N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

THESE
DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée par

YAHIAOUI Kamel

Spécialité : *MATHEMATIQUES*
Option : *Mathématiques Appliquées*

Intitulée

Contribution à la modélisation mathématique de certains problèmes d'évolution

Soutenu le 20/ 01 /2022
Devant le jury composé de :
Président :
Mr. Abdelkader LAKMECHE, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes

Examinateurs :
Mr. Ghouti DJELLOULI, Professeur à l'Université de Saïda
Mr. Mustapha YEBDRI, Professeur à l'Université Aboubakr Belkaid de Tlemcen

Directeur de thèse :
Mr. Soufiane MOKEDDEM, Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbes

Dédicaces

A ma très chère mère,

Et à tous ceux que j'aime

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur ***Soufiane MOKEDDEM*** *pour sa disponibilité, sa rigueur et son enthousiasme dans la direction de ce travail.*

Je tiens également à remercier vivement Monsieur ***Abdelkader LAKMECHE*** *qui m'a fait honneur de présider le jury.*

Mes remerciements les plus respectueux vont aussi à Monsieur ***Ghouti DJELLOULI*** *et Monsieur* ***Mustapha YEBDRI*** *qui m'ont fait l'honneur de prendre connaissance de ce travail et d'en être examinateurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.*

Je remercie encore tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Un grand merci à tous mes amis.

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse on propose, d'étudier dans une grande partie, le comportement asymptotique des solutions de certains problèmes d'évolution non linéaires faisant intervenir l'opérateur divergentiel $-\text{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u)$. Pour ce faire on a choisit le cas de certaine classe d'équations des ondes avec dissipation non linéaire.
On essayera de donner une estimation sur le comportement à l'infini de l'énergie que l'on note $E(t)$. Une énergie qui est sensée être décroissante et qui dépend implicitement de la solution du problème traité.
Les problèmes en question sont supposés être dissipatifs, plus justement on admettra que chaque problème étudié est soumis à l'action d'un phénomène extérieur (une dissipation) qui peut être de nature diverse ; on peut citer l'action de la gravité, le frottement, la chaleur, etc. C'est d'ailleurs ces phénomènes qui font décroître l'énergie. De ce fait l'acquis principal de notre travail c'est les différents aspects donnés au terme dissipatif.

On se concentra en particulier sur des cas de décroissance uniforme de l'énergie, on démontrera que l'énergie $E(t)$ vérifie une estimation du type

$$E(t) \quad \leq \quad c\,g(t) \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

où $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue décroissante satisfaisant

$$g(t) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad t \longrightarrow +\infty.$$

Le premier chapitre a pour but de rappeler quelques définitions concernant surtout les espaces L^p, ainsi que quelques inégalités usuelles, à savoir l'inégalité de Hölder et Young. De telles inégalités seront très utiles lors des passages aux estimations présentes dans une grande partie de ce travail.
Nous avons aussi donné un bref aperçu sur quelques propriétés des espaces de Sobolev en dimension n, ainsi que les différentes formes que peut avoir la formule de Green qui présente un outil de base dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

Pour le deuxième chapitre, on considère le problème aux limites pour l'équation des ondes non linéaire avec une dissipation forte de la forme $|u_t|^{m-2}u_t$.

$$(P)\begin{cases} (|u_t|^{l-2}u_t)_t - \Delta_p u + |u_t|^{m-2}u_t + (\alpha|u|^{\mu-2} - |u|^{\nu-2})u = |u|^{r-2}u \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où p, l, r, $m \geq 2$ sont des nombres réels, Ω est un domaine borné de $\mathbf{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ et α, μ et ν des nombres réels.
Dans un premier temps, on démontre l'existence globale de la solution en construisant un ensemble stable dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$. Une telle construction a pour but d'absorber l'effet du terme de source sur le problème, afin d'éviter une éventuelle explosion de la solution en temps fini. Donc tant que la solution reste dans l'ensemble

stable, elle existe globalement.

Notre intérêt s'est porté par la suite sur l'étude du comportement asymptotique de l'énergie, plus justement voir de quelle façon, l'énergie (qui s'écrit implicitement en fonction de la solution) elle va décroître ?

A l'aide de la méthode des multiplicateurs, on donne une estimation sur le comportement à l'infini de l'énergie. Les inégalités intégrales introduites par Haraux **[16]** et Komornik **[18]** forment l'outil de base de notre démonstration.

Dans le troisième chapitre, on considère l'équation des ondes de type p-Laplacien avec une dissipation faible de la forme

$$(P)\begin{cases} u_{tt}-\Delta_p u+\sigma(t)(u_t-\Delta u_t)+\omega|u|^{m-2}u=|u|^{r-2}u \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,t)=0 \text{ sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

où $p, m, r \geq 2$, des nombres réels et σ est une fonction positive vérifiant certaines conditions. A l'aide de nouvelles inégalités intégrales introduite par Martinez **[25]** et dont la preuve repose sur la construction d'une fonction poids liée au comportement asymptotique du terme dissipatif $(\sigma(t)(u_t-\Delta u_t))$; on aboutit à des résultats de décroissance polynomiale et exponentielle concernant l'énergie.

Le dernier chapitre est la partie consacré à l'étude mathématiques, d'un problème d'évolution issus des sciences du vivant. Pour ce faire on considère un modèle décrivant l'evolution de la maladie d'Alzheimer. Le modèle en question décrit d'une part la formation de plaque amyloïde in vivo, et d'autre part les interactions entre les oligomères Aß et la protéine prion responsable de la perte de mémoire.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 *Les espaces* L^p

Définition 1.1.1 (Fonction mesurable).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble,

$$E_\alpha = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 1.1.2 (Fonction intégrable)**.**

On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si,

$$\int_\Omega |f| \, dx < +\infty.$$

Définition 1.1.3 (Espace de Lebesgue)**.**

Soit $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble,

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | \ f \text{ mesurable et } |f|^p \text{ intégrable}\}.$$

De plus, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\| \,.\, \|_{L^\infty}$:

$$\| \,.\, \|_{L^\infty} = \inf \{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \text{ presque partout }\}.$$

Donc $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions bornées presque partout dans Ω.

Définition 1.1.4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace $L^p_{loc}(\Omega)$ par l'ensemble des $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f \in L^p(\Omega')$, pour tout Ω' avec $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ et dont la fermeture est compacte dans $\mathbb{R}^N$.

Remarque 1.1.1.

1. En particulier, on a $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.
2. En revanche, on a pas toujours l'égalité. En effet, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est $L^1_{loc}(]0, 1[)$ mais f n'est pas $L^1(]0, 1[)$.

Définition 1.1.5 (Support d'une fonction continue)**.**
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle support de f l'ensemble

$$\text{supp}(f) = \text{adh}\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}.$$

Définition 1.1.6 (L'espace $C_c(\Omega)$)**.**
On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact, c'est-à-dire que pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on a

$$C_c(\Omega) = \{f : \text{supp}(f) \subset \Omega\}.$$

Définition 1.1.7. On note par $C_c^\infty(\Omega)$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω. Ce même espace est parfois noté $C_0^\infty(\Omega)$ ou $D(\Omega)$.

Quelques inégalités usuelles

Inégalité de Young

Définition 1.1.8 (Exposant conjugué).

On dit que $p, q \in [\,1, +\infty[$ sont deux exposants conjugués si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Il est clair que si $p = 1$ alors $q = \infty$, si $q = 1$ alors $p = \infty$ et sinon $q = \frac{p}{p-1}$.

Théorème 1.1.1 ([7]). *Soient $a, b > 0$ et $1 < p, q < +\infty$ deux exposants conjugués. Alors*

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Inégalité de Hölder

Théorème 1.1.2 ([7]). *Soit $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Alors le produit $uv \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |u\,v|\,dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^q dx\right)^{1/q}.$$

1.2 *Rappels sur les espaces de Sobolev*

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les dérivées au sens faible sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles. On se contentera dans cette partie de rappeler, quelques résultats importants sur ces espaces en particulier en dimension N.

1.2.1 Dérivée au sens faible

Lemme 1.2.1 ([1]). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $v \in L^2(\Omega)$ tels que,*

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)dx = 0 \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Alors $v = 0$ presque partout dans Ω.

Définition 1.2.1. Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. v est dite dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $g_i \in L^2(\Omega)$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, telles que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi(x)dx.$$

Dans ce cas g_i est appelée la i-ème dérivée partielle faible de v qu'on notera $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$

Lemme 1.2.2. Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. La fonction v est dérivable au sens faible si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \left| \int_\Omega v(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C\|\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exemple 1.2.1.

1. Si $f \in C^1(\Omega)$, alors f est dérivable au sens faible.
2. la fonction $f(x) = |x|$, admet une dérivée faible dans $L^2(]-1, 1[)$, qui est $H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ mais cette dernière, n'admet pas de dérivée faible dans $L^2(]-1, 1[)$. Ainsi, toute fonction n'est pas forcément dérivable au sens faible.

1.2.2 Espaces de Sobolev en dimension n

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \begin{array}{l} \exists\, g_1, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \ \ \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \forall i = 1, \ldots, n \end{array} \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \ \ \forall i = 1, \ldots.., n \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = grad\ u. \tag{1.1}$$

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1, +\infty[, \\ max\left(\|u\|_{L^\infty}, \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^\infty}\ 1 \leq i \leq n \right) & \text{si } p = +\infty \end{cases} \tag{1.2}$$

et pour $p = 2$, l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

Remarque 1.2.1. En d'autre terme, on peut dire que $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, prises au sens faible, sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots., n$.

Définition 1.2.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors on définit $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$.

Remarque 1.2.2. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$, alors on peut identifier $W_0^{1,p}(\Omega)$ à l'ensemble des fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega)$ qui sont nulles presque partout sur le bord de Ω :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Si $p = \infty$, alors l'assertion précédente est fausse. En revanche, la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ est équivalente à $C^1(\overline{\Omega})$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$

On définit de manière analogue à la dimension une les espaces de Sobolev d'ordre entier quelconque. Si $m > 0$ est un entier, on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, dont les dérivés partielles prises au sens faible $D^\alpha u$ sont dans $L^p(\Omega)$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq m$.

Définition 1.2.4. Nous appelons multi-indice tout $\alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. On définit

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

et

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Définition 1.2.5. Soit $m \geqslant 1$ un entier et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \begin{array}{c} \forall\, \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ \exists\, g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi \ \ \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\},$$

cet espace est munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } 1 \leq p < \infty & \displaystyle\left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \\ \text{si } p = \infty & \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty . \end{array} \right.$$

qui lui donne une structure d'espace de Banach. On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Les espaces $W_0^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.2.6. Soit p un réel, $1 \leq p < +\infty, m$ un entier ≥ 2, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, alors on définit $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, c'est-à-dire $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}}$.

Remarque 1.2.3. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$, alors on peut identifier $W_0^{m,p}(\Omega)$ à l'ensemble des fonctions $u \in W^{m,p}(\Omega)$ qui sont nulles presque partout sur le bord de Ω :

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Si $p = \infty$, alors l'assertion précédente est fausse. En revanche, la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,\infty}(\Omega)$ est équivalente à $C^1(\overline{\Omega})$.

Proposition 1.2.1. *1. Pour $\Omega = \mathbb{R}^n, W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

2. Pour Ω une boule ou un pavé borné de $\mathbb{R}^n$, $W^{m,p}(\Omega) \neq W_0^{m,p}(\Omega)$.

1.2.3 Formule d'intégration par parties et formule de Green sur les espaces de Sobolev

Nous allons tout d'abord rappeler certaines notions utiles avant d'énoncer la formule de Green qui est en fait l'un des outils fondamentaux pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.2.7. Soit N un entier, on note $x = (x_1, ..., x_N)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^N$. On appelle champ de vecteurs une application $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, qui à $x =$

$(x_1, ..., x_N)$ associe $v(x) = (v_1(x), ..., v_N(x))$.
Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ on appelle divergence la fonction,

$$\text{div } v(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial v_N}{\partial x_N}(x).$$

Le Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est donné par,

$$\Delta u(x) = \text{ div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}(x).$$

Définition 1.2.8. On appelle normale au domaine Ω un champ de vecteurs $n(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ de Ω et tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$ où le bord est régulier, $n(x)$ soit orthogonal au bord et $\|n(x)\| = 1$.
Ainsi, la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ est le vecteur unité $n = (n_i)_{1\leq i\leq N}$ normal en tout point au plan tangent de Ω et pointant vers l'exterieur de Ω.
Dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ on note dx la mesure de lebesque de dimension N. Sur $\partial\Omega$ on note $d\sigma$ la mesure de lebesgue de dimension $N-1$ sur $\partial\Omega$.

Définition 1.2.9 (Dérivée normale)**.**
On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur $\partial\Omega$, la fonction définie sur les points réguliers de $\partial\Omega$ par :$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x).n(x)$. Il s'agit d'un produit scalaire car ∇u est un vecteur, tout comme $n(x)$.

Théorème 1.2.1 (Formule de Green). *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)d\sigma, \tag{1.3}$$

où $n = (n_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Corollaire 1.2.1 ([1]). *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. L'espace $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.*

On peut aussi obtenir la formule de green, pour un ordre plus élevé, et cela sur l'espace H^m. Nous nous contenterons ici de traiter le cas $m = 2$.

Théorème 1.2.2 (**[1]**)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^2. Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Alors,*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)d\sigma. \tag{1.4}$$

Une autre formule qui est aussi importante, et qui est en fait une conséquence directe de la formule de Green, c'est celle de Stokes.

Théorème 1.2.3 (**Formule de Stokes**)**.** *Sous les mêmes conditions et avec $\phi \in H^1(\Omega)$. On a,*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega \sigma(x).\nabla\phi(x)dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x).n(x)\phi(x)ds,$$

Pour terminer nous avons besoin du Lemme de Gronwall, et d'un résultat de régularité (Densité de C_c^∞ dans $L^p, 1 \leq p < +\infty$) utiliser dans le dernier chapitre.

Lemme 1.2.3. *Soit $\varphi : [a,b] \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant*

$$\exists\alpha > 0, \quad \exists\beta > 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \|\varphi'(t)\| \leq \beta + \|\varphi(t)\|.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \quad \|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(a)\|e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-a)} - 1\right)$$

Proposition 1.2.2 (Régularité)**.** *Soit $h \in L^p, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad \forall\epsilon > 0$, il existe $h_\epsilon \in C_c^\infty$ telle que*

$$\|h - h_\epsilon\|_{L^p} \leq \epsilon.$$

Estimation du comportement à l'infini de l'énergie associée à une équation des ondes du type p-Laplacien avec une dissipation et un terme de source non linéaire

2.1 *Introduction*

On considère l'équation des ondes non linéaire de type p-Laplacien ci-après

$$(P)\begin{cases}(|u_t|^{l-2}u_t)_t - \Delta_p u + |u_t|^{m-2}u_t + (\alpha|u|^{\mu-2} - |u|^{\nu-2})u = |u|^{r-2}u \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}_+\\ u(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}_+\\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega,\end{cases}$$

où p, l, r, $m \geq 2$ sont des nombres réels, Ω est un domaine borné de $\mathbf{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ et α, μ et ν des nombres réels vérifiant certaines conditions qu'on précisera plus tard.

L'existence globale et le comportement asymptotique des solutions associées aux problème (P) ont fait l'objet d'étude de plusieurs auteurs où de différentes méthodes et approches ont été considérées.

Pour le cas $l = 2$, Sango **[31]** a considéré le problème $u_{tt} - \Delta_p u - \Delta u_t + g(x,u) = f(x,u)$ dans $\Omega\times[0,+\infty[$. En combinant, une approximation de Faedo-Galerkin ainsi que certaine technique faisant appel des propriétés de compacité et de monotonie (voir **[23]** et **[22]**), ils ont démontré l'existence globale de la solution. D'autre part et en imposant certaines conditions sur $g(x, u)$, ils ont pu établir la décroissance polynomiale et exponentielle de l'énergie.

Des résultats similaires concernant surtout des propriétés de décroissance de l'énergie ont été obtenus par Chen, Yao et Shao **[10]**. Pour ce faire ils ont utilisé une nouvelle méthode basée sur de nouvelles inégalités intégrales introduites par Martinez dans **[25]**.

On peut encore citer quelques travaux dont l'estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie pour certaines equations des ondes non linéaires de type p-Laplacien avec dissipation faisait le principal objet d'étude, à savoir **[3]**, **[37]**, **[35]**, **[24]**, **[5]**, **[35]**, **[38]**, **[39]** et **[26]**.

Motivé par l'idée introduite dans **[10]**, **[39]** **[26]** on démontre dans un premier temps, l'existence globale de la solution en construisant un ensemble stable dans l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ (voir **[32]**). Une telle construction a pour but d'absorber l'effet du terme de source sur le problème, cela évitera une éventuelle explosion de la solution en temps fini. Donc tant que la solution reste dans l'ensemble stable, elle existe globalement. Par la suite on donne une estimation du comportement à l'infini de l'énergie en utilisant la méthode des multiplicateurs et certaines inégalités intégrales introduites par Komornik **[18]**.

2.2 *Préliminaires et résultat principal*

Commençons par quelques notions importantes dont nous ferons usage le long de ce chapitre. On définit d'abord la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{p}\|\nabla_x u\|_p^p + \frac{1}{r}\int_\Omega H(x,u)dx - \frac{1}{r}\|u\|_r^r,$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Où $H(x,u) = \int_0^u h(x,s)ds$ et $h(x,u) = (\alpha|u|^{\mu-2} - |u|^{\nu-2})u$. Ensuite, on définit l'ensemble stable $\mathcal{S}$ associé au problème (P) par

$$\mathcal{S} \equiv \{u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ K(u) > 0\} \cup \{0\},$$

tel que

$$K(u) = \|\nabla u\|_p^p + \int_\Omega H(x,u)dx - \|u\|_r^r.$$

On définit aussi l'énergie totale $E(t)$ associée à la solution du problème (P),

$$E(t) = \frac{l-1}{l}\|u_t\|_l^l + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \int_\Omega H(x,u)dx - \frac{1}{r}\|u\|_r^r, \tag{2.1}$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $t \geq 0$.

On aura aussi besoin du théorème assurant l'existence d'une solution locale et dont la démonstration repose sur la méthode de Faedo-Galerkin (pour plus de détails, voir **[10]**, **[23]** et **[35]**).

Théorème 2.2.1. *Soit* $\begin{cases} 2 < p < r < \frac{np}{n-p} & si\ n > p, \\ 2 < p < r < \infty & si\ n \leq p. \end{cases}$
Supposons $2 \leq m \leq p$. *Alors, pour* $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^l(\Omega)$ *et* u_0 *dans l'ensemble stable* $\mathcal{S}$, *il existe* $T > 0$ *pour lequel le problème* (P) *admet une solution locale unique* u *vérifiant*

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty\left([0,T); W_0^{1,p}(\Omega)\right), \\ &u_t \in L^\infty\left([0,T); L^l(\Omega)\right) \cap L^m\left([0,T); L^m(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Avant d'énoncer les résultats justifiant l'existence globale ainsi que le comportement asymptotique de la solution, rappelons quelques lemmes importants.
Dans toute la suite, on note par T_{max} la durée de vie de la solution u associée au problème (P).

Lemme 2.2.1. *Soit $u(t,x)$ une solution du problème (P). Alors $E(t)$ vérifie,*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\|u_t\|_m^m \leq 0.$$

pour tout $t \in [0,\infty)$.

Preuve. Multiplions la première équation du problème (P) par u_t puis faire une intégration sur Ω. On obtient

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\|u_t\|_m^m \leq 0.$$

pour tout $t \in [0,\infty)$. □

C'est la méthode utiliser pour définir l'énergie, qui est donc une fonction décroissante.

Lemme 2.2.2 (Inégalité de Sobolev-Poincaré)**.** *Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in L^r(\Omega)$ pour r un nombre tel que $2 \leq r < +\infty$ $(n = 1, 2, ..., p)$ ou $2 \leq r \leq \frac{np}{n-p}$ pour $n \geq p+1$, et il existe alors une constante $c_* = c_*(\Omega, r)$ telle que,*

$$\|u\|_r \leq c_* \|\nabla u\|_{W_0^{1,p}} \quad pour \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lemme 2.2.3. *Sous les mêmes conditions du théorème 2.2.1 on a*

$$\frac{r-p}{rp}\,\|\nabla_x u\|_p^p \leq E(t), \tag{2.2}$$

pour $u \in \mathcal{S}$.

Preuve. De la définition de $K(u)$ et $J(u)$ on a

$$K(u) + \frac{r-p}{p}\,\|\nabla_x u\|_p^p = rJ(u).$$

De plus $K(u) \geq 0$, puisque $u \in \mathcal{S}$. Donc de (2.1) on déduit que

$$\frac{r-p}{rp}\,\|\nabla_x u\|_p^p \leq J(u) \leq E(t).$$

□

Lemme 2.2.4 (**[39]**). *Soit u une solution du problème (P) sur $[0, T_{\max})$. On suppose que* $\begin{cases} 2 < p < r < \frac{np}{n-p} & si\ n > p, \\ 2 < p < r < \infty & si\ n \leq p. \end{cases}$
Si $u_0 \in \mathcal{S}$ et $u_1 \in L^l(\Omega)$ avec

$$\mathcal{M} = C^r \left(\frac{r-p}{rp} E(0) \right)^{\frac{r-p}{p}} < 1, \tag{2.3}$$

alors $u \in \mathcal{S}$, pour tout $t \in [0,\, T_{max})$.

Nous allons dans cette partie de notre travail énoncer quelques résultats sur les inégalités intégrales qui sont normalement l'outil de base lors des passages aux estimations de la vitesse de décroissance de l'énergie. Par le lemme ci-après on distingue deux types de résultats, une décroissance exponentielle expliquée par Haraux **[16]** et une décroissance polynomiale donnée par Komornik **[18]**.

Lemme 2.2.5 (**[16]**, **[18]**). *Soit $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe $q \geq 0$ et $\gamma > 0$ tels que*

$$\forall t \geq 0, \qquad \int_t^{+\infty} E^{q+1}(\tau)\, d\tau \leq \gamma^{-1}\, E^q(0) E(t). \tag{2.4}$$

Alors E vérifie l'estimation de décroissance suivante :

$$si\ q = 0, \quad E(t) \leq E(0)\, \exp(1 - \gamma t), \forall t \geq 0, \tag{2.5}$$

$$si\ q > 0, \quad E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+q}{1+\gamma\, q\, t} \right)^{1/q}, \forall t \geq 0. \tag{2.6}$$

Preuve.

Le cas $q = 0$.

Dans ce cas,

$$\forall t \geq 0, \qquad \int_t^{+\infty} E(\tau)\, d\tau \leq \gamma^{-1}\, E(t). \tag{2.7}$$

L'inégalité (2.5) est bien vérifiée pour $t \leq \gamma^{-1}$, cela découle du fait que E est décroissante. Il faut donc démontrer qu'elle reste vraie pour $t \geq \gamma^{-1}$. Soit

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad h(t) = \int_t^{+\infty} E(\tau)\, d\tau.$$

h est décroissante, positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De (2.7), on a

$$\forall t \geq 0, \quad h'(t) + \gamma h(t) \leq 0.$$

Soit

$$T_0 = \sup\{t,\ h(t) > 0\}. \tag{2.8}$$

Pour tout $t < T_0$, on a

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \leq -\gamma,$$

ainsi

$$h(t) \leq \exp(-\gamma t) \leq \gamma^{-1} E(0) \exp(-\gamma t), \qquad \text{pour} \ \ 0 \leq t < T_0. \tag{2.9}$$

Puisque $h(t) = 0$ pour $t \geq T_0$, cette relation reste vraie pour tout t. Soit $\varepsilon > 0$. Comme E est positive, décroissante, on déduit que

$$\forall t \geq \varepsilon, \quad E(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} E(\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon}\, h(t-\varepsilon) \leq \frac{1}{\gamma\varepsilon}\, E(0) \exp(\gamma\varepsilon) \exp(-\gamma t).$$

En choisissant $\varepsilon = \gamma^{-1}$, on aura

$$\forall t \geq 0, \qquad E(t) \leq E(0) \exp(1 - \gamma t).$$

Le cas $q > 0$.

Nous allons supposer par homogénéité que $E(0) = 1$. Soit

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad h(t) = \int_t^{+\infty} E(\tau)\, d\tau.$$

h est décroissante, positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De (2.4), on a

$$\forall t \geq 0, \quad -h' \geq (\gamma\, h)^{1+q}.$$

Pour T_0 donné par (2.8), on a

$$\forall t \in [0, T_0[, \quad \left(h^{-q}\right)' \geq q\gamma^{1+q}.$$

Par intégration on a

$$0 \leq t < T_0, \quad h^{-q}(t) - h^{-q}(0) \geq q\gamma^{1+q}\, t,$$

ainsi

$$0 \leq t < T_0, \quad h(t) \leq \left(h^{-q}(0) + q\gamma^{1+q}\, t\right)^{-1/q}. \tag{2.10}$$

Il faut noter que cette relation reste vraie pour tout $t \geq T_0$. De plus et puisque

$$h(0) \leq \gamma^{-1} E(0)^{1+q} = \gamma^{-1},$$

on a

$$h(t) \leq \left(h^{-q}(0) + q\gamma^{1+q}\, t\right)^{-1/q} \leq \gamma^{-1}(1 + \gamma\, q\, t)^{-1/q}, \tag{2.11}$$

Comme E est positive et décroissante, on déduit de l'estimation (2.11) que

$$\begin{aligned}
\forall S \geq 0, \quad E\left(\gamma^{-1} + (1+q)S\right)^{1+q} &\leq \frac{1}{\gamma^{-1} + q\, S} \int_S^{\gamma^{-1}+(q+1)S} E^{q+1}(\tau) d\tau \\
&\leq \frac{\gamma}{1 + \gamma\, q\, S}\, h(S) \\
&\leq \frac{\gamma}{1 + \gamma\, q\, S}\, \gamma^{-1}\, (1 + \gamma\, q\, S)^{-1/q}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall S \geq 0, \quad E\left(\gamma^{-1} + (q+1)S\right) \leq \frac{1}{(1 + \gamma\, q\, S)^{1/q}}.$$

En choisissant $t = \gamma^{-1} + (q+1)S$, on obtient l'estimation (2.6). $\square$

Ainsi, le théorème donnant le résultat principal est le suivant,

Théorème 2.2.2 ([34]). *Soit $u(t,x)$ une solution locale du problème (P), sur $[0,T_{max})$ qui a pour données initiales $u_0 \in S$ et $u_1 \in L^l(\Omega)$. Supposons que l'énergie initiale $E(0)$ vérifie (2.3) et $2 \leq m \leq p$. Si les hypothèses du Théorème 2.2.1 sont satisfaites, $2 < m < \frac{np}{n-p}$ pour $n > p$ et $2 < m < \infty$ pour $n \leq p$. Alors $T_{\max} = \infty$. De plus, pour $p \leq \nu \leq 2p$ et $\nu < \mu < \frac{np}{n-p}$, il existe $C_0 = C(u_0,u_1)$ et $\alpha' > 0$ avec $\alpha > \alpha'$ tel que la solution globale du problème (P) vérifie la propriété de décroissance suivante*

$$E(t) \leq C_0\, t^{-\frac{p}{p-2}}, \quad \forall t \geq 0.$$

2.3 *Preuve du résultat principal*

2.3.1 Existence globale

Il suffit de montrer que $\|u_t\|_l^l + \|\nabla u\|_p^p$, est borné indépendamment de t.

Sachant que l'énergie E est décroissante, du lemme 2.2.3 on obtient

$$\frac{l-1}{l}\|u_t\|_l^l + \frac{r-p}{rp}\|\nabla u\|_p^p \leq \frac{l-1}{l}\|u_t\|_l^l + E(t) \leq E(t) \leq E(0).$$

De là

$$\|u_t\|_l^l + \|\nabla u\|_p^p \leq \max\left(\frac{l}{l-1}, \frac{rp}{r-p}\right) E(0) < +\infty.$$

Par le principe de la continuité et l'inégalité ci-dessus, on a existence globale de la solution. Donc, $T_{max} = +\infty$.

2.3.2 Comportement asymptotique de l'énergie

Nous sommes amenés à estimer le comportement à l'infini de l'énergie $E(t)$ associée à la solution du problème (P) à l'aide de la méthode des multiplicateurs. On choisit $E^q\, u$ comme multiplicateur où $q = (p-2)/p > 0$. Multiplions donc la première équation du problème (P) par $E^q\,u$.

Rappelons que dans toute la suite C désigne des constantes positives, qui peuvent être différentes pour chaque cas, indépendantes de $E(0)$.

Par intégration sur $\Omega \times [S,T]$, où $0 \leq S \leq T \leq \infty$ on obtient :

$$0 = \int_S^T \int_\Omega E(t)^q u[(|u_t|^{l-2}u_t)_t - \mathrm{div}(|\nabla_x u|^{p-2}\nabla_x u) + |u_t|^{m-2}u_t + h(x,u) - |u|^{r-2}u]dx\,dt. \tag{2.12}$$

Après des calcules simple sur tout les termes, et l'utilisation des formules de Green , par exemple

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega E(t)^q u(|u_t|^{l-2}u_t)_t\,dx\,dt \\
&\quad = \left[E(t)^q \int_\Omega u(|u_t|^{l-2}u_t)dx\right]_S^T - \int_S^T \int_\Omega E(t)^q |u_t|^l dx\,dt \\
&\qquad - q\int_S^T \int_\Omega E(t)^{q-1}E'(t)u|u_t|^{l-2}u_t\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

Et en utilisons la définition de l'énergie, l'équation (2.12) devient

$$\begin{aligned}
&p\int_S^T E(t)^{q+1}dt \\
&= \left(\frac{p(l-1)}{l}+1\right)\int_S^T E(t)^q\|u_t\|_l^l dt - \int_S^T \int_\Omega E(t)^q u|u_t|^{m-2}u_t\,dx\,dt \\
&\quad - \left[E(t)^q \int_\Omega u|u_t|^{l-2}u_t dx\right]_S^T + q\int_S^T \int_\Omega E(t)^{q-1}E'(t)u|u_t|^{l-2}u_t\,dx\,dt \\
&\quad + \left(1-\frac{p}{r}\right)\int_S^T E(t)^q \int_\Omega \|u\|_r^r dt + \int_S^T E^q(t)\int_\Omega \left(p\,H(u) - u\,h(x,u)\right)\,dx\,dt.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Maintenant, il va falloir estimer chaque terme du côté droit de l'égalité (2.13) pour parvenir à une inégalité similaire à (2.4) celle du Lemme 2.2.5.

De (2.1) on voit que

$$\int_S^T E(t)^q\|u_t\|_l^l\,dt \leq C\int_S^T E(t)^{q+1}dt. \tag{2.14}$$

Par l'inégalité de Hölder, l'inégalité Sobolev-Poincaré et le fait que l'énergie $E(t)$ est décroissante, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left[E(t)^q \int_\Omega u u_t^{l-2} u_t \, dx\right]_S^T \\
&\quad \leq C \left[E(t)^q \|u\|_2 \, \|u_t\|_{2(l-1)}^{l-1}\right]_S^T \\
&\quad \leq C \left[E(t)^q \|\nabla u\|_p \, |\Omega|^{\frac{2-l}{2l}} \, \|u_t\|_l^{l-1}\right]_S^T \\
&\quad \leq C \left[E(t)^q E(t)^{\frac{1}{p}} E(t)^{\frac{l-1}{l}}\right]_S^T \\
&\quad \leq C E(S)^{q+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

De même

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S^T \int_\Omega E(t)^{q-1} E'(t) u u_t^{l-1} \, dx \, dt\right| \\
&\quad \leq \int_S^T |E'(t)| E(S)^{q-1+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}} \, dt \\
&\quad \leq -\int_S^T E'(t) E(S)^{q-1+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}} \, dt \\
&\quad \leq C E(S)^{q+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

L'inégalité de Sobolev-Poincaré, (2.2) et (2.3) donnent

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{p}{r}\right) \int_S^T E(t)^q \|u\|_r^r \, dt \\
&\leq \left(1-\frac{p}{r}\right) \int_S^T E(t)^q C^r \|\nabla u\|_p^r \, dt \\
&= \left(1-\frac{p}{r}\right) \int_S^T E(t)^q C^r \|\nabla u\|_p^{r-p} \|\nabla u\|_p^p \, dt \\
&\leq \left(1-\frac{p}{r}\right) \int_S^T E(t)^q C^r \left(\frac{rp}{r-p} E(0)\right)^{\frac{r-p}{p}} \frac{rp}{r-p} E(t) dt \\
&= Mp \int_S^T E(t)^{q+1} dt,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Hölder puis l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_S^T E(t)^q \int_\Omega u|u_t|^{m-2}u_t\,dx\,dt\right| \\
&\quad\leq C\int_S^T E(t)^q\|u_t\|_m^{m-1}\|u\|_m dt \\
&\quad\leq C\int_S^T E(t)^q(C(\epsilon)\,\|u_t\|_m^m+\epsilon\,\|u\|_m^m)\,dt \\
&\quad= C\int_S^T E(t)^q\|u_t\|_m^m dt + C\int_S^T E(t)^q\|u\|_m^m\,dt \\
&\quad= C\int_S^T E(t)^q(-E'(t))dt + C\int_S^T E(t)^q\|u\|_m^m\,dt \\
&\quad\leq CE(S)^{q+1}+C\int_S^T E(t)^q\|u\|_m^m\,dt,
\end{aligned}$$

D'autre part, de la convexité de la fonction $\frac{u^y}{y}$ pour $u \geq 0$ et $y > 0$, on peut écrire

$$\frac{u^{C_1y_1+C_2y_2}}{C_1y_1+C_2y_2}\leq C_1\frac{u^{y_1}}{y_1}+C_2\frac{u^{y_2}}{y_2},$$

on choisit $C_1=\frac{4(r-m)}{p(r-2)}$, $C_2=\frac{m-2}{r-2}$, $y_1=\frac{p}{2}$ et $y_2=r$.

Ainsi

$$\frac{\|u\|_m^m}{m}\leq 2C_1\frac{\|u\|_p^2}{p}+C_2\frac{\|u\|_r^r}{r},$$

De plus

$$\begin{aligned}
\|u\|_m^m &\leq C_1\|u\|_2^p+C_2\|u\|_r^r \\
&\leq C(\|\nabla u\|_p^p+\|u\|_r^r) \\
&\leq CE(t),
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_S^T E(t)^q \int_\Omega u|u_t|^{m-2}u_t\,dx\,dt\right| \\
&\quad\leq CE(S)^{q+1}+C\int_S^T E(t)^{q+1}\,dt.
\end{aligned}\tag{2.18}$$

Il reste a estimer le dernier terme du coté droit de l'inégalité (2.13)

$$\int_S^T E^q(t) \int_\Omega \left(p\, H(u) - u\, h(x,u)\right)\, dx\, dt.$$

De l'inégalité de Sobolev-Poincaré $\exists\, \alpha' > 0$ tel que

$$\alpha' \|u\|_p^p \leq \|\nabla u\|_p^p, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Comme $h(x,u) = (\alpha|u|^{\mu-2} - |u|^{\nu-2})u$, avec $H(x,u) = \int_0^u h(x,s)ds$ on a,

$$H(u) = \alpha \frac{|u|^\mu}{\mu} - \frac{|u|^\nu}{\nu}. \tag{2.19}$$

On remarque aussi qu'il existe $\alpha' > 0$ où $\alpha > \alpha'$ tel que,

$$\frac{\alpha'}{2p}|u|^p + H(u) \geq \frac{\alpha}{2\mu}|u|^\mu, \quad \forall u \in \mathbf{R}. \tag{2.20}$$

A l'aide des inégalités (2.19) et (2.20), on a

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q(t) \int_\Omega \left(p\, H(u) - u\, h(x,u)\right)\, dx\, dt \\
&\qquad = \int_S^T E^q(t) \int_\Omega \left(\frac{\nu - p}{\nu}|u|^\nu - \frac{\alpha(\mu - p)}{\mu}|u|^\mu\right)\, dx\, dt \\
&\qquad \leq \int_S^T E^q(t) \int_\Omega \frac{\nu - p}{\nu}|u|^\nu\, dx\, dt \\
&\qquad = \int_S^T E^q(t) \int_\Omega (\nu - p)\left(\frac{\alpha}{\mu}|u|^\mu - H(u)\right)\, dx\, dt \\
&\qquad \leq \int_S^T E^q(t) \int_\Omega (\nu - p)\left(\frac{\alpha'}{p}|u|^p + 2H(u) - H(u)\right)\, dx\, dt \\
&\qquad \leq \int_S^T E^q(t) \int_\Omega (\nu - p)\left(\frac{\alpha'}{p}|u|^p + H(u)\right) dx\, dt
\end{aligned}$$

De l'égalité de l'énergie $E(t)$, il s'ensuit

$$\int_\Omega \left(\frac{\alpha'}{p}|u|^p + H(u)\right)\, dx \leq CE(t)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_S^T E^q(t)\int_\Omega (pH(u)-uh(u))dx\,dt \\ &\leq C(\nu-p)\int_S^T E^qE(t)dt \\ &\leq C(\nu-p)\int_S^T E^{q+1}(t)dt.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ainsi des estimations (2.14), (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) et (2.21), l'égalité (2.13) s'écrit

$$\begin{aligned}&\int_S^T E(t)^{q+1} \\ &\leq C\left(E(S)^{q+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}}+E(S)^{q+1}\right) \\ &= CE(S)\left(E(S)^{q+\frac{1}{p}+\frac{l-1}{l}-1}+E(S)^q\right) \\ &\leq CE(S)E(0)^q\left(E(0)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{l}}+1\right) \\ &= \gamma^{-1}\,E(S)E(0)^q,\end{aligned}$$

où $\gamma^{-1}=C\left(E(0)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{l}}+1\right)$.

En faisant tendre $T\to+\infty$, on obtient,

$$\int_S^{+\infty} E(t)^{q+1}\leq\ \gamma^{-1}\,E(0)^qE(S),\qquad \forall S\geq 0,$$

et l'application du Lemme 2.2.5 donne

$$\begin{aligned}&E(t)\leq E(0)\left(\tfrac{1+q}{1+\gamma\,q\,t}\right)^{1/q} \\ &= E(0)\left(\tfrac{1+q\,\gamma\,t}{1+q}\right)^{-1/q} \\ &= E(0)\left(\tfrac{1}{1+q}+\tfrac{q\,\gamma\,t}{1+q}\right)^{-1/q} \\ &\leq E(0)\left(\tfrac{q\gamma t}{1+q}\right)^{-1/q}=E(0).\left(\tfrac{q\gamma}{1+q}\right)^{-1/q}.t^{-1/q}\leq C\,t^{-p/(p-2)}.\end{aligned}$$

D'où le résultat du Théorème 2.2.2.

Estimation du comportement à l'infini de l'énergie associée à une équation des ondes du type p-Laplacien avec une dissipation faible

3.1 *Introduction*

On considère le problème aux limites pour l'équation des ondes non linéaire de type p-laplacien avec dissipation

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - \Delta_p u + \sigma(t)(u_t - \Delta u_t) + \omega |u|^{m-2}u = |u|^{r-2}u \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ avec $p, m,$ et $r \geq 2$, ω, des nombres réels et σ est une fonction positive, vérifiant certaines conditions qu'on précisera plus tard.

Plusieurs auteurs ont étudiés l'existence globale et le comportement asymptotique des solutions associées au problème (P) (voir par exemple **[4]**, **[10]**, **[14]**, **[27]**, **[42]**, **[43]**, **[2]**, **[6]**, **[26]**, **[35]** et **[39]**). Dans tous ces travaux, le terme dissipatif présente l'essentiel acquis permettons d'estimer la vitesse de décroissance de l'énergie.

Dans le cas où $\sigma \equiv 1$ et en prenant $(-\Delta^{\alpha})u_t$ à la place du terme dissipatif $\sigma(t)(u_t - \Delta u_t)$ dans le problème (P), Gao et Ma **[14]** obtiennent un résultat d'existence global par la méthode des approximations de Faedo-Galerkin.

De plus, ils ont pu montrer le comportement asymptotique des solutions, en utilisant certaines inégalités intégrales données par Nakao **[28]**. Cependant, il serait difficile de procéder par une telle méthode avec des fonctions σ plus générales.

Chen, Yao and Shao **[10]** ont aussi étudié l'unicité et l'existence globale de la solution pour le problème $u_{tt} - \Delta_p u - \Delta u_t + g(x,u) = f(x)$. Ils ont établis la décroissance polynomiale de l'énergie en imposant certaines conditions sur $g(x,u)$ pour $2 \leq p < n$. Des résultats similaires ont été démontrés par Ye **[37, 38]**, Ma et Soriano **[24]**.

Inspiré de **[10]**, on cherche a donner une estimation du comportement de décroissance de l'énergie. Pour ce faire, il fallait procéder par la méthode des multiplicateurs combinée avec certaines inégalités intégrales introduites par Martinez **[25]** et dont la preuve repose essentiellement sur la construction d'une fonction poids ϕ liée au comportement de la dissipation ou σ plus justement.

3.2 *Préliminaires et résultat principal*

$\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction positive, décroissante, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant

$$\int_0^{+\infty} \sigma(\tau)\, d\tau = +\infty. \tag{3.1}$$

On définit l'énergie associée à la solution du problème (P) par

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \int_\Omega F(x,u)dx, \tag{3.2}$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $t \geq 0$ et $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ où $f(x,u) = (\omega|u|^{m-2} - |u|^{r-2})u$.

Rappelons le théorème assurant l'existence d'une solution globale du problème (P) dont l'idée générale de la démonstration est dans **[10]**, **[23]** et **[35]**.

Théorème 3.2.1. *Supposons $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, alors le problème (P) admet une solution u de classe*

$$u \in C([0,\infty); W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega)). \tag{3.3}$$

Rappelons, quelques lemmes importants

Lemme 3.2.1. *Soit $u(x,t)$ une solution du problème (P) sur $[0,\infty)$. Alors on a,*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\sigma(t)(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u_t\|_2^2) \leq 0.$$

pour $t \in [0,\infty)$.

Lemme 3.2.2 (Inégalité de Sobolev-Poincaré)**.** *Soit r un nombre tel que $2 \leq r < +\infty$ $(n = 1, 2, ..., p)$ ou $2 \leq r \leq \frac{np}{n-p}$ pour $n \geq p+1$. Alors il existe une constante $c_* = c_*(\Omega, r)$ telle que,*

$$\|u\|_r \leq c_*\|\nabla u\|_p \quad pour \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Le cas $p = r = 2$ donne l'inégalité de Poincaré connue.

Pour donner une estimation à la vitesse de décroissance de l'énergie $E(t)$, on aura besoin du Lemme clé ci-après. Nous allons donc introduire de nouvelles inégalités grâce aux fonctions poids, cela nous permettra d'estimer la vitesse de décroissance de l'énergie E, vers zéro, même lorsque celle-ci est assez lente.

Lemme 3.2.3 ([25]). *Soit $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction continue décroissante. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*

$$\phi(0) = 0 \quad et \quad \phi(t) \to +\infty \quad quand \quad t \to +\infty. \tag{3.4}$$

Supposons qu'il existe $q \geq 0$ et $\gamma > 0$ tels que

$$\int_S^{+\infty} E(t)^{q+1}\phi'(t)\,dt \leq \gamma^{-1}\,E(0)^q E(S), \quad 0 \leq S < +\infty. \tag{3.5}$$

Alors E vérifie l'estimation suivante :

$$si\ q > 0, \quad E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+q}{1+q\,\gamma\,\phi(t)}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.6}$$

$$si\ q = 0, \quad E(t) \leq E(0)\exp(1-\gamma\,\phi(t)), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.7}$$

Remarque 3.2.1. Il suffit de prendre $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}_+$, pour voir que ce lemme est bien une généralisation du Lemme 2.2.5.

Preuve. Du moment que ϕ définit une bijection. On note par ϕ^{-1} sa fonction inverse. Soit

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = E\left(\phi^{-1}(x)\right).$$

f est décroissante et $f(0) = E(0)$. Par un changement de variable, posons $x = \phi(t)$, ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(S)}^{\phi(T)} f(x)^{q+1}\,dx &= \int_{\phi(S)}^{\phi(T)} E\left(\phi^{-1}(x)\right)^{q+1}\,dx = \int_S^T E(t)^{q+1}\phi'(t)\,dt \\
&\leq \gamma^{-1}\,E(0)^q E(S) \\
&= \gamma^{-1}\,E(0)^q f(\phi(S)), \quad 0 \leq S < T < +\infty.
\end{aligned}$$

Notons $s = \phi(S)$. En faisant tendre T vers l'infini, on déduit que

$$\forall s \geq 0, \quad \int_s^{+\infty} f(x)^{q+1}\,dx \leq \gamma^{-1}\,E(0)^q f(s).$$

En appliquant le Lemme 2.2.5, on aura

$$f(s) \leq f(0)\exp(1-\gamma\, s), \ \ \forall s \geq 0, \quad \text{si } q=0$$

et

$$f(s) \leq f(0)\left(\frac{1+q}{1+q\,\gamma\, s}\right)^{\frac{1}{q}}, \ \ \forall s \geq 0, \quad \text{si } q>0.$$

Du fait que $E(t) = f(\phi(t))$, on peut directement aboutir aux estimations (3.6) et (3.7). □

Remarque 3.2.2. Il faut noter que les inégalités intégrales considérées jusqu'à présent, concernent surtout l'estimation de la décroissance de l'énergie pour des problèmes dissipatifs (estimation de fonctions positives décroissantes).

On énonce le théorème donnant la propriété de décroissance de l'énergie suivant,

Théorème 3.2.2. *Soit* $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *et* $n > p > 2$. *On suppose la condition* (3.1) *satisfaite,* $p \leq r \leq 2p$ *et* $r < m < \frac{np}{n-p}$. *Alors il existe une constante positive* $c(E(0))$ *qui dépend de* $E(0)$ *telle que l'énergie de la solution* $u(x,t)$ *du problème* (P) *vérifie l'estimation suivante*

$$E(t) \leq \left(\frac{c(E(0))}{\displaystyle\int_0^t \sigma(\tau)\,d\tau}\right)^{\frac{p}{p-2}} \qquad \forall t > 0. \tag{3.8}$$

3.3 *Preuve du résultat principal*

3.3.1 Comportement asymptotique de l'énergie

Multiplions par $E^q\phi'(t)\,u$ la première équation du problème (P) où ϕ est une fonction satisfaisant les propriétés du Lemme 3.2.3.

Soit $0 \leq S < T < +\infty$, il vient après intégration sur $\Omega \times [S,T]$ que

$$0 = \int_S^T E^q\phi' \int_\Omega u\left[u_{tt} - \Delta_p u + \sigma(t)(u_t - \Delta u_t) + f(x,u)\right]\,dx\,dt,$$

une intégration par parties, donne

$$
\begin{aligned}
0 = & \left[E^q\phi' \int_\Omega u u_t\right]_S^T - \int_S^T \left(qE' E^{q-1}\phi' + E^q\phi''\right) \int_\Omega u u_t \, dxdt \\
& - \int_S^T E^q\phi' \int_\Omega |u_t|^2 dxdt + \int_S^T E^q\phi' \int_\Omega |\nabla u|^p \, dxdt \\
& + \int_S^T E^q\phi'\sigma(t) \int_\Omega u\left(u_t - \Delta u_t\right) \, dxdt + \int_S^T E^q\phi' f(x,u) \, dxdt.
\end{aligned}
$$

De la définition de l'énergie $E(t)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& p\int_S^T E^{q+1}\phi' dt \\
& = -\left[E^q\phi' \int_\Omega u u_t\right]_S^T + \int_S^T \left(qE' E^{q-1}\phi' + E^q\phi''\right) \int_\Omega u u_t \, dxdt \\
& \quad + \left(\frac{p}{2} + 1\right) \int_S^T E^q\phi' \int_\Omega |u_t|^2 \, dxdt - \int_S^T E^q\phi'\sigma(t) \int_\Omega u\left(u_t - \Delta u_t\right) \, dxdt \\
& \quad + \int_S^T E^q\phi' \int_\Omega \left(p\,F(u) - u\,f(x,u)\right) \, dx\,dt.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Par un procédé analogue à celui utilisé lors du chapitre précédent, on doit estimer chaque terme du côté droit de l'inégalité (3.9). On définit d'abord,

$$
\phi(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau,
$$

Il est clair que ϕ est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. L'hypothèse (3.1) assure que

$$
\phi(t) \to +\infty \quad \text{quand} \quad t \to +\infty. \tag{3.10}
$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de Sobolev-Poincaré et la définition de l'énergie, on déduit que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u u_t \, dx & \leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \\
& \leq c\|\nabla u\|_p \|u_t\|_2 \\
& \leq cE(t)^{\frac{1}{p}} E(t)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Il s'ensuit du fait que ϕ' est une fonction positive, bornée sur $\mathbb{R}_+$ (μ est son maximum) et la propriété de décroissance de E

$$-\left|\left[E^q\phi^{'}\int_\Omega uu_t\,dx\right]_S^T\right| \leq\; c\mu E(S)^{q+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}, \tag{3.12}$$

De même

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S^T\left(qE^{'}E^{q-1}\phi^{'}+E^q\phi^{''}\right)\int_\Omega uu_t\,dxdt\right|\\
&\quad\leq\; c\mu\int_S^T -E^{'}E^{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\,dt+\int_S^T cE^{q+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}(-\phi^{''})\,dt\\
&\quad\leq\; c\mu E(S)^{q+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

D'autre part, du Lemme 3.2.1 on a

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{p}{2}\right)\int_S^T E^q\phi^{'}\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt\\
&\quad\leq\left(1+\frac{p}{2}\right)\int_S^T E^q\phi^{'}\int_\Omega\left(|u_t|^2+|\nabla u_t|^2\right)\,dxdt\\
&\quad\leq\left(1+\frac{p}{2}\right)\int_S^T E^q\phi^{'}\left(-\frac{E^{'}(t)}{\sigma(t)}\right)\,dt\\
&\quad\leq cE^{q+1}(S).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

On aura aussi besoin d'estimer le terme

$$\int_S^T E^q(t)\,\phi^{'}\int_\Omega(pF(u)-uf(u))dx\,dt.$$

De l'inégalité de Sobolev-Poincaré $\exists\, r'>0$ pour que

$$r'\|u\|_p^p\leq\|\nabla u\|_p^p\qquad\forall u\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

et puique $f(x,u)=(\omega|u|^{m-2}-|u|^{r-2})u$, pour $F(x,u)=\int_0^u f(x,s)ds$ on a,

$$F(u)=\omega\frac{|u|^m}{m}-\frac{|u|^r}{r}. \tag{3.15}$$

On peut aussi remarquer qu'il exite $\omega' > 0$ où $\omega > \omega'$ tel que,

$$\frac{\omega}{2m}|u|^m \leq \frac{\omega'}{2p}|u|^p + F(u) \quad \forall u \in \mathbf{R}. \tag{3.16}$$

Ainsi, de (3.15) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q(t)\,\phi' \int_\Omega (p\,F(u) - u\,f(x,u))\;dx\,dt \\
&\qquad = \int_S^T E^q(t)\,\phi' \int_\Omega \left(\frac{r-p}{r}|u|^r - \frac{r(m-p)}{m}|u|^m\right)\,dx\,dt \\
&\qquad \leq \int_S^T E^q(t)\,\phi' \int_\Omega \frac{r-p}{r}|u|^r\,dx\,dt \\
&\qquad = \int_S^T E^q(t)\,\phi' \int_\Omega (r-p)\left(\frac{\omega}{m}|u|^m - F(u)\right)\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

et en tenant compte de (3.16), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q(t)\,\phi' \int_\Omega (p\,F(u) - u\,f(x,u))\;dx\,dt \\
&\qquad \leq \int_S^T E^q(t)\,\phi' \int_\Omega (r-p)\left(\frac{\omega'}{p}|u|^p + 2F(u) - F(u)\right)\,dx\,dt \\
&\qquad \leq \int_S^T E^q(t)\,\phi' \int_\Omega (r-p)\left(\frac{\omega'}{p}|u|^p + F(u)\right)dx\,dt
\end{aligned}$$

De la définition de l'énergie $E(t)$ on voit que

$$\int_\Omega \left(\frac{\omega'}{p}|u|^p + F(u)\right)\,dx \leq cE(t)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q(t)\,\phi' \int_\Omega (pF(u) - uf(u))dx\,dt \\
&\qquad \leq c(r-p)\int_S^T E^q E(t)\,\phi'\,dt \\
&\qquad \leq c(r-p)\int_S^T E^{q+1}(t)\,\phi'\,dt.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Le terme restant du côté droit de (3.9) peut être esimer comme suit,

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega u(u_t-\Delta u_t)\,dxdt\\
&=\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega uu_t\,dxdt-\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega u\Delta u_t\,dxdt\\
&=\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega uu_t\,dxdt+\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t\,dxdt\\
&\leq\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t\,dxdt
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev-Poincaré on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t\,dxdt\right|\\
&\qquad\leq\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\|\nabla u\|_p\|\nabla u_t\|_{\frac{p}{p-1}}\,dt.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\|\nabla u_t\|_{\frac{p}{p-1}}\ \leq\ c|\Omega|^{\frac{p-2}{2p}}\|\nabla u_t\|_2\leq c|\Omega|^{\frac{p-2}{2p}}\left(\frac{-E^{'}(t)}{\sigma(t)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t\,dxdt\right|\\
&\qquad\leq c\int_S^T E^{q+\frac{1}{p}}\phi^{'}\sigma(t)\left(\frac{-E^{'}(t)}{\sigma(t)}\right)^{\frac{1}{2}}\,dt\\
&\qquad= c\int_S^T E^{q+\frac{1}{p}}\phi^{'}\sigma(t)^{\frac{1}{2}}\left(-E^{'}(t)\right)^{\frac{1}{2}}\,dt.
\end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Young pour $\varepsilon>0$ donne

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S^T E^q\phi^{'}\sigma(t)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t\,dxdt\right|\\
&\qquad\leq\frac{c\,\varepsilon^2}{2}\int_S^T E^{2(q+\frac{1}{p})}(\phi^{'}(t))^2\sigma(t)\,dt\ +\ \frac{c}{2\varepsilon^2}E(S)\qquad(3.18)\\
&\qquad=\frac{c\,\varepsilon^2}{2}\int_S^T E^{2(q+\frac{1}{p})}\phi^{'}(t)(\sigma(t))^2\,dt\ +\ \frac{c}{2\varepsilon^2}E(S).
\end{aligned}$$

On prend, $2\left(q+\frac{1}{p}\right)=q+1$, donc $q=(p-2)/p$.

Des estimations (3.12), (3.13), (3.14), (3.18) et (3.17), l'inégalité (3.9), s'écrit

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{q+1}\phi'(t)\,dt \\
&\qquad \leq cE(S)^{q+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}+c'E(S)^{q+1}+c''E(S) \\
&\qquad \leq \left(\frac{cE(0)^{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}+c'E(0)^q+c''}{E(0)^q}\right)E(0)^qE(S),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

où c, c' and c'' sont des constantes positives indépendantes de $E(0)$.

Finalement, en faisant tendre $T\to+\infty$, (3.19) devient

$$\begin{aligned}
&\int_S^{+\infty} E^{q+1}\phi'(t)\,dt \\
&\qquad \leq \left(\frac{cE(0)^{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}+c'E(0)^q+c''}{E(0)^q}\right)E(0)^qE(S), \qquad \forall S\geq 0,
\end{aligned}$$

et l'application du Lemme 3.2.3 donne

$$E(t)\leq\left(cE(0)^{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}+c'E(0)^q+c''\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1+q}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t\sigma(s)\,ds\right)^{-\frac{1}{q}}=(c(E(0)))^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t\sigma(s)\,ds\right)^{-\frac{1}{q}},$$

où $c(E(0))=\left(cE(0)^{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}+c'E(0)^q+c''\right)\left(\frac{1+q}{q}\right)$ est une constante positive qui dépend de $E(0)$.

Comme $q=(p-2)/p$, on a

$$E(t)\leq(c(E(0)))^{\frac{p}{p-2}}\left(\int_0^t\sigma(s)\,ds\right)^{-\frac{p}{p-2}},\quad t\in[0,+\infty).$$

D'où le résultat voulu.

Analyse mathématique d'un problème aux limites décrivant la maladie d'Alzheimer

4.1 Introduction

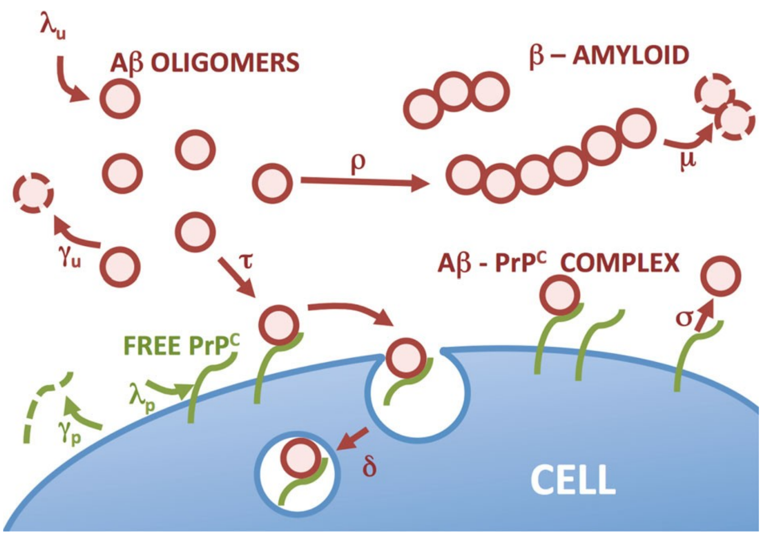

Figure 4.1 – Diagramme schématique des processus d'évolution des plaques β-amyloïdes, des oligomères Aβ (bornés et non bornés) et PrP^C dans le modèle.

Dans les maladies neuro-degenerative en générale, et la maladie d'alzheimer en particulier, les recherches médicales bien quelle soient encore au stade des hypothèses, mettent en lumière le role, entre autres de deux éléments :

— Les protéine prion PrPc,

— Les Aβoligomère du peptide βamyloide.

Le premier s'il se multiplie de façons anormale devient toxique, et il est le premier à être incriminé dans la perte de mémoire dans la maladie d'alzheimer, on soupçonne même qu'il induit une forte production du peptide βamyloide par des liaisons Aβoligomère-PrPc.

Le deuxième en se convertissant en peptide βamyloide, ces dernier vont s'agréger sous forme de fibriles et formés des plaques insolubles, faisant perdre ainsi au synapses son élasticité, empêchant les signaux neuronaux de circuler et à la fin causé la mort de la cellule nerveuse. Une représentation schématique de ces processus sont illustrés sur la figure 4.1.

4.2 *Présentation du modèle*

Le modèle considéré ici est inspiré du travail **[17]**, il traite donc quatre quantités différentes : la concentration d'oligomères $A\beta$ constitués d'agrégats de quelques peptide $A\beta$, la concentration de la protéine PrP^C, la concentration du complexe formé à partir d'un oligomère $A\beta$ se liant à une protéine PrP^C. Ces quantités sont solubles et leur concentration sera décrite en termes d'équations différentielles ordinaires. Nous avons aussi les plaques β-amyloïdes insolubles décrites par une densité en fonction de leur taille x. Cette approche est standard dans la modélisation des phénomènes de prolifération des prions (voir par exemple **[12]**, **[29]**, **[8]**, **[9]**, **[13]**, **[15]**, **[20]**, **[30]**, **[33]**). Notez que la taille x est une variable abstraite qui pourrait être le volume de l'agrégat. Cependant, nous considérons les agrégats comme des fibrilles qui s'allongent dans une dimension. La variable de taille x appartient donc à l'intervalle $(x_0, +\infty)$, où x_0 représente une taille critique en dessous de laquelle les plaques ne peuvent pas se former.

Pour résumer on note, pour $x \in (x_0, +\infty)$ et $t \geq 0$,

1. $f(t,x) \geq 0$: la densité des plaques β-amyloïd, de taille x à l'instant t,
2. $u(t) \geq 0$: la concentration des $A\beta$ oligomères à l'instant t,
3. $p(t) \geq 0$: la concentration des protéines PrP^C à l'instant t,
4. $b(t) \geq 0$: la concentration du complexe formé par un $A\beta - \times - PrP^C$ à l'instant t.

La mise en équations d'évolution, pour ces quatre quantités, donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\, u(t)\frac{\partial}{\partial x}[\rho(x) f(x,t)] - \mu(x) f(x,t), \qquad \text{dans } [x_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \tag{4.1}$$

$$\dot{u} = \lambda_u - \gamma_u u - \tau u p + \sigma b - nN(u) - \frac{u}{\epsilon}\int_{x_0}^{\infty} \rho(x) f(x,t)dx \qquad \text{dans } \mathbb{R}_+ \tag{4.2}$$

$$\dot{p} = \lambda_p - \gamma_p p - \tau u p + \sigma b \qquad \text{dans } \mathbb{R}_+ \tag{4.3}$$

$$\dot{b} = \tau u p - (\sigma + \delta) b \qquad \text{dans } \mathbb{R}_+. \tag{4.4}$$

Le terme N est le taux de formation d'une nouvelle plaque β-amyloïde de taille x à partir des oligomères Aβ. C'est ainsi un terme de perte dans u et un terme qui est dans la premiere équation, afin d'équilibrer ce terme, nous ajoutons la condition aux limites

$$N(u(t)) = u(t)\rho(x_0) f(x_0, t), \qquad \forall t \geq 0. \tag{4.5}$$

L'intégrale dans la partie droite de l'équation (4.2) est la polymérisation totale (c'est un terme de perte puisqu'il compte tout les Aβ oligomères qui se transforme en plaques) avec les paramètres $\frac{1}{\epsilon}$, puisque $\frac{dx}{\epsilon}$ compte le nombre d'oligomères dans une

Paramètre/ Variable	Définition
t	Temps
x	La longueur des β amyloïdes fibrilles
x_0	La masse critique des plaques β amyloïde
n	Nombre d'oligomère dans une plaque de taille x_0
ϵ	Masse d'un oligomère
λ_u	Source des oligomères $A\beta$
γ_u	Taux de dégradation des oligomères $A\beta$
λ_p	Source de PrP^C
γ_p	Taux de dégradation des PrP^C
τ	Taux de liaison des oligomères $A\beta$ sur les PrP^C
σ	Taux de rupture du complexe $A\beta - \times - PrP^C$
δ	Taux de dégradation du complexe $A\beta - \times - PrP^C$
$\rho(x)$	Taux de conversion d'oligomère dans une fibrille
$\mu(x)$	Taux de dégradation d'une fibrille

TABLE 4.1 – Description des paramètres et variables du modèle.

unité de longueur dx.

Enfin, le problème est complété par les données initiales positives, une fonction $f_0 \geq 0$ et $u_0 \geq 0$, $p_0 \geq 0$, $b_0 \geq 0$, tel qu'au temps $t = 0$

$$f(x,0) = f_0(x) \geqslant 0, \qquad \forall x \geq x_0. \tag{4.6}$$

$$u(0) = u_0 \geq 0, \qquad p(0) = p_0 \geq 0, \qquad b(0) = b_0 \geq 0. \tag{4.7}$$

Pour être biologiquement pertinent, le système ci-dessus (4.1)-(4.5), nécessite deux conditions supplémentaires pour équilibrer la quantité d'éléments mis en jeux : un pour les protéines prions, libres et sous forme de complexes :

$$\frac{d}{dt}(p+b) = \lambda_p - \gamma_p p - \delta b,$$

et la seconde pour les oligomères Aβ

$$\frac{d}{dt}\left(b + u + \frac{1}{\epsilon}\int_{x_0}^{+\infty} xf dx\right) = \lambda_u - \gamma_u u - \delta b - \frac{1}{\epsilon}\int_{x_0}^{+\infty} x\mu f dx.$$

Les concentrations totales des deux, évoluent dans le temps en fonction des taux de production et de dégradation.

4.3 *Analyse mathématique du modèle*

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution globale de notre modèle qui décrit d'une part la formation de plaque amyloïde in vivo, et d'autre part les interactions entre les oligomères $A\beta$ et la protéine prion qui induiraient la perte de mémoire.

L'hypothèse que la vitesse de polymérisation $\rho(x)$, et la vitesse de dégradation $\mu(x)$, sont constantes n'est pas toujours biologiquement réaliste (voir [9] et [13]). Par conséquent, nous étudions ici le cas général et nous allons voir qu'il est possible d'obtenir des résultats sur l'existence et l'unicité des solutions, ainsi leurs stabilité pour le système (4.1)-(4.4).

4.3.1 Hypothèses

Nous nous intéressons aux solutions non négatives du système (4.1)-(4.4) avec la condition aux limites (4.5), complétées par les données initiales (4.6)-(4.7), mais avec l'hypothèse de conservation de masse totale de β-amyloïde, afin que notre système (4.1)-(4.4) soit biologiquement pertinent. Ainsi, puisque xdx mesure la masse à tout moment, la solution f sera recherchée dans l'espace $\mathrm{L}^1(x_0, +\infty; xdx)$.

Nos hypothèses pour le système (4.1)-(4.4) sont :

$$\textbf{(H1)} \left| \begin{array}{l} f^0 \in \mathrm{L}^1(x_0, +\infty; xdx) \\ et \\ f^0 \geq 0 \ \text{ p.p. } \ x > x_0. \end{array} \right.$$

$$\textbf{(H2)} \left| \begin{array}{l} \rho \geq 0, \text{ et } \rho \in \mathrm{W}^{2,\infty}([x_0, +\infty[) \\ et \\ \mu \geq 0, \text{ et } \mu \in \mathrm{W}^{1,\infty}([x_0, +\infty[) \end{array} \right.$$

$$\textbf{(H3)} \left| \begin{array}{l} N \geq 0, \text{ et } N \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}_+) \\ et \\ N(0) = 0. \end{array} \right.$$

$$\textbf{(H4)} \left| \ \lambda_u, \ \gamma_u, \ \lambda_p, \ \gamma_p, \ \tau, \ \sigma, \ \delta > 0. \right.$$

— L'hypothèse (H2) implique qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\rho(x) \leq Cx$, on peut prendre par exemple :

$$C = 2\|\rho'\|_{L^\infty} + \frac{\rho(x_0)}{x_0}.$$

En effet, pour tout $x \geq x_0$, on obtient

$$\rho(x) \leq \|\rho'\|_{L^\infty}(x+x_0) + \rho(x_0) \leq \left(2\|\rho'\|_{L^\infty} + \frac{\rho(x_0)}{x_0}\right) x.$$

On remarque que ce type de régularité couvre le cas où $\rho(x) \sim x^\theta$, avec $\theta \in (0,1)$.

— De même, l'hypothèse (H3) implique l'existence d'une constante $K_M > 0$ telle que $N(w) \leq K_M w$, pour tout $w \in [0, M]$.

— Enfin, la positivité des paramètres du tableau 4.1 (hypothèse (H4)) est une hypothèse naturelle compte tenu de leurs signification biologique.

Avant de citer le résultat principale d'existence, Nous allons introduire maintenant la définition de la solution du système (4.1)-(4.4).

Définition 4.3.1. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H4) sont satisfaites et soit $T > 0$. On dit que (f, u, p, b) est une solution faible du système (4.1)-(4.7) sur l'intervalle $[0,T]$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^{+\infty}([0,T] \times [x_0, +\infty[)$ et $t \in [0,T]$.*

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x,t)\varphi(x,t)dx = \int_{x_0}^{+\infty} f^0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^t N(u(s))\varphi(x_0,s)ds$$

$$+ \int_0^t \int_{x_0}^{+\infty} f(x,s)\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,s) + u(s)\rho(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,s) - \mu(x)\varphi(x,s)\right] dxds,$$

et

$$\begin{aligned}
u(t) &= u_0 + \int_0^t \left[\lambda_u - \gamma_u u - \tau up + \sigma b - x_0 N(u) - u\int_{x_0}^{\infty} \rho(x) f(x,s)dx\right] ds,\\
p(t) &= p_0 + \int_0^t \left[\lambda_p - \gamma_p p - \tau up + \sigma b\right] ds,\\
b(t) &= b_0 + \int_0^t \left[\tau up - (\sigma+\delta) b\right] ds.
\end{aligned}$$

Avec la régularité

$$f \in L^\infty\left(0, T, L^1(x_0, +\infty, xdx)\right) \text{ et } u, p, b \text{ dans } \mathcal{C}^0(0,T).$$

4.3.2 Le problème bien posé

Théorème 4.3.1. *Soit $T > 0$. Si les hypothèses (H1)-(H4) sont satisfaites, alors il existe une unique solution positive (f, u, p, b) du système (4.1)-(4.7) selon le sens de la définition 4.3.1 tel que*

$$f \in \mathcal{C}^0\left([0,T], L^1(x_0, +\infty, x^r dx)\right), \forall r \in [0,1]$$

et

$$u, p, b \in \mathcal{C}_b^1(0,T).$$

La preuve du théorème 4.3.1 est décomposée en deux parties. Tout d'abord, on commence par l'étude du problème aux limites suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + u(t)\frac{\partial}{\partial x}[\rho(x)f(x,t)] = -\mu(x)f(x,t), \quad x \geq x_0 \text{ et } t \geq 0, \tag{4.8}$$

$$u(t)\rho(x_0)f(x_0,t) = N(u(t)), \quad t \geq 0, \tag{4.9}$$

$$f(x,0) = f^0(x), \quad x \geq x_0. \tag{4.10}$$

La preuve de la proposition suivante est donnée dans la section 4.3.3.

Proposition 4.3.1. *Soit $u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}_+)$. Si les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites, alors pour tout $T > 0$ il existe une unique solution positive f du système (4.8)-(4.10) au sens de distribution, tel que*

$$f \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(x_0, +\infty; x^r dx)), \qquad \forall r \in [0,1].$$

La preuve est inspiré de [11] pour l'équation de Lifshitz-Slyozov. Il s'agit d'une preuve basée sur le concept d'une solution mild au sens de distributions, avec l'exigence supplémentaire de continuité du temps dans l'espace $L^1(xdx)$.

La deuxième étape de la preuve du théorème 4.3.1 est effectuée dans la section 4.3.4. Autrement dit, une fois qu'on assure l'existence d'une densité unique f associée à u donnée, on peut définir l'opérateur

$$S : \mathcal{C}^0([0,T])^3 \to \mathcal{C}^0([0,T]), (u,p,b) \to (\tilde{u},\tilde{p},\tilde{b}) = S(u,p,b), \tag{4.11}$$

donné par

$$\tilde{u} = u_0 + \int_0^t [\lambda_u - \gamma_u u - \tau up + \sigma b - x_0 N(u) - u \int_{x_0}^{\infty} \rho(x) f(x,s)] ds, \tag{4.12}$$

$$\tilde{p} = p_0 + \int_0^t [\lambda_p - \gamma_p p - \tau up + \sigma b] ds, \tag{4.13}$$

$$\tilde{b} = b_0 + \int_0^t [\tau up - (\sigma + \delta) b] ds, \tag{4.14}$$

où f est la solution unique associée à u définie dans la proposition 4.3.1. Ainsi, grâce au théorème du point fixe de Banach appliqué à l'opérateur S on peut finalement prouvé le théorème 4.3.1 (voir section 4.3.4).

4.3.3 Existence et unicité de solution

Preuve de la proposition 4.3.1 :

Soit $u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}_+)$ et posons

$$a(x,t) := u(t)\rho(x) \quad \text{et } b(x,t) := -u(t)\rho'(x), \qquad \forall (x,t) \in [x_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+.$$

Notons que $\rho(x) \leq Cx$ (d'après l'hypothèse (H2)), alors pour tout $t > 0$, on obtient

$$a(t,x) \leqslant Ax, \text{ pour } x > x_0, \tag{4.15}$$

$$|a(t,x) - a(t,y)| \leqslant A|x-y|, \text{ pour } x,y > x_0, \tag{4.16}$$

$$|b(t,x)| \leqslant B, \tag{4.17}$$

où

$$A = \max\left(C\|u\|_{L^\infty}, \|u\|_{L^\infty}, \|\rho'\|_{L^\infty}\right)$$

et

$$B = \|u\|_{L^\infty}\|\rho'\|_{L^\infty[x_0,+\infty[}.$$

Pour établir la solution mild du problème (une solution disons semi-explicite, obtenue par la méthode des courbes caractéristiques) :
Soit définit la courbe caractéristique qui atteint le point $x \geq x_0$ à l'instant $t \geq 0$, c'est-à-dire la solution de

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}X(s;x,t) = a(s, X(s;x,t)), \\ \\ X(t;x,t) = x. \end{cases} \tag{4.18}$$

D'après (4.16), il existe une unique caractéristique qui atteint le point (x,t). Celle-ci n'a de sens que si $X(s,x,t) \geq x_0$. Alors, on définit le temps de départ de la caractéristique comme suit :

$$s_0(x,t) := \inf\left\{s \in [0,t] : X(s,x,t) \geq x_0\right\}.$$

La caractéristique sera définie pour tout instant $s \geq s_0$, et prend son origine respectivement des conditions initiales ou de la condition aux limites, si $s_0 = 0$ ou $s > 0$. On rappelle maintenant les propriétés classiques de ces caractéristiques.

$$\begin{cases} X(s; X(\sigma;x,t),\sigma) = X(s;x,t), \\ \\ J(s;x,t) := \frac{\partial}{\partial x}X(s;x,t) = \exp\left(\int_s^t b(\sigma, X(\sigma;x,t))d\sigma\right), \\ \\ \frac{\partial}{\partial t}X(s;x,t) = -a(t,x)J(s;x,t). \end{cases}$$

De plus, on remarque que $s_0\left(X(t, x_0, 0), t\right) = 0$, alors par monotonie et continuité de X, pour tout $t > 0$, on a

$$x \in (x_0, X(t, x_0, 0)) \Leftrightarrow s_0(x, t) \in (0, t).$$

De même, pour tout $x \in (x_0, X(t, x_0, 0))$, on a

$$X\left(s_0(x, t), x, t\right) = x_0.$$

Par conséquent, pour tout $x \in (x_0, X(t, x_0, 0))$,

$$I(x, t) := -\frac{\partial}{\partial x} s_0(x, t) = J(s_0(x, t), x, t)/a(s_0(x, t), x_0), \forall x \in (x_0, X(t, x_0, 0)).$$

Par intégration de la dérivée de $f(s, X(s, x, t))$ par rapport à s, sur l'intervalle (s_0, t), sachant que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f(s, X(s, x, t)) &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial t} + u(s)\rho(x)\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)(s, X(s, x, t)) \\ &= -\mu(X(s, x, t)) f(s, X(s, x, t)) - u(s)\rho'(X(s, x, t)) f(s, X(s, x, t)) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'équation différentielle

$$f'(s, X(s, x, t)) + (u(s)\rho'(X(s, x, t)) + \mu(X(s, x, t)) f(s, X(s, x, t))) = 0$$

En integrant la première fois lorsque $x \geq X(t, x_0, 0)$ avec le jacobien J et condition initiale, ensuite une deuxième fois pour $x \in (x_0, X(t, x_0, 0))$ avec le Jacobien I et la condition aux limites sur N, (4.5).

On obtient la solution mild du problème, définie pour $(x, t) \in [x_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$ p.p. comme suit :

$$f(x, t) = \begin{cases} f^0(X(0, x, t)) J(0, x, t) \exp(-\int_0^t \mu(X(\sigma, x, t)) d\sigma), & x \geq X(t, x_0, 0), \\ \\ N(u(s_0(x, t))) I(x, t) \exp(-\int_{s_0(x,t)}^t \mu(X(\sigma, x, t)) d\sigma), & x \in (x_0, X(t, x_0, 0)). \end{cases} \tag{4.19}$$

Puisque J et I sont positives et f^0 satisfait (H1), alors d'après (4.19), on déduit que pour $(x,t) \in [x_0, +\infty[\times\mathbb{R}_+$, p.p. la fonction f est positive.
Dans le lemme suivant, on rappelle quelques propriétés utiles qui sont inspirés du papier [11].

Lemme 4.3.1. *Soit $u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}_+)$. Si (H2) est satisfaite, alors pour tout $x \geq x_0$ et $t > 0$, et tant que les courbes caractéristiques $s \mapsto X(s,x,t)$ données par (4.18) existent, c'est à dire $s \geq s_0(x,t)$, on a*

$$\text{pour } s_1 \leq s_2, \qquad X(s_1,x,t) \leq X(s_2,x,t) \leq X(s_1,x,t)e^{A(s_2-s_1)},$$

$$\text{si } x_n \to +\infty, \text{ alors pour tout } t \geq s \geq 0, \qquad X(s,x_n,t) \to +\infty,$$

$$\text{pour } s \geq t, \qquad X(s,x,t) \leq sxe^{A(s-t)}.$$

Preuve. L'idée de la preuve est inspiré du papier [11], tandis que le résultat découle de la définition des courbes caractéristiques. Donc, pour tout $x \geq x_0, t > 0$, et $s_0(x,t) \leq s_1 \leq s_2$, on a

$$\begin{aligned} x_0 \leq X(s_2,x,t) &= X(s_1,x,t) + \int_{s_1}^{s_2} a(s, X(s,x,t))ds, \\ &\leq X(s_1,x,t) + A\int_{s_1}^{s_2} X(s,x,t)ds, \end{aligned}$$

où A est donnée dans (4.15). □

Dans la suite, on utilise souvent les changements de variables,

$y = X(0,x,t)$ sur $x \in (X(t,x_0,0), +\infty)$, avec la Jacobienne $J(0,x,t)$,

et

$s = s_0(x,t)$ sur $x \in (x_0, X(t,x_0,0))$, avec la Jacobienne $-I(x,t)$.

Le première est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $(X(t,x_0,0),+\infty)$ dans $(x_0,+\infty)$, et le seconde, de $(x_0, X(t;x_0,0))$ dans $(0,t)$. Par intégration de f donnée dans (4.19) sur $(0,R)$ avec $R > X(t,x_0,0)$, en utilisant les changements de variables cités ci-dessus et d'après le lemme 4.3.1, on obtient quand $R \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{+\infty} x|f(t,x)|dx &\leq \int_{x_0}^{+\infty} X(t,y,0)|f^0(y)|dy + \int_0^t X(t,s,x_0)|N(u(s))|ds,\\ &\leq e^{At}\left(\int_{x_0}^{+\infty} y|f^0(y)|dy + \int_0^t x_0|N(u(s))|ds.\right). \qquad (4.20)\end{aligned}$$

On conclut que, pour tout $T > 0$, $f \in L^\infty(0,T,L^1(x_0,+\infty,xdx))$, et donc $f \in L^\infty(0,T,L^1(x_0,+\infty,x^r dx))$, pour tout $r \in [0,1]$.
Le lemme suivant affirme que f donnée dans (4.19) est une solution faible.

Lemme 4.3.2. *Soit f une solution mild donnée dans (4.19), alors pour tout $t > 0$*

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{+\infty} f(x,t)\varphi(x,t)dx &= \int_{x_0}^{+\infty} f^0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^t N(u(s))\varphi(x_0,s)ds\\ &+ \int_0^t\int_{x_0}^{+\infty} f(x,s)[\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,s)u(s)\rho(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,s)\\ &-\mu(x)\varphi(x,s)]dxds,\end{aligned}$$

$\forall\varphi \in \mathcal{C}_0^{+\infty}([0,T]\times[x_0,+\infty[)$.

Preuve. Puisque $f \in L^\infty(0,T,L^1(x_0,+\infty,xdx))$, on peut alors multiplier la solution mild f par une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_0^{+\infty}([0,T]\times[x_0,+\infty[)$ et par intégration sur $[x_0,+\infty[$, on obtient sous le même changement de variable utilisé ci-dessus pour (4.20) l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{+\infty} f(x,t)\varphi(x,t)dx &= \int_{x_0}^{+\infty} f^0(y)\varphi(X(t,y,0),t)e^{-\int_0^t \mu(X(\sigma,y,0))d\sigma})dy \\ &\quad - \int_{x_0}^{t} N(u(s))\varphi((X(t,x_0,s),t)e^{-\int_s^t \mu(X(\sigma,x_0,s))d\sigma})ds.\end{aligned} \tag{4.21}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_{x_0}^{X(s,x_0,0)} f(x,s)[\partial_t\varphi(x,s) + a(s,x)\partial_x\varphi(x,s) - \mu(x)\varphi(x,s)]dxds \\ =& \int_0^t \int_{x_0}^{+\infty} f^0(x)\frac{d}{ds}\left(\varphi(X(s,x_0,0),s)e^{-\int_0^s \mu(X(\sigma,x,0))d\sigma}\right)dyds \\ =& \int_{x_0}^{+\infty} f^0(x)\varphi(X(t,x,0),t)e^{-\int_0^t \mu(X(\sigma,y,0))d\sigma})dx - \int_{x_0}^{+\infty} f^0(x)\varphi(x,0)dx.\end{aligned} \tag{4.22}$$

De même, d'après toujours le même changement de variable cité ci-dessus,

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{X(s,x_0,0)}^{+\infty} & f(x,s)\left[\partial_t\varphi(x,s) + a(s,x)\partial_x\varphi(x,s) - \mu(x)\varphi(x,s)\right]dxds \\ &= -\int_0^t \int_0^s N(u(z))\frac{d}{ds}\left(\varphi(X(s;x_0,0),z)e^{-\int_z^s \mu(X(\sigma,x_0,z))d\sigma}\right)dzds \\ &= -\int_0^t N(u(s))\varphi(X(t,x_0,s),t)e^{-\int_s^t \mu(X(\sigma,x_0,s))d\sigma}dzds \\ &\quad - \int_0^t N(u(s))\varphi(x_0,s)ds.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Par conséquent, d'après (4.21)-(4.23), f est une solution faible. □

Le but du lemme suivant est de préciser que les moments inférieur ou égale à 1 sont continues en t.

Lemme 4.3.3. *Soit f une solution mild donnée par (4.19). Alors, sous les hypothèses (H1)-(H3), pour tout $T > 0$*

$$f \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(x_0, +\infty, x^r dx)), \quad \forall r \in [0,1].$$

Preuve. Soit $T > 0$ et $r \in [0,1]$. Puisque $f \in L^{+\infty}_{loc}(\mathbb{R}_+, L^1(x_0, +\infty, x^r dx))$, alors pour tout $t > 0$ et $\delta t > 0$ avec : $t + \delta t \leq T$ on a

$$\int_{x_0}^{+\infty} x^r \left| f(x, t+\delta t) - f(x,t) \right| dx = I_1 + I_2 + I_3,$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_0}^{X(t,x_0,0)} x^r \left| f(x, t+\delta t) - f(x,t) \right| dx, \\ I_2 &= \int_{X(t,x_0,0)}^{X(t+\delta t,x_0,0)} x^r \left| f(x, t+\delta t) - f(x,t) \right| dx, \\ I_3 &= \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r \left| f(x, t+\delta t) - f(x,t) \right| dx. \end{aligned}$$

Notre but est de prouver que chaque terme converge vers 0, lorsque δt tend vers 0. Puisque $x \geqslant X(t+\delta t, x_0, 0) \geqslant X(t, x_0, 0)$, alors

$$\begin{aligned} I_3 \;\; = \;\; & \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r | f^0(X(0,x,t+\delta t)) J(0,x,t+\delta t) e^{-\int_0^{t+\delta t} \mu(X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma} \\ & - f^0(X(0,x,t)) | J(0,x,t) e^{-\int_0^{t} \mu(X(\sigma,x,t))d\sigma} dx. \end{aligned}$$

Soit $f^0_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty_0$ à support compact $supp(f^0_\epsilon) \subset (0, \mathcal{R}_\epsilon)$, converge vers f^0 dans $L^1([x_0, +\infty[, xdx)$ (Densité de C^∞_c dans $L^p, 1 \leq p < +\infty$). L'intégrale I_3 peut s'écrire sous la forme

$$I_3 = I_3^1 + I_3^2 + I_3^3, \tag{4.24}$$

où

$$I_3^1 = \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r \left| f^0(X(0,x,t+\delta t)) - f_\epsilon^0(X(0,x,t+\delta t)) \right| J(0,x,t+\delta t) \times$$

$$e^{-\int_0^{t+\delta t} \mu(X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma} dx.$$

$$I_3^2 = \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r \left| f_\epsilon^0(X(0,x,t+\delta t))J(0,x,t+\delta t)e^{-\int_0^{t+\delta t} \mu(X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma} \right.$$

$$\left. -f_\epsilon^0(X(0,x,t))\ J(0,x,t)e^{-\int_0^{t} \mu(X(\sigma,x,t))d\sigma} \right| dx.$$

$$I_3^3 = \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r \left| f_\epsilon^0(X(0,x,t)) - f^0(X(0,x,t))|J(0,x,t)e^{-\int_0^{t} \mu(X(\sigma,x,t))d\sigma} \right| dx.$$

La majoration du terme exponentiel par 1 et l'utilisation du changement de variable $y = X(0,x,t+\delta t)$ dans I_3^1 et $y = X(0;x,t)$ dans I_3^3 donne

$$I_3^1 + I_3^3 \leq 2e^{AT} \int_{x_0}^{+\infty} y^r \left| f^0(y) - f_\epsilon^0(y) \right| dy = C_3^1(T,\epsilon). \qquad (4.25)$$

De même, d'près le lemme 4.3.1, on a

$$\begin{aligned}
I_3^2 &\leq \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r \left|f_\epsilon^0(X(0,x,t+\delta t)) - f_\epsilon^0(X(0,x,t))\right| J(0,x,t+\delta t)dx \\
&\quad + \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r f_\epsilon^0(X(0;x,t)) \left|J(0,x,t+\delta t) - J(0,x,t)\right| dx \\
&\quad + \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r f_\epsilon^0(X(0;x,t)) J(0,x,t) \left| e^{-\int_0^{t+\delta t} \mu(X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma} \right. \\
&\quad \left. - e^{-\int_0^t \mu(X(\sigma,x,t))d\sigma} \right| dx \\
&= J_3^1 + J_3^2 + J_3^3,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
J_3^1 &= \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r \left|f_\epsilon^0(X(0,x,t+\delta t)) - f_\epsilon^0(X(0,x,t))\right| J(0,x,t+\delta t)dx, \\
J_3^2 &\quad + \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r f_\epsilon^0(X(0;x,t)) \left|J(0,x,t+\delta t) - J(0,x,t)\right| dx \\
J_3^3 &\quad + \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{+\infty} x^r f_\epsilon^0(X(0;x,t)) J(0,x,t) \left| e^{-\int_0^{t+\delta t} \mu(X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma} \right. \\
&\quad \left. - e^{-\int_0^t \mu(X(\sigma,x,t))d\sigma} \right| dx.
\end{aligned}$$

D'après (4.17) on a $J(0,x,t) \leq e^{BT}$, d'où

$$\begin{aligned}
J_3^1 &\leq e^{BT} \|f_\epsilon^0\|_{L^\infty} \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{C_\epsilon} x^r \left|X(0,x,t+\delta t) - X(0,x,t)\right| dx \\
&\leq \delta e^{BT} \|f_\epsilon^0\|_{L^\infty} \int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{C_\epsilon} x^r \sup_{s\in[t,t+\delta t]} \left|\frac{\partial}{\partial t} X(0,x,s)\right| dx \\
&\leq \delta t A e^{2BT} \|f_\epsilon^0\|_{L^\infty} \int_{x_0}^{C_\epsilon} x^{r+1} dx, \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

où C_ϵ dépend de T, A et R_ϵ , c'est à dire le support compact de f_ϵ^0. De même,

$$J_3^2 \leq e^{BT}\|f_\epsilon^0\|_{L^\infty}\int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{R_\epsilon} x^r\left|e^{G(t,\delta t,x)}-1\right|dx,$$

avec

$$\begin{aligned}|G(t,\delta t,x)| &= \left|\int_0^{t+\delta t} b(\sigma, X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma - \int_0^t b(\sigma(X(\sigma,x,t))d\sigma\right|\\ &\leq \int_0^{t+\delta t}\left|\rho'(X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma - \rho'(X(\sigma,x,t))\right|u(\sigma)d\sigma\\ &\quad -\int_t^{t+\delta t}\left|b(\sigma(X(\sigma,x,t))d\sigma\right|.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (4.15) et (4.17)

$$\begin{aligned}|G(t,\delta t,x)| &\leqslant K\|u\|_{L^\infty}\int_0^T |X(\sigma,x,t+\delta)-X(\sigma,x,t)|\,d\sigma + \delta tB\\ &\leqslant \delta tK\|u\|_{L^\infty}\int_0^T \sup_{s\in[t,t+\delta t]}\left|\frac{\partial}{\partial t}X(\sigma,x,s\right|d\sigma+\delta tB\\ &\leqslant \delta t\left(K\|u\|_{L^\infty}ATe^{BT}x+B\right),\end{aligned}$$

où K est la constante de Lipschitz de ρ'. Puisque $x \leqslant R_\epsilon$ alors on pose

$$C_G(T,\epsilon) = K\|u\|_L^\infty ATe^{BT}R_\epsilon + B,$$

si $|x| \leq y$, on a

$$|e^x-1| \leq |e^y-1| + |e^{-y}-1|.$$

Par conséquent

$$J_3^2 \leq e^{BT}\|f^{0,\epsilon}\|_{L^\infty}\left(|e^{\delta tC_G(T,\epsilon)}-1|+|e^{-\delta tC_G(T,\epsilon)}-1|\right)\int_{x_0}^{R_\epsilon} x^r dx. \tag{4.27}$$

Comme μ est positive, on a aussi

$$J_3^3 \leq e^{BT}\|f_\epsilon^0\|_{L^\infty}\int_{X(t+\delta t,x_0,0)}^{R_\epsilon} x^r|e^{-(\int_0^{t+\delta t}\mu(X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma - \int_0^t \mu(X(\sigma,x,t))d\sigma)}-1|dx$$

En utilisant le même raisonnement cité ci-dessus, on obtient

$$\left| \int_0^{t+\delta t} X(\sigma, x, t+\delta t))d\sigma - \int_0^t \mu(X(\sigma, x, t))d\sigma \right| \leqslant \delta t MATe^{BT}x + \delta t \|\mu\|_{L^\infty},$$

où M est la constante de Lipschitz de μ. Posons

$$C_M(T, \epsilon) = MATe^{BT}R_\epsilon + \|\mu\|_{L^\infty},$$

on a alors,

$$J_3^3 \leq e^{BT}\|f^{0,\epsilon}\|_{L^\infty} \left(|e^{\delta t C_M(T,\epsilon)} - 1| + ||e^{-\delta t C_M(T,\epsilon)} - 1|\right) \int_{x_0}^{R_\epsilon} x^r dx. \tag{4.28}$$

D'après (4.25)-(4.28), on peut conclure que pour tout $\epsilon > 0$

$$I_3(\delta t) \leq C_3^1(T, \epsilon) + C_3^2(T, \delta t, \epsilon), \tag{4.29}$$

avec $\lim\limits_{\epsilon \to 0} C_3^1(T, \epsilon) = 0$ et $\lim\limits_{\delta t \to 0} C_3^2(T, \delta t, \epsilon) = 0$.

Concernant I_1, f peut être écrite à partir de le condition aux limites. Soit $u^\epsilon \in \mathcal{C}_0^\infty$ telle que :

$$u^\epsilon \to u, \quad \text{uniformément dans} \quad [0, T].$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1 \leq & \int_{x_0}^{X(t+\delta t, x_0, 0)} x^r \left| N(u(s_0(x, t+\delta t)) - N(u^\epsilon(s_0(x, t+\delta t)) \right| I(x, t+\delta t) dx \\ & + \int_{x_0}^{X(t, x_0, 0)} x^r \left| N(u^\epsilon(s_0(x, t+\delta t)) I(x, t+\delta t) e^{-\int_{s_0(x,t+\delta t)}^t \mu(X(\sigma, x, t+\delta t))d\sigma} \right. \\ & \left. - N(u^\epsilon(s_0(x, t)) I(x, t) e^{-\int_{s_0(x,t)}^t \mu(X(\sigma, x, t))d\sigma} \right| dx \\ & + \int_{x_0}^{X(t, x_0, 0)} x^r \left| N(u(s_0(x, t)) - N(u^\epsilon(s_0(x, t)) \right| I(x, t) dx. \end{aligned}$$

D'après (H3), il existe deux constantes $C_1^1(T,\epsilon)$ et $C_1^2(T,\delta t,\epsilon)$ telle que

$$I_1(\delta t) \leq C_1^1(T,\epsilon) + C_1^2(T,\delta t,\epsilon), \tag{4.30}$$

avec $\lim\limits_{\epsilon\to 0} C_1^1(T,\epsilon) = 0$ et $\lim\limits_{\delta t\to 0} C_1^2(T,\delta t,\epsilon) = 0$.
Finalement, pour I_2 on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{X(t,x_0,0)}^{X(t,x_0,0)} x^r \left| N(u(s_0(x,t+\delta t))I(x,t+\delta t)e^{-\displaystyle\int_{s_0(x,t+\delta t)}^{t} \mu(X(\sigma,x,t+\delta t))d\sigma} \right. \\ &\left. - f^0(X(0,x,t))I(x,t)J(0,x,t)e^{-\displaystyle\int_{s_0(x,t)}^{t} \mu(X(\sigma,x,t))d\sigma} \right| dx. \end{aligned}$$

En utilisant la constante de Lipschitz pour N, notée K_N, et d'après la définition de I et lemme (4.3.1), on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &\leq x_0^r e^{(rA+B)T} K_N |X(t+\delta t,x_0,0) - X(t,x_0,0)| \\ &\quad + x_0^r e^{rAT} \int_{X(t,x_0,0)}^{X(t+\delta t,x_0,0)} |f^0(X(0,x,t))J(0,x,t)|dx. \end{aligned}$$

Utilisons la régularisation f_ϵ^0 de f^0, il existe deux constantes $C_2^1(T,\epsilon)$ et $C_2^2(T,\delta t,\epsilon)$ telle que pour tout $\epsilon > 0$

$$I_2(\delta t) \leq C_2^1(T,\epsilon) + C_2^2(T,\delta t,\epsilon), \tag{4.31}$$

avec $\lim\limits_{\epsilon\to 0} C_2^1(T,\epsilon) = 0$ et $\lim\limits_{\delta t\to 0} C_2^2(T,\delta t,\epsilon) = 0$.
En conclusion, d'après (4.29)-(4.31), on obtient pour tout $\epsilon > 0$ et $\delta t > 0$

$$\int_{x_0}^{+\infty} x^r |f(x,t+\delta t) - f(x,t)|dx \leq C^1(T,\epsilon) + C^2(T,\delta t,\epsilon),$$

où $C^1(T,\epsilon)$ et $C^2(T,\delta t,\epsilon)$ sont deux constants telles que $\lim\limits_{\epsilon\to 0} C^1(T,\epsilon) = 0$ et $\lim\limits_{\delta t\to 0} C^2(T,\delta t,\epsilon) = 0$. Ce résultat reste valable lorsque δt est négatif, en prenant la lim sup en δt, on obtient

$$0 \leq \limsup_{\delta t\to 0} \int_{x_0}^{+\infty} x^r |f(x,t+\delta t) - f(x,t)|dx \leq C^1(T,\epsilon), \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

Pour finir, il faut juste tendre ϵ vers 0, ce qui donne $f \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1[x_0,+\infty[, x^r dx)$ pour tout $r \in [0,1]$. $\square$

L'estimation de la proposition suivante, est très utile pour étudier l'unicité de la solution.

Proposition 4.3.2. *Soient u_1, $u_2 \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}_+)$ et $T > 0$. Soient f_1 et f_2 deux solutions milds de (4.8)-(4.10), associées respectivement à u_1 et u_2 avec les conditions initiales f_1^0 et f_2^0 données dans (4.19). Alors, pour tout $t \in [0,T]$*

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{+\infty} x\,|f_1(x,t) - f_2(x,t)|\,dx \quad &\leqslant \int_{x_0}^{+\infty} x\left|f_1^0(x) - f_2^0(x)\right|dx \\
&\quad -\int_0^t \int_{x_0}^{+\infty} \mu(x)x\,|f_1(x,s) - f_2(x,s)|\,dxds \\
&\quad +A_1 \int_0^t \int_{x_0}^{+\infty} x\,|f_1(x,s) - f_2(x,s)|\,dxds \\
&\quad \int_0^t (K_{1,2} + C\|f_2(s)\|_L^1(xdx))|u_1(s) - u_2(s)|ds,
\end{aligned}$$

où A_1 est donnée dans (4.15) pour u_1, $K_{1,2}$ est la constante de Lipschitz de N dans $[0,R]$ avec $R = \max\left(\|u_1\|_{L^\infty(0,T)}, \|u_2\|_{L^\infty(0,T)}\right)$ et $C > 0$ est une constante telle que $\rho(x) < Cx$.

Preuve. Cette estimation est obtenue directement à partir d'une approximation classique. En effet, soit $h = f_1 - f_2$, ainsi on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{+\infty} h(x,t)\varphi(x,t)dx \quad &= \int_{x_0}^{+\infty} h_0(x,t)\varphi(x,0)dx + \int_0^t (N(u_1(s)) - N(u_2(s)))\varphi(x_0,s)ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{x_0}^{+\infty} h(x,s)[\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,s) + a_1(s,x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,s) - \mu(x)\varphi(x,s)]dxds \\
&\quad + \int_0^t \int_{x_0}^{+\infty} (a_1(s,x) - a_2(s,x))f_2(x,s)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,s)dxds.
\end{aligned}$$

Soit h_ϵ une régularisation de h, et S_δ une régularisation de la fonction $Sign$. Posons

$\varphi(x,s) = S_\delta(h_\epsilon(s,x))g(x)$ avec $g \in \mathcal{C}_c^\infty([x_0,+\infty[)$. Lorsque $\delta \to 0$ et $\epsilon \to 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{+\infty} |h(x,t)|g(x)dx &= \int_{x_0}^{+\infty} |h_0(x,t)|g(x)dx \\
&+ \int_0^t (N(u_1(s)) - N(u_2(s)))Sign(h_0(x_0))g(x_0)ds \\
&+ \int_0^t \int_{x_0}^{+\infty} |h(x,s)|[a_1(s,x)\frac{\partial}{\partial x}g(x) - \mu(x)g(x)]dxds \\
&+ \int_0^t \int_{x_0}^{+\infty} (a_1(s,x) - a_2(s,x))f_2(x,s)Sign(h(s,x))\frac{\partial}{\partial x}g(x)dxds.
\end{aligned}$$

Enfin, on peut approximer, la fonction identité avec une fonction régularisée $\eta_R \in \mathcal{C}_c^\infty([x_0,+\infty[)$, tel que $\eta_R(x) = x$ dans $(0,R)$, et pour avoir le résultat, il suffit de tendre $R \to +\infty$. □

D'après le lemme 4.3.2, on déduit facilement que f définie par (4.19) est une solution faible, celle-ci est unique d'après la proposition 4.3.2. En effet, il suffit de prendre $u_1 = u_2$ et $f_1^0 = f_2^0$ dans la proposition 4.3.2 pour avoir l'unicité. Enfin, le lemme 4.3.3 fournit la continuité dans le temps des moments d'ordre inférieur ou égal à un. Ceci conclut la preuve de la proposition 4.3.1.

4.3.4 Preuve du résultat de problème bien posé

Dans cette section, on va démontrer le résultat du théorème 4.3.1, tout d'abord, on va étudier l'opérateur S donné dans (4.11).

Lemme 4.3.4. *Soient $M > 0$ suffisamment grand tel que $u_0, p_0, b_0 < \frac{M}{2}$ et définissons*

$$X_M = \left\{(u,p,b) \in \mathcal{C}^0([0,T])^3 : 0 \leq u,p,b \leq M\right\},$$

où $\mathcal{C}^0([0,T])^3$ est muni de la norme uniforme. Si (H2)-(H4) sont satisfaites, f^0 satisfait $(H1)$, alors il existe $T > 0$ suffisamment petit tel que

$$S : X_M \to X_M \text{ est une contraction.}$$

Preuve. Soit M suffisamment grand, tel que $\max(u_0, p_0, b_0) < \frac{M}{2}$ et $T > 0$ suffisamment petit tel que

$$\begin{aligned}
(\gamma_u + \tau M + \sigma + x_0 C_1(M) + C_2(M,T))MT &\leq \frac{M}{2}, \\
(\gamma_p + \tau M)MT &\leq \frac{M}{2}, \\
(\sigma + \delta)MT &\leq \frac{M}{2}, \\
(\lambda_u + \sigma M)T &\leq \frac{M}{2}, \\
(\lambda_p + \sigma M)T &\leq \frac{M}{2}, \\
\tau M^2 T &\leq \frac{M}{2},
\end{aligned}$$

où $C_1(M)$ est la constante de Lipschitz de N dans $(0, M)$ et

$$C_2(M,T) = Ce^{MCT}\left(\|f^0\|_{L^1(xdx)} + C_1(M)MT\right), \tag{4.32}$$

où C est la constante tel que $\rho(x) \leqslant Cx$, voir (4.20). Cette hypothèse entraîne que pour tout $(u, p, b) \in X_M$, alors $S(u, p, b) \in X_M$ c'est à dire, la solution est bornée par M et est positive. Il reste à vérifier que S est une contraction. Soient (u_1, p_1, b_1) et (u_2, p_2, b_2) appartient à X_M. Alors

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|_\infty \leq\ & \gamma_u T|u_1 - u_2|_\infty + \tau T|u_1p_1 - u_2p_2|_\infty + \sigma T|b_1 - b_2|_\infty \\
& + x_0 T C_1(M)|u_1 - u_2|_\infty + T \sup_{t\in[0,T]} |u_1 \int_{x_0}^{+\infty} \rho(x) f_1(x,s)dx \\
& - u_2 \int_{x_0}^{+\infty} \rho(x) f_2(x,s)dx|.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Puisque

$$|u_1p_1 - u_2p_2|_\infty \leq M|u_1 - u_2|_\infty + M|p_1 - p_2|_\infty, \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} & \left|u_1 \int_{x_0}^{+\infty} \rho(x) f_1(x,s)dx - u_2 \int_{x_0}^{+\infty} \rho(x) f_2(x,s)dx\right| \\
\leq\ & C_1(M,T)|u_1 - u_2| + CM \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_{x_0}^{+\infty} x|f_1(x,s) - f_2(x,s)|dx\right|,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

et d'après la proposition 4.3.2

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{x_0}^{+\infty} x|f_1(x,s)-f_2(x,s)|dx\right| \leq T\left(C_1(M)+CC_2(M,T)\right)|u_1-u_2|_\infty. \quad (4.36)$$

On peut avoir des majorations similaires pour $|\tilde{p}_1-\tilde{p}_2|_\infty$ et $\left|\tilde{b}_1-\tilde{b}_2\right|_\infty$. On en déduit qu'il existe une constante $C(M,T)$ dépend uniquement de M et T tel que

$$\left|\left(\tilde{u}_1,\tilde{p}_1,\tilde{b}_1\right)-\left(\tilde{u}_2,\tilde{p}_2,\tilde{b}_2\right)\right|_\infty \leqslant C(M,T)T\,|(u_1,p_1,b_1)-(u_2,p_2,b_2)|_\infty \quad (4.37)$$

Avec $C(M,T)T\to 0$, lorsque T tend vers 0. Par conséquent, si T est assez petit tel que $C(M,T)T<1$, alors S est une contraction. □

D'après le lemme 4.3.4, on a une unique solution locale positive (f,u,p,b) définie sur l'intervalle $[0,T]$, telle que (u,p,b) est bornée par la constante M. La solution $f\in\mathcal{C}^0\left(0,T,L^1(xdx)\right)$ et $u,p,b\in\mathcal{C}^0(0,T)$. De plus, d'après (H3), N est continue et d'après (H2), $\rho(x)\leq Cx$ où C est une constante positive, ainsi $\rho f\in\mathcal{C}^0\left(0,T,L^1(dx)\right)$. On conclu que u,p et b données dans la définition 4.3.1 ont des dérivées continues.
Maintenant, pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u+p+2b) &= \lambda_u+\lambda_p-\gamma_u u-\gamma_p p-\sigma 2b-nN(u)-\frac{1}{\epsilon}u\int_{x_0}^{+\infty}\rho(x)f(x,t)dx\\ &\leq \lambda-m(u+p+2b),\end{aligned}$$

avec $m=\min(\gamma_u,\gamma_p,\sigma)$ et $\lambda=\lambda_u+\lambda_p$. En utilisant le Lemme de Gronwall, pour tout $t\in[0,T]$,

$$u+p+2b\leq u_0+p_0+2b_0+\frac{\lambda}{m}. \quad (4.38)$$

Par conséquent, on peut construire la solution sur n'importe quel intervalle de temps $[0,T],[T,2T]$,..., ainsi on a l'existence globale de la solution dans le temps, ce qui achève la preuve du théorème.
L'objet de la section suivante, est de donner une estimation du taux de convergence vers l'équilibre.

4.3.5 Existence de point d'équilibre du problème

On s'intéresse ici a l'existence de point d'équilibre pour le système (4.1)-(4.7). Supposons que ρ et μ satisfait (H2) et $u_\infty > 0$, alors s'il existe un point d'équilibre $(f_\infty, u_\infty, p_\infty, b_\infty)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_\infty(x) &= -\frac{\mu(x) + u_\infty \rho'(x)}{u_\infty \rho(x)} f_\infty(x), \quad \text{pour tout } x \in [x_0, +\infty[, && (4.39) \\ u_\infty \rho(x_0) f_\infty(x_0) &= N(u_\infty). && (4.40) \end{aligned}$$

Si $\inf_{x\in[x_0,+\infty[} \rho(x) > 0$, ce dernier est globalement Lipschitz. Ainsi, il existe une solution unique $f_\infty \in \mathcal{C}^0([x_0, +\infty[)$ de (4.39)-(4.40), donnée explicitement par

$$f_\infty(x) = \frac{N(u_\infty)}{u_\infty \rho(x_0)} \exp\left(- \int_{x_0}^{x} \frac{\mu(y) + u_\infty \rho'(y)}{u_\infty \rho(y)} dy \right). \tag{4.41}$$

$f_\infty \in L^1(xdx)$, afin que nous puissions définir rigoureusement

$$F(u_\infty) := \int_{x_0}^{\infty} \rho(x) f_\infty(x) dx.$$

Le point d'équilibre vérifie aussi

$$\lambda_u - \gamma_u u_\infty - \tau u_\infty p_\infty + \sigma b_\infty - x_0 N(u_\infty) - u_\infty F(u_\infty) = 0, \tag{4.42}$$

$$\lambda_p - \gamma_p p_\infty - \tau u_\infty p_\infty + \sigma b_\infty = 0, \tag{4.43}$$

$$\tau u_\infty p_\infty - (\sigma + \delta) b_\infty = 0. \tag{4.44}$$

D'après (4.41)-(4.44), $(f_\infty, u_\infty, p_\infty, b_\infty)$ est un point d'équilibre si u_∞ satisfait

$$\lambda_u = H(u), \tag{4.45}$$

où

$$H(u) := \gamma_u u + \tau \left(\frac{\lambda_p \delta}{\gamma_p(\sigma + \delta) + \tau u \delta} \right) u + nN(u) + \frac{N(u)}{\epsilon} \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{u} e^{-\frac{1}{u} \int_{x_0}^{x} \frac{\mu(s)}{\rho(s)} ds} dx.$$

Comme $H(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
H'(u) &= \gamma_u + \tau \left(\frac{\lambda_p \gamma_p \delta(\sigma+\delta)}{[\gamma_p(\sigma+\delta)+\tau u \delta]^2} \right) \\
&\quad + \rho(x_0) f(x_0) \left[n + \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{u} \int_{x_0}^{x} \frac{\mu(s)}{\rho(s)} ds \right) e^{-\frac{1}{u} \int_{x_0}^{x} \frac{\mu(s)}{\rho(s)} ds} dx \right] \\
&> 0,
\end{aligned}$$

alors il existe un unique point d'équilibre $(f_\infty, u_\infty, p_\infty, b_\infty)$.

Conclusion et perspectives

Cette thèse est structurée en deux parties. La première partie se propose d'étudier l'existence globale des solutions associées à certaines classes d'équations des ondes avec dissipation. Une estimation sur le comportement à l'infini de l'énergie pour chaque forme de ces équations et aussi déterminée. On poursuit actuellement nos recherches sur des cas de feedback non monotone. Un problème qui reste un peu délicat, du moment que peu de résultats (quelques propriétés de stabilité asymptotique faible et de stabilité uniforme en dimension 1 seulement) concernant la stabilisation sont connus. Des problèmes de ce genre font actuellement l'objet d'étude de plusieurs auteurs.
A. Guesmia (**[40]** , **[41]**) par exemple a pu introduire de nouvelles inégalités intégrales, plus générales que celles de Komornik **[19]** et Martinez **[25]**. Des inégalités permettant une estimation sur le comportement à l'infini d'une fonction positive pas nécessairement décroissante. C'est donc le cas des problèmes non dissipatifs.

La deuxième partie, nous l'avons consacré à l'analyse mathématique d'un modèle décrivant d'une part la formation de plaque amyloïde in vivo, et d'autre part les interactions entre les oligomères Aβ et la protéine prion qui induiraient la perte de mémoire dans la maladie d'Alzheimer. L'étude à permis de démontrer l'existence et l'unicité de solution pour notre problème, ainsi que l'existence d'un point d'équilibre unique. Il serait donc intéressant de démonter des résultat de stabilité et de bifurcations.

Bibliographie

[1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation,* Editions de l'école polytechnique, Palaiseau. (2007).

[2] N. Amroun and S. Mimouni, Asymptotic behaviour of solutions for some weakly dissipative wave equations of p-Laplacian type, *Applied Mathematics E-Notes,* vol. 11, pp. 175-183, 2011.

[3] D. Ang and A. Dinh, *Strong solutions of quasilinear wave equation with nonlinear damping,* Siam Journal on Mathematical Analysis. **19** (1988), 289 – 299.

[4] A. Benaissa and S. A. Messaoudi, Exponential decay of solutions of a nonlinearly damped wave equation, *Nonlinear Differ. Equ. Appl,* vol. 12, no. 4, pp. 391-399, 2005.

[5] A. Benaissa and S. Mimouni, *Energy decay of solutions of wave equation of p-Laplacian type with a weakly nonlinear dissipation,* JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **7** (2006)-1, Article 15, 8 pp.

[6] A. Benaissa and S. Mokeddem, Decay estimates for the wave equation of p-Laplacian type with dissipation of m-Laplacian type, *Math. Methods Appl. Sci,*

vol. 30, no. 2, pp. 237-247, 2007.

[7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théore et applications,* Masson, Paris. (1983).

[8] V. Calvez, N. Lenuzza, D.Oelz, J. P. Deslys, P. Laurent, F. Mouthon et B. Perthame, *Size distribution dependence of prion aggregates infectivity*, Mathematical Biosciences. 217, (2009), no.1,88-99.

[9] V. Calvez, N. Lenuzza, M. Doumic, J. P. Deslys, F. Mouthon et B. Perthame, *Prion dynamics with size dependency-strain phenomena*, Journal of Biological Dynamics. 4, (2010), no.1,28-42.

[10] C. Chen, H. Yao and L. Shao, Global Existence, Uniqueness, and Asymptotic behavior of solution for p-Laplacian Type wave equation. *J. Inequal. Appl,* 2010, Art. ID 216760, 15 pp.

[11] J. F. Collet and T, Goudon, *On solutions of the Lifshitz-Slyozov model*, Nonlinearity 13, (2000), no.4 1239-1262.

[12] M. L. Greer, L. Pujo-Menjouet and G. F. Webb,*A Mathematical analysis of the dynamics of prion proliferation* , Journal of Theoretical Biology 242, (2006), no. 3,598-606.

[13] P. Gabriel, *The shape of the polymerization rate in the prion equation*, Mathematical and Computer Modelling 53, (2011), no. 7-8, 1451-56.

[14] H. Gao and T. F. Ma, Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-Laplacian operator, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,* no. 11, pp. 1-13, 1999.

[15] M. L. Greer, P. van den Driessche, L. Wang and G. F. Webb, *Effects of general incidence and polymer joining on nucleated polymerization in a prion disease model*, SIAM Journal of Applied Mathematics 68, (2007), no.1,154-170.

[16] A. Haraux, *Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques (in French),* Preprint No. 78011, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[17] M. Helal, E. Hingant, L. Pujo-Menjouet et G. Webb, *Alzheimer's Disease : Analysis Of a Mathematical model Incorporating The role of Prions*, ANR grant MADCOW, (2013), no. 08-JCJC-0135-CSD5.

[18] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization.* RAM Research Appl. Math. Paris : Masson, Chichester : John Wiley 1994.

[19] V. Komornik, *Decay estimates for the wave equation with internal damping.* In : Control and Estimation of Distributed Parameter Systems : Nonlinear Phenomena, (Proceedings Vorau (Austria) 1993 ; eds. : W. Desch et al.). Intern. Ser. Numer. Math. 118. Basel : Birkhäuser 1994, pp. 253 – 266.

[20] S. L. Laurençcot and C. Walker, *Well-posedness for a model of prion proliferation dynamics*, Journal of Evolution Equations 7, (2007), 241-264.

[21] J. Lagnese, *Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation,* J. Diff. Equations. **50**(1983), 163 – 182.

[22] J. L. Lions and W. A. Strauss, *Some non-linear evolution equations,* Bull. Soc. Math. France. **93**(1965), 43 – 96.

[23] J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires, *Dunod-Gauthier Villars,* Paris, France, 1969.

[24] T. F. Ma and J. A. Soriano, On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities, *Nonlinear Anal,* **37**(1999)(8), 1029-1038.

[25] P. Martinez, *A new method to decay rate estimates for dissipative systems,* ESAIM Control Optim. Calc. Var. **4**(1999), 419 – 444.

[26] S. Mokeddem and Kh. B. W. Mansour, Asymptotic behaviour of solutions for p-Laplacian wave equation with m-Laplacian dissipation, *Z. Anal. Anwend,* vol. 33, no. 3, pp. 259-269, 2014.

[27] M. I. Mustafa and A. S. Messaoudi, General energy decay rates for a weakly damped wave equation, *Commun. Math. Anal,* 9 (2010), no. 2, 67-76.

[28] M. Nakao, A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations, *Journal of the Mathematical Society of Japan,* vol. 30, no. 4, pp. 747-762, 1978.

[29] S. Prigent, A. Ballesta, F. Charles, N. Lenuzza, P. Gabriel, L. M. Tine, H. Rezaei, and M. Doumic, *An efficient kinetic model for assemblies of amyloid fibrils and its application to polyglutamine aggregation*, PLoS ONE 7, (2012), no. 11, e43273.

[30] J. Prüss, L. Pujo-Menjouet, G. F. Webb, and R. Zacher, *Analysis of a model for the dynamics of prions*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B 6, (2006), no 1,215-225.

[31] M. Sango, *On a nonlinear hyperbolic equation with anisotropy : global existence and decay of solution,* Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications. vol. **70**, no. 7, pp. 2816 – 2823, 2009.

[32] D. H. Sattinger, *On global solution of nonlinear hyperbolic equations.* Arch. Ration. Mech. Anal. **30** (1968), 148 – 172.

[33] G. Simonett and C. Walker, *On the solvability of a mathematical model for prion proliferation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 324, (2006), 580-603.

[34] K. Yahiaoui and S. Mokeddem, Decay of energy for a class of p-Laplacian wave equation with nonlinear damping and source terms, *Gulf J. Math,* vol. 6, no. 2, 50-58, 2018.

[35] Z. Yang, *Existence and asymptotic behaviour of solutions for a class of quasilinear evolution equations with nonlinear damping and source terms,* Mathematical Methods in the Applied Sciences. **25** (2002), 795 – 814.

[36] Y. J. Ye, *On the decay of solutions for some nonlinear dissipative hyperbolic equations,* Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. **20** (2004), 93 – 100.

[37] Y. Ye, Existence of global solutions for some nonlinear hyperbolic equation with a nonlinear dissipative term, *Journal of Zhengzhou University,* vol. 29, no. 3, pp. 18-23, 1997.

[38] Y. J. Ye, *Exponential decay of energy for some nonlinear hyperbolic equations with strong dissipation,* Adv. Difference Equ. 2010, Art. ID 357404, 12 pp.

[39] Y. J. Ye, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for some nonlinear hyperbolic equation,* J. Inequal. Appl. 2010, Art. ID 895121, 10 pp.

[40] A. Guesmia, *Une nouvelle approche pour la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 332 (2001), 633-636.

[41] A. Guesmia, *Nouvelles inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Sér I.Math. Paris, 336 (2003), 801-804.

[42] E. Zuazua, *E*xponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, *Comm. Partial Differential Equations,* **15** (1990), pp 205-235.

[43] E. Zuazua, *U*niform Stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feed-back, *SIAM J. Control Optim,* 28(2) (1990), pp 466-477.