



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES – SIDI BEL ABBES

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de **DOCTERAT EN SCIENCES**

Par : **BRIHMAT MOSTEFA**

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Turbomachine thermique

Étude de l'influence de la rigidité des paliers hydrodynamiques sur le comportement dynamique des turbomachines

Devant le jury composé de : Messieurs

BOUCHOUICHA Benattou	Pr	Président	UDL SBA
REFASSI Kaddour	Pr	Directeur de thèse	UDL SBA
YOUNES Mimoun	Pr	Co-directeur de thèse	UDL SBA
ZAHY RACHID	MCA	Examineur	Université de Relizane
MOKHTARI Mohamed	MCA	Examineur	Ecole Nationale Polytechnique Oran
BOUZIANE Mohamed Mokhtar	Pr	Examineur	U. de Mascara

Année universitaire 2021-2022

A Mes parents, que Dieu leur a procure longévité et bonne santé.

A ma femme

A Yasmine, Sofia et Mohamed Ayoub, mouncif

A tous ceux qui me sont chers...

Mostefa

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides à l'Université de Djilali Liabèsde Sidi-Bel-Abbès sous la direction de Monsieur le Professeur **Refassi kaddour**.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Refassi Kaddour, pour avoir accepté de diriger ce travail. Je le remercie pour avoir toujours été présent et pour ses conseils et ses encouragements.

Mes remerciements vont également à **Monsieur Younes Mimoun**, Professeur au Département de Génie Électrique, pour avoir accepté d'être un Co- Rapporteur.

Merci à tous les **membres du Laboratoire**.

Merci à tous les membres du département de Génie mécanique.

Merci à tous les **membres du jury**.

Je remercie vivement tous les membres de ma famille pour leur présence et leur disponibilité.

Je tiens à remercier chaleureusement ma petite famille et particulièrement ma femme qui, par sa patience, sa compréhension et son encouragement, m'a permis de mener à bien et à terme ce travail de thèse.

Je remercie tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin pour finaliser cette thèse.

Résumé

Les machines tournantes sont très courantes dans l'industrie. Comprendre leur comportement est donc très important. Lors de l'analyse numérique de tels systèmes, leur modélisation doit prendre en compte plusieurs effets importants qui sont généralement ignorés, tels que les coefficients d'amortissement et de rigidité associés aux interactions hydrodynamiques entre l'arbre et les paliers de support. Les paliers hydrodynamiques jouent un rôle important dans le bon fonctionnement des turbomachines. Ils ont un effet direct sur le comportement dynamique de ce type de machine en ajoutant de la rigidité au système.

Ce travail étudie l'influence de la rigidité des paliers hydrodynamiques et de l'amortissement interne des matériaux sur le comportement modal d'un système d'arbre de rotor. Ces forces influencent le comportement dynamique d'un rotor et tendent à déstabiliser le système d'arbre de rotor lorsque la vitesse de rotation augmente.

Trois exemples différents ont été successivement étudiés : un rotor à un disque unique (rotor Nelson), un rotor à deux disques (rotor kit), et enfin un rotor à multi-disques (rotor Lallanne). Dans le DOE, deux niveaux ont été utilisés avec total des diamètres comme paramètres, facteurs de rigidité et dimensions des paliers, qui ont abouti à quarante-huit passages, dans le premier cas et deuxième cas, et vingt passages, dans le troisième cas conformément au plan de conception de Plackett-Burman (PBD). Les graphes des effets de Pareto et les effets principaux ont été étudiés pour identifier l'influence de la rigidité et des diamètres responsables de la production d'effets majeurs sur la fréquence où nous avons trouvé :

Rotor Nelson :

Kyz Il a le plus grand effet positif significatif sur la fréquence car il apparaît à droite de la ligne de réponse par rapport à kzy, kzz qui a un impact négatif sur la fréquence et se trouve à gauche de la ligne de réponse. L'effet Pareto et les schémas de conception ont montré que les diamètres D4, D10 sont responsables de la production d'effets haute fréquence.

Rotor kit :

Le diamètre d_1 et la rigidité kzz , kyy ont un effet significatif là où ils augmentent la fréquence d'excitation.

Rotor lallanne :

Le coefficient de rigidité des paliers kyy_2 , ainsi que le diamètre d_1 et la position des disques p_3 augmentent tous la fréquence d'excitation dans la partie imaginaire. La position des disques p_2 et le diamètre d_3 augmentent tous la fréquence d'excitation dans la partie réelle.

Les résultats des tests de confirmation ont montré que la méthode de Plackett-Burman était très efficace pour optimiser les machines tournantes. D'autre part, un code d'éléments finis est écrit dans MATLAB pour connaître les valeurs propres et la vitesse critique qui correspondent à la vitesse où l'excitation du déséquilibre coïncide avec l'une des fréquences propres.

Mots-clés

Rigidité, DOE, paliers hydrodynamiques, comportement dynamique, turbomachines, vitesse critique.

Abstract

Rotating machines are very common in industry. Understanding their behaviour is therefore very important. When considering numerical analysis of such systems, their modelling needs to consider several important effects which are normally disregarded, such as damping and stiffness coefficients associated with the hydrodynamic interactions between the shaft and the supporting bearings. Hydrodynamic bearings play an important role in proper functioning of turbo machinery. They have a direct effect on the dynamic behaviour of this type of machine by adding stiffness to the system.

Three different examples were successively studied: a rotor with a single disc (Nelson rotor), a rotor with two discs (rotor kit), and finally a multi-disc rotor (Lallanne rotor). In the DOE, two levels were used with total diameters as parameters, stiffness factors and dimensions of the bearings, which resulted in forty-eight runs, in the first case and second case, and twenty runs, in the third case according to the Plackett-Burman Design Plan (PBD). Plots of Pareto effects and main effects were studied to identify the influence of stiffness and diameters responsible for producing major effects on frequency. Where we found:

Nelson rotor:

Kyz It has the greatest significant positive effect on the frequency because it appears on the right of the response line Compared to kzy, kzz which has a negative impact on the frequency and is to the left of the line of response, as confirmed by the graphs and the results of the analyzes. The Pareto effect and design diagrams have shown that diameters D4, D10 are responsible for the production of high frequency effects.

Kit rotor:

The diameter d_1 and the stiffness kzz , kyy have significant effect where they augment the excitation frequency.

Lalanne's rotor:

The stiffness coefficient Bearing kyy_2 , and the diameter d_1 and Position of the discs p_3 both increase the excitation frequency in the imaginary part. The Position of the discs p_2 and the diameter d_3 both increase the excitation frequency in the real part.

The results of the confirmatory tests showed that the Plackett-Burman method was very effective in optimizing of rotating machines. On the other hand a finite element code is written in MATLAB to find out the eigenvalues and the critical speed that correspond to the speed where the unbalance excitation coincides with one of the natural frequencies.

Keywords:

Stiffness, DOE, hydrodynamic bearings, dynamic behaviour, turbomachinery, critical speed.

الآلات الدوارة شائعة جدًا في الصناعة، وفهم سلوكها مهم جدًا. عند النظر في التحليل العددي لمثل هذه الأنظمة، تحتاج هذه النماذج إلى النظر في العديد من الآثار المهمة التي يتم تجاهلها عادة، مثل معاملات التخميد والصلابة المرتبطة بالتفاعلات الهيدروديناميكية بين العمود والمحامل الداعمة، تلعب المحامل الهيدروديناميكية دورًا مهمًا في التشغيل الصحيح للآلات التوربينية. لديهم تأثير مباشر على السلوك الديناميكي لهذا النوع من الماكينات من خلال إضافة الصلابة إلى النظام. يلخص هذا العمل تأثير صلابة المحامل الهيدروديناميكية وتخميد المواد الداخلية على السلوك الشرطي لنظام عمود الدوران. تؤثر هذه القوى على السلوك الديناميكي للدوار وتميل إلى زعزعة استقرار نظام عمود الدوار مع زيادة سرعة الدوران يتم تحليل الدوار لتحديد التردد من خلال تغيير الأقطار من خلال تصميم التحسين (DOE).

تمت دراسة ثلاثة أمثلة مختلفة على التوالي: دوار بقرص واحد (دوار نيلسون)، دوار بقرصين (طقم دوار) وأخيرًا دوار متعدد الأقراص (دوار لالان).

في وزارة الطاقة، تم استخدام مستويين بأقطار إجمالية كمعاملات وعوامل صلابة وأبعاد للمحامل، مما أدى إلى ثمانية وأربعين شوطًا في الحالة الأولى والحالة الثانية، وعشرين شوطًا في الحالة الثالثة وفقًا للخطة. تصميم بلاكيت بورمان (PBD) تمت دراسة مؤثرات باريتو والتأثيرات الرئيسية لتحديد تأثير الصلابة والأقطار المسؤولة عن إحداث تأثيرات كبيرة على التردد. أين وجدنا:

دوار نيلسون :

Kyz له أكبر تأثير إيجابي معنوي على التردد حيث يظهر على يمين خط الاستجابة مقارنة بـ kzy ، kzz الذي له تأثير سلبي على التردد ويوجد على يسار خط الاستجابة. أظهرت مخططات تأثير باريتو والتصميم أن الأقطار $D10$ و $D4$ مسؤولة عن إنتاج تأثيرات عالية التردد.

طقم دوار:

للقطر $d1$ والصلابة kzz ، kyy تأثير معنوي حيث يزيدان من تردد الإثارة.

دوار لالان :

إن معامل صلابة المحمل kyy_2 وكذلك القطر d_1 وموضع الأقراص p_3 تزيد من وتيرة الإثارة في الجزء التخليفي. يعمل كل من موضع الأقراص p_2 والقطر d_3 على زيادة وتيرة الإثارة في الجزء الحقيقي.

أظهرت نتائج الاختبارات التأكيدية أن طريقة *Plackett-Burman* كانت فعالة للغاية في تحسين الآلات الدوارة. من ناحية أخرى، يتم كتابة رمز عنصر محدد في *MATLAB* لمعرفة القيم الذاتية والسرعة الحرجة التي تتوافق مع السرعة التي يتزامن فيها إثارة عدم الاتزان مع أحد الترددات الطبيعية.

الكلمات المفتاحية:

صلابة، DOE، المحامل الهيدروديناميكية، السلوك الديناميكي، التوربينات. السرعة الحرجة.

Table des matières

Dédicaces	
Remerciements	
Résumé	
Table des matières	
Liste des symboles et abréviation.....	I
Liste des figures.....	IV
Liste des tableaux.....	VII
Introduction Générale.....	01
Chapitre 1. . Etat de l’art	04
1. Introduction.....	05
2. Histoire des paliers hydrodynamique.....	05
Chapitre 2 .Généralités des paliers hydrodynamiques	14
2.1. Introduction.....	15
2.2. Les paliers hydrodynamiques.....	15
2.2.1. Les paliers à géométrie fixe.....	16
2.2.1.1. Les paliers lisses cylindriques.....	16
2.2.1.2. Les paliers à arc partiel.....	21
2.2.1.3. Les paliers multilobes.....	22
2.2.1.4. Les paliers à films amortisseurs.....	22
2.2.2. Les paliers à géométrie variable.....	23
Chapitre 3. Équations générales de la lubrification hydrodynamique	26
3.1. Introduction.....	27
3.2. Equation de base de la lubrification hydrodynamique.....	27
3.2.1. Equation d’épaisseur du film lubrifiant.....	27
3.3. Équation de la mécanique des fluides.....	29
3.3.1. La loi de conservation de la masse.....	29
3.3.2. La loi fondamentale de la dynamique.....	29
3.3.3. La loi de comportement rhéologique.....	29
3.4. Hypothèses simplificatrices.....	30
3.5. Les équations de Navier Stokes.....	30
3.5.1. Détermination des équations de Navier Stokes.....	30
3.5.2. Les équations de Navier Stokes aux variables dimensionnées.....	32
3.6. Détermination du champ de vitesse.....	33

3.7. Représentation de l'équation de Reynolds.....	34
3.7.1. Equation de Reynolds généralisée.....	34
3.7.2. Simplification de l'équation de Reynolds.....	35
3.8. Conditions aux limites.....	37
3.8.1. Conditions de Sommerfeld.....	37
3.8.2. Conditions de Gumbel ou semi Sommerfeld.....	38
3.8.3. Conditions dites de Reynolds.....	38
3.9. Performances statiques.....	40
3.9.1. Composantes de la portance HD.....	40
3.9.2. Angle de calage.....	41
3.10. Conclusion.....	42
Chapitre 4. Modélisation des rotors.....	43
4.1. Introduction.....	44
4.2. Systèmes de coordonnées	44
4.3. Caractéristiques des éléments de rotor	44
4.4. Eléments de rotor	45
4.4.1 Le disque	45
4.4.2 L'arbre	50
4.4.3. Le balourd.....	51
4.4.4 Les paliers lisses.....	52
4.5. Modélisation des rotors par éléments finis.....	52
4.5.1 Introduction.....	52
4.5.2 Disque.....	53
4.5.3. Modélisation de l'arbre.....	53
4.5.4. Modélisation du balourd.....	60
4.5.5. Modélisation des paliers	61
4.5.6. Equation de mouvement	61
4.5.6.1 Configuration des formes globales	61
4.5.6.2 Forme spatiale du mouvement.....	62
4.5.6.3 Analyse des valeurs propres	63
4.5.7. L'instabilité due à l'amortissement tournant.....	63
4.5.7.1. Les dissymétries.....	64
4.5.7.2. L'orbite modale.....	66
4.5.7.3. L'analyse de stabilité.....	66
4.5.8. Matrice raideur des paliers.....	67
4.5.8.1. Les paliers.....	67

4.5.8.1.1. Paliers linéaires.....	67
4.5.8.1.2. Paliers non linéaires.....	68
4.6. Partie simulations.....	69
4.6.1 .Exemple 1. Rotor Nelson.....	69
4.6.1. 1.Résultats et discussions.....	71
4.6.1.1. 1.Données des paliers à film fluide.....	71
4.6.1.1.2. Estimation des vitesses critiques.....	72
4.6.1.1.3. Le diagramme de Campbell.....	72
1-Diagramme de stabilité	69
2- Rapport d` amortissement	73
3- Formes de modes et précession de formes de modes.....	73
4- Orbites elliptiques.....	78
5-Diagramme de locus racine.....	80
4.6.2. Exemple 2 rotor kit.....	82
4.6.3. Exemple 3 rotor lalanne.....	85
1. Calcul des valeurs de fréquence du système réelle et imaginaire.....	85
1.1. Calcul des vitesses critiques	87
1.2.Évaluation de la stabilité.....	88
1.3. Formes du mode rotor.....	88
4.6.4 .Prédiction de la réponse au déséquilibre du rotor.....	90
4.6.4.1. Orbites elliptiques.....	90
4.6.4.2 .Diagramme de locus racine.....	91
4.7. Conclusion.....	92
Chapitre 5 .Plans d`expérience méthode Plackett-Burman.....	93
5.1. Introduction.....	94
5.2. Notion d'espace expérimental	94
5.3. Notion de surface de réponse	96
5.4. Avantages de la conception des expériences	97
5.5. Les plans de Plackett - Burman (PB).....	98
5.6. Sélection des facteurs, des niveaux de facteurs et des réponses.....	99
5.6.1 Construction d`un plan de Plackett et Burman.....	100
5.6.2 Matrice de conception.....	101
5.7. Analyse statistique des résultats.....	103
5.7.1. Coefficients de régression et analyse de la variance.....	103
5.7.2. Erreur pure et manque d'ajustement.....	103

5.7.3 Représentation graphique des résultats.....	103
5.7.3.1. Tracés diagnostiques des résidus.....	103
5.7.3.2. Tableau de Pareto des effets.....	104
5.7.3.3. Détection de sources significatives.....	105
5.7.3.4. Diagrammes d'interaction.....	106
5.8. Conclusion.....	107
Chapitre 6 .Etude L'influence de la rigidité des paliers Hydrodynamiques	108
6.1. Introduction.....	109
6.2. Plan d'expérience (conception Plackett-Burman).....	110
6.2.1. Le résultat trouvé par le plan d'expérience conception Plackett-Burman.....	111
6.3. Optimisation des facteurs de réponse.....	115
6.3.1. Le résultat du design de Plackett-Burman.....	116
6.3.1.1 Analyse de la variance.....	116
6.3.1.2 Tracés de contour et de surface pour la fréquence.....	121
6.4. Exemple 2 rotor kit (DOE).....	122
6.4.1. Détermination des effets et coefficients significatifs du modèle.....	125
6.5. Exemple 3 rotor lalanne.....	132
6.5.1. Méthode d'optimisation.....	134
6.6. Conclusion	139
Conclusions générale	140
Les Annexes.....	143
Annexe A.....	144
Références Bibliographiques.....	145

Liste des symboles et abréviations

Symboles dimensionnés

C	Jeu radial	(m)
C_{ij}	Coefficient d'amortissement des supports-paliers	(N.s/m)
C_f	Couple de frottement	(mN)
C_r	Coefficient d'amortissement due au fluide environnant le rotor	(N.s/m)
D	Diamètre du palier	(m)
e	Excentricité	(m)
e_b	Excentricité du balourd	(m)
$e \cdot$	Vitesse radiale du centre de l'arbre	(m/s)
$e\varphi \cdot$	Vitesse tangentielle du centre de l'arbre	(m/s)
f_i	Force d'inertie	(N)
F	Force hydrodynamique	(N)
h	Epaisseur du film lubrifiant	(m)
H_{\min}	Hauteur minimale du film lubrifiant	(m)
L	La longueur du palier	(m)
M_p	Masse du palier	(Kg)
$4M_r, 4m_r$	Masses du rotor	(Kg)
N	Vitesse de rotation du rotor	(tr/s)
P	Pression dans le film lubrifiant	(Pa)
R_a	Rayon de l'arbre	(m)
R_c	Rayon du coussinet	(m)
R_r	Rayon du rotor	(m)
R_p	Rayon du palier	(m)
SV	Vitesse d'écrasement pur	(m/s)
t	Le temps	(s)
x, y, z	Coordonnée	
r, θ, z		
u_i	ou u, v, w Vitesse de fluide	(m/s)
W	Charge extérieure appliqué sur le palier	(N)
Ω	Vitesse angulaire de l'arbre	(rd/s)
P	Masse volumique	(Kg/m ³)
μ	Viscosité dynamique du lubrifiant	(Pa. s)
λ	Viscosité cinématique du lubrifiant	(m ² /s)
σ_{ij}	Tenseur des contraintes	(Pa)
ω_a	La vitesse de rotation de l'arbre	(rd/s)
ω_c	La vitesse de rotation de coussinet	(rd/s)
$K_{yy}, K_{yz}, K_{zy}, K_{zz}$	rigidité	(N/m)
$C_{yy}, C_{yz}, C_{zy}, C_{zz}$	amortissement	(N/m)
Ω_{VC}	la vitesse critique du système	(rpm)
Ω_i	fréquence propre	(Hz)

θ	Coordonné angulaire ou circonférentielle (degré d'angle)
α	L'angle que fait un point sur la surface de l'arbre avec le centre de l'arbre et le palier Argument du vecteur
V_s	(vitesse d'écrasement pur) (Degré d'angle)
ϕ	L'angle de calage (degré d'angle)
U	Energie de déformation
T	Energie cinétique
u	Déplacement de l'arbre selon l'axe ox
v	Déplacement de l'arbre selon l'axe oy
w	Déplacement de l'arbre selon l'axe oz
Fu	Force généralisée autour de l'axe ox
Fw	Force généralisée autour de l'axe o
L	Longueur de l'arbre
E	Module de Young
M_{ij}	Eléments de la matrice des masses
K_{ij}	Eléments de la matrice de rigidité
$[C]_p$	Matrice d'amortissement due aux paliers
$[K]_p$	Matrice de rigidité due aux paliers

Symboles sans dimension

ε	Excentricité relative
m	Le coefficient de précharge géométrique
ε_b	Excentricité relative du balourd
μ	Viscosité dynamique
λ	Second coefficient de viscosité
x_1, x_2, x_3	Coordonnée
t	Temps
Ω_i	L'instabilité
u_1, u_2, u_3	Vitesse de fluide
ε_{ji}	Tenseur des taux de déformations
δ_{ij}	Indice de Kronecker

p	Pression
τ	Le taux de dilatation cubique
\Re	Le nombre de Reynolds
ϵ	Paramètre d'échelle
y	La réponse.
β_0	L'interception du modèle
β_i	Le coefficient linéaire
X_i	Niveau de la variable indépendante
Source	indique la source de variation, à partir du facteur, de l'interaction ou de l'erreur. Le total est la somme de toutes les sources
DF	Degrés de liberté de chaque source. Si un facteur a trois niveaux, le degré de liberté est 2 (n-1). Si vous avez 30 observations au total, le nombre total de degrés de liberté est de 29 (n - 1).
SS	Somme des carrés entre les groupes (facteur) et la somme des carrés dans les groupes (erreur).
MS	Les carrés moyens sont trouvés en divisant la somme des carrés par les degrés de liberté.
F	Calculer en divisant le facteur MS par l'erreur MS ; vous pouvez comparer ce rapport à un F critique trouvé dans un table ou vous pouvez utiliser la valeur p pour déterminer si un facteur est significatif.
P	Utiliser pour déterminer si un facteur est significatif ; comparez généralement avec une valeur α de 0,05. Si la valeur p est inférieure à 0,05, alors le facteur est significatif

Liste des figures

Figure 2. 1 : Coussinets.	16
Figure 2. 2 : phases de fonctionnement d'un palier lisse	17
Figure 2. 3 : Caractéristiques de fonctionnement du palier hydrodynamique.....	18
Figure 2. 4 : Position des rainures axiales	19
Figure 2. 5 : Variation de la pression en fonction de la coordonnée axiale z.....	20
Figure 2. 6 : Palier à rainure circonférentielle	20
Figure 2. 7 : Schématisation d'un palier à arc	21
Figure 2. 8 : Schéma d'un palier à trois lobes	22
Figure 2.9 : Schéma de principe d'un palier à film amortisseur.....	23
Figure 2.10 : Palier à patins oscillants	24
Figure 2.11 : Schématisation d'un palier à trois patins oscillants	25
Figure 3.1 : Section droite du palier.....	28
Figure 3.2 : Système d'axes en coordonnées cartésiennes	33
Figure 3.3 : a/ Section droite du palier. b / Palier développé.....	36
Figure 3.4 : Illustration des conditions aux limites dans un palier.....	39
Figure 3.4.1 : Conditions aux limites de rupture du film.....	40
Figure 4.1 : Repères du rotor flexible.....	44
Figure 4. 2 : Eléments de base d'un rotor.....	45
Figure 4. 3 : Repères liés au disque sur un arbre flexible	46
Figure 4.4: Forme du modèle de disque.....	50
Figure 4.5 : Mouvement de l'arbre	51
Figure 4.6 : Répartition du balourd sur le rotor.....	51
Figure 4. 7 : Présentation de l'amortissement et de la rigidité du palier.....	52
Figure 4.8 : Configuration géométrique d'un rotor.....	53
Figure 4.9 : Configuration du disque	53
Figure 4.10 : Elément arbre	55
Figure 4.11 : Présentation des degrés de liberté	55
Figure 4.12 : modèle de palier.....	61
Figure 4.13 : Exemple d'un diagramme de Campbell pour un rotor avec des supports orthotropes.	64
Figure 4. 14 : Les différents chargements transmis aux paliers.....	67
Figure 4.15 : Modèle de rotor Nelson avec différentes sections, disque et paliers. Les numéros indiquent les numéros de station.	70
Figure 4.16 : Vue schématique du rotor sur les supports de palier et idéalisation des coefficients de film fluide	71
Figure 4.17 : Rotor Nelson avec différentes sections.....	71

Figure 4.18 : Diagramme de Campbell. Rotor Nelson.....	72
Figure 4.19 : Diagramme de stabilité. Rotor Nelson.....	73
Figure 4.20 : Diagramme de rapport d'amortissement.....	73
Figure 4.21 : Formes des modes et précession des formes des modes à 4800 tr/min.	77
Figure 4.22 : Orbites à 4800 tr/min.....	80
Figure 4.23 : Diagramme de locus racine.....	82
Figure 4.24 : Modèle schématique du rotor kit.....	82
Figure 4.25 : rotor kit avec différentes sections	83
Figure 4. 26 : Diagramme de Campbell .rotor kit	84
Figure 4.27 : Formes des modes et précession des formes à 0 tr / min.....	84
Figure 4.28 : Diagramme de stabilité.....	85
Figure 4.29 : Modèle schématique du rotor lalanne.....	86
Figure 4.30 : rotor lalanne avec différentes sections.....	87
Figure 4.31 : Diagramme de Campbell. Rotor lalanne.....	88
Figure 4.32 : Diagramme de stabilité. Rotor lalanne.....	88
Figure 4.33 : Formes des modes et précession des formes à 0 tr / min.....	89
Figure 4.34 : Orbites à 3333,3333 tr / min.....	90
Figure 4.35 : Diagramme du locus racine.....	91
Figure 5.1 : Le niveau bas du facteur est noté par - 1 et le niveau haut par +1. Le domaine de variation du facteur est constitué de toutes les valeurs comprises entre le niveau bas et le niveau haut.	94
Figure 5. 2 : Chaque facteur est représenté par un axe gradué et orienté. Les axes des facteurs sont orthogonaux entre eux. L'espace ainsi défini est l'espace expérimental.	95
Figure 5.3 : Dans l'espace expérimental, les niveaux des facteurs définissent des points..... expérimentaux.	95
Figure 5.4 : Les points expérimentaux sont disposés dans le domaine d'étude défini par l'expérimentateur.	96
Figure 5.5 : Les réponses associées aux points du domaine d'étude forment la surface de réponse. Les quelques réponses mesurées aux points du plan d'expériences permettent de calculer l'équation de la surface de réponses.	97
Figure 5.6 : Représentation graphique du tracé de diagnostic des résidus.....	104
Figure 5.7 : Représentation d'un graphique de Pareto.....	105
Figure 5.8 : Une représentation graphique d'un tracé demi-normal.....	106
Figure 5.9 : Représentation graphique d'un graphique à facteurs.....	106
Figure 6.1 : Diagramme de Pareto des effets standardisés Plackett-Burman.....	112
Figure 6.2 : Tracé normal des effets standardisés Plackett-Burman.....	112
Figure 6.3 : Tracé des effets principaux de la fréquence	113
Figure 6.4 : Tracé normal de l'effet standardisé.....	118

Figure 6.5 : Diagramme de Pareto des effets standardisés.....	118
Figure 6.6 : Tracé principal des effets pour la fréquence.....	119
Figure 6.7 : Diagramme d'interaction pour la fréquence.....	120
Figure 6.8 : Diagramme d'interaction pour le diagramme de fréquence afin de visualiser les interactions possibles.	121
Figure 6.9. Courbes de contour (A) et de surface (B) des interactions bidirectionnelles (d2,d8) correspondant à la fréquence.	122
Figure 6.10. Courbes de contour (A) et de surface (B) d'interactions bidirectionnelles (Kzz, d3) correspondant à la fréquence	122
Figure 6.11 : Graphique de Pareto des effets normalisés.....	124
Figure 6.12 : Tracé normal des effets standardisés Plackett-Burman.....	124
Figure 6.13 : Schéma des principaux effets sur la fréquence imaginaire-réelle.....	125
Figure 6.14 : Représentation des effets normalisés.....	130
Figure 6.15 : Diagramme de Pareto des effets normalisés.....	131
Figure 6.16 : Graphique des effets principaux.....	131
Figure 6.17 : Solution optimale pour neuf facteurs.....	132
Figure 6.18 : Graphique de Pareto des effets normalisés.....	133
Figure 6.19 : Représentation des effets standardisés en tant que partie imaginaire.....	136
Figure 6.20 : Graphique des effets principaux.....	136
Figure 6.21 : Graphique d'optimisation «Solution 1».....	137
Figure 6.22 : Graphique d'optimisation «Solution 2».....	138

Liste des tableaux

Tableau 4.1 : Données géométriques de l'élément portant le rotor Nelson.....	70
Tableau 4.2 : Rigidité des paliers hydrodynamiques (N/m).....	71
Tableau 4.3 : Vitesses critiques.....	72
Tableau 4.4 : Formes de modes et précession de formes. Rotor Nelson.....	74
Tableau 4.5 : Données géométriques de l'élément portant le rotor kit.....	82
Tableau 4.6 : Formes des modes et précession des formes. (Rotor kit).....	84
Tableau 4.7 : Données géométriques de l'élément portant le lalanne.....	86
Tableau 4.8. Les valeurs des premières vitesses critiques.....	87
Tableau 4.9 : Formes des modes et précession des formes. (Rotor lalanne).....	88
Tableau 5.1 : table des signes \pm de Plackett et Burman.....	100
Tableau 5.2 : Exemple de conception Plackett-Burman en 12 étapes.....	102
Tableau 6.1 : Pistes utilisées dans le DOE.....	110
Tableau 6.3 : Plan Plackett-Burman basé sur la matrice expérimentale.....	114
Tableau 6.2 : Analyse de variance (ANOVA) du modèle de régression de Plackett-Burman.	115
Tableau 6.3 : Pistes utilisées dans le DOE.....	116
Tableau 6. 4 : Effets et coefficients estimés pour la fréquence (unités codées).....	117
Tableau 6.5 : Analyse de la variance pour la fréquence (unités codées).....	117
Tableau 6.6 : Observations inhabituelles pour la fréquence.....	127
Tableau 6.7 : Plan Plackett-Burman basé sur la matrice expérimentale	122
Tableau 6.8: Régression factorielle: FRQ img versus d1; d2; d3; d4; Kg; Cb; Db; Kyy; Kzz.	125
Tableau 6.9: Régression factorielle: FRQ réel versus d1; d2; d3; d4; Kg; Cb; Db; Kyy; Kzz.	126
Tableau 6.10 : Les analyses utilisées dans DOE.....	127
Tableau 6.11 : Régression factorielle : FRQ img par rapport à d1 ; d2 ; d3 ; d4 ; Kg ; Cb ; Db ; Kyy ; Kzz	128
Tableaux 6.12: Régression factorielle: FRQ réelle versus d1; d2; d3; d4; Kg; Cb; Db; Kyy; Kzz	129
Tableau 6.13. Plan Plackett-Burman basé sur la matrice expérimentale.....	133
Tableau 6.14: Les analyses utilisées dans DOE.....	134
Tableau 6.15 : Coefficients de régression estimés pour la fréquence imaginaire FRQ img après exclusion des termes non significatifs (unité codée).	135
Tableau 6.16 : La valeur du facteur avant l'optimisation.....	137
Tableau 6.17 : La valeur des facteurs après optimisation.....	137

Introduction Générale

Introduction Générale

Les machines tournantes occupent une place importante dans l'industrie et ont des utilisations très diverses (centrales de production d'énergie, stations de pompage, systèmes de propulsion, machines-outils, voitures, équipements médicaux, accessoires domestiques et bien d'autres domaines). Dans toutes ces machines, les paliers hydrodynamiques sont les éléments de base utilisés pour le guidage ou le support des rotors. Ils sont généralement alimentés en fluide lubrifiant, issu d'un réservoir externe, au moyen d'orifices ou de rainures.

Les machines de conception ancienne, datant de quelques décennies, se caractérisaient par des formes massives et de faible vitesse de rotation. Pour répondre à des contraintes de coûts toujours plus sévères et aussi pour améliorer les performances de leurs machines, les constructeurs ont été amenés à réduire les masses en mouvement et augmenter les vitesses de fonctionnement. Une des premières conséquences de ces modifications est la sensibilité plus grande des machines modernes aux problèmes vibratoires aux niveaux des paliers et de la structure. Parmi les phénomènes vibratoires qui affectent les machines tournantes, ceux inhérents aux balourds ont été les premiers à se manifester.

L'amélioration des techniques d'équilibrage a permis de les résoudre en partie, mais de nouveaux types de vibration, liés non seulement à la partie tournante, mais au couplage partie tournante-support, ont alors été mis en évidence. En particulier, certaines instabilités aux conséquences dramatiques constatées sur des lignes d'arbre reposant sur des paliers hydrodynamiques ne peuvent s'expliquer que par la présence de paliers de ce type. Un grand nombre de lignes d'arbre reposent sur des paliers hydrodynamiques. La connaissance du comportement dynamique de ces paliers est indispensable pour la conception des machines tournantes. Compte tenu des difficultés, tant sur le plan technique que sur le plan financier, rencontrées dans la détermination expérimentale des caractéristiques de ce type d'appuis, des approches théoriques ont été envisagées. Celles-ci ont connu un essor considérable avec le développement des moyens de calcul et des méthodes numériques telles que les différences finies et, plus récemment, les éléments finis.

Les développements technologiques imposent des conditions de fonctionnement de rotors de plus en plus sévères : les vitesses de rotation, les puissances et les charges prennent des valeurs de plus en plus grandes. Ainsi, le rôle des paliers dans le comportement de la ligne d'arbre doit être considéré avec le plus grand soin.

L'étude du comportement dynamique des paliers hydrodynamiques s'appuie sur deux types de modélisation : linéaire et non linéaire.

La modélisation linéaire ne permet pas de prévoir le comportement d'une ligne d'arbre au-delà du seuil de stabilité ou sous l'effet de fortes charges dynamiques. Dans ces conditions, il est alors nécessaire de résoudre simultanément l'équation de Reynolds en régime dynamique et les équations du mouvement de l'arbre dans le palier (problème d'interaction fluide visqueux-structure ou problème couplé), par un calcul pas à pas dans le temps.

L'objectif de ce travail est l'analyse harmonique du rotor effectuée pour identifier la fréquence à travers la variation des diamètres par la conception de l'optimisation (DOE).

Trois exemples différents ont été successivement étudiés : un rotor à un disque unique (rotor Nelson), un rotor à deux disques (rotor kit), et enfin un rotor multi-disques (rotor Lallanne). Dans le DOE, deux niveaux ont été utilisés avec total des diamètres comme paramètres, facteurs de rigidité et dimensions des paliers, qui ont abouti à quarante-huit passages, dans le premier cas et deuxième cas, et vingt passages, dans le troisième cas conformément au plan de conception de Plackett-Burman (PBD). Les graphes des effets de Pareto et les effets principaux ont été étudiés pour identifier l'influence de la rigidité et des diamètres responsables de la production d'effets majeurs sur la fréquence où nous avons trouvé que la rigidité responsable d'un effet significatif sur la fréquence avait une influence sur le comportement dynamique des machines tournantes.

Ce travail est divisé en six parties :

Le premier chapitre est consacré à la synthèse bibliographique, mentionnant l'histoire des paliers hydrodynamiques et donnant un aperçu des travaux antérieurs menés pour étudier le comportement dynamique des paliers hydrodynamiques.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les différents types de paliers utilisés pour le guidage des lignes d'arbres de machines tournantes. Le choix d'un type de palier est une décision qui doit être prise dans la première phase du processus de conception. (Généralité des paliers hydrodynamiques).

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des équations de base de la lubrification hydrodynamique en régimes d'écoulement laminaire ainsi que les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites utilisées pour la résolution de l'équation de Reynolds.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons une étude du comportement dynamique des rotors.

- ✓ Effets des paliers hydrodynamiques sur la dynamique du rotor.
- ✓ Nous déterminons les fréquences propres du rotor, la rigidité en fonction de la vitesse de rotation, le diagramme Campbell, le diagramme d'instabilité, le diagramme de rapport d'amortissement, la forme des modes...

Dans le cinquième chapitre, nous présentons la méthode de conception expérimentale, la méthodologie sur la manière de mener des expériences et de les planifier pour extraire autant d'informations que possible avec un nombre minimal d'analyses.

Enfin, dans le sixième chapitre, nous étudions l'influence de la rigidité des paliers hydrodynamiques sur le comportement dynamique des turbomachines à travers la conception de Plackett-Burman.

Chapitre 1
Etat de l'art

Chapitre 1. Etat de l'art

1. Introduction

Machines tournantes telles que les pompes, les compresseurs, les ventilateurs, les turbines et les générateurs sont omniprésents dans les milieux industriels. Les paliers à film fluide conviennent aux applications à vitesse élevée et à charges élevées, généralement supérieures à une vitesse de surface de 90 m / s et avec des paliers spécifiques de charges de 700 kPa – 3,5 MPa. Dans ces paliers hydrodynamiques, l'action est utilisée pour soutenir le rotor sur un lubrifiant à mince film. Les épaisseurs de film typiques entre le rotor et la surface d'appui sont de l'ordre de 100 μm . Cela comparé à des diamètres d'arbre de l'ordre de 25mm à 1 m, menant taux de jeu diamétral typiques des paliers à film fluide de 1-2 $\mu\text{m} / \text{m m}$, avec les vitesses de rotation pour les applications à grande vitesse, les débits de lubrification sont à la plus basse fin du régime turbulent pour les lubrifiants à base d'huile. Il n'y a pas de numéro de Reynolds unique accepté correspondant à l'apparition de turbulence dans la lubrification des paliers.

La littérature antérieure indique, le début de la turbulence étant supposé se produire sur une plage de Re de 1000 à 1500. Quelques applications utilisent de l'eau ou un autre fluide de procédé à faible viscosité comme palier lubrifiant, ce qui entraîne une lubrification très turbulente coulée. Les solutions de Reynolds et Sommerfeld étaient pour le champ de pression et forces nettes de l'huile de lubrification film. La plupart des analystes de l'époque considéraient que le rotor était simplement supporté aux paliers. Pour la compréhension et l'amélioration de la réponse linéarisée des paliers, les chercheurs définissent les effets de rigidité et d'amortissement équivalents fournis par le film lubrifiant.

2. Histoire des paliers hydrodynamiques

Les turbomachines sont largement utilisées dans de nombreux processus industriels. La cause la plus courante de vibration dans les turbomachines est le déséquilibre de masse de turbulence. Les forces centrifuges sont transférées à la machine et au système de support de fondation. Ces forces peuvent être utilisées dans la même zone et d'autres peuvent être utilisées à proximité. L'utilisation de procédures mathématiques pour analyser le comportement dynamique des turbomachines a fourni des données importantes pour les premières étapes de la conception d'une machine. Le modèle cyclique repose généralement sur un modèle simplifié du système de support, qui n'explique généralement pas les coefficients de force dynamique pour la charge hydrodynamique.

Les premiers travaux sur le palier hydrodynamique sont ceux de Hirn [1] en 1854, dans lesquels, il bouscule la référence établie par les lois de Coulomb.

Towers B. [2] en 1883, découvre l'existence d'une répartition de pression entre les surfaces de l'arbre et du coussinet d'un palier de wagon de chemin de fer. A partir des travaux de Towers, Reynolds définit le phénomène de portance hydrodynamique. Lorsqu'il entre dans le convergent, le lubrifiant qui adhère aux surfaces en mouvement du palier, génère un champ de pression capable de supporter une charge radiale importante. Sur la base des équations de Navier-Stokes, cette théorie est mise en équation par Reynolds [3] en 1886. Elle permet le calcul de la répartition de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant et constitue, ainsi, la base de la théorie de la lubrification actuelle.

Dans un récent article, Jean Frêne [4] a résumé les progrès réalisés dans le domaine de la tribologie depuis l'antiquité jusqu'au XXème siècle. En 1905, Anthony George Maldon Michell (1870-1959) obtient, à l'aide de développements limités, la solution de l'équation de Reynolds dans le cas d'une butée de largeur finie. En 1904, Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951) utilise un changement de variables judicieux et présente une solution analytique à l'équation de Reynolds dans le cas du palier infiniment long $dp/dz=0$.

En 1914, Ludwig Karl Friedrich Gumbel (1874-1923) propose pour le calcul de la charge dans le palier de ne prendre en compte que la partie positive de la pression et de négliger toute la zone où la pression est négative. La charge ainsi calculée est évidemment erronée.

Les premières tentatives pour quantifier la réponse dynamique du film lubrifiant lui-même ont été faites par Stodola [5] et par son étudiant Hummel [6] en 1926. Stodola et Hummel ont pu obtenir une solution pour la rigidité du film d'huile et correctement obtenus, linéarisés analytiquement directs et croisés termes de rigidité basés sur le Sommerfeld fermé. Cependant, ils n'ont pas reconnu l'effet d'amortissement du film d'huile et ses prévisions ont indiqué qu'un rotor instable aurait des niveaux de vibration et cela a augmenté sans limite. Ceci est une limitation de l'analyse linéaire qui ne prend pas en compte le comportement non linéaire du film d'huile lors de grandes excursions ou considérations pratiques telles que le contact entre le rotor et le stator. Hummel a reconnu dans sa thèse que la vibration du rotor restait finie mais ne fournissait pas de mécanisme spécifique.

En 1931, Albert Kingsbury (1863-1943) obtient une solution approchée à l'équation de Reynolds, en utilisant une méthode analogique basée sur la similitude existante entre l'équation de Reynolds et l'équation qui décrit la loi de variation de la tension électrique dans un milieu résistif.

En 1932, Herbert Walker Swift (1894-1960) [7] puis W. Sieber en 1933 présentent indépendamment des conditions aux limites à la sortie du film plus représentatives de la réalité. Ces conditions, qui respectent la continuité du débit à la sortie du film, sont dites conditions aux limites de Reynolds et sont universellement utilisées aujourd'hui pour le calcul des paliers soumis à des charges constantes. Une méthode numérique de résolution de l'équation de Reynolds utilisant ces conditions a été proposée par Christopherson [8] dès 1941.

Fred William Ocvirk (1913-1967) [9], présente, en 1953, une méthode approchée pour le calcul des paliers courts. Il propose de négliger, dans l'équation de Reynolds, le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. La solution est analytique et utilise les conditions aux limites de Gumbel. Les résultats obtenus sont pratiquement exacts pour des paliers dont le rapport L/D de la longueur au diamètre est inférieur à 0,25. Cependant, cette méthode est encore utilisée aujourd'hui, dans le cas de charges variables, pour des paliers de rapport L/D de l'ordre de 0,5, car elle simplifie considérablement les calculs. En 1949, les premières solutions numériques ont été proposées par Cameron et Wood, puis par Pinkus, Raimondi et Boyd en 1958.

Sternlicht [10] a, en 1959, présenté une solution aux différences finies pour l'équation de Reynolds basée sur un lubrifiant isovisqueux. La solution de différence finie a été utilisée pour calculer la valeur développée au champ de pression, qui a ensuite été intégré pour calculer les forces. La solution de force a ensuite été perturbée pour déterminer huit coefficients de rigidité et d'amortissement basés sur le mouvement du rotor au palier. Ces huit coefficients sont largement acceptés comme un modèle approprié pour les paliers lisses à géométrie fixe où l'inertie temporelle n'est pas importante.

Les solutions à l'équation de Reynolds perturbée ont également commencé à apparaître dans les manuels scolaires, y compris ceux de Smith [11], Pinkus et Sternlicht [12] en 1961 et Tondl [13] en 1965. Le traitement de Smith du sujet était bref, mais incluait les huit raideurs et les coefficients d'amortissement. Pinkus et Sternlicht ont examiné la stabilité des rotors supportés dans des tourets simples, mais les solutions ont été effectuées en coordonnées polaires.

Les analyses de rotordynamiques modernes sont effectuées en coordonnées cartésiennes pour la simplicité et pour la comparaison directe des mesures de vibrations. Le texte de Tondl était une enquête sur les diverses sources d'instabilité des rotors dynamiques, dont les paliers à géométrie fixe ont été un contributeur important. Le traitement de Tondl est pris en compte pour la rigidité directe, l'amortissement direct et les termes de rigidité croisée. Son enquête comprenait un traitement de l'équation de Reynolds perturbée pour les vibrations linéaires et non

linéaires du rotor. Tondl a également considéré les avantages des profils de stator à palier à géométrie fixe non circulaire, y compris les paliers à lobes.

En 1971, Booker [14] a appliqué numériquement sa méthode au cas des paliers de révolution (palier court ou palier de longueur finie). Le calcul est direct et ne nécessite pas d'itération sur la vitesse d'écrasement et sur la vitesse de rotation de la ligne des centres par rapport à la direction de la charge. Ceci entraîne un gain de temps important tout en conduisant à des résultats précis.

En 1979, Nicholas et al [15] ont développé les coefficients de rigidité et d'amortissement pour le coussinet incliné à cinq patins. Plusieurs configurations de paliers ont été envisagées, notamment la charge sur le coussin et la charge entre les coussins, les différents décalages de pivot allant de 0,5 à 0,55 et différentes précontraintes des paliers de 0 à 0,5. Les coefficients de la rigidité et de l'amortissement effectifs rapportés ont été réduits de manière synchrone. La méthode des éléments finis a été utilisée pour produire des solutions à un seul tampon avec un assemblage semblable à celui de Lund [16] (1964).

Les coefficients d'amortissement et de rigidité réduits ont été tracés par rapport au nombre de Sommerfeld. Les effets d'inertie du tampon ont été négligés dans l'analyse. En 1979, Nicholas et Kirk [17] ont examiné plusieurs solutions fixes et des coussinets inclinables, y compris l'inclinaison à quatre et cinq plaquettes de coussinets, pour application aux compresseurs axiaux. Le coefficient de rigidité et d'amortissement réduits de manière synchrone a été utilisé pour les analyses de déséquilibre et de stabilité. Ce papier explore l'effet des tolérances de fabrication sur la performance des différents types de paliers. Pour une inclinaison à quatre pads, il a été démontré qu'un coussinet portant la rigidité réduite de manière synchrone varie de 50% et réduit l'amortissement de manière synchrone par un demi-ordre de grandeur en raison des tolérances typiques de la fabrication, bien que ce soit un cas extrême. Les variations de 10 % dans les coefficients dynamiques étaient plus typiques. L'effet de la précharge du palier sur la marge de stabilité du compresseur a été étudié et la précharge inférieure déterminée a amélioré la stabilité car la rigidité des paliers a été réduite, permettant plus de mouvement pour que l'amortissement soit efficace. En 1982, La configuration à quatre patins pour les compresseurs axiaux a été explorée par Nicholas et Kirk [18] qui ont encore utilisé la réduction synchrone des coefficients dynamiques de paliers pour les deux réponses de déséquilibre et de marge de stabilité.

En 1982, Napel, Akker et Bosma, ont analysé le comportement d'un palier de pied de bielle d'un moteur diesel soumis à des charges très élevées. Les vitesses de rotation de ces paliers sont en fait des oscillations autour d'une position, la charge étant unidirectionnelle et la valeur minimum du film d'huile tendant vers 0 (valeur confirmée par des mesures). Des conditions de frottement mixte apparaissent alors avec des risques d'usure très importante.

En 1984, Goenka a donné des expressions analytiques des composantes du vecteur mobilité dans le cas du palier de longueur finie. Ces expressions, semblables à celles données par Moes, sont plus précises à hautes excentricités. Il a pu évaluer les positions optimales d'un trou ou d'une rainure d'alimentation en donnant les expressions de la pression maximale, connaissant sa position et les angles définissant la zone de pression.

En 1984, Tanneau [19], et à partir de la méthode de Booker, a déterminé l'influence de rainures circonférentielles médianes et partielles pour un palier de tête de bielle de compresseur. Les résultats montrent que la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet est uniquement modifiée dans la zone des rainures.

En 1986, Childs, Moes et Van Leeuwen ont développé une méthode utilisant le vecteur impédance (introduit par Blok) et le vecteur mobilité pour calculer les coefficients de raideur et d'amortissement dans le cas d'un palier de rotor en régime dynamique.

En 1986, Brewe a étudié l'évolution du mélange liquide-vapeur dans un palier sous charge dynamique. L'équation de Reynolds est résolue numériquement avec l'algorithme d'Elrod (utilisation d'un volume de contrôle). Il a pu déterminer, pour des conditions de cavitation non stationnaire, la « durée de vie » des bulles de vapeur. Le calcul donne des durées de vie des bulles de vapeur de 32ms, alors que des photographies à hautes résolutions ne les montrent que pendant 23ms.

En 1988, Knight et Barrett [20], ont présenté une analyse THD de quatre coussinets inclinables avec pivots centraux dans une charge sur configuration du pad. Aucun modèle de turbulence n'a été considéré dans le calcul des résultats. La solution était basée sur une solution finie élémentaire à l'équation de Reynolds classique combinée avec une solution de différence finie à l'équation d'énergie 2D. Une solution simultanée pour les pads a été développée. La viscosité effective de chaque patin était basée sur la température moyenne entre les couches pour chaque patin. Cette viscosité moyenne a ensuite été traitée comme constante dans la solution de Reynolds. Le transfert de chaleur à travers les coussinets a été traité comme radial de conduction et les températures de surface de l'arbre étaient basées sur la température moyenne globale du film. Les coefficients de portance complets calculés ont été réduits de manière synchrone pour la présentation des résultats. Comparé à un calcul isotherme, une différence de 10 à 35% en propriétés dynamiques a été signalée. Cela a démontré l'effet de la température et de la viscosité sur les coefficients de rigidité et l'amortissement.

En 1989, Brugier et Pascal [21] ont également étudié les paliers de coussinets inclinables pour les grands groupes de turbogénérateurs. Les relèvements envisagés avaient trois pads inclinables. Le modèle TEHD représentait des effets thermiques dans le lubrifiant ainsi que des déformations

mécaniques et thermiques des patins d'appui. Le modèle inclut une équation généralisée de Reynolds et une équation d'énergie similaire. La solution pour les coefficients dynamiques était basée sur la différenciation numérique et les perturbations d'arbre simulées dans le code. La description de la méthode d'extraction des coefficients n'était pas claire, mais les parcelles dans le papier sont compatibles avec les coefficients réduits synchroniquement. La solution a été obtenue en utilisant une technique de différence finie avec surexposition. Il n'y avait pas indication qu'un modèle de turbulence a été utilisé. Le papier a montré aussi une chute de la rigidité et de l'amortissement effectifs dus à la déformation du coussinet, qui agit comme un ressort en série avec le film de l'huile.

En 1989, Maspeyrot [22] a déterminé l'influence de certains défauts de forme (profil de l'arbre conique ou parabolique, désalignement constant) sur les caractéristiques d'un palier de tête de bielle d'un moteur diesel.

En 1990, Paranjpe et Goenka [23] ont appliqué l'algorithme de conservation de la masse à l'étude d'un palier de vilebrequin. Ce palier a été étudié d'abord sous charge statique puis sous charge dynamique. Les résultats obtenus par Paranjpe et Goenka avec l'algorithme de conservation de la masse ont été comparés à ceux obtenus avec les conditions aux limites de Reynolds.

En 1992, Vijayaraghavan et Brewster [24] ont étudié la stabilité d'un palier fonctionnant sous une charge dynamique périodique de type sinusoïdale.

En 1993, Vijayaraghavan, Brewster et Keith [25] ont étudié le palier de vilebrequin du moteur diesel Ruston et Hornsby avec un coussinet circulaire puis non circulaire (elliptique, semi-elliptique et à 3 lobes). La zone inactive et les effets d'inertie de la bielle sont pris en compte. Pour le palier circulaire, la hauteur minimale du film est plus importante que celle obtenue dans l'étude de Jones qui considère aussi les effets d'inertie.

En 1994 [26], Vincent a évalué les effets du type de rainure ainsi que la position de ces rainures sur les performances d'un palier de longueur finie sous charge statique et sous charge dynamique. Les deux types de rainures, axiales et circonférentielles, ont été étudiés. Pour le palier chargé dynamiquement, la méthode de mobilité de Booker a été utilisée pour la résolution numérique du problème. Cette même méthode a permis d'analyser des paliers de forme non circulaire [27].

En 1996, Wettergren et Olsson [28] démontrent également, à partir d'une étude paramétrique d'un modèle d'éléments finis simplifié, que des instabilités apparaissent pour certaines combinaisons de paramètres associés à un amortissement interne, un amortissement externe, une rigidité asymétrique des arbres et des paliers anisotrope / dissymétrique. Ensuite, l'utilisation de

modèles par éléments finis dans le domaine de la dynamique du rotor a été appliquée pour développer des modèles appropriés et a donné de très bons résultats [29-30] en 1979 et 2001. Ces modèles numériques sont maintenant utilisés pour concevoir des machines à fonctionner dans des limites acceptables. Les différents matériaux utilisés dans la construction des paliers et la capacité de charge, les valeurs de rigidité et les coefficients d'amortissement des paliers hydrodynamiques sont les plus importants du point de vue de la performance dynamique. Kiciński J. [31] en 2005.

En 2008, Sinou [32] a étudié la réponse d'un rotor non linéaire dynamique soutenue par les paliers à rouleaux. Il a étudié un système composé d'un disque avec un seul arbre, deux supports de palier flexibles et un palier à rouleaux. Il a trouvé la raison de l'excitateur est un déséquilibre. Pour cette étude, il a utilisé une méthode numérique nommée **Harmonic Balance Method**.

En 2008, Gasch [33] a étudié le comportement dynamique de rotor Laval (Jeffcott) avec une fissure transversale sur son arbre élastique, et développé les équations de mouvement non linéaires qui ont donné des indices importants sur le diagnostic de la fissure.

En 2008, Das et al [34] visaient à développer un contrôle actif des schémas de vibrations pour contrôler les vibrations transversales sur l'arbre du rotor résultant du déséquilibre et ils ont effectué une analyse du contrôle des vibrations et de la stabilité du système d'arbre à rotor qui a des excitateurs électromagnétiques.

En 2008, Villa et al [35] ont étudié l'analyse dynamique non linéaire d'un rotor déséquilibré flexible supporté par des paliers à rouleaux. A cette fin, ils ont utilisé la méthode d'équilibre harmonique. La stabilité du système a été analysée en termes de fréquence avec une méthode basée sur la complexité. Ils ont montré que la méthode de l'équilibre harmonique a réalisé la stratégie AFT et la solution harmonique très efficacement.

En 2008, Lei et Palazzolo [36] ont analysé un système de rotor flexible supporté par des paliers magnétiques actifs et synthétisé les diagrammes de Campbell, les formes valeurs propres pour optimiser les caractéristiques dynamiques du rotor et la stabilité à la plage de vitesse. Ils ont aussi étudié la vitesse critique du rotor, les formes de cas, les réponses de fréquence et réponses temps.

En 2009, Whalley et Abdul-Ameer [37] ont calculé la résonance du rotor, la vitesse critique et la fréquence de rotation d'un arbre dont le diamètre change de longueur, en utilisant les bases de la méthode de réponse harmonique.

Dans son article paru en 2010, Gurudatta [38] a présenté une procédure alternative appelée analyse harmonique pour identifier la fréquence d'un système par le biais de graphiques d'amplitude et d'angles de phase. Pour effectuer une telle analyse, le déséquilibre qui existe dans tout rotor en raison de l'excentricité a été utilisé comme excitation. Le langage de conception paramétrique ANSYS a été mis en œuvre pour atteindre les résultats.

Dans son article édité en 2012, Taplak [39] a utilisé un programme nommé Dynrot pour effectuer une analyse dynamique et l'évaluation des résultats. A cette fin, un rotor de turbine à gaz avec certaines propriétés géométriques et mécaniques a été modélisé et son analyse dynamique a été réalisée par le programme Dynrot.

En 2013-2014, RiteshFegade, Vimal Patel et al. [40-41] ont étudié, dans leur article, l'analyse harmonique du rotor effectuée pour identifier la fréquence par la variation de diamètre par conception d'optimisation (DOE) et la conception paramétrique ANSYS. Ajoutons à cela une autre recherche d'une procédure alternative appelée analyse harmonique pour identifier la fréquence d'un système à l'aide de courbes de vitesse critique, d'amplitude et d'angle de phase utilisant ANSYS.

En 2016, Kun Li et al. [42] ont proposé une méthode de laboratoire basée sur l'équivalent de la reconstruction de charge dynamique pour l'identification des coefficients de film d'huile. Lors de la modélisation du rotor, les supports du film d'huile sont considérés comme sa limite de charge dynamique. Par conséquent, l'identification des coefficients du film d'huile est d'abord convertie à la reconstruction de charges dynamiques équivalentes. Grâce à la méthode de fonction de Green et la régularisation, les charges dynamiques équivalentes de film d'huile peuvent être reconstruites régulièrement et avec précision. Ensuite, selon les relations mécaniques entre les propriétés du film d'huile et les charges équivalentes correspondantes, la rigidité du film d'huile et les coefficients d'amortissement sont identifiés à l'aide du schéma des moindres carrés. Une structure de rotor avec deux paliers lisses est étudiée et les résultats d'identification des coefficients du film d'huile démontrent la validité et la précision de la méthode proposée.

De plus, en 2017, ŁukaszBreńkacz et al [43] décrivent la Recherche expérimentale. Les signaux de déplacement ont été montrés dans les paliers et les forces d'excitation utilisées pour déterminer la dynamique du porteur. L'étude discutée dans cet article concerne le rotor soutenu par deux actionneurs hydrodynamiques travaillé de manière non linéaire. Sur la base de calculs, les résultats des transactions dynamiques ont été présentés pour une vitesse spécifique.

En 2018, Fulaj et al. [44] expliquent dans leur recherche comment obtenir les vitesses critiques du système porte-rotor. Un modèle mathématique pour la colonne flexible a été développé avec un rotor en acier en utilisant un élément technique spécifique. Ce modèle a été utilisé pour obtenir des vitesses critiques dans MATLAB.

Chapitre 2
Généralités des paliers hydrodynamiques

Chapitre 2. Généralités des paliers hydrodynamiques

2.1. Introduction

Le problème du comportement des paliers est aussi une préoccupation majeure pour les fabricants de machines tournantes. Dans le cas des transmissions « haute-puissance », les industriels font souvent recours aux paliers pour le support des lignes d'arbres. Le choix d'un type de support des paliers est une décision qui doit être prise dans la première phase du processus de conception. Le palier est un support ou guide qui détermine la position d'une pièce mobile par rapport aux autres pièces d'un mécanisme. [45]

Essentiellement, ce chapitre a pour vocation d'établir une représentation des différents supports utilisés par les industriels pour le guidage de ces fameuses lignes d'arbres des machines tournantes.

Les principaux supports qu'on retrouve dans la pratique sont les suivants :

- Les paliers et les butées fluides (hydrodynamiques, hydrostatiques et hybrides).
- Les paliers secs.
- Les paliers poreux.
- Les paliers magnétiques.

Une attention toute particulière sera portée sur les paliers dits « Hydrodynamiques ».

2.2. Les paliers hydrodynamiques :

Dans un palier HD, les surfaces sont complètement séparées par un fluide visqueux, la géométrie du palier ainsi que le déplacement relatif des surfaces donnent naissance à une pression dans le film lubrifiant. [46]

Ce type de paliers est conçu pour fonctionner dans des conditions sévères (charges et fréquences de rotations élevées). Par conséquent, pour remplir leur fonction dans de parfaites conditions, les paliers hydrodynamiques doivent être soigneusement conçus. [45]

On distingue deux types de configuration de paliers hydrodynamiques :

- Les paliers à géométrie fixe.
- Les Paliers à géométrie variable.

2.2.1. Les paliers à géométrie fixe

2.2.1.1. Les paliers lisses cylindriques

L'utilisation de ce type de paliers est assez fréquente. Les plus basiques comportent un arbre tournant à l'intérieur d'un coussinet complet (amplitude angulaire 360°). Un film lubrifiant sépare totalement ces deux éléments (Figure 2.1). Ils sont utilisés dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les réducteurs, les alternateurs... etc. [45]



Figure 2.1 : Coussinets. [45]

Les paliers lisses cylindriques sont regroupés en trois types, et ceci, selon leur diamètre. On distingue ainsi : les paliers infiniment courts, les paliers infiniment longs et enfin les paliers de longueur finie. [47]

A- Les paliers courts

Un palier est court si le rapport de sa longueur au diamètre (L / D) est de faible valeur ($L / D < 0,125$). Le calcul de ce type de paliers est assez simple si l'on pose l'hypothèse d'un gradient de pression circonférentiel négligeable. [47]

B- Les paliers infiniment longs

Lorsque le rapport (L/D) prend une grande valeur, on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonférentiel. Ce calcul concerne les paliers pour lesquels $L/D > 4$. L'hypothèse posée pour les paliers infiniment longs est celle d'un gradient de pression axial négligeable devant celui de pression circonférentiel. [47]

C- Les paliers de longueur finie

On considère qu'un palier est de longueur finie dans le cas où le rapport L/D est compris entre 0,125 et 4. Dans les deux cas précédents, il s'agit de configurations extrêmes. Le palier de longueur finie est le plus apte à donner une configuration réelle du palier. Les résultats qui peuvent être obtenus sont plus proches de la réalité que ceux obtenus à partir des deux types précédents car pour le calcul du pas de la longueur spécifiée, les hypothèses de simplification ne sont pas prises en compte. [47]

- Principe de fonctionnement

Le fonctionnement du palier est directement lié au débit du film. L'apparition de ce débit est provoquée par l'adhérence du fluide lubrifiant en film mince aux parois en mouvement. [47]

La mise en route du palier nous permet d'observer trois phases distinctes et qui sont représentées dans la Figure 2.2. Les points O_a et O_c correspondent respectivement aux centres de l'arbre et du coussinet. Quant à la charge extérieure appliquée à l'arbre, elle est notée par W . [46]

Phase 1 : À l'arrêt (Figure 2.2.), il y a contact entre l'arbre et le coussinet. La génératrice commune s'oppose à la charge et la distance $O_a O_c$ est égale au jeu radial C . [47]

Phase 2 : Au démarrage (Figure 2.2), l'arbre roule tout en glissant à l'intérieur du coussinet, la lubrification suit un régime mixte et le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet.

Phase 3 : Une fois que la vitesse de rotation atteint une valeur suffisante (Figure 2.2.), on voit apparaître un champ de pression hydrodynamique supportant la charge constante P et le centre de l'arbre O_a occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet. [47]

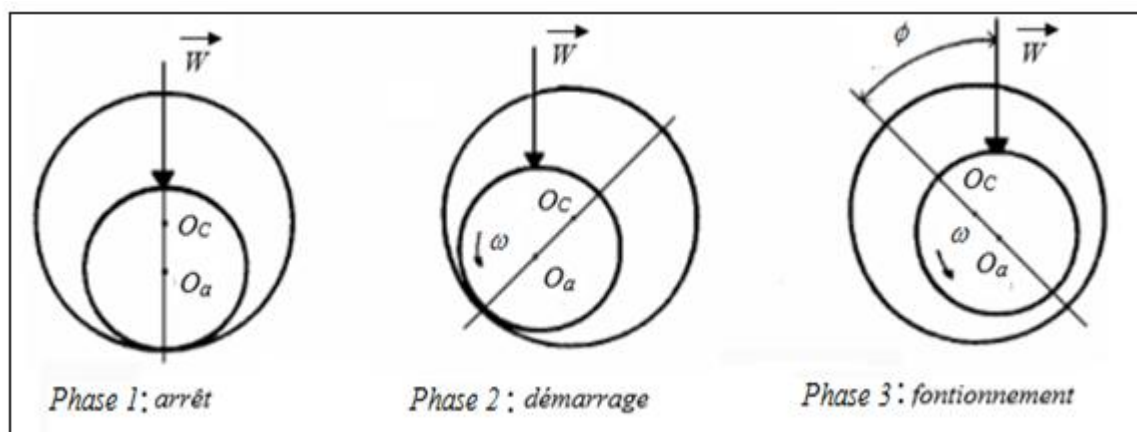


Figure 2.2 : phases de fonctionnement d'un palier lisse. [47]

Dans le cas où le torseur des forces est réduit à une force unique W agissant dans le plan de la section médiane du palier, l'axe de l'arbre et celui du coussinet seront parallèles.

La distance $e = |O_a O_c|$, appelée excentricité, ainsi que l'angle de calage (angle que fait la direction de la charge W avec la ligne des centres $O_a O_c$) sont deux paramètres pris en compte afin de bien positionner O_a par rapport à O_c . [45]

- Caractéristiques géométriques

L'arbre de rayon R_a et le coussinet de rayon R_c et de longueur L sont les deux éléments qui composent un palier lisse. On peut donc schématiser ce type de palier par deux cercles de rayons voisins, comme le montre la figure 2.3. [45]

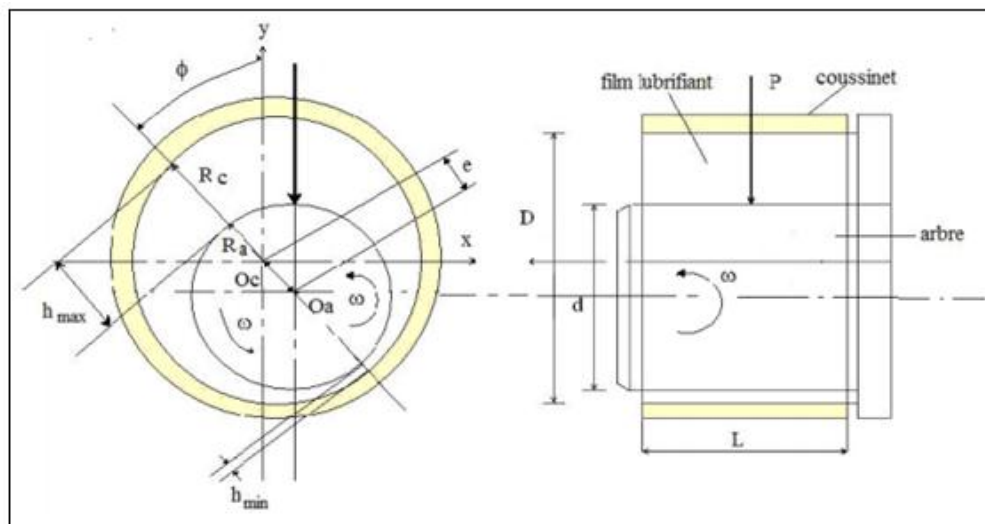


Figure 2.3 : Caractéristiques de fonctionnement du palier hydrodynamique. [47]

Un palier lisse est donc caractérisé par trois grandeurs :

- Le jeu radial $C = R_c - R_a$
- Le jeu relatif (C/R) est de l'ordre de 0,001.
- Le rapport (L/D) de la longueur au diamètre du palier.

- Caractéristiques de fonctionnement d'un palier lisse

Les caractéristiques de fonctionnement d'un palier lisse sont influencées de manière assez significative par la position, la forme des rainures d'alimentation et la pression d'alimentation. Il existe deux types classiques de rainures : les rainures axiales et les rainures circonférentielles.

- **Rainures axiales :**

Du point de vue du remplissage en huile du palier, pour les charges fixes en direction, la position la plus favorable pour la rainure axiale est située légèrement en aval de la génératrice pour laquelle l'épaisseur du film est maximale. Néanmoins, vu que la position de la ligne des centres, repérée par l'angle de calage est, pour un palier donné, fonction de la charge, de la vitesse et de la viscosité du lubrifiant, cette rainure est située dans une zone comprise entre 90° et 135° en amont de la charge. Deux rainures d'alimentations, diamétralement opposées à 90° de la direction de la charge, peuvent être envisagées, au cas où le sens de rotation ne serait pas fixe (Figure 2.4). Dans certaines situations, la présence d'une seconde rainure peut être justifiée par des considérations thermiques : ainsi le rôle de cette rainure sera de limiter la recirculation du fluide chaud et donc de mieux refroidir le palier. [46]

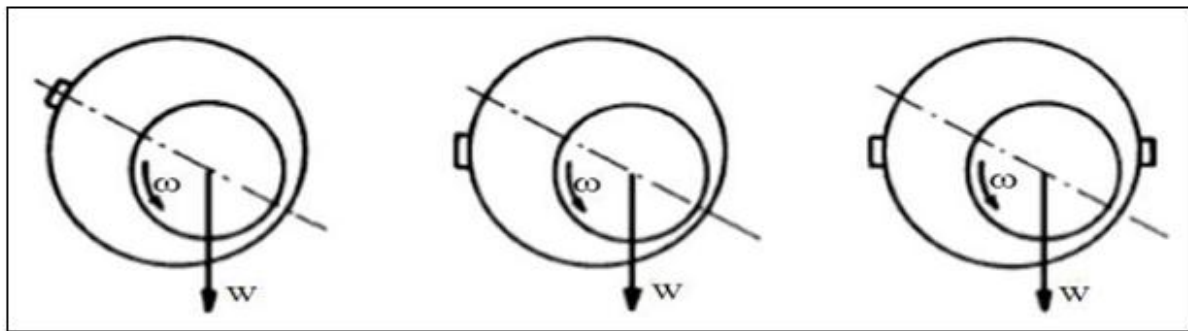


Figure 2.4 : Position des rainures axiales. [46]

- **Rainure circumférentielle :**

On a recours à ce type de rainures lorsque la charge est variable en direction. La rainure circumférentielle est généralement placée dans la section médiane du palier. Ce type de rainure diminue sensiblement la charge portante car elle substitue deux paliers de longueur $L' < L/2$ à un palier de longueur L (Figure 2.5). Aussi, des rainures circumférentielles d'amplitude limitée ou même des trous sont utilisés sur certains paliers de bielles de moteurs thermiques. [46]. En pratique, la géométrie du palier, la forme et le positionnement des rainures peuvent être plus complexes. Les paliers à section non circulaire ou les paliers à rainures multiples (Figure 2.6) sont plus stables du point de vue vibratoire mais leur capacité de charge est réduite. [46]

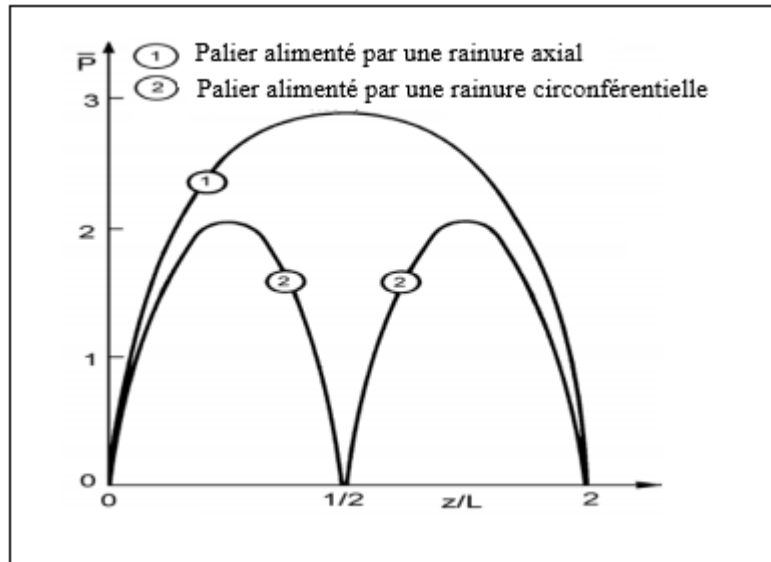


Figure 2.5 : Variation de la pression en fonction de la coordonnée axiale z . [46]

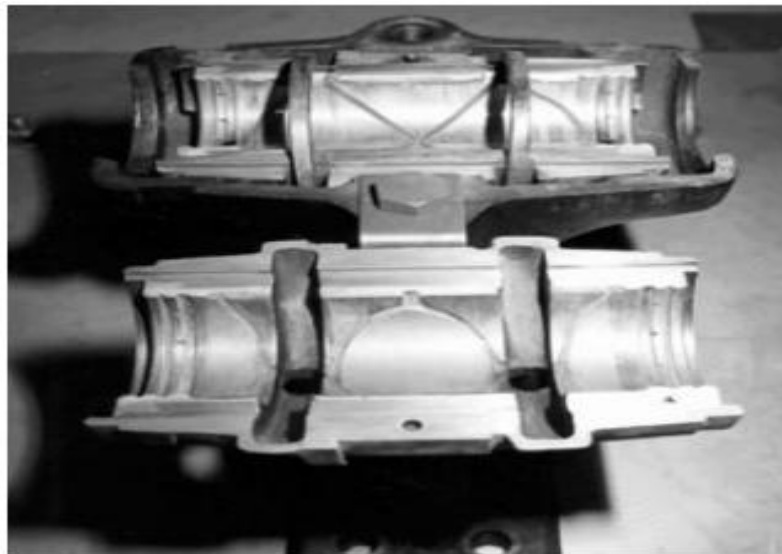


Figure 2.6 : Palier à rainure circumférentielle. [46]

- Avantages et inconvénients des paliers lisses : [46]

Parmi les multiples avantages que présentent les paliers lisses, on peut citer :

- 1- Insensible aux chocs et aux vibrations à cause de leurs grandes surfaces porteuses amortissantes lubrifiées
- 2- Silencieux.
- 3- Insensibles à la poussière.
- 4- Grande vitesse de rotation.
- 5- Durées de vie illimitée dans le domaine de frottement liquide.
- 6- Montage et démontage faciles des arbres lorsqu'il s'agit de coussinets fractionnés.

Les paliers lisses présentent aussi des inconvénients qui sont les suivants :

- 1- Grande quantité d'huile nécessaire pour la lubrification.
- 2- Surveillance permanente.
- 3- Rendement moins élevé que celui des roulements.

2.2.1.2. Les paliers à arc partiel

Les observations de paliers lisses cylindriques ou à arc partiel faiblement chargés à vitesses élevées ont permis de constater que ces deux types de paliers présentent de grands risques d'instabilité. En 1934, surgit l'idée qui consistait à améliorer la stabilité du palier en modifiant son profil de façon à augmenter l'excentricité de fonctionnement, c'est-à-dire de la précharge. En effet, Newkrik et Grobel ont réussi à démontrer expérimentalement que l'existence d'une discontinuité dans la géométrie à la surface du coussinet avait le pouvoir d'améliorer la stabilité du palier. [46]

Le calcul d'un palier à arc partiel est similaire à celui d'un palier circulaire complet. La pression d'entrée du palier est imposée. La figure 2.7 représente la section droite d'un palier à arc partiel. O_a et O indiquent respectivement le centre de l'arbre et le centre géométrique du palier. O représente aussi, dans ce cas, le centre de courbure de l'arc partiel ou du lobe. [45]

Comme pour le palier lisse, deux paramètres sont nécessaires pour repérer le centre de l'arbre O_a vis-à-vis du centre de coussinet O qui sont e et φ .

Le début du lobe est repéré par l'angle α_1 , et sa fin par l'angle $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$, où β représente l'amplitude circonferentielle de l'arc. [45]

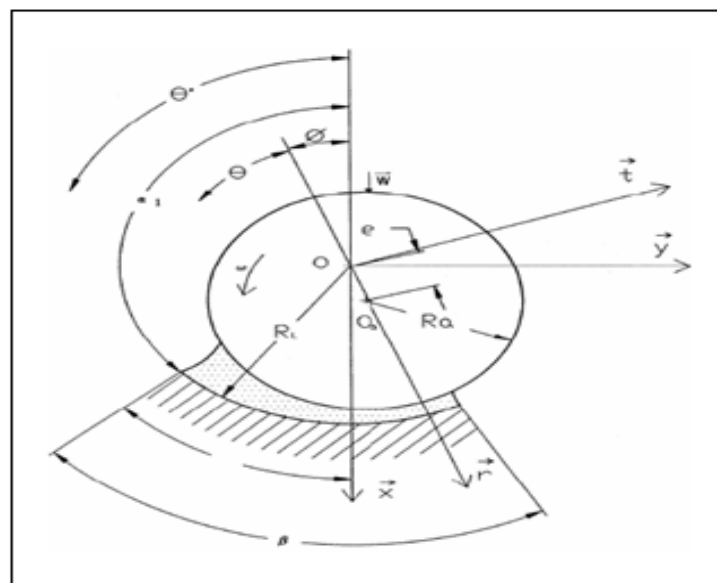


Figure 2.7 : Schématisation d'un palier à arc. [45]

2.2.1.3. Les paliers multilobes

La figure 2.8 représente un palier à trois lobes pour deux conditions de fonctionnement différentes : positions centrées (figures 2.8(a) et 2.8 (b)) et excentrée (figure 2.8 (c)).

Le coussinet est constitué de trois lobes d'amplitude circonférentielle β_i de longueur axiale L , de rayon de courbure RL et de centre de courbure O_i .

Les centres de courbure O_i des lobes sont situés sur un cercle de rayon a et de centre O , centre géométrique du palier. Le palier est dit précharge géométriquement d'une valeur a . Le rôle de cette précharge géométrique apparaît clairement sur les figures (2.8(a) et 8.2.8(b)) en position centrée. Il existe toujours une suite d'espaces convergent-divergent répartis autour de l'arbre, ce qui entraîne une succession de coins d'huile qui vont opposer une certaine résistance à tout déplacement du centre de l'arbre.

L'arbre étant en position centrée, on définit deux types de paliers à lobe selon le lieu de la ligne des centres O_iO vis-à-vis des lobes. Si cette ligne des centres est l'axe de symétrie du lobe, le palier est dit à lobes symétriques (figure 2.8 (a)). Dans le cas contraire, il est dit à lobes asymétriques (figure 2.8 (b)).

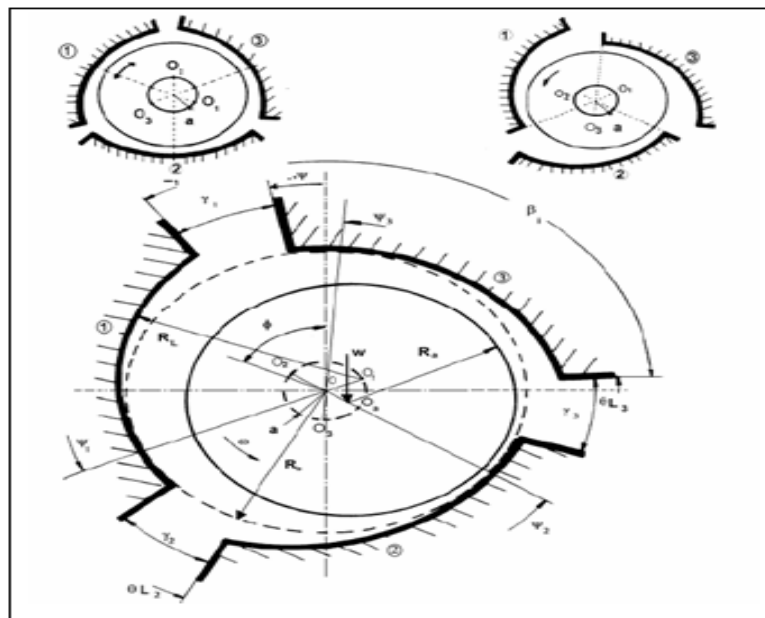


Figure 2.8 : Schéma d'un palier à trois lobes. [45]

A) Lobes symétriques (palier centré). B) Lobes asymétriques (palier centré).

C) Cas général : Palier excentré.

2.2.1.4. Les paliers à films amortisseurs

Ce type de paliers résulte du montage de l'ensemble rotor-roulement à bille dans un palier fluide (Figure 2.9). Le roulement assure le guidage en rotation de l'arbre, tandis que le palier joue le

rôle d'un amortisseur visqueux. Le mouvement de la bague extérieure du roulement dans le palier est réduit à une translation, grâce à la bague intermédiaire (fixe en rotation). [46]

Deux technologies de paliers à films amortisseurs peuvent être envisagées :

- Montage d'un ressort en parallèle avec le film amortisseur permettant de donner une certaine raideur au palier.
- Film amortisseur libre (sans ressort) :

Ce type de palier est essentiellement utilisé pour le guidage des rotors de turbines tournant à grandes vitesses. On peut citer l'exemple des turboréacteurs d'avions qui utilisent souvent des paliers à roulement au lieu des paliers à film amortisseur. [46]

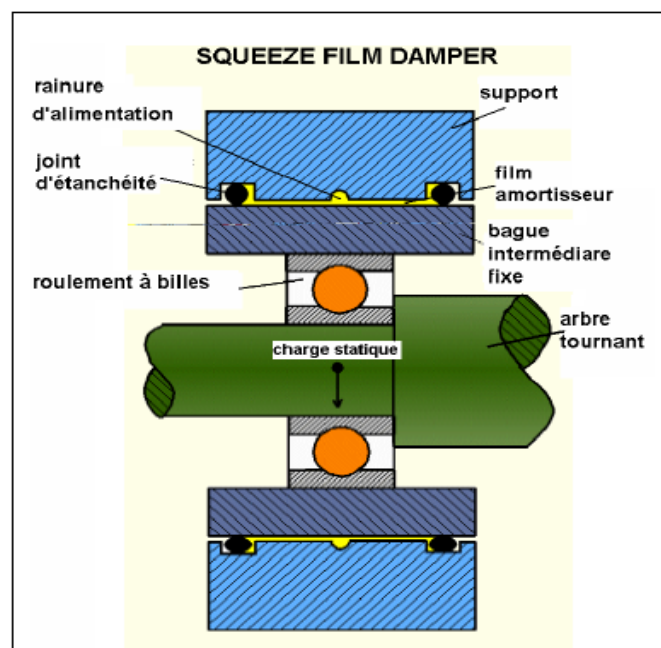


Figure 2.9 : Schéma de principe d'un palier à film amortisseur. [45]

2.2.2. Les paliers à géométrie variable

Communément appelées « paliers à patins oscillants », ces paliers sont réglables par leur mode de fonctionnement (figure 2.10). Ils sont composés de n patins, identiques ou non, individuellement articulés autour de pivots situés généralement sur un cercle appelé cercle des pivots. [45]

- Caractéristiques géométriques : [45]

Les principaux caractères sont :

- Le nombre de patins n .
- Le rayon de l'arbre R_a .
- Le rayon de cercle des pivots R_b .

- L'amplitude angulaire β , la largeur L , le rayon de courbure R_p , la masse équivalente de chaque patin ($M = I/R_p$), où I est le moment d'inertie du patin par rapport à son pivot.
- La position des pivots ψ_i .
- Le jeu d'usinage du patin $C_p = R_p - R_a$.
- Le rapport α/β qui définit la position angulaire du pivot.
- La distance a qui sépare le centre géométrique du palier du centre de courbure du patin.
- Le coefficient de précharge géométrique $m = a/C_p$.

Sous charge nulle, les centres de l'arbre O_a et du palier O sont confondus (figure 2.11.a). Si le coefficient de précharge géométrique m est nul, il n'y a pas de génération de pression hydrodynamique. Les patins sont alors en position d'équilibre. Par conséquent, il y a un risque de contact entre l'extrémité du patin et l'arbre. Par contre, lorsque le coefficient de précharge géométrique m est différent de zéro, tous les patins sont hydrodynamiquement chargés.



Figure 2.10 : Palier à patins oscillants. [45]

Le paramètre de précharge géométrique est donc très important puisqu'il assure, comme dans le cas des paliers à géométrie fixe, une bonne rigidité du système sous charge nulle. Lorsque le palier est chargé, l'arbre est excentré (figure 2.11.b). Les patins quant à eux tournent autour de leurs pivots. Ils occupent alors une position d'équilibre statique telle que l'action hydrodynamique exercée sur chaque patin passe par son pivot et que la résultante de toutes les forces F_i soit égale et opposée à la charge statique extérieure W_0 supportée par le palier. En régime dynamique, les patins peuvent suivre le mouvement de l'arbre, ce qui est à l'origine du palier.

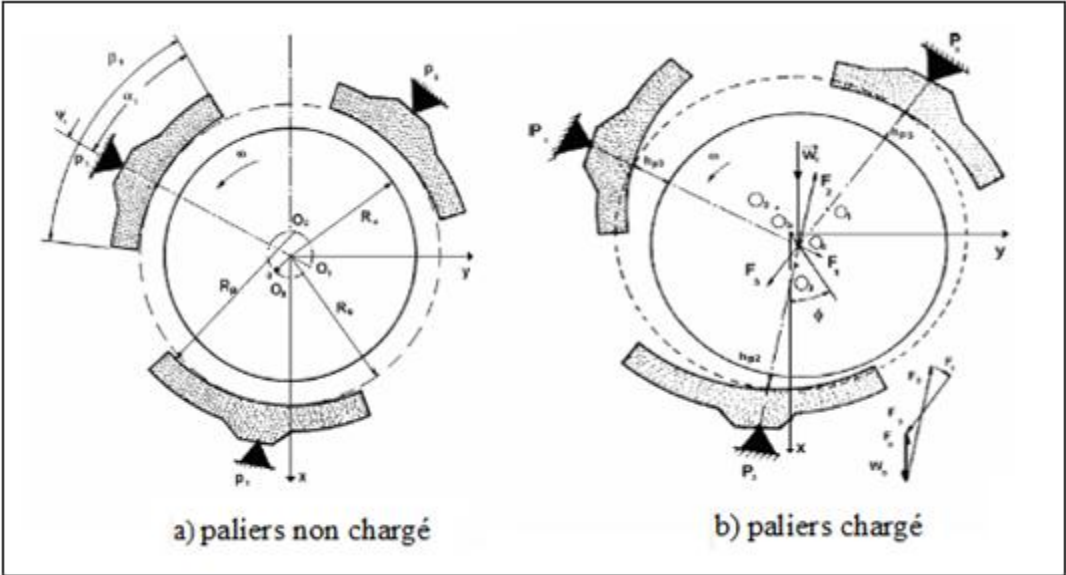


Figure 2.11 : Schématisation d'un palier à trois patins oscillants. [45]

Chapitre 3
Équations générales de la lubrification hydrodynamique

Chapitre 3. Équations générales de la lubrification hydrodynamique

3.1. Introduction

Dans le cas d'une lubrification hydrodynamique, le film de fluide de surface est complètement séparé, ce qui signifie que la rugosité et la déformation des surfaces ont des dimensions inférieures à l'épaisseur du film. La formation et le maintien d'un film liquide oblige la présence de pression dans ce film afin de rendre l'équilibre de charge appliqué entre deux surfaces du mécanisme. Cette pression est créée, lors de la lubrification des paliers hydrodynamiques par un système externe (pompes ou compresseurs), par le déplacement relatif des surfaces. Le calcul de cette pression permet de connaître l'étendue de la charge pouvant supporter le contact, le couple de frottement et le débit du mécanisme. Ainsi, pour déterminer les caractéristiques de fonctionnement du palier, il doit d'abord être nécessaire de calculer la pression dans le film. Cette dernière n'est obtenue que par la résolution de l'équation de Reynolds, qui nécessite d'établir quelques hypothèses et de définir les conditions aux limites concernant la pression et la température.

3.2. Equation de base de la lubrification hydrodynamique

3.2.1. Equation d'épaisseur du film lubrifiant

Considérons une section droite d'un palier aligné (figure 3.1.). Un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire $\theta = (\overrightarrow{O_c A}, \overrightarrow{O_c M})$. L'épaisseur du film d'huile est donnée par :

$$h = O_c M - O_c \dot{M} = R_c - O_c \dot{M} = R_a + C - O_c \dot{M} \quad \text{Avec} \quad C = R_c - R_a$$

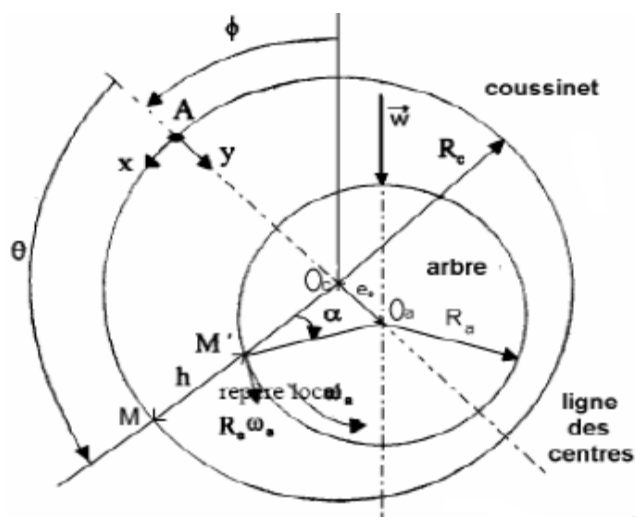


Figure 3.1 : Section droite du palier. [8]

En appliquant la règle des sinus au triangle, il vient $O_a M \cdot O_c$

$$\frac{O_a \dot{M}}{\sin(O_a O_c \dot{M})} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{R_a}{\sin(O_c O_a \dot{M})} = \frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin(\theta)}$$

D'où

$$\sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta$$

Et

$$O_c \dot{M} = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(O_c O_a \dot{M})$$

Or

$$(O_c O_a \dot{M}) = \theta - \alpha = \theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)$$

Donc

$$O_c \dot{M} = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right]$$

En développant le sinus, il vient :

$$O_c \dot{M} = R_a \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} = e \cos \theta$$

La quantité $e/R_a < C/R$ est très petite devant l'unité (de l'ordre de 10^{-3}). Cette quantité peut donc négliger le terme :

$$\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2 \text{ Devant } 1.$$

L'épaisseur du film s'écrit alors

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (3.1)$$

Soit sous forme sans dimensions

$$\bar{h} = \frac{h}{C} = (1 + \varepsilon \cos \theta)$$

Où l'excentricité relative $\varepsilon=e/c$ varie de 0 à 1.

Cette relation n'est valable que si $C/R \ll 1$

Si $\varepsilon=0$ l'arbre et le coussinet sont coaxiaux.

Si $\varepsilon=1$ il y a présence d'un contact entre les surfaces de l'arbre et du coussinet.

3.3. Équation de la mécanique des fluides

L'écoulement du fluide dans l'entrefer est régi par les équations de continuité, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

3.3.1. La loi de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (3.2)$$

3.3.2. La loi fondamentale de la dynamique

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho \cdot f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.3)$$

3.3.3. La loi de comportement rhéologique

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \tau) \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

Le taux de dilatation cubique s'écrit

$$\tau = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Le tenseur des taux de déformations est donné par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

3.4. Hypothèses simplificatrices

L'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux s'obtient en considérant que :

- Le milieu est continu - l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film.
 - Le fluide est Newtonien
 - L'écoulement est laminaire
- En régime non laminaire, il faudra utiliser une autre modélisation.
- Les forces massiques extérieures sont négligeables.
 - Les forces d'inertie sont négligeables,
 - Il n'y a pas de glissement entre le liquide et les parois de contact. La vitesse du fluide sur la paroi est égale à la vitesse de la paroi.
 - L'une des surfaces de contact est complètement plane et ne présente aucune rugosité, ce qui permet de situer l'origine des axes sur cette surface. Négligeant ainsi la courbure générale du contact.
 - Dans l'hypothèse de base de la lubrification l'épaisseur du film mesurée dans la direction $\overrightarrow{Ox_2}$ est toujours très faible devant les autres dimensions du contact.
 - La viscosité du fluide et la masse volumique ne varient pas à travers l'épaisseur du film.
- L'équation de Reynolds est déduite des équations de la mécanique des milieux continus appliquées à un fluide newtonien.

3.5. Les équations de Navier Stokes

3.5.1. Détermination des équations de Navier Stokes

En reportant l'équation de comportement rhéologique (3.4) dans l'équation de la dynamique (3.3) et en négligeant les forces massiques extérieures, on obtient les équations de Navier qui s'écrivent :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \quad (3.5)$$

Dans ces relations, (i) correspond à la direction considérée et (j) joue le rôle d'indice muet. En lubrification, la dimension suivant l'épaisseur du film ($\overrightarrow{O, x_2}$) est très faible par rapport aux deux autres, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de Navier, d'écrire :

$$\overline{x_1} = \frac{x_1}{L} \quad \overline{x_2} = \frac{x_2}{H} \quad \overline{x_3} = \frac{x_3}{L} \quad \overline{t} = \frac{tV}{L}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1}{V} \quad \bar{u}_2 = \frac{u_2 \cdot L}{VH} \quad \bar{u}_3 = \frac{u_3}{V}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

L/V est de l'ordre de grandeur du temps,

μ_0 et λ_0 sont deux coefficients de même ordre de grandeur. Ce changement de variable conduit à poser.

$$\bar{p} = p \frac{H^2}{\mu_0 VL} \quad \text{Il met en évidence les 3 nombres sans dimensions suivants :}$$

$$\Re = \frac{\rho_0 VH}{\mu_0} \quad \text{Nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de l'écoulement.}$$

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \quad \text{Paramètre d'échelle, qui, en lubrification, est de l'ordre de } 10^{-3}.$$

$$\frac{\lambda_0}{\mu_0} \quad \text{Le rapport des coefficients de viscosité, généralement de l'ordre de 1.}$$

Compte tenu de ces changements de variable, l'équation (3.5) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} = & \varepsilon \left[-\Re \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \left(\bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} \right) \right] + \\ & \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} + \varepsilon^2 \left[\frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} = & \varepsilon^2 \left\{ \varepsilon \left[-\Re \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_3^2} \right) \right] \right\} + \\ & \left(\bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \\ & 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_3} = & \varepsilon \left[-\Re \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \left(\bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$-\mu \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_2^2} + \varepsilon'^2 \left[\frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \varepsilon'^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \right)$$

En négligeant les termes multipliés soit par ε^2 , soit par $\varepsilon^3 \mathfrak{R}$, il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} &= -\varepsilon \mathfrak{R} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \quad (i=1 \text{ et } 3) \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Les termes en $\varepsilon \mathfrak{R}$, ou termes d'inertie, de l'équation ci-dessus seront négligeables devant les termes de viscosité quand $\mathfrak{R} \ll \varepsilon$. Ceci est souvent vérifié dans les écoulements rencontrés en lubrification. Des exceptions existent lorsque l'épaisseur du film est grande, la viscosité du fluide est faible, pour les paliers de grandes dimensions (tels que ceux supportant les lignes d'arbre dans les centrales électriques modernes). Dans ces cas, les forces d'inertie ne sont plus négligées.

Si on néglige les forces d'inertie, il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \quad (i=1 \text{ et } 3) \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

3.5.2. Les équations de Navier Stokes aux variables dimensionnées

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

3.6. Détermination du champ de vitesse

Pour obtenir le champ de vitesse, il est nécessaire de faire une intégrale à la relation (3.8). Si μ est indépendant de y , alors on a :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} y + A$$

$$\mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} y + C$$

Soit :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y^2 + \frac{A}{\mu} y + B \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} y^2 + \frac{C}{\mu} y + D \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Dans les conditions aux limites sur la vitesse permettent de déterminer A, B, C et D. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement du fluide aux parois, elles s'écrivent, (figure 3.2)

- sur la paroi 1, pour $y=0$; $u=U_1$; $v=0$; $w=W_1$.
- sur la paroi 2, pour $y=h$; $u=U_2$; $v=V_2$; $w=W_2$.

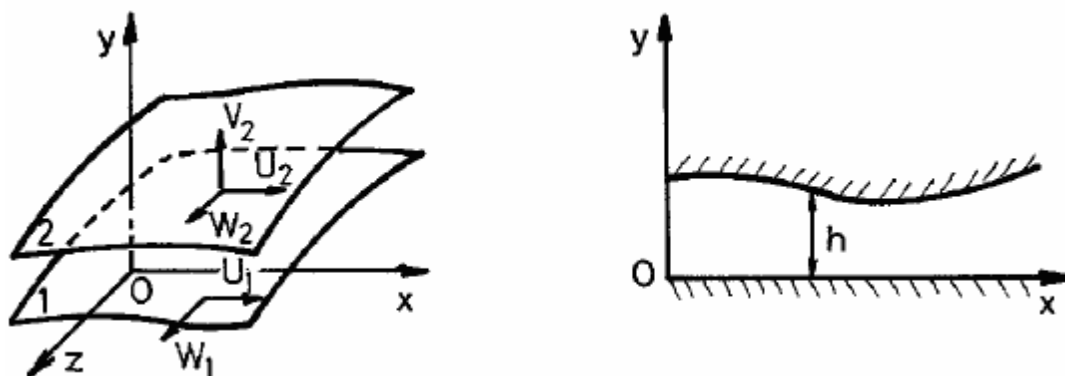


Figure 3.2 : Système d'axes en coordonnées cartésiennes.

On a donc :

$$U_1 = B$$

$$U_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} h^2 + \frac{A}{\mu} h + B$$

Soit :

$$\frac{A}{\mu} = \frac{U_2 - U_1}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} h$$

Il vient alors :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y(y-h) + \frac{U_2 - U_1}{h} y + U_1$$

De même pour w

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y(y-h) + \frac{W_2 - W_1}{h} y + W_1$$

3.7. Représentation de l'équation de Reynolds

3.7.1. Equation de Reynolds généralisée

En reportant ces vitesses (3.10) dans l'équation de continuité (3.3) et en intégrant à travers l'épaisseur du film l'inconnue v disparaît.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

En intégrant, on obtient :

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy = [\rho v]_0^h = \rho v_2 = \rho \frac{dh}{dt} \quad \text{Car } v_1 = 0 \text{ par hypothèse}$$

L'intégration de deux autres termes fait intervenir les signes des dérivés et des sommes, on remarque que :

$$\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,z,t)} F(x, y, z, t) dy - F(x, y, z, t) \frac{\partial h}{\partial x}$$

Soit :

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dy - \rho U_2 \frac{dh}{dx}$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \rho w dy - \rho W_2 \frac{dh}{dz}$$

En utilisant les expressions des vitesses dans le film, Ces deux intégrales se déduisent. On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left[\frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y(y-h) + \rho \frac{U_2 - U_1}{h} y + \rho U_1 \right] dy =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{U_2 - U_1}{h} h + \rho U_1 h \right]$$

Soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dy = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{U_2 + U_1}{h} h \right)$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \rho w dy = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{W_2 + W_1}{h} h \right)$$

Et en regroupant tous les termes il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho (U_2 + U_1) h}{2} \right) - \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho (W_2 + W_1) h}{2} \right) - \rho W_2 \frac{\partial h}{\partial x} &+ \rho \frac{dh}{dt} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= \frac{1}{2} \rho (U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho (W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ + \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial x} [\rho (U_1 + U_2)] &+ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial z} [\rho (W_1 + W_2)] + \rho \frac{dh}{dt} + \frac{1}{12} h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.11)$$

A cette équation de Reynolds s'ajoutent les équations donnant les vitesses dans le fluide.

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} U_1 + \frac{y}{h} U_2 \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{h-y}{h} W_1 + \frac{y}{h} W_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

3.7.2. Simplification de l'équation de Reynolds

L'équation de Reynolds est assez générale. Elle s'applique à différents lubrifiants et à différents types de contacts. Les hypothèses simplificatrices considérées sont :

- Fluide incompressible.

La masse volumique disparaît de l'équation de Reynolds.

- Fluide de viscosité constante.

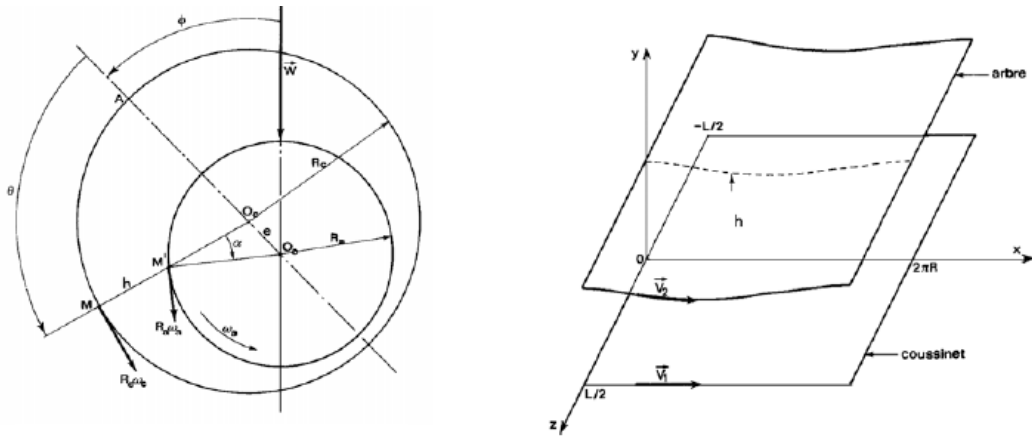


Figure 3.3 : a/ Section droite du palier. b/ Palier développé.

Parce que les rayons sont trop proches, on peut négliger la courbure du film, développer le coussinet (ou l'arbre) et l'assimiler à un plan (figure 3.3).

Les conditions cinématiques relatives aux surfaces s'écrivent comme suit :

$$U_1 = R_c \Omega_c \quad W_1 = 0$$

$$U_2 = R_a \Omega_a \cos \alpha \quad W_2 = 0$$

Où α est l'angle entre $O_c M'$ et $O_a M'$ et $\tan \alpha$ est la pente de la courbe $h(x)$

$$\tan \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{R d\theta}$$

$$\tan \alpha = -\frac{e}{R} = \sin \theta$$

La quantité e/R_a étant très petite, on peut considérer :

$$\cos \alpha \approx 1 \quad \text{Et} \quad \sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{dh}{dx}$$

Dans ces conditions, les vitesses des surfaces s'écrivent :

$$U_1 = R_c \Omega_c \quad U_2 = R_a \Omega_a$$

En reportant les vitesses des surfaces du contact dans l'équation de Reynolds écrite en coordonnées cartésiennes et en posant $R = R_a = R_c$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu R (\Omega_a + \Omega_c) \frac{dh}{dx} + 12 \frac{dh}{dt}$$

De plus, on suppose que ces vitesses des surfaces du contact soient égales, alors l'équation de Reynolds se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu R\Omega \frac{dh}{dx} + 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (3.13)$$

Soit en remplaçant x par :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\Omega \frac{dh}{d\theta} + 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (3.14)$$

L'épaisseur du film d'huile est donnée par en dérivant h, on obtient :

$$\frac{dh}{d\theta} = -e\theta \sin \theta$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} \cos \theta + e \frac{d\theta}{dt} \sin \theta = e \dot{\theta} \cos \theta + e\theta \dot{\theta} \sin \theta$$

L'équation de Reynolds devient alors :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = e \dot{\theta} \cos \theta + e \left(\dot{\theta} - \frac{\Omega}{2} \right) \sin \theta \quad (3.15)$$

3.8. Conditions aux limites

Pour un palier hydrodynamique en fonctionnement stationnaire, trois types de conditions aux limites ont été successivement définis (figure 3.4).

3.8.1. Conditions de Sommerfeld

En 1904, Sommerfeld suppose que le film lubrifiant est continu et qu'il n'y a pas de rupture du film. Dans ces conditions, la distribution de pression est antisymétrique par rapport au point $\theta = \pi$ et le lieu du centre de l'arbre dans le coussinet est une droite normale à la direction de charge. Ces conditions aux limites ne sont valables que pour les paliers fonctionnant à de très faibles charges ou avec des pressions d'alimentation très élevées. Dans le cas contraire, des pressions négatives apparaissent dans le film, ce qui est physiquement inacceptable.

3.8.2. Conditions de Gümbel ou semi Sommerfeld

À la suite des travaux de Sommerfeld, Gümbel propose, en 1914, comme conditions aux limites :

$$p(\theta = 0, z) = 0$$

$$p(\theta = \pi, z) = 0$$

$$p(\theta, z) = 0 \text{ -- si -- } -\theta_s < \theta < 2\pi$$

Cela revient à négliger, dans la solution de Sommerfeld, les pressions négatives. Ces conditions impliquent une discontinuité dans l'écoulement au point $\theta = \pi$. Elles ne sont pas acceptables physiquement mais sont utilisées dans le cas de l'approximation du palier court.

3.8.3. Conditions dites de Reynolds

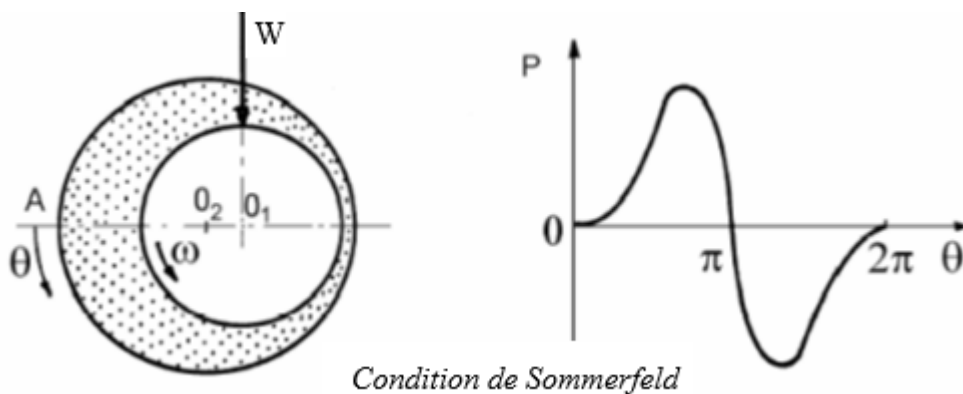
Ces conditions, proposées indépendamment, par Swift en 1932 [7] et par Steinert en 1933, respectent la continuité du débit et supposent que pour une abscisse θ_s inconnue, la pression et le gradient de pression s'annulent.

$$p(\theta = 0, z) = 0 \text{ Et } p(\theta = \theta_s, z) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta = \theta_s, z) = 0 \text{ Et } p(\theta, z) = 0 \text{ -- si -- } -\theta_s < \theta < 2\pi$$

On distingue ainsi deux régions dans le palier :

- une région active où la pression est positive et le film complet, pour des valeurs de θ comprises entre 0 et θ_s
- et une région inactive à pression nulle et dans laquelle, en régime dynamique, peut apparaître de la cavitation, pour $\theta_s < \theta < 2\pi$.



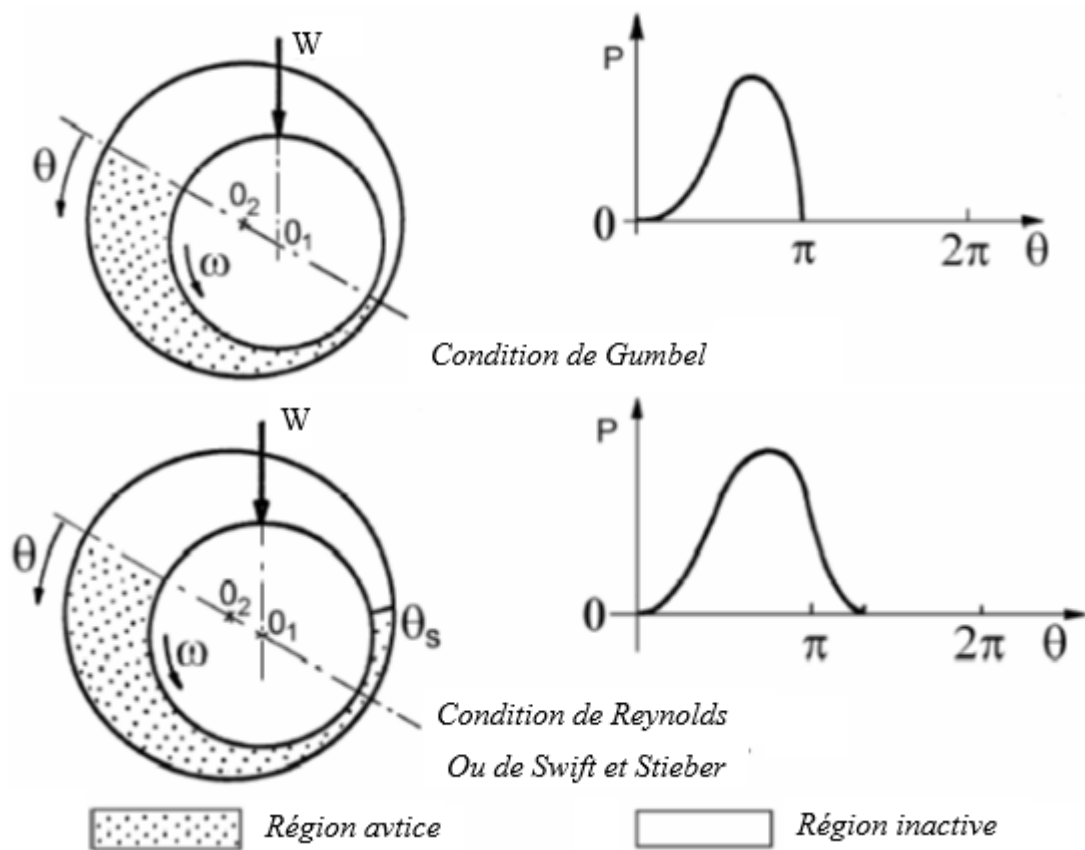


Figure 3.4 : Illustration des conditions aux limites dans un palier.

La condition de conservation du débit aux travers de la frontière de rupture est satisfaite grâce aux conditions aux limites introduites par Swift et Stieber [7]. Ces conditions s'écrivent :

$$P = P_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

Où n est la normale à la frontière et P_0 la pression dans la zone où le film est rompu.

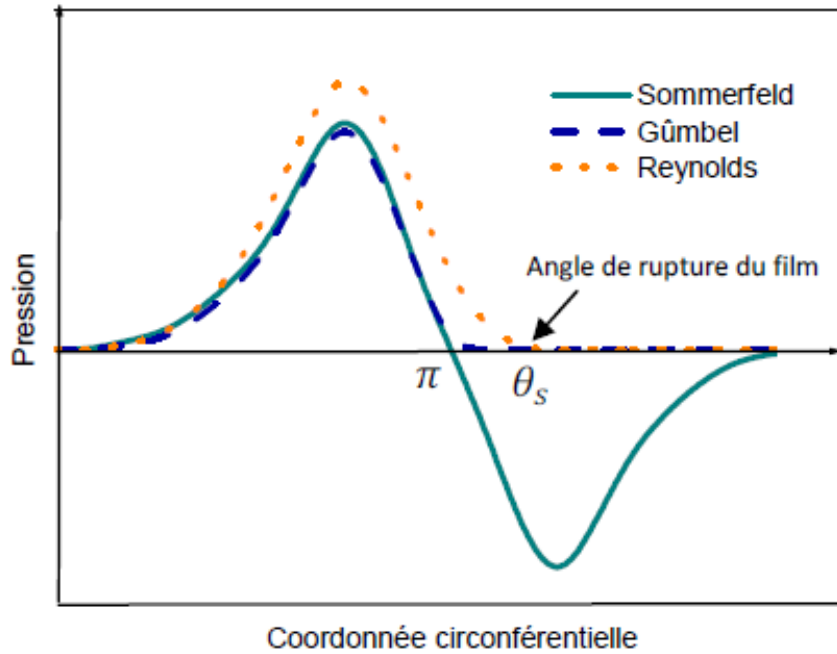


Figure 3.4.1 : Conditions aux limites de rupture du film.

3.9. Performances statiques

3.9.1. Composantes de la portance HD

Notre système doit être en équilibre à chaque moment du cycle. Cet équilibre peut s'écrire vectoriellement en prenant en compte les forces extérieures agissant sur le palier et la force résultante des actions de la pression hydrodynamique. Les composantes du vecteur contrainte t_v (M_2, n_2) dans le repère (x, y, z) dont les vecteurs de base (i, j, k) (figure 3.2) sont :

$$\begin{aligned} t_v(M_2, n_2) &= [\sigma] \begin{Bmatrix} \sin \alpha' \\ -\cos \alpha' \end{Bmatrix} \\ &= (-p \sin \alpha' - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha') i + (p \cos \alpha' + \sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha') j \end{aligned}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha' & \cos \alpha' \\ -\cos \alpha' & \sin \alpha' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix}$$

Et à partir de la figure 3.2, on peut tirer :

$$\begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha' & -\cos \alpha' \\ -\cos \alpha' & -\sin \alpha' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Après de nombreuses manipulations et compte tenu de $\alpha \ll 1$, on aura :

$$t_v (M_2, n_2) = \begin{Bmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{Bmatrix}_{\varepsilon, \varphi} \quad (3.16)$$

Les composantes de la portance hydrodynamique dans le repère (ε, φ) peuvent être données par l'intégration du champ de pression :

$$F_\varepsilon = -R \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} P(\theta, z) \cos \theta d\theta dz \quad (3.17)$$

$$F_\varphi = R \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} P(\theta, z) \sin \theta d\theta dz \quad (3.18)$$

Ce qui permet de calculer la résultante W_r :

$$W_r = \sqrt{F_\varepsilon^2 + F_\varphi^2} \quad (3.19)$$

3.9.2. Angle de calage

L'angle de calage du palier, qui donne la position de l'arbre dans le coussinet (Figure 3.1), peut être déterminé par :

$$\varphi = \tan^{-1} \left(-\frac{F_\varphi}{F_\varepsilon} \right) \quad (3.20)$$

3.10. Conclusion

L'équation de Reynolds est une équation différentielle du second ordre de type elliptique inconnu dont le principal est la pression. La valeur de la pression dans le film dépend non seulement de la géométrie du contact et de sa cinématique, mais des conditions aux limites de pression lors de la résolution de l'équation de Reynolds.

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus écrites pour un fluide newtonien et incompressible. L'utilisation de l'hypothèse d'un écoulement de fluide en films minces visqueux permet de simplifier les équations de Navier Stokes.

La dérivation de l'équation de Reynolds nécessite l'emploi de plusieurs hypothèses simplificatrices. La détermination des équations géométriques du film permet de définir en chaque point et à chaque instant l'épaisseur du film lubrifiant dans le palier.

La rupture du film (phénomène d'alésage) est prise en compte en utilisant les conditions aux limites de Gümbel ou les conditions aux limites de Swift-Stieber qui sont utilisées pour calculer le champ de pression dans le film. Ces conditions permettent d'avoir des résultats théoriques qui sont très proches de la réalité physique.

Chapitre 4
Modélisation des rotors

Chapitre .4. Modélisation des rotors

4.1. Introduction :

Le rotor définit l'ensemble des éléments des pièces rotatives dans une machine tournante, comme l'arbre, disques, turbines, engrenages, roues, bobinage, couplages...

4.2. Systèmes de coordonnées :

Deux repères possibles peuvent être utilisés :

- **Le repère tournant (x, y, z)**

La rotation uniforme autour de l'axe du rotor est considérée comme un mouvement d'un corps auquel se superposent des petits mouvements.

- **Le repère fixe (X, Y,Z)**

Lorsque les parties tournantes sont essentiellement axisymétriques, l'utilisation de ce repère permet une modélisation simple de rotor dont les paliers présente une rigidité anisotrope.

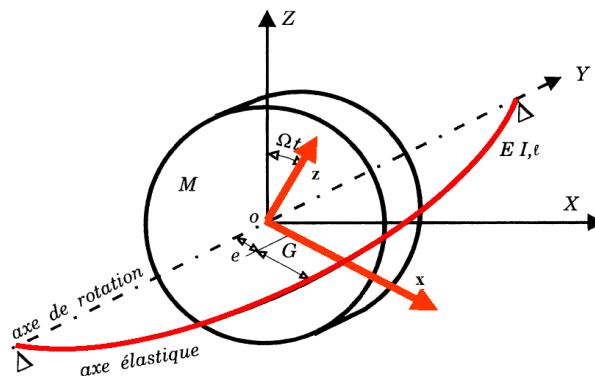


Figure 4.1 : Repères du rotor flexible

4.3. Caractéristiques des éléments de rotor :

Le rotor flexible est le plus simple modèle, il se compose d'un disque dur, fixé sur un arbre flexible de section axisymétrique et de masse négligeable, appuyé aux extrémités sur des paliers identiques supposés rigides.

L'étude du mouvement vibratoire et la mise en équation sont basées sur la détermination des expressions des énergies ainsi que du travail virtuel correspondant aux éléments fondamentaux : disque, arbre, palier, balourd (voir [48] et [49]).

On calcule :

- L'énergie cinétique de disque, l'arbre et les balourds.
- L'énergie potentielle ou de déformation de l'arbre.

- Le travail virtuel des forces des paliers sur le rotor.

Par suite, les équations du mouvement dynamique sont déterminées à partir de l'application des équations de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = F_{ei} \quad (4.1)$$

4.4. Eléments de rotor

Les éléments de base d'un rotor sont : (voir Figure 4.2) Le disque, l'arbre, les paliers et le balourd.

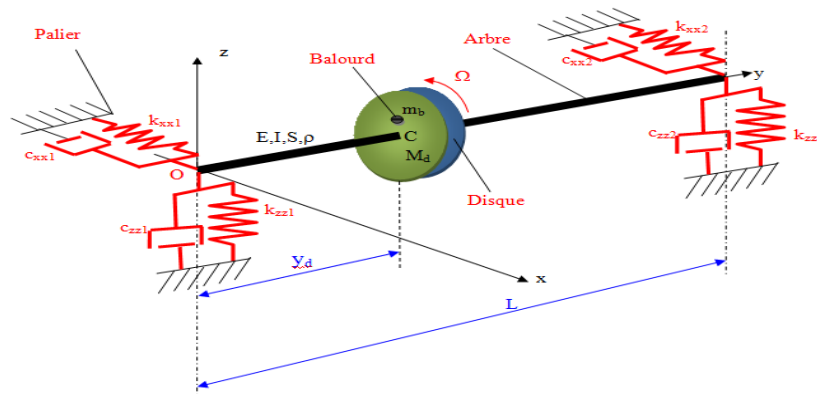


Figure 4. 2 : Eléments de base d'un rotor

4.4.1 Le disque

Le disque est supposé rigide, seulement l'énergie cinétique est prise en compte. La Figure 4.3 présente les repères de référence utilisés dans l'étude du rotor. Le repère $R_0(XYZ)$ définit un repère galiléen. $R(xyz)$ est le repère lié au disque. Le système d'axes (xyz) est repéré par rapport à XYZ par les trois angles d'Euler φ et θ , ψ . Supposons que la position initiale du repère $R(xyz)$ lié au disque, était confondue avec celle du repère $R_0(XYZ)$. Le passage à la position xyz , s'effectue d'abord par une première rotation ψ autour de l'axe Z suivie d'une rotation θ autour du nouveau axe x_1 , enfin d'une dernière rotation φ autour de l'axe y .

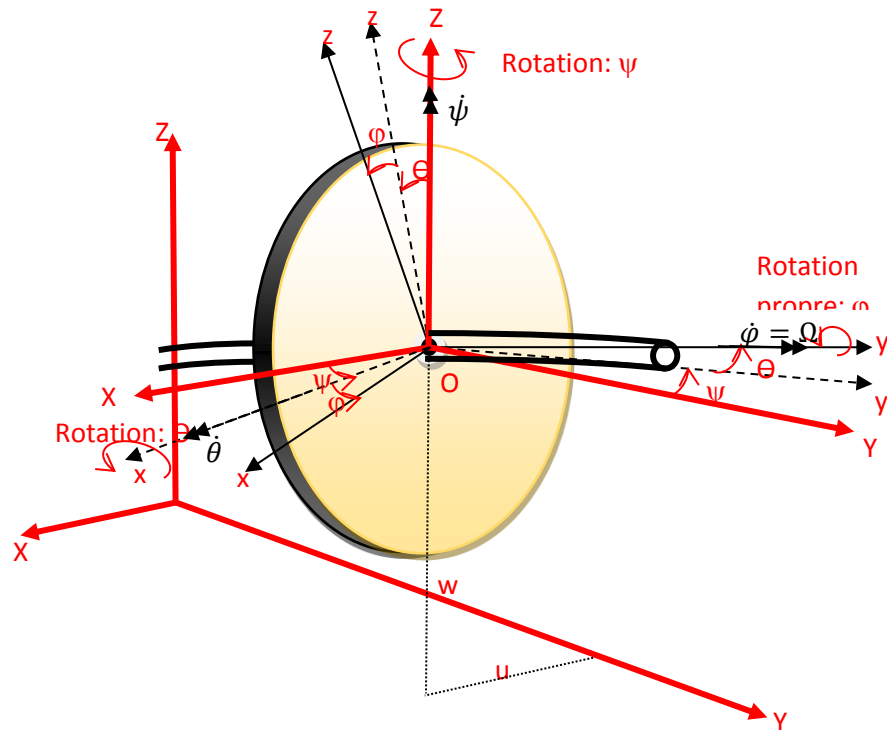


Figure 4.3 : Repères liés au disque sur un arbre flexible

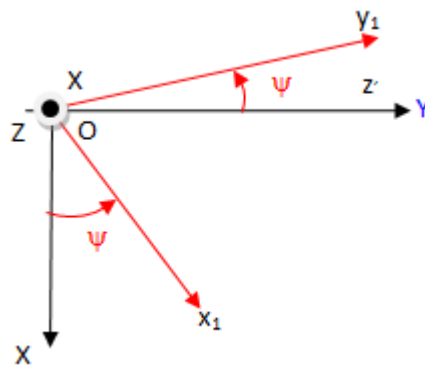
Pour définir le mouvement rotatif du disque on effectue les rotations successives suivantes :

- La précession ψ : rotation autour de l'axe (O,Z) , fait passer de repère fixe (O,X,Y, Z) au repère (O,x_1,y_1,Z)
- La nutation Θ : rotation autour de l'axe nodal (O, x_1) , fait passer de (O, x_1, y_1, Z) au (O, x_1, y, z_1)
- La rotation propre $\varphi = \Omega t$: rotation autour de l'axe de rotation propre (O, y) , fait passer de (O, x_1, y, z_1) au repère mobile (O, x, y, z) . La vitesse de rotation propre Ω est considérée constante.

Ainsi on suppose que les angles ψ et Θ sont très petits

• **La 1^{ère} rotation :**

$$(X,Y,Z) \xrightarrow{A\psi \equiv \psi} (x_1,y_1,Z)$$



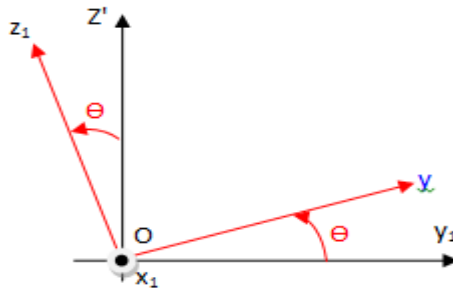
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \cos \psi \cdot \bar{X} + \sin \psi \cdot \bar{Y} + 0\bar{Z} \\ \bar{y}_1 = -\sin \psi \bar{X} + \cos \psi \bar{Y} + 0\bar{Z} \text{ avec } \{\cos \psi \approx 1 \text{ et } \sin \psi \approx \psi \\ \bar{Z} = 0\bar{X} + 0\bar{Y} + 1\bar{Z} \end{cases}$$

Sous forme matriciel

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \psi & 0 \\ -\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_\psi} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = A_\psi \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

• La 2^{ème} rotation :

$$(x_1, y_1, Z) \xrightarrow{A_\theta \equiv \theta} (x_1, y, z_1)$$



$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 1\bar{x}_1 + 0\bar{y}_1 + 0\bar{Z} \\ \bar{y} = 0\bar{x}_1 + \cos \theta \bar{y}_1 + \sin \theta \bar{Z} \text{ avec } \{\cos \theta \approx 1 \text{ et } \sin \theta \approx \theta \\ \bar{z}_1 = 0\bar{x}_1 - \sin \theta \bar{y}_1 + \cos \theta \bar{Z} \end{cases}$$

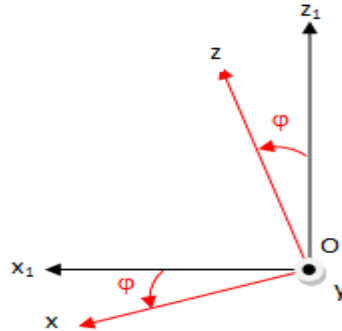
Sous forme matriciel

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y} \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{bmatrix}}_{A_\theta} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y} \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} = A_\theta \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

On change le vecteur $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{Z} \end{bmatrix}$ par son expression

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y} \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} = A_\theta A_\psi \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

- La 3^{ème} rotation :



$$(x_1, y, z_1) \xrightarrow{A_\varphi \equiv \varphi} (x, y, z)$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \cos \varphi \bar{x}_1 + 0 \bar{y} - \sin \varphi \bar{z}_1 \\ \bar{y} = 0 \bar{x}_1 + 1 \bar{y} + 0 \bar{z}_1 \\ \bar{z} = \sin \varphi \bar{x}_1 + 0 \bar{y} + \cos \varphi \bar{z}_1 \end{cases} \quad \text{avec } \varphi = \Omega t$$

Sous forme matriciel

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y} \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = A_\varphi \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y} \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix}$$

On change le vecteur par son expression

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \underbrace{A_\varphi A_\theta A_\psi}_A \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A est la matrice de transfert du repère mobile au repère fixe. On note que $A^T = A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi - \theta \psi \sin \varphi & \psi \cos \varphi + \theta \sin \varphi & -\sin \varphi \\ -\psi & 1 & \theta \\ \sin \varphi + \theta \psi \cos \varphi & \psi \sin \varphi - \theta \cos \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\vec{\omega}_{R/R_0} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} = \dot{\psi} \vec{Z} + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\phi} \vec{y}$$

Puisque

$$\vec{x}_1 = \cos \varphi \vec{x} + 0 \vec{y} + \sin \varphi \vec{z} = [\cos \varphi \quad 0 \quad \sin \varphi] \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{Z} = 0 \vec{X} + 0 \vec{Y} + 1 \vec{Z} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] A^T \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = 0 \vec{x} + 1 \vec{y} + 0 \vec{z} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}$$

Donc

$$\vec{\omega}_{R/R_0} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z] \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\dot{\psi} [0 \quad 0 \quad 1]}_z \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix} + \underbrace{\dot{\theta} [\cos \varphi \quad 0 \quad \sin \varphi]}_{x_1} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix} + \underbrace{\dot{\phi} [0 \quad 1 \quad 0]}_y \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \dot{\psi} A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \theta + \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Dans le cas d'un régime stationnaire : $\dot{\varphi} = Cste = \Omega$

L'énergie cinétique du disque est donnée par :

$$\begin{aligned}
 Ec_D &= \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) = \\
 &= \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (-\dot{\psi} \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega + \dot{\psi} \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{dz} (\dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi)^2 \\
 Ec_D &= \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

↓ Terme constant ↓ Effet Coriolis

Le terme : $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ représente l'effet gyroscopique (Coriolis) et celui de : $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$ est constant.

Il n'a pas d'influence dans le calcul des équations.

I_{dx} , I_{dy} , I_{dz} représentent les moments d'inertie du disque par rapport à ces axes principaux d'inertie. Le disque étant symétrique on a $I_{dx} = I_{dz}$.

Si le disque a une densité volumique ρ_d , un rayon extérieur R, un rayon intérieur r et une épaisseur h, sa masse M_D sera donnée par :

$$M_D = \pi (R^2 - r^2) h \rho_d \quad (4.10)$$

$$I_{Dx} = I_{Dz} = \frac{M_D}{12} (3r^2 + 3R^2 - h^2) \quad (4.11)$$

$$I_{Dy} = \frac{M_D}{12} (r^2 + R^2) \quad (4.12)$$

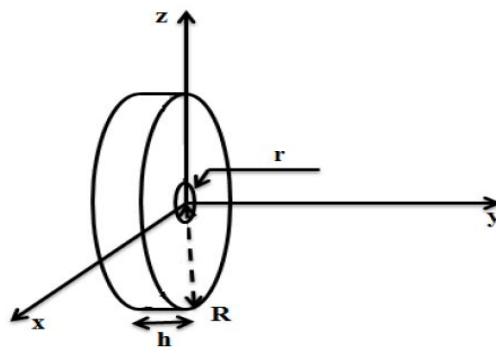


Figure 4.4 : Forme du modèle de disque

4.4.2 L'arbre

On considère l'arbre sous forme d'une poutre à section circulaire. Avec cette proposition, l'expression de son énergie cinétique peut être déduite par extension de l'énergie cinétique du disque en considérant une masse d'arbre infiniment mince d'épaisseur dy.

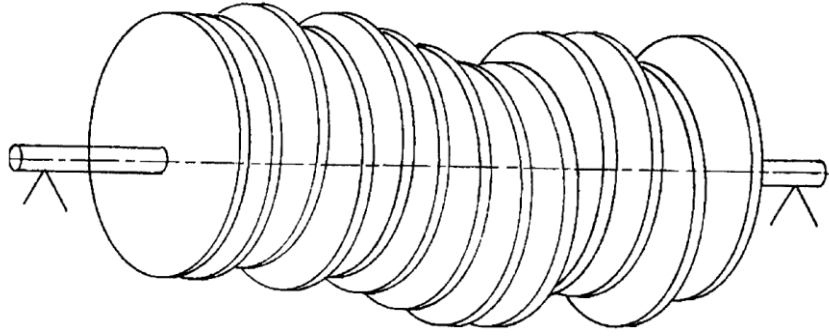


Figure 4.5 : Mouvement de l'arbre

$$dE_{ca} = \left[\frac{1}{2} \rho S (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} \rho I (\Omega^2 + 2\Omega \theta \dot{\psi}) + \frac{1}{2} \rho I (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) \right] dy \quad (4.13)$$

Pour un arbre de longueur L, de masse volumique ρ , de section circulaire S et de moment d'inertie I, l'énergie cinétique

$$E_{ca} = \underbrace{\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{w}^2) dy}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\rho I L \Omega^2}_{\text{Terme constant}} + \underbrace{2 \rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy}_{\text{Effet Gyroscopique}} \quad (4.14)$$

Si on prend en considération seulement l'effet de flexion (poutre Bernoulli-Euler), L'énergie de déformation de l'arbre se calcule par la forme suivante :

$$E_p = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (4.15)$$

4.4.3. Le balourd

Le balourd est dû à l'absence de coïncidence entre le centre géométrique du système rotor et son centre de masse (inertie) figure (4.6). Son énergie cinétique pour une excentricité e, une masse de balourd m_b et une vitesse angulaire constante Ω est :

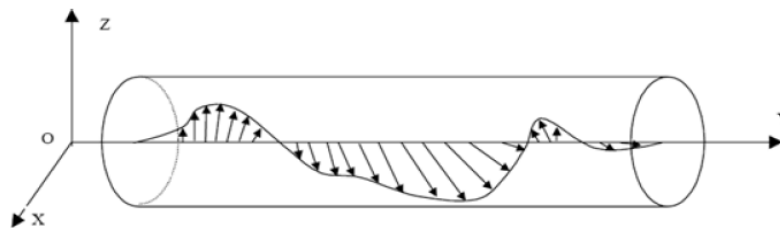


Figure 4.6 : Répartition du balourd sur le rotor.

$$E_{cb} \approx m_b \Omega e (\dot{u} \cos(\Omega t) - \dot{w} \sin(\Omega t)) \quad (4.16)$$

4.4.4 Les paliers lisses

Les paliers sont caractérisés par leurs coefficients de rigidité k_{ij} et leurs coefficients d'amortissements c_{ij} (voir Figure 4.7).

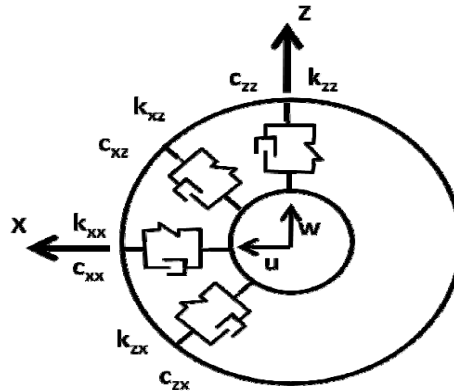


Figure 4.7 : Présentation de l'amortissement et de la rigidité du palier

Le travail virtuel des forces dues aux paliers agissant sur l'arbre est :

$$\begin{aligned} \delta W &= -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \\ &= F_u\delta u + F_w\delta w \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

4.5. Modélisation des rotors par éléments finis

4.5.1 Introduction

La méthode des éléments finis est utilisée pour calculer des solutions proches des résultats exactes pour les structures de formes complexes, elle permis l'intégration des machines numériques dans le calcul.Elle est efficace en dynamique des systèmes gyroscopiques tel que les rotors.

Dans ce genre de machines, il est important de modéliser les éléments fondamentaux (disques, arbres, paliers) et de configurer les forces dues aux balourds.

La méthode proposée dans ce chapitre est une combinaison entre deux modèles présentés dans les références [48] et [49].

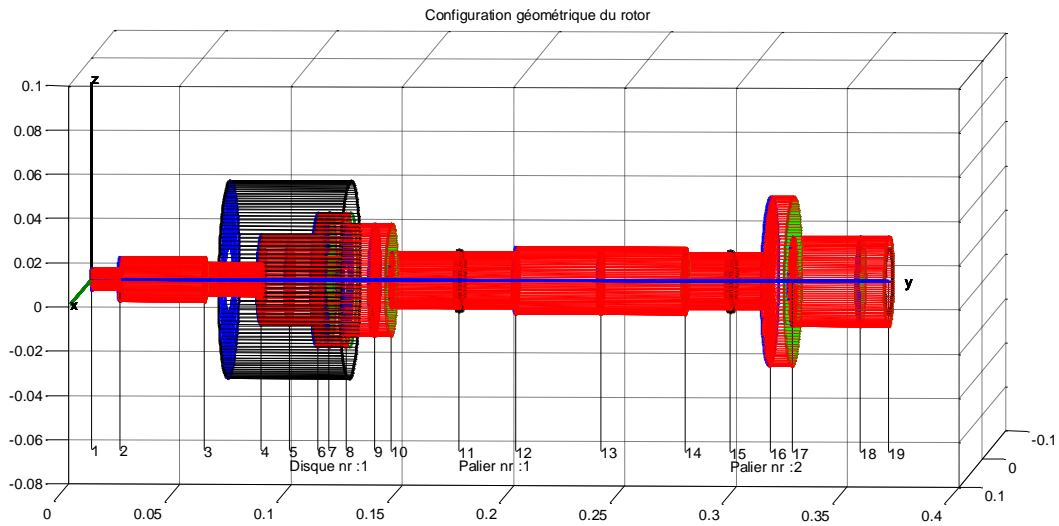


Figure 4.8 : Configuration géométrique d'un rotor.

4.5.2 Disque

Le disque est présenté par un nœud à quatre degrés de liberté (u , w , θ et ψ) dans les deux plans (xy) et (zy).

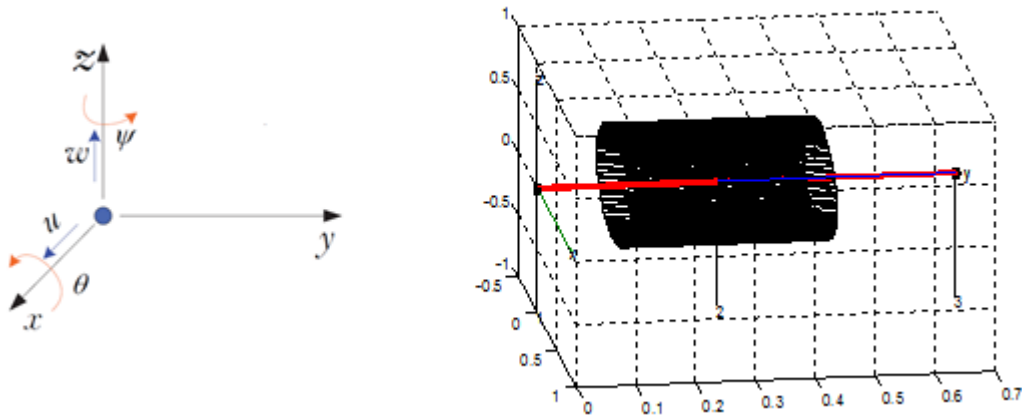


Figure 4.9: Configuration du disque

L'energie cinetique du disque est

$$E_{cd} = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_d (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dp} (\Omega^2 + 2\Omega\theta\dot{\psi}) \quad (4.19)$$

En appliquant le principe des équations de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial \dot{u}} \right) - \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial u} \right) = m_d \ddot{u} = f_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial \dot{w}} \right) - \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial w} \right) = m_d \ddot{w} = f_z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial \theta} \right) = I_d \ddot{\theta} - I_{dp} \Omega \dot{\psi} = M_z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial \dot{\psi}} \right) - \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial \psi} \right) = -(I_d \ddot{\psi} + I_{dp} \Omega \dot{\theta}) = -M_x \quad (4.20)$$

Sous forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial(Ecd)}{\partial q_i} \right) = \begin{bmatrix} m_d & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & I_d & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & m_d & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ -\ddot{\psi} \\ - \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & -I_{dp} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & I_{dp} & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ -\dot{\psi} \\ - \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ -M_z \\ \\ f_z \\ M_x \end{Bmatrix}$$

(4.21)

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} = [M_d] \cdot \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} = [0] \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} \\ -\ddot{\psi} \end{array} \right\} = \ddot{U}^x \\ &+ \begin{bmatrix} m_d & \dot{0} \\ 0 & I_d \end{bmatrix} = [0] \cdot \begin{bmatrix} m_d & \dot{0} \\ 0 & I_d \end{bmatrix} = [M_d] \left\{ \begin{array}{l} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{array} \right\} = \ddot{U}^z \\ &+ \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{dp} \end{bmatrix} = -[g_d] \left\{ \begin{array}{l} \dot{u} \\ -\dot{\psi} \end{array} \right\} = \dot{U}^x \\ &+ \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{dp} \end{bmatrix} = [g_d] \cdot \begin{bmatrix} 0 & \dot{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0] \left\{ \begin{array}{l} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} = \dot{U}^z \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.5.3. Modélisation de l'arbre

a. Coordonnées et Fonctions de forme

On considère des polynômes de troisième degré pour rapprocher les fonctions de déplacements et de rotations dans le plan de (x y)

$$\begin{cases} u(\xi) = A_3 \xi^3 + A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0 \\ -\psi(\xi) = B_3 \xi^3 + B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0 \end{cases} \quad (4.23)$$

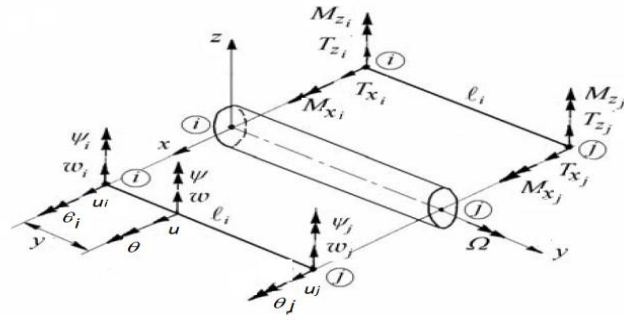


Figure 4.10 : Elément arbre

$$\text{Avec } \xi = \frac{y}{\ell} . \quad \text{Il en résulte } \frac{d}{dy} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} = \frac{1}{\ell} \frac{d}{d\xi} \quad (4.24)$$

$$\text{Le rapport entre (u) et } (\psi) \text{ devient :- } \psi = \frac{1}{\ell} \frac{du}{d\xi} \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{\ell} (3A_3 \xi^2 + 2A_2 \xi + A_1) = B_3 \xi^3 + B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0 \quad (4.26)$$

$$\text{Par comparaison on trouve : } B_3 = 0, \quad B_2 = \frac{3}{\ell} A_3, \quad B_1 = \frac{2}{\ell} A_2, \quad B_0 = \frac{1}{\ell} (A_1) \quad (4.27)$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(\xi) = N_1(\xi)u_i + N_2(\xi)(-\psi_i) + N_3(\xi)u_j + N_4(\xi)(-\psi_j) = [N] \begin{Bmatrix} u^x \end{Bmatrix} \\ -\psi(\xi) = \tilde{N}_1(\xi)u_i + \tilde{N}_2(\xi)(-\psi)_i + \tilde{N}_3(\xi)u_j + \tilde{N}_4(\xi)(-\psi_j) = [\tilde{N}] \begin{Bmatrix} u^x \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (4.28)$$

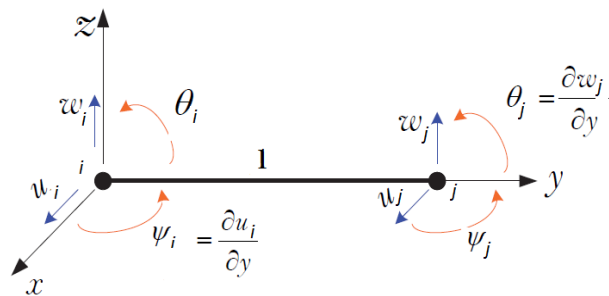


Figure 4.11 : Présentation des degrés de liberté

Exemple de calcul pour $N_3(\xi)$:

$$u(0) = 0 \rightarrow A_0 = 0, \quad u(\ell) = 1 \rightarrow A_3 + A_2 = 1 \quad (4.29)$$

$$-\psi(0) = 0 \rightarrow A_1 = 0, \quad -\psi(\ell) = 0 \rightarrow 3A_3 + 2A_2 = 0$$

Il en résulte :

$$A_3 = -2, A_2 = 3, A_1 = 0$$

$$\text{Et } N_3(\xi) = (3\xi^2 - 2\xi^2) \quad (4.30)$$

Les fonctions des déplacements seront :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3] \\ N_2(\xi) = [\ell(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)] \\ N_3(\xi) = (3\xi^2 - 2\xi^2) \\ N_4(\xi) = [\ell(-\xi^2 + \xi^2)] \end{cases}, \quad (4.31)$$

Avec ℓ : Longueur de l'arbre.

Les fonctions de rotation seront alors :

$$\begin{cases} \tilde{N}_1(\xi) = \left[\frac{1}{\ell} (6\xi^2 - 6\xi) \right] \\ \tilde{N}_2(\xi) = [1 - 4\xi + 3\xi^3] \\ \tilde{N}_3(\xi) = \left[\frac{1}{\ell} (6\xi^2 + 6\xi) \right], \\ \tilde{N}_4(\xi) = (3\xi^2 - 2\xi) \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\tilde{N}_i(\xi) = \frac{1}{\ell} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (4.33)$$

De la même façon, on peut obtenir les déplacements dans le plan (x z)

$$\begin{cases} w = [N] \{u^z\} \\ \theta = [\tilde{N}] \{u^z\} \end{cases} \quad (4.34)$$

b) Matrice gyroscopique et matrice d'inertie :

Pour un élément uniforme d'arbre de longueur (dy), l'énergie cinétique peut être obtenue à partir de l'expression générale dérivée pour un disque mince.

$$dE_{Ca} = \left[\frac{1}{2} \rho S (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} \rho I_p (\Omega^2 + 2\Omega \theta \dot{\psi}) + \frac{1}{2} \rho I (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) \right] dy \quad (4.35)$$

Où

$$I_p = 2I, \quad \mu = \rho S, \quad \hat{\mu} = \rho I, \quad \hat{\mu}_p = \rho I_p$$

On intègre l'équation de l'énergie cinétique le long de cet élément d'arbre :

$$E_{Ca} = \frac{\mu}{2} \int_0^\ell (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\hat{\mu}}{2} \int_0^\ell (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \frac{1}{2} I_p \Omega^2 l + \hat{\mu}_p \Omega \int_0^\ell \dot{\psi} \theta dy \quad (4.36)$$

- **Energie de translation**

$$E_{Ct} = \frac{\mu}{2} \int_0^\ell (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy \quad (4.37)$$

Vitesses en termes de coordonnées nodales et fonctions de forme

$$\dot{u} = [N] \{\dot{u}^x\} = \dot{u}^T = \{\dot{u}^x\}^T [N]^T$$

$$\dot{u}^2 = \dot{u}^T \dot{u} = \{\dot{u}^x\}^T [N]^T [N] \{\dot{u}^x\}, \quad \dot{w}^2 = \{\dot{u}^z\}^T [N]^T [N] \{\dot{u}^z\}$$

$$E_{Ct} = \frac{1}{2} \{\dot{u}^x\}^T \underbrace{\mu \int_0^\ell [N]^T [N] dy}_{[m_T^a]} \{\dot{u}^x\} + \frac{1}{2} \{\dot{u}^z\}^T \underbrace{\mu \int_0^\ell [N]^T [N] dy}_{[m_T^a]} \{\dot{u}^z\} \quad (4.38)$$

Ainsi, la matrice d'inertie de translation de l'élément arbre est :

$$[m_T^a] = \mu \ell \int_0^\ell [N(\xi)]^T [N(\xi)] d\xi \quad (4.39)$$

Idem pour les plans (xy) et (zy).

- **Energie de rotation :**

$$E_{Cr} = \frac{\hat{\mu}}{2} \int_0^\ell (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy \quad (4.40)$$

Les vitesses angulaires en termes de coordonnées nodales et fonctions de forme :

$$-\dot{\psi} = [\tilde{N}] \{\dot{u}^x\}, \quad \dot{\theta} = [\tilde{N}] \{\dot{u}^z\}$$

$$\dot{\psi}^2 = \{\dot{u}^x\}^T [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] \{\dot{u}^x\}, \quad \dot{\theta}^2 = \{\dot{u}^z\}^T [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] \{\dot{u}^z\} \quad (4.41)$$

L'énergie de rotation :

$$E_{Cr} = \frac{1}{2} \{\dot{u}^x\}^T \underbrace{\hat{\mu} \int_0^\ell [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] dy}_{[m_R^a]} \{\dot{u}^x\} + \frac{1}{2} \{\dot{u}^z\}^T \underbrace{\hat{\mu} \int_0^\ell [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] dy}_{[m_R^a]} \{\dot{u}^z\} \quad (4.42)$$

La matrice d'inertie de rotation de l'élément arbre est :

$$[m_R^a] = \hat{\mu} l \int_0^l [\tilde{N}(\xi)]^T [\tilde{N}(\xi)] d\xi \quad (4.43)$$

Idem pour les plans (xy) et (zy).

• **Energie de l'effet gyroscopique (Coriolis)**

$$E_{Cg} = \hat{\mu}_p \Omega \int_0^l \psi \theta dy, \quad (4.44)$$

$$E_{Cg} = -\Omega \{ \dot{u}^z \}^T \underbrace{\hat{\mu}_p \int_0^l [\tilde{N}]^T [\tilde{N}] dy}_{[g]} \{ u^x \}$$

Matrice gyroscopique de l'élément arbre :

$$[g^a] = \hat{\mu}_p l \int_0^l [\tilde{N}(\xi)]^T [\tilde{N}(\xi)] d\xi \quad (4.45)$$

L'énergie totale cinétique de l'élément arbre (uniforme) est :

$$E_a = \frac{1}{2} \{ \dot{u}^x \}^T [m^a] \{ \dot{u}^x \} + \frac{1}{2} \{ \dot{u}^z \}^T [m^a] \{ \dot{u}^z \} - \Omega \{ \dot{u}^z \}^T [g^a] \{ u^x \} + \frac{1}{2} I_p \Omega^2 l \quad (4.46)$$

Où

$$[m^a] = [m_T^a] + [m_R^a]$$

La matrice totale de l'élément arbre uniforme :

$$[m^a] = \left[\begin{array}{c} \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 l & 54 & -13 l \\ . & 4 l^2 & 13 l & -3 l^2 \\ . & . & 156 & -22 l \\ . & . & . & 4 l^2 \end{bmatrix} + \frac{\hat{\mu}}{30 l} \begin{bmatrix} 36 & 3 l & -36 & 3 l \\ . & 4 l^2 & -3 l & -l^2 \\ . & . & 36 & -3 l \\ . & . & . & 4 l^2 \end{bmatrix} \right] \quad (4.47)$$

La matrice gyroscopique de l'élément arbre uniforme est :

$$[g^a] = \frac{\hat{u}}{15l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ . & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ . & . & 36 & -3l \\ sym & . & . & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

L'utilisation des équations de Lagrange mène à :

$$\begin{bmatrix} [m^a] & [0] \\ [0] & [m^a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}^x\} \\ \{\ddot{u}^z\} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} [0] & -[g^a] \\ [g^a] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}^x\} \\ \{\dot{u}^z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_y^a\} \\ \{f_x^a\} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

Où

$$[M^a] \{\ddot{u}\} + \Omega [G^a] \{\dot{u}\} = \{f^a\} \quad (4.50)$$

Où $[M^a]$ matrice d'inertie de taille 8×8 , elle est symétrique

$[G^a]$ Matrice gyroscopique de taille 8×8 , elle est antisymétrique.

c) Matrice de rigidité

Pour un élément arbre de longueur (dy), l'énergie potentielle (de rigidité) est :

$$dU = \frac{1}{2} \left\{ EI \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] \right\} dy \quad (4.51)$$

Intégrons cette équation :

$$E_p = \frac{EI}{2} \int_0^l (\psi'^2 + \theta'^2) dy = \frac{EI}{2} \int_0^l \psi'^2 dy + \frac{EI}{2} \int_0^l \theta'^2 dy \quad (4.52)$$

$$\psi = [\tilde{N}] \{u^x\} \quad \psi' = \frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{\ell} [\tilde{N}^\nabla] \{u^x\} \quad (4.53)$$

Ou

$$\psi'^2 = \frac{1}{\ell^2} \{u^x\}^T [\tilde{N}^\nabla]^T [\tilde{N}^\nabla] \{u^x\} \quad (4.54)$$

Energie de flexion :

$$E_p = \frac{1}{2} \{u^x\}^T \frac{EI}{\ell} \int_0^{\ell} [\tilde{N}^{\nabla}]^T [\tilde{N}^{\nabla}] d\xi \{u^x\} + \frac{1}{2} \{u^z\}^T \frac{EI}{\ell} \int_0^{\ell} [\tilde{N}^{\nabla}]^T [\tilde{N}^{\nabla}] d\xi \{u^z\} \quad (4.55)$$

$$\begin{matrix} [K_f^a] & [K_f^a] \end{matrix}$$

Matrice de rigidité due à la flexion :

$$[K_f^a] = \frac{EI}{\ell} \int_0^{\ell} \left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right]^T \left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right] d\xi \quad (4.56)$$

$$[K^a] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ . & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ . & . & 12 & -6\ell \\ . & . & . & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Par l'utilisation des équations de Lagrange, on obtient :

$$\begin{bmatrix} [K^a] & [0] \\ [0] & [K^a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^x\} \\ \{u^z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^x\} \\ \{f^z\} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

Où $[K^a] \{u^a\} = \{f^a\}$

Où $[K^a]$ matrice de rigidité totale de l'élément arbre, elle est de taille 8×8.

4.5.4. Modélisation du balourd

L'énergie cinétique du balourd est :

$$E_{cb} \approx m_b \Omega e (\dot{u} \cos(\Omega t) - \dot{w} \sin(\Omega t)) \quad (4.59)$$

On applique les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_{cb}}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial E_{cb}}{\partial u} = -m_b \Omega^2 e \sin(\Omega t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_{cb}}{\partial \dot{w}} - \frac{\partial E_{cb}}{\partial w} = -m_b \Omega^2 e \cos(\Omega t) \end{cases} = -m_b \Omega^2 e \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

4.5.5. Modélisation des paliers :

La relation des forces dissipatives est donnée par :

$$\begin{bmatrix} f_u \\ f_\psi \\ f_w \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & . & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ k_{zx} & 0 & . & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ -\psi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & . & C_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ C_{zx} & 0 & . & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ -\dot{\psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Chaque palier est aussi par un nœud

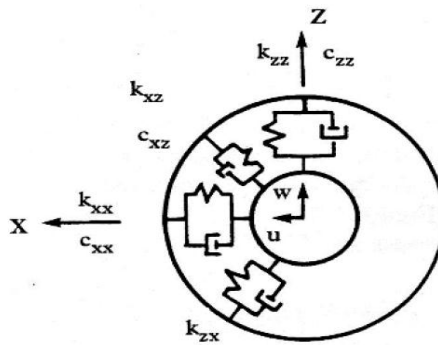


Figure 4.12 : Modèle de palier

4.5.6. Equation de mouvement

L'équation du mouvement pour le système rotor paliers est d'abord obtenue sous la forme du second degré, en assemblant les matrices des éléments.

4.5.6.1 Configuration des formes globales

Il est commode d'employer un vecteur global de déplacement dont la moitié supérieure contient les déplacements nodaux dans le plan (y z), alors que la moitié inférieure contient ceux dans le plan (x z)

$$\{x\}^T = \left\{ \overbrace{u_1 \quad -\psi_1 \quad u_2 \quad -\psi_2 \quad \dots \quad u_n \quad -\psi_n}^{\{x\}^T} ; \overbrace{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \dots \quad w_n \quad \theta_n}^{\{z\}^T} \right\}^T \quad (4.62)$$

Également, la moitié supérieure de la force globale possède les forces nodales dans le plan (y x), et la moitié inférieure, les forces nodales agissant dans le plan (y z)

$$\{f\}^T = \left\{ \overbrace{T_{x1} \quad -M_{z1} \quad T_{x2} \quad -M_{z2} \quad \dots \quad T_{xn} \quad -M_{zn}}^{\{F_x\}^T} ; \overbrace{T_{z1} \quad M_{x1} \quad T_{z2} \quad M_{x2} \quad \dots \quad T_{zn} \quad M_{xn}}^{\{F_z\}^T} \right\}^T. \quad (4.63)$$

En combinant l'équation composante d'élément, l'équation assemblée de système du mouvement peut être écrite :

$$\begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{X}\} \\ \{\ddot{Z}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{xx}] & [C_{xz}] \\ [C_{zx}] & [C_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{X}\} \\ \{\dot{Z}\} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} [0] & -[g] \\ [g] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{X}\} \\ \{\dot{Z}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k] + [K_{xx}] & [K_{xz}] \\ [K_{zx}] & [k] + [K_{zz}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_z\} \end{Bmatrix}$$

Ou $[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} [C_{xx}] & [C_{xz}] \\ [C_{zx}] & [C_{zz}] \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} [0] & -[g] \\ [g] & [0] \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} [k] + [K_{xx}] & [K_{xz}] \\ [K_{zx}] & [k] + [K_{zz}] \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Elles sont de l'ordre (N=4n), où (n) est le nombre de nœuds

4.5.6.2. Forme spatiale du mouvement

Dans le but de calcul numérique, l'équation de mouvement est transformée en des équations de premier ordre.

Présentation d'une équation auxiliaire :

$$[M]\{\dot{X}\} - [M]\{\dot{X}\} = \{0\} \quad (4.65)$$

Les équations (4.65) et (4.66) peuvent être combinées pour donner

$$\begin{bmatrix} [C] & \cdot & [M] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -[M] & \cdot & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{X}\} \\ \cdot \\ \{\ddot{X}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [0] & \cdot & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \cdot \\ \{\dot{X}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \cdot \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

Ou

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{P\} \quad (4.67)$$

Où $[A]$ et $[B]$ sont des matrices réelles, non symétriques de taille (2N×2N)

q_i : Déplacement généralisé, \dot{q}_i : Vitesse généralisée

$$[A] = \begin{bmatrix} [C] & \cdot & [M] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -[M] & \cdot & [0] \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [0] & \cdot & [M] \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Le système résultant s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [M] & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [0] & \cdot & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{X}\} \\ \{\ddot{X}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & \cdot & -[M] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [K] & \cdot & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{\dot{X}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

Mais seulement la première partie supérieure sera utilisée.

4.5.6.3 Analyse des valeurs propres

Les valeurs propres et vecteurs propres sont obtenus à partir de l'équation

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{0\} \quad (4.70)$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$\{q\} = \{\Phi^R\} e^{\lambda t} \quad (4.71)$$

L'équation peut être écrite

$$(\lambda[A] + [B])\{\Phi^R\} = \{0\} \Rightarrow \det(\lambda[A] + [B]) = 0 \quad (4.72)$$

4.5.7. L'instabilité due à l'amortissement tournant

L'amortissement correspond à l'un des facteurs déterminants pour le dimensionnement des systèmes et, plus particulièrement, pour l'étude de la stabilité des machines tournantes. En effet, l'amortissement (particulièrement celui des parties tournantes) peut être responsable de phénomènes instables à haute vitesse, pouvant conduire à la rupture d'éléments composant le rotor. Il est donc indispensable de pouvoir estimer les proportions d'amortissement amenées, tant sur les parties fixes que sur les parties tournantes, afin de garantir l'intégrité du système.

L'amortissement tournant des rotors est l'un des facteurs déstabilisants des machines tournantes. Il provient de l'amortissement interne des arbres, des interfaces entre les disques et les arbres, des joints d'accouplement constitués d'éléments en caoutchouc, etc. (Bigret [50], Erich [51]).

Ces phénomènes donnent naissance à des forces tangentielles, nommées forces circulatoires, dans la direction de la précession et dans le sens opposé à la force d'amortissement externe. Lorsque ces forces, proportionnelles au déplacement (de manière antisymétrique) et à la vitesse de rotation, deviennent supérieures aux forces externes d'amortissement, une instabilité se développe.

Le compromis entre les forces circulatoires et l'amortissement externe (parties fixes) peut être explicité dans le cas simple d'un modèle de rotor Jeffcott. Si le rotor possède un amortissement non tournant C_s , supposé visqueux, et un amortissement tournant C_r , également visqueux (Crandall [52]), la fréquence de rotation Ω_i , où l'instabilité démarre, est donnée par :

$$\Omega_i = \Omega_{VC} (1 + C_s/C_r) \quad (4.73)$$

Où Ω_{VC} est la vitesse critique du système considéré. L'équation (4.73) montre que l'instabilité apparaît à des vitesses supérieures à la vitesse critique et que l'ajout d'amortissement externe augmente la fréquence Ω_i .

4.5.7.1. Les dissymétries

Couramment, les rotors sont conçus comme étant axisymétriques. Néanmoins, le stator peut avoir des caractéristiques fonctionnelles qui invalident cette hypothèse. Dans ce cas, la dynamique de la machine présentera quelques différences par rapport au cas axisymétrique. Les modes doubles laissent place à deux modes simples de fréquences distinctes menant, comme dans le cas axisymétrique, à un mode direct et un mode rétrograde (figure 4.13) (Lalanne et Ferraris [53]). Dans ce cas de figure, les modes rétrogrades sont sollicités par l'excitation synchrone et le nombre de vitesses critiques est multiplié par 2, par rapport au cas axisymétrique.

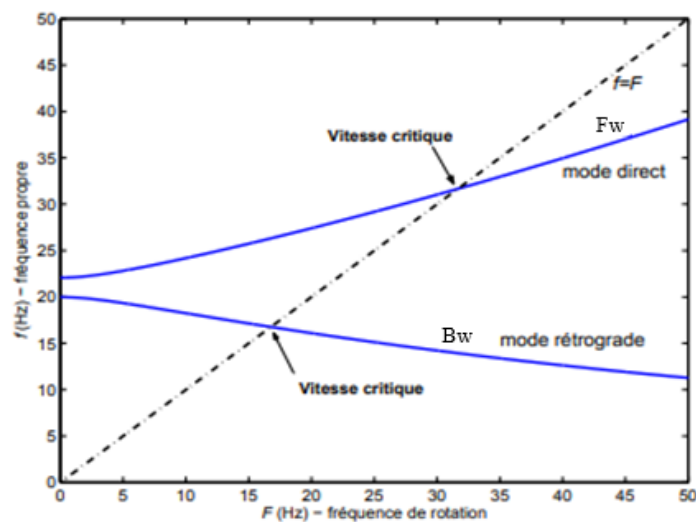


Figure 4.13 : Exemple d'un diagramme de Campbell pour un rotor avec des supports orthotropes.

Sur les réponses à balourd, l'influence de la dissymétrie peut être analysée à l'aide d'un modèle Jeffcott avec des paliers orthotropes. On montre (Genta [54], Childs [55]) qu'à faible vitesse de rotation, le rotor est en précession directe. Au voisinage et au-delà de la première vitesse critique, le comportement devient de type rétrograde avant de redevenir direct pour des vitesses de rotation supérieures à la deuxième vitesse critique. En comparaison avec un rotor à supports isotropes, où les orbites sont circulaires pour toutes les fréquences de rotation, un rotor à supports anisotropes génère des orbites elliptiques. L'arbre subit alors des contraintes axiales normales qui nuisent à la durée de vie de la machine. Aussi, les rotors avec des supports anisotropes peuvent être utilisés pour augmenter la fréquence où l'instabilité apparaît. Childs [55] montre, par exemple, que l'instabilité originaire de l'amortissement interne est décalée grâce à la dissymétrie des supports. Un autre phénomène lié à l'anisotropie des supports est la manifestation simultanée de précessions directes et rétrogrades le long de l'arbre. Muszinska [56] a observé expérimentalement les précessions simultanées sur un rotor vertical dont l'arbre est fléchi. Dans cette étude, la manifestation des précessions simultanées est affectée par l'amplitude de la flexion de l'arbre et aussi par la distribution de balourds. Des résultats identiques (Dias et al. [57]) ont été obtenus pour un rotor horizontal supporté par des roulements et des paliers. Ces études ont été confirmées par des simulations numériques. De même, Rao et al. [58], [59] ont étudié expérimentalement et numériquement un rotor Jeffcott horizontal supporté par deux paliers hydrodynamiques identiques, en montrant que la variation du jeu radial des paliers (le paramètre qui contrôle l'anisotropie) est la variable qui pilote la manifestation des précessions simultanées : ils observent alors la précession rétrograde au niveau du disque et la précession directe ailleurs. Enfin, certaines machines tournantes peuvent présenter une asymétrie du rotor.

Il s'agit, par exemple, des générateurs à deux pôles ou des systèmes à hélices à deux pales. L'étude de ce type de rotor a attiré l'attention de plusieurs chercheurs (Sakata et al. [60], Kang et al [61], Genta [54]), qui ont montré que ce type de systèmes engendre une dynamique très riche dont le phénomène caractéristique est l'existence d'une vitesse critique secondaire. Cette vitesse critique apparaît à une vitesse proche de la moitié de la vitesse critique synchrone, plus précisément sur l'intersection de la courbe d'évolution fréquentielle du mode direct avec la droite d'excitation $f = 2F$. Celle-ci est alors excitée par une force latérale constante, comme le poids du rotor. D'un point de vue de l'apparition ou non d'instabilité, les anisotropies tournantes font apparaître des plages de fréquences instables qui peuvent être éliminées par l'ajout d'amortissement externe (Genta [54]).

4.5.7.2. L'orbite modale

duquel est engendré un effet d'assouplissement et donc une chute de la vitesse critique. Les points situés dans l'axe générateur du rotor sont décrits par le mouvement de rotation du rotor et sont dus au mode propre des orbites qui ont des formes suivant le phénomène envisagé [62] (circulaire pour un rotor symétrique non amorti, elliptique pour un rotor dissymétrique non amorti...). Ces orbites sont engendrées selon deux précessions possibles :

- ✓ Une précession directe où les orbites sont décrites dans le même sens que la vitesse de rotation du rotor Ω . Dans ce cas-là, sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée croît.
- ✓ Une précession rétrograde (inverse) où les orbites sont décrites dans le sens inverse que le sens de la vitesse de rotation du rotor,

4.5.7.3. L'analyse de stabilité

L'analyse de stabilité dans l'étude du comportement vibratoire et dynamique d'un rotor flexible est nécessaire puisqu'il est considéré comme un système dynamique régi par des systèmes d'équation différentielle. La définition de la stabilité recouvre la définition de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre et la définition de Poincaré pour la notion de stabilité orbitale [63].

On peut prédire les seuils de l'instabilité d'un système dynamique et particulièrement en dynamique des rotors à partir de diverses techniques :

- ✓ Signe de la partie réelle des valeurs propres complexes du système d'équation en mouvement libre. Si la fréquence propre est donnée par $s = -a \pm jb$, le seuil d'instabilité est déterminé quand il devient négatif (partie réelle positive). Avec ce critère, on peut estimer la fréquence ainsi que le mode pour lequel le système deviendra instable. Le critère de Routh-Hurwitz permet d'analyser la stabilité des systèmes autonomes [64].
- ✓ L'utilisation de ce critère est intéressante pour des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, pour lesquels des expressions analytiques du polynôme caractéristique associé au mouvement perturbé peuvent être déduites. Elle devient, toutefois, complexe pour des systèmes comportant un nombre élevé de degrés de liberté. De plus, ce critère ne fournit pas la fréquence d'instabilité.

Ces deux critères étudiant la stabilité d'un système dynamique restreignent les cas de figure particuliers, ou lorsque qu'ils sont décrits par des modèles linéaires, par exemple R.Sino [65]. Dans l'objet de sa thèse, il utilise ces deux méthodes pour étudier et analyser la stabilité

d'un rotor due à l'amortissement tournant. Une méthode plus générale s'appuie sur la théorie de Floquet.

- ✓ La théorie de Floquet permet d'analyser, dans le sens linéaire, la stabilité des systèmes à coefficients périodiques [63]. Le premier pas d'analyse consiste à appliquer un vecteur de la solution périodique S_p sur une petite perturbation δ_s . Ceci conduit le système à un nouvel état d'équilibre. La deuxième, on applique un développement de Taylor de premier ordre au voisinage de S_p pour estimer les forces non linéaires en $(s_p + \delta_s, \dot{s}_p + \dot{\delta}_s, s_p'' + \delta_s'')$ dans le but de rendre le système linéaire. Cette technique est fréquemment utilisée dans l'analyse dynamique des structures tournantes notamment en dynamique des rotors non linéaires (voir, par exemple, les travaux de Dugundji et J.H.Wendell [66] sur l'analyse de stabilité d'un aérogénérateur et l'analyse des stabilités d'un rotor fissuré par G.Meng et R.GAsch [67]).

4.5.8. Matrice raideur des paliers

4.5.8.1. Les paliers

4.5.8.1.1. Paliers linéaires

Dans une première approximation, un comportement linéaire peut être retenu pour les paliers. La matrice raideur est constante et ne dépend pas de la charge appliquée au palier.

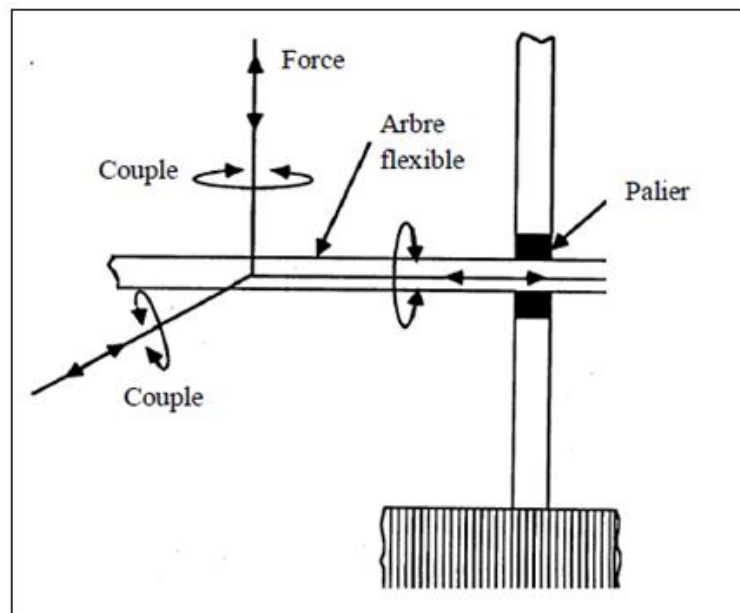


Figure 4.14 : Les différents chargements transmis aux paliers.

4.5.8.1.2. Paliers non linéaires

Pour une étude précise, et pour éviter les zones d'instabilité, il faut prendre en compte l'aspect non linéaire de la rigidité des paliers. En calculant le travail par défaut W des paliers à partir des forces externes agissant sur l'arbre, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \delta W = & -K_{xx}u\delta u - K_{xz}w\delta u - K_{zz}w\delta w - K_{zx}u\delta w - c_{xx}u\delta u \\ & -c_{xz}w\delta u - c_{zz}w\delta w - c_{zx}u\delta w \end{aligned} \quad (4.74)$$

Soient X et F le vecteur déplacement et vecteur chargement au niveau du palier :

$$X = [xyz\theta_x\theta_y\theta_z] \quad (4.75)$$

$$F = [fxfyfzM_xM_yM_z] \quad (4.76)$$

- **Matrice raideur non linéaire**

La raideur varie en fonction du chargement appliqué :

$$K = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial \theta_z} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{M}_z}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \dot{M}_z}{\partial \theta_z} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Numériquement, elle est donnée par le Jacobines. Si on suppose un contact de Hertz, la relation force/déformation est donnée par :

$$Q_i = k_e \delta^n_i$$

Où k_e est la raideur de l'élément roulant et l'exposant n dépend du type de paliers. δ est la déformation sous le $i^{\text{ème}}$ élément.

La force équivalente appliquée à chaque palier en fonction de Q est donnée par :

$$F = \sum_{\psi=0}^{\psi_i=\pm\psi} Q_i \cos \psi_i \quad (4.78)$$

La non-linéarité existe dans le cas des paliers hydrodynamiques. Car le film d'huile a des propriétés de rigidité et d'amortissement qui varient en fonction de la vitesse de fonctionnement de la turbine, comme sa vitesse de rotation (notamment aux vitesses critiques). Les réactions de

phase sont obtenues après intégration du champ de pression calculé à partir de l'équation de Reynolds non linéaire. En dynamique, cette charge est fonction de la vitesse de rotation. Le palier, dans ce cas, représente une excitation externe du rotor. C'est non linéaire.

$$M\ddot{x} + C(\Omega)\dot{x} + Kx = F_{palier}(x, \dot{x}, t) + F(t) \quad (4.79)$$

4.6. Partie simulations

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'influence de la rigidité des paliers hydrodynamiques sur le comportement dynamique des turbomachines. Nous avons conçu un modèle mathématique sous le nom de rotors (Nelson, kit, lalanne) dans un programme Matlab contenant les données d'ingénierie de l'élément de rotors (données d'arbre, de disque, de palier).

En plus des matrices de la rigidité et de l'amortissement sous la forme d'un ensemble de nœuds et d'éléments permettant de calculer les valeurs de la rigidité et de la première fréquence propre existantes en présence de la vitesse de 4800-28800 tr / min (Nelson), et 0-10000 (rotor kit, lalanne) capable de donner la géométrie du rotor en éléments finis. La recherche de valeurs propres est un processus essentiel dans l'étude de la dynamique du rotor.

Trois exemples différents ont été successivement étudiés : un rotor a un disque unique (rotor Nelson), un rotor à deux disques (rotor kit), et enfin un rotor multi-disques (rotor Lallanne)

4.6.1. Exemple 1 : Rotor Nelson

Le modèle considéré est un rotor de Nelson [68] (Figure 4.15), qui est un arbre en acier surplombant de 0,355 (m) de 14 longueurs différentes des sections transversales. L'arbre porte un rotor de masse 1.401 (kg) et excentricité de 0,635 (cm) à 0,0889 (m) séparés de l'extrémité gauche et supporté par deux paliers à une distance de 0.1651 (m) et 0,287 (m), respectivement. Six stations sont considérées lors de l'analyse harmonique comme montré à la figure.4.15, où les numéros de station désignent différents nœuds dans le modèle (1) extrémité gauche de l'arbre, (2) disque, (3) premier nœud de relèvement, (5) entre les deux relèvements, (4) deuxième nœud porteur et (6) extrême droite de l'arbre. Une densité de 7806kg / m³ et le module élastique 2.078E11 n / m² ont été utilisés pour rotor distribué et un disque concentré d'une masse de 1,401 kg, inertie polaire 0.002 kg.m² et inertie diamétrale 0,00136 kgm² était situé à la station cinq.

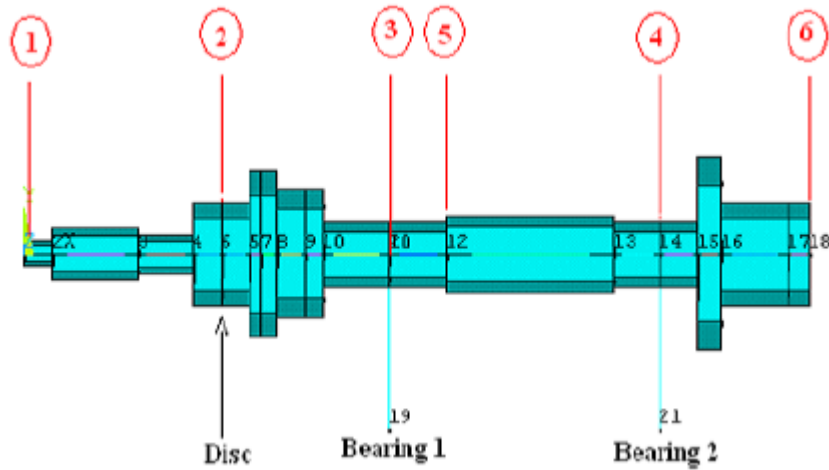


Figure 4.15 : Modèle de rotor Nelson avec différentes sections, disque et paliers. Les numéros indiquent les numéros de station.

Tableau 4.1 : Données géométriques de l'élément portant le rotor Nelson.

Nœud d'élément No	Emplacement du nœud (cm)	Paliers et Disque	Diamètre intérieur (cm)	Diamètre extérieur (cm)
1	0.0		0.0	0.51
2	1.27		0.0	1.02
3	5.08		0.0	0.76
4	7.62		0.0	2.03
5	8.98	Disque	0.0	2.03
6	10.16		0.0	3.30
7	10.67		1.52	3.30
8	11.43		1.78	2.54
9	12.70		0.0	2.54
10	13.46		0.0	1.27
11	16.51	palier	0.0	1.27
12	19.05		0.0	1.52
13	22.86		0.0	1.52
14	26.67		0.0	1.27
15	28.70	palier	0.0	1.27
16	30.48		0.0	3.81
17	31.50		0.0	2.03
18	34.54		1.52	2.03

4.6.1.1. Résultats et discussions

4.6.1.1.1. Données des paliers à film fluide

L'arbre est soutenu par deux paliers à film fluide. La rigidité des paliers hydrodynamiques (tableau 4.2) a été calculée par Matlab comme suit :

Rigidité des paliers hydrodynamiques (N/m)			
K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}
7.7539E + 007	2.3381E + 008	-5.4601E + 008	1.3399E + 008
1.3594E + 008	5.8365E + 008	-8.412E + 007	1.4718E + 008

Tableau 4.2 : Rigidité des paliers hydrodynamiques (N/m)

Alors que les composants d'amortissement sont $C_{zz} = C_{yy} = 1752$ (Ns / m), la réponse au déséquilibre pour une excentricité du centre du disque de 0,635 (cm) à la deuxième station a été Déterminée pour une plage de vitesses allant de 4 800 à 2 800 tr / min.

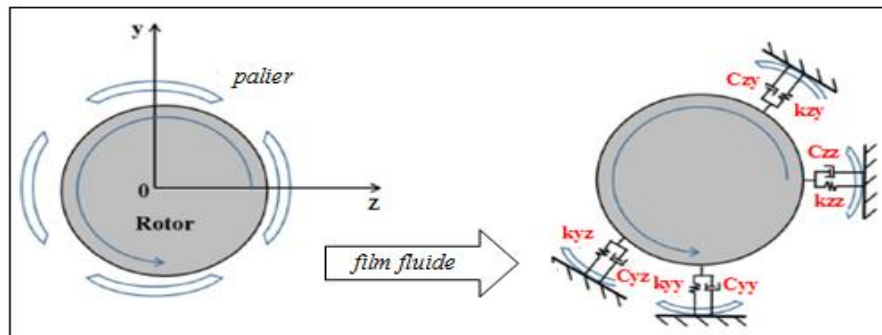


Figure 4.16 : Vue schématique du rotor sur les supports de palier et idéalisation des coefficients de film fluide

Le programme Matlab nous a également fourni un modèle de rotor Nelson avec différentes sections, disques et paliers . (Figure 4.17)

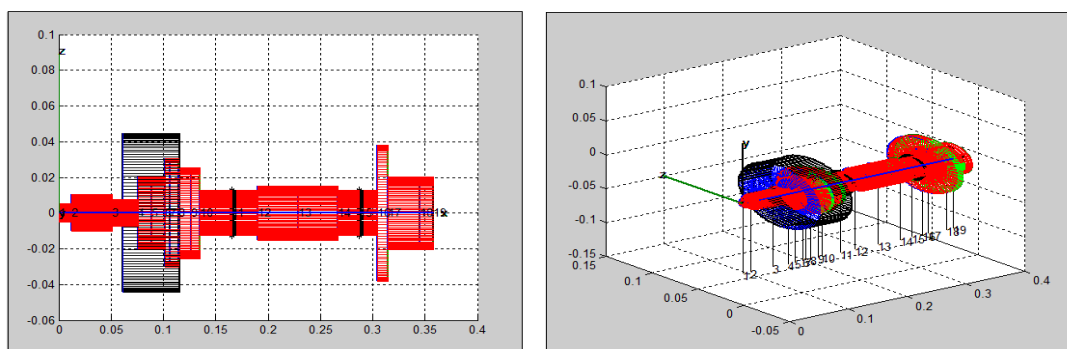


Figure 4.17 : Rotor Nelson avec différentes sections.

4.6.1.1.2 Estimation des vitesses critiques

4.6.1.1.3. Le diagramme de Campbell

La figure (4.18) illustre le schéma de Campbell pour le système de gyroscope lorsque l'amortissement interne est pris en compte. Le graphique est tracé en utilisant les fréquences de rotation (obtenues à partir de la partie imaginaire des valeurs propres), et il existe deux positions : la première position en rotation arrière « BW », où le rotor tourne dans le sens inverse. La deuxième position est la rotation « FW », où le rotor tourne dans le sens de la rotation. La vitesse critique correspondant à la première position et la vitesse critique correspondant à la deuxième position apparaissent dans les tableaux (4.3).

Le **tableau 4.3** liste des valeurs des premières vitesses critiques identifiées :

Mode	Vitesse critique (Hz)	Vitesse critique (tr/min)
5	3.3833e+002	2.0300e+004
6	4.0599e+002	2.4359e+004

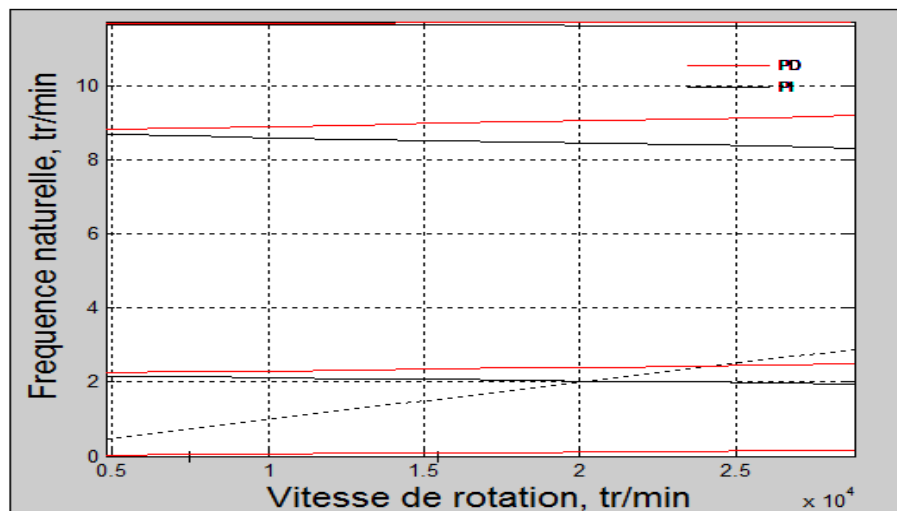


Figure 4.18 : Diagramme de Campbell.Rotor Nelson.

Les résultats concernant le diagramme de stabilité, le diagramme de rapport d'amortissement, les formes de modes, les orbites elliptiques, la précession de formes de modes, le diagramme de locus racine sont présentés par programme Matlab comme suit.

1. Diagramme de stabilité

Le diagramme de stabilité (figure4.19), présente l'évolution des constants d'amortissement en fonction de la vitesse de rotation. Comme la partie réelle est négative, la capacité se décompose

dans le temps, de sorte que le rotor a un comportement stable, car le mouvement du gyroscope tend à réduire la capacité.

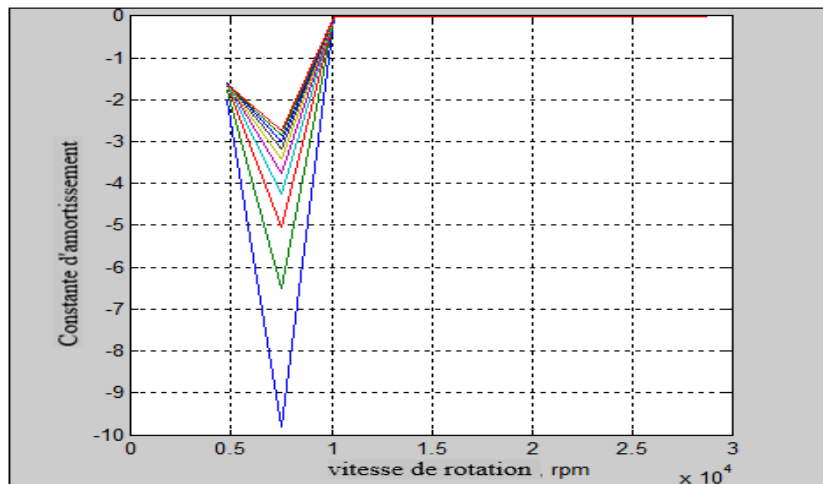


Figure 4.19 : Diagramme de stabilité.Rotor Nelson.

2. rapport d`amortissement

Le diagramme de rapport d`amortissement (Figure 4.20) présente l`évolution du rapport d`amortissement en fonction de la vitesse de rotation.On remarque que, quelle que soit la vitesse de rotation (4800-28800tr/min), le fonctionnement du système rotor est toujours stable.

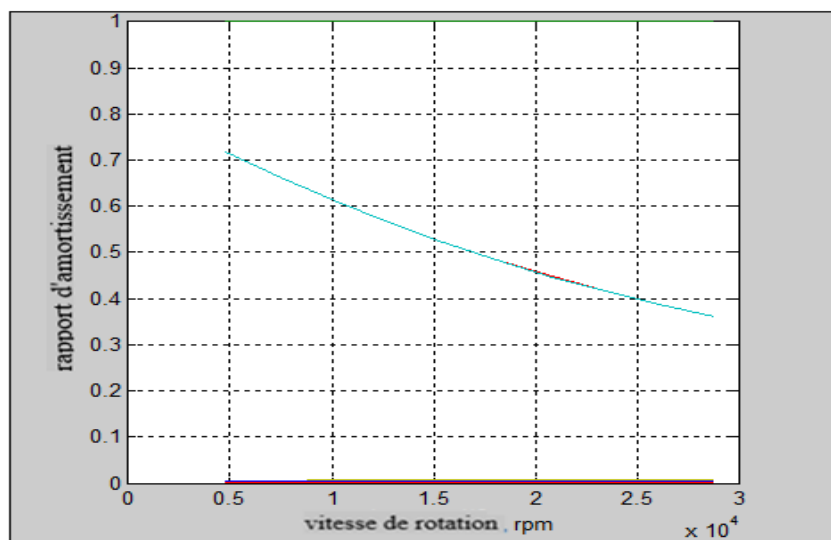


Figure 4.20 : Diagramme de rapport d`amortissement.

3. Formes de modes et précession des formes de modes

Le tableau 4.4 donne le résultat des formes des modes, la précession des formes et la vitesse de rotation pour les modes. Nous remarquons que les modes 1, 2,3, 4, 6, 8 et 10 sont des précessions directes (le rotor tourne dans le sens de la rotation), et les modes 5, 7 et 9 sont des précessions inverses (le rotor tourne dans le sens inverse).

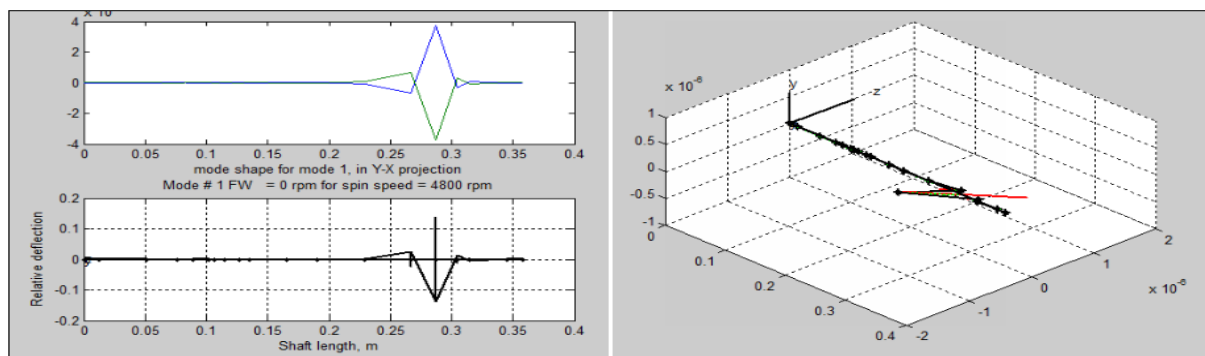
Tableau 4.4 : Formes des modes et précession des formes. (Rotor Nelson)

Modes	Précession	Vitesse de rotation (tr/min)
1	direct	FW=0
2	direct	FW=0
3	direct	FW=317.3495
4	direct	FW=317.4129
5	inverse	BM=21649.4092
6	direct	FW=22507.7833
7	inverse	BM=86716.8351
8	direct	FW=88098.7105
9	inverse	BM=116510.5693
10	direct	FW=116704.1825

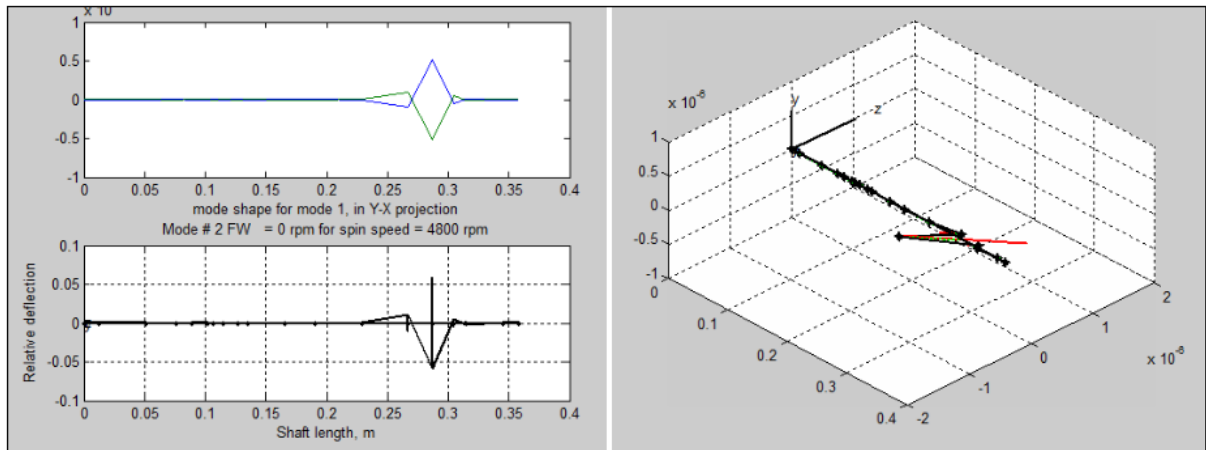
Les formes de mode d'un arbre en rotation indiquent l'emplacement de n'importe quel point de l'arbre pendant un mouvement tourbillonnant.

Les premiers mouvements d'arrière et d'avant du rotor simplement soutenu sont tracés à l'aide des vecteurs propres. Les modes 1, 2, 3, 4, 6, 8 et 10 montrent la première forme de mode tridimensionnel pour un rotor non amorti et les modes 5, 7 et 9 illustrent le même graphique pour un rotor amorti (l'amortissement interne indiquant le point de départ du tourbillon).

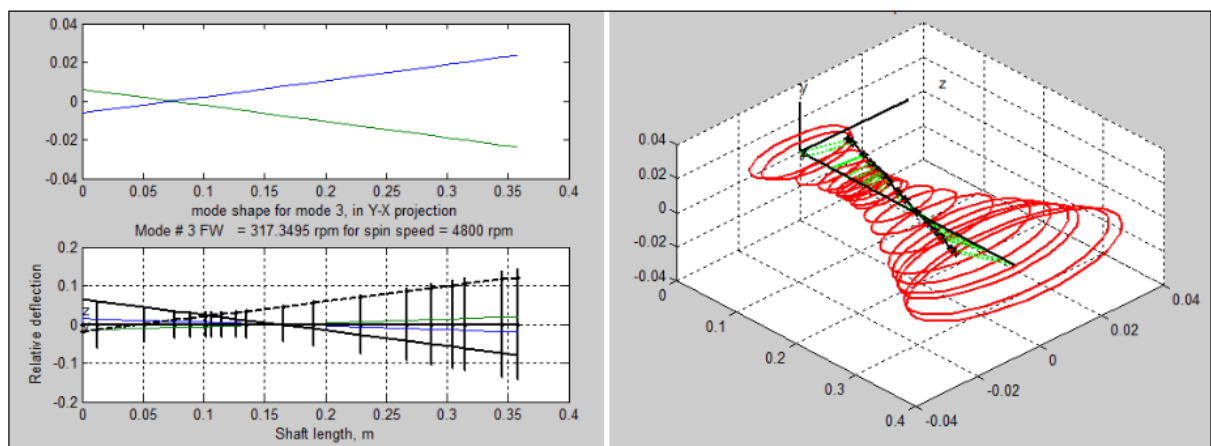
En mode arrière, le vortex arrière tourne dans le sens antihoraire. Les lignes vortex avant tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. 4.21 donne la déviation relative en fonction de la longueur d'arbre et confirme les résultats obtenus dans le tableau 4.4.



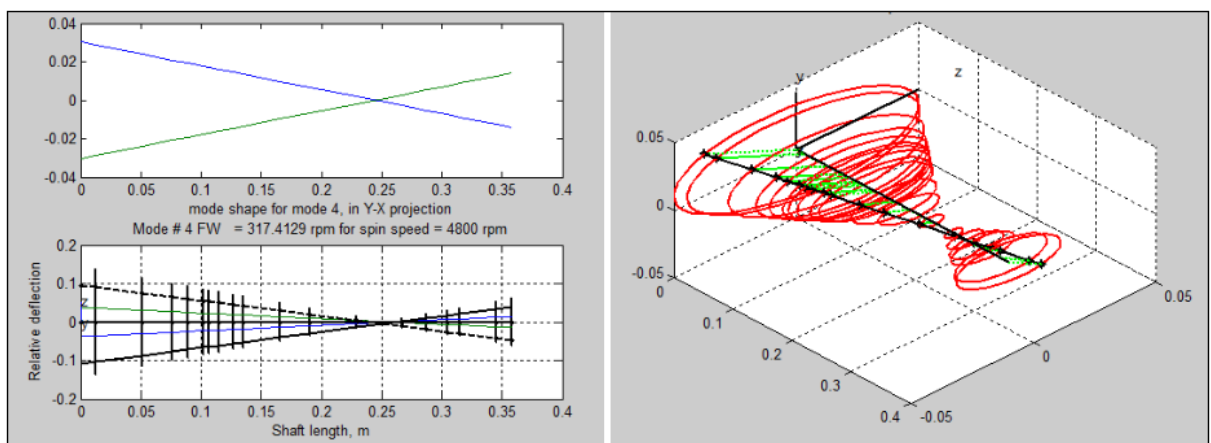
Mode 1 vers l'avant.



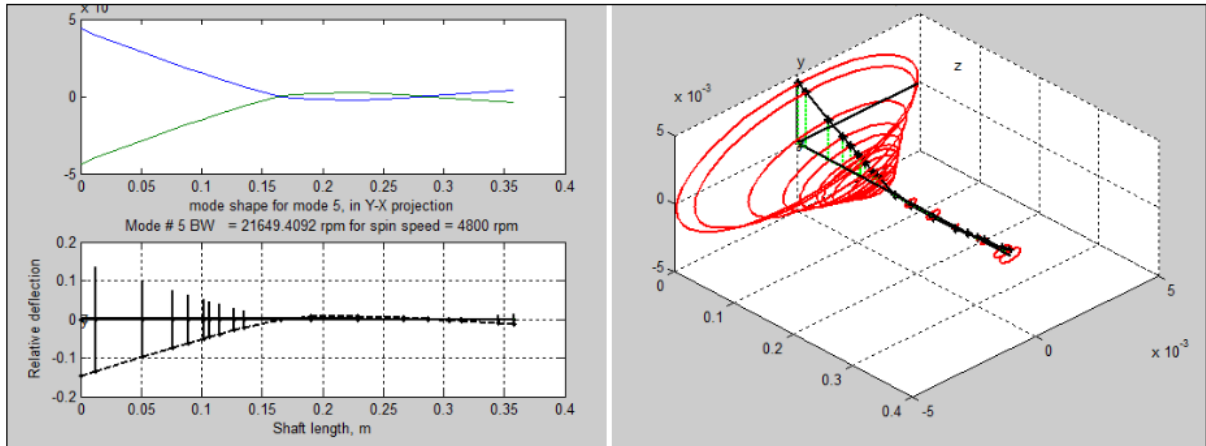
Mode 2 vers l'avant



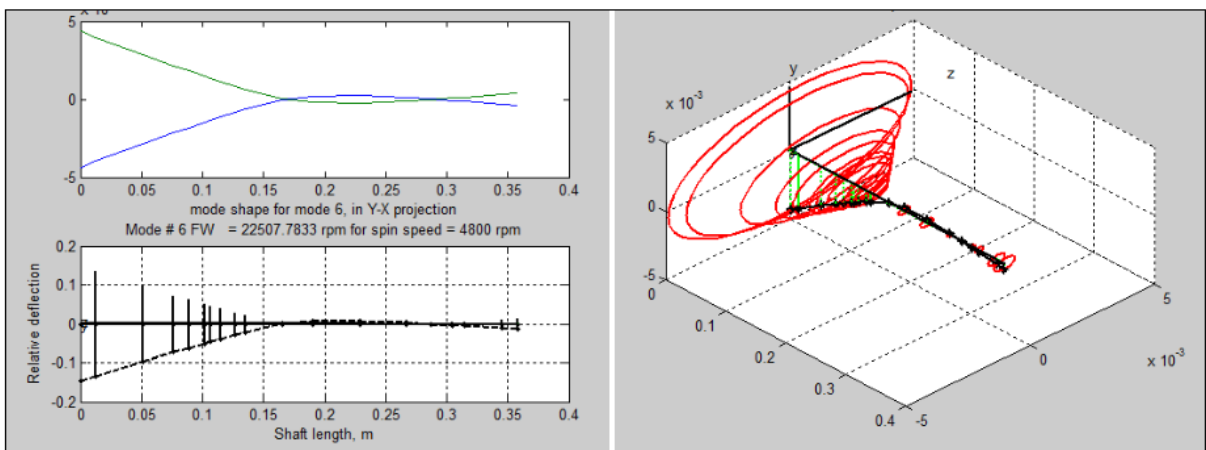
Mode 3 vers l'avant



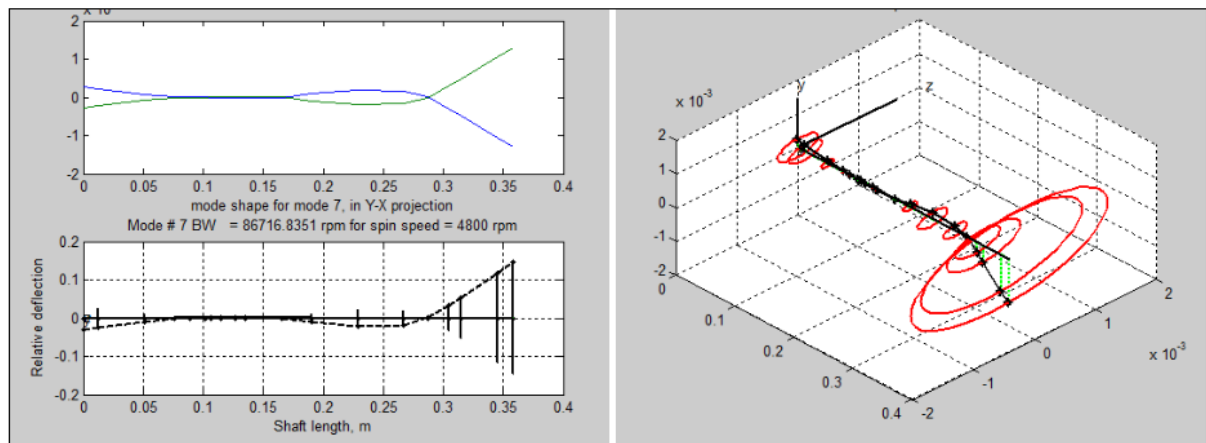
Mode 4 vers l'avant



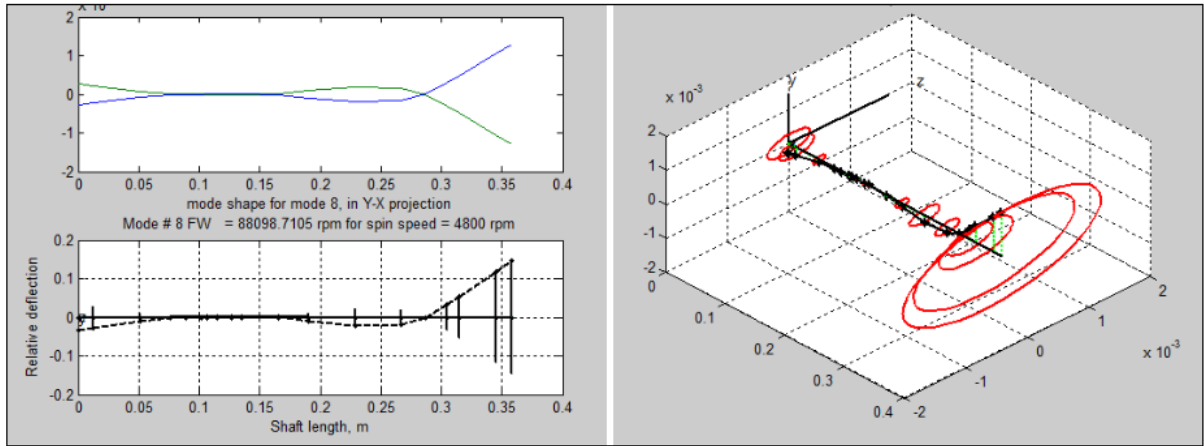
Mode 5 en arrière



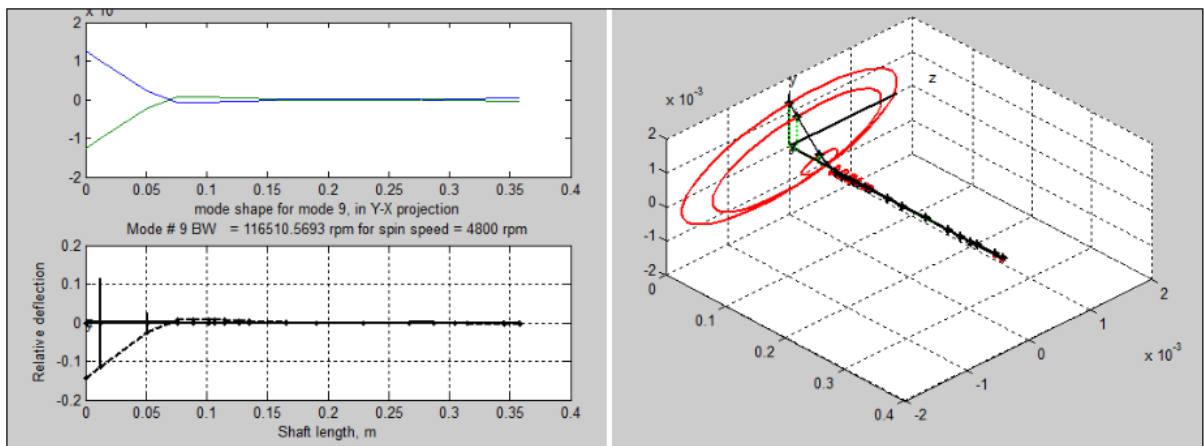
Mode 6 vers l'avant



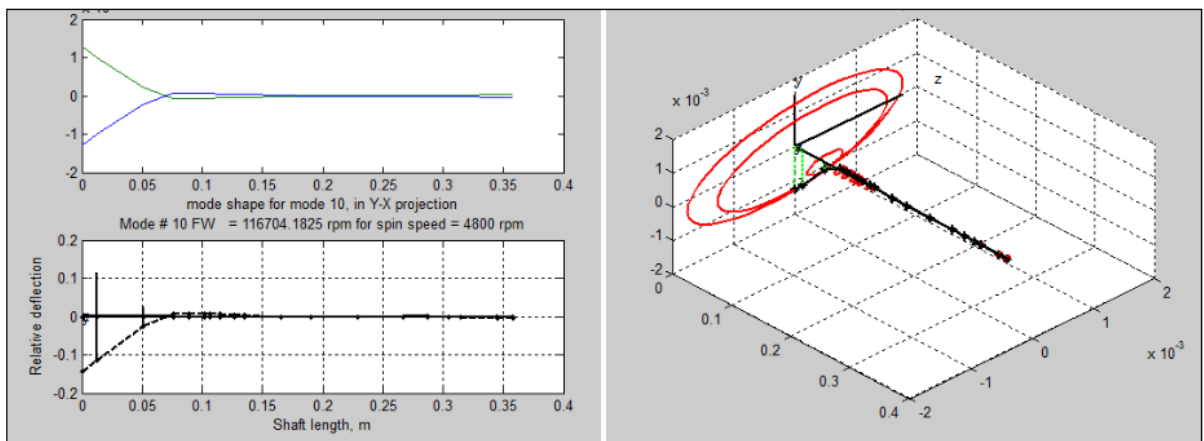
Mode 7 en arrière



Mode 8 vers l'avant



Mode 9 en arrière.



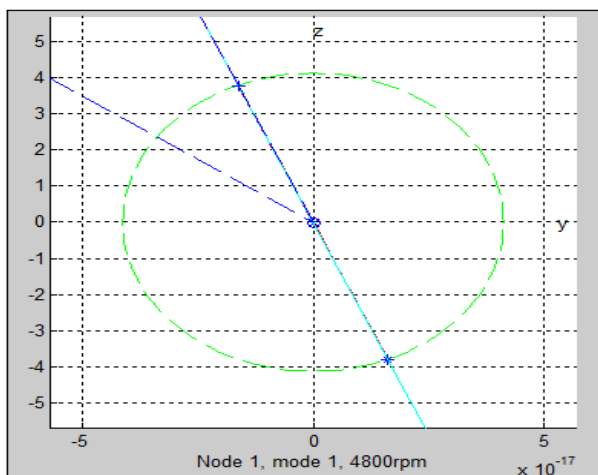
Mode 10 vers l'avant

Figure 4.21 : Formes des modes etprécension des formes des modes à 4800 tr/min.

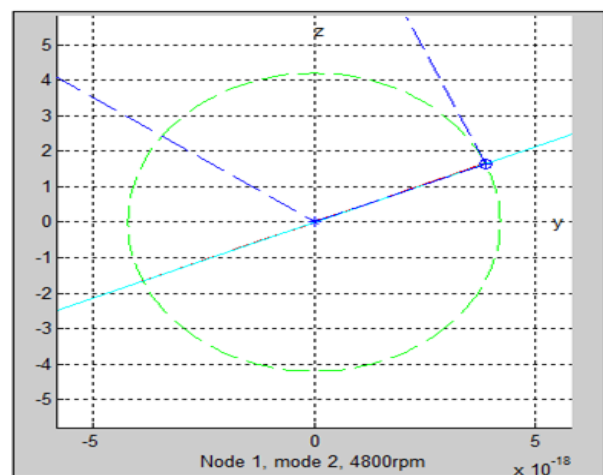
4. Orbites elliptiques

On voit la représentation des orbites sur les plans de mesure. Pour la vitesse de rotation 4800 tr/min, les orbites ont une forme pratiquement elliptique. Le sens de précession des orbites obtenues est représenté graphiquement en figure 4.22, avec le début de l'orbite représenté par un cercle et la fin représentée par une étoile. La figure montre que les orbites C1, C2, C3, C4, C6 et C8, C10 sont décrites dans le même sens que la vitesse de rotation du rotor Ω . Dans ce cas-là, sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée croît.

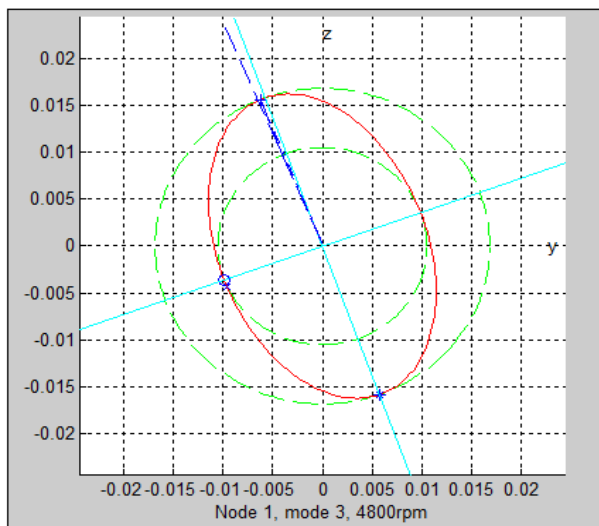
Les orbites C5, C7 et C9 sont décrites dans le sens inverse du sens de la vitesse de rotation du rotor, duquel est engendré un effet d'assouplissement et donc une chute de la vitesse critique.



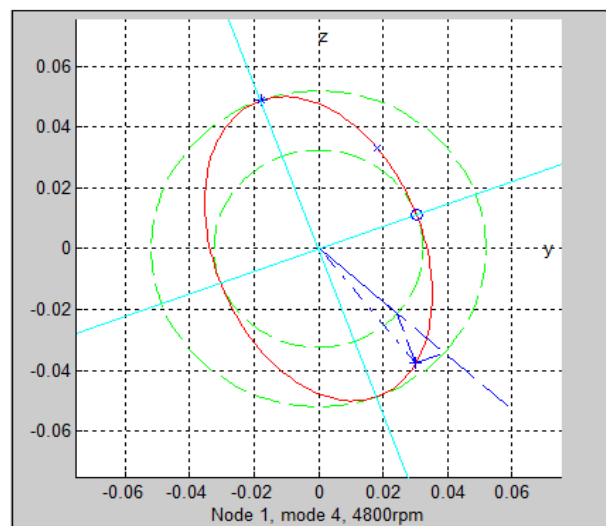
C1



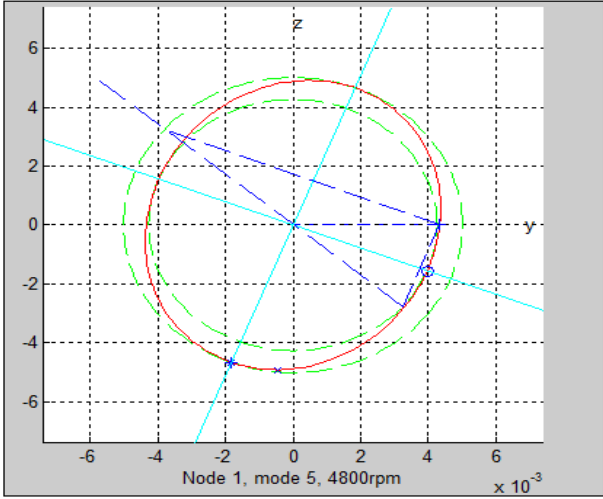
C2



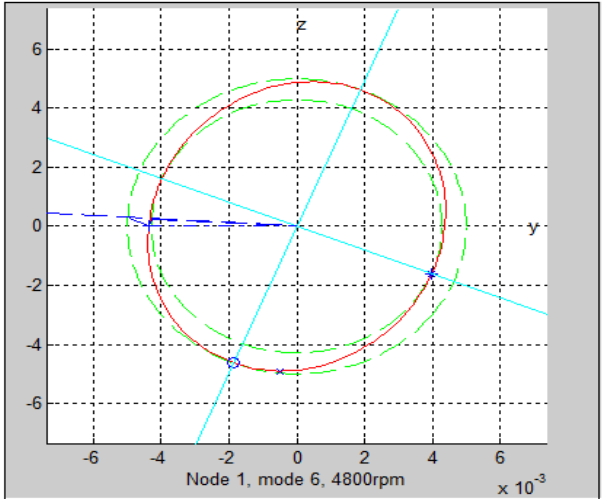
C3



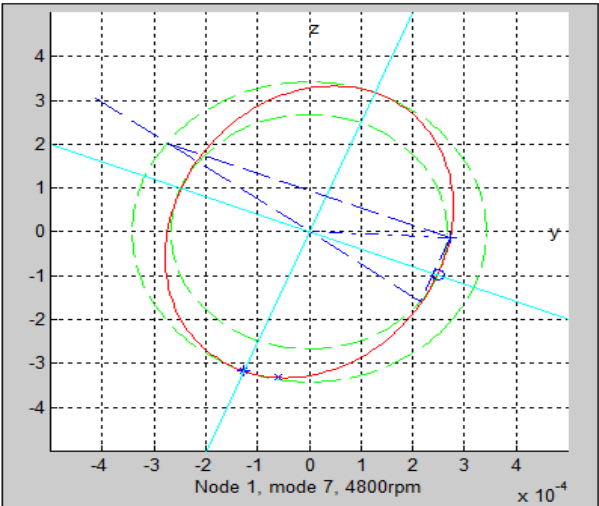
C4



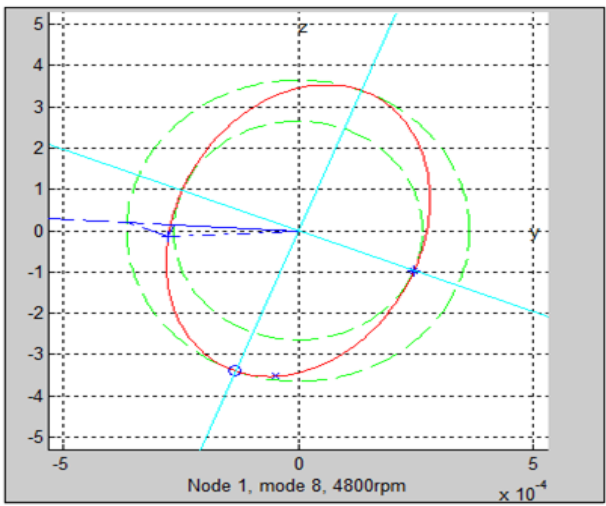
C5



C6



C7



C8

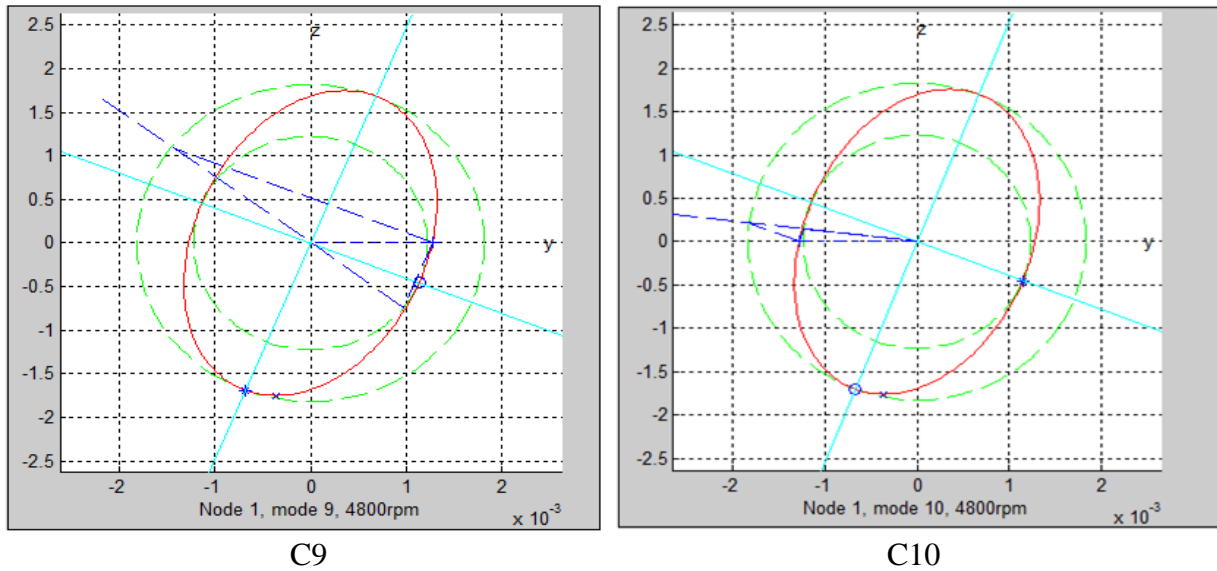
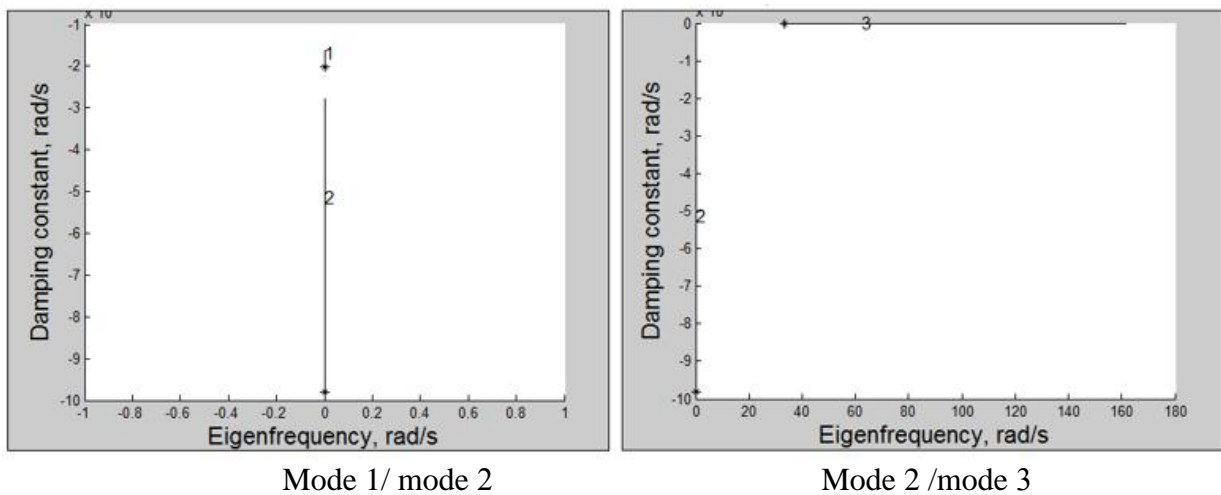
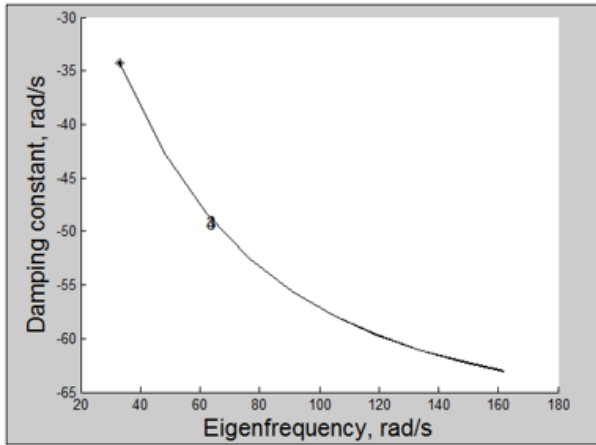


Figure 4.22 : Orbites à 4800 tr/min.

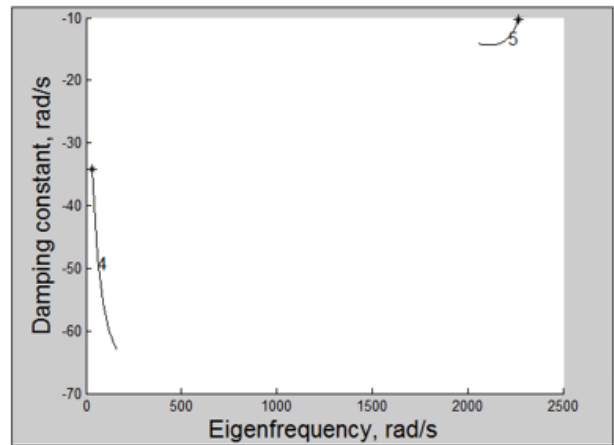
5. Diagramme de locus racine

Le diagramme de locus racine (figure 4.23) présente l'évolution du constant d'amortissement en fonction de la fréquence propre. On remarque, par exemple, que la direction des modes, 5, 7, 9 est de gauche à droite (impair), le mode est donc à précession inverse. Par contre, la direction des modes 1, 2, 4,6, 8,10 est de droite à gauche (pair), le mode est alors à précession directe.

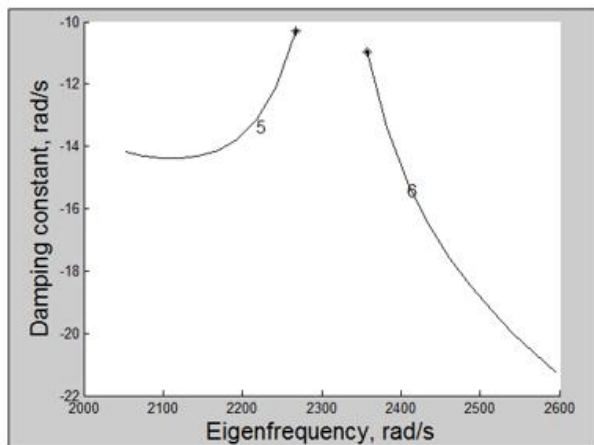




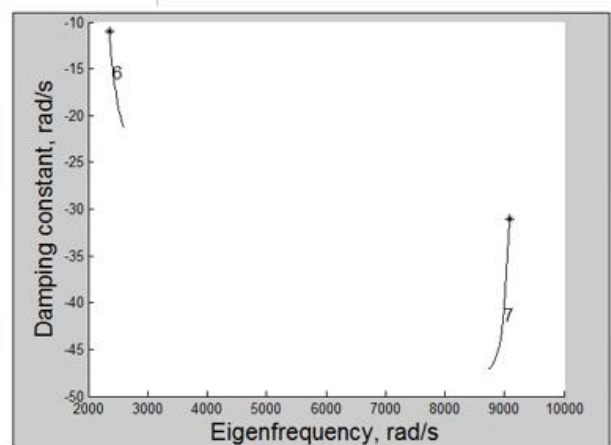
Mode 3/mode 4



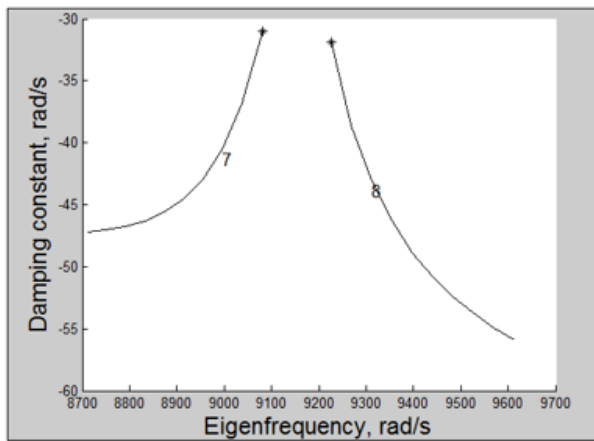
Mode 4/mode 5



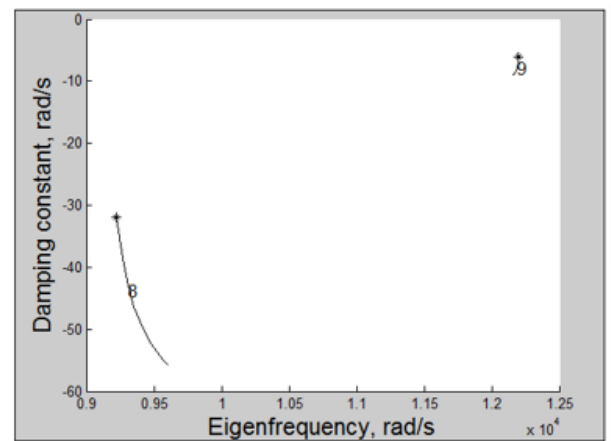
Mode 5/ mode 6



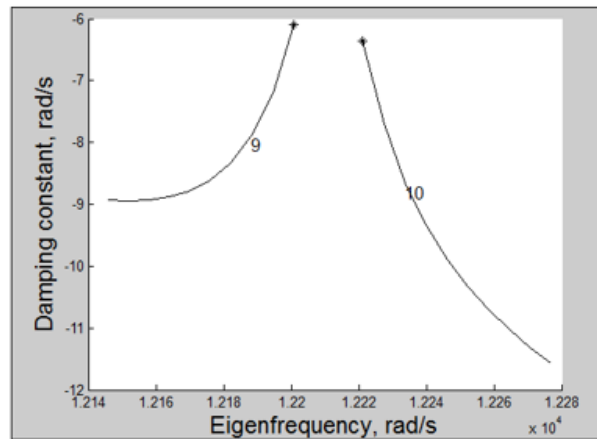
Mode 6/mode 7



Mode 7/mode 8



Mode 8 /mode 9



Mode 9 /mode 10

Figure 4.23 : Diagramme de locus racine.

4.6.2. Exemple 2 : rotor kit

Le modèle utilisé est un rotor kit [69] d'une longueur de 0,42 m comme le montre la figure 4.24. Une masse de 1,415 kg est montée sur l'arbre qui est supporté par deux paliers respectivement 0,09 (m) et 0,42 (m) séparés de l'extrémité gauche. Quatre stations sont considérées lors de l'analyse harmonique comme le montre la figure 4.24, où les numéros de station désignent différents nœuds dans le modèle (1) Disque, (2) Premier nœud de palier, (3) Disque, (4) Deuxième palier. Pour le rotor réparti et le disque concentré (1), la densité du matériau est de 7850 kg / m^3 et le module d'élasticité est de $2,06\text{E}11 \text{ N / m}^2$. D'une masse de 0,81 kg, disque (4) d'une masse de 0,6050 kg d'inertie polaire ($5,783\text{e-}4$, $0,4320\text{e-}4$) kg.m^2 et d'inertie diamétrale ($3,357\text{e-}4, 2,433\text{e-}4$) kg.m^2 .

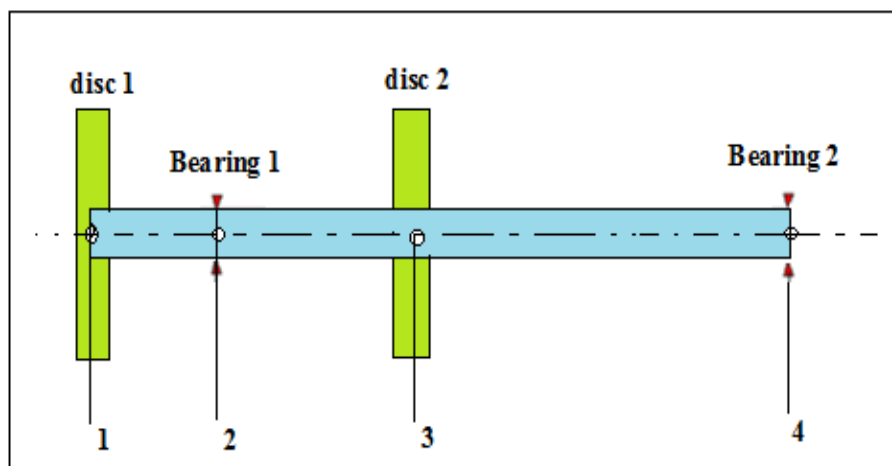


Figure 4.24 : Modèle schématique du rotor kit.

Tableau 4.5 : Données géométriques de l'élément portant le rotor kit.

Nœud d'élément No	Emplacement du nœud (cm)	Paliers et Disque	Diamètre intérieur (cm)	Diamètre extérieur (cm)
1	0	Disque	0	0.009525
2	0.09	palier	0	0.009525
3	0.22	Disque	0	0.009525
4	0.42	palier	0	0.009525

Le rotor est monté sur deux paliers à film fluide dont la rigidité (K_{yy} , K_{zz}) a été déterminée à l'aide du logiciel Matlab.

$$K_{yz} = K_{zy} = 0, \quad K_{yy} = K_{zz} = 2.2e5 \text{ Ns/m}$$

Les composantes de l'amortissement sont prises comme suit : $C_{zz} = C_{yy} = 61, 4000 \text{ (Ns / m)}$. La réponse au déséquilibre pour une excentricité centrale du disque comptée de 0,635 (cm) à la station (2) a été estimée pour un intervalle de vitesse de 0 à 10000 tr / min.

Le programme Matlab nous a également fourni un modèle de "rotor kit" avec différentes sections, disques et paliers. (Figure 4.25)

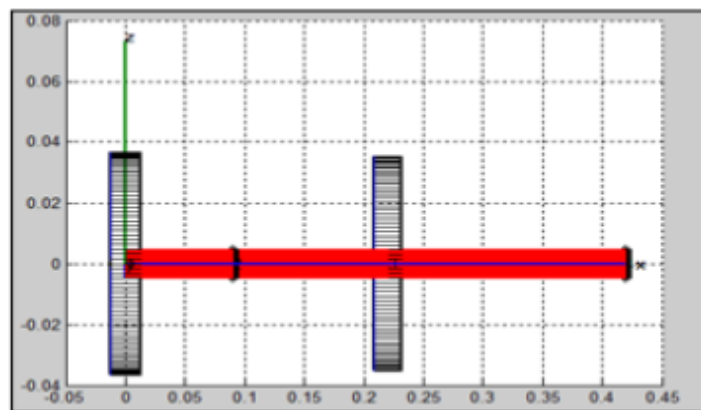


Figure 4.25 : rotor kit avec différentes sections.

La figure 4.26 illustre le diagramme de Campbell du système rotor-arbre, où l'amortissement du matériau interne des arbres est pris en compte. Le graphique est tracé en utilisant les fréquences de tourbillon (trouvées à partir d'une partie imaginaire des valeurs propres), qui sont deux positions, la première position en rotation inverse "BW", où le rotor tourne dans le sens opposé. La deuxième position est la rotation "FW", où le rotor tourne dans le sens de la rotation. La vitesse critique correspondant à la première position et la vitesse critique correspondant à la deuxième position apparaissent.

Les valeurs des premières vitesses critiques identifiées.

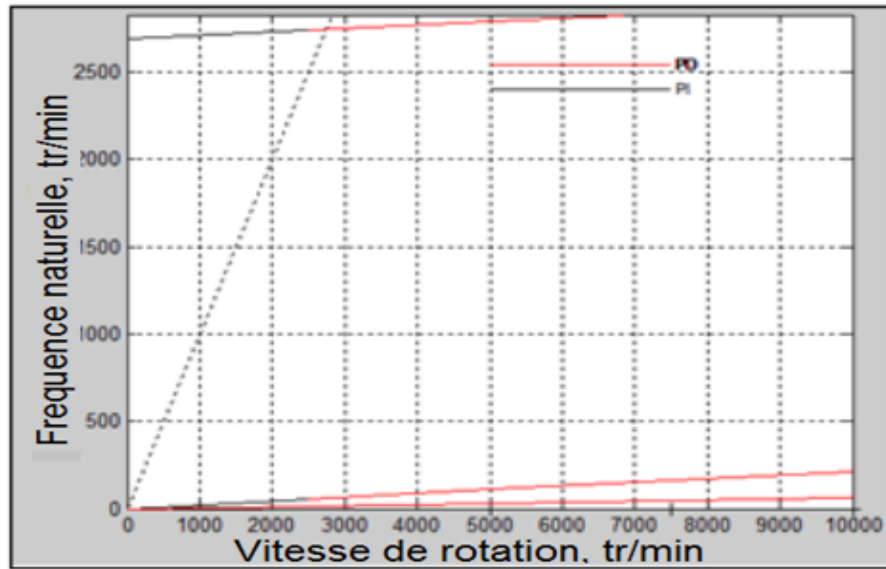


Figure 4. 26 : Diagramme de Campbell.Rotor kit

Le tableau 4. 6 donne le résultat des formes des modes et de la précession de forme et de la vitesse de rotation pour les modes correspondant aux vitesses critiques. Les modes 3, 4, 5, sont en précession directe (le rotor tourne dans le sens de la rotation).

La figure 4.27 donne l'écart relatif en fonction de la longueur de l'arbre et confirme les résultats obtenus dans le tableau 4.6.

Tableau 4.6 : Formes des modes et précession des formes. (Rotor kit)

Modes	Précession	Vitesse de rotation (tr/min)
3	direct	0
4	direct	FW=56.2856
5	direct	FW=2741.7408

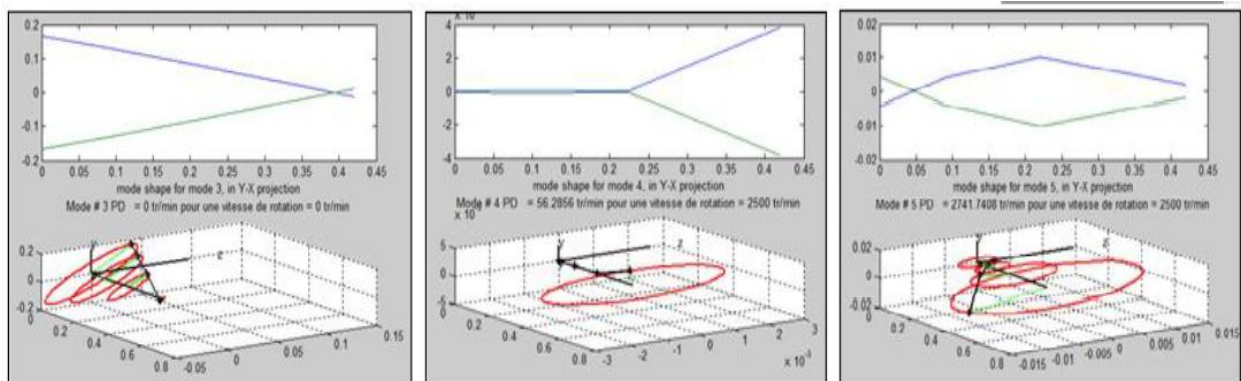


Figure 4.27 : Formes des modes et précession des formes à 0 tr / min.

La figure 4.28 présente l'évolution de la constante d'amortissement en fonction de la vitesse de rotation. A travers le diagramme, on remarque que les valeurs du facteur d'amortissement sont négatives et indiquent donc que le rotor est stable.

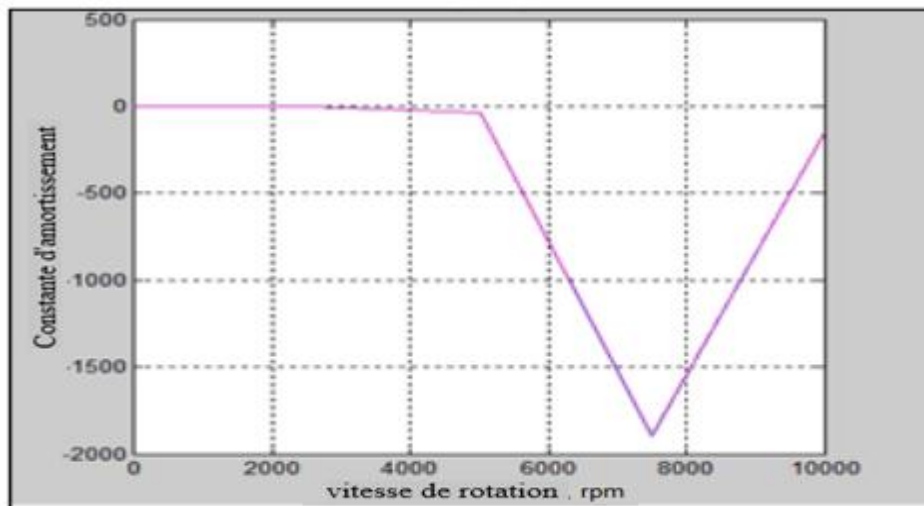


Figure 4.28 : Diagramme de stabilité.

4.6.3. Exemple 3 : rotor lalanne

Un système dynamique de rotor peut être décomposé en sous-systèmes. Cela permet divers composants de modèles détaillés.

Le modèle utilisé est un rotor Lalanne [48] d'une longueur de 1,3 m comme le montre la figure 4.29. Une masse de 115,66 kg est montée sur l'arbre qui est supporté par deux paliers respectivement 0,2 (m) et 1,3 (m) de l'extrémité gauche. 5 stations sont prises en compte lors de l'analyse harmonique, dans laquelle les numéros de station désignent différents nœuds du modèle : premier nœud de palier (1), disque (1), disque (2), disque (3), deuxième palier (5). Pour le rotor réparti et le disque concentré (1), la densité du matériau est de 7800 kg / m³ et le module d'élasticité est de 2E11 N / m². D'une masse de 0,81 kg, disque (1) d'une masse de 14,58 kg et disque (2) d'une masse de 45,95, disque (3) d'une masse de 55,13 kg, inertie polaire (0,123 0,976 1,171) kg.m² et diamétral inertie (0,0646 0,498 0,603) kg.m².

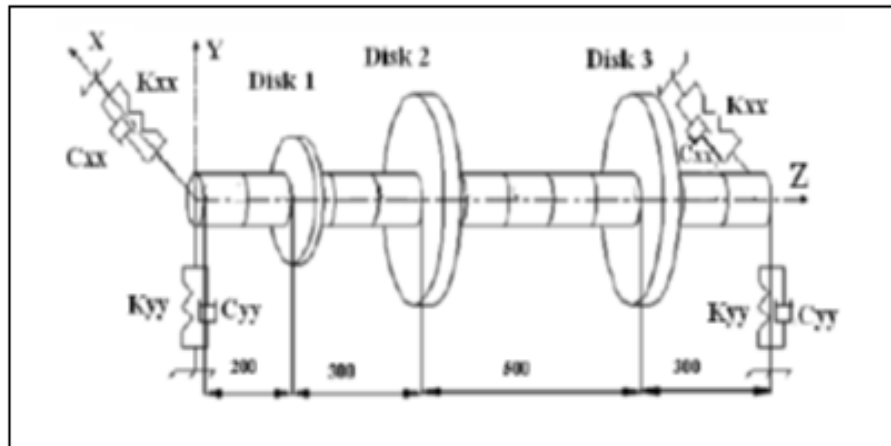


Figure 4.29 : Modèle schématique du rotor Lalanne.

1. Calcul des valeurs de fréquence du système réelle et imaginaire

Un modèle mathématique a été conçu sous le nom de rotor Lalanne en utilisant Matlab qui comprend les données de chaque élément du rotor Lalanne (arbre, disque et paliers), ainsi que les matrices de rigidité et d'amortissement sous la forme d'un ensemble de nœuds et d'éléments ont été utilisées pour déterminer les valeurs de la rigidité et de la coefficient d'amortissement et fréquence propre à un intervalle de vitesse allant de 0 à 10000 tr / min (tableau 4.7).

Tableau 4.7 : Données géométriques de l'élément portant le lalanne.

Nœud d'élément No	Emplacement du nœud (cm)	Paliers et Disque	Diamètre intérieur (cm)	Diamètre extérieur (cm)
1	0.2	palier	0	0.1
2	0.3	Disque	0	0.1
3	0.5	Disque	0	0.1
4	1	Disque	0	0.1
5	1.3	palier	0	0.1

Le rotor est monté sur deux paliers à film fluide dont la rigidité (K_{yy} , K_{zz}) a été déterminée à l'aide du logiciel Matlab.

- $K_{yz} = K_{zy} = 0$
- Paliers 1 : $k_{yy1} = 7e7$ (Ns / m), $k_{zz1} = 6e7$ (Ns / m),
- Paliers 2 : $k_{yy2} = 5e7$ (Ns / m), $k_{zz2} = 4e7$ (Ns / m),
- Les composants de l'amortissement sont pris comme :
- Paliers 1 : $C_{yy1} = 7e7$ (Ns / m), $C_{zz1} = 5e7$ (Ns / m),
- Paliers 2: $C_{yy2} = 6e7$ (Ns / m), $C_{zz2} = 4e7$ (Ns / m).

Le programme Matlab nous a également fourni un modèle de rotor lalanne avec différentes sections, disques et paliers . (Figure 4.30).

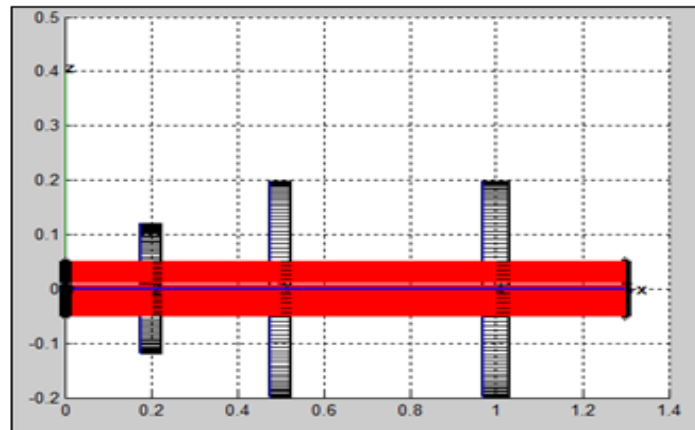


Figure 4.30 : rotor lalanne avec différentes sections.

Les forces de dissipation de rotation sont proportionnelles à la vitesse de rotation et agissent tangentiellement sur l'orbite du rotor, et sont connues pour provoquer une instabilité après une certaine vitesse de rotation. Un groupe d'analyses a permis de déterminer la stabilité du système d'arbres en termes de stabilité limite de la vitesse de rotation en plus de la réponse du déséquilibre, qui a été résumée comme suit :

1. Calcul des vitesses critiques.
2. Évaluation de la stabilité.
3. Formes du mode rotor.
4. Prédiction de la réponse au déséquilibre du rotor.

1.1. Calcul des vitesses critiques

La figure 4.31 illustre le diagramme de Campbell pour le système de gyroscope lorsque l'amortissement interne est pris en compte. Le graphique est tracé en utilisant les fréquences de rotation (obtenues à partir de la partie imaginaire des valeurs propres), et il y a deux positions : la première position de rotation inverse "BW". La deuxième position est la rotation "FW". La vitesse critique correspondant à la première position et la vitesse critique correspondant à la seconde position sont indiquées comme suit :

Tableau 4.8. Les valeurs des premières vitesses critiques.

Mode	Vitesse critique (Hz)	Vitesse critique (tr/min)
1	5.9356e+002	3.5613e+003
2	6.2686e+001	3.7610e+003
3	1.6090 ^e +002	9.6539 ^e +003

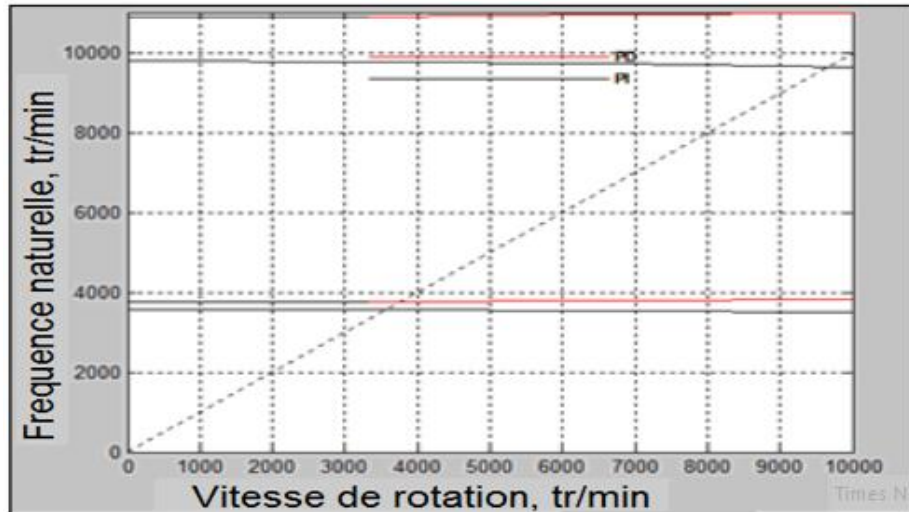


Figure 4.31 : Diagramme de Campbell.Rotor lalanne.

1.2.Évaluation de la stabilité

Le diagramme de stabilité (figure 4.32) montre l'évolution des constantes d'amortissement en fonction de la vitesse de rotation. La partie réelle étant négative, la capacité se décompose avec le temps, de sorte que le rotor a un comportement stable, car le mouvement du gyroscope a tendance à réduire la capacité.

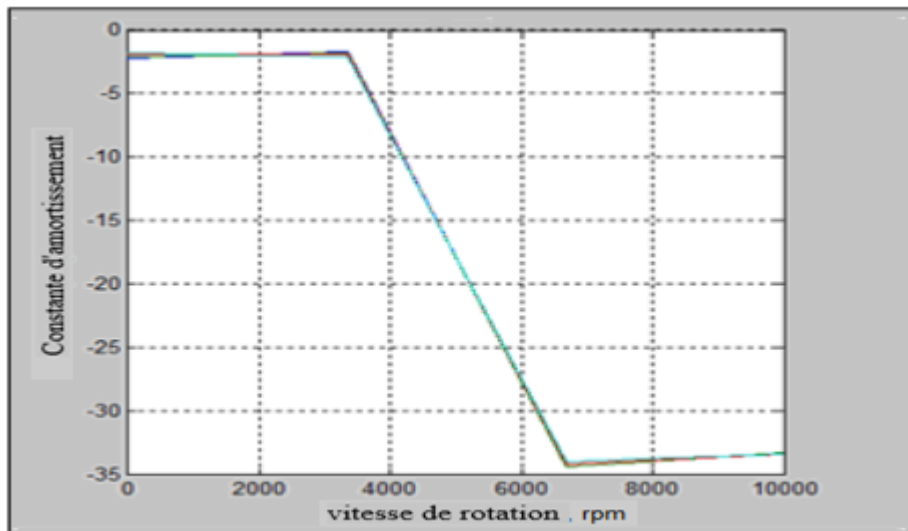


Figure 4.32 : Diagramme de stabilité.Rotor lalanne.

1.3. Formes du mode rotor

Le tableau 4.9 donne le résultat des formes des modes, l'initiative des modèles et la vitesse de rotation des motifs. A noter que les modes 2 et 4 sont en précession directe (le rotor tourne dans le sens de rotation), et les modes 1, 3 sont en précession inverse (le rotor tourne dans le sens opposé).

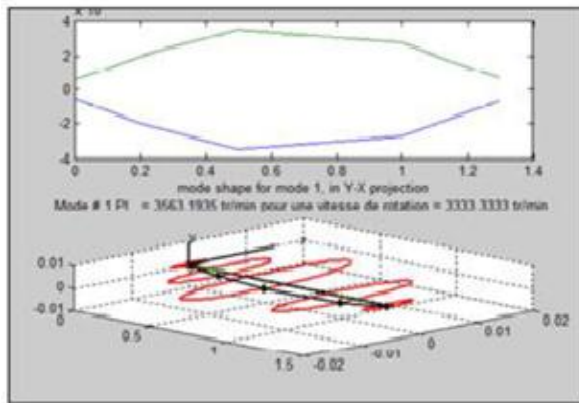
Tableau 4.9 : Formes des modes et précession des formes. (Rotor lalanne).

Modes	Précession	Vitesse de rotation (tr/min)
1	invers	FB=3563.1935
2	direct	FW=3775.9718
3	invers	FB=9773.8646
4	direct	FW=10911.6638

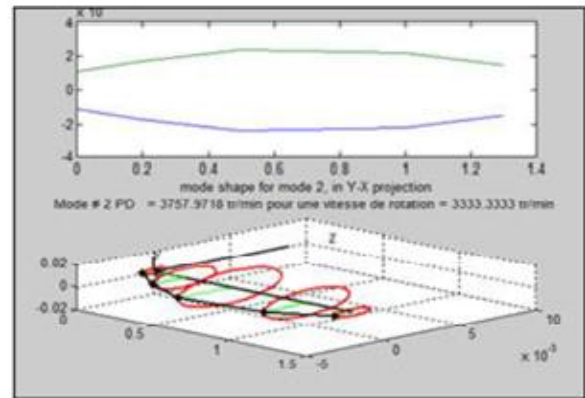
Les formes de mode d'un arbre rotatif indiquent l'emplacement de n'importe quel point sur l'arbre pendant un mouvement tourbillonnant.

Les premiers mouvements vers l'arrière et vers l'avant du rotor simplement supporté sont tracés à l'aide de vecteurs propres. Les modes 1, 3 montrent la première forme de mode tridimensionnel pour un rotor non amorti et les modes 2, 4 montrent le même graphique pour un rotor amorti (l'amortissement interne indiquant le point de départ du vortex).

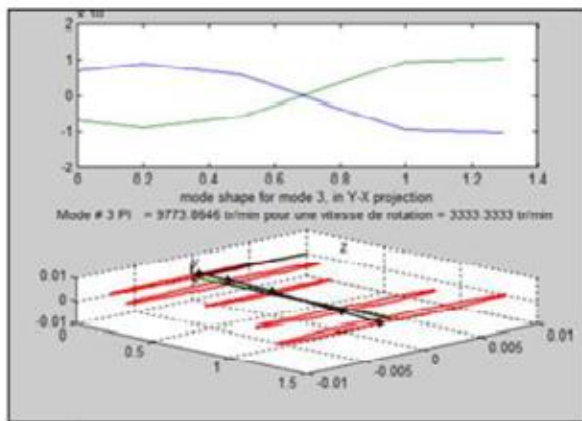
En position inverse, le vortex arrière tourne dans le sens antihoraire. Les lignes vortex avant tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. La figure 4.33 donne l'écart relatif en fonction de la longueur de la colonne et confirme les résultats obtenus dans le tableau 4.9.



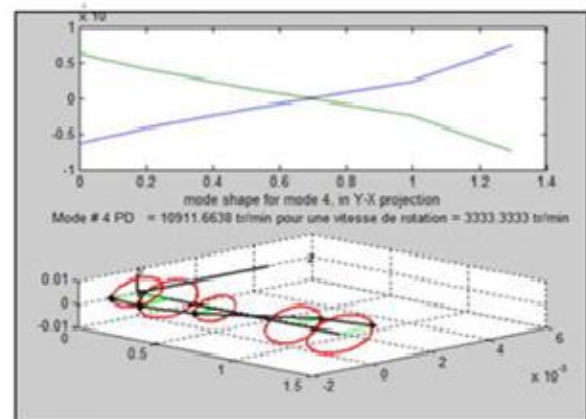
Précession inverse



Précession directe



Précession inverse



Précession directe

Figure 4.33 : Formes des modes et précession des formes à 0 tr / min.

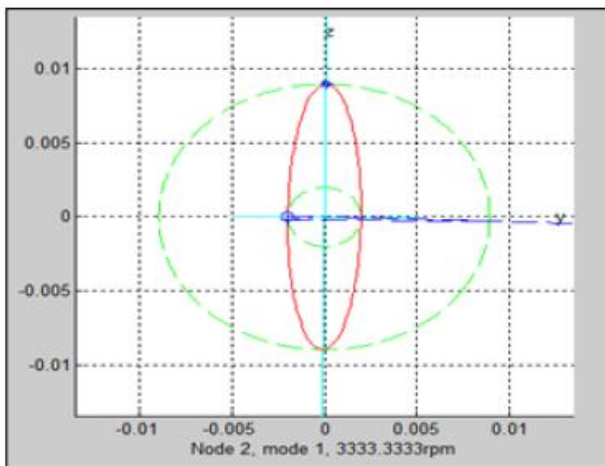
4.6.4. Prédiction de la réponse au déséquilibre du rotor

4.6.4.1. Orbites elliptiques

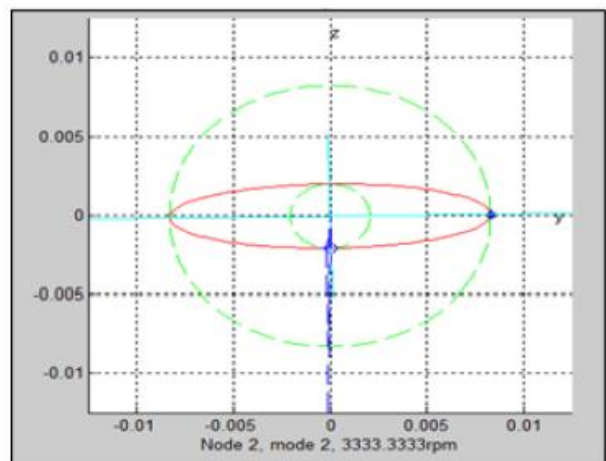
Pour la vitesse de rotation 3333,3333 tr / min, les orbites ont une forme pratiquement elliptique. La direction de précession des orbites obtenues est représentée graphiquement sur la figure 4.34 avec le début de l'orbite représenté par un cercle et la fin représentée par une étoile.

La figure montre que les orbites 4, 2 sont décrites dans le même sens que la vitesse de rotation du rotor Ω . Dans ce cas, sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée augmente la "précession directe".

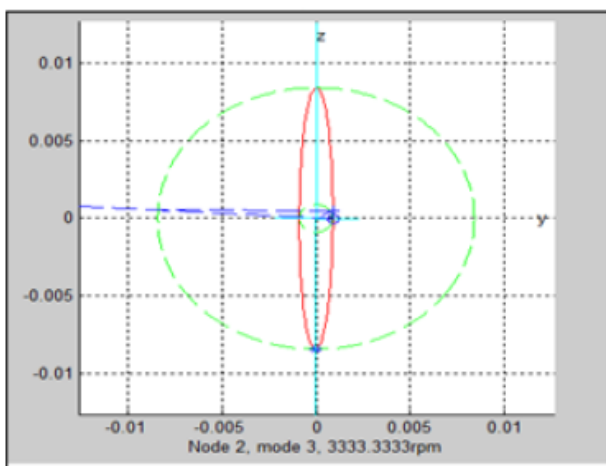
Les orbites 1, 3 sont décrites dans le sens opposé au sens de la vitesse de rotation du rotor, ce qui génère un effet de ramollissement et donc une baisse de la vitesse critique "précession inverse".



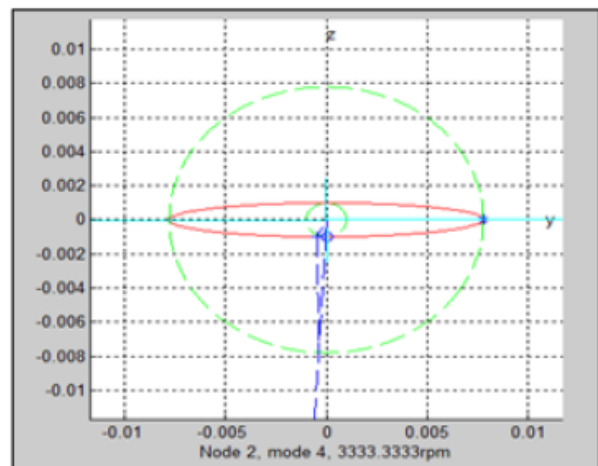
Précession inverse



Précession directe



Précession inverse

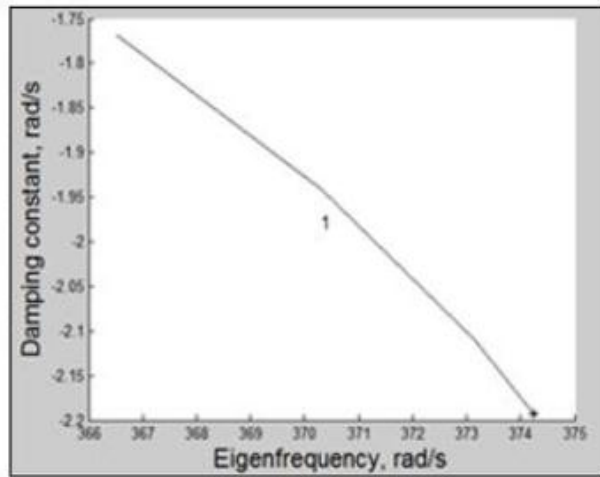


Précession directe

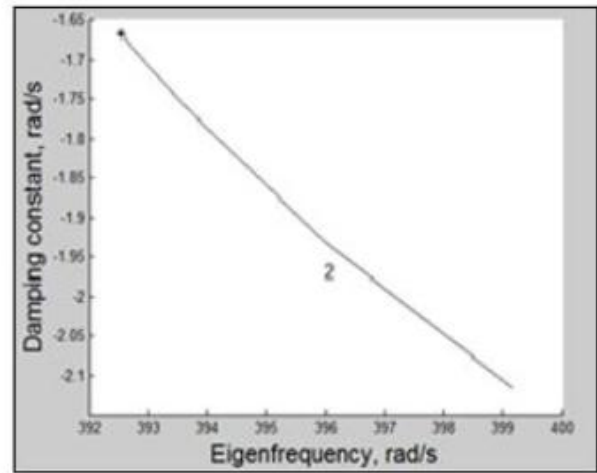
Figure 4.34 : Orbites à 3333,3333 tr / min

1.6.6.2 Diagramme de locus racine

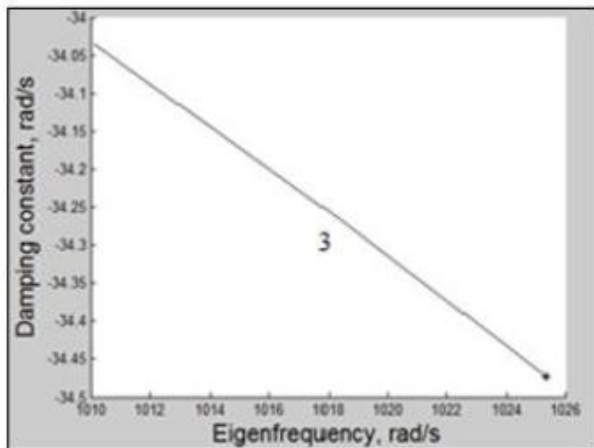
Le diagramme du locus racine (Figure 4.35) montre l'évolution de la constante d'amortissement en fonction de la fréquence propre. On remarque, par exemple, que le sens des modes, 1, 3, est de gauche à droite (impair), le mode est donc à précession inverse. Par contre, la direction des modes 2, 4 est de droite à gauche (pair). Le mode est à précession directe.



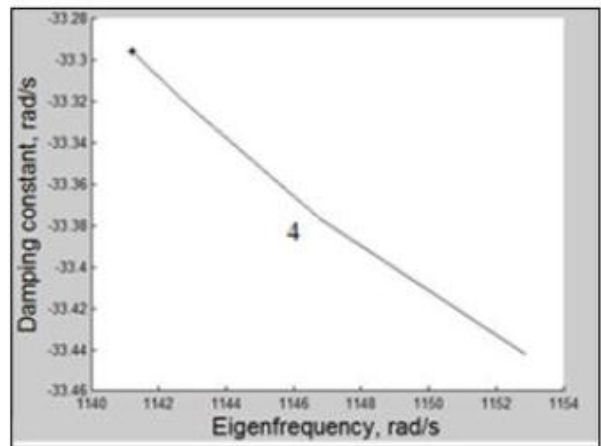
Précession inverse



Précession directe



Précession inverse



Précession directe

Figure 4.35 : Diagramme du locus racine.

4. 7. Conclusions

Ce travail examine l'analyse modale d'un système rotor en considérant l'amortissement interne du rotor. Au cours de la rotation avant, l'amortissement décroît à mesure que la vitesse de rotation augmente, tandis que l'amortissement en rotation vers l'arrière augmente en même temps que la vitesse de rotation. En utilisant ce système, la stabilité est découverte.

La valeur positive du facteur d'amortissement indique la stabilité du système. La vitesse critique lors du tourbillon avant et arrière est déterminée à l'aide d'un diagramme de Campbell. Pour la stabilité du système, celui-ci doit être utilisé à une vitesse inférieure à la vitesse critique de la partie réelle maximale contre la courbe de vitesse de rotation. La stabilité peut être trouvée.

Pour la valeur positive de la partie réelle maximale, le système est instable, tandis que pour la valeur négative de la partie réelle, le système est stable.

Les formes de mode sont tracées à l'aide des vecteurs propres de Matlab. Le comportement dynamique du système est identifié en effectuant l'analyse modale, ce qui facilite la conception dynamique des rotors. On peut en conclure que l'analyse modale est un outil permettant de se faire une idée du comportement dynamique du système. Les résultats des tests ont montré que la méthode des éléments finis (FEM) était très efficace pour étudier la stabilité du système.

Chapitre 5
Plans d'expériences méthode Plackett-Burman

Chapitre.5.Plans d'expériences méthode Plakett-Burman

5.1. Introduction

Les plans d'expériences permettent d'organiser au mieux les essais qui accompagnent une recherche scientifique ou des études industrielles [70]. Ils sont applicables à de nombreuses disciplines et à toutes les industries à partir du moment où l'on recherche le lien qui existe entre une grandeur d'intérêt, y et des variables, x_i . Il faut penser aux plans d'expériences si l'on s'intéresse à une fonction du type :

$$Y=f(x_i)$$

Avec les plans d'expériences on obtient le maximum de renseignements avec le minimum d'expériences. Pour cela, il faut suivre des règles mathématiques et adopter une démarche rigoureuse [71]. Il existe de nombreux plans d'expériences adaptés à tous les cas rencontrés par un expérimentateur. Les principes fondamentaux de cette science seront indiqués et les principaux plans seront passés en revue.

La compréhension de la méthode des plans d'expériences s'appuie sur deux notions essentielles, celle d'*espace expérimental* et celle de *modélisation mathématique* des grandeurs étudiées.

5.2. Notion d'espace expérimental

Un expérimentateur qui lance une étude s'intéresse à une grandeur qu'il mesure à chaque essai. Cette grandeur s'appelle la *réponse*, c'est la grandeur d'intérêt. La valeur de cette grandeur dépend de plusieurs variables. Au lieu du terme « variable », on utilisera le mot *facteur*. La réponse dépend donc d'un ou de plusieurs facteurs. Le premier facteur peut être représenté par un axe gradué et orienté (figure 5.1). La valeur donnée à un facteur pour réaliser un essai est appelée *niveau*. Lorsqu'on étudie l'influence d'un facteur, en général, on limite ses variations entre deux bornes : la borne inférieure est le niveau bas et la borne supérieure est le niveau haut.

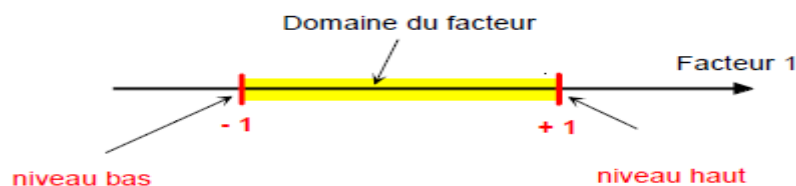


Figure 5.1 : Le niveau bas du facteur est noté par - 1 et le niveau haut par +1. Le domaine de variation du facteur est constitué de toutes les valeurs comprises entre le niveau bas et le niveau haut.

L'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre le facteur entre le niveau bas et le niveau haut s'appelle le domaine de variation du facteur ou plus simplement le *domaine* du facteur. On a l'habitude de noter le niveau bas par -1 et le niveau haut par $+1$

S'il y a un second facteur, il est représenté, lui aussi, par un axe gradué et orienté. On définit, comme pour le premier facteur, son niveau haut, son niveau bas et son domaine de variation. Ce second axe est disposé orthogonalement au premier. On obtient ainsi un repère cartésien qui définit un espace euclidien à deux dimensions. Cet espace est appelé *l'espace expérimental* (Figure 5.2).

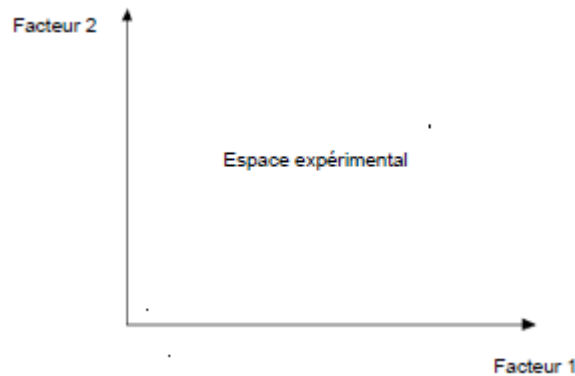


Figure 5.2 : Chaque facteur est représenté par un axe gradué et orienté. Les axes des facteurs sont orthogonaux entre eux. L'espace ainsi défini est l'espace expérimental.

Le niveau x_1 du facteur 1 et le niveau x_2 du facteur 2 peuvent être considérés comme les coordonnées d'un point de l'espace expérimental (Figure 5.3). Une expérience donnée est alors représentée par un point dans ce système d'axes. Un plan d'expériences est représenté par un ensemble de points expérimentaux.

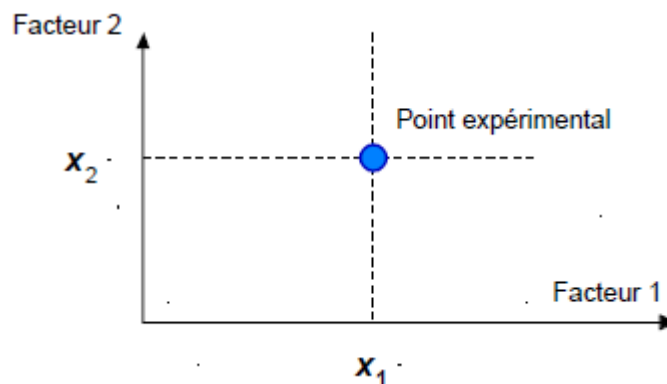


Figure 5.3 : Dans l'espace expérimental, les niveaux des facteurs définissent des points expérimentaux.

Le regroupement des domaines des facteurs définit le « *domaine d'étude* ». Ce domaine d'étude est la zone de l'espace expérimental choisie par l'expérimentateur pour faire ses essais. Une

étude, c'est-à-dire plusieurs expériences bien définies, est représentée par des points répartis dans le domaine d'étude (Figure 5.4).

Cette façon de représenter une expérimentation par des points dans un espace cartésien est une représentation géométrique de l'étude.

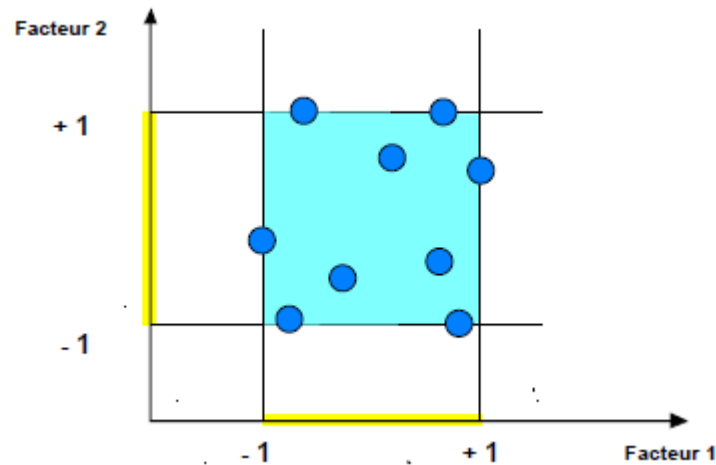


Figure 5.4 : Les points expérimentaux sont disposés dans le domaine d'étude défini par l'expérimentateur.

Les définitions qui ont été données s'appliquent bien aux variables continues. Mais il existe d'autres types de variables. Il y a les variables discrètes comme par exemple des personnes : Julien, Arthur, Louis, Simon et Nathan. On peut encore parler d'espace expérimental mais il n'aura pas les mêmes propriétés que l'espace des variables continues. Il y a également les grandeurs ordonnables comme, par exemple, des distances qui peuvent être courtes, moyennes et longues. Là aussi, la notion d'espace expérimental existe toujours mais cet espace possède des propriétés différentes des deux premiers.

5.3 Notion de surface de réponse

Les niveaux x_i représentent les coordonnées d'un point expérimental et y est la valeur de la réponse en ce point. On définit un axe orthogonal à l'espace expérimental et on l'attribue à la réponse. La représentation géométrique du plan d'expériences et de la réponse nécessite un espace ayant une dimension de plus que l'espace expérimental. Un plan à deux facteurs utilise un espace à trois dimensions pour être représenté : une dimension pour la réponse, deux dimensions pour les facteurs.

A chaque point du domaine d'étude correspond une réponse. A l'ensemble de tous les points du domaine d'étude correspond un ensemble de réponses qui se localisent sur une surface appelée *la surface de réponse* (Figure 5.5).

Le nombre et l'emplacement des points d'expériences est le problème fondamental des plans d'expériences. On cherche à obtenir la meilleure précision possible sur la surface de réponse tout en limitant le nombre d'expériences.

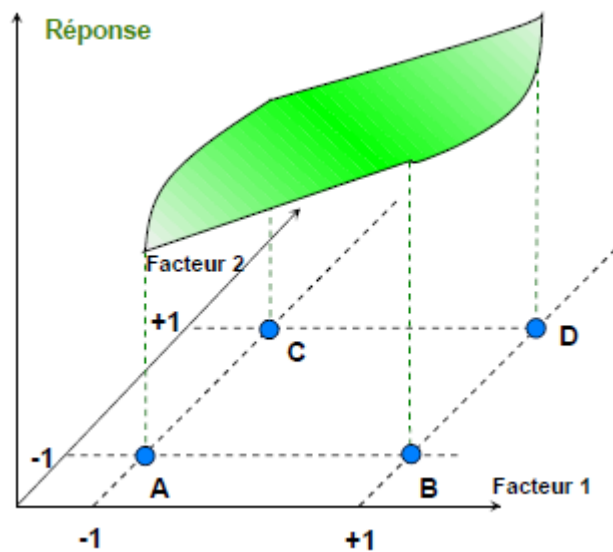


Figure 5.5 : Les réponses associées aux points du domaine d'étude forment la surface de réponse. Les quelques réponses mesurées aux points du plan d'expériences permettent de calculer l'équation de la surface de réponses.

5.4 Avantages de la conception des expériences

Le plan expérimental statistique, également appelé plan expérimental (DOE), est la méthodologie sur la façon de mener et de planifier des expériences afin d'extraire le maximum d'informations avec le nombre le plus bas d'analyses [72]. Une expérience conçue est un outil ou un ensemble d'outils utilisés pour la collecte des données de test. Les caractéristiques typiques d'un modèle expérimental sont les tests prévus, l'approche par analyse des données, la variabilité simultanée des facteurs et l'approche scientifique [73].

Avantages de la conception DOE :

- Aide à gérer les erreurs expérimentales.
- Aide à déterminer les variables importantes à contrôler et trouver les variables sans importance qu'il n'est pas nécessaire de contrôler.
- Elimine la confusion des effets lorsque l'effet des variables de conception est mélangé.
- Aide à mesurer les interactions.
- Permet l'extrapolation des données et la recherche du meilleur produit possible dans les plages de variables de test.

- Permet aux graphiques de traçage de décrire comment les variables sont liées et à quel niveau les variables donnent le produit optimal. L'utilisation de modèles statistiques nous montre l'interrelation entre les variables.

5.5. Les plans de Plackett-Burman (PB)

Une classe populaire des modèles de dépistage est la conception Plackett-Burman (PBD), développée par R.L. Plackett et J.P. Burman en 1946. Elle a été conçue pour améliorer le processus de contrôle de la qualité qui pourrait être utilisé pour étudier les effets des paramètres de conception sur l'état du système afin que des décisions intelligentes puissent être prises. Les tableaux orthogonaux conçus par Plackett et Burman (PB) sont des outils de dépistage, qui donnent des estimations non biaisées de tous les principaux effets sur le plus petit design possible. Divers nombres ou facteurs n peuvent être filtrés dans un $n + 1$ exécuter PB design. Une caractéristique est que la taille de l'échantillon est une multiple de quatre plutôt qu'une puissance de deux ($4k$ observations avec $k = 1, 2, \dots n$). Les conceptions PB sont utilisées pour étudier $n-1$ variables dans n expériences proposer des modèles expérimentaux pour plus de sept facteurs et, en particulier, pour $n \times 4$ expériences, c'est-à-dire 8, 12, 16, 20, etc., qui conviennent à l'étude jusqu'à 7, 11, 15, 19, etc. facteurs. Ces conceptions sont appelées conceptions saturées. Le principal avantage des conceptions saturées est le minimum nombre d'observations nécessaires pour calculer un effet pour un certain facteur. Une sélection de plans de Plackett-Burman à deux niveaux est égale aux plans factoriels fractionnaires saturés. Cela signifie que sept facteurs sont analysés avec des fractions factorielles (2^{7-4}) et avec un PBD nécessitant tous deux huit observations. Pour étudier 11 facteurs, un PBD est utilisé avec 12 essais, tandis que les plans factoriels fractionnaires nécessitent 16 observations. Ainsi, le PBD nécessite moins d'expériences que les plans factoriels hautement fractionnés qui incluent le même nombre de facteurs. La propriété projective de la conception PB est qu'elle permet à l'expérimentateur de suivre une conception initiale avec des analyses qui permettent une séparation efficace des effets principaux et des effets d'interaction. [74,75, 76, 77 et 78]. L'inconvénient de la conception PB est que le modèle de repliement est beaucoup plus complexe, chaque effet principal est replié à chaque interaction bidirectionnelle n'impliquant pas cet effet. Le manque d'ajustement est difficile à évaluer et les effets de premier ordre peuvent être confondus avec les effets d'interaction. Les plans PB sont des plans de résolution III avec l'attribut d'exiger le plus petit nombre de passages, mais ne permettent pas d'estimer les interactions entre les facteurs ; il peut identifier les principaux facteurs importants qui composent les interactions significatives possibles.. Une analyse plus poussée des principaux facteurs importants permettrait à l'analyste

pour identifier et estimer les termes d'interaction significatifs. Donc, l'utilisation d'un modèle de Plackett-Burman est appropriée pour le dépistage [79].

Les différentes étapes d'un plan de dépistage [80] peuvent être résumées comme suit :

- Sélectionne les facteurs
- Définir les niveaux pour les facteurs
- Sélectionnez les réponses à mesurer
- Générer une matrice de conception de PBD
- Randomiser (bloquer) et réaliser les expériences décrites dans le document expérimental installé
- Reproduire le design
- Développer un modèle
- Analyser statistiquement ou graphiquement les effets
- Interpréter l'analyse statistique et conclure
- Recommander les améliorations possibles et, si nécessaire, appliquer une résolution des dessins plus élevée
- Construire des produits de vérification.

5.6. Sélection des facteurs, des niveaux de facteurs et des réponses

La première étape critique dans un schéma de sélection consiste à sélectionner les facteurs qui doivent être mesurés et à définir leurs niveaux et leurs réponses. La sélection des facteurs repose sur l'expérience du chercheur, qui choisit un ou plusieurs réponses et découvre où, dans l'espace expérimental, des dérivés de la réponse pour chaque facteur peuvent être obtenus [76]. La connaissance appropriée des propriétés physiques des facteurs et la compréhension approfondie de la conception expérimentale augmentent les informations tirées des expériences. Les uns avec les autres, capable de régler et de réinitialiser de manière reproductible entre différents modèles d'expériences [80]. Si la plage de facteurs est trop petite, la variation de la réponse est trop faible et l'influence de l'erreur expérimentale sur la réponse est plus. Par contre, si la plage est trop grande, le premier degré modèle utilisé pour interpréter les résultats du plan expérimental ne serait pas valide. Par conséquent, dans un PBD de dépistage, une plage entre des niveaux bas et élevés de chaque facteur est généralement faible par rapport aux plages utilisées pendant la phase d'optimisation [76].

À partir des expériences, un certain nombre de réponses peuvent être déterminées en fonction des besoins de l'expérimentateur et du domaine de recherche. Par exemple, un expérimentateur serait intéressé par des réponses décrivant des réponses quantitatives telles que le contenu du médicament, la libération du médicament, dans le domaine de la formulation, zones de

développement ou de pic et hauteurs de pic en chromatographie. Les facteurs de réponse qualitatifs tels que la résolution et la rétention relative peuvent également être considéré [81].

5.6.1 Construction d'un plan de Plackett-Burman

Il s'agit d'utiliser la table des signes \pm de Plackett et Burman. Le premier essai correspond à la première ligne de la matrice choisie en fonction du nombre m de facteurs à étudier, les $n - 1$ suivants sont générés par permutation circulaire et on complète le plan en ajoutant une ligne de signes moins.

Tableau 5.1 : table des signes \pm de Plackett et Burman.

m	n	Premier essai d'un plan de Plackett et Burman
7	8	+++++ - - -
11	12	++++++- - - + -
15	16	+++++ - + -+++ - - + - - -
19	20	+++ -++++- + - + - - - -+++
23	24	++++++- + -+++ -+++ - + - + - - - -
35	36	- + -++++ - -+++++ -+++ - + - - - - + - + -+++ - + -

• Propriétés

Dans cette partie, nous allons donner les différents avantages et inconvénients des P B.

Les principaux avantages :

- Ils sont particulièrement économiques pour détecter les effets principaux. En effet, il suffit de $(k \cdot 22)$ expériences pour tester $((k - 1) \cdot 22)$ à $(k \cdot 22 - 1)$ facteurs à 2 niveaux (avec k entier positif).
- Si le nombre d'essais est une puissance de 2, le plan est équivalent à un plan factoriel fractionnaire et où le nombre de facteurs m est égal au nombre d'expériences moins un (8 essais pour 7 facteurs, par exemple).
- Ils sont orthogonaux, permettant ainsi d'estimer les paramètres du modèle avec une précision optimale.
- Ils sont des plans saturés, car ils comportent autant d'essais que de coefficients (correspondant aux effets principaux) à déterminer dans le modèle mathématique et sont de résolution III.

Toutefois, ils permettent d'étudier les interactions de 2 facteurs si le nombre d'essais n'est pas une puissance de deux sans étudier les interactions qui sont confondues avec les facteurs simples.

- **Les inconvénients**

- Ces plans n'utilisent que 2 niveaux uniquement et ne peuvent donc pas étudier les effets non linéaires.
- Les propriétés des plans de Plackett-Burman sont basées sur celles des matrices d'Hadamard. Cela contraint, toutefois, l'expérimentateur à un nombre d'essais n égal à un multiple de 4. Pour $m = n - 1$, les matrices d'Hadamard engendrent des simplexes, c'est-à-dire, des plans équiradiaux saturés.

5.6.2 Matrice de conception

Après la sélection des facteurs et de leurs niveaux, une matrice de conception est générée (par exemple, voir le tableau 5.2). La conception de dépistage de Plackett-Burman (PBD) est utilisée pour indiquer des factorielles fractionnaires à deux niveaux, bien que plusieurs niveaux soient possibles. Elle permet une estimation efficace des principaux effets de tous les facteurs explorés. Un exemple de PBD avec 12 analyses et 11 facteurs est présenté dans **Tableau 5.2**. Les colonnes représentent des facteurs avec des degrés de liberté égaux au nombre de niveaux dans la colonne. Les éléments dans les colonnes spécifient les niveaux haut (+1) et bas (-1) à définir pour les facteurs de l'expérience donnée. Les lignes de la matrice contiennent le processus exécuté. Hors de ces parcours, leur effet sur la variable peut être étudié. Le nombre de pistes descend des colonnes. Le post-traitement des résultats et l'effet principal de l'interaction peuvent être déterminés. Toute variable ayant un effet sur une autre variable peut être utilisée. La prévision des changements est plus précise dans la présence de plus de variables. Le PBD est particulièrement cyclique. Le plan expérimental du facteur 12 est obtenu à partir d'une première ligne qui décrit le premier essai, et dans le **tableau 5.2** [+ - + - - - + + + - +] où le signe "+" indique le facteur à son niveau haut et le signe "-" indique le facteur à son niveau bas, la deuxième ligne est obtenue en déplaçant le signe moins à l'extrême droite jusqu'au début de la ligne suivante et en faisant glisser le reste des signes de la rangée précédente une place le long. Le reste de la matrice est rempli de manière appropriée de la même manière. Les expériences 2 à 12 sont obtenues en notant toutes les permutations cycliques de cette ligne. Il est possible de vérifier que chaque facteur est examiné à six niveaux élevés et six faibles, et il est également possible de vérifier que le facteur principal n'est pas confondu lorsque les effets sont déterminés. Avec la matrice une formule mathématique est obtenue qui donne l'effet de changement de variable sur le modèle total.

Tableau 5.2 : Exemple de conception Plackett-Burman en 12 étapes.

Procès	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11
1	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+
2	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-
3	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+
4	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+
5	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+
6	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-
7	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-
8	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-
9	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+
10	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-
11	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Des PBD modifiés ont également été rapportés [82]. Pour examiner l'influence d'un nombre de facteurs sélectionnés à trois niveaux, les trois niveaux considérés étaient un niveau nominal et deux niveaux extrêmes. Le niveau nominal (niveau 0) est le niveau du facteur et les niveaux extrêmes (niveaux -1 et +1) sont les niveaux s'écartant du nominal. Le premier type est un PBD centré, qui est effectué aux niveaux extrêmes, c'est-à-dire -1 et +1, mais est appelé « centré » parce que les valeurs des niveaux extrêmes sont plus petites et plus grandes que la valeur nominale. La valeur nominale est située au centre de l'intervalle entre les deux niveaux extrêmes. Le deuxième type du même genre est le PBD reflétant le principe de deux conceptions à deux niveaux. Le premier est effectué avec le niveau nominal et un niveau extrême pour chaque facteur, et le second avec le niveau nominal et l'autre niveau extrême. Dans un PBD correspondant, les niveaux « 0 » et « +1 » sont entrés une fois pour (-) et (+) ; puis on entre les niveaux « 0 » et « -1 » pour (-) et (+) [83].

Dans un PBD saturé, les facteurs « n » peuvent être examinés en « n + 1 ». Cela signifie que 11 facteurs peuvent être étudiés avec seulement 12 essais. Le résultat obtenu ne serait pas suffisant. Comme le modèle mathématique suppose seulement que les réponses varient linéairement en fonction de chaque facteur, une telle réponse obtenue sera illustrée par une ligne droite entre les deux réponses mesurées. Dans certains cas, la réponse pourrait aussi être une courbe qui reste à l'intérieur de la mesure résultat ou une courbe qui saute en dehors du résultat de la réponse mesurée. Ensuite, il est impératif d'ajouter un ou plusieurs points centraux au « PBD » classique. Les dessins sont ensuite appelés “dessins augmentés de Plackett - Burman”. Plusieurs points centraux sont généralement ajoutés au lieu d'un pour obtenir une estimation de la répétabilité de la méthode [79]. Toutes ces caractéristiques de PBD donnent au chercheur une mesure importante dans le contrôle d'un processus.

5.7. Analyse statistique des résultats

5.7.1. Coefficients de régression et analyse de la variance

Lors de la collecte de toutes les analyses et des réponses calculées, le calcul des coefficients de régression est lancé. Les PBD sont basés sur les matrices de Hadamard [84] et les résultats sont interprétés en utilisant le polynôme du premier degré modèle :

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+.....+a_{11}x_{11} \quad (5.1)$$

Où « y » représente la réponse prévue, $x_1 - x_{11}$ correspondent aux paramètres (facteurs), $a_1 - a_{11}$ sont les coefficients respectifs et a_0 représente l'interception de moyenne.

PBD étant un modèle saturé, les principales estimations de l'effet ne montrent pas l'erreur standard et tous les degrés de liberté sont utilisés pour estimer le facteur effets principaux. Après l'estimation des coefficients de régression factorielle, la détermination des facteurs significatifs affectant les variables dépendantes de l'intérêt (réponses) est suivie de l'analyse de la variance (ANOVA). Afin de déterminer lequel des facteurs a affecté de manière significative la variable d'intérêt dépendante, ANOVA est réalisée. ANOVA présente la somme des carrés (SS) utilisée pour estimer les principaux effets du facteur, les rapports F (F) en tant que rapport de l'effet carré moyen (MS) respectif et de l'erreur quadratique moyenne. Les valeurs de probabilité « P » indiquent les facteurs significatifs affectant la réponse.

5.7.2. Erreur pure et manque d'ajustement

Si le modèle expérimental est au moins partiellement répliqué, on peut estimer la variabilité d'erreur de l'expérience à partir de la variabilité des analyses répliquées. Étant donné que les mesures sont effectuées dans des conditions identiques, c'est-à-dire avec des réglages identiques des niveaux de facteurs, l'estimation de la variabilité d'erreur à partir de ces analyses est indépendante du fait que le "vrai" modèle soit de nature linéaire ou non linéaire.

5.7.3 Représentation graphique des résultats

5.7.3.1. Tracés diagnostiques des résidus

Pour commencer, avant d'accepter un "modèle" particulier qui inclut un nombre particulier d'effets, la distribution des valeurs résiduelles est examinée. Celles-ci sont calculées en tant que la différence entre les valeurs prédites (tel que prédit par le modèle actuel) et les valeurs observées. Dans cette parcelle, les valeurs résiduelles réelles sont tracées en abscisse horizontale ;

la verticale, l'axe des Y, montre les valeurs normales attendues pour les valeurs respectives, qui sont ensuite classés par ordre. Si toutes les valeurs tombent sur une ligne droite, alors on peut être convaincu que les résidus suivent une distribution normale. Une représentation graphique est présenté à **la figure 5.6**, tel que généré par le logiciel Design Expert V. 6.0.5 © Stat comfort Inc., États-Unis.

5.7.3.2. Tableau de Pareto des effets

Le tableau des effets de Pareto est souvent un outil efficace pour communiquer les résultats d'une expérience, en particulier pour les profanes. Dans ce graphique, les estimations de l'effet ANOVA sont triées de la valeur absolue la plus élevée à la plus petite valeur absolue.

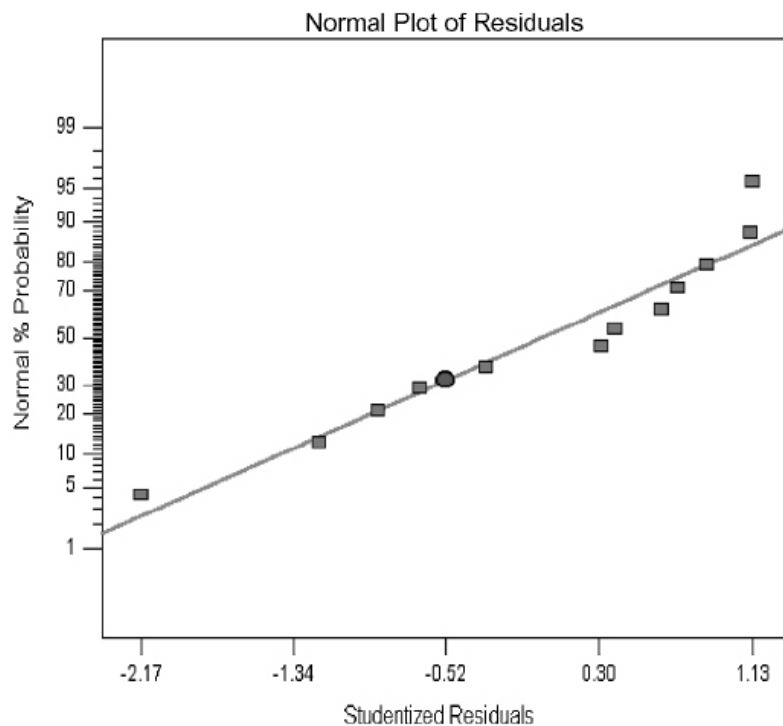


Figure 5.6 : Représentation graphique du tracé de diagnostic des résidus.

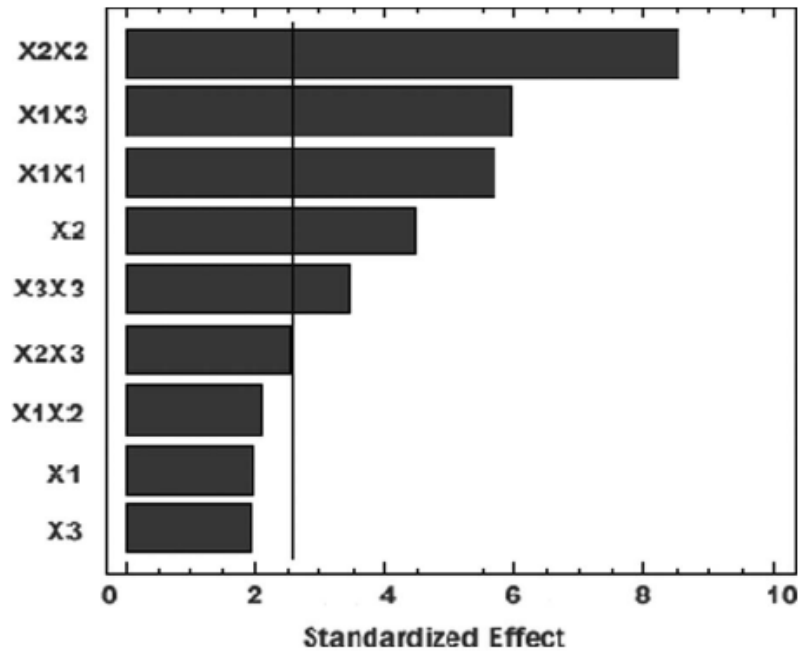


Figure 5.7 : Représentation d'un graphique de Pareto.

La magnitude de chaque effet est représentée par une colonne, et souvent, une ligne traversant les colonnes indique la taille qu'un effet doit être (c'est-à-dire combien de temps une colonne doit être) pour être statistiquement significatif (Figure 5.7).

5.7.3.3. Détection des sources significatives

Un autre graphique de synthèse utile, bien que plus technique, est le graphique normal. Parce que le nombre de degrés de liberté pour le terme d'erreur est petit dans les dessins saturés, la puissance du classique ANOVA sera trop faible. Pour cette raison, un outil graphique, la moitié normalement tracée, et pour lequel les algorithmes de longueur et Dong sont appliqués, peut être utilisé pour identifier les éventuels effets significatifs et estimer l'écart type des effets. Les effets significatifs dans les parcelles à la moitié de la normale sont détectés à travers une inspection visuelle. Une représentation graphique est montrée à la figure 5.8, telle que générée par le logiciel Design Expert V. 6.0.5 © Stat ais Inc., États-Unis d'Amérique. La pente de la ligne à travers les effets supposés non significatifs donne une estimation de l'écart type (σ) de l'erreur [76].

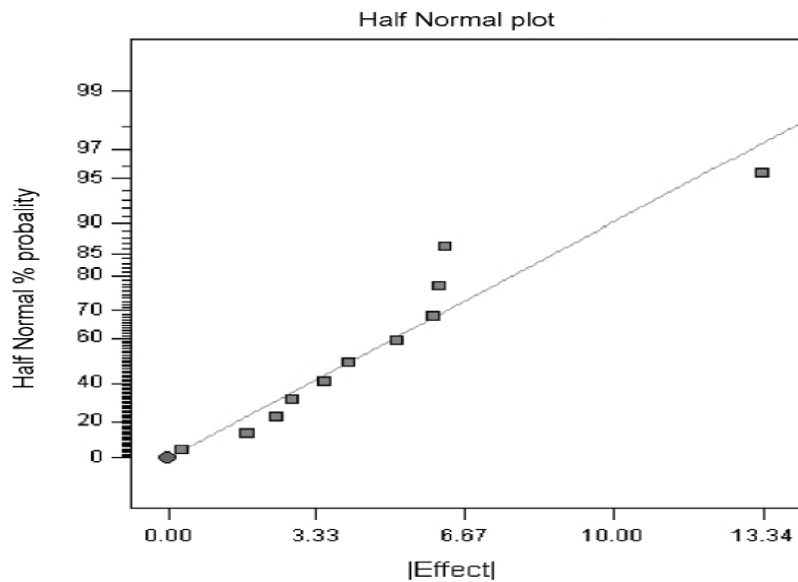


Figure 5.8 : Une représentation graphique d'un tracé demi-normal.

5.7.3.4. Diagrammes d'interaction

Le graphe d'interaction standard est un graphique général permettant d'afficher les moyennes, qui sont indiquées par des points reliés par des lignes comme indiqué dans la figure 5.9. Cette courbe est particulièrement utile en cas d'interaction significative.

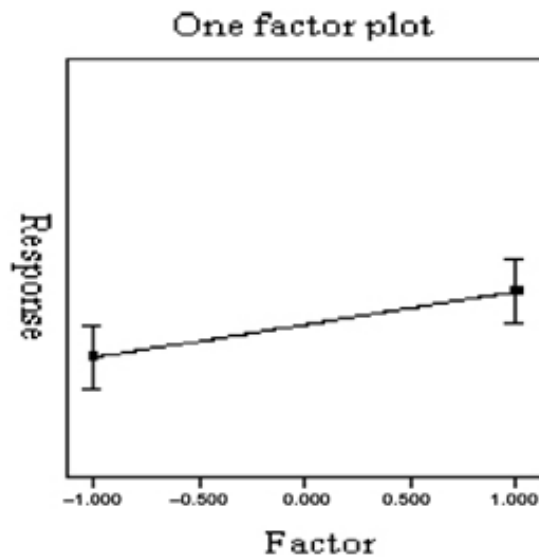


Figure 5.9 : Représentation graphique d'un graphique à facteurs.

5.8. Conclusion

Des approches mathématiques multiples et variées telles que la conception statistique d'expériences, les méthodologies de surface de réponse, les simulations de processus et les outils de reconnaissance de formes ont aidé à soutenir et à justifier des voies organisationnelles flexibles pour l'innovation dans la fabrication et les changements post-approbation. Les modèles de criblage utilisés dans les premières étapes de la recherche et du développement aident le chercheur à identifier les facteurs importants dans les simulations à grande échelle avec relativement peu de passages. Une sélection initiale d'éléments d'entrée dans une conception expérimentale avec une précision minimale détermine le but ultime des chercheurs, qui est de développer un modèle qui met l'accent sur l'identification des effets actifs clés ainsi que sur les interactions entre les facteurs. PBD est l'un de ces modèles. Il s'agit d'un modèle saturé dans lequel le nombre d'expériences est égal au nombre de facteurs moins 1. Puisque le modèle PB est un multiple de quatre plutôt que la puissance de deux modèles cycliques, il génère le plus d'informations pour le moins de données possible. Le travail avec le moins de pistes identifie les principaux facteurs et impacts de l'étude et utilise toutes les données pour estimer chaque effet. En permettant d'étudier un grand nombre de facteurs et en examinant les processus existants, PBD identifie les facteurs pour un examen plus approfondi, permettant des décisions intelligentes pour la recherche et le développement futurs.

Chapitre 6
Etude de l'influence de la rigidité des paliers
hydrodynamiques

Chapitre .6.Etude de l'influence de la rigidité des paliers hydrodynamiques

6.1. Introduction

La conception de Plackett-Burman est un outil très utile qui permet de cribler n variables en utilisant seulement n + 1 expériences [84].

Nous utilisons le Plackett-Burman (PBD) pour améliorer le rotor et déterminer l'impact de la rigidité sur la dynamique de la machine tournante, ainsi que la connaissance des diamètres responsables de l'effet important sur la fréquence ainsi que des réactions qui augmentent ou diminuent les effets principaux. Le tableau 6.1 montre 48 tests requis pour une conception factorielle à deux niveaux et paramètres selon la conception de Plackett-Burman (PBD) dans le DOE. Cela intervient après le processus d'optimisation. Les paramètres utilisés ici sont tous les diamètres des rotors (Nelson-rotor kit-lalanne), et facteurs des rigidités. Une réponse, qui correspond à la fréquence d'excitation, est obtenue pour chacune d'elles à l'aide du logiciel Matlab. DOE est effectué pour découvrir l'effet de la rigidité et des diamètres sur la fréquence.

PBD est une expérience de conception basée sur le modèle polynomial de premier ordre :

$$y = \beta_0 + \sum \beta_i X_i \tag{6.1}$$

Où y est la réponse, β_0 est l'interception du modèle, β_i le coefficient linéaire et X_i le niveau de la variable indépendante. Par conséquent, ce modèle n'est utilisé que pour sélectionner et évaluer les variables importantes qui influencent la réponse de manière significative et ne représentent pas l'interaction entre les variables.

Définition du programme Minitab 17

MINITAB 17 est un logiciel statistique mis au point, à l'origine, par le Département de Statistique de l'Université de Pennsylvanie (U.S.A.). Il est particulièrement bien adapté à l'analyse statistique de petits tableaux de données bien structurés : statistique descriptive, analyse de la variance, méthodes relatives à la corrélation et à la régression simple et multiple, tests d'indépendance, analyse en composantes principales, méthodes non paramétriques, séries chronologiques, analyse discriminante, contrôle statistique de la qualité, plans expérimentaux,etc

6.2. Plan d'expérience (conception Plackett-Burman)

Exemple 1 : rotor Nelson

Le tableau 6.1, montre 48 essais, onze diamètres et quatre facteurs de rigidité selon la factorielle à Plackett-Burman (PBD) dans le DOE. Les paramètres utilisés ici sont tous les diamètres de rotor Nelson et quatre facteurs de rigidité. Une réponse qui correspond à la fréquence propre (Partie imaginaire) d'excitation est obtenue pour chacune d'elles à l'aide du logiciel Matlab (Chapitre 4)

Le DOE est effectué pour découvrir l'influence de la rigidité et les effets des diamètres sur la fréquence. **Tableau 6.1** : Pistes utilisées dans le DOE.

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_8	d_{10}	d_{12}	d_{14}	d_{16}	d_{17}	K_{yy}	K_{yz}	K_{zy}	K_{zz}	FRQ
1	0.0052	0.0154	0.0102	0.0356	0.071	0.0458	0.0204	0.0254	0.0204	0.0812	0.0456	77539000	583650000	-546010000	147180000	85.25
2	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	583650000	-84120000	147180000	85.07
3	0.0052	0.0254	0.0204	0.0356	0.071	0.0558	0.0204	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	583650000	-84120000	133990000	85.35
4	0.0052	0.0154	0.0102	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	77539000	583650000	-84120000	133990000	86.97
5	0.0152	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	77539000	233810000	-84120000	147180000	76.55
6	0.0152	0.0154	0.0102	0.0456	0.071	0.0558	0.0204	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66
7	0.0052	0.0254	0.0204	0.0356	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0204	0.0712	0.0456	135940000	233810000	-84120000	147180000	76.27
8	0.0152	0.0154	0.0102	0.0456	0.071	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0812	0.0456	135940000	583650000	-546010000	133990000	85.06
9	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0304	0.0254	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66
10	0.0052	0.0154	0.0204	0.0356	0.061	0.0558	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	135940000	233810000	-546010000	147180000	83.61
11	0.0152	0.0254	0.0204	0.0356	0.061	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0712	0.0356	77539000	583650000	-84120000	133990000	86.97
12	0.0152	0.0154	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0204	0.0354	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	233810000	-546010000	147180000	83.61
13	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.071	0.0558	0.0304	0.0354	0.0204	0.0712	0.0356	77539000	583650000	-546010000	133990000	85.31
14	0.0052	0.0254	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0304	0.0354	0.0304	0.0812	0.0356	135940000	583650000	-84120000	147180000	85.07
15	0.0152	0.0154	0.0102	0.0356	0.061	0.0558	0.0204	0.0254	0.0204	0.0712	0.0456	135940000	233810000	-84120000	133990000	76.24
16	0.0152	0.0254	0.0204	0.0356	0.071	0.0558	0.0304	0.0354	0.0304	0.0712	0.0356	77539000	233810000	-84120000	133990000	76.53
17	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0254	0.0204	0.0812	0.0456	77539000	583650000	-84120000	133990000	86.97
18	0.0052	0.0254	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0354	0.0304	0.0712	0.0456	135940000	233810000	-546010000	147180000	83.61
19	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	583650000	-84120000	133990000	85.35
20	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.061	0.0558	0.0304	0.0354	0.0304	0.0712	0.0456	135940000	583650000	-84120000	147180000	85.07
21	0.0052	0.0154	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0254	0.0304	0.0812	0.0356	135940000	233810000	-84120000	133990000	76.24
22	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.061	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-546010000	133990000	85.31
23	0.0052	0.0254	0.0204	0.0356	0.061	0.0558	0.0204	0.0254	0.0304	0.0812	0.0456	77539000	583650000	-546010000	147180000	85.25
24	0.0152	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0304	0.0354	0.0304	0.0812	0.0356	77539000	233810000	-546010000	147180000	84.12
25	0.0052	0.0254	0.0204	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0354	0.0304	0.0812	0.0456	77539000	233810000	-546010000	133990000	84.25
26	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.071	0.0458	0.0204	0.0354	0.0304	0.0812	0.0456	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66
27	0.0052	0.0154	0.0204	0.0356	0.061	0.0458	0.0204	0.0354	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	583650000	-546010000	133990000	85.31
28	0.0052	0.0154	0.0102	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0354	0.0204	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-84120000	147180000	76.55
29	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.061	0.0458	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0456	77539000	233810000	-84120000	133990000	76.53
30	0.0052	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0354	0.0204	0.0712	0.0456	135940000	583650000	-84120000	133990000	85.35
31	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.071	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0712	0.0456	135940000	583650000	-546010000	147180000	85.01

32	0.0152	0.0154	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0304	0.0354	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	583650000	-546010000	133990000	85.31
33	0.0152	0.0254	0.0204	0.0356	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	583650000	-546010000	147180000	85.01
34	0.0152	0.0254	0.0204	0.0456	0.071	0.0458	0.0204	0.0254	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	233810000	-546010000	147180000	84.12
35	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.071	0.0558	0.0204	0.0354	0.0304	0.0812	0.0456	135940000	233810000	-546010000	133990000	83.71
36	0.0152	0.0154	0.0102	0.0356	0.061	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-546010000	147180000	84.12
37	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0354	0.0204	0.0712	0.0356	135940000	583650000	-546010000	147180000	85.01
38	0.0152	0.0154	0.0204	0.0456	0.071	0.0558	0.0304	0.0254	0.0204	0.0712	0.0356	135940000	233810000	-546010000	133990000	83.71
39	0.0152	0.0254	0.0102	0.0356	0.071	0.0458	0.0204	0.0354	0.0304	0.0812	0.0356	135940000	233810000	-84120000	133990000	76.24
40	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.061	0.0458	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	135940000	233810000	-546010000	133990000	83.71
41	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-84120000	147180000	76.55
42	0.0052	0.0254	0.0204	0.0456	0.071	0.0558	0.0204	0.0254	0.0204	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-546010000	133990000	84.25
43	0.0052	0.0154	0.0102	0.0356	0.061	0.0458	0.0204	0.0254	0.0204	0.0712	0.0356	77539000	233810000	-546010000	133990000	84.25
44	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.071	0.0458	0.0204	0.0254	0.0304	0.0812	0.0356	135940000	583650000	-546010000	133990000	85.06
45	0.0052	0.0154	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0204	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	233810000	-84120000	147180000	76.55
46	0.0152	0.0154	0.0204	0.0456	0.061	0.0458	0.0304	0.0254	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	233810000	-84120000	133990000	76.24
47	0.0152	0.0254	0.0102	0.0356	0.061	0.0458	0.0304	0.0254	0.0204	0.0712	0.0356	135940000	583650000	-546010000	147180000	85.01
48	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0254	0.0304	0.0812	0.0456	135940000	233810000	-84120000	147180000	76.27

FRQ (Partie imaginaire) : présente la marche de première fréquence propre.

6.2.1. Le résultat trouvé par le plan d'expérience (conception Plackett-Burman)

La matrice de conception de Plackett-Burman pour les effets de 11 diamètres et de 4 facteurs de rigidité de l'expérience du DOE a révélé que seuls 2 facteurs sur 15 étaient influencés. La non-sélection des treize éléments restants suggère que leurs contributions sont non significatives ($P > 0,05$) à la réponse sous enquête au niveau de confiance choisi pour l'étude (Figure 6.1.).

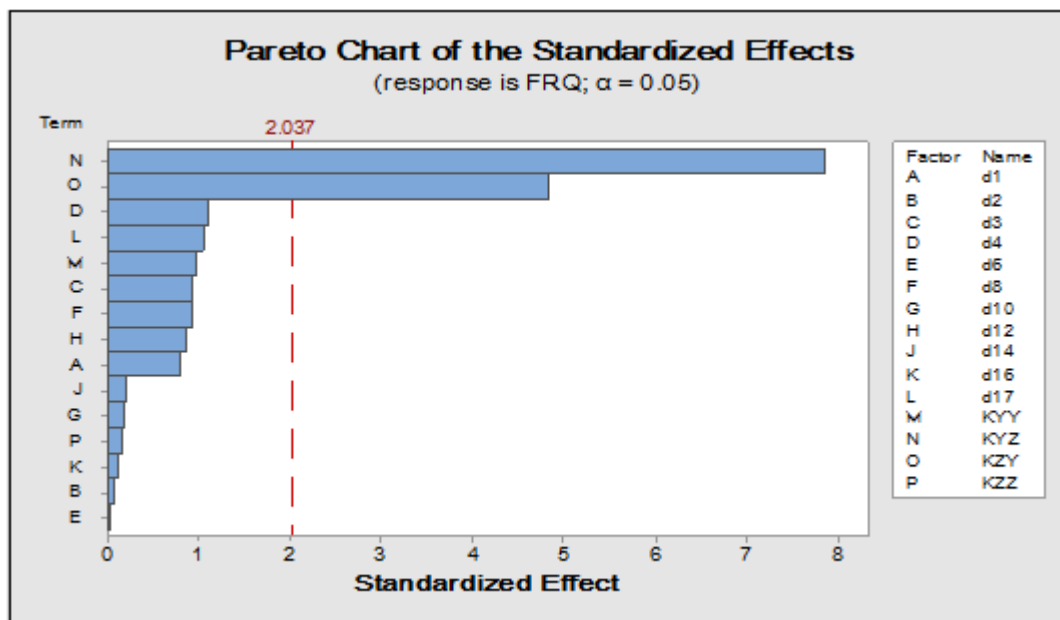


Figure 6.1 : Diagramme de Pareto des effets standardisés Plackett-Burman.

Le graphique normal de l'effet standardisé révèle que la rigidité kyz a l'effet positif significatif le plus élevé sur la fréquence à laquelle l'effet est positionné le plus à droite de la ligne de réponse. Cependant, la figure 6.2 révèle un effet de réduction significatif de la rigidité kzy sur la fréquence, son effet étant positionné à gauche de la ligne de réponse.

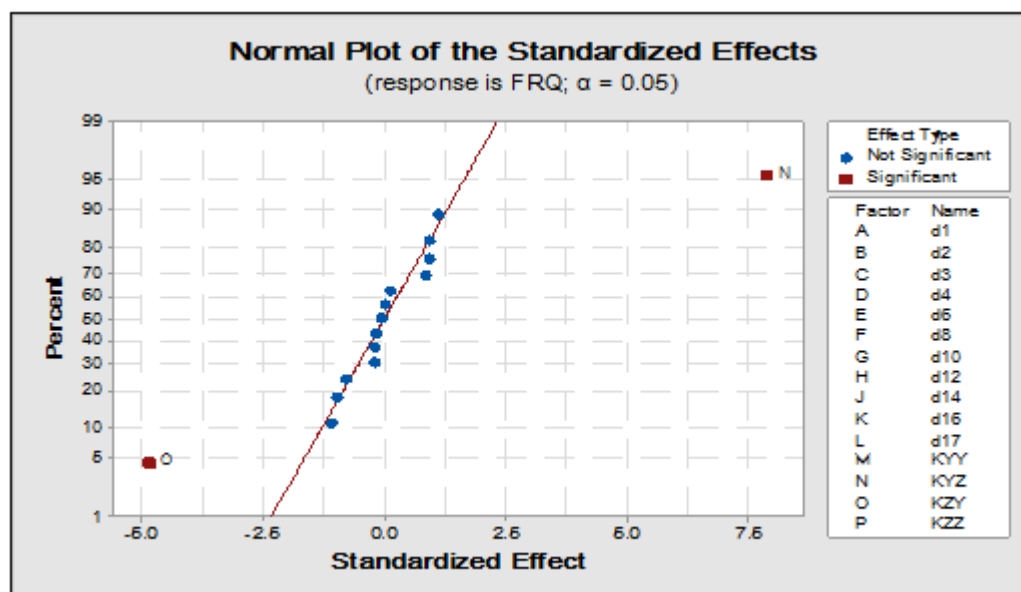


Figure 6.2 : Tracé normal des effets standardisés Plackett-Burman.

La Figure 6.3 montre les principaux effets de la trace significative sur la variable de réponse et confirme les résultats montrés à la figure 6.2. Il a été montré que kyz avait le plus grand effet sur la fréquence, tandis que la rigidité kzy exerçait un effet négatif sur la fréquence.

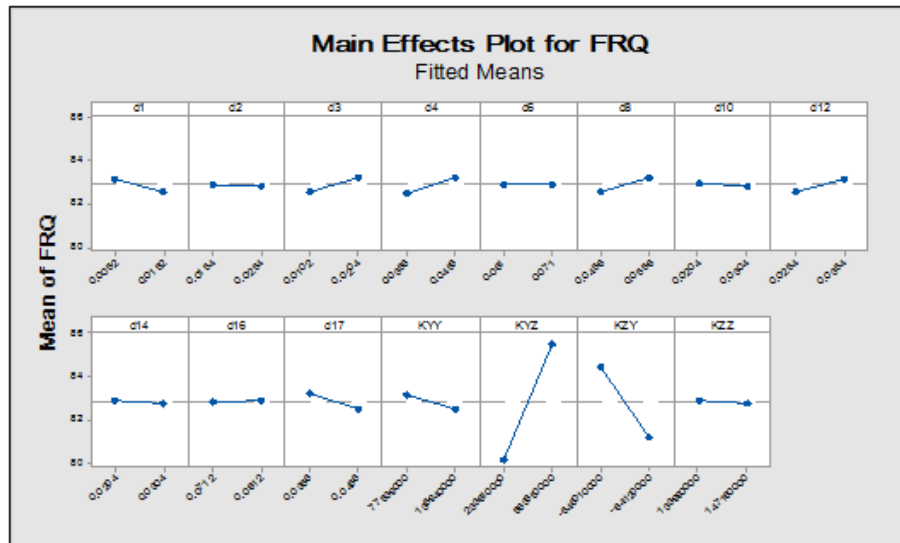


Figure 6.3 : Tracé des effets principaux de la fréquence.

Le résultat de l'analyse de variance (ANOVA) pour les éléments significatifs est présenté dans le tableau 6.2 et confirme que la rigidité kyz présente l'effet de rehaussement le plus significatif ($P < 0,05$) sur la fréquence d'excitation donnée par sa très grande valeur F. Le coefficient de détermination de la régression linéaire, R-carré ajusté de 62.00%, indique que l'équation du modèle ci-dessous (équation (6.2)), exprimé en unités non codées, était significative et pouvait expliquer 62.00% de la variabilité des données de réponse. L'équation révèle que la rigidité kyz a le plus grand coefficient précédé d'un signe positif, confirmant une nouvelle fois son fort effet d'amélioration de la fréquence.

$$\begin{aligned}
 \text{FRQ} = & 71.1 - 54.7 \text{ d1} - 4.2 \text{ d2} + 63.1 \text{ d3} + 76.1 \text{ d4} + 1.3 \text{ d6} + 64.0 \text{ d8} - 12.9 \text{ d10} + 59.7 \text{ d12} - \\
 & 13.8 \text{ d14} + 8.0 \text{ d16} - 72.9 \text{ d17} - 0.000000\text{kyy} + 0.000000 \text{ kyz} - 0.000000\text{kzy} - 0.000000 \text{ kzz}.
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Le tableau 6.2 montre l'analyse de la variance (ANOVA) du modèle de régression Plackett-Burman du DOE pour les effets estimés et des coefficients pour la fréquence et confirme les résultats précédents.

Tableau 6.2 : Analyse de variance (ANOVA) du modèle de régression de Plackett-Burman.

<i>Source</i>	<i>DF</i>	<i>Adj SS</i>	<i>Adj MS</i>	<i>F-Value</i>	<i>P-Value</i>
<i>Model</i>	15	523.954	34.930	6.11	0.000
<i>Linear</i>	15	523.954	34.930	6.11	0.000
<i>d₁</i>	1	3.586	3.586	0.63	0.434
<i>d₂</i>	1	0.022	0.022	0.00	0.951
<i>d₃</i>	1	4.967	4.967	0.87	0.358
<i>d₄</i>	1	6.946	6.946	1.22	0.278
<i>d₆</i>	1	0.002	0.002	0.00	0.985
<i>d₈</i>	1	4.915	4.915	0.86	0.361
<i>d₁₀</i>	1	0.200	0.200	0.04	0.853
<i>d₁₂</i>	1	4.272	4.272	0.75	0.394
<i>d₁₄</i>	1	0.227	0.227	0.04	0.843
<i>d₁₆</i>	1	0.077	0.077	0.01	0.908
<i>d₁₇</i>	1	6.380	6.380	1.12	0.299
<i>Kyy</i>	1	5.415	5.415	0.95	0.338
<i>Kyz</i>	1	353.276	353.276	61.82	0.000
<i>Kzy</i>	1	133.533	133.533	23.37	0.000
<i>Kzz</i>	1	0.137	0.137	0.02	0.878
<i>Error</i>	32	182.862	5.714		
<i>Total</i>	47	706.816			

Résumé du modèle : S R-sq R-sq (adj) R-sq (pred)
 2.39049 74.13% 62.00% 41.79%

DF, degrés de liberté ; SS, somme des carrés ; MS, somme moyenne des carrés. Répertoire les sources de variation, leurs degrés de liberté, la somme totale des carrés et la moyenne des carrés.

6.3. Optimisation des facteurs de réponse

• Méthode d'optimisation

Pour améliorer les 13 facteurs de réponse restants et afin que les valeurs soient définies ($P < 0,05$), nous modifierons la ligne de référence rouge à zéro en déplaçant manuellement les colonnes de la matrice (matrice de conception de base) et en maintenant les valeurs des fréquences correspondantes, pour chaque ligne et maintenir l'équilibre matriciel jusqu'à la matrice indiquée dans le tableau 6.3. [85]

Tableau 6.3 : Pistes utilisées dans le DOE.

	<i>d1</i>	<i>d2</i>	<i>d3</i>	<i>d4</i>	<i>d6</i>	<i>d8</i>	<i>d10</i>	<i>d12</i>	<i>d14</i>	<i>d16</i>	<i>d17</i>	<i>KYY</i>	<i>KYZ</i>	<i>KZY</i>	<i>KZZ</i>	<i>FRQ</i>
1	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	77539000	233810000	-84120000	133990000	76.53
2	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-84120000	147180000	76.55
3	0.0152	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	233810000	-84120000	147180000	76.27
4	0.0152	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	233810000	-84120000	147180000	76.27
5	0.0152	0.0254	0.0102	0.0356	0.061	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-84120000	133990000	76.53
6	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.071	0.0458	0.0204	0.0254	0.0304	0.0812	0.0356	135940000	233810000	-84120000	133990000	76.24
7	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.071	0.0558	0.0204	0.0354	0.0304	0.0712	0.0456	135940000	233810000	-84120000	147180000	76.27
8	0.0152	0.0154	0.0102	0.0356	0.061	0.0558	0.0204	0.0354	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	233810000	-84120000	133990000	76.24
9	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-84120000	147180000	76.55
10	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-84120000	147180000	76.55
11	0.0152	0.0154	0.0102	0.0356	0.061	0.0558	0.0204	0.0354	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	233810000	-84120000	133990000	76.24
12	0.0152	0.0154	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0204	0.0254	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	583650000	-84120000	133990000	85.35
13	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	583650000	-84120000	133990000	85.35
14	0.0052	0.0254	0.0204	0.0456	0.071	0.0558	0.0304	0.0354	0.0304	0.0712	0.0356	77539000	583650000	-546010000	133990000	85.31
15	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.061	0.0458	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	233810000	-546010000	147180000	83.61
16	0.0152	0.0154	0.0102	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0456	135940000	583650000	-546010000	147180000	85.01
17	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0354	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-546010000	133990000	84.25
18	0.0152	0.0154	0.0204	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0254	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66
19	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.071	0.0558	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	233810000	-546010000	133990000	84.25
20	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0204	0.0812	0.0456	77539000	233810000	-546010000	147180000	84.12
21	0.0052	0.0154	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66
22	0.0052	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0254	0.0304	0.0812	0.0356	135940000	233810000	-546010000	133990000	83.71
23	0.0052	0.0154	0.0204	0.0356	0.061	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0456	135940000	583650000	-84120000	147180000	85.07
24	0.0152	0.0254	0.0204	0.0356	0.061	0.0458	0.0304	0.0354	0.0204	0.0712	0.0456	135940000	583650000	-546010000	147180000	85.01
25	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0304	0.0354	0.0304	0.0812	0.0456	135940000	583650000	-546010000	133990000	85.06
26	0.0052	0.0254	0.0204	0.0356	0.071	0.0558	0.0304	0.0254	0.0304	0.0812	0.0456	77539000	583650000	-546010000	133990000	85.31
27	0.0052	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0254	0.0304	0.0812	0.0356	135940000	233810000	-546010000	133990000	83.71
28	0.0052	0.0254	0.0204	0.0356	0.071	0.0458	0.0204	0.0254	0.0204	0.0812	0.0356	135940000	583650000	-546010000	147180000	85.01
29	0.0152	0.0254	0.0102	0.0356	0.061	0.0558	0.0204	0.0254	0.0204	0.0712	0.0456	135940000	583650000	-546010000	133990000	85.06
30	0.0152	0.0154	0.0102	0.0356	0.071	0.0558	0.0204	0.0254	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	583650000	-84120000	133990000	85.35
31	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.061	0.0558	0.0304	0.0254	0.0204	0.0712	0.0456	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66

32	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	583650000	-84120000	133990000	85.35
33	0.0152	0.0154	0.0204	0.0356	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0204	0.0812	0.0456	77539000	233810000	-546010000	147180000	84.12
34	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.071	0.0558	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	233810000	-546010000	133990000	84.25
35	0.0152	0.0254	0.0102	0.0356	0.061	0.0558	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-546010000	147180000	85.25
36	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0354	0.0304	0.0712	0.0456	77539000	233810000	-546010000	133990000	84.25
37	0.0052	0.0254	0.0204	0.0356	0.071	0.0558	0.0304	0.0354	0.0204	0.0712	0.0456	135940000	233810000	-546010000	147180000	83.61
38	0.0152	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0304	0.0354	0.0304	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-546010000	147180000	85.25
39	0.0152	0.0254	0.0102	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0354	0.0204	0.0712	0.0456	77539000	583650000	-546010000	147180000	85.25
40	0.0152	0.0154	0.0204	0.0456	0.071	0.0558	0.0204	0.0354	0.0304	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-546010000	133990000	85.31
41	0.0052	0.0154	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66
42	0.0052	0.0254	0.0102	0.0356	0.061	0.0458	0.0304	0.0354	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	233810000	-546010000	147180000	83.61
43	0.0052	0.0154	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66
44	0.0052	0.0254	0.0204	0.0456	0.061	0.0558	0.0204	0.0254	0.0204	0.0712	0.0356	77539000	583650000	-84120000	133990000	86.97
45	0.0052	0.0154	0.0102	0.0456	0.061	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0812	0.0356	77539000	583650000	-84120000	147180000	86.66
46	0.0052	0.0154	0.0204	0.0456	0.071	0.0458	0.0304	0.0254	0.0304	0.0712	0.0356	135940000	583650000	-84120000	133990000	85.35
47	0.0052	0.0154	0.0102	0.0356	0.071	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	233810000	-546010000	133990000	83.71
48	0.0052	0.0154	0.0102	0.0356	0.071	0.0458	0.0204	0.0354	0.0204	0.0812	0.0456	135940000	233810000	-546010000	133990000	83.71

6.3.1. Le résultat du design de Plackett-Burman

6.3.1.1 Analyse de la variance

Le principal résultat d'une étude d'analyse de la variance organisée dans un tableau (tableau 6.4) répertorie les sources de variation, leurs degrés de liberté, la somme totale des carrés et la moyenne des carrés. Le tableau d'analyse de la variance comprend également les statistiques F et les valeurs P utilisées pour déterminer si les prédicteurs ou les facteurs sont significativement liés à la réponse.

Tableau 6.4 : Effets et coefficients estimés pour la fréquence (unités codées).

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	15	673.046	44.870	53930.87	0.000
Linear	15	673.046	44.870	53930.87	0.000
d_1	1	35.420	35.240	42355.93	0.000
d_2	1	40.965	40.956	49227.31	0.000
d_3	1	6.421	6.421	7717.45	0.000
d_4	1	43.586	43.586	52387.78	0.000
d_6	1	9.722	9.722	11684.95	0.000
d_8	1	15.850	15.850	19050.96	0.000

d_{10}	1	22.015	22.015	26461.00	0.000
d_{12}	1	3.298	3.298	3963.52	0.000
d_{14}	1	88.000	88.000	106562.24	0.000
d_{16}	1	10.240	10.240	12307.32	0.000
d_{17}	1	4.065	4.065	4885.40	0.000
K_{yy}	1	3.654	3.654	4392.20	0.000
K_{yz}	1	107.786	107.786	129552.46	0.000
K_{zy}	1	22.016	22.016	4885.40	0.000
K_{zz}	1	4.155	4.155	4392.20	0.000
<i>Error</i>	32	0.027	0.001		
<i>Lack-of-Fit</i>	16	0.027	0.002		
<i>Pure Error</i>	16	0.000	0.000		
<i>Total</i>	47	673.072			

Résumé du modèle : S : 0.0288442 ; R-sq : 100.00% ; R-sq (adj) : 99.99% ;

PRESS : 0.0666097 ; R-sq (pred) : 99.99%.

Le principal résultat d'une analyse de la variance est présenté dans un tableau. DF, degrés de liberté ; SS, somme des carrés ; MS, somme moyenne des carrés. Il répertorie les sources de variation, leurs degrés de liberté, la somme totale des carrés et la moyenne des carrés.

Le modèle complet inclut à la fois les effets principaux et l'interaction bidirectionnelle. Nous avons utilisé les valeurs (P) dans les estimations des effets et des coefficients (**tableaux 6.5, 6.6**). Pour déterminer les effets significatifs, en utilisant $\alpha = 0,05$, les effets principaux pour les diamètres d_1 à k_{zz} et leurs interactions sont statistiquement significatifs ; c'est-à-dire que leurs valeurs p sont inférieures à 0,05.

Tableau 6.5 : Analyse de la variance pour la fréquence (unités codées).

<i>Source</i>	<i>DF</i>	<i>Adj SS</i>	<i>Adj MS</i>	<i>F-Value</i>	<i>P-Value</i>
<i>Model</i>	15	673.046	44.870	53930.87	0.000

Tableau 6.6 : Observations inhabituelles pour la fréquence.

<i>Obs</i>	<i>FRQ</i>	<i>Fit</i>	<i>Resid</i>	<i>Std Resid</i>
23	85.0700	85.1203	-0.0503	- 2.11 R
39	85.2500	85.1993	0.0507	2.22 R
44	86.9700	86.9213	0.0487	2.16 R

R désigne une observation avec un grand résidu normalisé.

Ensuite, nous évaluons la courbe de probabilité normale et la courbe de Pareto des effets standardisés pour voir quels effets influent sur la réponse, la fréquence d'excitation. Les termes significatifs sont identifiés par un symbole carré (figure 6.4).La rigidité kyz, les diamètres d4 et d10 et leurs interactions sont tous significatifs ($\alpha = 0,05$)

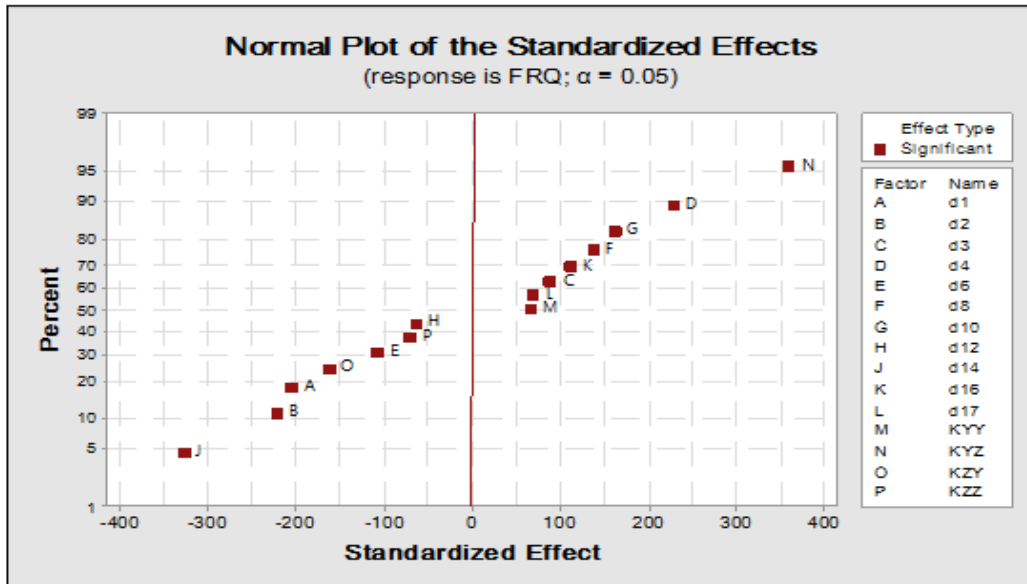


Figure 6.4 : Tracé normal de l'effet standardisé.

Minitab affiche la valeur absolue des effets sur le graphique de Pareto, comme indiqué à la Figure 6.5. Tous les effets qui s'étendent au-delà de la ligne de référence sont significatifs au niveau par défaut de 0,05. La rigidité kyz et les diamètres d4 et d10 ainsi que leurs interactions sont tous significatifs ($\alpha = 0,05$).

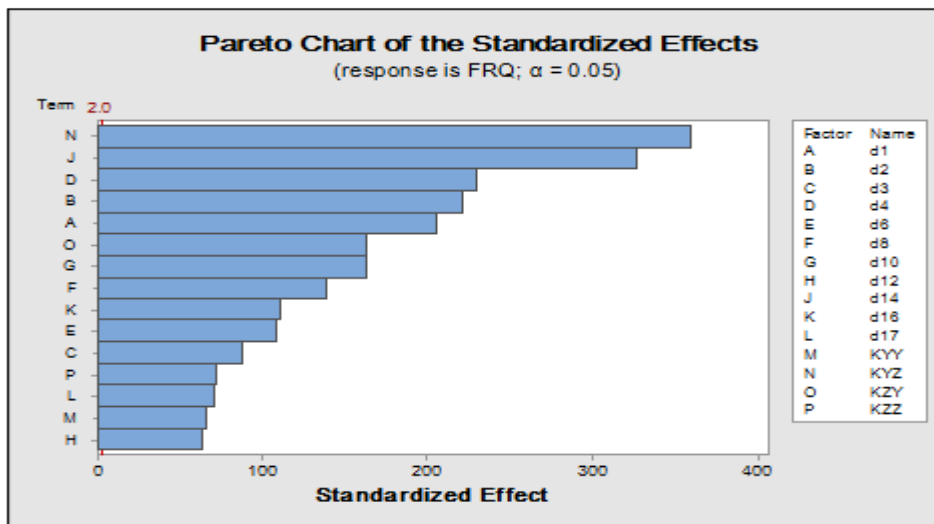


Figure 6.5 : Diagramme de Pareto des effets standardisés.

Ensuite, les courbes d'effet principales sont dessinées dans MINITAB 17, comme illustré à la Figure 6.6. L'effet de la rigidité et des différents diamètres sur la fréquence d'excitation montre la rigidité kyz et les diamètres d4 et d10 augmentent tous les deux la fréquence d'excitation. L'intrigue dit aussi que :

- La rigidité en kyz a plus d'effet sur la fréquence que d4 et d10.
- Les autres diamètres et autres rigidités n'affectent pas beaucoup la fréquence d'excitation.

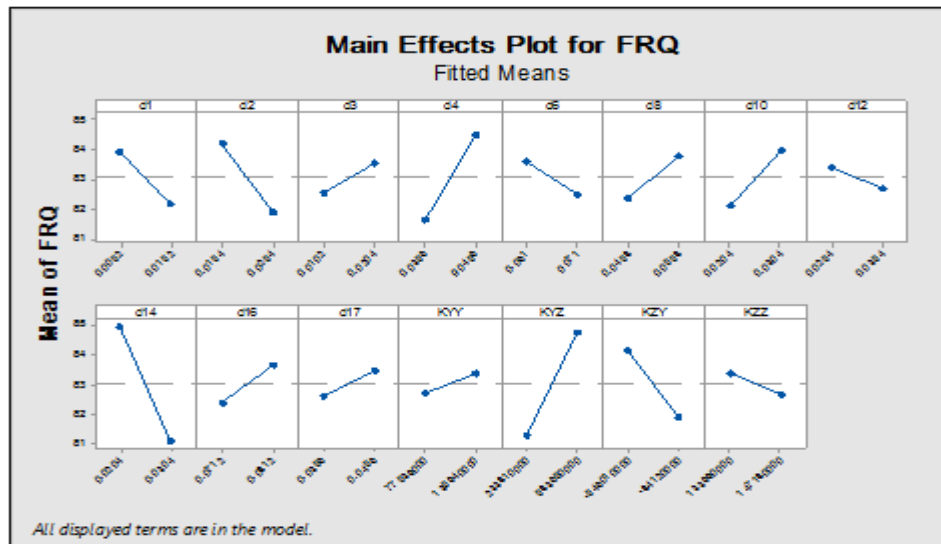


Figure 6.6 : Tracé principal des effets pour la fréquence.

L'équation de régression en unités non codées (équation 6.3). L'équation révèle que la rigidité kyz a le coefficient précédé d'un signe positif, confirmant une nouvelle fois son fort effet d'amélioration de la fréquence.

$$\begin{aligned}
 \text{FRQ} = & 71.343 - 173.726 \text{ d1} - 232.72 \text{ d2} + 96.54 \text{ d3} + 287.83 \text{ d4} - 108.81 \text{ d6} + 143.05 \text{ d8} \\
 & + 184.48 \text{ d10} - 70.92 \text{ d12} - 389.51 \text{ d14} + 127.84 \text{ d16} + 86.30 \text{ d17} + 0.000000 \text{ kyx} \\
 & + 0.000000 \text{ kyz} - 0.000000 \text{ kzy} - 0.000000 \text{ kzz}.
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Un graphique d'interaction (figure 6.7) montre l'impact de la modification des paramètres d'un facteur sur un autre facteur. Parce qu'une interaction peut amplifier ou atténuer les principaux effets, l'évaluation des interactions est extrêmement importante. Les lignes parallèles dans un graphique d'interaction n'indiquent aucune interaction. Plus la différence de pente entre les lignes est grande, plus le degré d'interaction est élevé. Cependant, le graphique d'interaction ne vous indique pas si l'interaction est statistiquement significative.

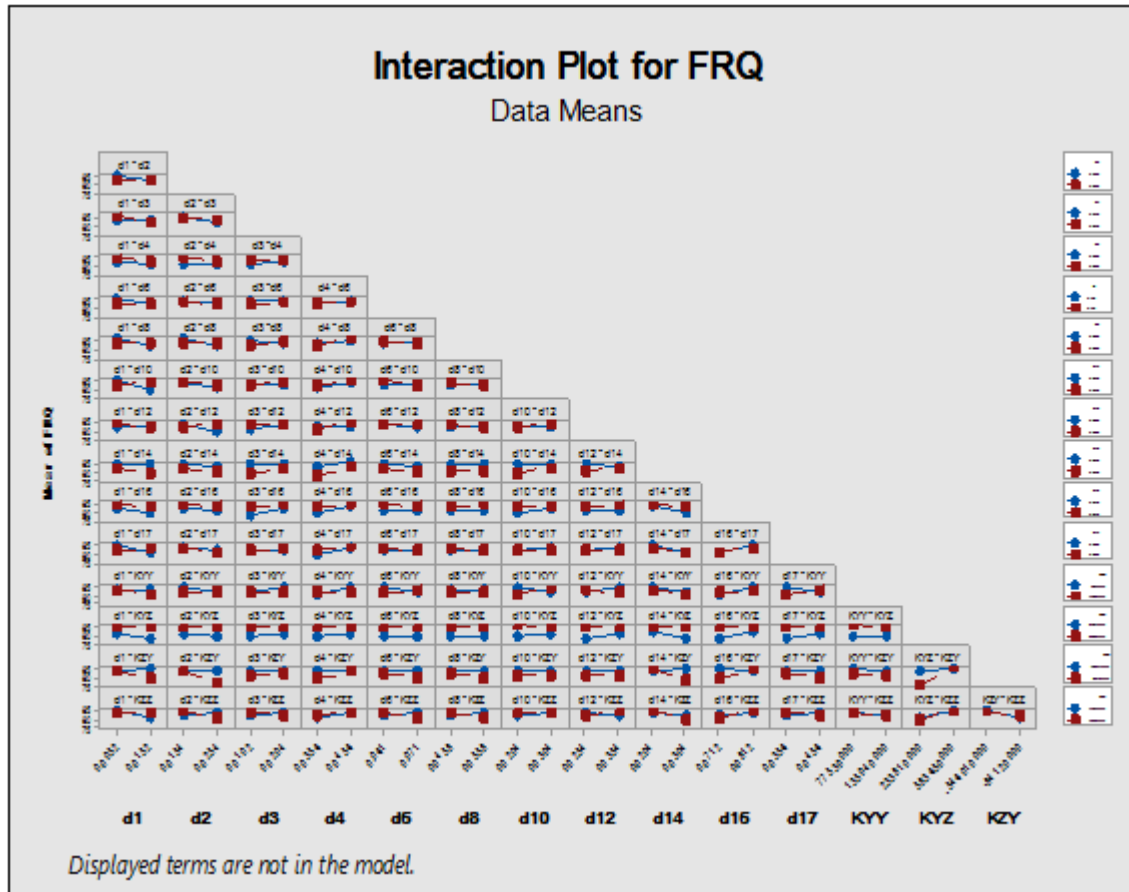


Figure 6.7 : Diagramme d'interaction pour la fréquence.

Lorsque l'effet d'un facteur dépend du niveau de l'autre facteur, vous pouvez utiliser un graphique d'interaction pour visualiser les interactions possibles (figure 6.8). Le graphique montre que l'interaction de d_2 et d_8 a une plus grande différence de pente entre les lignes. Nous pouvons donc conclure que lorsque les valeurs de d_2 varient de 0,0154 à 0,0254, la fréquence diminue ; alors que lorsque les valeurs de d_8 augmentent de 0,0458 à 0,0558, la fréquence augmente. De même, les interactions d_1 et d_8 présentent un effet similaire : à mesure que les valeurs de d_1 augmentent, la fréquence diminue et quand la valeur de d_8 augmente, la fréquence augmente.

De même, d_1 et d_{17} montrent le même type d'interaction. Lorsque les valeurs de d_1 augmentent, la fréquence diminue et lorsque la valeur d_{17} augmente, la fréquence augmente.

Nous suivons la même approche en analysant les résultats des interactions (d_1 , kzz), (d_2 , kzz), (d_3 , d8), (d_3 , kzz), (d_8 , kzz), (d_{16} , kzz), (d_{17} , kyy), (d_{17} , kzz) pouvant augmenter ou diminuer la fréquence.

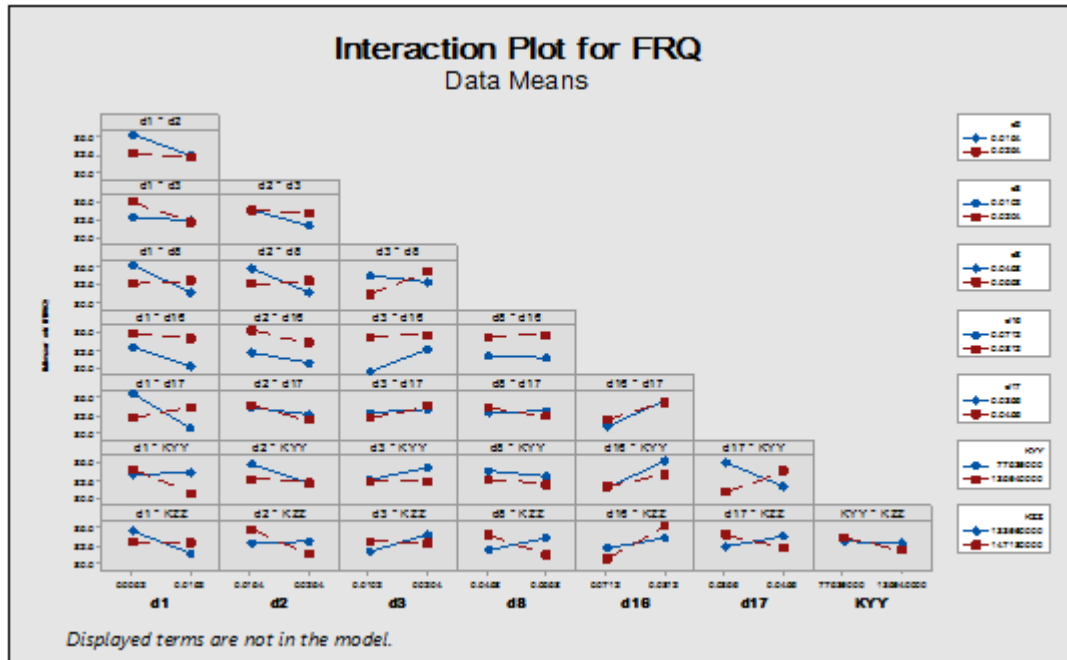


Figure 6.8 : Diagramme d'interaction pour le diagramme de fréquence afin de visualiser les interactions possibles.

6.3.1.2. Tracés de contour et de surface pour la fréquence

Les courbes de réponse en fréquence ont été établies avec l'axe vertical représentant la valeur de la fréquence (y) et l'axe horizontal représentant l'interaction la plus binaire $(x_1, x_2) = (d_2, d_8)$ et $(x_1, x_2) = (d_3, k_{zz})$.

Le contour (A) et la surface (B) sur les figures 6.9 et 6.10 montrent que la fréquence est supérieure à 84,5 lorsque les valeurs de d_8 augmentent ; et que la valeur de la fréquence est inférieure à 81,5 lorsque les valeurs de d_2 sont augmentées.

La même analyse pour l'interaction (d_3, k_{zz}) : les valeurs de fréquence sont inférieures à 82,4 lorsque les valeurs de rigidité k_{zz} augmentent et supérieures à 83,6 lorsque les valeurs d_3 augmentent. Cela confirme les résultats obtenus à la figure 6.8.

Nous avons pris un échantillon (d_2, d_8) et (d_3, k_{zz}) . La même méthode est utilisée pour confirmer les résultats des interactions (d_1, d_8) et des interactions (d_1, d_{17}) , (d_1, k_{zz}) , (d_2, k_{zz}) , (d_3, d_8) , (d_3, k_{zz}) , (d_8, k_{zz}) , (d_{16}, k_{zz}) , (d_{17}, k_{yy}) , (d_{17}, k_{zz}) .

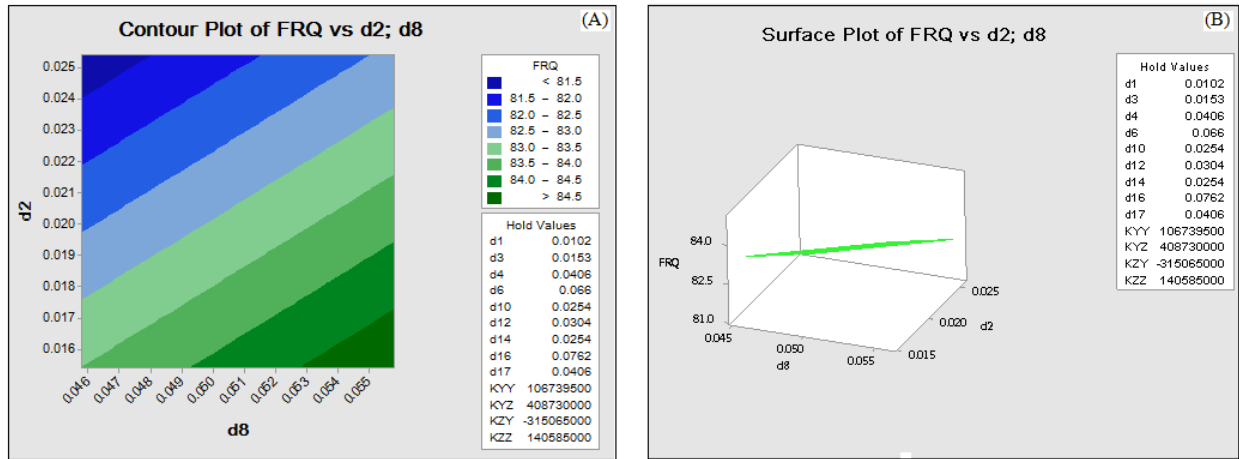


Figure 6.9 : Courbes de contour (A) et de surface (B) des interactions bidirectionnelles (d2, d8) correspondant à la fréquence.

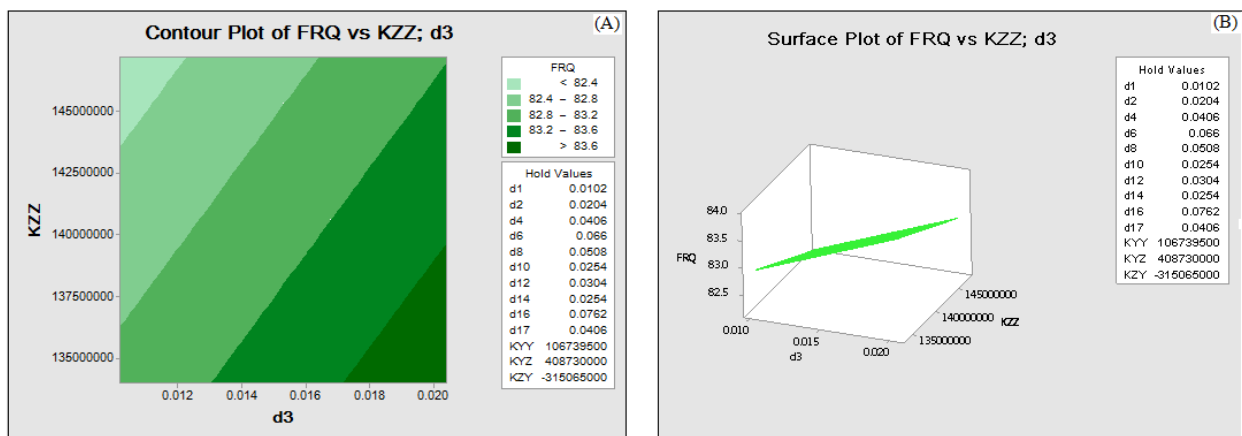


Figure 6.10 : Courbes de contour (A) et de surface (B) d'interactions bidirectionnelles (Kzz, d3) correspondant à la fréquence.

6.4.Exemple 2 : rotor kit

Les tests sont menés selon le plan Plackett-Burman pour les 9 facteurs. Les expériences se sont déroulées selon la matrice de ce plan. Il représente la fixation des facteurs à différents niveaux, comme le montre le tableau 6.7.

Tableau 6.7 : Plan Plackett-Burman basé sur la matrice expérimentale.

	<i>d1</i>	<i>d2</i>	<i>d3</i>	<i>d4</i>	<i>Lb</i>	<i>Cb</i>	<i>Db</i>	<i>Kyy</i>	<i>Kzz</i>	<i>FRQ img</i>	<i>FRQ réelle</i>
1	0.009475	0.009475	0.009575	0.009475	0.045	0.1	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.463	310.192
2	0.009575	0.009475	0.009575	0.009575	0.05	0.1	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	44.0043	311.976
3	0.009575	0.009575	0.009575	0.009575	0.045	0.1	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	145.212	14.0174
4	0.009575	0.009475	0.009575	0.009475	0.045	0.09	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.463	310.263
5	0.009575	0.009475	0.009475	0.009575	0.05	0.1	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.617	279.268
6	0.009475	0.009475	0.009475	0.009575	0.05	0.09	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.616	323.984

Chapitre.6.Etude de l'influence de la rigidité des paliers hydrodynamiques

7	0.009575	0.009475	0.009475	0.009475	0.045	0.1	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	44.5628	325.573
8	0.009475	0.009575	0.009475	0.009475	0.045	0.09	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.395	324.338
9	0.009575	0.009575	0.009575	0.009475	0.045	0.09	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	16.234	310.591
10	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.05	0.1	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	142.206	13.7369
11	0.009475	0.009475	0.009475	0.009475	0.05	0.09	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	44.5475	325.565
12	0.009475	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	142.17	13.5302
13	0.009475	0.009575	0.009575	0.009475	0.05	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.236	310.516
14	0.009475	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	142.17	13.5302
15	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.05	0.09	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.463	310.192
16	0.009575	0.009475	0.009475	0.009475	0.045	0.1	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.617	324.052
17	0.009575	0.009575	0.009575	0.009575	0.045	0.09	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	16.234	310.591
18	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.05	0.09	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	16.396	324.409
19	0.009575	0.009575	0.009575	0.009575	0.05	0.09	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	44.4545	312.228
20	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.045	0.1	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	16.463	310.192
21	0.009475	0.009575	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.395	324.338
22	0.009475	0.009475	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	16.616	323.984
23	0.009575	0.009475	0.009475	0.009575	0.05	0.1	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	16.617	324.052
24	0.009475	0.009475	0.009575	0.009475	0.045	0.09	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	142.206	13.7369
25	0.009475	0.009575	0.009475	0.009475	0.045	0.1	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.395	324.338
26	0.009575	0.009475	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	144.574	13.9962
27	0.009475	0.009475	0.009475	0.009475	0.045	0.09	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	44.5475	325.565
28	0.009575	0.009475	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	145.563	14.1185
29	0.009575	0.009575	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	44.4545	262.112
30	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.045	0.1	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	43.9888	311.966
31	0.009475	0.009475	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.616	323.984
32	0.009475	0.009475	0.009475	0.009575	0.05	0.09	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.616	323.984
33	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.1	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	44.9909	325.855
34	0.009475	0.009575	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.395	324.338
35	0.009575	0.009575	0.009475	0.009475	0.05	0.09	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	144.904	13.8962
36	0.009575	0.009475	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.463	310.263
37	0.009475	0.009575	0.009575	0.009475	0.045	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.395	324.338
38	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.05	0.1	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.396	324.409
39	0.009475	0.009575	0.009575	0.009575	0.045	0.1	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	16.236	310.516
40	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.396	324.409
41	0.009575	0.009475	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	144.574	13.9962
42	0.009475	0.009575	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	44.4388	312.217
43	0.009475	0.009575	0.009575	0.009575	0.05	0.09	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	142.457	13.6378
44	0.009575	0.009475	0.009575	0.009475	0.045	0.1	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	145.563	14.1185
45	0.009475	0.009575	0.009575	0.009575	0.05	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	44.4388	312.217
46	0.009575	0.009575	0.009575	0.009475	0.05	0.1	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	145.212	14.0174
47	0.009575	0.009475	0.009575	0.009575	0.045	0.09	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	44.0043	311.976
48	0.009575	0.009575	0.009475	0.009475	0.045	0.09	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	44.9909	325.855

FRQ img (Partie imaginaire) : présente la marche de première fréquence propre.

FRQ réelle (Partie réelle): présente la marche de deux première coefficient d'amortissement.

Ce diagramme (figure 6.11) permet d'extraire les paramètres les plus importants. Parmi tous les facteurs étudiés et au niveau de confiance choisi ($\alpha = 0,05$), les facteurs forts (kzz) et (kyy) apparaissent comme des facteurs très influents, kzz, kyy ayant l'effet positif le plus significatif sur la fréquence de la partie imaginaire et affecte négativement la fréquence en partie réelle.

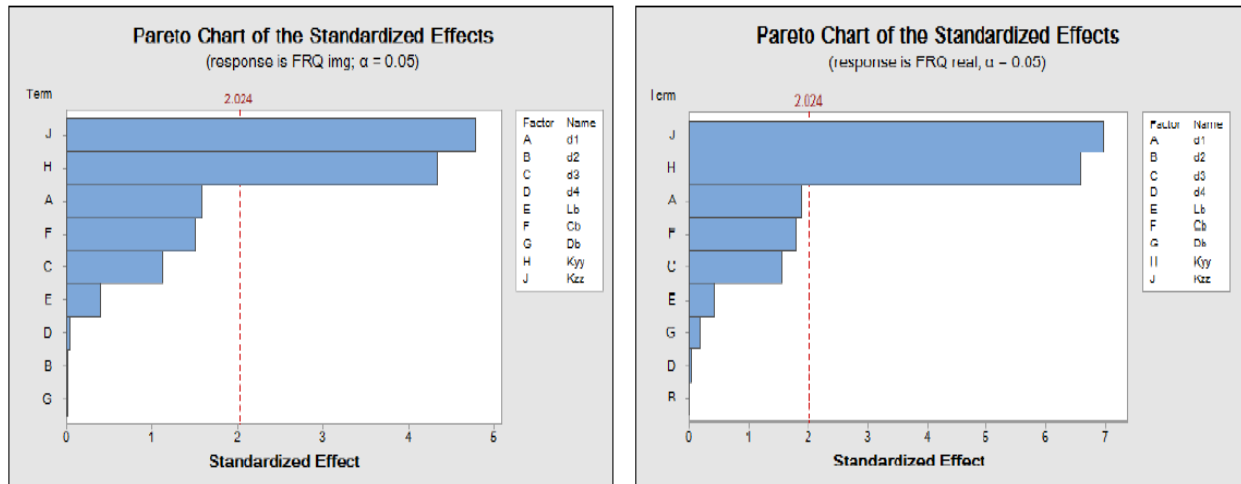


Figure 6.11 : Graphique de Pareto des effets normalisés.

La figure 6.12 révèle que kzz et kyy a l'effet positif significatif sur la fréquence imaginaire la plus à droite de la ligne de réponse. Cependant, la figure révèle un effet de réduction significatif de kzz et kyy sur la fréquence réelle de son effet est positionnée à gauche de la ligne de réponse.

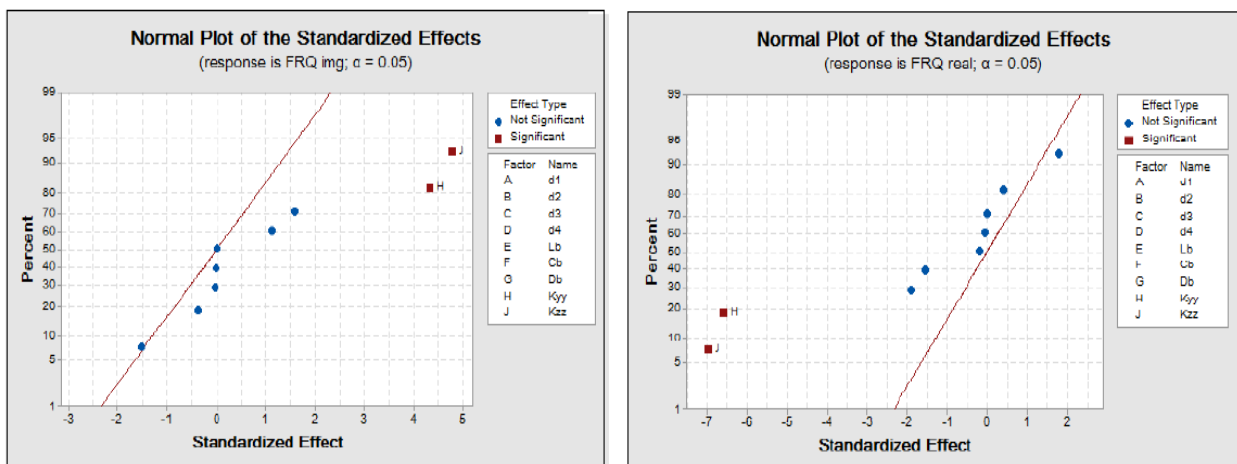


Figure 6.12 : Tracé normal des effets standardisés Plackett-Burman.

Le diagramme des effets principaux nous renseigne sur l'influence simultanée de tous les facteurs sur la fréquence. Nous pouvons à partir de ce diagramme (figure 6.13) conclure que la rigidité

kzz et kyy sont les facteurs les plus influents positivement sur la fréquence imaginaire et négativement sur la fréquence réelle.

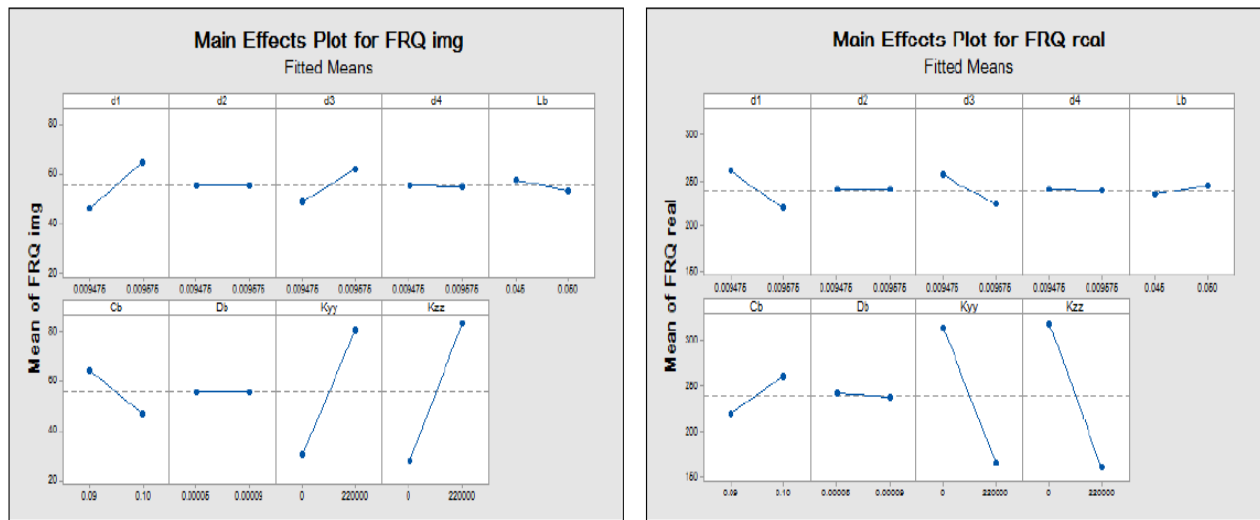


Figure 6.13 : Schéma des principaux effets sur la fréquence imaginaire-réelle

6.4.1. Détermination des effets et coefficients significatifs du modèle

Les valeurs des effets et les coefficients de régression du modèle sont donnés ci-dessous dans les tableaux 6.8 et 6.9.

Tableau 6.8: Régression factorielle: FRQ img par rapport d1; d2; d3; d4; Kg; Cb; Db; Kyy; Kzz.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	71923	7991.5	5.07	0.000
Linear	9	71923	7991.5	5.07	0.000
D1	1	3984	3984.4	2.53	0.120
D2	1	0	0.2	0.00	0.991
D3	1	1986	1985.5	1.26	0.269
D4	1	2	2.2	0.00	0.970
Lb	1	240	239.7	0.15	0.699
Cb	1	3577	3577.1	2.27	0.140
Db	1	0	0.2	0.00	0.992
kyy	1	29663	29662.7	18.80	0.000
kzz	1	36092	36092.3	22.88	0.000
error	38	59946	1577.5		
Total	47	131869			

Résumé du modèle :

S	R-sq	R-sq (adj)	R-sq (pred)
39.7180	54.54%	43.77%	27.61%

Tableau 6.9: Régression factorielle: FRQ réel par rapport d1; d2; d3; d4; Kg; Cb; Db; Kyy; Kzz.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
<i>Model</i>	9	595380	66153	10.83	0.000
<i>Linear</i>	9	595380	66153	10.83	0.000
<i>D1</i>	1	21791	21791	3.57	0.067
<i>D2</i>	1	0	0	0.00	0.999
<i>D3</i>	1	14753	14753	2.42	0.128
<i>D4</i>	1	12	12	0.00	0.965
<i>Lb</i>	1	1032	1032	0.17	0.683
<i>Cb</i>	1	19436	19436	3.18	0.082
<i>Db</i>	1	187	187	0.03	0.862
<i>kyy</i>	1	264891	264891	43.38	0.000
<i>kzz</i>	1	296031	296031	48.48	0.000
<i>error</i>	38	232052	6107		
<i>Total</i>	47	827431			

Résumé du modèle :

S	R-sq	R-sq (adj)	R-sq (pred)
78.1449	71.96%	65.31%	55.35%

Pour construire l'équation du modèle représentant la relation entre la fréquence (img-réel) et les 9 facteurs étudiés, nous utilisons les coefficients de régression présentés dans les tableaux 6.8 et 6.9. Ce modèle a été simplifié, et le classement des facteurs se fait selon le diagramme de Pareto (figures 6.11 ,6.12).

$$\text{FRQ img} = -2705 + 182863 d1 - 1239 d2 + 128641 d3 - 4289 d4 - 897 Lb - 1733 Cb + 2952 Db + 0.000226 Kyy + 0.000252 Kzz.$$

$$\text{FRQ real} = 7438 - 427644 d1 - 204 d2 - 350633 d3 - 9860 d4 + 1862 Lb + 4039 Cb - 98695 Db - 0.000675 Kyy - 0.000721 Kzz$$

(6.4)

La matrice d'optimisation est présentée dans le tableau 6.10.

Tableau 6.10 : Les analyses utilisées dans DOE.

	<i>d1</i>	<i>d2</i>	<i>d3</i>	<i>d4</i>	<i>Lb</i>	<i>Cb</i>	<i>Db</i>	<i>Kyy</i>	<i>Kzz</i>	<i>FRQ img</i>	<i>FRQ réelle</i>
1	0.009475	0.009475	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.616	323.984
2	0.009475	0.009575	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	44.439	312.217
3	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.045	0.09	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	142.46	13.6378
4	0.009575	0.009475	0.009575	0.009475	0.045	0.1	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	144.9	13.8962
5	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.05	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	44.439	312.217
6	0.009575	0.009475	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.463	310.263
7	0.009575	0.009575	0.009575	0.009475	0.05	0.1	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	44.455	262.112
8	0.009475	0.009575	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	16.395	324.338
9	0.009575	0.009575	0.009475	0.009475	0.05	0.09	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	145.56	14.1185
10	0.009475	0.009475	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.395	324.338
11	0.009575	0.009475	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	144.57	13.9962
12	0.009475	0.009575	0.009475	0.009475	0.05	0.09	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	44.548	325.565
13	0.009475	0.009475	0.009575	0.009475	0.045	0.1	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	144.57	13.9962
14	0.009475	0.009575	0.009475	0.009575	0.05	0.09	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	44.991	325.855
15	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	16.616	323.984
16	0.009475	0.009575	0.009575	0.009575	0.05	0.09	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	44.439	312.217
17	0.009575	0.009575	0.009575	0.009575	0.045	0.1	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	142.46	13.6378
18	0.009575	0.009475	0.009575	0.009575	0.045	0.09	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	145.56	14.1185
19	0.009575	0.009475	0.009575	0.009575	0.05	0.1	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	44.439	312.217
20	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.1	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.463	310.263
21	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.045	0.1	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.395	324.338
22	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.1	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.396	324.409
23	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.05	0.09	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.236	310.516
24	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.05	0.09	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.396	324.409
25	0.009475	0.009575	0.009475	0.009575	0.05	0.09	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.616	323.984
26	0.009475	0.009575	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.395	324.338
27	0.009575	0.009475	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	145.56	14.1185
28	0.009575	0.009575	0.009475	0.009475	0.045	0.1	0.00005	2.2E+05	2.2E+05	144.57	13.9962
29	0.009575	0.009575	0.009575	0.009475	0.045	0.09	0.00009	2.2E+05	2.2E+05	145.21	14.0174
30	0.009575	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	44.991	325.855
31	0.009575	0.009575	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00009	2.2E+05	0.0E+00	16.395	324.338
32	0.009575	0.009575	0.009575	0.009475	0.045	0.1	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	44.455	262.112
33	0.009475	0.009575	0.009575	0.009575	0.045	0.1	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	43.989	311.966
34	0.009575	0.009475	0.009475	0.009475	0.05	0.1	0.00009	0.0E+00	2.2E+05	16.396	324.409
35	0.009475	0.009575	0.009575	0.009475	0.05	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	16.236	310.516
36	0.009575	0.009475	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00005	2.2E+05	0.0E+00	145.56	14.1185
37	0.009475	0.009575	0.009475	0.009575	0.045	0.1	0.00005	0.0E+00	2.2E+05	43.989	311.966
38	0.009475	0.009475	0.009575	0.009575	0.045	0.09	0.00009	0.0E+00	0.0E+00	16.395	324.338
39	0.009475	0.009475	0.009475	0.009575	0.045	0.1	0.00005	0.0E+00	0.0E+00	16.616	323.984

40	0.009575	0.009575	0.009575	0.009575	0.045	0.1	0.00009	0.00E+00	0.00E+00	16.396	324.409
41	0.009475	0.009475	0.009575	0.009475	0.045	0.1	0.00005	2.20E+05	2.20E+05	142.21	13.7369
42	0.009475	0.009575	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00009	0.00E+00	2.20E+05	16.395	324.338
43	0.009575	0.009475	0.009475	0.009575	0.045	0.09	0.00005	2.20E+05	0.00E+00	144.57	13.9962
44	0.009475	0.009475	0.009475	0.009475	0.045	0.09	0.00009	0.00E+00	0.00E+00	44.548	325.565
45	0.009575	0.009475	0.009575	0.009475	0.05	0.09	0.00009	2.20E+05	2.20E+05	144.9	13.8962
46	0.009475	0.009475	0.009475	0.009475	0.05	0.09	0.00009	2.20E+05	0.00E+00	16.617	324.052
47	0.009575	0.009475	0.009475	0.009575	0.05	0.1	0.00009	2.20E+05	0.00E+00	16.616	323.984
48	0.009475	0.009475	0.009575	0.009475	0.045	0.09	0.00005	2.20E+05	0.00E+00	142.21	13.7369

Le but est donc de trouver l'équation polynomiale optimale. À partir de l'analyse statistique précédente, l'élimination des termes quadratiques donne un nouveau modèle bien ajusté. Les résultats sont présentés dans les tableaux 6.11 et 6.12

Tableau 6.11. Régression factorielle : FRQ img par rapport à d1 ;d2 ;d3 ;d4 ;Kg ;Cb ;Db ;Kyy ; Kzz

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
<i>Model</i>	9	142685	15853.9	97.80	0.000
<i>Linear</i>	9	142685	15853.9	97.80	0.000
<i>D1</i>	1	22047	22044.9	135.99	0.000
<i>D2</i>	1	3084	3083.6	19.02	0.000
<i>D3</i>	1	7235	7235.1	44.63	0.000
<i>D4</i>	1	6476	6476.2	39.95	0.000
<i>Lb</i>	1	17393	17393.5	107.30	0.000
<i>Cb</i>	1	15817	15816.9	97.57	0.000
<i>Db</i>	1	32677	32677.4	201.58	0.000
<i>kyy</i>	1	15627	15627.0	96.40	0.000
<i>kzz</i>	1	10429	10429.3	64.34	0.000
<i>error</i>	38	6160	162.1		
<i>Total</i>	47	148845			

Résumé du modèle :

S R-sq R-sq (adj) R-sq (pred)
 12.7320 95.86% 94.88% 93.37%

• Équation de régression en unités non codées

$$\text{FRQ}_{\text{img}} = -1947 + 461686 d1 - 166044 d2 + 256755 d3 - 255436 d4 - 8302 Lb - 3822 Cb - 1379219 Db + 0.000180 Kyy + 0.000141 Kzz$$

(6.5)

Tableaux 6.12: Régression factorielle: FRQ réelle par rapport d1; d2; d3; d4; Kg; Cb; Db; Kyy; Kzz.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	943547	104839	409.14	0.000
Linear	9	943547	104839	409.14	0.000
D1	1	158263	158263	617.64	0.000
D2	1	27375	27375	106.84	0.000
D3	1	38406	38406	149.88	0.000
D4	1	46773	46773	182.54	0.000
Lb	1	112402	112402	438.66	0.000
Cb	1	75656	75656	295.25	0.000
Db	1	193402	193402	754.77	0.000
kyy	1	123233	123233	480.93	0.000
kzz	1	67846	67846	264.78	0.000
error	38	9737	256		
Total	47	104			

Résumé du modèle :

S	R-sq	R-sq (adj)	R-sq (pred)
16.0075	98.98%	98.74%	98.37%

• Équation de régression en unités non codées

$$\text{FRQ}_{\text{real}} = 4452 - 1237034 d1 + 494735 d2 - 591557 d3 + 686467 d4 + 21104 Lb + 8358 Cb + 3355373 Db - 0.000506 Kyy - 0.000360 Kzz$$

(6.6)

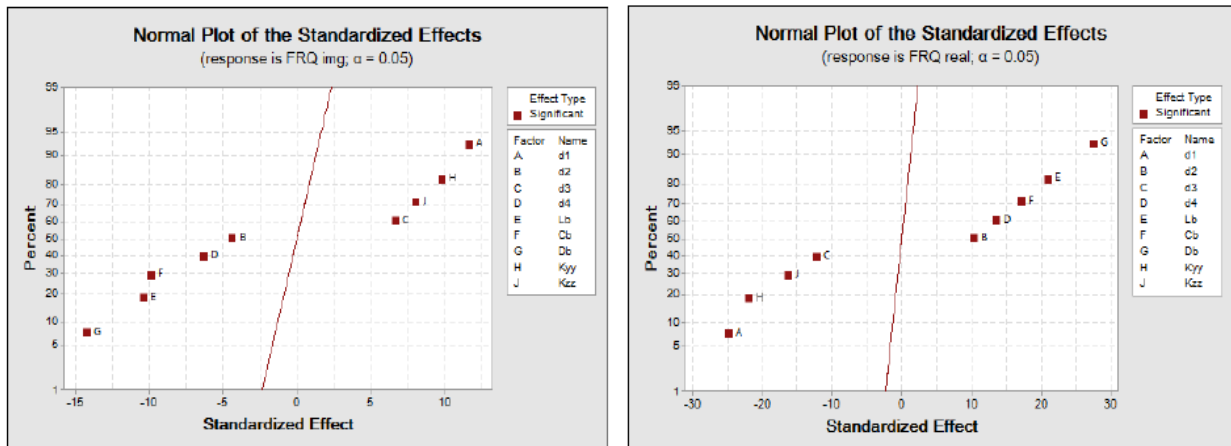
Le modèle utilisé intègre à la fois les effets principaux et l'interaction bidirectionnelle. Nous avons utilisé les valeurs de (P) pour estimer les coefficients et les effets. Pour trouver les principaux effets en utilisant $\alpha = 0, 05$, les principaux effets des valeurs de diamètre de D1 à kzz et leurs interactions qui sont statistiquement importantes ; où leurs valeurs (P) sont inférieures à 0, 05.

- **Partie imaginaire** (fréquence proper)

Le diamètre d1 et la rigidité kzz, kyy et leurs interactions associées sont tous importants $\alpha = 0,05$ (voir figure 6.14).

- **partie réelle** (coefficient d'amortissement)

Les dimensions des paliers hydrodynamiques (Db, Lb, Cb) et leurs interactions liées sont toutes importantes ($\alpha = 0,05$) (voir Figure 6.14).



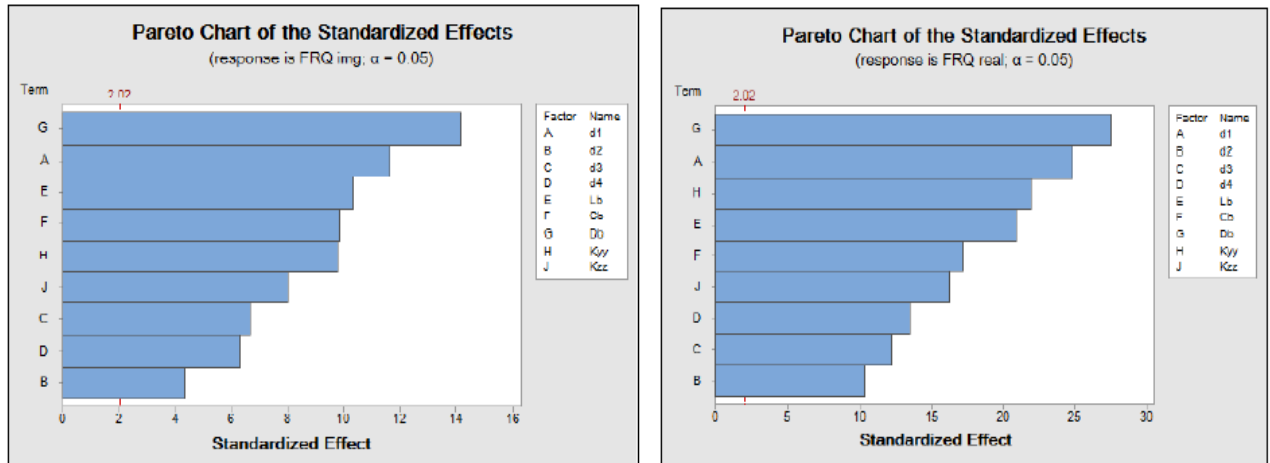
Partie imaginaire

Partie réelle

Figure 6.14 : Représentation des effets normalisés.

Nous notons que c'est le facteur qui affecte positivement la fréquence dans la partie imaginaire qui a affecté négativement la fréquence dans la partie réelle.

Les valeurs absolues des effets sont affichées par Minitab sur le graphique de Pareto (voir les figures 6.15). Tous les effets derrière la ligne de référence sont significatifs au niveau de 0,05, dans la partie imaginaire. Le diamètre D1 et la rigidité kyy sont tous importants ($\alpha = 0,05$), dans la partie réelle on retrouve l'inverse, Db et Lb tous importants ($\alpha = 0,05$).

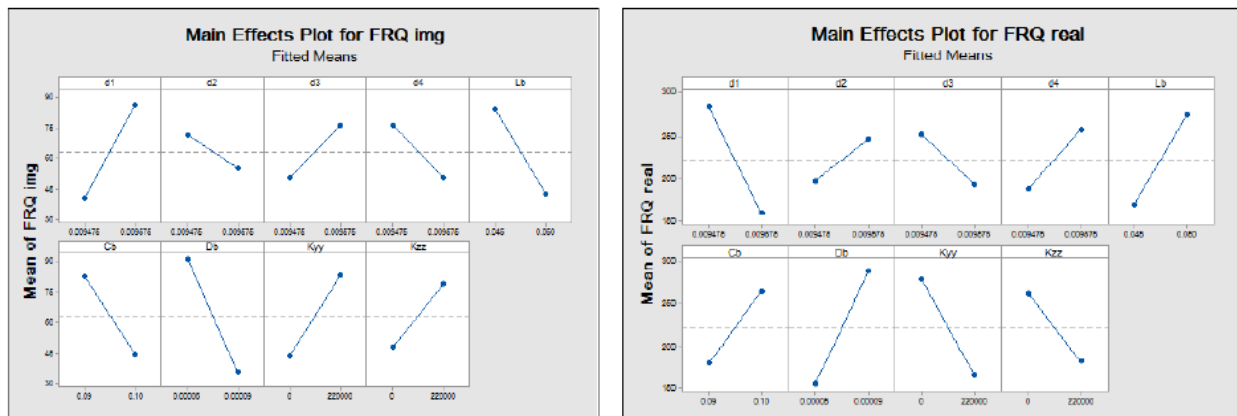


Partie imaginaire

Partie réelle

Figure 6.15 : Diagramme de Pareto des effets normalisés.

Ensuite, les tracés des effets principaux sont esquissés comme illustré sur la figure 6.16. Les différents effets des diamètres, la rigidité et les dimensions du palier hydrodynamique sur la fréquence d'excitation montrent :



Partie imaginaire

Partie réelle

Figure 6.16 : Graphique des effets principaux.

Pour la partie imaginaire:

- Le diamètre d1 et la rigidité kzz, kyy ont un effet significatif là où ils augmentent la fréquence d'excitation. L'intrigue rapporte également que:
- Le diamètre d1 a plus d'influence sur la fréquence que la rigidité kzz, kyy.
- Les autres diamètres et dimensions des paliers hydrodynamiques (Lb, Db et Cb) n'ont pas d'effet important sur la fréquence d'excitation.

Pour la partie réelle :

- Les dimensions du palier hydrodynamique de (Db, Lb et Cb) et les diamètres de D4 et D2 ont un effet significatif lorsqu'ils augmentent la fréquence d'excitation. Le graphique indique également que :
- Les dimensions des paliers hydrodynamiques de (Db, Lb et Cb) ont un effet significatif sur la fréquence par rapport aux diamètres D4 et D2.
- Les autres diamètres et la rigidité n'ont pas d'effet significatif sur la fréquence d'excitation.

Un graphique d'amélioration donne l'effet de chaque facteur (colonnes) sur les réponses (lignes) (Figure 6.17). Les lignes verticales rouges sur le graphique représentent les paramètres actuels de l'opérateur. Les nombres affichés au-dessus de la colonne indiquent les paramètres de niveau de facteur actuels (couleur rouge). Les lignes horizontales bleues et les nombres représentent les réponses au niveau de facteur actuel.

Minitab calcule dans la partie imaginaire les diamètres d1 et kzz sont minimisés lorsque tous les facteurs sont à leurs valeurs les plus élevées (d1 = 0, 0096, kzz = 195555, 556).

En partie réelle, les dimensions du palier hydrodynamique (Db, Lb et Cb) et les diamètres D4 et D2, sont minimisées lorsque tous les facteurs sont à leurs valeurs les plus basses (Db = 0, 0001, Lb = 0, 0450, Cb = 0,090, D4 = 0, 0095, D2 = 0, 0095).

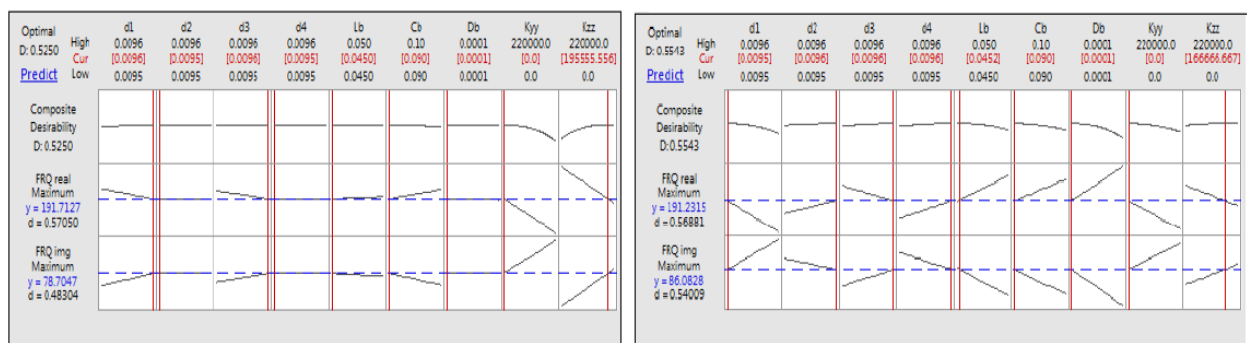


Figure 6.17 : Solution optimale pour neuf facteurs.

6.5.Exemple 3 : rotor lalanne

Le plan Plackett-Burman nous a permis d'examiner plus en détail 11 facteurs (d1, d2, d3, d4, p1, p2, p3, kyy1, kyy2, kzz1, kzz2) afin d'identifier les conditions optimales pour déterminer les facteurs influençant la fréquence. Les résultats de ce plan feront l'objet du traitement statistique nécessaire. Tableau 6.13. Il représente la fixation des facteurs à différents niveaux.

Tableau 6.13. Plan Plackett-Burman basé sur la matrice expérimentale.

	<i>d1</i>	<i>d2</i>	<i>d3</i>	<i>d4</i>	<i>p1</i>	<i>p2</i>	<i>p3</i>	<i>kyy1</i>	<i>kyy2</i>	<i>kzz1</i>	<i>kzz2</i>	<i>FRQ</i>	<i>FRQ</i>
1	0.05	0.15	0.15	0.05	0.15	0.25	0.45	7E+07	0	5E+07	0	114.35	692.14
2	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.25	0.55	7E+07	0	5E+07	4E+07	18.91	14.37
3	0.05	0.15	0.05	0.15	0.25	0.35	0.55	0	0	5E+07	4E+07	145.08	96.81
4	0.05	0.05	0.05	0.05	0.25	0.25	0.55	0	6E+07	5E+07	4E+07	32.11	15.85
5	0.05	0.05	0.05	0.15	0.15	0.35	0.45	7E+07	6E+07	5E+07	4E+07	35.38	0.75
6	0.15	0.15	0.05	0.05	0.25	0.35	0.45	7E+07	6E+07	0	0	31.56	45.1
7	0.15	0.05	0.05	0.05	0.15	0.35	0.45	7E+07	0	5E+07	4E+07	30.07	105.85
8	0.15	0.15	0.15	0.05	0.15	0.35	0.55	0	6E+07	5E+07	0	74.78	15.02
9	0.05	0.15	0.05	0.15	0.15	0.35	0.55	7E+07	6E+07	0	0	40.36	29.95
10	0.15	0.05	0.15	0.05	0.25	0.35	0.55	7E+07	0	0	4E+07	30.6	695.12
11	0.15	0.05	0.15	0.15	0.15	0.25	0.45	0	6E+07	0	4E+07	20.42	35.07
12	0.05	0.15	0.15	0.05	0.25	0.35	0.45	0	0	0	4E+07	0	36.38
13	0.05	0.05	0.05	0.05	0.15	0.25	0.45	0	0	0	0	0	70.57
14	0.05	0.15	0.15	0.15	0.25	0.25	0.45	7E+07	6E+07	0	4E+07	28.31	15.93
15	0.15	0.15	0.05	0.15	0.25	0.25	0.45	0	0	5E+07	0	16.16	20.88
16	0.15	0.05	0.15	0.15	0.25	0.35	0.45	0	6E+07	5E+07	0	13.2	31.34
17	0.05	0.05	0.15	0.05	0.25	0.25	0.55	7E+07	6E+07	5E+07	0	122.75	7.02
18	0.15	0.05	0.05	0.15	0.25	0.25	0.55	7E+07	0	0	0	8.41	17.3
19	0.05	0.05	0.15	0.15	0.15	0.35	0.55	0	0	0	0	0	126.3
20	0.15	0.15	0.05	0.05	0.15	0.25	0.55	0	6E+07	0	4E+07	66.72	16.77

FRQ (Partie imaginaire) : présente la marche de première fréquence propre.

FRQ (Partie réelle): présente la marche de deux première coefficient d'amortissement.

• **Résultats statistique**

Représentation graphique des effets dans le diagramme de Pareto

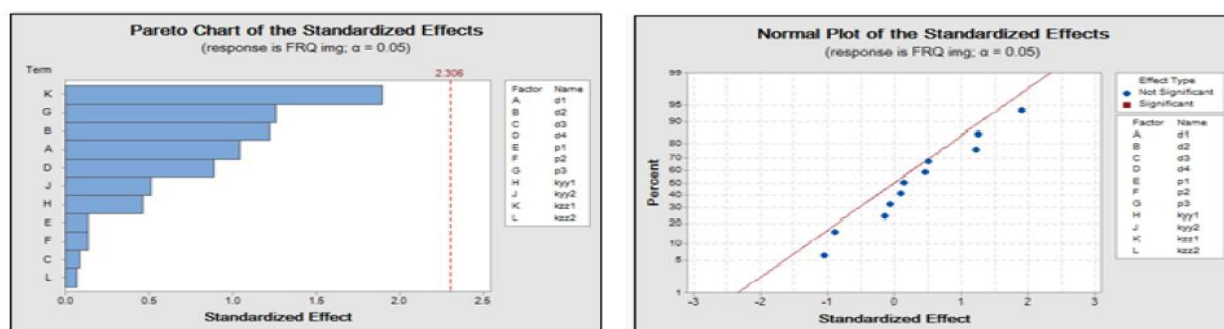


Figure 6.18 : Graphique de Pareto des effets normalisés

Ce : Graphique (Figure 6.18) permet d'extraire les paramètres les plus importants. Parmi tous les facteurs étudiés et au niveau de confiance décidé ($\alpha = 0,05$), les facteurs forts (k_{zz1}) et la position (p_3) et le diamètre d_2 , sont apparus comme des facteurs très influents sur la fréquence de la partie imaginaire.

6.5.1. Méthode d'optimisation

Le but est donc de trouver l'équation polynomiale optimale. Basé sur l'analyse statistique précédente, en éliminant les termes quadratiques et les deux interactions $d_1, d_2, d_3, d_4, p_1, p_2, p_3, k_{yy1}, k_{yy2}, k_{zz1}, k_{zz2}$ obtient un nouveau modèle avec un ajustement de bonne qualité. Ces résultats sont résumés dans le tableau 6.14.

Tableau 6.14 : Les analyses utilisées dans DOE.

	<i>d1</i>	<i>d2</i>	<i>d3</i>	<i>d4</i>	<i>p1</i>	<i>p2</i>	<i>p3</i>	<i>kyy1</i>	<i>kyy2</i>	<i>kzz1</i>	<i>kzz2</i>	<i>FRQ img</i>	<i>FRQreal</i>
1	0.05	0.05	0.05	0.15	0.15	0.35	0.55	7E+07	6E+07	0	4E+07	35.38	0.75
2	0.15	0.15	0.05	0.15	0.25	0.25	0.45	7E+07	0	5E+07	0	16.16	20.88
3	0.05	0.15	0.15	0.05	0.25	0.35	0.45	0	0	0	0	0	36.38
4	0.05	0.05	0.05	0.05	0.15	0.25	0.45	0	0	0	4E+07	0	70.57
5	0.05	0.15	0.15	0.15	0.25	0.25	0.45	7E+07	6E+07	5E+07	0	28.31	15.93
6	0.05	0.05	0.15	0.05	0.15	0.25	0.45	0	6E+07	5E+07	4E+07	18.91	14.37
7	0.05	0.15	0.15	0.15	0.15	0.35	0.55	7E+07	0	0	4E+07	0	126.3
8	0.15	0.15	0.05	0.05	0.15	0.25	0.55	0	0	5E+07	0	66.72	16.77
9	0.05	0.15	0.15	0.15	0.15	0.35	0.55	7E+07	6E+07	0	4E+07	40.36	29.95
10	0.15	0.15	0.05	0.05	0.25	0.25	0.55	7E+07	0	0	0	114.35	692.14
11	0.05	0.05	0.15	0.15	0.15	0.25	0.45	0	0	0	0	18.91	14.37
12	0.15	0.05	0.05	0.05	0.15	0.25	0.55	0	6E+07	5E+07	0	145.08	96.81
13	0.05	0.05	0.05	0.05	0.15	0.25	0.55	0	6E+07	5E+07	4E+07	32.11	15.85
14	0.15	0.05	0.15	0.15	0.25	0.35	0.55	7E+07	0	5E+07	4E+07	30.6	695.12
15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.25	0.35	0.45	0	6E+07	0	4E+07	20.42	35.07
16	0.15	0.05	0.15	0.15	0.25	0.35	0.45	0	6E+07	5E+07	4E+07	13.2	31.34
17	0.15	0.05	0.05	0.15	0.25	0.25	0.55	7E+07	0	0	0	114.35	692.14
18	0.05	0.15	0.05	0.05	0.25	0.35	0.55	7E+07	6E+07	0	0	31.56	45.1
19	0.15	0.05	0.05	0.05	0.15	0.35	0.45	7E+07	0	5E+07	4E+07	30.07	105.85
20	0.15	0.15	0.15	0.05	0.25	0.35	0.45	0	6E+07	5E+07	0	74.78	15.02

Tableau 6.15 : Coefficients de régression estimés pour la fréquence imaginaire FRQ img après exclusion des termes non significatifs (unité codée).

<i>source</i>	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
<i>D1</i>	1	10508	10508.1	55.72	0.000
<i>D2</i>	1	1710	1710.2	9.07	0.017
<i>D3</i>	1	1729	1728.9	9.17	0.016
<i>D4</i>	1	2309	2309.5	12.25	0.008
<i>P1</i>	1	1145	1145.3	6.07	0.039
<i>P2</i>	1	1909	1909.5	10.13	0.013
<i>P3</i>	1	2471	2470.5	13.10	0.007
<i>Kyy1</i>	1	1669	1669.2	8.85	0.018
<i>Kyy2</i>	1	4960	4959.8	26.30	0.001
<i>Kzz1</i>	1	2824	2824.2	14.98	0.005
<i>Kzz2</i>	1	3484	3483.7	18.47	0.003

Résumé du modèle :

S	R-sq	R-sq (adj)	R-sq (pred)
13.7321	95.26%	88.74%	67.84%

On remarque à partir du tableau 6.15 que tous les paramètres estimés pour ce modèle sont significatifs. L'équation de régression polynomiale optimale pour le nouveau modèle s'écrit comme suit :

$$\text{FRQ img} = -10.8 + 709.8 d1 - 243.9 d4 + 316 d2 - 323.4 d3 - 231.6 p1 - 290.6 p2 + 285.0 p3 + 0.000000 kyy1 + 0.000001 kyy2 - 0.000001 kzz1 - 0.000001 kzz2 \quad (6.7)$$

Le modèle utilisé intègre à la fois les effets principaux et l'interaction bidirectionnelle. Nous avons utilisé les valeurs de (P) pour estimer les coefficients et les effets. Pour trouver les principaux effets en utilisant $\alpha = 0,05$, les principaux effets des valeurs de diamètre de d1 à kzz2 et leurs interactions qui sont statistiquement importantes ; où leurs valeurs (P) sont inférieures à 0,05. L'analyse de la variance après exclusion des termes non significatifs (tableau 6.15), montre que tous les termes sont très significatifs. Nous concluons donc que le modèle amélioré est statistiquement meilleur.

- Le diamètre d1, la rigidité kyy2 et la position p3 sont tous importants et ont un effet sur l'augmentation de la fréquence de la partie imaginaire, comme le montre la figure 6.19. L'intrigue indique également que:
- Le diamètre d1 a plus d'effet sur la fréquence que la rigidité kyy2 et la position p3.
- Les autres diamètres et les autres rigidités n'affectent pas beaucoup la fréquence d'excitation.

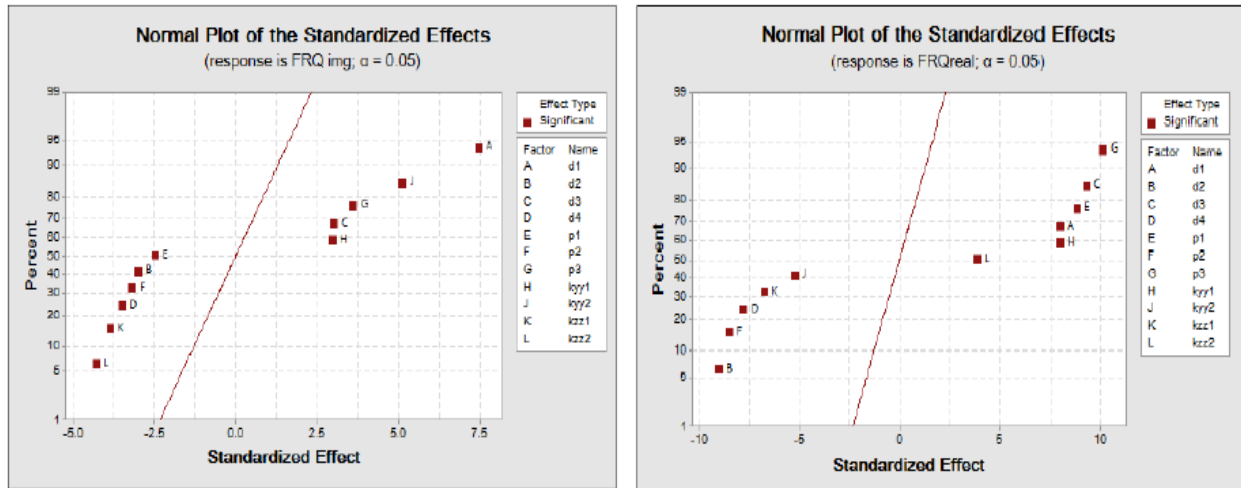
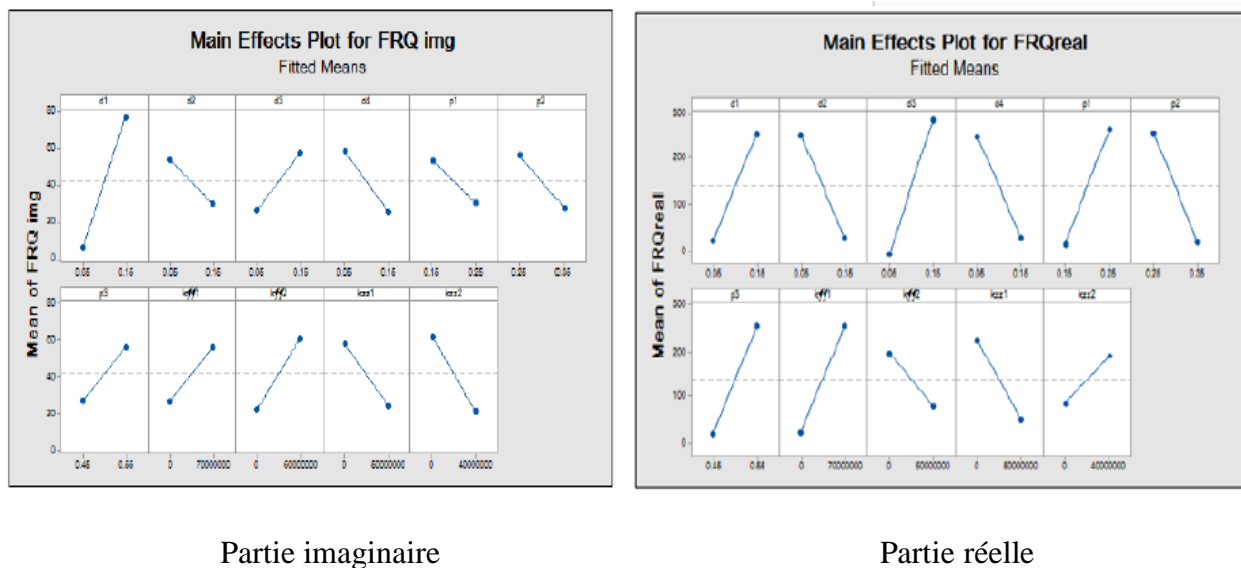


Figure 6.19 : Représentation des effets standardisés en tant que partie imaginaire.

Ensuite, les tracés des effets principaux sont esquissés comme illustré sur la figure 6.20. Les effets des diamètres, la rigidité et la position des disques sur la fréquence.



Partie imaginaire

Partie réelle

Figure 6.20 : Graphique des effets principaux.

Optimisation de la réponse : fréquence réelle FRQ réel ; fréquence imaginaire FRQimg

Tableau 6.16 : La valeur du facteur avant l'optimisation.

Paramètres

Réponse	But	Plus bas	Cible	Poids	Plus haut	Importance
FRQ real	Max	0.75	695.12		1	1
FRQ img	Max	0.00	145.08		1	1

Solution1

d1	d2	d3	d4	P1	P2	P3	Kyy1	Kyy2	Kzz1	Kzz2	FRQ Real FiT
0.05	0.15	0.15	0.05	0.15	0.35	0.55	7e7	0	5e7	0	387.978

Solution1 FRQ img FitDésirabilité composite

102.536 **0.62780**

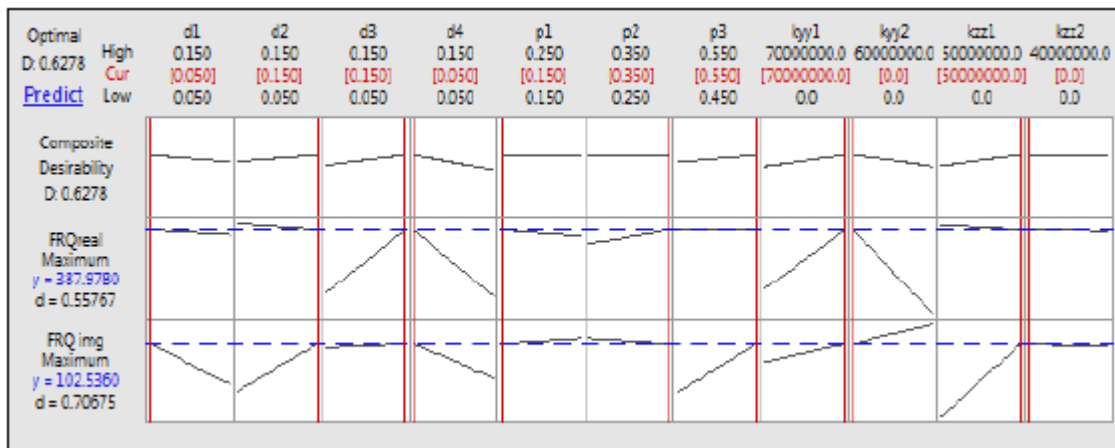


Figure 6.21.Graphique d'optimisation «Solution 1»

Tableau 6.17 : La valeur des facteurs après optimisation

Paramètres

Réponse	But	Plus bas	Cible	Poids	Plus haut	Importance
FRQ real	Max	0.75	695.12		1	1
FRQ img	Max	0.00	145.08		1	1

Solution1

d1	d2	d3	d4	P1	P2	P3	Kyy1	Kyy2	Kzz1	Kzz2	FRQ Real FiT
0.15	0.05	0.15	0.05	0.25	0.25	0.55	7e7	0	0	0	1202.13

Solution1 FRQ imgFit Désirabilité composite

170.328

1

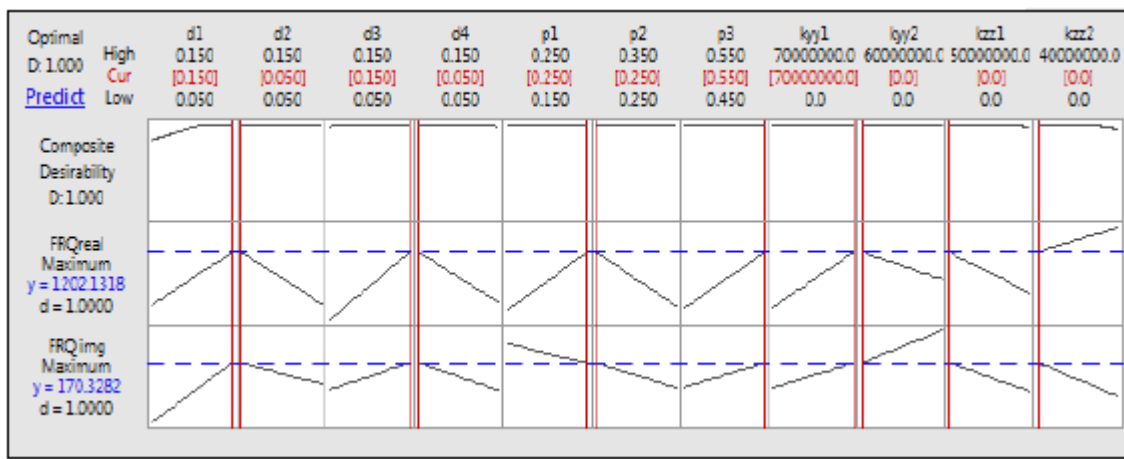


Figure 6.22 : Graphique d'optimisation «Solution 2»

Pour savoir dans quelle mesure les variables d'entrée ont atteint les objectifs fixés pour les réponses. La désirabilité individuelle (d) montre comment optimiser les paramètres pour une seule réponse. La désirabilité composite (D) évalue comment les paramètres optimisent globalement un ensemble de réponses. La désirabilité va de zéro à un. L'un représente l'état idéal. Zéro indique qu'une ou plusieurs réponses sont en dehors de ses limites acceptables.

Figure 6.21, la désirabilité composite (0,627801) est quelque peu éloignée de 1, ce qui indique que les paramètres n'ont pas obtenu de résultats positifs pour toutes les réponses dans leur ensemble par rapport aux résultats de la post-amélioration, Figure 6.22 où le composé désirabilité a atteint la valeur 1, qui indique que les facteurs dont les valeurs ont changé ont obtenu des résultats positifs et ont été plus efficaces.

Pour obtenir cette désirabilité, nous placerions les niveaux de facteur aux valeurs indiquées sous la solution en rouge sur le diagramme Figure 6.22 (Tableau Solutions 2). Le rotor serait plus stable si les disques étaient placés p3 et p2. Vers les extrémités du rotor et le disque p1 vers le centre du rotor, et serait moins stable si les disques p3 et p2 étaient placés vers le centre du rotor.

6.6. Conclusion

La méthode de Plackett-Burman dans le DOE a été utilisée pour optimiser le rotor et déterminer l'influence de la rigidité sur la dynamique des machines tournantes, en plus de connaître les diamètres responsables de l'effet important sur la fréquence ainsi que les réactions qui augmentent ou diminuent effets. Nous avons trouvé que :

Exemple 1 : Etude l'influence de la rigidité des paliers hydrodynamiques sur le comportement dynamique des turbomachines.

Kyz a le plus grand effet positif significatif sur la fréquence, car il apparaît à droite de la ligne de réponse. Comparé à kzy, kzz qui a un impact négatif sur la fréquence et se situe à gauche de la ligne de réponse, comme confirmé par les graphiques et les résultats des analyses. L'effet Pareto et les schémas de conception ont montré que les diamètres d4, d10 sont responsables de la production d'effets à haute fréquence. L'interaction entre un facteur et l'autre peut augmenter ou diminuer les principaux effets, comme le confirment les graphiques d'interaction et les graphiques de surface.

Exemple 2 : Optimisation de la stabilité et de la fiabilité du système de rotor par la méthodologie des expériences de conception

-Le diamètre D1 a l'effet positif le plus significatif sur la fréquence réelle qui peut être vu à droite de la ligne de réponse par rapport au diamètre extérieur du tourillon Db qui a un effet négatif sur la fréquence imaginaire qui est indiquée à gauche du ligne de réponse et vice versa, comme l'affirme le graphique des effets principaux.

Exemple 3 : Optimiser les positions des disques afin d'obtenir une stabilité élevée et une réponse minimale dans un rotor multi-disques.

Le coefficient de rigidité du paliers kyy2, ainsi que le diamètre d1 et la position des disques p3 augmentent tous la fréquence d'excitation dans la partie imaginaire. La Position des disques p2 et le diamètre d3 augmentent tous deux la fréquence d'excitation dans la partie réelle.

Ces résultats montrent que l'inclusion des coefficients de rigidité dans l'analyse dynamique des machines tournantes supportées par des paliers hydrodynamiques joue un rôle important dans la détermination de la réponse au déséquilibre des rotors.

Conclusion générale

Conclusion générale

DOE est une approche systématique à la recherche d'un système ou d'un processus. Une série de tests structurés est conçue, dans laquelle les modifications planifiées sont apportées aux variables d'entrée d'un processus ou d'un système. Les effets de ces modifications sur une sortie prédéfinie sont ensuite évalués.

Les techniques de conception d'expériences (DOE) permettent aux concepteurs de déterminer simultanément les effets individuels et interactifs de nombreux facteurs susceptibles d'affecter les résultats de sortie de toute conception. DOE fournit également un aperçu complet de l'interaction entre les éléments de conception. Par conséquent, il aide à transformer toute conception standard en une conception robuste. En termes simples, DOE aide à repérer les pièces et les zones sensibles dans les conceptions qui posent des problèmes de rendement. Les concepteurs sont alors en mesure de résoudre ces problèmes et de produire des conceptions robustes et à haut rendement avant leur mise en production.

Les turbomachines sont largement utilisées dans plusieurs processus industriels. La cause la plus fréquente de vibration dans les turbomachines est le déséquilibre de la masse du rotor. Les forces centrifuges de déséquilibre sont transmises au système de support de la machine et à la fondation. De telles forces peuvent endommager le système et, dans certains cas, même affecter d'autres équipements situés à proximité. L'utilisation de procédures de calcul pour analyser le comportement dynamique des turbomachines a fourni des données significatives pour les étapes préliminaires de la conception de la machine. La modélisation du système en rotation est généralement basée sur des modèles simplifiés pour le système de support, qui ne prennent généralement pas en compte les coefficients de force dynamique du palier hydrodynamique.

Le processus de modélisation du système en rotation doit inclure les principaux effets présents dans ce type de système, tels que l'effet gyroscopique, l'inertie en rotation et les contributions en paliers représentées par les coefficients dynamiques d'amortissement et de rigidité. La plupart des analyses dynamiques développées pour les systèmes à rotor portant excluent les termes de couplage croisé qui sont très importants pour les niveaux de réponses obtenues.

Dans la première partie de ce travail, nous avons modélisé les rotors (Nelson, kit, lalanne), par les éléments finis et déterminé les fréquences propres pour les rotors en fonction de la vitesse de rotation par le programme Matlab. Nous avons extrait le diagramme de Campbell, le diagramme d'instabilité, le diagramme de rapport d'amortissement, et les formes de modes et nous avons déterminé la vitesse critique, les modes à précession direct et les modes à précession inverse.

Dans la deuxième partie, nous avons utilisé la méthode Plackett-Burman dans le DOE pour optimiser les rotors et déterminer l'influence de la rigidité sur la dynamique des machines tournantes, en plus de connaître les diamètres responsables de l'impact important sur la fréquence ainsi que les réactions qui augmentent ou diminuent les effets principaux. Nous avons trouvé que :

Rotor Nelson :

- Kyza le plus grand effet positif significatif sur la fréquence car il apparaît à droite de la ligne de réponse. Comparé à kzy, kzz a un impact négatif sur la fréquence et se situe à gauche de la ligne de réponse, comme le confirment les graphiques et les résultats des analyses.
- L'effet Pareto et les schémas de conception ont montré que les diamètres d_4 , d_{10} sont responsables de la production d'effets à haute fréquence.
- L'interaction entre un facteur et l'autre peut augmenter ou diminuer les principaux effets, comme le confirment les graphiques d'interaction et les graphiques de surface.

Rotor kit :

- Le diamètre d_1 et la rigidité k_{zz} , k_{yy} ont un effet significatif là où ils augmentent la fréquence d'excitation.

Rotor lalanne :

- Le coefficient de rigidité des paliers k_{yy2} , ainsi que le diamètre d_1 et la position des disques p_3 augmentent tous la fréquence d'excitation dans la partie imaginaire. La position des disques p_2 et le diamètre d_3 augmentent tous deux la fréquence d'excitation dans la partie réelle.

Ces résultats montrent que l'inclusion des coefficients de rigidité dans l'analyse dynamique de machines tournantes reposant sur des paliers hydrodynamiques joue un rôle important dans la détermination de la réponse au déséquilibre des rotors.

Il a été observé pour les coefficients considérés dans cette étude que la rigidité augmentait l'ampleur des réponses de déséquilibre, agissant en réduisant l'amortissement effectif du système.

Il est bien connu que le déséquilibre peut exciter le tourbillon arrière lorsque le rotor de la vitesse de fonctionnement est compris entre les deux périodes critiques associées aux deux tourbillons latéraux des modes générés par l'asymétrie de rigidité des paliers.

Annexes

Annexe A

Tableau A.1 : Données géométriques de l'élément portant le rotor Nelson

Nœud d'élément No	Emplacement du nœud (cm)	Paliers et Disque	Diamètre intérieur (cm)	Diamètre extérieur (cm)
1	0.0		0.0	0.51
2	1.27		0.0	1.02
3	5.08		0.0	0.76
4	7.62		0.0	2.03
5	8.98	Disque	0.0	2.03
6	10.16		0.0	3.30
7	10.67		1.52	3.30
8	11.43		1.78	2.54
9	12.70		0.0	2.54
10	13.46		0.0	1.27
11	16.51	palier	0.0	1.27
12	19.05		0.0	1.52
13	22.86		0.0	1.52
14	26.67		0.0	1.27
15	28.70	palier	0.0	1.27
16	30.48		0.0	3.81
17	31.50		0.0	2.03
18	34.54		1.52	2.03

Tableau B.2 : Données géométriques de l'élément portant le rotor kit

Nœud d'élément No	Emplacement du nœud (cm)	Paliers et Disque	Diamètre intérieur (cm)	Outer Diameter (cm)
1	0	Disque	0	0.009525
2	0.09	palier	0	0.009525
3	0.22	Disque	0	0.009525
4	0.42	palier	0	0.009525

Tableau A.3 : Données géométriques de l'élément portant le rotor lalanne.

Nœud d'élément No	Emplacement du nœud (cm)	Paliers et Disque	Diamètre intérieur (cm)	Diamètre extérieur (cm)
1	0.2	palier	0	0.1
2	0.3	Disque	0	0.1
3	0.5	Disque	0	0.1
4	1	Disque	0	0.1
5	1.3	palier	0	0.1

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] **Hirn G.H.** Sur les principaux phénomènes que présentent les frottements médiats, et sur les diverses méthodes employées au graissage des machines. *Bull. Soc. Ind. De Mulhouse*, XXVI : 188-277, 1854.
- [2] **Tower B.** First report on friction experiments. *Proc. IMechE*, 34 :632-659, 1883.
- [3] **Reynolds O.** On the Theory of Lubrication and its Application on m. Beauchamp Towers's Experiments. *Phil. Trans. Royal Society, London*, A-177 : 157-234, 1886.
- [4] **Frêne J.** La tribologie de l'antiquité à nos jours. *Mécanique et Industrie*, Elsevier, 2 :263-282, 2001.
- [5] **A. Stodola**, "Kritische Wellenstörung infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager," *Schweizerische Bauzeitung*, vol. 85/86, pp. 265–266, 1925.
- [6] **C. Hummel**, **Kritische drehzahlen** als folge der nachgiebigkeit des schmiermittels im lager, Ph.D. thesis, Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, 1926.
- [7] **Swift H.W.** The stability of lubricating films in journal bearings. *Proc. Inst. Civil Engrs. (London)*, 233:267–288, 1932.
- [8] **Christopherson D.G.** A new mathematical method for the solution of film lubrication problems. *Inst. Mech. Engrs. J. Proc.*, 146:126–135, 1941.
- [9] **Ocvirk F.W.** and **DuBois G.B.** Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short Bearing Approximations of Full Journal Bearings. *Report 1157*, NACA, 1953.
- [10] **B. Sternlicht**, "Elastic and damping properties of partial porous journal bearings," *Journal of Basic Engineering*, vol. 81, pp. 101–108, 1959.
- [11] **D. M. Smith**, *Journal Bearings in Turbomachinery*, Chapman and Hall, London, UK, 1969.
- [12] **O. Pinkus** and **B. Sternlicht**, *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1961.
- [13] **A. Tondl**, *Some Problems of Rotor Dynamics*, Chapman and Hall, London, UK, 1965.
- [14] **BOOKER J.F.** Dynamically Loaded Journal Bearings : Numerical Application of the Mobility Method. *ASME, Journal of Tribology*, séries F, 168-174, 1971.
- [15] **J. C. Nicholas**, **E. J. Gunter**, and **P. E. Allaire**, "Stiffness and damping coefficients for the five-pad tilting-pad bearing," *ASLE Trans*, vol. 22, no. 2, pp. 113–124, 1979.
- [16] **J. W. Lund**, "Spring and damping coefficients for the tiltingpad journal bearing," *ASLE Transactions*, vol. 42, no. 4, pp. 342–352, 1964.
- [17] **J. C. Nicholas** and **R. G. Kirk**, "Selection and design of tilting pad and fixed lobe journal bearings for optimum turborotor dynamics," in *Proceedings of the 8th Turbomachinery*

- Symposium, P. E. Jenkins, Ed., vol. 1, pp. 43–57, Texas A&M University Press, college Station, Tex, USA, 1979.
- [18] **J. C. Nicholas** and **R. G. Kirk**, “Four pad tilting pad bearing design and application for multistage axial compressors,” ASME, *Journal of Lubrication Technology*, vol. 104, no. 4, pp. 523–532, 1982.
- [19] **Tanneau G.** Contribution à l’Etude des Paliers de Bielles, Effet des Rugosités. Thèse de Doctorat 3ème Cycle, Poitiers 1984.
- [20] **J. D. Knight** and **L. E. Barrett**, “Analysis of tilting pad journal bearings with heat transfer effects,” *Journal of Tribology*, vol. 110, no. 1, pp. 128–133, 1988.
- [21] **D. Brugier** and **M. T. Pascal**, “Influence of elastic deformations of turbo-generator tilting pad bearings on the static behavior and on the dynamic coefficients in different designs,” *Journal of Tribology*, vol. 111, no. 2, pp. 364–371, 1989.
- [22] **Maspeyrot P.** Comportement Dynamique des Paliers de Vilebrequin. Influence des Défauts de Forme et des Mésalignements. *Thèse de Doctorat*, Poitiers 1989.
- [23] **Paranjpe R.S.** and **Goenka P.K.** Analysis of Crankshaft Bearing Using a Mass Conserving Algorithm. STLE, *Tribol. Trans.*, 33 :333-344, 1990.
- [24] **Vijayarachavan D.** and **Brewe D.E.** Frequency Effects on the Stability of a Journal Bearing for Periodic Loading. ASME, *Tribol. Trans.*, 114 :107-115, 1992.
- [25] **Vijayarachavan D., Brewe D.E.,** and **Keith, Jr T.G.** Effect of Out-of-Roundness on The Performance of a Diesel Engine Connecting-Rod Bearing. *Trans. Of the ASME*, 115 :538-543, July 1993.
- [26] **Vincent B., Maspeyrot P.,** and **Frêne J.** Starvation and cavitation effects in finite grooved journal bearing. *Proceedings of 21st Leeds-Lyon Symposium of Tribology*, Leeds, 455–464, September 1994.
- [27] **Vincent B., Maspeyrot P.,** and **Frêne J.** Cavitation in Non circular Journal Bearing. *WEAR*, 207 :122-127, 1997
- [28] **Wettergren HL, Olsson KO.** (1996). Dynamic instability of a rotating asymmetric shaft with internal viscous damping supported in anisotropic bearings. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press Limited 195(1) : 75–84. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0404>
- [29] **Lees AW, Friswell MI.** (1997). The evaluation of rotor imbalance in flexibly mounted machines. *Journal of Sound and Vibration* 208(5) : 671–683. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1260>
- [30] **Vázquez JA, Barrett LE, Flack RD.** (2001). A flexible rotor on flexible bearing supports: Stability and unbalance response. *Journal of Vibration and Acoustics* 123(2): 137–144. <https://doi.org/10.1115/1.1355244>.

- [31] **Kiciński J.** (2005). Dynamics of rotors and slide bearings (in Polish). Gdańsk : IMP PAN, *Maszyny Przepływowe 2005*. <https://doi.org/10.1115/1.3261324>
- [32] **Sinou R, Baranger TN, Chatelet E, Jacquet G.** (2008). Dynamic analysis of a rotating composite shaft. *Composites Science and Technology* 68(2) : 337–345. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.06.019>.
- [33] **Gasch R.** (2008). Dynamic behaviour of the Laval rotor with a . *Mechanical Systems and Signal Processing* 22(4) : 790–804. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2007.11.023>
- [34] **Das AS, Nighil MC, Dutt JK, Irretier H.** (2008). Vibration control and stability analysis of rotor-shaft system with electromagnetic exciters. *Mechanism and Machine Theory* 43(10) : 1295–1316. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.10.007>
- [35] **Villa C, Sinou JJ, Thouverez F.** (2008). Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13(4) : 804–821. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.06.012>.
- [36] **Lei SA.** (2008). Control of flexible rotor systems with active magnetic bearings. *Journal of Sound and Vibration* 314(1–2) : 19–38. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.12.028>
- [37] **Whalley R, Abdul-Ameer A.** (2009). Contoured shaft and rotor dynamics. *Mechanism and Machine Theory* 44(4) : 772–783. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.04.010>.
- [38] **Gurudatt B, Seetharamu S, Sampathkumaran PS, Krishna V.** (2010). Implementation, of ansys parametric design language for the determination of critical speeds of a fluid film bearing supported multi sectioned rotor with residual unbalance through modal and out of balance response analysis. *Proceedings of the World Congress on Engineering Vol II*.
- [39] **Taplak H, Parlak M.** (2012). Evaluation of gas turbine rotor dynamic analysis using the finite element method. *Measurement* 45: 1089–1097. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2012.01.032>
- [40] **Lei SA.** (2008). Control of flexible rotor systems with active magnetic bearings. *Journal of Sound and Vibration* 314(1–2) : 19–38. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.12.028>
- [41] **Fegade R, Patel V.** (2013). Unbalanced response and design optimization of rotor by ansys and design of experiments. *International Journal of Scientific & Engineering Research* 4(7), ISSN 2229-5518.
- [42] **Li K, Liu J, Han X, Jiang C, Qin HJ.** (2016). Identification of oil-film coefficients for a rotor-journal bearing system based on equivalent load reconstruction. *Tribology International* 104(2016) : 285–293. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.09.012>
- [43] **Breńkacz Ł, Eng. Grzegorz Ż, Marta Drosińska K.** (2017). the experimental identification of the dynamic coefficients of two hydrodynamic journal bearings operating at

- constant rotational speed and under nonlinear conditions. *Polish Maritime Research* 4(96) : 108-115. <https://doi.org/10.1515/pomr-2017-0142>
- [44] **Fulaj D, Jegadeesan K, Shrivankumar C.** (2018). Analysis of a rotor supported in bearing with gyroscopic effects. *IOP Conf. Series : Materials Science and Engineering* 402(2018) : 012059. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/402/1/012059>
- [45] **Zerrouni Nassim**, Etude de l'interaction fluide visqueux-structure d'un palier fluide soumis à des sollicitations temporelles, Thèse de Magister, Université de M'hamed Bougara-Boumerdes, 2009.
- [46] **Meramria Wafa**, Etude de l'effet dynamique d'un palier lisse par analyse vibratoire, Thèse de Magister, Université Badji Mokhtar-Annaba, 2009.
- [47] **Sahli Abdelkader**, Etude expérimentale d'un palier lubrifié mésaligné, Thèse de Magister, Université de Hassiba Ben Bouali Chlef, 2010.
- [48] **Lalanne, M. and Ferraris, G.**, *Rotordynamics Prediction in Engineering*, 2nd ed. John Wiley & Sons Ltd., 1998.
- [49] **Rades, M.**, *Dynamics of Machinery II*, Editura Printech, 2009
- [50] **R. Bigret.** *Stabilité des Machines Tournantes et des Systèmes.* Cetim, 1998.
- [51] **F. E. Erich.** *Handbook of Rotordynamics.* McGraw-Hill, 1992.
- [52] **S. H. Crandall.** *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics*, chapter Rotordynamics, pages 1.44. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [53] **M. Lalanne and Ferraris G.** *Rotordynamics Prediction in Engineering.* John Wiley and Sons, 1990.
- [54] **G. Genta.** *Vibration of Structures and Machines : Practical Aspects.* Springer-Verlag, 1999.
- [55] **D. Childs.** *Turbomachinery Rotordynamics : Phenomena, Modeling, and Analysis.* Wiley-Interscience, 1993.
- [56] **A. Muszynska.** **Forward and backward** precession of a vertical anisotropically supported rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1) :207.222, 1996.
- [57] **M. Dias-Jr, S. J. Idehara, A. L. A. Mesquita, and U. A. Miranda.** On the simultaneous forward and backward whirling of flexible rotors : Numerical analysis and experimental verification, 30/09/2002, sydney, australia. In *IFTToMM - Sixth International Conference on Rotor Dynamics*, Sydney, Australia, 2002.
- [58] **C. Rao, R. B. Bhat, and G. D. Xistris.** Simultaneous forward and backward whirling in a jeffcott rotor supported on dissimilar hydrodynamic bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 203(4) :707.716, 1996.
- [59] **C. Rao, R. B. Bhat, and G. D. Xistris.** Experimental verification of simultaneous forward and backward whirling at different points of a jeffcott rotor supported on identical journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 198(3) :379.388, 1996.

- [60] **M. Sakata, M. Endo, K. Kishimoto, and N. Hayashi.** Secondary critical speed of flexible rotors with inertia slots. *Journal of Sound and Vibration*, 87(1) :61-70, 1983.
- [61] **Y. Kang, Y. P. Shih, and A. C. Lee.** Investigation on the steady-state responses of asymmetric rotors. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 114 :194-208, 1992.
- [62] **M Lanane and G.Ferraris** « rotordynamique prediction in engineering » John Wiley Sons 1990
- [63] **D.P.Atherton.** « Nonlinear Control Engineering » Van Nostrand Reinhold Company ,1975
- [64] **L. Meirovitch.** « Elements of vibration analysis » Mac Graw Hill international editions, 1986
- [65] **R.Sino** .comportement dynamique et stabilité des rotor : application aux rotors composites » thèse doctorat INSA Lyon, P187, 2007.
- [66] **J.DU GUNDJA AND J.H Wendelle** « some analysis methodes for rotating systems with periodic coefficient ».American Institute of aeronautics journal ,21(6) :890-897, jun 1983.
- [67] **G. Meng and R Gasch** « stability and stabillity degree of a cracked flexible rotor supported on journal bearing « journal of vibration and acoustics, 122 :116-125.
- [68] **Nelson HD.** (1976). The dynamics of rotor bearing system using finite elements. *ASME Journal of Engineering for Industry* 98(2) : 593-60. <https://doi.org/10.1115/1.3438942>.
- [69] **Bently Nevada. (2002).** Rotor Kit Model RK4.
Bently, D. (2002). Fundamentals of Rotating Machiner Diagnostics.
- [70] **GOUPY Jacques.** «Introduction aux Plans d'expériences». Dunod. Paris. 303 pages. (2001).
- [71] **BOX George.E. P., HUNTER William G., HUNTER J. Stuart** «Statistics for Experimenters» deuxième édition. John Wiley and Sons. New-York. 633 pages. (2005).
- [72] **Decaestecker TN, Lambert WE, Peteghem Carlos HV, Deforce D, Van Bocxlaer JF.** Optimization of solid-phase extraction for a liquid chromatographic-tandem mass spectrometric general unknown screening procedure by means of computational techniques. *J Chrom A* 2004 ; 1056: 57–65.
- [73] <http://www.doesinc.com/knowledge.htm> (accessed September 2006).
- [74] <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook> (accessed June, 2006).
- [75] **Wass JA.** Format experimental design and analysis for immunochemical product development. Part I. *IVD Technology Magazine* 1997, September.
- [76] **Nijhuis A, van der Knaap HCM, Jond SDE, Vandeginste BGM.** Strategy for ruggedness tests in chromatographic method validation. *Anal chim Acta* 1999 ; 391: 187–202.
- [77] **Plackett RL and Burman JP.** The design of optimum multifactorial experiments. *Biometrika* 1946 ; 33:305–325.

- [78] **Yannis LL. A Plackett-Burnam.** screening design directs the efficient formulation of multicomponent DRV liposomes. *J Pharm Biomed Anal* 2001 ; 26: 255–263.
- [79] **Trocine L, Malone CL.** Finding important independent variables through screening design : A comparison of methods, *Proceedings of the Winter Simulation Conference* Joines JA, Barton RR, Kang K, Fishwick PA, Eds, 2000: 749–754.
- [80] **Leeuwen van JA. Vandeginste BGM, Kateman M, Mulholland, Cleland A.** An expert system for the choice of factors for a ruggedness test in liquid chromatography. *Anal Chim Acta* 1990; 228: 145–153.
- [81] **Heyden YV, Questier F, Massart DL.** A ruggedness test strategy for procedure related factors: experimental setup and interpretation. *J Pharm Biomed Anal* 1998 ; 17: 153–168.
- [82] **Heyden YV, Luypaert K, Hartmann C, Massart DL, Hoogmartens J, Beer DJ.** Ruggedness tests on the High Performance Liquid Chromatography as of the United States Pharmacopoeia XXII for tetracycline hydrochloride. A comparison of experimental designs and statistical interpretations. *Anal Chim Acta* 1995; 312: 245–262.
- [83] <http://DFSS for Thermal Management Screening DoEs.htm> (accessed September 2006).
- [84] **Myers RH, Montgomery DC.** (1995). *Response surface methodology. Process and Product Optimization Using Designed Experiments.* John Wiley&Sons, Inc., NY, USA.
- [85] **Mostefa, B., Kaddour, R., Mimoun, Y., Abdallah, N.** (2018). Plackett-burman desing to study the influence of the stiffness of hydrodynamic bearings on the dynamic behaviour of turbo machinery. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 5(4) : 407-417. <https://doi.org/10.18280/mmep.05041>.