composition où la taille des grains de la suspension de poudre appliquée à chaque fois pendant la procédure de coulage. Le produit obtenu à la fin du coulage sera

consolidé par frittage et une structure de gradient de propriétés FGM sera produite. (Katayama et al., 2011)

I.5.4. Coulage en bande :

Cette technique consiste en l'étalage une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.10), cela confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur.

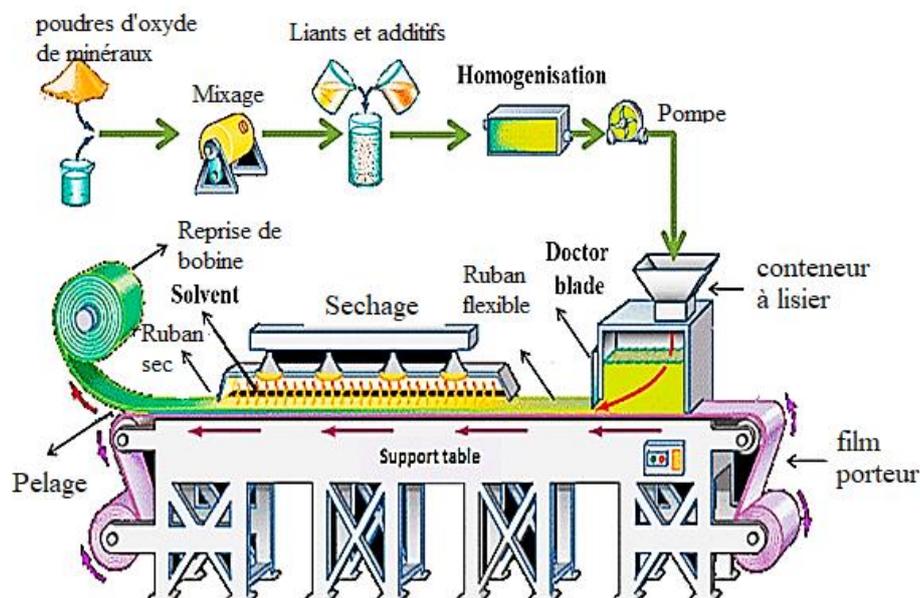


Figure I-10: Illustration schématique du procédé de coulage en bandes (Encyclopedia Britannica Online, 1997)

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25- 1000 μm) (Lostec et al., 1997). La densification du ruban est obtenue par frittage. Le produit final est ensuite arasé et découpé à la forme souhaitée.

I.5.5. Méthodes d'électrodéposition

Ces dernières années, la méthode de dépôt électrophorétique (EPD) a été utilisée dans la fabrication des FGM. C'est une méthode élégante et simple pour produire des gradations de propriétés basées sur le principe de l'électrophorèse (Nagarajan & Nicholson, 2005). Sous l'action de l'électrolyse ou de la réaction chimique, différentes particules actives subissent en même temps des réactions de réduction chimique et se déposent à la surface du substrat

pour former un revêtement (Kaya et al., 2003). Dans un premier temps, l'interaction avec le solvant et les additifs est utilisée pour charger les particules dans ce processus. Ensuite, les particules chargées passent sous le contrôle du champ électrique appliqué. Finalement, les particules forment une accumulation élargie de l'électrode de dépôt, comme le montre la figure I-11. L'équipement de traitement est simple, facile à utiliser, facile à contrôler la précision, à faible coût, mais uniquement pour la préparation d'un corps FGM en feuille mince. La méthode EPD est utilisée dans de nombreuses applications, telles que les matériaux calibrés, les stratifiés, les revêtements (nm-mm), l'infiltration et les matériaux texturés. (S. H. Lee et al., 2018)

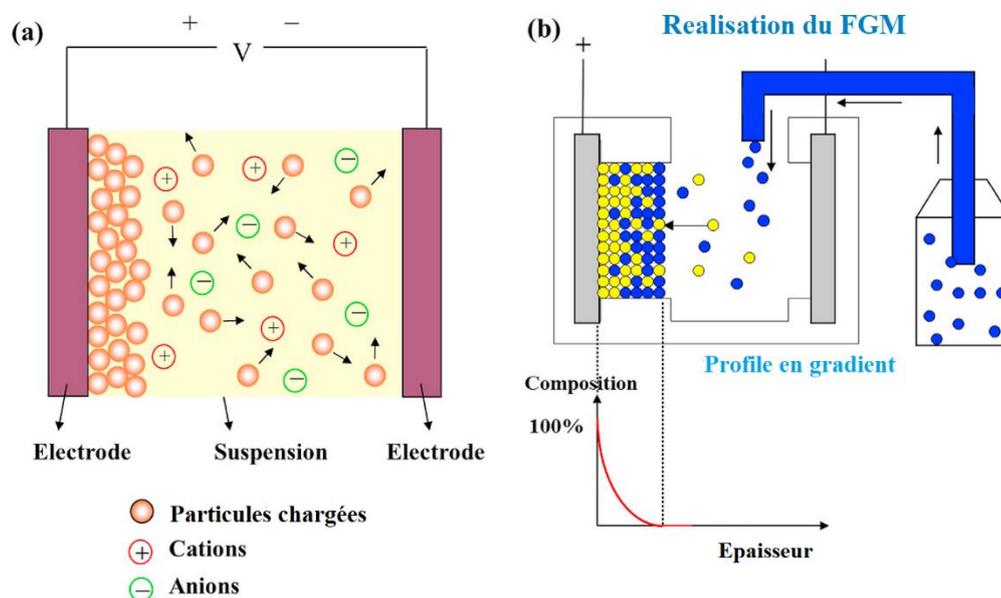


Figure I-11: (a) diagramme schématisé du processus EPD, et (b) Concept du processus EPD pour la production de FGM. Adapté de (Put et al., 2003)

I.5.6. Projection thermique

La méthode de projection thermique est l'une des principales techniques utilisées dans la production de FGM minces pour créer un revêtement de surface grâce à un processus de pulvérisation (Roy & Davim, 2015). La couche ainsi produite assure une bonne isolation thermique et électrique des pièces traitées en même temps qu'elle protège contre la corrosion et l'usure (Metco, 2013). Il existe plusieurs procédés utilisés pour fabriquer des FGM avec des propriétés graduées via le revêtement par projection thermique comme le montre la figure I-12 (Espallargas, 2015). Au début de ce processus, la source de chaleur est utilisée pour fondre les matières premières du revêtement, puis en traitant les gaz et en les pulvérisant

sur un matériau de base, ces matériaux fondus ou liquides sont projetés jusqu'à ce qu'ils se solidifient et forment une couche solide.

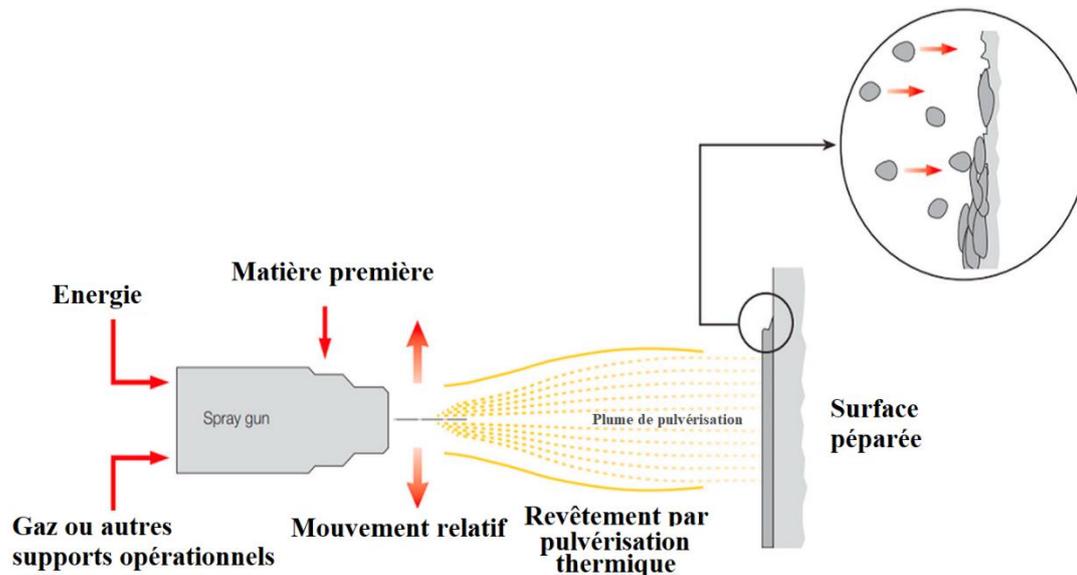


Figure I-12: Diagramme schématisé du procédé de pulvérisation thermique. Adapté de (Metco, 2013)

I.5.7. C. V. D. et P. V. D (Chemical and physical vapour deposite)

Le dépôt physique en phase vapeur (PVD) est une méthode dans laquelle le premier matériau passe d'un état condensé à un stade de vapeur, puis une fois déposé sur la surface du deuxième matériau, revient à un stade de film mince condensé, comme le montre la figure I-13. La méthode PVD est principalement utilisée pour la fabrication de FGM minces. La méthode PVD donne la possibilité de produire des films minces très purs avec une structure graduée, elle permet aussi de créer une grande variété de composés, du dépôt de métaux de base jusqu'aux alliages (Rajak et al., 2020). Les types de méthodes de dépôt sous vide pour le développement de films minces ou de revêtements peuvent être inclus dans la PVD. Il existe de nombreux procédés PVD qui sont utilisés pour produire un film mince lisse avec des propriétés graduées, comme le dépôt à l'arc cathodique, le dépôt par faisceau d'électrons, le dépôt par évaporation, la sublimation en espace clos, le dépôt par laser pulsé, le dépôt par pulvérisation, le dépôt par électrons pulsés (Selvakumar & Barshilia, 2012).

Le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) est utilisé pour fabriquer des matériaux solides de haute qualité en utilisant un système de dépôt sous vide. De nombreux procédés de dépôt chimique en phase vapeur sont utilisés pour produire des films minces lisses aux propriétés graduées, tels que la pression atmosphérique, la basse pression, l'ultravide, le filament

chaud, l'assistance laser, l'assistance électronique et l'injection directe de liquide (Oluwatosin Abegunde et al., 2019). La méthode CVD est généralement appliquée pour fabriquer des films minces avec des propriétés graduelles pour les applications de semi-conducteurs.

Les techniques PVD, CVD sont particulièrement recommandées pour la préparation de FGM sur des substrats de formes irrégulières. (Kawai et al., 1990; Uemura et al., 1990)

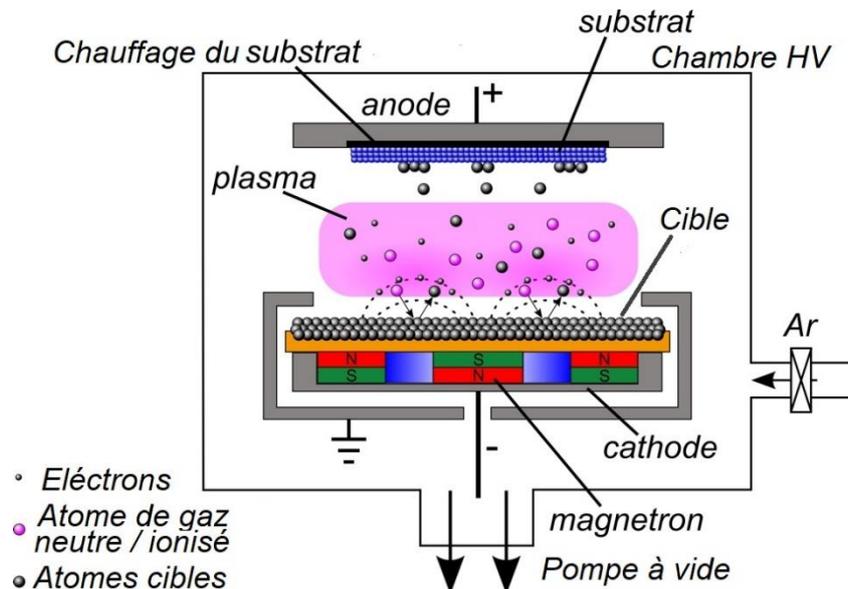


Figure I-13: Diagramme schématisé du processus PVD. Adapté de (Thin-film technologies, s. d.)

I.5.8. Frittage et Infiltration

Cette technique convient à la fabrication d'un FGM composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La méthode de frittage et infiltration est constituée de deux étapes : La première consiste à fabriquer une matrice frittée du matériau qui a la plus haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde étape sera de remplir ces porosités par infiltration avec le deuxième matériau fondu. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique. (Takahashi et al., 1990)

I.6 Domaines d'applications :

Les FGM sont la solution idéale pour la demande croissante d'applications nécessitant des propriétés contradictoires dans les mêmes composants tels qu'une dureté élevée à l'extérieur par rapport à une ductilité élevée à l'intérieur. Par conséquent, on trouve pour Les FGM de nombreuses applications dans divers secteurs : l'aérospatiale, l'automobile, le revêtement, l'électronique, les biomatériaux, les outils de construction et de coupe. (Gayen et al., 2019).

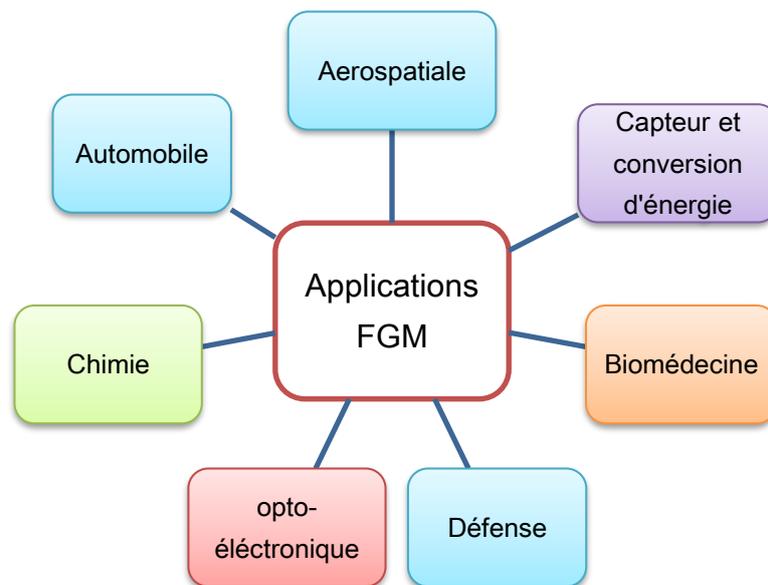


Figure I-14: Applications des FGM dans les industries, adapté de (Gayen et al., 2019)

La plupart des parties des engins spatiaux et des avions utilisent de nos jours des FGM, on peut citer par exemple le moteur de fusée, les réflecteurs des panneaux solaires, les pales de turbine, le bord avant des missiles et des navettes spatiales (Udupa et al., 2014). Ces composants sont exposés dans des zones spécifiques à des températures élevées ou à une dégradation extrême.

De nombreux composants automobiles, tels que les pistons et chemises de cylindres de moteurs diesel, les chambres de combustion, les freins de voitures de course, les arbres de transmission et les volants d'inertie, doivent répondre à la fois à des sollicitations thermiques et mécaniques. Les FGM apportent une réponse pour ces composants. En raison du coût élevé, l'utilisation des FGM est très restrictive dans les applications automobiles et n'est généralement utilisée que pour les pièces critiques. (Udupa et al., 2014).

Les FGM à structure graduée sont largement utilisées dans la fabrication de nombreux composants techniques tels que les outils de coupe, les moules de formage et les blocs moteurs de machines, car ils améliorent facilement la résistance, la résistance thermique, l'usure et la résistance à la corrosion de ces composants. (Lengauer & Dreyer, 2002).

Les FGM sont maintenant largement utilisés dans les dispositifs prothétiques et les composants de dents artificielles. Biocompatible, les FGM permettent aux dispositifs médicaux de montrer à la fois la force de liaison et la résistance à la corrosion et à l'abrasion qui ne peuvent pas être obtenues avec la structure uniforme. (Pompe et al., 2003; Suk et al., 2003).

La tendance générale actuelle dans le domaine de la défense est de réduire le poids des véhicules et d'empêcher la propagation de fissures par l'utilisation de FGM. Les structures à gradient de propriété sont utilisées comme matériaux résistants à la pénétration pour la fabrication de plaques de blindage et de gilets pare-balles, ainsi que pour la fabrication de pièces défensives telles que tiges de guidage, rouleaux de précision, arbres, tubes, loquets, logements d'essieux et percuteurs. (W. W. Chen et al., 2007; Chin, 1999).

En plus des domaines précédents, les FGM présentent des potentiels élevés pour les applications énergétiques et électroniques ainsi que pour les applications optoélectroniques. Le concept de FGM avec une gradation thermique est maintenant utilisé dans divers systèmes énergétiques plutôt que de faire fonctionner un seul matériau à des températures très élevées ou basses comme dans les générateurs d'énergie thermique, les composants d'énergie solaire et les dispositifs de conversion d'énergie, condensateurs, capteurs et électrodes (Müller et al., 2003; Niino et al., 2005). Ces matériaux à structure graduée sont également utilisés dans les batteries, les semi-conducteurs (transistors, diodes et dispositifs optoélectroniques), les dispositifs piézoélectriques et les circuits intégrés. (Bharti et al., 2013).

I.7 Application de la technologie du FGM en génie civil

Dans le domaine de la construction, la recherche sur les matériaux de construction occupe une bonne place, c'est dans ce sens que les FGM sont perçus comme un axe de développement et d'innovation intéressant pour le secteur.

l'idée de la gradation fonctionnelle des matériaux qui est déjà utilisé avec succès dans plusieurs disciplines telles l'aéronautique (Kieback et al., 2003), défense, biomédecine et autres peut aussi trouver des applications dans le domaine de la construction.

La propriété qui varie dans un élément de construction peut être la porosité ou la concentration de la teneur en fibres ou le rapport des matériaux (Laoufi, 2016), l'objectif recherché serait dans ce cas-là un élément plus léger, recyclable, plus économique à produire et/ou à mettre en œuvre.

Ci-dessous, nous passons en revue, quelques études relatives à l'utilisation du concept des matériaux à gradient de propriétés en génie civil.

I.7.1. Le Béton à gradient de propriétés :

L'optimisation des structures en béton suivant le concept du FGM a pour principal but d'assurer un ajustement continu des propriétés du béton, telles que la densité, la porosité, la conductivité thermique et la résistance à l'intérieur de l'élément conformément à des sollicitations et profils d'efforts déterminés.

Les études dans ce domaine ne portent pas seulement sur la nature du gradient de propriété de l'élément, mais aussi sur les modes et techniques de réalisation de ces nouveaux types d'éléments à l'échelle industrielle. (Heinz et al., 2012)

Des applications de béton à gradient de propriétés ont permis de réaliser des murs extérieurs moins épais par rapport aux systèmes impliquant des composites d'isolation thermique comparable, avec une conductivité thermique bien inférieure à celle du polystyrène par exemple. (Heinz et al., 2012)

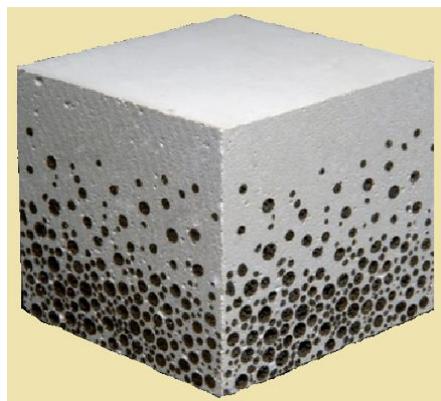


Figure I-15: Structure d'un élément en béton à gradient de propriétés, source : (Programme de recherche ILEK : Le béton dégradé, 2021)

A résistance égale, des planchers béton type FGM ont permis une réduction de poids de plus de 60% et une réduction des émissions de carbone dépassant 35% par rapport aux planchers minces classiques. (Eyerer et al., 2000)

I.7.2. Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil :

Les applications futures des technologies FGM dans une multitude de domaines du génie civil se précise de plus en plus. Dans ce qui suivra, nous citons quelques exemples concrets de ces applications possibles (source (Laoufi, 2016)) :

Les chaussées rigides :

La gradation visée dans les chaussées rigides en béton est la variation de la fraction volumique de fibres. Les chaussées rigides en béton sont orientées vers les autoroutes et les routes à très fort trafic, ainsi que pour les dallages industriels, les pistes des aéroports.

Les chaussées souples :

Afin d'éviter le glissement entre la couche de Grave Bitume et la couche de roulement en béton bitumineux, La technologie FGM peut être exploitée dans les chaussées souples pour supprimer la ligne d'interface entre ces deux couches. Cette possible application peut aussi permettre de réduire les épaisseurs des couches et améliorer la durabilité de l'ensemble.

Les joints dans la charpente métallique :

Certains joints de soudure dans les charpentes métalliques sont réalisés entre éléments de natures différentes, il en résulte un risque d'accumulation de contrainte et donc de rupture. L'utilisation d'un FGM dans ces zones est une solution tout à fait envisageable pour résoudre ce problème.

I.8 Les propriétés matérielles des plaques FGM

L'analyse par éléments finis de matériaux gradués à deux / plusieurs phases peut ne pas être réalisée pour toutes les applications. Par conséquent, il est plus avantageux d'utiliser des schémas d'homogénéisation pour les matériaux à gradient de propriété qui contiennent compte des couches homogènes parallèles avec des modules d'élasticité définis (Boggarapu et al., 2021). L'épaisseur de la couche et les fractions volumiques des constituants contenus dans la couche sont choisies pour se rapprocher de la variation substantielle d'une fraction volumique de phase des matériaux gradués.

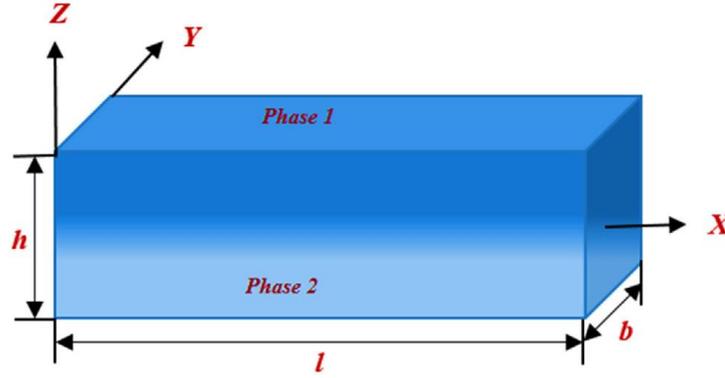


Figure I-16: Distribution de la fraction volumique d'une dalle FGM le long de l'épaisseur.(Boggarapu et al., 2021)

Une multitude de modèles d'homogénéisation sont proposés dans la littérature en fonction des applications recherchées, nous décrivons les plus utilisés dans ce qui suit.

I.8.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La loi de puissance est le modèle le plus cité et accepté dans la littérature scientifique. Les propriétés du matériau varient dans une direction spécifique (unidirectionnelle) qui est donnée par l'équation. (I.1)

$$P_{(z)} = (P_c - P_m)V_f + P_m \quad (I-1)$$

Ici, P représente les propriétés générales du matériau telles que le module d'élasticité, P_c et P_m symbolisent les propriétés des faces céramiques et métalliques de la structure à gradient de propriété et V_f désigne la fraction volumique. Les propriétés des P-FGM dépendent de la fraction volumique (V_f) qui suit une loi donnée par l'équation. (I.2)

$$V_f = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I-2)$$

Ici, k est appelé indice de la loi de puissance et indique le niveau d'hétérogénéité matérielle dans les FGM. Si $k=0$, la plaque FGM est entièrement en céramique, tandis que $k = \infty$ indique une plaque entièrement métallique.

Les conditions aux limites définissent les propriétés de la surface inférieure de la plaque qui sont données par : $P(z) = P_m$ pour $z/h = -1/2$ d'où $V_f = 0$, et en surface supérieure, les propriétés sont $P(z) = P_c$, pour $z/h=1/2$; d'où $V_f=1$.

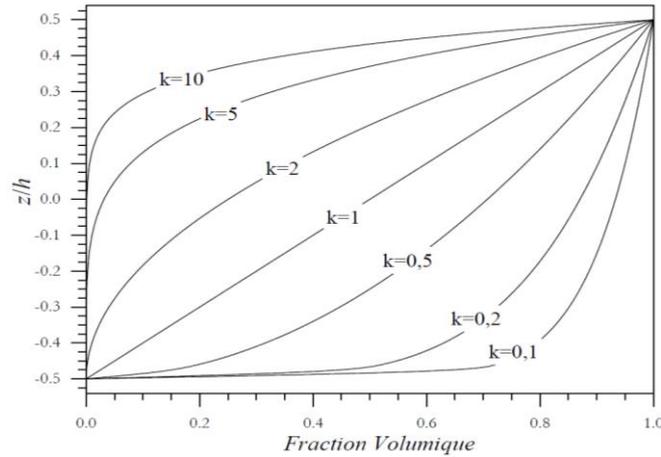


Figure I-17: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.8.2. Loi de mélange exponentielle (E-FGM)

Ce modèle est largement utilisé pour étudier le phénomène de rupture mécanique. Les chercheurs ont mis en œuvre cette loi dans l'analyse des performances statiques et dynamiques des structures FGM (Behravan Rad & Alibeigloo, 2013; Shah et al., 2009). Les propriétés des FGM unidirectionnelles sont données par l'Eq. (I.3)

$$P(z) = P_t * e^{\left(\frac{1}{h}\right) \ln\left(\frac{P_b}{P_t}\right) \left(z + \frac{h}{2}\right)} \quad (I-3)$$

Les termes P_z , P_b , P_t sont les propriétés le long de la direction Z, de la surface inférieure et supérieure respectivement.

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure I-18.

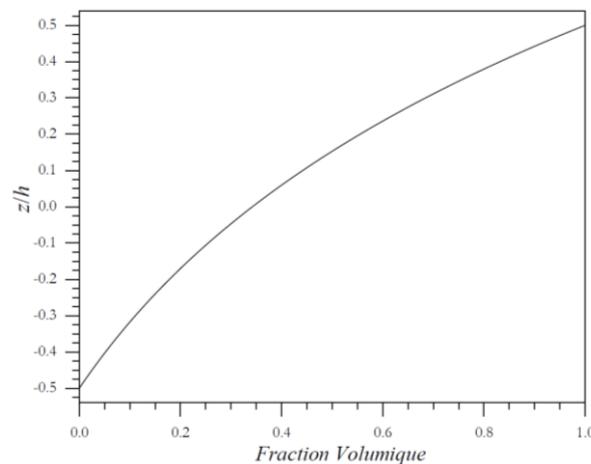


Figure I-18: Variation du module de Young selon la loi E-FGM

I.8.3. Loi de mélange sigmoïde (S-FGM)

Ce modèle est conçu en utilisant le modèle de loi de puissance aux composites multicouches. Comme le rapportent Chi et Chung (Chi & Chung, 2006), la fraction volumique est déterminée à l'aide de deux fonctions de loi de puissance. Cette loi permet une répartition plus fluide des contraintes à chaque interface. Pour les FGM unidirectionnelles, cette loi est donnée par l'Eq. (I.4a) et l'Eq. (I.4b).

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-4a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-4b})$$

En utilisant la loi de mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-5a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-5b})$$

La Figure I-19 représente la variation de la fraction volumique obtenue par les équations (I.5a) et (I.5b) dans une plaque S-FGM.

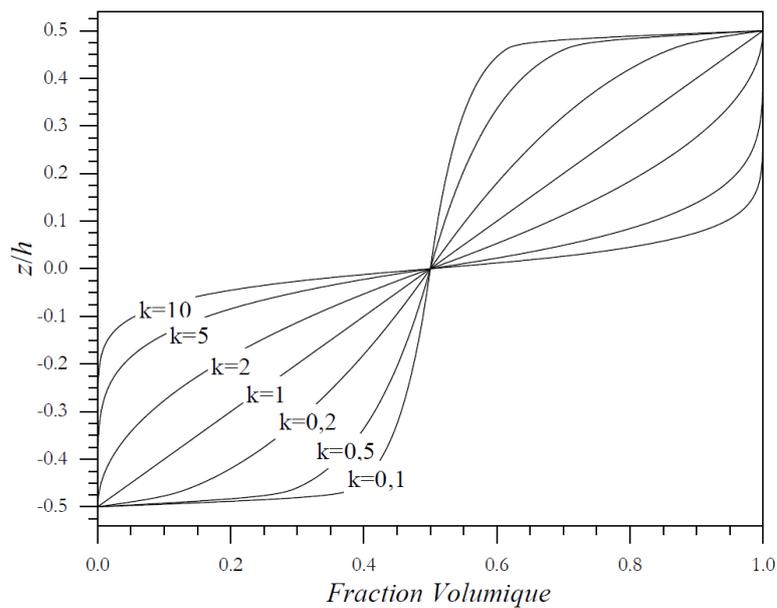


Figure I-19 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.8.4. Modèle de Mori-Tanaka

Selon Mori (Mori & Tanaka, 1973) l'exécution de différents modèles d'homogénéisation dans un système de matériaux à gradient de propriété commence par l'estimation des modules d'élasticité effectifs. Dans les FGM, les modules locaux sont reportés à ceux des composites à matrice renforcés avec des particules sphériques. Concernant les applications, les relations suivantes pour des particules de renfort isotropes distribuées aléatoirement dans une matrice isotrope d'un matériau à gradient de propriété sont données ci-dessous.

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad \text{I (I-6)}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad \text{(I-7)}$$

Le développement de ce model aboutira aux équations ...

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_f}{1 + \frac{3V_f(K_2 - K_1)}{(3K_1 + 4G_1)}} \quad \text{I (I-8)}$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_f}{1 + \frac{3V_f(G_2 - G_1)}{(G_1 + f_1)}} \quad \text{(I-9)}$$

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 - 8G_1)}{6(9K_1 - 2G_1)} \quad \text{(I-10)}$$

Où E est le module de Young, ν est le coefficient de Poisson, K et G sont respectivement le module de compressibilité et de cisaillement locaux et les suffixes 1, 2 représentent les phases de matrice et de renforcement. Ce schéma évalue les modules globaux de cisaillement et de masse des composites à particules tels que dérivés par (Benveniste, 1987).

I.9 Etat de l'art sur les plaques sandwich FGM

Afin de concevoir d'une façon appropriée les éléments de structure FGM, il est très important d'étudier la statique et la dynamique des FGM. La précision des analyses statiques et dynamiques ne dépend pas de quel composite est utilisé, mais du modèle de calcul adopté. Plusieurs chercheurs ont entrepris d'analyser les FGM sur les plans structurel et dynamique et ont développé pour ce faire différents modèles de calcul. (Jha et al., 2013) ont présenté une revue détaillée de l'histoire des MGF et des différents modèles d'homogénéisation des MGF. À l'occasion des 30 ans de l'invention et de l'application des MGF (Swaminathan & Sangeetha, 2017) ont présenté une revue détaillée de l'analyse thermique des structures FGM. (Garg & Chalak, 2019) ont présenté une revue détaillée de l'analyse des structures sandwich dans des conditions hygrothermiques. (Saleh, Jiang, Fathi, et al., 2020) ont donné un aperçu de la conception, de l'application et des défis de la fabrication des MGF. (Ghatage et al., 2020) ont publié une revue détaillée de la modélisation et de l'analyse des plaques FGM multidirectionnelles. (Zenkour, 2005) a dérivé des solutions exactes (solution de Navier) pour l'analyse de la flexion de plaques sandwich FGM en utilisant CLPT, FOSDT, HOSDT, et SDT sinusoïdal. Les contraintes normales transversales ont été négligées pendant la formulation. Plus tard, (Zenkour & Alghamdi, 2010) ont étendu le même modèle pour analyser les plaques FGM asymétriques, et symétriques dans des conditions thermiques. Toujours (Zenkour, 2013) a utilisé la théorie de la déformation normale et de cisaillement du quatrième ordre pour analyser des plaques sandwich FGM sous une charge statique

(Vel & Batra, 2004) ont étudié les vibrations libres de plaques FGM en sandwich reposant sur une fondation élastique sous des charges thermiques. (Apetre et al., 2008) ont réalisé une étude comparative entre FOSDT et HOSDT (troisième ordre) pour l'analyse de la flexion de poutres FGM en sandwich. (Xia & Shen, 2008) ont utilisé la HOSDT de Reddy pour l'analyse vibratoire de plaques sandwich FGM soumises à une compression et à un post-fléchissement thermique dans des conditions thermiques. (Q. Li et al., 2008) ont étudié la vibration libre de plaques rectangulaires en sandwich FGM avec des bords simplement appuyés et encrés en utilisant la méthode de Ritz. (Kashtalyan & Menshykova, 2009) ont proposé une solution tridimensionnelle pour l'analyse statique d'une plaque sandwich avec un noyau à gradient de propriété. Il a été démontré que l'utilisation d'un noyau FGM élimine la discontinuité de la contrainte normale dans le plan à travers l'interface peau/noyau, et réduit l'ampleur des contraintes dans les peaux et la déflexion du panneau. (Brischetto, 2009) a effectué une analyse statique de plaques sandwich avec une âme en FGM en utilisant une

monocouche équivalente avancée (advanced equivalent single layer - ESL) et par couche (layerwise LW) avec une extension linéaire jusqu'au quatrième ordre dans la direction de l'épaisseur. Les théories ESL et LW ont été développées selon le principe des déplacements virtuels et le théorème variationnelle mixte de Reissner. Selon les observations de Brischetto, des modèles de calcul avancés sont nécessaires pour étudier les plaques multicouches avec des couches de FGM, il a conclu aussi qu'un sandwich avec un noyau de FGM est une meilleure alternative aux structures sandwich conventionnelles. (Wang & Shen, 2011) ont utilisé les équations de von-Karman obtenues à l'aide de la méthode HOSDT de Reddy pour l'analyse des vibrations libres de plaques FGM en sandwich sous chargement thermique. (Merdaci et al., 2011a) ont effectué des analyses de déflexion et de contrainte de plaques sandwich FGM en utilisant deux modèles raffinés de déplacement en cisaillement. Dans ces modèles de déplacement quatre inconnues sont impliquées, contre cinq dans le cas d'autres théories de déformation en cisaillement. Les modèles développés étaient cohérents avec la variation parabolique de la contrainte de cisaillement transversale sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à un facteur de correction du cisaillement. De même, (El Meiche et al., 2011) ont proposé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement hyperbolique prenant en compte la déformation en cisaillement transversal pour l'analyse du flambement et de la vibration libre de plaques sandwich épaisses à gradient propriété, (Xiang et al., 2011) ont développé un modèle d'ordre n pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwich à gradient propriété. (Hadji et al., 2011) ont effectué une analyse vibratoire de plaques sandwich à gradient propriété en utilisant la théorie de plaque raffinée à quatre variables. (Khalili & Mohammadi, 2012) ont effectué une analyse des vibrations libres des plaques FGM en sandwich dans des conditions thermiques en utilisant les propriétés des matériaux dépendant de la température. (Neves et al., 2012, 2013) ont présenté des analyses statiques, de vibration libre et de flambage de plaques isotropes et sandwich à gradient propriété en utilisant différents modèles de déformation en cisaillement d'ordre supérieur.

(Tounsi et al., 2013) ont utilisé une méthode de cisaillement trigonométrique raffinée cohérente avec les termes de variation pour l'analyse thermoélastique en flexion de plaques sandwich à gradient propriété. (H.-T. Thai et al., 2014) ont étudié la vibration libre, La flexion et le flambage d'une plaque sandwich rectangulaire avec un noyau homogène et des peaux à gradient propriété dans diverses conditions aux limites en utilisant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement du premier ordre. (Vo et al., 2014) ont utilisé l'approche FE C-1 basée sur l'approche HOSDT pour l'analyse de la vibration libre de poutres

FGM en sandwich. L'étude comprend l'influence des conditions aux limites classiques, du rapport noyau/épaisseur sur le comportement des poutres FGM en sandwich. (V.-H. Nguyen et al., 2014) ont présenté une nouvelle théorie trigonométrique de déformation en cisaillement pour les analyses statiques, de flambement et de vibration libre de plaques sandwich isotropes et à gradient de propriété. (Tung, 2015) a développé une méthode FOSDT non linéaire basée sur la théorie de von Karman pour l'analyse de la flexion de plaques FGM en sandwich reposant sur des fondations élastiques de type Pasternak et des contraintes tangentielles sur les bords dans des conditions thermiques. (Mahi & Tounsi, 2015) ont proposé une nouvelle théorie hyperbolique de déformation en cisaillement pour les analyses de flexion et de vibration libre des plaques composites isotropes, à gradient de propriété, sandwich et laminées. (C. H. Thai et al., 2016) ont étendu la méthodologie utilisée pour l'analyse de la flexion des plaques FGM en sandwich à l'analyse des vibrations libres. Nguyen et al. (T. N. Nguyen et al., 2016) ont proposé une analyse de vibration libre de plaques FGM en sandwich en utilisant une nouvelle méthode appelée approche de Kriging sans rotation et sans maillage. (Sobhy, 2016) a effectué une analyse de vibration libre de plaques sandwich FGM reposant sur des fondations élastiques Winkler-Pasternak dans des conditions hygrothermiques. (Bennoun et al., 2016) ont utilisé une nouvelle théorie de plaque raffinée à cinq variables pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich à gradient de propriété. La théorie tient compte de la distribution hyperbolique des déformations transversales en cisaillement et satisfait aux conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement. (Kim & Lee, 2017) ont effectué une analyse de la flexion de poutres FGM en sandwich d'épaisseur variable en utilisant la théorie des poutres Euler-Bernoulli basée sur les éléments finis. (Do et al., 2017) ont utilisé la méthode FOSDT basée sur les éléments finis pour l'analyse de la flexion de plaques FGM en sandwich dans des conditions thermiques. (H. Chen et al., 2017) ont proposé une nouvelle méthode HOSDT pour l'analyse de la vibration libre de coques sandwich, FGM, à double courbure et peu profondes, en utilisant la solution de Navier. (D. Li et al., 2017) ont effectué une analyse de flexion thermomécanique de plaques sandwich en matériau à gradient de propriété (FGM) ayant des feuilles de surface en FGM et un noyau dur en FGM en utilisant une théorie de plaque raffinée à quatre variables. (Farzam-Rad et al., 2017) ont proposé une nouvelle théorie quasi tridimensionnelle pour les analyses statiques et de vibration libre des plaques sandwich et à gradient de propriété en utilisant l'analyse iso-géométrique et la position physique de la surface neutre. Ces dernières années, les problèmes liés à l'analyse des panneaux sandwich à gradient de propriété, y compris les

panneaux à coque, ont attiré les chercheurs (Pandey & Pradyumna, 2018; A. H. Sofiyev, 2018; A. H. Sofiyev et al., 2015; A. Sofiyev & Osmancelebioglu, 2017). (Hao et al., 2018) ont effectué une analyse de la vibration libre de poutres FGM en sandwich avec des conditions aux limites classiques et non classiques en utilisant HOSDT, CLT et FOSDT. (Sayyad & Ghugal, 2019) ont présenté une étude sur l'analyse des poutres en sandwich FGM. (Meksi et al., 2019) ont proposé une nouvelle solution de Navier basée sur la méthode HOSDT pour l'analyse des vibrations libres des plaques FGM en sandwich. (Menasria et al., 2020) ont étudié la réponse dynamique d'une plaque sandwich FGM reposant sur une fondation élastique et dans diverses conditions aux limites, en utilisant la théorie de déformation en cisaillement raffinée à quatre inconnues. (Kumar et al., 2021) ont effectué une analyse des vibrations de poutres reposant sur une fondation élastique. (Kurpa & Shmatko, 2021) ont utilisé la méthode FOSDT basée sur la solution de Ritz pour l'analyse des vibrations libres de plaques FGM en sandwich et de coques peu profondes.

I.10 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons défini ce qu'est un matériau FGM et quels avantages il peut apporter par rapport à d'autres matériaux composites. Le concept du FGM a connu son essor à partir des années 1980, avec la mise au point de plusieurs techniques de fabrication, et le développement de modèles analytiques et par la suite numériques pour décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM à travers l'épaisseur de la plaque.

Ces développements ont permis l'exploitation du FGM dans des domaines très variés, parmi lesquels le génie civil, ou des exigences de hautes performances souvent contradictoires sont demandées.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons les plaques sandwich FGM objet de la présente étude, ainsi que le concept de fondation élastique.

Chapitre II

STRUCTURES SANDWICH FGM ET
FONDATEMENTS ELASTIQUES

II.1 Introduction

La structure sandwich a été développée et utilisée depuis plus de 50 ans, grâce notamment à sa grande rigidité en flexion, de faible poids spécifique, et des bonnes qualités d'isolation. Les structures sandwich représentent une forme spéciale d'une structure en couches qui se composent de deux peaux minces à rigidité et résistance élevées, et cœur de matériau souple, de poids léger relativement épais.

Les avantages exceptionnels d'un faible poids et d'une résistance élevée dans une plaque sandwich trouvent des applications multiples dans le génie civil, l'aérospatiale, l'automobile, etc. néanmoins, il arrive que les feuilles de surface se séparent de l'âme lorsqu'une plaque sandwich typique fonctionne dans des conditions difficiles sous des chargements dynamiques. La séparation susmentionnée peut être évitée en utilisant des feuilles de surface à gradient de propriété qui assurent une variation continue d'un matériau constitutif à l'autre aux interfaces. Ainsi la concentration de contrainte au niveau des interfaces est évitée.

La recherche sur les plaques sandwich FGM comprend, sans s'y limiter, l'analyse des vibrations statiques, libres et forcées.

II.2 Généralités sur les plaques sandwich

L'ASTM définit la structure sandwich comme suit :

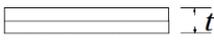
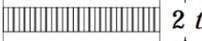
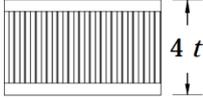
Un sandwich structurel est une forme particulière de composite stratifié comprenant une combinaison de différents matériaux qui sont liés les uns aux autres de manière à utiliser les propriétés de chaque composant séparé pour l'avantage structurel de l'ensemble.

Une plaque sandwich typique est composée d'une paire de peaux minces intercalées par un noyau épais. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Le noyau appelé aussi âme est quant à lui de faible densité, ce qui permet de minimiser la masse de l'ensemble.

Le troisième composant dans un sandwich est l'adhésif, qui permet l'adhésion des peaux au noyau et assure la transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Il doit impérativement se caractériser par une bonne résistance en cisaillement. (Arbaoui, 2009)

La forte épaisseur relative du noyau permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion pour une faible augmentation de poids. Le tableau 1 illustre les avantages des panneaux sandwich en termes de rigidité et de résistance à la flexion par rapport aux panneaux pleins, en utilisant la théorie classique des poutres avec des valeurs typiques pour la densité des peaux et de l'âme. (Petras, 1999)

Tableau III-1 : Exemple d'efficacité structurelle des panneaux sandwich en termes de poids. (Petras, 1999)

			
Rigidité relative en flexion	1	7.0	37
Résistance relative à la flexion	1	3.5	9.2
Poids relatif	1	1.03	1.06

De par la constitution des matériaux sandwich, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases (Arbaoui, 2009). En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le rapport t_f/t_c (t_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01. D'après (Sandifer, 1969), on peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_f (d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = t_c + t_f$

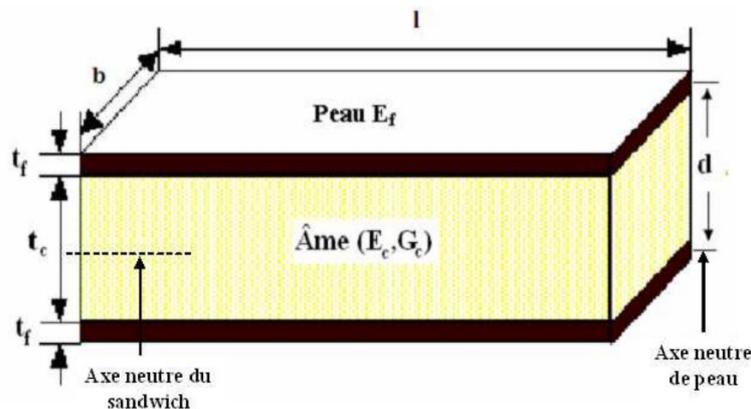


Figure III-1: Schéma d'un sandwich. (Mukundan, 2005)

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs comme suit :

- Sandwich à peaux très fines si $d/t_f > 100$;
- Sandwich à peaux fines si $5.77 \leq d/t_f \leq 100$;
- Sandwich à peaux épaisses $d/t_f < 5.77$

II.2.1. Les constituants des plaques sandwich

II.2.1.1. Les peaux

Elles sont de faibles épaisseurs et peuvent être de plusieurs natures : en métal, en stratifié, en bois (contreplaqué) ou encore en plaque thermoplastique. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites, c'est-à-dire aux sollicitations auxquelles doit résister la structure sandwich. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression).

Les propriétés les plus intéressantes pour les peaux de sandwich sont les suivantes : (Zenkert, 1995) :

- Rigidité élevée donnant une rigidité en flexion élevée
- Résistance élevée à la traction et à la compression
- Résistance aux chocs
- Finition de surface
- Résistance à l'environnement (produits chimiques, UV, chaleur, etc.)
- Résistance à l'usure

Les matériaux de peaux couramment utilisés peuvent être divisés en deux groupes principaux : les matériaux métalliques et non métalliques. Le premier groupe comprend l'acier, l'acier inoxydable et les alliages d'aluminium. Le plus grand de ces deux groupes est le second, qui comprend des matériaux tels que le contreplaqué, le ciment, le placage, le plastique renforcé et les composites à fibres.

Tableau III-2 : Propriétés mécaniques typiques de certains matériaux de peaux couramment utilisés, adapté de (Bader, 2017; Olsson, 1987)

Matériau	ρ (kg/m ³)	E^1 (GPa)	$\hat{\sigma}^2$ (MPa)
Métaux			
Acier doux	7800	206	250-500
Acier inoxydable	7900	196	200
Alliage d'aluminium	2700	73	300
Alliage de titane	4500	108	980
Bois			
Pin	520	12	47/7
Contreplaqué	580	12.4	21
Composites à fibre unidirectionnelle³ ($v_f \approx 0.6-0.7$)			
Carbon/Epoxy	1600	180/10	1500/40
Verre/Epoxy	1800	39/8	1060/30
Kevlar/Epoxy	1300	76/6	1400/12
Composites à fibre bidirectionnelle⁴ ($v_f \approx 0.3-0.4$)			
Kevlar/Polyester	1300	17.5	375
Fibre de verre tissé/Polyester	1700	16	250
Verre WR (roving tissé) /Polyester	1600	12	215

¹Module d'élasticité dans/perpendiculairement à la direction des fibres, ² résistances à la traction dans/perpendiculairement à la direction des fibres, ³Pré-imprégnés avec une fraction volumique de fibres élevée, ⁴Stratification manuelle avec une fraction volumique moyenne de fibres

II.2.1.2. L'âme

Ce composant est considéré comme le plus important dans une structure sandwich. Son but est de reprendre les efforts de compression et de cisaillement. Les âmes utilisées dans les constructions sandwich porteuses peuvent être divisées en quatre groupes principaux : les âmes ondulées, les âmes en nid d'abeille, le bois de balsa et les mousses cellulaires (Zenkert, 1995), illustrés schématiquement à la Fig.II.2

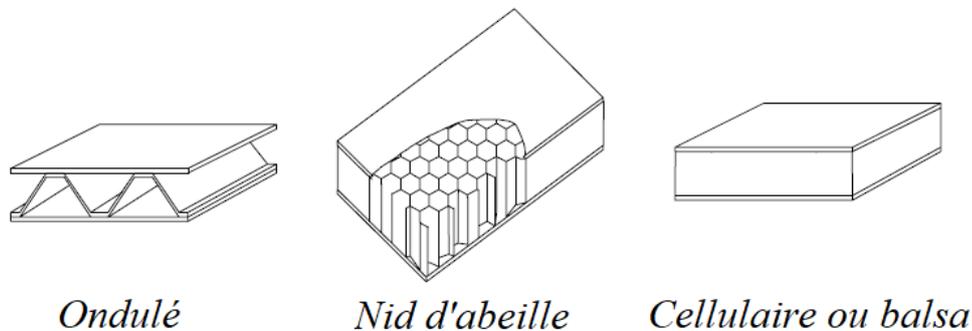


Figure III-2: Principales formes d'âmes de sandwich (Zenkert, 1995)

L'âme d'un sandwich doit avoir une faible densité afin d'assurer la légèreté de la structure sandwich, La densité de l'âme est couramment de l'ordre de 100 kg/m^3 (Arbaoui, 2009). De plus, son module d'Young perpendiculaire aux feuilles de peaux doit être assez élevé pour éviter une diminution de l'épaisseur de l'âme et donc une diminution de la rigidité en flexion. La charge critique de plissement dépend à la fois du module de Young et du module de cisaillement de l'âme. D'autres fonctions du sandwich, comme l'isolation thermique et acoustique, dépendent principalement du matériau de l'âme et de son épaisseur.

II.2.1.3. L'interface

L'adhésif utilisé en interface entre la peau et l'âme du sandwich doit assurer une liaison sans faille entre deux matériaux de natures différentes. Les exigences de l'adhésif sont quelque peu différentes de celles d'une utilisation normale dans la mesure où le collage des structures sandwich implique le collage de deux constituants très dissemblables, un composant solide à un composant cellulaire plus souple. Ce fait implique qu'une attention particulière doit être accordée à divers aspects dans le choix de l'adhésif. (Turner, 1995)

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants. (Arbaoui, 2009)

II.2.2. Propriétés matérielles des plaques sandwich en FGM

Le modèle mathématique a été construit pour résoudre une plaque sandwich composée de trois couches. La structure considérée à une épaisseur totale h . Le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z , à la surface $z=0$, coïncidant avec la surface médiane de la structure. Les faces supérieures et inférieures de la plaque sont à $z=\pm h/2$. Les positions verticales du bas, des deux interfaces et du haut sont désignées par :

$h_1 = -h/2$ et $h_2 = +h/2$, respectivement. (Benbakhti, 2017)

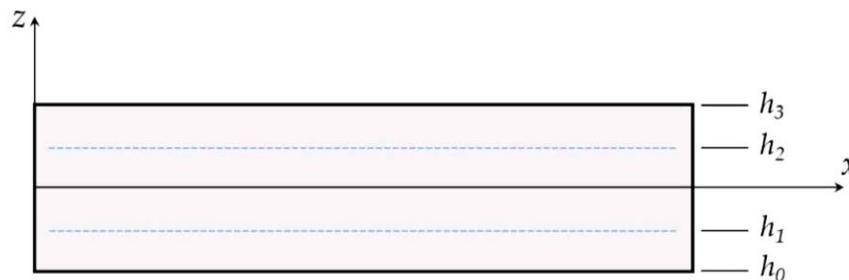


Figure III-3: Configuration de la plaque sandwich FGM. (Daikh, 2018)

Deux types de sandwich sont utilisés : (Daikh, 2018)

- Les sandwichs FGM Type-A ont des propriétés matérielles des couches de surface (peaux) variant dans la direction de l'épaisseur, avec un cœur homogène en céramique ;
- Les structures sandwich FGM Type-B ont des propriétés matérielles des couches de surface homogènes (la surface inférieure en métal et la surface supérieure en céramique) et un cœur en P-FGM ou S-FGM.

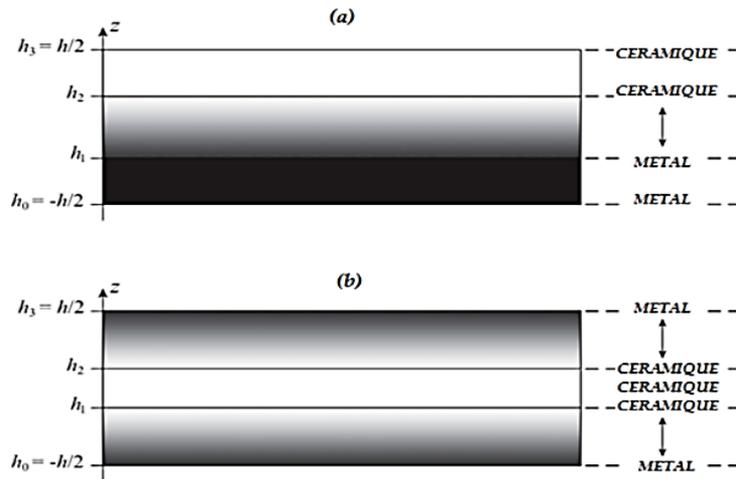


Figure III-4: composition des plaques sandwich FGM (Saoula & Boudierba, 2019)

II.2.2.1. Plaque Sandwich en P-FGM :

Dans ce type de configuration, la variation matérielle est supposée se faire selon une loi de puissance.

a. Plaque sandwich P-FGM de type A

Dans cette configuration, la plaque sandwich se compose de 2 feuilles de face graduées chacune du métal à la céramique, dans le sens de l'épaisseur, selon une loi de puissance. L'âme est homogène entièrement en céramique. La fraction volumique varie comme suit :

$$V^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^p, \quad h_0 \leq z \leq h_1 \quad (\text{III-1a})$$

$$V^{(2)}(z) = 1, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \quad (\text{III-1b})$$

$$V^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^p, \quad h_2 \leq z \leq h_3 \quad (\text{III-1c})$$

p est l'indice d'hétérogénéité, p varie de 0 (entièrement en céramique) et $+\infty$ (entièrement en métal).

b. Plaque sandwich P-FGM de type B

Dans ce type de plaques sandwich, la couche inférieure est entièrement en métal tandis que la couche supérieure est en céramique. Le cœur est gradué du métal à la céramique.

$$V^{(1)}(z) = 0 \quad , \quad h_0 \leq z \leq h_1 \quad \text{(III-2a)}$$

$$V^{(2)}(z) = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^p \quad , \quad h_1 \leq z \leq h_2 \quad \text{(III-2b)}$$

$$V^{(3)}(z) = 1 \quad , \quad h_2 \leq z \leq h_3 \quad \text{(III-2c)}$$

La figure III-5 montre la variation de la fraction volumique dans une plaque sandwich P-FGM de type A pour différentes épaisseurs de l'âme et des peaux.

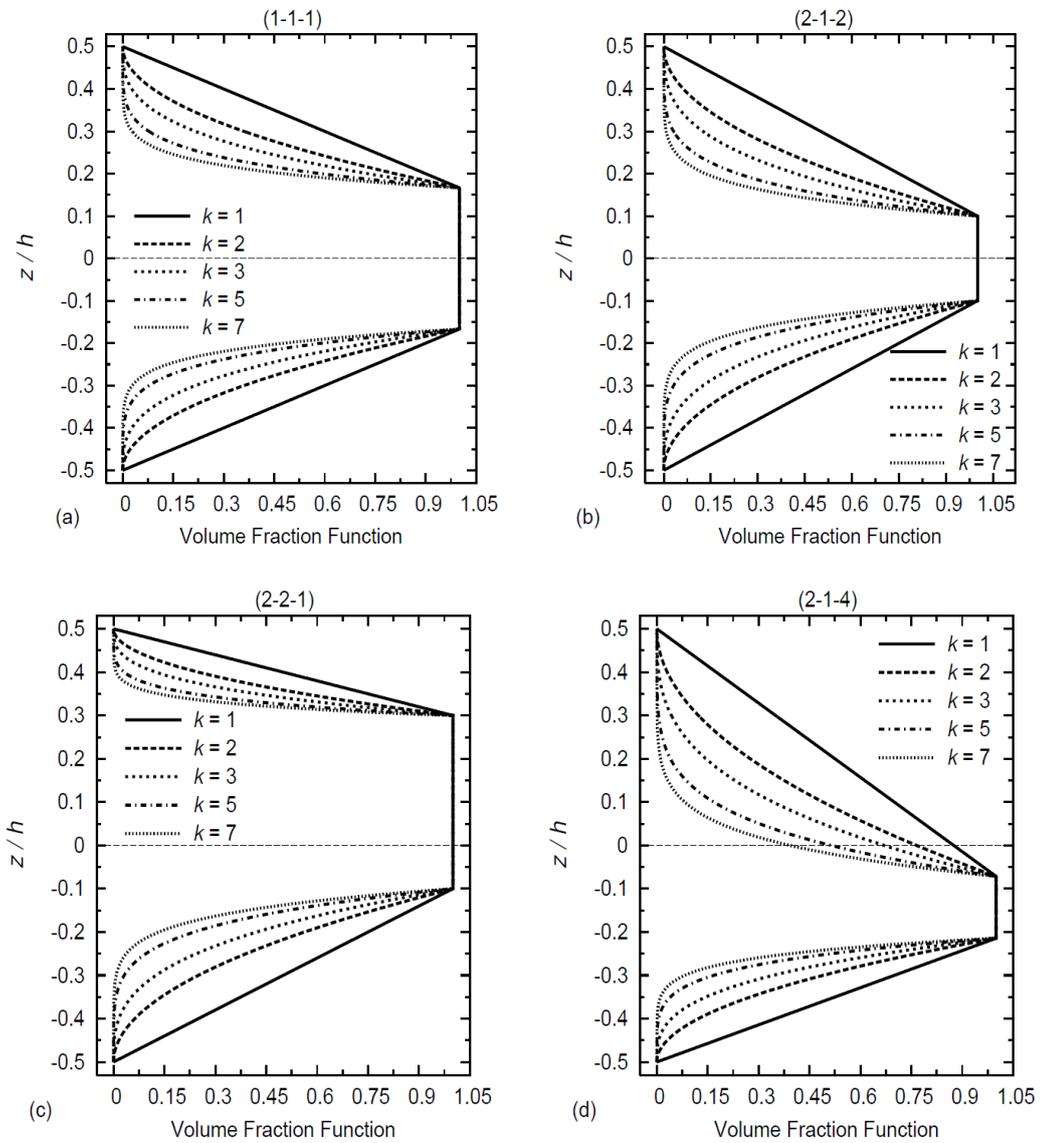


Figure III-5: Variation de la fraction volumique dans une plaque sandwich P-FGM. (Sobhy & Zenkour, 2015)

c. Plaque Sandwich en S-FGM :

Dans ce type de configuration, la variation matérielle est supposée se faire selon une loi sigmoïde.

d. Plaque sandwich S-FGM de type A

La fraction volumique varie dans les feuilles de surface (peaux) à travers l'épaisseur comme suit :

$$V_1^{(1)}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_0}{h_m - h_0} \right)^p, \quad h_0 \leq z \leq h_m \quad \text{(III-3a)}$$

Peau inférieure

$$V_2^{(1)}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_1}{h_m - h_1} \right)^p, \quad h_m \leq z \leq h_1 \quad \text{(III-3b)}$$

Ame $V^{(2)}(z) = 1, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \quad \text{(III-3c)}$

$$V_1^{(3)}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_2}{h_n - h_2} \right)^p, \quad h_2 \leq z \leq h_n \quad \text{(III-3d)}$$

Peau Supérieure

$$V_2^{(3)}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_3}{h_n - h_3} \right)^p, \quad h_n \leq z \leq h_3 \quad \text{(III-3e)}$$

Où $h_m = (h_0 + h_1)/2$ et $h_n = (h_2 + h_3)/2$ désigne les positions de la surface moyenne de la couche inférieure et de la couche supérieure, respectivement.

e. Plaque sandwich S-FGM de type B

$$V^{(1)}(z) = 0, \quad h_0 \leq z \leq h_1 \quad \text{(III-4a)}$$

$$V_1^{(2)}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_1}{h_s - h_1} \right)^p, \quad h_1 \leq z \leq h_s \quad \text{(III-4b)}$$

$$V_2^{(2)}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - h_2}{h_s - h_2} \right)^p, \quad h_s \leq z \leq h_2 \quad \text{(III-4c)}$$

$$V^{(3)}(z) = 1, \quad h_2 \leq z \leq h_3 \quad \text{(III-4d)}$$

Où $h_s = (h_1 + h_2)/2$ désigne la position de la surface moyenne du cœur.

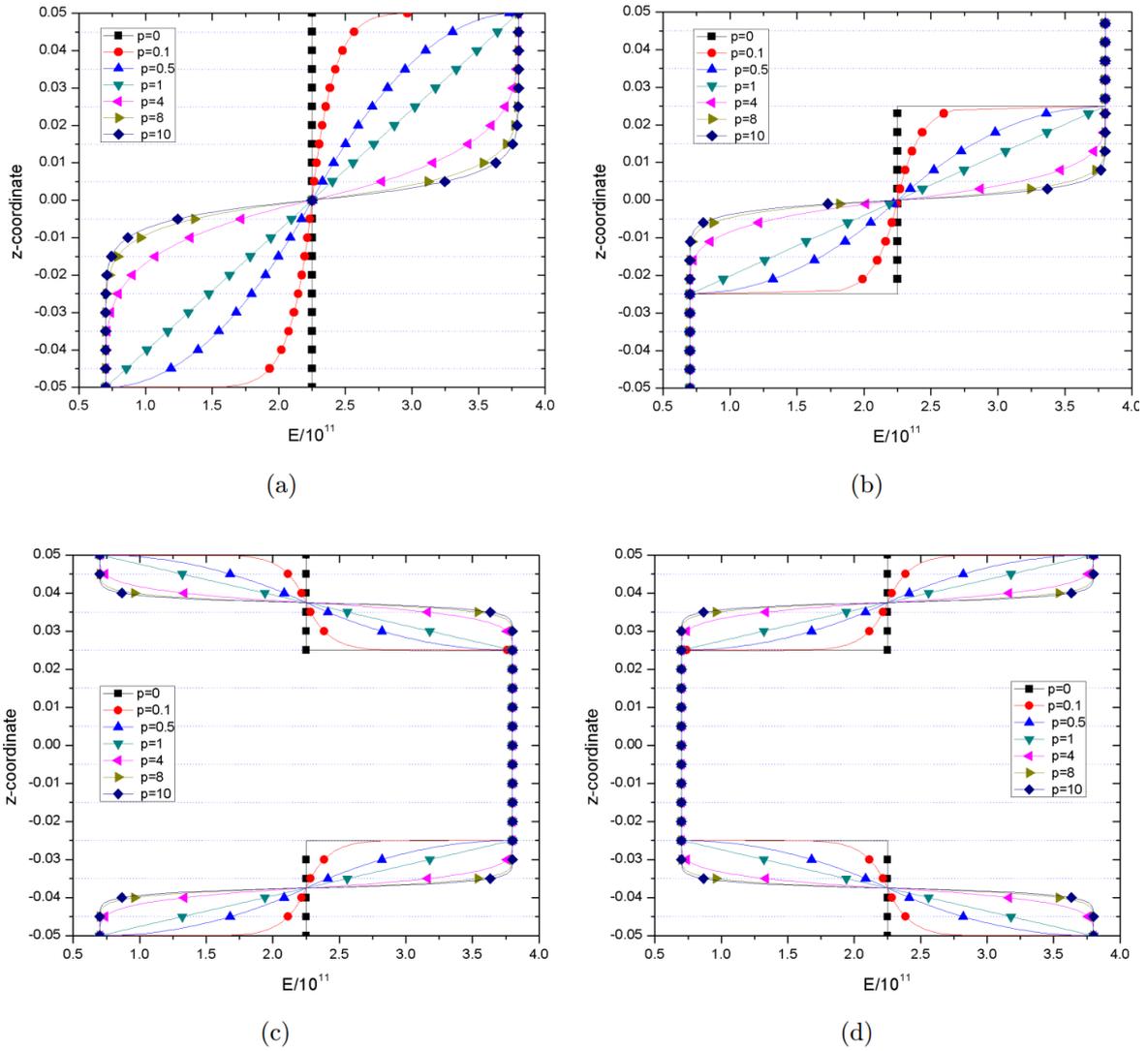


Figure III-6: Variation de la fraction volumique du matériau céramique à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich isotrope (a) FGM et (1-2-1), (b) Type-B, (c) Type-A (âme dure), and (d) Type-A (âme molle) pour différentes valeurs de (p). (Garg et al. 2021)

II.3 Les fondations élastiques

Dans notre étude, la plaque sandwich FGM étudiée est supposée reposer sur un autre élément de structure appelé « fondation élastique ». Le concept de fondation élastique est emprunté au domaine du génie civil et en particulier à la géotechnique, en effet, les géotechniciens en mis au point depuis plus d'un siècle différents modèles pour se représenter l'interaction sol-structure. Les plaques reposant sur les différents types de fondations sont très utilisées dans le domaine de l'ingénierie civil et mécanique. Dans le génie civil, elles sont généralement utilisées pour les chaussées rigides et les ponts. (Seghini, 2020)

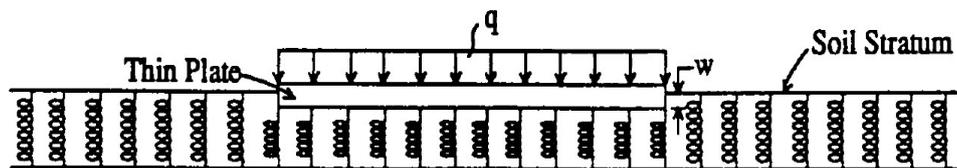


Figure III-7: Exemple de plaque reposant sur fondation de type Winkler. Straughan cité par (Seghini, 2020)

Les structures reposant sur des fondations élastiques sont souvent rencontrées dans l'analyse des fondations des bâtiments, des structures routières et ferroviaires, et des structures géotechniques (Morfidis, 2010). Le modèle de fondation élastique le plus simple et le plus fréquemment utilisé est celui de Winkler, qui est généralement appelé modèle mono-paramétrique. Les caractéristiques de déformation transversale de la fondation élastique sont définies par des ressorts linéaires continus et approchés offrant une résistance directement proportionnelle à la flexion de la plaque. Le défaut de la formulation de Winkler est l'incohérence de comportement due à la discontinuité des déplacements à la limite de la surface uniformément chargée (Uğurlu et al., 2008). Pour ajouter l'influence de l'effet de cisaillement de la fondation en plus des ressorts verticaux, Pasternak (Pasternak, 1954) a introduit une couche de cisaillement modélisée par un élément vertical incompressible et se déformant uniquement par l'action de la force de cisaillement transversale. De nombreuses formulations des équations d'équilibre dynamique et statique des structures sur la fondation élastique de Winkler (Al-Hosani et al., 1999; H. P. Lee, 1998; Liew et al., 1996) ou celles de Pasternak (Han & Liew, 1997; Huang et al., 2008; Shen & Yu, 2004; Zenkour et al., 2010, 2011) sont rencontrées dans la littérature.

Le module de réaction

Le paramètre de base qui définit l'interaction entre le sol et la fondation est défini comme suit : (Terzaghi & Peck, 1948)

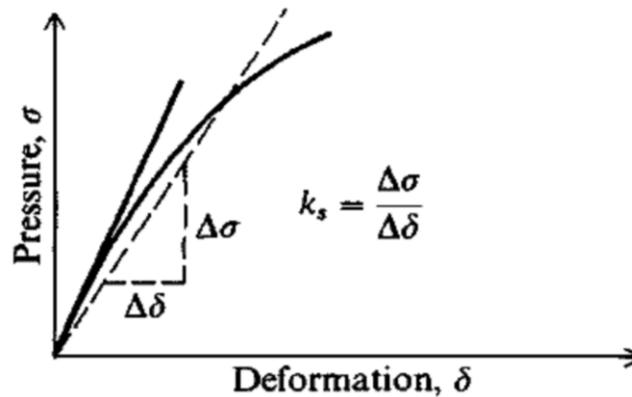


Figure III-8: La réponse contrainte-déformation du sol. (Terzaghi & Peck, 1948)

où

k_s : Le module de réaction du sol de fondation,

$\Delta\sigma$: l'incrément de la contrainte appliquée

$\Delta\delta$: le changement correspondant de la déformation.

II.2.4. Les Modèles d'interaction sol-structure

La complexité inhérente au comportement des sols naturels a conduit au développement de nombreux modèles simplifiés pour l'analyse des problèmes d'interaction sol-fondation. Les théories classiques de l'élasticité et de la plasticité ont été utilisées dans l'analyse de tels problèmes en ingénierie géotechnique. (Madhav et al., 2015)

La modélisation mathématique ou physique du comportement du sol est particulièrement utile pour réduire la rigueur analytique nécessaire à la résolution de nombreux problèmes complexes de valeurs limites en ingénierie géotechnique (Selvadurai, 1979). La modélisation dépend d'une variété de facteurs, tels que le type de sol et ses conditions, le type de fondation et la nature de la charge externe. La réponse ou le caractère de chaque modèle est caractérisé par la déformation de surface qu'il subit sous l'application d'un système de forces externes. (Madhav et al., 2015)

Il existe essentiellement deux types d'approches pour la modélisation de l'interaction sol-structure : l'approche structurale (mécanique) et l'approche du continuum. L'approche du

continuum, est basée sur trois équations partiellement différentielles (compatibilité, constitutive et d'équilibre) qui régissent le comportement de la plate-forme en tant que continuum. (Teodoru, 2009)

Dans l'approche mécanique, la réponse du sol est supposée très simplement comme élastique et linéaire. D'un point de vue physique, un matériau élastique est un matériau qui se déforme sous l'application d'un système de forces externes et qui retrouve sa configuration initiale lorsque ces forces sont supprimées. Cependant, lors de la modélisation du sol, le mot "élastique" est utilisé dans un sens plus restrictif pour désigner un matériau ayant une courbe contrainte-déformation linéaire et réversible. (Lambe & Whitman, 1969)

Un certain nombre de modèles élastiques à un, deux et trois paramètres ont été proposés et largement utilisés pour prédire la réponse d'une fondation reposant dans le sol.

II.2.4.1. Modèle de Winkler

Aujourd'hui, le modèle de Winkler est le modèle de fondation le plus connu et le plus utilisé par les ingénieurs en structure pour l'analyse de l'interaction sol-structure. Il s'agit également de la méthode la plus ancienne et la plus simple pour modéliser la fondation qui consiste en un nombre infini de ressorts sur une base rigide. Pour un modèle structurel, il y aura un nombre fini de ressorts (J. S. Horvath & Colasanti, 2011), voir la figure II.9.

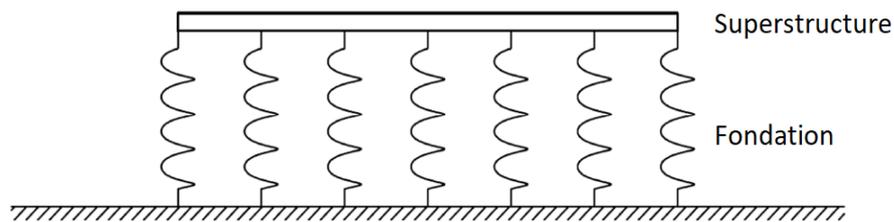


Figure III-9: Schéma du model de Winkler (Caselunghe & Eriksson, 2012)

Dans sa forme de base, l'hypothèse de Winkler suppose que le tassement w_i , en un point arbitraire i de la surface du sol est causé uniquement par la contrainte normale verticale appliquée (réaction du sol) en ce point, p_i . De plus, p_i et w_i sont linéairement liés. Mathématiquement, cela s'exprime comme suit : (J. Horvath, 2002)

$$p_i = k_i w_i \quad (\text{III-5})$$

le modèle de Winkler considère un milieu de sol comme un système de ressort linéaire discret indépendant et rapproché, et la déformation de la superstructure après chargement est limitée à la zone où la charge est appliquée. (Madhav et al., 2015).

Pour un nombre arbitraire de points contigus sur la surface de la plate-forme, la forme générale de l'hypothèse de Winkler s'écrira de la façon suivante :

$$p(x, y) = k_s w(x, y) \quad (\text{III-6})$$

Où $p(x, y)$ représente la réaction (pression) sur la fondation, k_s est le module de réaction du sol, $w(x, y)$ représente le déplacement du sol au point d'application de la charge.

A noter que l'hypothèse de Winkler est ce qu'on appelle un modèle à un seul paramètre car le module de réaction de Winkler est l'unique paramètre nécessaire pour définir comportement du sol de fondation.

II.2.4.2. Les modèles à deux paramètres

Le modèle de Winkler est le modèle structural le plus simple, mais aussi le moins précis. Le principal défaut de ce modèle est que la contrainte de cisaillement du sol est négligée, le déplacement ne se propage donc pas dans la direction transversale. Par conséquent, une discontinuité de déplacement apparaît entre les surfaces chargées et non chargées. En réalité, le sol a une capacité de cisaillement et aucune discontinuité de déplacement ne se produit, voir les figures II.10.

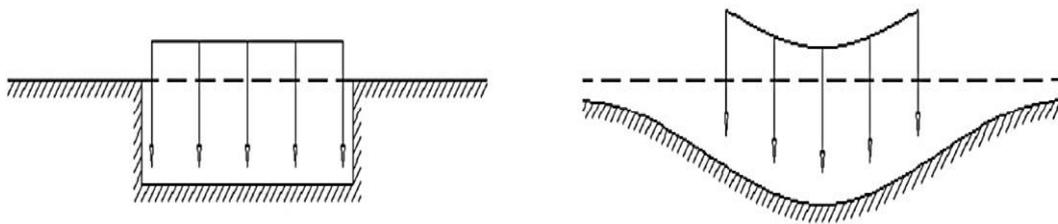


Figure III-10: A gauche, déplacement vertical modélisé selon Winkler. A droite, déplacement vertical souvent observé dans la réalité. Adapté de (Kerr, 1964)

L'imprécision du modèle de Winkler à décrire le comportement continu du sol et la complexité mathématique de l'approche du continuum élastique ont conduit au développement de nombreux autres modèles de réponse du sol, tel que *les hypothèses à deux paramètres*.

Le terme "deux paramètres" signifie que le modèle est défini par deux constantes élastiques indépendantes. Partant du modèle Winkler, ces modèles à deux paramètres (et même trois paramètres) éliminent son comportement discontinu en fournissant une interaction mécanique entre les ressorts. Les éléments d'interaction peuvent être des ressorts, des éléments de flexion, des couches de cisaillement, des membranes précontraintes, etc.

Certains modèles multi-paramètres développés sont présentés dans le tableau II.3

Tableau III-3: Compilation de quelques modèles multi-paramètre. Adapté de (J. Horvath, 2002)

Modèle de Plate-forme	Élément physique utilisé pour visualiser le modèle
Winkler	Ressorts
Filonenko-Borodich	Membrane déformée et précontrainte + ressorts
Pasternak Loof	Couche de cisaillement + ressorts
Kerr	Ressorts + couche de cisaillement + ressorts
Haber-Shaim	Plaque + ressorts
Hetenyi	Ressorts + plaque + ressorts
Rhines	Ressorts + plaque + couche de cisaillement + ressorts

a. Modèle de Filonenko-Brodich

Le modèle proposé par (Filonenko-Borodich, 1940) assure la continuité entre les ressorts individuels de Winkler en les reliant à une fine membrane élastique lisse soumise à une tension uniforme T . En considérant l'équilibre du système membrane-ressort, la déformation de la surface du sol due à une pression q , pour des problèmes tridimensionnels (par exemple des fondations rectangulaires ou circulaires) (Madhav et al., 2015) est donnée par.

$$p(x, y) = k_s w(x, y) - T \nabla^2 w(x, y) \tag{III-7}$$

∇^2 est l'opérateur Laplacien avec $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et T est la force de tension ou bien de traction qui est considérée constante.

b. Modèle de Hetenyi

le modèle proposé par (Hetenyi, 1950) assure l'interaction entre les ressort indépendants par l'incorporation d'une plaque élastique dans les problèmes tridimensionnels, ou une poutre élastique dans le cas de problèmes bidimensionnels Fig. II.12. La fonction de réponse de ce modèle est donnée par :

$$p(x, y) = k_s w(x, y) - D \nabla^4 w(x, y) \quad (\text{III-8})$$

Avec $\nabla^4 w = \nabla^2(\nabla^2 w)$ et $D = E_p h^3 / 12(1 - \nu_p^2)$ est la rigidité de flexion d'une plaque élastique.

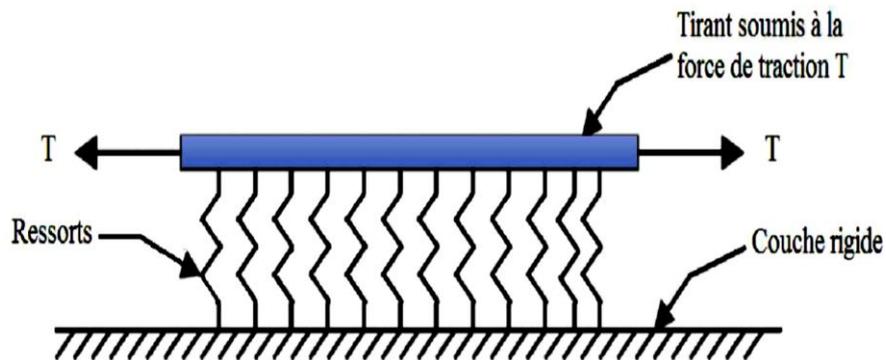


Figure III-11: Modèle de fondation de Filonenko-Brodich (Kerr, 1965).

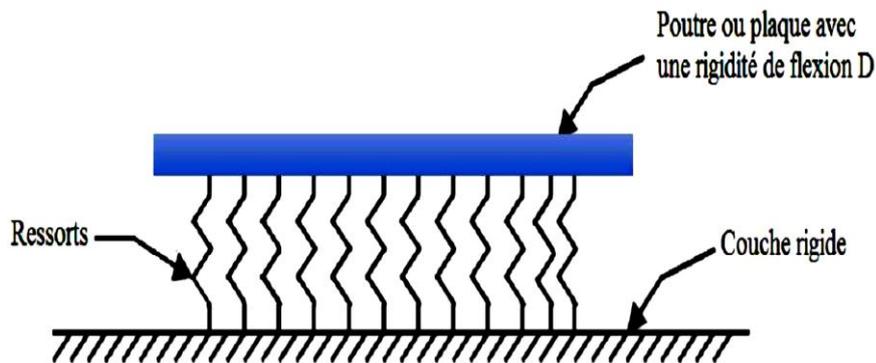


Figure III-12: Modèle de fondation de Hetenyi (Hetenyi, 1950)

c. Modèle de Pasternak

Pour rendre compte de la contrainte de cisaillement dans le sol, (Pasternak, 1954) a connecté la couche de ressorts de Winkler à une couche d'éléments verticaux incompressibles qui se déforment en cisaillement transversal (Fig. 5a).

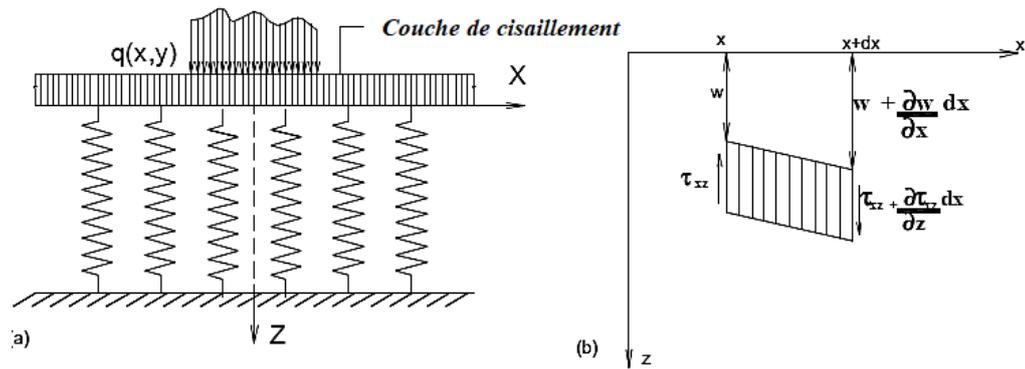


Figure III-13 : Modèle de Pasternak (1954) : (a) modèle de base, (b) état de contrainte d'un élément infinitésimal de la couche de cisaillement. Adapté de (Madhav et al., 2015)

En se basant sur cette hypothèse, la relation entre la pression p et la déformée w de la fondation en un point arbitraire est définie comme suit :

$$p(x, y) = k_s w(x, y) - G \nabla^2 w(x) \quad (\text{III-9})$$

Les profils de déviation de la surface pour ce modèle sont très similaires à ceux obtenus pour le modèle de Filonenko-Borodich. La condition de Winkler est retrouvée comme un cas limite pour les modèles à deux paramètres présentés jusqu'à présent, lorsque T , D et G sont nulles. Le modèle de Pasternak est le modèle à deux paramètres généralisé le plus raisonnable, et il est facilement concevable pour les applications géotechniques, car le sol est compressible et se déforme en cisaillement (Madhav et al., 2015).

II.4 Conclusion

Les plaques et poutres sandwich sont largement utilisées de nos jours dans des domaines divers et variés. Leur succès tient dans le fait que ce genre d'élément de structure permet un gain de poids par l'utilisation d'un cœur (âme) léger, associé à des peaux présentant une très bonne résistance à la traction/compression. Nous avons vu dans ce chapitre que l'utilisation de la technologie FGM dans une plaque sandwich vise à apporter une solution satisfaisante au phénomène de délaminage entre peaux et âme du sandwich, problème souvent rencontré dans ce type de plaque.

Nous nous sommes intéressés aussi dans le présent chapitre au concept de fondation élastique, qui a pour objectif de modéliser la complexe interaction entre sol et structure (en mécanique entre deux structures). Le premier modèle de fondation élastique proposé était celui de Winkler, il a été par la suite amélioré par d'autres dont celui de Pasternak ; ce dernier modèle est celui utilisé dans notre étude.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons les différentes théories des plaques pour l'étude du comportement mécanique des plaques FGM.

Chapitre III

THÉORIES LES PLAQUES

III.1 Introduction

Le plus souvent, les structures réelles qu'on se propose d'étudier sont complexes de par la diversité de leurs géométries ; toutefois, ces structures peuvent être rapportées à des formes plus simples tels que des poutres, plaques et coques minces ou épaisses. Pour chacun de ces constituants, on dispose des formulations théoriques propres à chaque forme (théorie des poutres, plaques et coques) issues de la théorie de l'élasticité/plasticité.

Les structures FGM sont pour la plupart réalisées sous formes de plaques, c'est pourquoi nous nous sommes intéressés uniquement dans ce travail, à l'analyse linéaire (élastique) des structures de type « plaque ».

Les plaques sont des structures en état plan de contraintes. Ce sont donc des structures minces et planes. Les plaques sont l'équivalent des poutres en 2D : Elles admettent des déplacements verticaux suivant l'axe z .

III.2 Théories des plaques :

La théorie des plaques s'inspire de la théorie des poutres, elle permet de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Dans ce qui suit nous présenterons 04 modèles de la théorie des plaques à savoir :

- Modèle classique de Love - Kirchhoff (CPT) ;
- Modèle de déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin- Reissner (FSDT) ;
- Modèle de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ;
- La théorie raffinée de déformation des plaques.

III.2.1. Modèle classique de Love - Kirchhoff (CPT) :

La théorie de Kirchhoff-Love est employée pour l'étude de plaques minces. Elle énonce les hypothèses suivantes :

- Le plan moyen est initialement plan, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de courbure ;
- Le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan, c'est-à-dire que nous ne considérons que le déplacement transversal (noté w) des points du feuillet moyen
- Les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation, c'est-à-dire que nous pouvons négliger le cisaillement ;

- L'épaisseur de la plaque est faible, c'est-à-dire que dans la direction de l'épaisseur, la déformation est nulle impliquant que les contraintes dans cette direction peuvent être négligées ;
- Et nous nous plaçons en petites déformations.

Nous désignons par $\vec{u} = (u_0(x, y, z), v_0(x, y, z), w_0(x, y, z))$ le déplacement par translation du plan moyen. Les composantes u_0, v_0 correspondent ainsi au déplacement du plan moyen dans le plan $(0, x, y)$. Le plan moyen étant positionné en $z = 0$, elles ne dépendent ainsi que de x et y avec $u_0(x, y, z) = u_0(x, y)$ et $v_0(x, y, z) = v_0(x, y)$.

La composante w_0 correspond quant à elle, au déplacement du plan moyen dans la direction z . Selon les hypothèses de Kirchhoff-Love, les déplacements verticaux sont les mêmes pour tous les points d'une fibre normale positionnée en (x, y) dans le plan $(0, x, y)$ du plan moyen. Nous savons ainsi que la composante w_0 ne dépend que de x et y avec :

$w_0(x, y, z) = w_0(x, y)$. Selon cette même hypothèse, nous savons également que pour tout point de la plaque $w(x, y, z) = w_0(x, y, z) = w_0(x, y)$.

Etudions désormais la rotation du plan moyen en notant par θ_x, θ_y ses rotations par rapport aux axes x et y . Ainsi une fibre normale au plan moyen positionnée en (x, y) dans le plan $(0, x, y)$ tourne de l'angle θ_x autour de l'axe x et de l'angle θ_y autour de l'axe y . Toutes ces notions et notations sont illustrées ci-dessous :

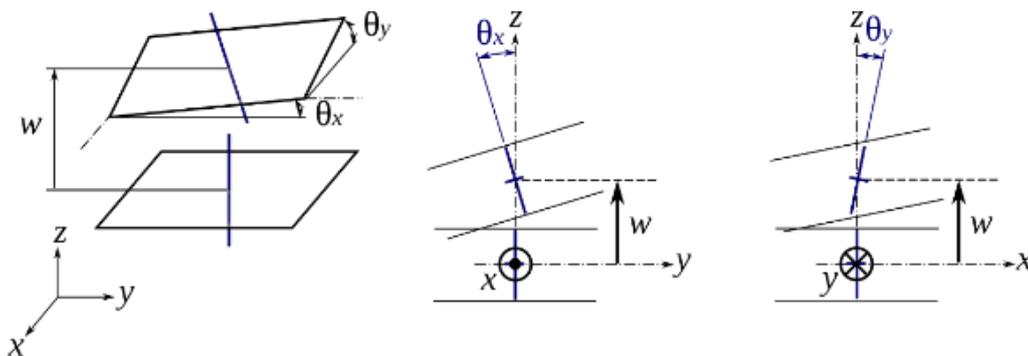


Figure III-1: Déplacement du plan moyen avec mise en évidence de la rotation d'une fibre normale. (Contributeurs de Wikipédia, 2015a)

Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

$u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ sont respectivement les déplacements suivant les directions x , y , z .
 $u_0(x, y, z)$, $v_0(x, y, z)$, $w_0(x, y, z)$ sont respectivement les déplacements du plan moyen suivant les directions x , y , z .

$\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$ sont respectivement les rotations dues à la flexion autour des axes x , y (sans cisaillement)

Le plan principal de la plaque est le plan (x, y) et l'épaisseur h est orientée selon l'axe z .

III.2.2. Modèle de déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin-Reissner (FSDT) :

La théorie des plaques épaisses de Mindlin-Reissner est une extension de la théorie de Love-Kirchhoff qui prend en compte les déformations de cisaillement dans l'épaisseur d'une plaque. La théorie a été proposée en 1948 par Yakov Solomonovich Uflyand (1916-1991) et en 1951 par Raymond Mindlin. Une théorie similaire, mais pas identique, dans le cadre statique, avait été proposée plus tôt par Eric Reissner en 1945. Les deux théories sont destinées aux plaques épaisses dans lesquelles la normale à la surface médiane reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface médiane. La théorie d'Uflyand-Mindlin est utilisée pour calculer les déformations et les contraintes dans une plaque dont l'épaisseur est de l'ordre du dixième des dimensions planes.

Pour résumé, la théorie FSDT introduit les hypothèses suivantes :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;
- La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes ;
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée ;
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

Il en ressort que la déformation de cisaillement transversale est non nulle, La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

$\phi_x(x, y)$ et $\phi_y(x, y)$ sont respectivement les rotations autour des axes x, y .

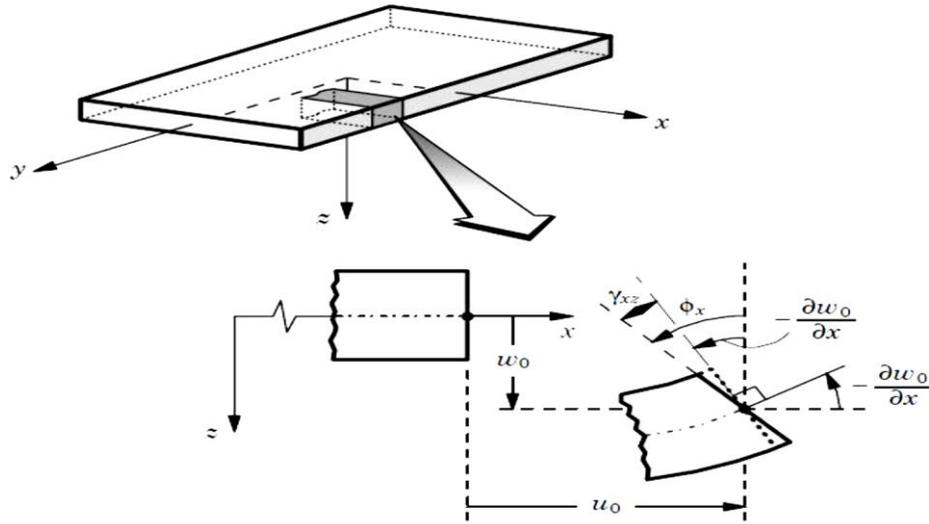


Figure III-2: Schématisation des déformations des plaques par la théorie (FSDT). (J. N. Reddy, 1984)

Comme mentionné ci-dessus, la déformation de cisaillement transversale est non nulle, or elle devrait l'être sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Pour pallier à ce problème, la théorie des déformations du premier ordre introduit un facteur de correction de cisaillement (k) qui n'est pas facile à déterminer car il dépend en même temps des conditions aux limites, des charges appliquées, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur et de la géométrie. Pour éviter donc l'introduction de ce facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

III.2.3. Modèle de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Pour rendre compte de la déformation transverse sans introduction d'un facteur de correction, les théoriciens comme (Bakora & Tounsi, 2015; Bourada et al., 2015; Chaht et al., 2015; Kant & Swaminathan, 2002; Murty, 1977; J. N. Reddy, 1984; thai Hoang et al., 2012) ont modélisé le comportement des poutres courtes ou plaques épaisses en se basant sur le développement en série de Taylor (V. T. Nguyen, 2004), qui s'écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_\alpha^1(x, y) + z^2\phi_\alpha^2(x, y) + \dots + z^n\phi_\alpha^n(x, y) \quad (\text{III-3})$$

Ou n définit l'ordre utilisé dans la théorie, la cinématique d'un modèle d'ordre élevé est illustrée dans la figure III.3 ci-dessous :

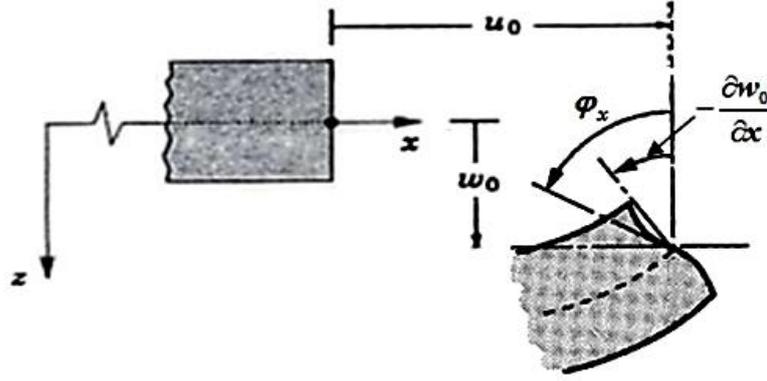


Figure III-3: Modèle des plaques dans le cas de la théorie de déformation en cisaillement

Le champ de déplacement est généralement donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{III-4a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{III-4b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III-4c})$$

u_0, v_0, w_0 et φ_x, φ_y sont respectivement les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x, y avec :

$$\left(\varphi_x(x, y) = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \quad \varphi_y(x, y) = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \quad (\text{III-5})$$

$\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) sont obtenus en mettant $\Psi(z) = 0$ alors que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue en mettant $\Psi(z) = z$.

On retrouve dans la littérature plusieurs formules de la fonction de forme (gauchissement) $\Psi(z)$; il faut savoir que cette fonction assure la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces libres de la plaque. Nous en citerons dans ce qui suit les plus notables d'entre ces formules.

a. Modèle de Reddy (1997,1999)

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{III-6})$$

Le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution

d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

b. Touratier (Touratier 1991)

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin z \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{III-7})$$

Touratier propose une fonction trigonométrique sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

c. Karama

(Karama et al., 2003) ont développé une fonction exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential Shear Deformation plate Theory ESDPT).

$$\psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad \text{et} \quad \varphi_z(z) = 0 \quad (\text{III-8})$$

d. Soldatos

(Soldatos, 1993) a développé une fonction hyperbolique pour la théorie HSDT sous la forme :

$$\psi(z) = h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) - z \sinh \left(\frac{1}{2} \right) \quad (\text{III-9})$$

III.2.4. La théorie raffinée de déformation des plaques :

Shimpi (2002) a suggéré un nouveau modèle pour les plaques isotropes baptisé RPT (Refined Plate Theory). La théorie raffinée de déformation des plaques n'a besoin que de deux variables et permet de réduire le nombre d'inconnus à quatre au lieu de cinq dans le cas classique, elle satisfait entre autres les conditions de contrainte nulle sur les surfaces libres et n'a pas besoin du facteur de correction de cisaillement dans la formulation. Aussi,

elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Tounsi et al., (2013) ont étudié la réponse en flexion des plaques sandwich FGM en utilisant une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables dans des conditions de chargement thermique et thermomécanique. Ait Atmane et al., (2010) ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Hadji et al., (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwich respectivement.

Dans la RPT, Le champ de déplacement s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, z) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{(III-10a)}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y, z) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{(III-10b)}$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad \text{(III-10c)}$$

Où u_0 , v_0 sont les déplacements suivant les directions x et y d'un point sur le plan moyen de la plaque.

w_b et w_s sont les déplacements transversaux dus à la flexion et au cisaillement, respectivement.

$\psi(z)$ est une fonction de forme qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur et vérifie la nullité de la contrainte de cisaillement transversale aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

III.3 Conclusion :

La présentation dans ce chapitre des différentes théories des plaques nous permet de voir l'évolution des tentatives de résolution analytiques du calcul de la déformation des plaques. Cette évolution a commencé par la théorie classique des plaques CPT de (love-kirchoff) basée sur le principe de la fibre neutre. La théorie classique CPT donne de bons résultats si en reste dans la limite des plaques minces. Pour les plaques épaisses, la déformation de cisaillement transversale ne peut plus être négligée, c'est pourquoi les chercheurs en mis au point une nouvelle théorie des plaques appelée modèle de déformation de cisaillement du premier ordre Mindlin- Reissner (FSDT). Cette dernière théorie néglige néanmoins le gauchissement de la plaque et a besoin d'un facteur de correction pour satisfaire à la nullité de déformation de cisaillement transversal sur les surfaces libres. Avec le Modèle de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), les chercheurs vont essayer de corriger les lacunes de la FSDT et s'approcher donc un peu plus de la réalité. Toutefois, cette évolution qui va dans le sens de la précision va contraindre les chercheurs à développer des formulations complexes. La théorie raffinée quant à elle va se poser comme solution intermédiaire entre précision et simplification des calculs.

Chapitre IV

ETUDE ANALYTIQUE DE
L'INFLUENCE DES CONDITIONS
AUX LIMITES SUR LA FLEXION ET
LA VIBRATION LIBRE DES
PLAQUES SANDWICH FGM

IV.1 Introduction

Dans le présent chapitre, une nouvelle théorie simple des plaques -basée sur le modèle de déformation en cisaillement des plaques d'ordre élevé HSDT- est proposée pour étudier la flexion et la vibration libre d'une plaque sandwich FG reposant sur un substrat élastique de type Winkler-Pasternak dans diverses conditions aux limites. Des termes d'intégration sont inclus dans le champ de déplacement proposé afin de réduire le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes. En appliquant le principe d'Hamilton, les équations de mouvement sont obtenues et sont résolues en utilisant la méthode de Galerkin pour différentes conditions aux limites. Les solutions analytiques de la flexion et de la vibration pour quatre conditions aux limites différentes seront illustrées.

IV.2 Propriétés matérielles de la plaque sandwich FG

Considérons une structure composite constituée de trois couches isotropes d'épaisseur h , de longueur a et de largeur b . La plaque sandwich FGM est supportée aux quatre bords définis dans le système de coordonnées (x, y, z) avec les axes x et y situés dans le plan médian ($z=0$) et son origine placée au coin de la plaque. Les positions verticales des deux interfaces entre les couches du noyau et des faces sont désignées, respectivement, par h_2 et h_1 . L'âme de la plaque sandwich est un matériau céramique et les peaux sont composées d'un matériau à gradient de propriété dans le sens de l'épaisseur. La peau inférieure varie d'une surface riche en métal ($z = h_0 = -h/2$) à une surface riche en céramique, tandis que la face supérieure de la peau varie d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal ($z = h_3 = h/2$). Il est supposé que la plaque repose sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler k_w et une rigidité en cisaillement k_s comme illustré.

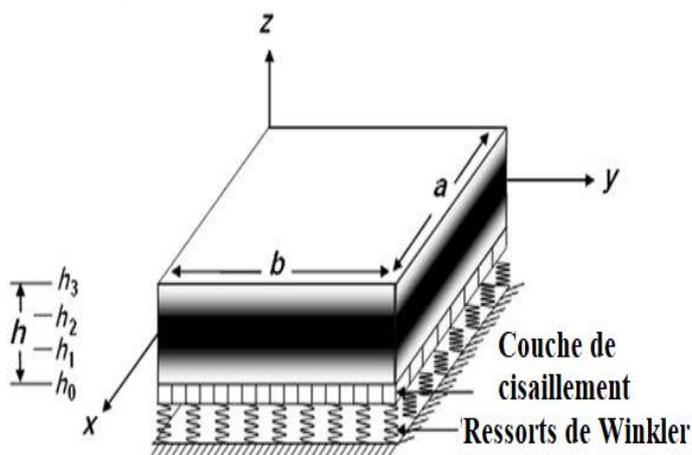


Figure IV-1: Géométrie de la plaque sandwich FG reposant sur des fondations élastiques.

On suppose que les propriétés matérielles des couche extérieures FGM varient de manière continue à travers l'épaisseur de la plaque selon une distribution de loi de puissance (Jha et al., 2012; Kar & Panda, 2015; Praveen & Reddy, 1998; Ramteke et al., 2019; Sahouane et al., 2019; Zouatnia & Hadji, 2019) :

$$P(z) = (P_c - P_m)V^{(n)} + P_m \quad n=1, 2, 3 \quad (IV-1)$$

où P désigne la caractéristique effective du matériau, telle que le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et la densité massique ρ ; les indices c et m désignent respectivement les phases céramique et métallique ; et V est la fraction volumique de la phase céramique donnée par la règle suivante :

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p, & z \in [h_0, h_1] \\ V^{(2)} &= 1, & z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)} &= \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p, & z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \quad (IV-2)$$

où $V^{(n)}$, ($n=1, 2, 3$), désigne la fonction de fraction volumique de la couche n ; p est l'indice de fraction volumique ($0 \leq p \leq +\infty$) , qui dicte le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur. Notez que le noyau du sandwich ou tout autre matériau isotrope peuvent être obtenus comme un cas particulier de la fonction de la loi de puissance en fixant $p = 0$. La fraction volumique de la phase métallique est donnée par $V_m = 1 - V_c$.

IV.3 Equations constitutives

Les relations constitutives pour des FGM élastiques et isotropiques sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (IV-3)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont respectivement les composantes de contraintes et de déformations. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (IV-1), les coefficients de rigidité, peuvent être exprimés comme suit.

$$Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (IV-4a)$$

$$Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, \quad (IV-4b)$$

$$Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)}, \quad (IV-4c)$$

Dans cette étude, d'autres suppositions simplificatrices sont faites sur la HSDT conventionnelle afin de réduire le nombre d'inconnues. Le champ de déplacement de la HSDT conventionnelle est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (IV-5)$$

$u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ sont les cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque. En prenant $\phi_x = k_1 \int \theta(x, y, t) dx$ et $\phi_y = k_2 \int \theta(x, y, t) dy$. Le champ de déplacement ci-dessus mentionné peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (IV-6)$$

Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. La fonction de forme $f(z)$ est choisie pour satisfaire aux conditions aux limites avec contrainte nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, ainsi nous n'aurons pas besoin de facteur de correction de cisaillement. Dans cette étude, la fonction de forme utilisée (Hebali et al., 2014).

$$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z \cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (\text{IV-7})$$

On peut observer que la cinématique de l'équation (IV-6) utilise seulement quatre inconnues (u_0, v_0, w_0 , et θ).

Les cinq composantes de déformation linéaire non nulles compatibles avec le champ de déplacement de l'équation (IV-6) sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-8})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-9})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}$$

Et $g(z)$ est donnée comme suit :

$$g(z) = f'(z) \quad (\text{IV-10})$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode type et peuvent s'écrire comme suit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad ; \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (IV-11)$$

$$k_1 A' \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} = \varphi_x(x, y) \quad ; \quad k_2 B' \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = \varphi_y(x, y)$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés en fonction du type de solution utilisée, dans ce cas pour une solution exactes pour les plaques sandwich pour différentes conditions aux limites. Par conséquent A' , B' , k_1 , k_2 sont exprimés comme suit :

Tableau IV-1 : Valeur de A' , B' , k_1 , k_2 pour différentes conditions aux limites.

Conditions aux limites	A'	k_1	B'	k_2
SSSS	$-1/\lambda^2$	λ^2	$-1/\mu^2$	μ^2
CSCS	$-1/4\lambda^2$	$4\lambda^2$	$-1/\mu^2$	μ^2
CCCC	$-1/4\lambda^2$	$4\lambda^2$	$-1/4\mu^2$	$4\mu^2$
FCFC	$-1/8\lambda^2$	$8\lambda^2$	$-1/4\mu^2$	$4\mu^2$

IV.4 Équations gouvernantes

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique comme suit (Akbas, 2019; Barati & Shahverdi, 2020; Eltaher et al., 2017; Kar & Panda, 2015; Kolahchi et al., 2017a, 2017b; Mehar et al., 2016; Safa et al., 2019) :

$$\int_0^t \delta(U + U_F - V + K) dt = 0, \quad (IV-12)$$

Où U , U_F , V et K sont respectivement, l'énergie de déformation, l'énergie de déformation supplémentaire induite par les fondations élastiques, le travail des forces externes (appliquées) et l'énergie cinétique. La première variation de l'énergie de déformation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(n)} \delta \varepsilon_x + \sigma_y^{(n)} \delta \varepsilon_y + \tau_{xy}^{(n)} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{(n)} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz}^{(n)} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\
 &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + M_x \delta k_x^b + M_y \delta k_y^b + M_{xy} \delta k_{xy}^b \\
 &\quad + S_x \delta k_x^s + S_y \delta k_y^s + S_{xy} \delta k_{xy}^s + Q_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0] dA
 \end{aligned} \tag{IV-13}$$

où A est la surface supérieure.

Les résultantes des contraintes et moments de la plaque sandwich FGM peuvent être obtenus en intégrant l'équation (IV-3) sur l'épaisseur, et s'écrivent comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x & M_y & M_{xy} \\ S_x & S_y & S_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \tag{IV-14a}$$

$$(Q_{xz}, Q_{yz}) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz. \tag{IV-14b}$$

où h_n et h_{n-1} sont les coordonnées z supérieures et inférieures de la n ème couche.

L'énergie de déformation induite par les fondations élastiques peut être définie comme suit :

$$\delta U_F = \int_A f_e \delta W_0 dA \tag{IV-15}$$

Où A est la surface de la face supérieure et f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation Pasternak f_e est donné par :

$$f_e = k_w w_0 - k_{sx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - k_{sy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{IV-16}$$

où k_w est le module de réaction de la couche de fondation (coefficient d'élasticité de la fondation) et k_{sx} et k_{sy} sont les modules de cisaillement de la couche de fondation (rigidité de la couche de cisaillement de la fondation). Si la fondation est homogène et isotrope, nous

obtiendrons $k_{sx} = k_{sy} = k_s$. Si la rigidité de la couche de cisaillement de la fondation est négligée, la fondation de Pasternak devient une fondation de Winkler.

La variation du travail fourni par la charge transversale q peut être exprimée comme suit :

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA \quad (IV-17)$$

La variation de l'énergie cinétique est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\ &\quad + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad \left. - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (IV-18)$$

où la convention de l'exposant indique la différentiation par rapport à la variable temporelle t ;

$\rho(z)$ est la densité de masse ; et $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$ sont les inerties de masse définies comme suit :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (IV-19a)$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f(z), z f(z), f^2(z)) \rho(z) dz \quad (IV-19b)$$

En substituant les équations (IV-13), (IV-15), (IV-17) et (IV-18) à l'équation (IV-12), et en intégrant par parties et en rassemblant les coefficients de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta$ on obtient les équations du mouvement de la plaque suivantes :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q - f_e = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \quad (IV-20) \\
 \delta \theta : \quad & -k_1 S_x - k_2 S_y - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial Q_x}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & -K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (IV-3) dans l'équation (IV-14), les résultantes des contraintes d'une plaque sandwich composée de trois couches peuvent être liées aux déformations totales par

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad Q = A^s \gamma^0 \quad (IV-21)$$

où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t \quad M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t \quad S = \{S_x, S_y, S_{xy}\}^t \quad (IV-22a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (IV-22b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (IV-22c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix} \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (IV-22d)$$

$$Q = \{Q_{yz}, Q_{xz}\}^t \quad \gamma^0 = \{\gamma_{yz}^0, \gamma_{xz}^0\}^t \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (IV-22e)$$

Où A_{ij} et B_{ij} , etc., sont les rigidités de la plaque, définis par

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \nu^{(n)} \\ \frac{1-\nu^{(n)}}{2} \end{array} \right\} dz \quad (IV-23a)$$

et $(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s)$,

$$Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (IV-23b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (IV-23c)$$

IV.5 Équations du mouvement en termes de déplacements

En substituant les équations (IV-8) et (IV-21) à l'équation (IV-20), les équations d'équilibre peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0 , et θ) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : L_1 u_0 + A_{11} L_2 v_0 - L_3 d_1 w_0 + L_4 d_1 \theta &= 0 \\ \delta v_0 : A_{11} L_2 u_0 + L_5 v_0 - L_3 d_2 w_0 + L_6 d_2 \theta &= 0 \\ \delta w_0 : L_3 (d_1 u_0 + d_2 v_0) - L_7 w_0 + L_8 \theta &= 0 \\ \delta \theta : -L_4 d_1 u_0 - L_6 d_2 v_0 + L_8 w_0 - L_9 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (IV-24)$$

Où les opérateurs L_i sont donnés par :

$$L_1 = A_{11} \nabla_x^2 - I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad L_2 = (\nu + \bar{\nu}) d_{12} \quad L_3 = B_{11} \nabla^2 - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (IV-25a)$$

$$L_4 = B_{11}^s [k_1 + k_2 \nu + \bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B')] d_{22} - k_1 A' J_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad L_5 = A_{11} \nabla_y^2 - I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (IV-25b)$$

$$L_6 = B_{11}^s [k_1 \nu + k_2 + \bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B')] d_{11} - k_2 B' J_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (IV-25c)$$

$$L_7 = D_{11} \nabla^4 + (I_0 - I_2 \nabla^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (k_w - k_s \nabla^2) \quad (\text{IV-25d})$$

$$L_8 = D_{11}^s [(k_1 + k_2 \nu) d_{11} + 2\bar{\nu} (k_1 A' + k_2 B') d_{1122} + (k_1 \nu + k_2) d_{22}] - J_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (k_1 A' d_{11} + k_2 B' d_{22}) \quad (\text{IV-25e})$$

$$L_9 = H_{11}^s (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) + \bar{\nu} H_{11}^s (k_1 A' + k_2 B')^2 d_{1122} - k_1^2 A'^2 A_{55}^s d_{11} - k_2^2 B'^2 A_{55}^s d_{22} - K_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(k_1 A')^2 d_{11} + (k_2 B')^2 d_{22}] \quad (\text{IV-25f})$$

où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \quad (\text{IV-26a})$$

$$d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m} \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i, j, l, m = 1, 2).$$

et

$$\nabla_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \nabla_y^2 = \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{IV-26b})$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 (\nabla^2) \quad \bar{\nu} = \frac{1 - \nu}{2}$$

IV.6 Solutions exactes pour les plaques sandwich FGM

La solution exacte de l'équation (IV-24) pour la plaque sandwich FGM avec des bords simplement appuyés (S), encrés (C) ou libres (F) est présentée. Ces conditions aux limites sont définies comme suit :

Simplement appuyés (S) :

$$v_0 = w_0 = \frac{\partial \theta}{\partial y} = N_{xx} = M_{xx} = S_{xx} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, a, \quad (\text{IV-27})$$

$$u_0 = w_0 = \frac{\partial \theta}{\partial x} = N_{yy} = M_{yy} = S_{yy} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, b.$$

Encrés (C) :

$$u_0 = v_0 = w_0 = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, a; \quad y = 0, b. \quad (\text{IV-28})$$

libres (F) :

$$\begin{aligned} M_{xx} = M_{xy} = Q_{xz} = 0 & \quad \text{at} \quad x = 0, a, \\ M_{yy} = M_{xy} = Q_{yz} = 0 & \quad \text{at} \quad y = 0, b. \end{aligned} \quad (\text{IV-29})$$

La représentation suivante pour les quantités de déplacement, qui satisfont les conditions limites ci-dessus mentionnées, est appropriée dans le cas de notre problème :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} e^{i\omega t} \\ W_{mn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ Z_{mn} \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} Y_n(y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-30})$$

Où $i = \sqrt{-1}$. U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et Z_{mn} sont des coefficients, et ω est la fréquence naturelle. Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ données dans le tableau IV-2 note que $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ pour satisfaire aux diverses conditions aux limites des équations (IV-27) – (IV-29). La plaque est soumise à une charge transversale q .

Le chargement transversal q est également développé dans la double série sinusoïdale de Fourier comme (Hebali et al., 2014; J. Reddy et al., 2001):

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV-31})$$

Les coefficients Q_{mn} pour le cas d'une charge uniformément répartie (UDL : Uniformly Distributed Load) sont définis comme suit :

$$Q_{mn} = \frac{16q_0 ab}{\lambda \mu}, \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (\text{IV-32})$$

où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Pour le cas d'une charge distribuée de manière sinusoïdale (SDL : Sinusoidally Distributed Load), nous avons

$$m = n = 1 \quad \text{et} \quad Q_{11} = q_0 \quad (\text{IV-33})$$

En substituant les expressions (IV-30) dans les équations gouvernantes (IV-24) et en multipliant chaque équation par la fonction propre correspondante puis en intégrant sur le domaine de solution, on obtient, après quelques manipulations mathématiques, les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & M_{14} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ Z_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_q \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-34})$$

Dans lesquelles

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_{11}(e_{12} + \bar{\nu} e_8) \\ S_{12} &= A_{11}(\nu + \bar{\nu})e_8 \\ S_{13} &= -B_{11}(e_8 + e_{12}) \\ S_{14} &= B_{11}^s[(k_1 + k_2\nu)e_{12} + \bar{\nu}(k_1A' + k_2B')e_{20}] \\ S_{21} &= A_{11}(\nu + \bar{\nu})e_{10} \\ S_{22} &= A_{11}(\bar{\nu}e_{10} + e_4) \\ \\ S_{23} &= -B_{11}(e_{10} + e_4) \\ S_{24} &= B_{11}^s[(k_1\nu + k_2)e_{10} + \bar{\nu}(k_1A' + k_2B')e_{21}] \\ S_{31} &= -B_{11}(e_{13} + e_{11}) \\ S_{32} &= -B_{11}(e_{11} + e_5) \\ S_{33} &= D_{11}(e_{13} + e_5 + 2e_{11}) + (\bar{N}_{xx} - k_{xx})e_9 \\ &\quad + (\bar{N}_{yy} - k_{yy})e_3 + k_w e_1 + 2\bar{N}_{xy}e_7 \\ S_{34} &= -D_{11}^s[(k_1 + k_2\nu)e_{13} + 2\bar{\nu}(k_1A' + k_2B')e_{14} + (k_1\nu + k_2)e_{11}] \\ S_{41} &= B_{11}^s[(k_1 + k_2\nu)e_{15} + \bar{\nu}(k_1A' + k_2B')e_{16}] \\ S_{42} &= B_{11}^s[(k_1\nu + k_2)e_{17} + \bar{\nu}(k_1A' + k_2B')e_{16}] \\ S_{43} &= -D_{11}^s[(k_1 + k_2\nu)e_{15} + 2\bar{\nu}(k_1A' + k_2B')e_{16} + (k_1\nu + k_2)e_{17}] \\ S_{44} &= H_{11}^s(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2)e_{15} + \bar{\nu}H_{11}^s(k_1A' + k_2B')^2 e_{18} \\ &\quad - A_{55}^s[(k_1A')^2 e_{19} + (k_2B')^2 e_{16}] \end{aligned} \quad (\text{IV-35})$$

et

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= -I_0 e_6 \\
 M_{12} &= 0 \\
 M_{13} &= I_1 e_6 \\
 M_{14} &= I_1 e_{12} \\
 M_{22} &= -I_0 e_2 \\
 M_{23} &= I_1 e_2 \\
 M_{24} &= J_1 k_2 B' e_{10} \\
 M_{31} &= I_1 e_9 \\
 M_{32} &= I_1 e_3 \\
 M_{33} &= I_0 e_1 - I_2 (e_9 + e_3) \\
 M_{34} &= J_2 (k_2 B' e_{11} + k_1 A' e_{13}) \\
 M_{41} &= -J_1 k_1 A' e_{15} \\
 M_{42} &= -J_1 k_2 B' e_{17} \\
 M_{43} &= J_2 (k_1 A' e_{15} + k_2 B' e_{17}) \\
 M_{44} &= -J_3 [(k_1 A')^2 e_{19} + (k_2 B')^2 e_{16}]
 \end{aligned} \tag{IV-36}$$

avec

$$\begin{aligned}
 (e_6, e_{20}, e_8, e_{12}) &= \int_0^b \int_0^a (X'_m Y_n, X'''_m Y''_n, X'_m Y''_n, X'''_m Y_n) X'_m Y_n dx dy \\
 (e_2, e_{21}, e_4, e_{10}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y'_n, X'''_m Y'_n, X_m Y''_n, X''_m Y'_n) X_m Y'_n dx dy \\
 (e_1, e_3, e_5, e_{14}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n, X''_m Y''_n, X_m Y''_n, X'''_m Y''_n) X_m Y_n dx dy \\
 (e_7, e_9, e_{11}, e_{13}) &= \int_0^b \int_0^a (X'_m Y'_n, X''_m Y''_n, X''_m Y''_n, X'''_m Y''_n) X_m Y_n dx dy \\
 (e_{15}, e_{16}, e_{17}) &= \int_0^b \int_0^a (X''_m Y_n, X''_m Y''_n, X_m Y''_n) X''_m Y_n dx dy \\
 (e_{18}, e_{19}) &= \int_0^b \int_0^a (X'''_m Y''_n, X'''_m Y''_n) X''_m Y_n dx dy \\
 f_q &= \int_0^b \int_0^a Q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \sin(\lambda x) \sin(\mu y) dx dy
 \end{aligned} \tag{IV-37}$$

Tableau IV-2: Les fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$

	Conditions aux limites		Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$	
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CSCS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CCCC	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
FCFC	$X_m''(0) = X_m'''(0) = 0$ $X_m''(a) = X_m'''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$	$\cos^2(\lambda x)[\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin^2(\mu y)$

– ()' désigne la dérivée par rapport aux coordonnées correspondantes.

La solution non triviale est obtenue lorsque le déterminant de l'équation (IV-34) est égal à zéro. Pour le problème de vibration libre, nous avons $f_q = 0$. Alors que pour l'analyse de la flexion, nous mettons $\omega = 0$.

IV.7 Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude d'une nouvelle théorie de déformation en cisaillement pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre d'une plaque sandwich FGM est proposée. La plaque étudiée est constituée d'une couche centrale en céramique et de deux couches de peaux en métal, l'interface entre couche se faisant suivant un gradient de propriété. L'analyse a été effectuée sous différents cas de conditions aux limites utilisant une théorie hyperbolique simple de déformation en cisaillement avec seulement quatre inconnues. Les plaques sandwich sont supposées s'appuyer sur des fondations élastiques à deux paramètres. Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Pour résoudre le problème pour différentes conditions aux limites, l'approche de Galerkin est utilisée pour les plaques sandwich FGM symétriques et asymétriques. Les résultats obtenus par la présente formulation seront comparés à d'autres résultats disponibles dans la littérature dans le chapitre suivant.

Chapitre V

RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSIONS

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, les résultats numériques des réponses en flexion et en vibration libre sont présentés pour des plaques sandwich FGM reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres avec différents cas de conditions aux limites. Pour vérifier l'exactitude de la solution actuelle, les résultats obtenus sont comparés aux résultats existants dans la littérature.

V.2 Propriétés matérielles

Les propriétés matérielles du métal et de la céramique sont choisies comme indiqué dans le tableau.

Tableau V-1 : Propriétés matérielles utilisées dans la plaque sandwich FG

Propriété	Métal	Céramique
	Al	Al ₂ O ₃
E (GPa)	70	380
ν	0.3	0.3
ρ (kg/m ³)	2707	3800

Les différents types de plaques sandwich utilisées dans la présente étude sont présentés ci-dessous :

- La plaque sandwich FG (1-0-1) : La plaque est symétrique et constituée de seulement deux couches FG d'épaisseur égale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale. On a donc, $h_1 = h_2 = 0$
- La plaque sandwich FG (1-1-1) : Ici, la plaque est symétrique et constituée de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, on a $h_1 = -h/6$, $h_2 = h/6$
- La plaque sandwich FG (1-2-1) : la plaque est symétrique : $h_1 = -h/4$, $h_2 = h/4$
- La plaque sandwich FG (1-3-1) : la plaque est symétrique : $h_1 = -3h/10$, $h_2 = 3h/10$
- La plaque sandwich FG (2-1-2) : nous avons dans ce cas : $h_1 = -h/10$, $h_2 = h/10$
- La plaque sandwich FG (2-2-1) : non-symétrique : $h_1 = -h/10$, $h_2 = 3h/10$

Par commodité, la normalisation suivante est utilisée dans la comparaison de tous les résultats numériques :

$$w^* = \frac{100D}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \hat{w} = \frac{10E_0 h}{q_0 a^2} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{10h^2}{q_0 a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right),$$

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h}, \quad K_w = \frac{k_w a^4}{D}, \quad K_s = \frac{k_s a^2}{D}, \quad D = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$$

où la valeur de référence est prise comme : $E_0 = 1GPa$

V.3 Analyse de la flexion

Pour démontrer l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction des réponses en flexion des plaques Al/Al₂O₃, certains résultats sont présentés ici pour être comparés avec ceux disponibles dans la littérature (Cooke & Levinson, 1983; K. H. Lee et al., 2002; J. Reddy et al., 2001). Les déformations centrales sous des chargements uniformes ($K_w = K_s = 0$) sont indiqués dans le tableau V-2.

Tableau V-2 : Déformation maximale w^* des plaques carrées et rectangulaires homogènes, simplement appuyées sous des charges uniformes.

Méthode	$a = b$			$a = 0.5 b$		
	$a/h=25$	10	5	$a/h=25$	10	5
Reddy et al. (2001)	0.410	0.427	0.490	1.018	1.045	1.043
Cooke and Levinson (1983)	0.410	0.427	0.490	1.018	1.045	1.043
Lee et al. (2002)	0.410	0.427	0.490	1.018	1.045	1.043
Présente	0.4010	0.427	0.490	1.018	1.045	1.143

Les résultats des comparaisons pour les déformations de plaques homogènes reposant sur une fondation élastique à deux paramètres, sous des charges uniformes sont présentés dans le tableau V-3. La présente théorie avec seulement quatre inconnues donne d'excellents résultats dans tous les cas avec ceux de (Zenkour & Radwan, 2018).

Tableau V-3 : déformation adimensionnelles ($10 w^*$) de plaques homogènes reposant sur des fondations élastiques et soumises à des chargements uniformément répartis.

a/h	b/h	(10,10)		(10,100)		(100,10)		(100,100)	
		Présente	Réf (a)	Présente	Réf (a)	Présente	Réf (a)	Présente	Réf (a)
0.5	5	5.5718	5.5720	1.0371	1.0371	4.0769	4.0769	0.9679	0.9679
	10	5.3562	5.3563	1.0330	1.0330	3.9791	3.9791	0.9649	0.9649
	100	5.2811	5.2811	1.0320	1.0320	3.9446	3.9446	0.9642	0.9642
1.0	5	2.9270	2.9271	0.6451	0.6450	2.4787	2.4788	0.6190	0.6190
	10	2.7059	2.7059	0.6383	0.6383	2.3271	2.3271	0.6132	0.6132
	100	2.6276	2.6276	0.6364	0.6364	2.2724	2.2724	0.6117	0.6117
2.0	5	0.7165	0.7165	0.2207	0.2207	0.6844	0.6844	0.2174	0.2174
	10	0.5736	0.5736	0.2069	0.2069	0.5536	0.5536	0.2041	0.2041
	100	0.5219	0.5219	0.2012	0.2012	0.5056	0.5056	0.1987	0.1987

(a) Zenkour and Radwan (2018)

Le tableau V-4 présente la déformation centrale sans dimension (\hat{w}), contrainte normale ($\bar{\sigma}_x$) et contrainte de cisaillement ($\bar{\tau}_{xy}$) pour une plaque sandwich FG soumise à un chargement sinusoïdale. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions données par (Merdaci et al., 2011b). On peut voir que les prédictions obtenues pour les déformations sont en accord.

Tableau V-4 : déformation adimensionnelle(\hat{w}), contrainte normale et de cisaillement de plaques sandwich FG soumises à un chargement sinusoïdale.

p	Méthode	\hat{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$
1-0-1	RSDT1 Réf(b)	0.07790303811	1.995500426	0.2461800786
	RSDT2 Réf(b)	0.07790968813	1.994322048	0.2385722368
	Présente	0.07790626337	1.993313666	0.2321588570
0	RSDT1 Réf(b)	0.1960374616	0.9440725801	0.3410283239
	RSDT2 Réf(b)	0.1960877843	0.9436998270	0.3343263458
	Présente	0.1961196994	0.9433786862	0.3285935696
1	RSDT1 Réf(b)	0.2847866148	1.377021358	0.4142621883
	RSDT2 Réf(b)	0.2849023821	1.376618511	0.4091869511
	Présente	0.2849875541	1.376265910	0.4046867384
2	RSDT1 Réf(b)	0.33606390476	1.625907776	0.4750163773
	RSDT2 Réf(b)	0.3362423053	1.625518635	0.4713253791
	Présente	0.3363779004	1.625171832	0.4678317078
3	RSDT1 Réf(b)	0.3645156376	1.762667930	0.5282678443
	RSDT2 Réf(b)	0.3647438193	1.762667930	0.5254079891
	Présent	0.3649187246	1.761953313	0.5224579040

5	RSDT1 Réf(b)	0.3554038421	1.840255874	0.5759064640
	RSDT2 Réf(b)	0.3808987521	1.839886083	0.5733659296
	Présente	0.3813670328	1.839547044	0.5705423593
1-1-1 0	RSDT1 Réf(b)	0.07790303811	1.995500426	0.2461800786
	RSDT2 Réf(b)	0.07790968813	1.995500426	0.2385722368
	Présente	0.07790626337	1.993313666	0.2321588570
1	RSDT1 Réf(b)	0.1567130768	0.7538738155	0.2846232298
	RSDT2 Réf(b)	0.1567290438	0.7535245180	0.2777698981
	Présente	0.1567348574	0.7532278467	0.2720344806
2	RSDT1 Réf(b)	0.2106743313	1.018781385	0.3048004591
	RSDT2 Réf(b)	0.2107090884	1.018389504	0.2989262010
	Présente	0.2107314888	1.018056327	0.2940124336
3	RSDT1 Réf(b)	0.2451013158	1.187845692	0.3168735258
	RSDT2 Réf(b)	0.2451555605	1.187448435	0.3118723402
	Présente	0.2451946715	1.187109491	0.3076738915
4	RSDT1 Réf(b)	0.2676028572	1.298330162	0.3250024098
	RSDT2 Réf(b)	0.2676739215	1.297939361	0.3207031564
	Présente	0.2677272719	1.297604584	0.3170722614
5	RSDT1 Réf(b)	0.2829700265	1.373757679	0.3309424574
	RSDT2 Réf(b)	0.2830548580	1.373376155	0.3271941912
	Présente	0.2831197749	1.373048061	0.3240047527
1-2-1 0	RSDT1 Réf(b)	0.07790303811	1.995500426	0.2461800786
	RSDT2 Réf(b)	0.07790968813	1.995500426	0.2385722368
	Présente	0.07790626339	1.993313666	0.2321588570
1	RSDT1 Réf(b)	0.1349817311	0.6475971685	0.2705450198
	RSDT2 Réf(b)	0.1349767793	0.6472490279	0.2628693010
	Présente	0.1349655957	0.6469555714	0.2565050040
2	RSDT1 Réf(b)	0.1692408728	0.8158819124	0.2819062066
	RSDT2 Réf(b)	0.1692362771	0.8154785470	0.2745137059
	Présente	0.1692265738	0.8151401001	0.2684288499
3	RSDT1 Réf(b)	0.1903941485	0.9198385532	0.2881994693
	RSDT2 Réf(b)	0.1903936675	0.9194123216	0.2811258564
	Présente	0.1903880701	0.9190551778	0.2753242467
4	RSDT1 Réf(b)	0.2043026094	0.9882021870	0.2921729400

	RSDT2 Réf(b)	0.2043068289	0.9877663216	0.2853784402
	Présente	0.2043055459	0.9874011732	0.2798160095
5	RSDT1 Réf(b)	0.2139890657	1.035815027	0.2949192557
	RSDT2 Réf(b)	0.2139976337	1.035375225	0.2883554168
	Présente	0.2140002193	1.035006687	0.2829869587
2-1-2	0 RSDT1 Réf(b)	0.07790303811	1.995500426	0.2461800786
	RSDT2 Réf(b)	0.07790968813	1.995500426	0.2385722368
	Présente	0.07790626347	1.993313666	0.2321588570
1	RSDT1 Réf(b)	0.1734597228	0.8353570262	0.3015504090
	RSDT2 Réf(b)	0.1734932520	0.8350075555	0.2951461351
	Présente	0.1735128134	0.8347083932	0.2897240909
2	RSDT1 Réf(b)	0.2432596500	1.177554594	0.3344535292
	RSDT2 Réf(b)	0.2433313416	1.177177220	0.3295841212
	Présente	0.2433830725	1.176851545	0.3254000363
3	RSDT1 Réf(b)	0.2872645148	1.393221446	0.3562078083
	RSDT2 Réf(b)	0.2873727377	1.392856605	0.3526990656
	Présente	0.2874549794	1.392538447	0.3495973445
4	RSDT1 Réf(b)	0.3148758215	1.528387607	0.3721411748
	RSDT2 Réf(b)	0.3150142476	1.528043627	0.3697033242
	Présente	0.3151215501	1.527740512	0.3674435652
5	RSDT1 Réf(b)	0.3328492117	1.616230779	0.3845927855
	RSDT2 Réf(b)	0.3330115755	1.615906291	0.3829703775
	Présente	0.3331386274	1.615617583	0.3813446243
2-2-1	0 RSDT1 Réf(b)	0.07790303811	1.995500426	0.2461800786
	RSDT2 Réf(b)	0.07790968813	1.995500426	0.2385722368
	Présente	0.07790626347	1.993313666	0.2321588570
1	RSDT1 Réf(b)	0.1457900983	0.6551706776	0.2817627605
	RSDT2 Réf(b)	0.1457976301	0.6548254747	0.2743788976
	Présente	0.1457959149	0.6545323869	0.2682002042
2	RSDT1 Réf(b)	0.1894930926	0.8339863401	0.3002035928
	RSDT2 Réf(b)	0.1895109912	0.8335924793	0.2933103754
	Présente	0.1895183739	0.8332580801	0.2875437341
3	RSDT1 Réf(b)	0.2166927584	0.9434577978	0.3113186472
	RSDT2 Réf(b)	0.2167221065	0.9430467085	0.3048721239

	Présente	0.2167391635	0.9426970178	0.2994666116
4	RSDT1 Réf(b)	0.2343233353	1.013728625	0.3188535037
	RSDT2 Réf(b)	0.2343624668	1.013311427	0.3127535851
	Présente	0.2343876708	1.012955788	0.3076232112
5	RSDT1 Réf(b)	0.2463510788	1.061363472	0.3243713954
	RSDT2 Réf(b)	0.2463980407	1.060944155	0.3185308111
	Présente	0.2464297130	1.060586039	0.3136038294

(b) Merdaci et al. (2011)

Pour démontrer la conformité de la présente théorie dans la prédiction des réponses en flexion des plaques sandwich FG sous diverses conditions aux limites, les résultats obtenus ont été comparés à ceux développés par (Abdelaziz et al., 2017) dans le tableau V-5. Il en ressort que les résultats de la présente théorie concordent très bien.

On observe une bonne concordance entre les résultats de l'actuelle théorie de déformation en cisaillement et ceux obtenus par Zenkour et Radwan (2018) et Abdelaziz et al. (2017). On remarque aussi que les plaques les plus rigides et les plus souples correspondent respectivement aux plaques FCFC et SSSS. Avec l'augmentation du paramètre d'hétérogénéité p , la plaque devient plus molle, ce qui entraîne une augmentation de la déformation. Ceci est dû au fait que lorsque le paramètre p augmente, le comportement métallique devient plus prédominant.

Tableau V-5 : déformation adimensionnelle (\hat{w}) de plaques sandwich FG carrées $a/h=10$

Conditions aux limites	p	Méthode	Schéma				
			1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	Abdelaziz et al. (2017)	0.2956	0.2956	0.2956	0.2956	0.2956
		Présente	0,2960	0,2960	0,2960	0,2960	0,2960
	0.5	Abdelaziz et al. (2017)	0.5227	04846	04560	04366	0.4172
		Présente	0,5229	0.4849	0.4564	0,4370	0.4177
	1	Abdelaziz et al. (2017)	0.7454	0.6593	0.5954	0.5537	0.5124
		Présente	0.7452	0.6593	0.5956	0.5540	0.5129
	2	Abdelaziz et al. (2017)	1.0839	0.9254	0.8009	0.7200	0.6427
		Présente	1.0830	0.9249	0.8008	0.7202	0.6431
	5	Abdelaziz et al. (2017)	1.4519	1.2678	1.0767	0.9367	0.8131
		Présente	1.4492	1.2659	1.0758	0.9364	0.8132
	10	Abdelaziz et al. (2017)	1.5519	1.4053	1.2070	1.0392	0.8998
		Présente	1.5489	1.4026	1.2055	1.0387	0.8996

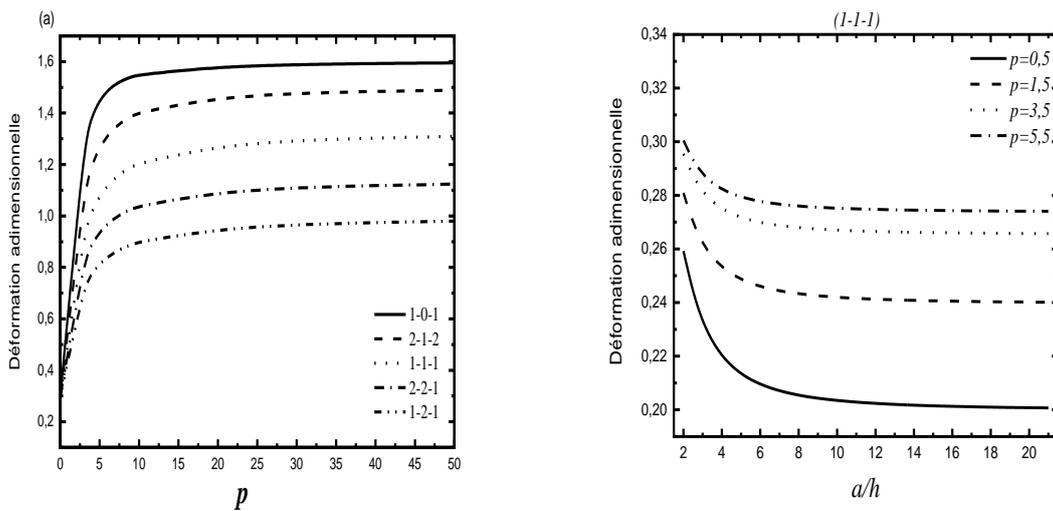
CSCS	0	Abdelaziz et al. (2017)	0.1836	0.1836	0.1836	0.1836	0.1836
		Présente	0.1875	0.1875	0.1875	0.1875	0.1875
	0.5	Abdelaziz et al. (2017)	0.3205	0.2972	0.2799	0.2682	0.2565
		Présente	0.3251	0.3016	0.2842	0.2726	0.2608
	1	Abdelaziz et al. (2017)	0.4546	0.4020	0.3634	0.3384	0.3134
		Présente	0,4595	0,4066	0,3678	0,3429	0,3179
	2	Abdelaziz et al. (2017)	0.6886	0.5615	0.4863	0.4379	0.3913
		Présente	0,6637	0,5659	0,4908	0,4426	0,3960
	5	Abdelaziz et al. (2017)	0.8835	0.7670	0.6513	0.5676	0.4931
		Présente	0,8891	0,7708	0,6554	0,5722	0,4977
	10	Abdelaziz et al. (2017)	0.9492	0.8503	0.7294	0.6290	0.5448
		Présente	0,9569	0,8538	0,7331	0,6336	0,5494
CCCC	0	Abdelaziz et al. (2017)	0.1606	0.1606	0.1606	0.1606	0.1606
		Présente	0,1595	0,1595	0,1595	0,1595	0,1595
	0.5	Abdelaziz et al. (2017)	0.2777	0.2576	0.2427	0.2327	0.2226
		Présente	0,2766	0,2566	0,2418	0,2320	0,2219
	1	Abdelaziz et al. (2017)	0.3922	0.3468	0.3137	0.2924	0.2710
		Présente	0,3908	0,3458	0,3129	0,2917	0,2705
	2	Abdelaziz et al. (2017)	0.5666	0.4825	0.4182	0.3770	0.3371
		Présente	0,5641	0,4809	0,4171	0,3763	0,3367
	5	Abdelaziz et al. (2017)	0.7610	0.6577	0.5584	0.4873	0.4236
		Présente	0,7557	0,6545	0,5566	0,4861	0,4229
	10	Abdelaziz et al. (2017)	0.8208	0.7292	0.6249	0.5396	0.4676
		Présente	0,8139	0,7249	0,6224	0,5381	0,4667
FCFC	0	Abdelaziz et al. (2017)	0.1038	0.1038	0.1038	0.1038	0.1038
		Présente	0.1027	0.1027	0.1027	0.1027	0.1027
	0.5	Abdelaziz et al. (2017)	0.1784	0.1655	0.1560	0.1496	0.1432
		Présente	0.1771	0.1644	0.1550	0.1487	0.1423
	1	Abdelaziz et al. (2017)	0.2512	0.2221	0.2010	0.1875	0.1739
		Présente	0.2497	0.2209	0.2000	0.1866	0.1731
	2	Abdelaziz et al. (2017)	0.3622	0.3082	0.2672	0.2411	0.2158
		Présente	0.3598	0.3065	0.2660	0.2402	0.2150
	5	Abdelaziz et al. (2017)	0.4868	0.4195	0.3561	0.3110	0.2705
		Présente	0.4821	0.4166	0.3543	0.3097	0.2696
	10	Abdelaziz et al. (2017)	0.5265	0.4651	0.3983	0.3442	0.2984
		Présente	0.5203	0.4613	0.3960	0.3426	0.2973

La figure V-1 ci-dessous présente les variations de la déformation des plaques sandwich FG carrées en fonction du paramètre d'hétérogénéité p . Différentes configurations de couches sont

utilisées pour les plaques FGM multicouches. Le rapport d'épaisseur de la plaque est égal à 10.

On peut observer que l'augmentation du paramètre d'hétérogénéité p entraîne une augmentation de la déformation (Figure V-1). Ce comportement peut être attribué au fait que plus le paramètre d'hétérogénéité p est élevé, plus la fraction volumique de la phase céramique est faible. Ainsi, l'augmentation du paramètre d'hétérogénéité rend la plaque plus molle en raison de la forte proportion de métal par rapport à la partie céramique, et par conséquent, entraîne une augmentation de la déformation. Les résultats montrent que les plaques les plus dures et les plus souples correspondent respectivement aux schémas (1-2-1) et (1-0-1).

Ce comportement est dû au fait que les plaques sandwich FG (1-2-1) et (1-0-1) correspondent aux fractions volumiques les plus élevées et les plus faibles de la phase céramique. De même, on peut observer que dans le cas d'encrage (CCCC), la plaque devient plus rigide, ce qui entraîne une réduction de la déformation (Figure V-1 (b)).



(a) Plaque simplement appuyée

(b) Plaque encrée

Figure V-1: Effet de l'hétérogénéité (p) sur la déformation (\hat{w}) d'une plaque sandwich FG ($a/h=10$)

La figure V-2 ci-dessous montre la variation de la déformation centrale en fonction du rapport côté/épaisseur (a/h) pour différents types de plaques sandwich FGM reposant sur des fondations élastiques. ($K_w=100$, $K_s=10$).

On peut voir que la déformation centrale \hat{w} augmente de façon monotone lorsque p augmente. Elle diminue avec l'augmentation des ratios (a/h). La différence est presque constante avec

l'augmentation du rapport côté/épaisseur. On observe également que la déformation centrale est réduite lorsque l'épaisseur du noyau augmente.

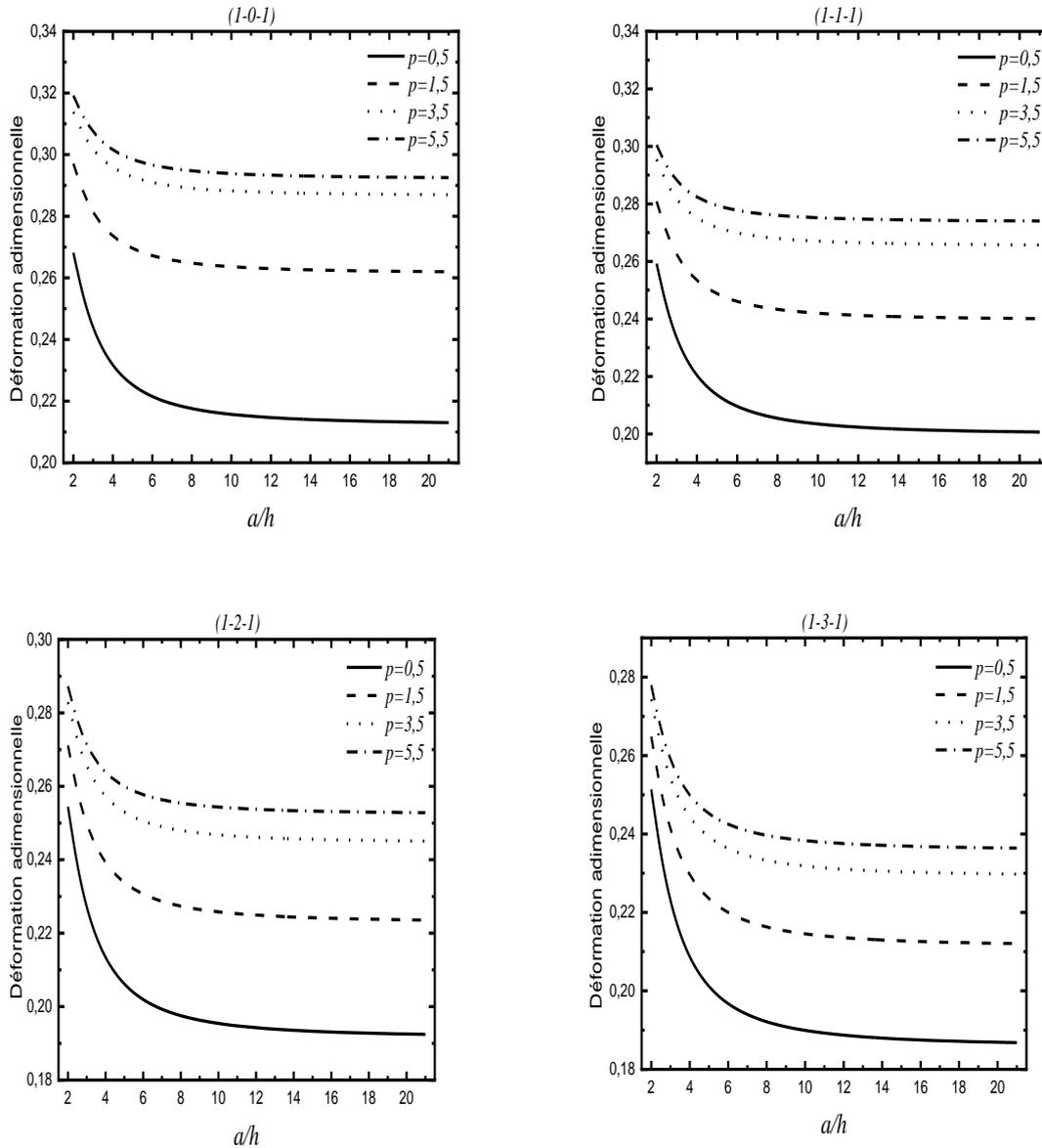


Figure V-2: Déformation adimensionnelle (\bar{w}) en fonction du rapport coté/épaisseur a/h d'une plaque sandwich FGM carrée reposant sur une fondation élastique ($K_w=100$, $K_s=10$).

La figure V-3 ci-dessous illustre les distributions à travers l'épaisseur de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ dans les plaques carrées FGM ($p = 2$) sous des chargements sinusoïdaux.

Comme le montre la Figure V-3, la contrainte axiale est compressive dans toute la plaque jusqu'à $z/h = 0$ pour les plaques sandwich FGM carrées symétriques, puis elle devient une contrainte de traction. D'autre part, pour les plaques sandwich FGM carrées non symétriques, la compression s'exerce sur toute la plaque jusqu'à $z/h = 0,05$, au-delà la contrainte axiale devient une contrainte de traction. Les contraintes de compression maximales se produisent en un point de la surface inférieure et les contraintes de traction maximales se produisent, bien sûr, en un point de la surface supérieure de la plaque sandwich FGM. En outre, on peut voir sur cette figure que la fondation élastique a un effet significatif sur les valeurs maximales de la contrainte axiale. On observe que la contrainte normale ($\bar{\sigma}_x$) augmente progressivement avec la diminution de K_w .

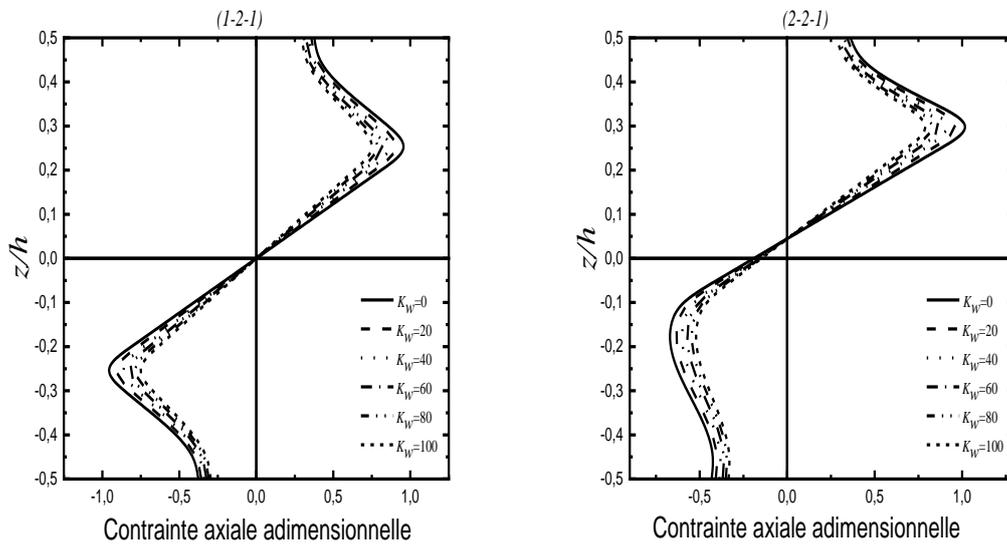


Figure V-3: Contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwich FGM carrées symétriques et asymétriques simplement appuyées ($p=2$) pour différentes valeurs du module de Winkler K_w avec $K_s = 10$ et $a/h = 10$.

La Figure V-4 ci-dessous illustre les distributions à travers l'épaisseur des contraintes de cisaillement ($\bar{\tau}_{xy}$) dans la plaque sandwich FGM carrée sous une charge répartie sinusoïdale. L'indice de la fraction volumique de la plaque sandwich FGM est fixé à $p = 2$.

On remarque que la contrainte de cisaillement transversale ($\bar{\tau}_{xy}$) augmente progressivement avec la diminution de K_w . On observe que la rigidité en flexion de la plaque sandwich FGM augmente avec l'augmentation du module d'élasticité de la fondation. Pour les plaques symétriques carrées, On note que la valeur maximale est atteinte au centre pour la plaque sandwich FGM symétrique, ce n'est pas le cas dans de la plaque asymétrique.

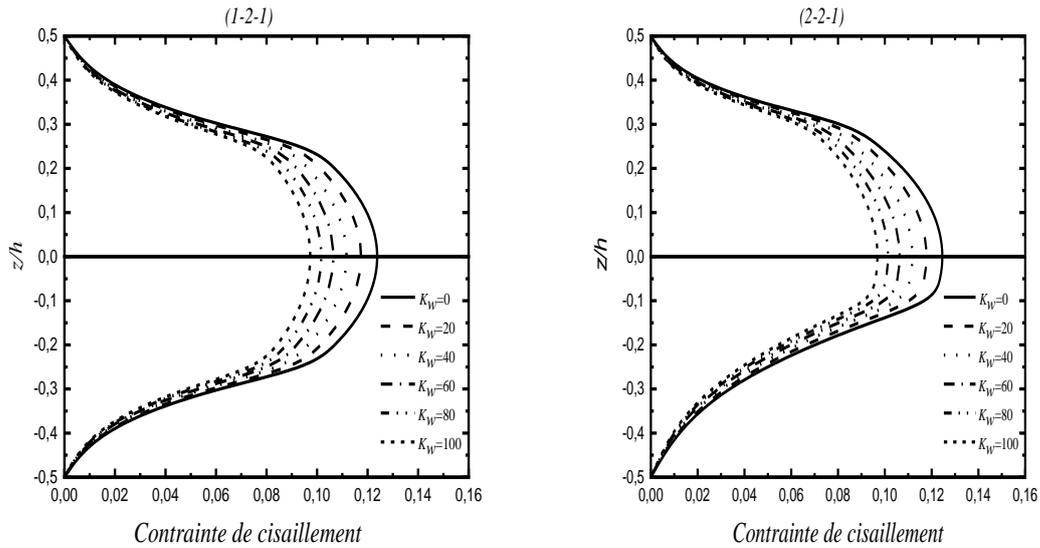


Figure V-4: Contrainte de cisaillement ($\bar{\tau}_{xy}$) à travers l'épaisseur des plaques sandwich FGM carrées symétriques et asymétriques simplement appuyées ($p=2$) pour différentes valeurs du module de Winkler K_w avec $K_s = 10$ et $a/h = 10$.

La Figure V-5 illustre la déformation sans dimension \bar{w} de la plaque sandwich carrée FGM (1-2-1) reposant sur la fondation élastique de Winkler avec différentes conditions aux limites. On note que (\bar{w}) diminue progressivement lorsque le rapport côté/épaisseur a/h augmente. Le résultat de la plaque sandwich simplement supportée est plus élevé que celui de la plaque sandwich CCCC, CSCS et FCFC.

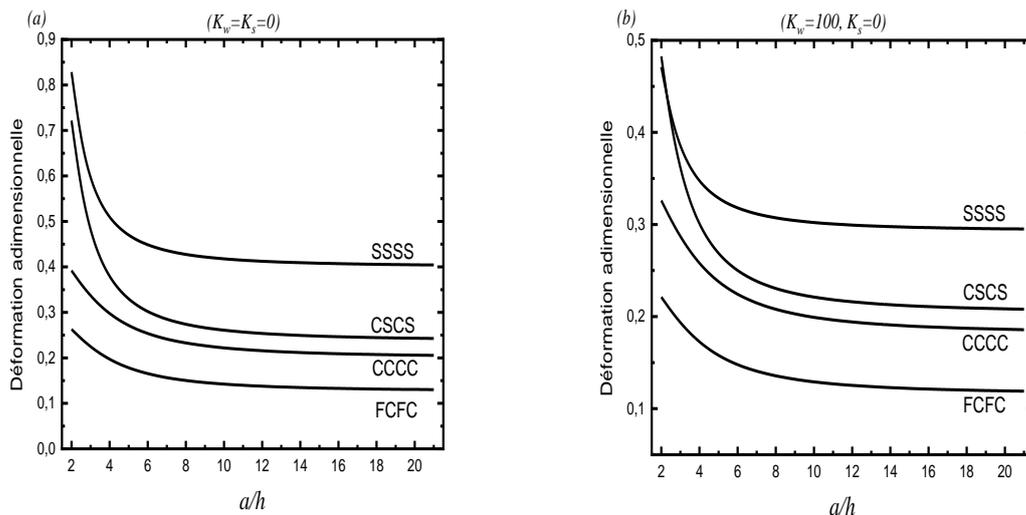


Figure V-5: déformation adimensionnelle (\bar{w}) en fonction du rapport entre le côté et l'épaisseur a/h de la plaque sandwich FGM carrée (1-2-1) reposant sur une fondation élastique de Winkler avec différentes conditions aux limites ($p=0.5$)

La figure V-6 illustre les variations de la déformation en fonction du rapport b/a de la plaque SSSS et CCCC pour différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique.

La déformation augmente directement lorsque b/a augmente, La déformation sans dimension diminue évidemment avec l'augmentation de la rigidité des fondations.

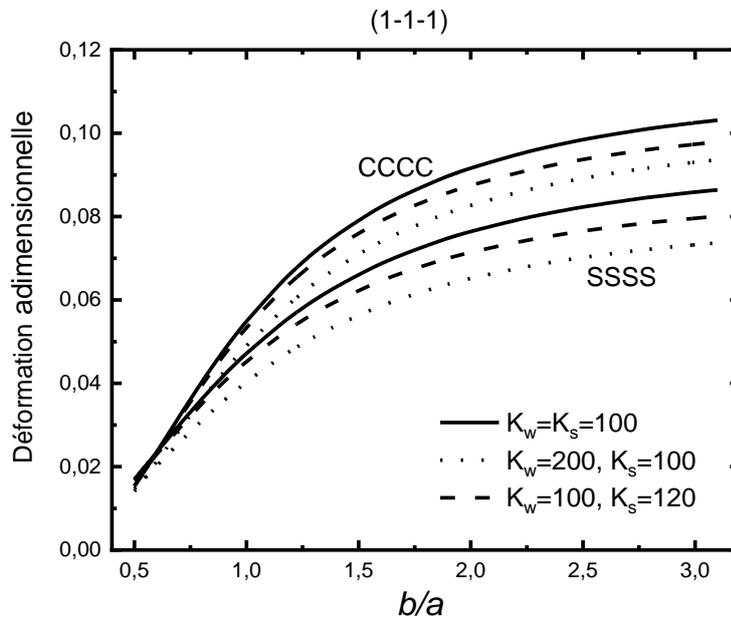


Figure V-6 : déformation adimensionnelle \bar{w} en fonction du rapport de forme b/a d'une plaque sandwich en appui simple et encrée pour différentes valeurs de rigidité de la fondation K_w et K_s ($a/h=10, p=0.5$).

V.4 Analyse de la vibration libre

Les fréquences naturelles non dimensionnées de plaques isotropes rectangulaires et de plaques FG Al/Al_2O_3 sont prises pour comparaison. Les tableaux V-6 et V-7 donnent les valeurs non dimensionnées des fréquences propres pour des plaques isotropes homogènes ($p = 0$) reposant sur des fondations élastiques. On peut constater que les présents résultats sont en bon accord avec les solutions données par (Sobhy, 2013). On note également que les fréquences naturelles des plaques carrées homogènes en appui simple et en encrage augmentent lorsque le paramètre de fondation K_w de Winkler augmente.

Le tableau V-8 donne les valeurs non dimensionnées des fréquences naturelles de divers types de plaques sandwich FGM carrées en appui simple. Les résultats sont comparés à ceux obtenus à l'aide de diverses théories de déformation en cisaillement de plaques (Sobhy, 2013). Un bon accord est obtenu entre les solutions actuelles et celles publiées.

On peut observer dans le tableau V-9 que l'augmentation de l'épaisseur de l'âme des plaques sandwich FGM entraîne une augmentation des fréquences, sauf dans le cas des plaques reposant sur des fondations de Pasternak où la variation est inversée. En outre, les fréquences de vibration augmentent avec l'existence de fondations élastiques. L'inclusion des paramètres de fondation de Pasternak donne des résultats supérieurs à ceux de l'inclusion des paramètres de fondation de Winkler.

Tableau V-6: Comparaison de la vibration libre ($\frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\rho h/D}$) d'une plaque carrée homogène encrée ($a/b=1, p=0$) reposant sur des fondations élastiques de Pasternak ($K_s=10$)

m	n	b/h	K_w	Sobhy (2013)	Présente
1	1	100	100	2.6551	2.6551
		500	500	3.3400	3.3400
		10	200	2.7842	2.7842
		1000	1000	3.9806	3.9806
2	1	100	100	5.5718	5.5718
		500	500	5.9287	5.9287
		10	200	5.3051	5.3049
		1000	1000	6.0085	6.0083
2	2	100	100	8.5405	8.5405
		500	500	8.7775	8.7775
		10	200	7.7311	7.7303
		1000	1000	8.2237	8.2229

Tableau V-7: Comparaison de la vibration libre ($\frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\rho h/D}$) d'une plaque carrée homogène ($a/b=1, p=0$) reposant sur des fondations élastiques de Winkler ($m=n=1, h/b=0.015, \nu=0.15, K_s=0$).

K_w	Sobhy (2013)	Présente
1390.2	5.3330	5.3332
2780.4	6.5349	6.5351

Le tableau V-09 fournit les valeurs non-dimensionnées des fréquences naturelles de différents types de plaques sandwich à gradient de puissance sous diverses conditions aux limites. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par Abdelaziz et al. (2017). On constate un bon accord entre les résultats actuels obtenus en utilisant la présente théorie raffinée avec seulement quatre inconnues et ceux d'Abdelaziz et al. (2017). On remarque que les plaques les plus rigides et les plus souples correspondent aux plaques FCFC et SSSS, respectivement. Avec l'augmentation du paramètre d'hétérogénéité p , la plaque devient plus souple, ce qui entraîne une réduction de la fréquence. Ceci est dû au fait que lorsque le paramètre augmente, la plaque a tendance à être métallique.

Tableau V-8: Effets des rigidités élastiques de la fondation K_w et K_s et du rapport côté/épaisseur a/h sur la vibration libre $\bar{\omega}$ de divers types de plaques sandwich FG carrées simplement appuyées.

Schéma	théorie	$K_s=K_w=0$			$K_w=100, K_s=10$			$K_w=100, K_s=100$		
		$a/h=5$	10	20	$a/h=5$	10	20	$a/h=5$	10	20
1-0-1	FPT ^c	0,9547	1,0167	1,0347	1,4061	1,461	1,4775	4,7803	4,8851	4,9134
	TPT ^c	0,9647	1,0198	1,0356	1,4121	1,4631	1,4781	4,7807	4,8854	4,9135
	SPT ^c	0,9655	1,02	1,0356	1,4125	1,4633	1,4781	4,7808	4,8854	4,9135
	EPT ^c	0,9663	1,0203	1,0357	1,4131	1,4635	1,4782	4,7808	4,8854	4,9135
	HPT ^c	0,9643	1,0196	1,0355	1,4119	1,463	1,4781	4,7805	4,8854	4,9135
	Présente	0,9600	1,0152	1,0310	1,4057	1,4566	1,4716	4,7600	4,8640	4,892
1-1-1	FPT ^c	1,0717	1,1367	1,1555	1,1563	1,5227	1,5401	4,6538	4,7513	4,7788
	TPT ^c	1,0807	1,1395	1,1563	1,4695	1,5247	1,5407	4,6537	4,7517	4,7789
	SPT ^c	1,0817	1,1396	1,1563	1,4697	1,5248	1,5407	4,6537	4,7517	4,7789
	EPT ^c	1,0815	1,1398	1,1563	1,47	1,5249	1,5407	4,6537	4,7517	4,779
	HPT ^c	1,0816	1,1398	1,1563	1,4703	1,5249	1,5407	4,6538	4,7518	4,779
	Présente	1,0774	1,1363	1,1531	1,4652	1,5204	1,5364	4,6408	4,7386	4,7658
1-2-1	FPT ^c	1,0717	1,1367	1,1555	1,1563	1,5227	1,5401	4,6538	4,7513	4,7788
	TPT ^c	1,0807	1,1395	1,1563	1,4695	1,5247	1,5407	4,6537	4,7517	4,7789
	SPT ^c	1,0817	1,1396	1,1563	1,4697	1,5248	1,5407	4,6537	4,7517	4,7789
	EPT ^c	1,0815	1,1398	1,1563	1,47	1,5249	1,5407	4,6537	4,7517	4,779
	HPT ^c	1,0816	1,1398	1,1563	1,4703	1,5249	1,5407	4,6538	4,7518	4,779
	Présente	1,0774	1,1363	1,1531	1,4652	1,5204	1,5364	4,6408	4,7386	4,7658
1-3-1	FPT ^c	1,2605	1,346	1,371	1,5912	1,6688	1,692	4,5914	4,6898	4,719
	TPT ^c	1,2666	1,348	1,3716	1,5956	1,6704	1,6924	4,5911	4,6901	4,7192
	SPT ^c	1,2663	1,3479	1,3716	1,5954	1,6703	1,6924	4,591	4,6901	4,7192
	EPT ^c	1,2662	1,3478	1,3715	1,5953	1,6703	1,6924	4,5909	4,69	4,7192
	HPT ^c	1,2753	1,3506	1,3723	1,6024	1,6724	1,693	4,5921	4,6907	4,7194
	Présente	1,2648	1,3459	1,3694	1,5933	1,6678	1,6898	4,5836	4,6827	4,7118

^c : Sobhy (2013). EPT: exponential shear deformation plate theory; FPT: first-order shear deformation plate theory; HPT: hyperbolic shear deformation plate theory; SPT: sinusoidal shear deformation plate theory; TPT: third-order shear deformation plate theory

La figure V-7 présente les variations de la fréquence naturelle fondamentale des plaques sandwich FG carrées en fonction du paramètre d'hétérogénéité (p). Différentes configurations de couches sont utilisées pour les plaques FGM multicouches. Le rapport d'épaisseur de la plaque est considéré comme égal à 10. On peut observer que l'augmentation du paramètre d'hétérogénéité (p) conduit à une réduction de la fréquence naturelle. Ce comportement peut être attribué au fait qu'un paramètre d'hétérogénéité (p) plus élevé correspond à une fraction volumique plus faible de la phase céramique. Ainsi, l'augmentation du paramètre d'hétérogénéité rend la plaque plus souple en raison de la part élevée de métal par rapport à la partie céramique, et par conséquent, entraîne une réduction de la fréquence naturelle.

Tableau V-9: Fréquence fondamentale sans dimension des plaques carrées sandwich ($a/h=10$) avec différentes conditions aux limites.

Conditions aux limites	p	Méthode	Schéma				
			1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	Abdelaziz et al. (2017)	0.2956	0.2956	0.2956	0.2956	0.2956
		Présente	0,2960	0,2960	0,2960	0,2960	0,2960
	0.5	Abdelaziz et al. (2017)	0.5227	0.4846	0.4560	0.4366	0.4172
		Présente	0,5229	0.4849	0.4564	0,4370	0.4177
	1	Abdelaziz et al. (2017)	0.7454	0.6593	0.5954	0.5537	0.5124
		Présente	0.7452	0.6593	0.5956	0.5540	0.5129
	2	Abdelaziz et al. (2017)	1.0839	0.9254	0.8009	0.7200	0.6427
		Présente	1.0830	0.9249	0.8008	0.7202	0.6431
	5	Abdelaziz et al. (2017)	1.4519	1.2678	1.0767	0.9367	0.8131
		Présente	1.4492	1.2659	1.0758	0.9364	0.8132
	10	Abdelaziz et al. (2017)	1.5519	1.4053	1.2070	1.0392	0.8998
		Présente	1.5489	1.4026	1.2055	1.0387	0.8996
CSCS	0	Abdelaziz et al. (2017)	0.1836	0.1836	0.1836	0.1836	0.1836
		Présente	0.1875	0.1875	0.1875	0.1875	0.1875
	0.5	Abdelaziz et al. (2017)	0.3205	0.2972	0.2799	0.2682	0.2565
		Présente	0.3251	0.3016	0.2842	0.2726	0.2608
	1	Abdelaziz et al. (2017)	0.4546	0.4020	0.3634	0.3384	0.3134
		Présente	0,4595	0,4066	0,3678	0,3429	0,3179
	2	Abdelaziz et al. (2017)	0.6886	0.5615	0.4863	0.4379	0.3913
		Présente	0,6637	0,5659	0,4908	0,4426	0,3960
	5	Abdelaziz et al. (2017)	0.8835	0.7670	0.6513	0.5676	0.4931
		Présente	0,8891	0,7708	0,6554	0,5722	0,4977
	10	Abdelaziz et al. (2017)	0.9492	0.8503	0.7294	0.6290	0.5448
		Présente	0,9569	0,8538	0,7331	0,6336	0,5494
CCCC	0	Abdelaziz et al. (2017)	0.1606	0.1606	0.1606	0.1606	0.1606
		Présente	0,1595	0,1595	0,1595	0,1595	0,1595
	0.5	Abdelaziz et al. (2017)	0.2777	0.2576	0.2427	0.2327	0.2226
		Présente	0,2766	0,2566	0,2418	0,2320	0,2219
	1	Abdelaziz et al. (2017)	0.3922	0.3468	0.3137	0.2924	0.2710
		Présente	0,3908	0,3458	0,3129	0,2917	0,2705
	2	Abdelaziz et al. (2017)	0.5666	0.4825	0.4182	0.3770	0.3371
		Présente	0,5641	0,4809	0,4171	0,3763	0,3367
	5	Abdelaziz et al. (2017)	0.7610	0.6577	0.5584	0.4873	0.4236
		Présente	0,7557	0,6545	0,5566	0,4861	0,4229
	10	Abdelaziz et al. (2017)	0.8208	0.7292	0.6249	0.5396	0.4676
		Présente	0,8139	0,7249	0,6224	0,5381	0,4667

Les résultats montrent que les plaques les plus dures et les plus molles correspondent aux schémas (1-2-1) et (1-0-1), respectivement. Ce comportement est dû au fait que les plaques sandwich FG (1-2-1) et (1-0-1) correspondent aux fractions volumiques les plus élevées et les plus faibles de la phase céramique, ce qui en fait les plaques les plus dures et les plus souples.

De plus, on peut voir que dans le cas de la condition aux limites encrée (CCCC), la plaque devient plus rigide, ce qui entraîne une augmentation de la fréquence naturelle.

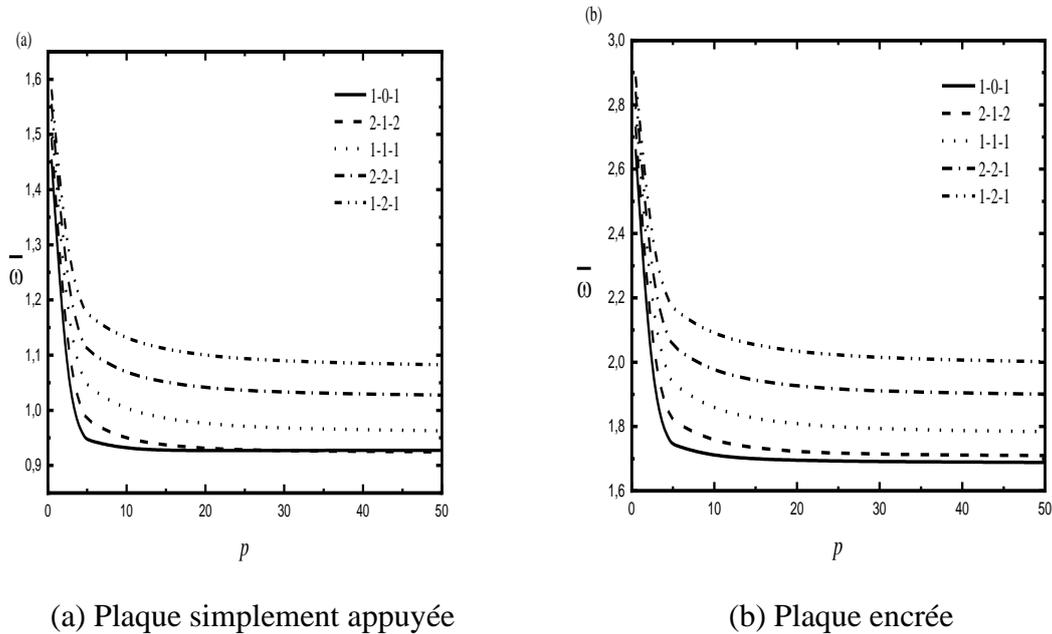


Figure V-7: Effet du paramètre d'hétérogénéité (p) sur la fréquence sans dimension ($\bar{\omega}$) des plaques sandwich FG carrées ($a/h=10$).

La figure V-8 montre les variations des fréquences propres en fonction du rapport côté/épaisseur a/h pour différentes valeurs du paramètre d'hétérogénéité (p). On constate que les fréquences ($\bar{\omega}$) augmentent de façon monotone lorsque (p) augmente. On observe également que les différences entre les courbes sont réduites lorsque l'épaisseur du noyau augmente.

Les fréquences propres ($\bar{\omega}$) de la plaque sandwich FGM carrée (1-2-1) reposant sur une fondation élastique de Winkler avec différentes conditions aux limites sont illustrées à la figure V-9, respectivement sans fondation élastique et reposant sur une fondation élastique de Winkler. On note que ($\bar{\omega}$) augmente graduellement avec l'augmentation du rapport entre le côté et l'épaisseur a/h . Les résultats de la plaque sandwich en appui simple sont inférieurs à ceux de la plaque sandwich CCCC, CSCS et FCFC. Pour la plaque sandwich FGM avec des conditions aux limites intermédiaires, les résultats prennent les valeurs intermédiaires correspondantes.

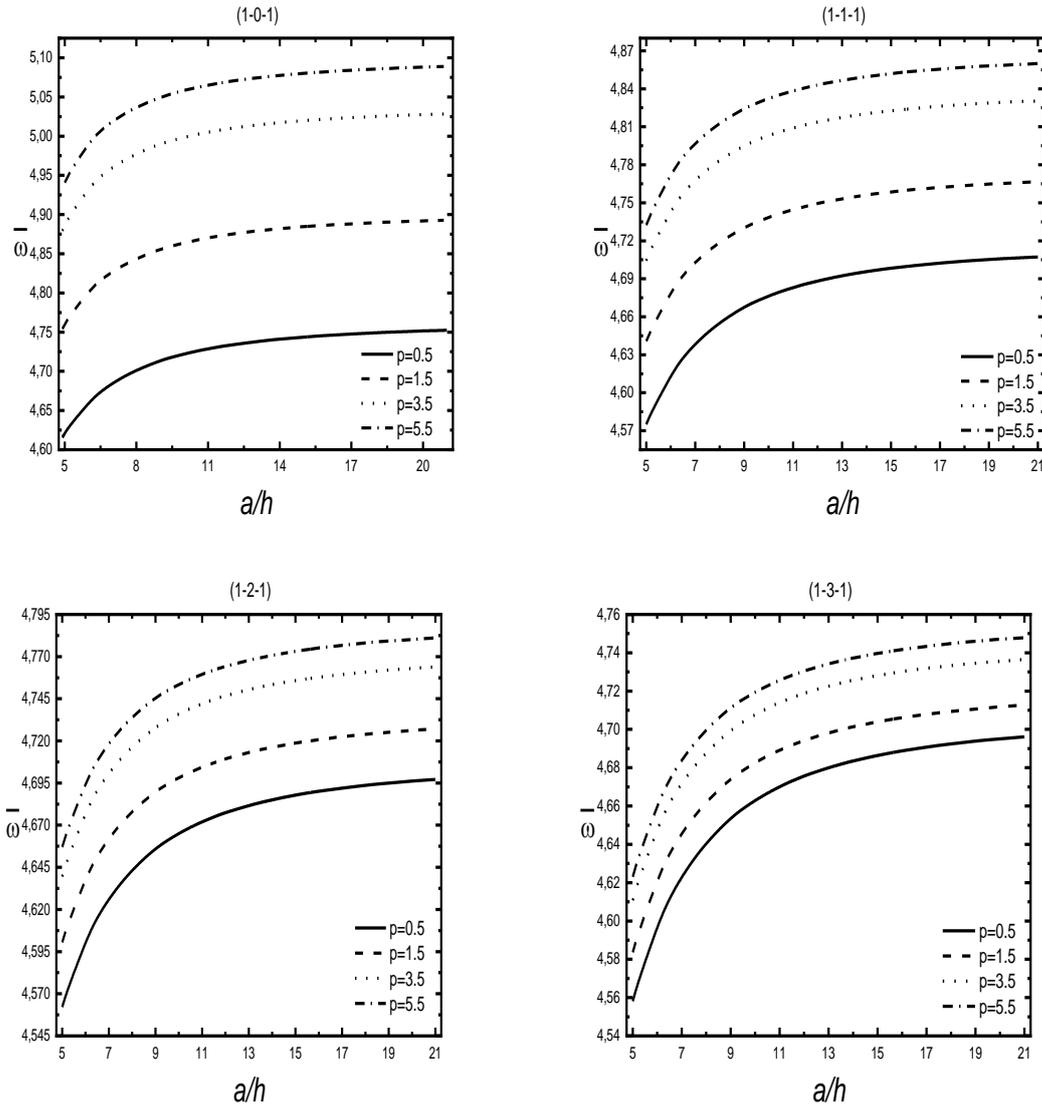


Figure V-8: Frequence libre($\bar{\omega}$) en fonction du rapport a/h , pour différentes valeurs du paramètre d'hétérogénéité (ρ) et différents types de plaques sandwich FGM carrées reposant sur des fondations élastiques ($K_w=K_s=10$)

La figure V-10 ci-dessous illustre les variations des fréquences propres en fonction du rapport de forme b/a de la plaque SSSS et CCCC pour différentes valeurs des paramètres de la fondation élastique. Comme attendu, la condition aux limites encrée majeure toujours les fréquences de vibration. Les fréquences diminuent directement lorsque b/a augmente. Évidemment, les fréquences augmentent avec l'augmentation de la rigidité des fondations.

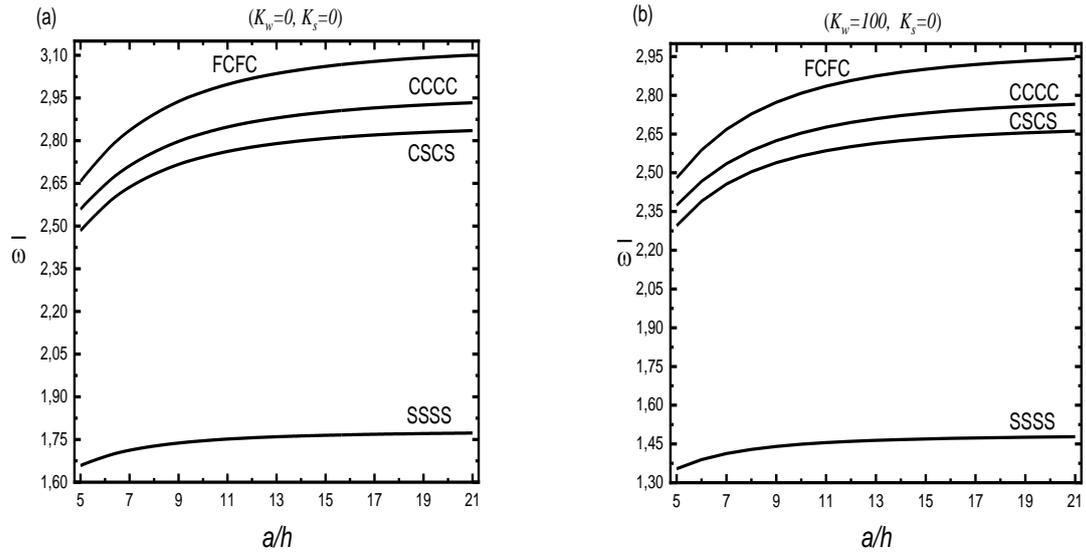


Figure V-9: Vibration libre $\bar{\omega}$ en fonction du rapport côté/épaisseur a/h de la plaque carrée sandwich (1-2-1) FGM reposant sur la fondation élastique de Winkler avec différentes conditions aux limites ($p=0.5$).

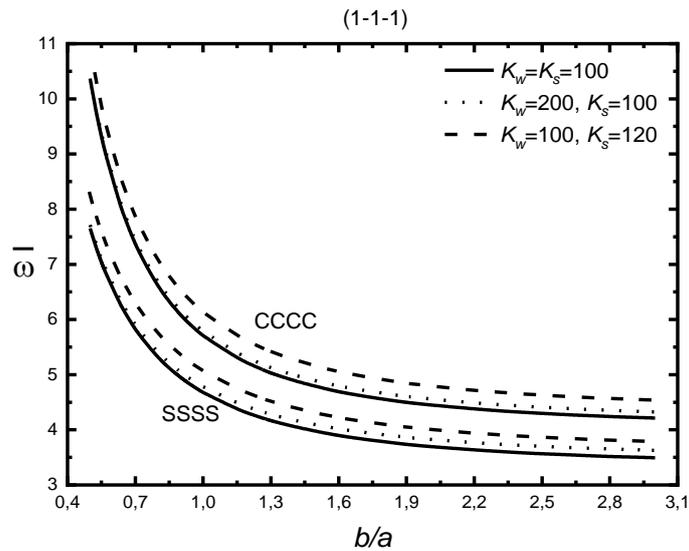


Figure V-10: Vibration libre $\bar{\omega}$ en fonction du rapport b/a d'une plaque sandwich simplement appuyée et encrée pour différentes valeurs de rigidité de la fondation K_w et K_s ($a/h=10, p=0.5$)

V.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques sandwich FGM, sous différents cas de conditions aux limites, en utilisant une théorie hyperbolique simple de déformation en cisaillement avec seulement quatre inconnues. Les résultats obtenus par la présente formulation sont comparés aux résultats disponibles dans la littérature.

La présente théorie avec seulement quatre inconnues donne d'excellents résultats dans tous les cas pour les flexions de plaques homogènes reposant sur une fondation élastique à deux paramètres, sous des charges uniformes.

Les prédictions de la flexion sont en accord aussi pour les plaques sandwich FGM sous chargement sinusoïdal, sous diverses conditions aux limites.

La présente théorie concorde bien dans la prédiction des réponses en flexion des plaques sandwich FG sous diverses conditions aux limites, et à différentes valeurs de l'hétérogénéité p .

L'influence des conditions aux limites est avérée : les plaques les plus rigides et les plus souples correspondent respectivement aux plaques FCFC et SSSS. Avec l'augmentation du paramètre d'hétérogénéité p , la flexion augmente, ceci est dû au fait que lorsque le paramètre p augmente, le comportement métallique devient plus prédominant.

La déformation centrale (\hat{w}) diminue avec l'augmentation des ratios (a/h). La différence est presque constante avec l'augmentation du rapport côté/épaisseur, en devenant plus épaisse, la plaque sandwich FGM gagne en rigidité. Aussi la déformation centrale est réduite lorsque l'épaisseur du noyau augmente.

La courbe de la contrainte axiale sur l'épaisseur de la plaque sandwich FGM est tout à fait concordante, la courbe passe par l'origine du repère orthonormé pour les plaques symétriques mais pas pour les plaques asymétriques.

La contrainte de cisaillement transversale ($\bar{\tau}_{xy}$) augmente progressivement avec la diminution de K_w .

La valeur maximale de la contrainte de cisaillement ($\bar{\tau}_{xy}$) est atteinte au centre pour la plaque sandwich FGM symétrique, ce n'est pas le cas dans de la plaque asymétrique.

Pour la vibration libre, on constate que les présents résultats sont en bon accord avec les solutions données par (Sobhy, 2013).

Les fréquences naturelles des plaques carrées homogènes en appui simple et en encrage augmentent lorsque le paramètre de fondation K_w de Winkler augmente.

L'augmentation de l'épaisseur de l'âme des plaques sandwich FGM entraîne une augmentation des fréquences.

Les fréquences de vibration augmentent avec l'existence de fondations élastiques.

La présente théorie donne des résultats concordants avec la littérature pour l'étude de l'influence des conditions aux limites sur la vibration libre des plaques sandwich FGM à gradient de puissance FGM.

L'étude montre que les plaques les plus rigides et les plus souples correspondent aux plaques encrées et en appuis simples, respectivement.

L'augmentation du paramètre d'hétérogénéité p , entraîne une réduction de la vibration libre de la plaque FGM, la plaque devient plus souple. Ceci est dû au fait que lorsque le paramètre p augmente, la plaque a tendance à être métallique.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

CONCLUSION GENERALE **ET PERSPECTIVES**

Nous avons entamé notre travail par la présentation de ce qu'est un matériau FGM et quels avantages il peut apporter par rapport à d'autres matériaux composites. En effet, le principal avantage structurel des FGM par rapport aux composites traditionnels est donc leur bonne tenue face au phénomène de laminage, induit par la variation brutale de la réponse au sein de l'élément aux conditions de chargement, grâce à l'inclusion du matériau secondaire dans le matériau existant de façon progressive, produisant une transition douce entre deux matériaux distincts. L'exploitation du FGM dans des domaines très variés, parmi lesquels le génie civil, a été rendue possible suite au développement important des techniques de fabrication, et la mise au point de modèles analytiques et par la suite numériques pour décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM à travers l'épaisseur de la plaque.

Dans notre étude, nous proposons une nouvelle théorie de déformation en cisaillement pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre de divers types de plaques sandwich FGM, sous différents cas de conditions aux limites, en utilisant une théorie hyperbolique simple de déformation en cisaillement avec seulement quatre inconnues. Les plaques sandwich sont supposées appuyées sur des fondations élastiques à deux paramètres. Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Pour résoudre le problème pour différentes conditions aux limites, l'approche de Galerkin est utilisée pour les plaques sandwich FGM symétriques et asymétriques. Les résultats obtenus par la présente formulation sont comparés à d'autres résultats disponibles dans la littérature.

Sur la base des résultats obtenus, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Les résultats actuels sont en accord avec ceux de la littérature.
- Les flexions des plaques sandwich FGM simplement appuyées sont plus élevées que celles des plaques sandwich FGM libres et encrées.
- Les fréquences de vibration pour les plaques sandwich FG sont généralement inférieures aux valeurs correspondantes pour les plaques en céramiques homogènes,

tandis que les déformations en flexion sont supérieures à celles des plaques céramiques homogènes.

- Les fréquences de vibration augmentent lorsque le rapport côté/épaisseur augmente, tandis que les déformations en flexion diminuent.
- Les fréquences de vibration pour les plaques sandwich simplement appuyées sont inférieures à celles des plaques sandwich libres et encrées.

Enfin, une amélioration de la présente formulation est envisageable dans les travaux futurs pour considérer d'autres types de matériaux (Al-Osta, 2019; Fadodun, Odunayo O. et al., 2017; Panjehpour, 2018; shahadat et al., 2018; Yazdani & Mohammadimehr, 2019).

BIBLIOGRAPHIE

- Abdelaziz, H. H., Meziane, M. A. A., Bousahla, A. A., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., & Alwabli, A. S. (2017). An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions. *Steel and Composite Structures*, 25(6), 693-704. <https://doi.org/10.12989/SCS.2017.25.6.693>
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., & Adda Bedia, E. A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(2), 113-121. <https://doi.org/10.1007/s10999-010-9110-x>
- Akbas, S. D. (2019). Forced vibration analysis of functionally graded sandwich deep beams. *Coupled systems mechanics*, 8(3), 259-271. <https://doi.org/10.12989/CSM.2019.8.3.259>
- Al-Hosani, K., Fadhil, S., & El-Zafrany, A. (1999). Fundamental solution and boundary element analysis of thick plates on Winkler foundation. *Computers & structures*, 70(3), 325-336.
- Al-Osta, M. A. (2019). Shear behaviour of RC beams retrofitted using UHPFRC panels epoxied to the sides. *Computers and Concrete*, 24(1), 37-49. <https://doi.org/10.12989/CAC.2019.24.1.037>
- Amini, S., & Miserez, A. (2013). Wear and abrasion resistance selection maps of biological materials. *Acta Biomaterialia*, 9(8), 7895-7907. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2013.04.042>
- Apetre, N. A., Sankar, B. V., & Ambur, D. R. (2008). Analytical Modeling of Sandwich Beams with Functionally Graded Core. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 10(1), 53-74. <https://doi.org/10.1177/1099636207081111>
- Arbaoui, J. E. (2009). *Etude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwichs multicouches* [Phdthesis, Université Paul Verlaine - Metz]. <https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01752670>
- Bader, M. (2017). Open Mold Laminations—Contact Molding. In *Processing and Fabrication Technology* (p. 103-115). Routledge.
- Bakora, A., & Tounsi, A. (2015). Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations. *Structural engineering and mechanics: An international journal*, 56(1), 85-106.

- Barati, M. R., & Shahverdi, H. (2020). Finite element forced vibration analysis of refined shear deformable nanocomposite graphene platelet-reinforced beams. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(1), 33. <https://doi.org/10.1007/s40430-019-2118-8>
- Barthelat, F., Yin, Z., & Buehler, M. J. (2016). Structure and mechanics of interfaces in biological materials. *Nature Reviews Materials*, 1(4), 16007. <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2016.7>
- Becker Jr, T. L., Cannon, R. M., & Ritchie, R. O. (2001). Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(32-33), 5545-5563. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00379-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00379-6)
- Behravan Rad, A., & Alibeigloo, A. (2013). Semi-Analytical Solution for the Static Analysis of 2D Functionally Graded Solid and Annular Circular Plates Resting on Elastic Foundation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20(7), 515-528. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.634088>
- Benbakhti, A. (2017). *Une nouvelle théorie quasi-3D pour l'étude de la flexion thermomécanique des plaques fonctionnellement graduées épaisses*. 11.
- Bennoun, M., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2016). A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 423-431.
- Benveniste, Y. (1987). A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6(2), 147-157. [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(87\)90005-6](https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90005-6)
- Berthelot, J.-M. (1996). *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. Masson.
- Berthelot, J.-M. (2012). *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*.
- Bharti, I., Gupta, N., & Gupta, K. M. (2013). Novel Applications of Functionally Graded Nano, Optoelectronic and Thermoelectric Materials. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, 221-224. <https://doi.org/10.7763/IJMMM.2013.V1.47>
- Bhaskar, K., & Varadan, T. K. (2001). The Contradicting Assumptions of Zero Transverse Normal Stress and Strain in the Thin Plate Theory : A Justification. *Journal of Applied Mechanics*, 68(4), 660-662. <https://doi.org/10.1115/1.1352061>

- Bishop, A., Lin, C.-Y., Navaratnam, M., Rawlings, R. D., & McShane, H. B. (1993). A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process. *Journal of Materials Science Letters*, 12(19), 1516-1518. <https://doi.org/10.1007/BF00277083>
- Boch, P., Chartier, T., & Huttepain, M. (1986). Tape Casting of Al₂O₃/ZrO₂ Laminated Composites. *Journal of the American Ceramic Society*, 69(8), C-191-C-192. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1986.tb04836.x>
- Boggarapu, V., Gujjala, R., Ojha, S., Acharya, S., Venkateswara babu, P., Chowdary, S., & kumar Gara, D. (2021). State of the art in functionally graded materials. *Composite Structures*, 262, 113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2015). A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams. *Steel and composite structures*, 18(2), 409-423.
- Brischetto, S. (2009). Classical and mixed advanced models for sandwich plates embedding functionally graded cores. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 4(1), 13-33.
- Caselunghé, A., & Eriksson, J. (2012). *Structural element approaches for soil-structure interaction*.
- Chaht, F. L., Kaci, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Bég, O. A., & Mahmoud, S. (2015). Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect. *Steel and Composite Structures*, 18(2), 425-442.
- Chen, H., Wang, A., Hao, Y., & Zhang, W. (2017). Free vibration of FGM sandwich doubly-curved shallow shell based on a new shear deformation theory with stretching effects. *Composite Structures*, 179, 50-60. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.07.032>
- Chen, W. W., Rajendran, A. M., Song, B., & Nie, X. (2007). Dynamic Fracture of Ceramics in Armor Applications. *Journal of the American Ceramic Society*, 90(4), 1005-1018. <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2007.01515.x>
- Chi, S.-H., & Chung, Y.-L. (2006). Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I : Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43(13), 3657-3674. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011>
- Chin, E. (1999). Army focused research team on functionally graded armor composites. *Materials Science and Engineering A-structural Materials Properties Microstructure and Processing*, 259, 155-161.

- Contributeurs de Wikipédia. (2015a). Theorie des plaques. In *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. Wikipédia. https://fr.wikipedia.org/wiki/Theorie_des_plaques.
- Cooke, D. W., & Levinson, M. (1983). Thick rectangular plates—II: The generalized Lévy solution. *International journal of mechanical sciences*, 25(3), 207-215.
- Daikh, A. A. (2018). *Vibration libre et flambement des structures sandwichs en FGM* [Thèse de doctorat]. Université de Djillali Liabes - Sidi Belabbes.
- Debbache, M. (2012). *De la conception à la réalisation de pale éolienne en matériaux composites*. [Thèse de magister, Université Mohamed Khider – Biskra]. <https://www.researchgate.net/publication/315112445>
- Do, T. V., Bui, T. Q., Yu, T. T., Pham, D. T., & Nguyen, C. T. (2017). Role of material combination and new results of mechanical behavior for FG sandwich plates in thermal environment. *Journal of Computational Science*, 21, 164-181. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2017.06.015>
- Dunlop, J. W. C., Weinkamer, R., & Fratzl, P. (2011). Artful interfaces within biological materials. *Materials Today*, 14(3), 70-78. [https://doi.org/10.1016/S1369-7021\(11\)70056-6](https://doi.org/10.1016/S1369-7021(11)70056-6)
- El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., & Mechab, I. (2011). A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4), 237-247.
- Eltaher, M., Agwa, M., & Kabeel, A. (2017). Vibration Analysis of Material Size Dependent CNTs Using Energy Equivalent Model. *Journal of Applied and Computational Mechanics, Online First*. <https://doi.org/10.22055/jacm.2017.22579.1136>
- Encyclopeadia Britannica Online. (1997). In *Encyclopeadia Britannica*. <https://www.britannica.com/technology/tape-casting>
- Espallargas, N. (2015). *Future Development of Thermal Spray Coatings*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-16360-X>
- Eyerer, P., Reinhardt, H.-W., & Kreißig, J. (2000). *Ökologische Bilanzierung von Baustoffen und Gebäuden : Wege zu einer ganzheitlichen Bilanzierung*. Birkhäuser.
- Fadodun, Odunayo O., Borokinni, Adebowale S., Layeni, Olawanle P., & Akinola, Adegbola P. (2017). Dynamic analysis of a transversely isotropic non-classical thin plate. *Wind and Structures*, 25(1), 25-38. <https://doi.org/10.12989/WAS.2017.25.1.025>

- Farzam-Rad, S. A., Hassani, B., & Karamodin, A. (2017). Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface. *Composites Part B: Engineering*, 108, 174-189.
- Filonenko-Borodich, M. M. (1940). Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika, Moscow*, 46, 3-18.
- Fukui, Y., & Watanabe, Y. (1996). Analysis of thermal residual stress in a thick-walled ring of duralcan-base Al-SiC functionally graded material. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 27(12), 4145-4151. <https://doi.org/10.1007/BF02595662>
- Garg, A., & Chalak, H. D. (2019). A review on analysis of laminated composite and sandwich structures under hygrothermal conditions. *Thin-Walled Structures*, 142, 205-226. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.05.005>
- Gayen, D., Tiwari, R., & Chakraborty, D. (2019). Static and dynamic analyses of cracked functionally graded structural components : A review. *Composites Part B: Engineering*, 173, 106982. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.106982>
- Ghatage, P. S., Kar, V. R., & Sudhagar, P. E. (2020). On the numerical modelling and analysis of multi-directional functionally graded composite structures : A review. *Composite Structures*, 236, 111837. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111837>
- Gomet, L. (2008). *Généralités sur les matériaux composites*. GeM - Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique. <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00470296v1>
- Hadji, L., Atmane, H. A., Tounsi, A., Mechab, I., & Adda Bedia, E. A. (2011). Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory. *Applied Mathematics and Mechanics*, 32(7), 925-942. <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1470-9>
- Han, J.-B., & Liew, K. M. (1997). Numerical differential quadrature method for Reissner/Mindlin plates on two-parameter foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(9), 977-989.
- Hao, Y., Li, Z., Zhang, W., Li, S., & Yao, M. (2018). Vibration of functionally graded sandwich doubly curved shells using improved shear deformation theory. *Science China Technological Sciences*, 61(6), 791-808. <https://doi.org/10.1007/s11431-016-9097-7>
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bessaim, A., & Bedia, E. A. A. (2014). New Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of

- Functionally Graded Plates. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(2), 374-383. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000665](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000665)
- Heinz, P., Herrmann, M., & Sobek, W. (2012). *Herstellungsverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen*. Fraunhofer-IRB-Verl.
- Hetenyi, M. (1950). A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. *Journal of Applied Physics*, 21(1), 55-58.
- Horvath, J. (2002). *Soil-Structure Interaction Research Project Basic SSI Concepts and Applications Overview*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.31661.95203>
- Horvath, J. S., & Colasanti, R. J. (2011). New Hybrid Subgrade Model for Soil-Structure Interaction Analysis : Foundation and Geosynthetics Applications. *Geo-Frontiers 2011*, 4359-4368. [https://doi.org/10.1061/41165\(397\)446](https://doi.org/10.1061/41165(397)446)
- Huang, Z. Y., Lü, C. F., & Chen, W. Q. (2008). Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Composite Structures*, 85(2), 95-104.
- Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2012). Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nuclear Engineering and Design*, 250, 8-13. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2012.05.001>
- Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite Structures*, 96, 833-849. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.001>
- Kaci, A., & Tounsi, A. (2012). *Etude Et Analyse Non Lineaire Des Plaques Minces Non Homogene En Flexion Cylindrique* [PhD Thesis]. Université Djillali Liabès - Sidi Bel Abbès.
- Kant, T., & Swaminathan, K. (2002). Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite structures*, 56(4), 329-344.
- Kar, V. R., & Panda, S. K. (2015). Thermoelastic analysis of functionally graded doubly curved shell panels using nonlinear finite element method. *Composite Structures*, 129, 202-212. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.006>
- Karama, M., Afaq, K., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of solids and structures*, 40(6), 1525-1546.

- Kashtalyan, M., & Menshykova, M. (2009). Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core. *Composite structures*, 87(1), 36-43.
- Katayama, T., Sukenaga, S., Saito, N., Kagata, H., & Nakashima, K. (2011). Fabrication of Al₂O₃-W Functionally Graded Materials by Slipcasting Method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 18(20), 202023. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/18/20/202023>
- Kawai, C., Wakamatsu, S., Sakagami, S., & Igarashi, T. (1990). Oxidation resistant coating with TiC-SiC gradient composition on carbon fiber reinforced composites by CVD. *Proc. of The First Int'l. Symp. on FGM'90*, 77-82.
- Kaya, C., Kaya, F., Atiq, S., & Boccaccini, A. R. (2003). Electrophoretic deposition of ceramic coatings on ceramic composite substrates. *British Ceramic Transactions*, 102(3), 99-102. <https://doi.org/10.1179/096797803225001605>
- Kerr, A. (1964). *Elastic and Viscoelastic Foundation Models*. <https://doi.org/10.1115/1.3629667>
- Khalili, S. M. R., & Mohammadi, Y. (2012). Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties : A new approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 35, 61-74.
- Kieback, B., Neubrand, A., & Riedel, H. (2003). Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 81-106. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1)
- Kim, N.-I., & Lee, J. (2017). Exact solutions for coupled responses of thin-walled FG sandwich beams with non-symmetric cross-sections. *Composites Part B: Engineering*, 122, 121-135. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.04.016>
- Koizumi, M., & Niino, M. (1995). Overview of FGM Research in Japan. *MRS Bulletin*, 20(1), 19-21. <https://doi.org/10.1557/S0883769400048867>
- Kolahchi, R., Zarei, M. S., Hajmohammad, M. H., & Nouri, A. (2017a). Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 130, 534-545. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.06.039>
- Kolahchi, R., Zarei, M. S., Hajmohammad, M. H., & Nouri, A. (2017b). Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 130, 534-545. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.06.039>

- Kumar, V., Singh, S. J., Saran, V. H., & Harsha, S. P. (2021). Vibration characteristics of porous FGM plate with variable thickness resting on Pasternak's foundation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 85, 104124. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104124>
- Kurpa, L., & Shmatko, T. (2021). Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates and shallow shells by the Ritz method and the R-functions theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 235(20), 4582-4593. <https://doi.org/10.1177/0954406220936304>
- Lambe, T. W., & Whitman, R. V. (1969). Soil mechanics. John Wiley & Sons. Inc., New York, 553.
- Laoufi, I. (2016). *Analyse des plaques FGM sous différents types de chargements*. Université Djillali Liabès - Sidi Bel Abbès.
- Launey, M. E., & Ritchie, R. O. (2009). On the Fracture Toughness of Advanced Materials. *Advanced Materials*, 21(20), 2103-2110. <https://doi.org/10.1002/adma.200803322>
- Lee, H. P. (1998). Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass. *Applied Acoustics*, 55(3), 203-215.
- Lee, K. H., Lim, G. T., & Wang, C. M. (2002). Thick Lévy plates re-visited. *International Journal of Solids and Structures*, 39(1), 127-144. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00205-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00205-0)
- Lee, S. H., Woo, S. P., Kakati, N., Kim, D.-J., & Yoon, Y. S. (2018). A comprehensive review of nanomaterials developed using electrophoresis process for high-efficiency energy conversion and storage systems. *Energies*, 11(11), 3122.
- Lengauer, W., & Dreyer, K. (2002). Functionally graded hardmetals. *Journal of Alloys and Compounds*, 338(1), 194-212. [https://doi.org/10.1016/S0925-8388\(02\)00232-3](https://doi.org/10.1016/S0925-8388(02)00232-3)
- Li, D., Deng, Z., Chen, G., Xiao, H., & Zhu, L. (2017). Thermomechanical bending analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded core. *Composite Structures*, 169, 29-41.
- Li, Q., Iu, V. P., & Kou, K. P. (2008). Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 311(1-2), 498-515.
- Liew, K. M., Han, J.-B., Xiao, Z. M., & Du, H. (1996). Differential quadrature method for Mindlin plates on Winkler foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(4), 405-421.

- Liu, Z., Meyers, M. A., Zhang, Z., & Ritchie, R. O. (2017). Functional gradients and heterogeneities in biological materials : Design principles, functions, and bioinspired applications. *Progress in Materials Science*, 88, 467-498. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2017.04.013>
- Lostec, L., Gault, C., & techniques, U. de L. F. des sciences et. (1997). *Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composites SiC-MAS-L*. <https://books.google.dz/books?id=mnzCMgEACAAJ>
- Madhav, M., Sakleshpur, V. A., & Rajyalakshmi, K. (2015). *Modelling Ground-Foundation Interactions*.
- Mahi, A., & Tounsi, A. (2015). A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling*, 39(9), 2489-2508.
- Mehar, K., Panda, S. K., Dehengia, A., & Kar, V. R. (2016). Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate in thermal environment. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 18(2), 151-173. <https://doi.org/10.1177/1099636215613324>
- Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E. A., & Mahmoud, S. (2019). An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 21(2), 727-757. <https://doi.org/10.1177/1099636217698443>
- Menasria, A., Kaci, A., Bousahla, A. A., Bourada, F., Tounsi, A., Benrahou, K. H., Tounsi, A., Bedia, E. A. A., & Mahmoud, S. R. (2020). A four-unknown refined plate theory for dynamic analysis of FG-sandwich plates under various boundary conditions. *Steel and Composite Structures*, 36(3), 355-367. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.36.3.355>
- Mercier, J. P., Zambelli, G., & Kurz, W. (2002). *Introduction à la science des matériaux* (3. éd., entièrement revue et augmentée). Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Merdaci, S., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Mechab, I., Hebali, H., & Benyoucef, S. (2011a). Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates. *Archive of Applied Mechanics*, 81(11), 1507-1522.
- Merdaci, S., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Mechab, I., Hebali, H., & Benyoucef, S. (2011b). Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates. *Archive of Applied Mechanics*, 81(11), 1507-1522. <https://doi.org/10.1007/s00419-010-0497-5>

- Metco, S. (2013). *An introduction to thermal spray*.
https://www.upc.edu/sct/es/documents_equipament/d_324_id-804-2.pdf
- Meyers, M. A., McKittrick, J., & Chen, P.-Y. (2013). Structural Biological Materials : Critical Mechanics-Materials Connections. *Science*, 339(6121), 773-779.
<https://doi.org/10.1126/science.1220854>
- Miyamoto, Y. (Éd.). (1999). *Functionally graded materials : Design, processing, and applications*. Kluwer Academic Publishers.
- Morfidis, K. (2010). Vibration of Timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. *Computers & Structures*, 88(5-6), 294-308.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.11.001>
- Mori, T., & Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5), 571-574.
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3)
- Moya, J. S., Sánchez-Herencia, A. J., Requena, J., & Moreno, R. (1992). Functionally gradient ceramics by sequential slip casting. *Materials Letters*, 14(5-6), 333-335.
[https://doi.org/10.1016/0167-577X\(92\)90048-O](https://doi.org/10.1016/0167-577X(92)90048-O)
- Mukundan, S. (2005). *Structural design and analysis of a lightweight composite sandwich space radiator panel*.
- Müller, E., Drašar, Č., Schilz, J., & Kaysser, W. A. (2003). Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 17-39.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00581-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1)
- Murty, A. V. K. (1977). Higher order theory for vibrations of thick plates. *AIAA Journal*, 15(12), 1823-1824. <https://doi.org/10.2514/3.7490>
- Nagarajan, N., & Nicholson, P. S. (2005). Nickel-Alumina Functionally Graded Materials by Electrophoretic Deposition. *Journal of the American Ceramic Society*, 87(11), 2053-2057. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.2004.tb06359.x>
- Naleway, S. E., Porter, M. M., McKittrick, J., & Meyers, M. A. (2015). Structural Design Elements in Biological Materials : Application to Bioinspiration. *Advanced Materials*, 27(37), 5455-5476. <https://doi.org/10.1002/adma.201502403>
- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. (2013). Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering*, 44(1), 657-674.

- Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Roque, C. M. C., Cinefra, M., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. M. (2012). A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(2), 711-725.
- Nguyen, T. N., Thai, C. H., & Nguyen-Xuan, H. (2016). A novel computational approach for functionally graded isotropic and sandwich plate structures based on a rotation-free meshfree method. *Thin-Walled Structures*, 107, 473-488. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.06.011>
- Nguyen, V. T. (2004). *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque*.
- Nguyen, V.-H., Nguyen, T.-K., Thai, H.-T., & Vo, T. P. (2014). A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Composites Part B: Engineering*, 66, 233-246.
- Niino, M., Kisara, K., & Mori, M. (2005). Feasibility Study of FGM Technology in Space Solar Power Systems (SSPS). *Materials Science Forum*, 492-493, 163-170. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.492-493.163>
- Olsson, K. (1987). GRP-Sandwich Design and Production in Sweden. Development and Evaluation. *Polymers in Defence*, 3.
- Oluwatosin Abegunde, O., Titilayo Akinlabi, E., Philip Oladijo, O., Akinlabi, S., Uchenna Ude, A., 1 Department of Mechanical Engineering Science, University of Johannesburg, Johannesburg 2006, South Africa, & 2 Department of Chemical, Material and Metallurgical Engineering, Botswana International University of Science and Technology, Palapye, Botswana. (2019). Overview of thin film deposition techniques. *AIMS Materials Science*, 6(2), 174-199. <https://doi.org/10.3934/matersci.2019.2.174>
- Pandey, S., & Pradyumna, S. (2018). Analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order layerwise theory. *Composites Part B: Engineering*, 153, 325-336.
- Panjehpour, M. (2018). Structural Insulated Panels: State-of-the-Art. *Trends in Civil Engineering and its Architecture*, 3(1). <https://doi.org/10.32474/TCEIA.2018.03.000151>
- Pasternak, P. L. (1954). On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstve i Arkhitekture*.
- Petras, A. (1999). *Design of Sandwich Structures*. <https://doi.org/10.17863/CAM.13989>

- Pompe, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P., Hempel, U., Scharnweber, D., & Schulte, K. (2003). Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1), 40-60. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00580-X](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00580-X)
- Praveen, G. N., & Reddy, J. N. (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457-4476. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00253-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00253-9)
- Programme de recherche ILEK : Le béton dégradé.* (2021). Institut pour la conception et la construction légères Université de Stuttgart Faculté 02 _Université de Stuttgart. <https://www.ilek.uni-stuttgart.de/forschung/gradientenwerkstoffe/>
- Put, S., Vleugels, J., Anné, G., & Biest, O. V. der. (2003). Functionally graded ceramic and ceramic–metal composites shaped by electrophoretic deposition. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 222(1), 223-232. [https://doi.org/10.1016/S0927-7757\(03\)00227-9](https://doi.org/10.1016/S0927-7757(03)00227-9)
- Rajak, D. K., Wagh, P. H., Menezes, P. L., Chaudhary, A., & Kumar, R. (2020). Critical Overview of Coatings Technology for Metal Matrix Composites. *Journal of Bio- and Tribo-Corrosion*, 6(1), 12. <https://doi.org/10.1007/s40735-019-0305-x>
- Rajan, T. P. D., & Pai, B. C. (2014). Developments in Processing of Functionally Gradient Metals and Metal–Ceramic Composites : A Review. *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*, 27(5), 825-838. <https://doi.org/10.1007/s40195-014-0142-3>
- Ramakrishnan, K. R. (2014). *Impact behaviour of sandwich structures withnanoparticle reinforced composite face sheets* [Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM; University of New South Wales]. <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01132472>
- Ramteke, P. M., Panda, S. K., & Sharma, N. (2019). Effect of grading pattern and porosity on the eigen characteristics of porous functionally graded structure. *Steel and Composite Structures*, 33(6), 865-875. <https://doi.org/10.12989/SCS.2019.33.6.865>
- Reddy, J. N. (1984). *A simple higher-order theory for laminated composite plates.*
- Reddy, J., Wang, C. M., Lim, G., & Ng, K. (2001). Bending solutions of Levinson beams and plates in terms of the classical theories. *International Journal of Solids and Structures*, 38(26-27), 4701-4720.
- Ritchie, R. O. (2011). The conflicts between strength and toughness. *Nature Materials*, 10(11), 817-822. <https://doi.org/10.1038/nmat3115>

- Roy, M., & Davim, J. P. (Éds.). (2015). *Thermal Sprayed Coatings and their Tribological Performances*: IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-4666-7489-9>
- Safa, A., Hadji, L., Bourada, M., & Zouatnia, N. (2019). Thermal vibration analysis of FGM beams using an efficient shear deformation beam theory. *Earthquakes and Structures*, 17(3), 329-336. <https://doi.org/10.12989/EAS.2019.17.3.329>
- Sahouane, A., Hadji, L., & Bourada, M. (2019). Numerical analysis for free vibration of functionally graded beams using an original HSDBT. *Earthquakes and Structures*, 17(1), 31-37. <https://doi.org/10.12989/EAS.2019.17.1.031>
- Saiyathibrahim, Nazirudeen, M., & Dhanapal, P. (2015). *Processing Techniques of Functionally Graded Materials@_ A Review*. 98-105.
- Saleh, B., Jiang, J., Fathi, R., Al-hababi, T., Xu, Q., Wang, L., Song, D., & Ma, A. (2020). 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges. *Composites Part B: Engineering*, 201, 108376. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
- Saleh, B., Jiang, J., Ma, A., Song, D., Yang, D., & Xu, Q. (2020). Review on the Influence of Different Reinforcements on the Microstructure and Wear Behavior of Functionally Graded Aluminum Matrix Composites by Centrifugal Casting. *Metals and Materials International*, 26(7), 933-960. <https://doi.org/10.1007/s12540-019-00491-0>
- Sandifer, R. (1969). *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*. HG Allen. Pergamon Press, London. 1969. 284 pp. Illustrated. 35s. *The Aeronautical Journal*, 73(707), 982-982.
- Saoula, A., & Boudierba, B. (2019). *Analysis of FGM sandwich plates under the effect of mechanical loads and in a thermal environment*. 60, 60-67.
- Sarathchandra, D. T., Kanmani Subbu, S., & Venkaiah, N. (2018). Functionally graded materials and processing techniques: An art of review. *Materials Today: Proceedings*, 5(10), 21328-21334. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2018.06.536>
- Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. (2019). Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: A review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(21), 1776-1795. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1447178>
- Seghini, M. (2020). *Dynamiques des ouvrages géotechniques*. Université des sciences et technologies d'Oran - Med Boudiaf. https://www.univ-usto.dz/images/coursenligne/DOG_SM.pdf

- Selvadurai, A. P. S. (1979). *Elastic analysis of soil-foundation interaction*. Elsevier Scientific Pub. Co. : distributors for the United States and Canada, Elsevier-North Holland.
- Selvakumar, N., & Barshilia, H. C. (2012). Review of physical vapor deposited (PVD) spectrally selective coatings for mid- and high-temperature solar thermal applications. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 98, 1-23. <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2011.10.028>
- Seshadri, S. (2014). *Treatise on Process Metallurgy*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2010-0-67121-5>
- Shah, A. G., Mahmood, T., & Naeem, M. N. (2009). Vibrations of FGM thin cylindrical shells with exponential volume fraction law. *Applied Mathematics and Mechanics*, 30(5), 607-615. <https://doi.org/10.1007/s10483-009-0507-x>
- shahadat, mrb, alam, mf, mandal, mna, & ali, mm. (2018). Thermal transportation behaviour prediction of defective graphene sheet at various temperature : A Molecular Dynamics Study. *American Journal of Nanomaterials*, 6(1), 34-40.
- Shen, H.-S., & Yu, L. (2004). Nonlinear bending behavior of Reissner–Mindlin plates with free edges resting on tensionless elastic foundations. *International journal of solids and structures*, 41(16-17), 4809-4825.
- Shimpi, R. P. (2002). Refined Plate Theory and Its Variants. *AIAA Journal*, 40(1), 137-146. <https://doi.org/10.2514/2.1622>
- Sobhy, M. (2013). Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures*, 99, 76-87. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.018>
- Sobhy, M. (2016). An accurate shear deformation theory for vibration and buckling of FGM sandwich plates in hygrothermal environment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 110, 62-77. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.03.003>
- Sobhy, M., & Zenkour, A. M. (2015). Thermodynamical Bending of FGM Sandwich Plates Resting on Pasternak’s Elastic Foundations. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 7(1), 116-134. <https://doi.org/10.4208/aamm.2013.m143>
- Sofiyev, A. H. (2018). Application of the FOSDT to the solution of buckling problem of FGM sandwich conical shells under hydrostatic pressure. *Composites Part B: Engineering*, 144, 88-98.
- Sofiyev, A. H., Hui, D., Najafov, A. M., Turkaslan, S., Dorofeyskaya, N., & Yuan, G. Q. (2015). Influences of shear stresses and rotary inertia on the vibration of functionally

- graded coated sandwich cylindrical shells resting on the Pasternak elastic foundation. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 17(6), 691-720.
- Sofiyev, A., & Osmancebioglu, E. (2017). The free vibration of sandwich truncated conical shells containing functionally graded layers within the shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 120, 197-211.
- Soldatos, K. P. (1993). Vectorial approach for the formulation of variationally consistent higher-order plate theories. *Composites Engineering*, 3(1), 3-17. [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(93\)90027-H](https://doi.org/10.1016/0961-9526(93)90027-H)
- Studart, A. R. (2013). Biological and Bioinspired Composites with Spatially Tunable Heterogeneous Architectures. *Advanced Functional Materials*, 23(36), 4423-4436. <https://doi.org/10.1002/adfm.201300340>
- Studart, A. R. (2015). Biologically Inspired Dynamic Material Systems. *Angewandte Chemie International Edition*, 54(11), 3400-3416. <https://doi.org/10.1002/anie.201410139>
- Suk, M.-J., Choi, S.-I., Kim, J.-S., Kim, Y. D., & Kwon, Y.-S. (2003). Fabrication of a porous material with a porosity gradient by a pulsed electric current sintering process. *Metals and Materials International*, 9(6), 599-603. <https://doi.org/10.1007/BF03027261>
- Suresh, S. (2001). Graded Materials for Resistance to Contact Deformation and Damage. *Science*, 292(5526), 2447-2451. <https://doi.org/10.1126/science.1059716>
- Suresh, S., & Mortensen, A. (1997). Functionally graded metals and metal-ceramic composites : Part 2 Thermomechanical behaviour. *International Materials Reviews*, 42(3), 85-116. <https://doi.org/10.1179/imr.1997.42.3.85>
- Swaminathan, K., & Sangeetha, D. M. (2017). Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods. *Composite Structures*, 160, 43-60. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>
- Takahashi, M., Itoh, Y., & Kashiwaya, H. (1990). *Fabrication and evaluation of W/CU gradient material by sintering and infiltration technique*. 129-134.
- Teodoru, I.-B. (2009). Beams on elastic foundation the simplified continuum approach. *Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. Sectia Constructii, Arhitectura*, 55(4), 37.
- Terzaghi, K., & Peck, R. B. (1948). Soil Mechanics. *Engineering Practice*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

- Thai, C. H., Zenkour, A. M., Wahab, M. A., & Nguyen-Xuan, H. (2016). A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Composite Structures*, *139*, 77-95.
- Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Vo, T. P., & Lee, J. (2014). Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, *45*, 211-225.
- thai Hoang, C., Nguyen-Xuan, H., Nguyen-Thanh, N., Le, T.-H., & Rabczuk, T. (2012). Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner–Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *91*, 571-603. <https://doi.org/10.1002/nme.4282>
- Thin-film technologies*. (s. d.). https://www.fz-juelich.de/iek/iek-1/EN/Services/Duennschichttechnologien/PVD_CVD.html?nn=1834826
- Tounsi, A., Houari, M. S. A., & Benyoucef, S. (2013). A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerospace science and technology*, *24*(1), 209-220.
- Tung, H. V. (2015). Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties. *Composite Structures*, *131*, 1028-1039. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.06.043>
- Turner, G. F. (1995). Advanced composite materials in European aircraft present and future. *Materials Challenge: Diversification and the Future.*, *40*, 366-380.
- Übeyli, M., Balci, E., Sarikan, B., Öztaş, M. K., Camuşcu, N., Yildirim, R. O., & Keleş, Ö. (2014). The ballistic performance of SiC-AA7075 functionally graded composite produced by powder metallurgy. *Materials & Design (1980-2015)*, *56*, 31-36. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2013.10.092>
- Udupa, G., Rao, S. S., & Gangadharan, K. (2014). Functionally graded composite materials : An overview. *Procedia Materials Science*, *5*, 1291-1299.
- Uemura, S., Sohda, Y., Kude, Y., Hirai, T., & Sasaki, M. (1990). Preparation and evaluation of SiC/C functionally gradient materials by chemical vapor deposition. *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, *37*(2), 275-282. <https://doi.org/10.2497/jjspm.37.275>

- Uğurlu, B., Kutlu, A., Ergin, A., & Omurtag, M. H. (2008). Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid. *Journal of sound and Vibration*, 317(1-2), 308-328.
- Vel, S. S., & Batra, R. C. (2004). Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5), 703-730. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00412-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00412-7)
- Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Maheri, A., & Lee, J. (2014). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory. *Engineering Structures*, 64, 12-22. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.01.029>
- Wang, Z.-X., & Shen, H.-S. (2011). Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations. *Composite Structures*, 93(10), 2521-2532. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.014>
- Watanabe, Y., Eryu, H., & Matsuura, K. (2001). Evaluation of three-dimensional orientation of Al3Ti platelet in Al-based functionally graded materials fabricated by a centrifugal casting technique. *Acta Materialia*, 49(5), 775-783. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(00\)00384-0](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00384-0)
- Watanabe, Y., Inaguma, Y., Sato, H., & Miura-Fujiwara, E. (2009). A Novel Fabrication Method for Functionally Graded Materials under Centrifugal Force : The Centrifugal Mixed-Powder Method. *Materials*, 2(4), 2510-2525. <https://doi.org/10.3390/ma2042510>
- Xia, X.-K., & Shen, H.-S. (2008). Vibration of post-buckled sandwich plates with FGM face sheets in a thermal environment. *Journal of Sound and Vibration*, 314(1), 254-274. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.019>
- Xiang, S., Jin, Y., Bi, Z., Jiang, S., & Yang, M. (2011). A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Composite Structures*, 93(11), 2826-2832.
- Yazdani, R., & Mohammadimehr, M. (2019). Double bonded Cooper-Naghdi micro sandwich cylindrical shells with porous core and CNTRC face sheets : Wave propagation solution. *Computers and Concrete*, 24(6), 499-511. <https://doi.org/10.12989/CAC.2019.24.6.499>
- Zenkert, D. (1995). *An Introduction to Sandwich Structures*. <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kth:diva-263054>

- Zenkour, A. M. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates : Part 2—Buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18), 5243-5258. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016>
- Zenkour, A. M. (2013). Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(6), 629-656. <https://doi.org/10.1177/1099636213498886>
- Zenkour, A. M., & Alghamdi, N. A. (2010). Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 12(1), 7-46.
- Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., & Sobhy, M. (2010). Bending analysis of FG viscoelastic sandwich beams with elastic cores resting on Pasternak's elastic foundations. *Acta Mechanica*, 212(3), 233-252.
- Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., & Sobhy, M. (2011). Bending of a fiber-reinforced viscoelastic composite plate resting on elastic foundations. *Archive of Applied Mechanics*, 81(1), 77-96.
- Zenkour, A. M., & Radwan, A. F. (2018). Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak foundations under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 18(2), 645-658. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2017.10.003>
- Zouatnia, N., & Hadji, L. (2019). Effect of the micromechanical models on the bending of FGM beam using a new hyperbolic shear deformation theory. *Earthquakes and Structures*, 16(2), 177-183. <https://doi.org/10.12989/EAS.2019.16.2.177>