



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès**  
**Faculté de Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**  
**Laboratoire de Matériaux et Systèmes Réactifs**

## **THESE**

**Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat 3ème cycle**

**Par :**

**CHAFI Meriem Asmaa**

**Spécialité : Génie Mécanique**

**Option : Mécanique et Conception des Systèmes**

**Intitulé de la thèse :**

**Simulation numérique de la propagation de fissures dans les matériaux à gradient fonctionnel**

*Soutenue publiquement le : 29 Novembre 2021*

**Composition de jury :**

<b>M. BENGUEDIAB Mohamed</b>	<b>Professeur</b>	<b>UDL de Sidi Bel Abbès</b>	<b>Président</b>
<b>M. BOULENOUAR Abdelkader</b>	<b>Professeur</b>	<b>UDL de Sidi Bel Abbès</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>M. BOUCHOUICHA Benattou</b>	<b>Professeur</b>	<b>UDL de Sidi Bel Abbès</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. GHAZI Abdelkader</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Univ. de Mascara</b>	<b>Examineur</b>

**ANNEE UNIVERSITAIRE 2021/ 2022**



*A mon cher et tendre mari*  
*A ma famille et à ma belle famille*  
*A mes frères et ma sœur*

*« Se tromper n'est pas une mauvaise chose, c'est l'occasion d'apprendre quelque chose »*

***-Richard Feynman-***

## **Remerciements**

*Je remercie DIEU, le tout-Puissant de m'avoir donné la patience et le courage pour finir ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier Monsieur Abdelkader BOULENOUAR, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès, Directeur de ma thèse pour son encadrement et son aide, Je le remercie aussi pour le temps qu'il m'a consacré, sa disponibilité et sa gentillesse, je lui témoigne toute ma reconnaissance et ma profonde gratitude.*

*Je remercie Monsieur Mohamed BENGUEDIAB, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès, d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse.*

*Mes remerciements vont aussi à Monsieur Benattou BOUCHOUICHA, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès, et Monsieur Abdelkader GHAZI, Maître de conférences à l'Université de Mascara de nous avoir honorés par leur présence et d'avoir accepté d'examiner ce travail et de participer à ce jury.*

*Je remercie l'ensemble de mes enseignants de la Faculté de Technologie de l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès qui m'ont transféré leurs savoirs durant mon cursus universitaire. Une pensée spéciale va à notre cher Professeur MECHAB Mustapha, qui nous a quittés cette année. Puisse Dieu l'accueillir dans son vaste paradis*

*Je remercie ma maman et toute ma famille et belle famille pour leur gentillesse, leurs encouragements et leur soutien moral.*

*Je remercie mon époux qui m'a toujours soutenu et cru en moi et qui n'a jamais cessé de m'encourager, je le remercie aussi pour son aide précieuse, sa patience ainsi que sa contribution dans l'achèvement de ce travail, ses conseils m'ont été d'une grande aide.*

*Meriem CHAFI*

**Résumé :**

La présence de fissures dans les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) pose le problème du trajet de fissuration lors de la simulation de la propagation. Lorsque qu'il n'y a pas de symétrie de chargement ou de la géométrie par rapport à l'axe de la fissure, cette dernière ne se propage pas de façon rectiligne et la rupture se produit en mode mixte. Il faut alors utiliser des critères de bifurcation afin de déterminer la nouvelle orientation du trajet de fissuration

L'objectif principal de ce travail est axé sur une étude numérique de la propagation de fissures dans les matériaux FGM sous les conditions de chargement mécanique et thermique en mode mixte. Des programmes numériques seront conçus spécialement et seront par la suite intégrés dans un code de calcul par éléments finis. Enfin, l'influence des différents paramètres sur le processus de propagation de fissure sera prise en considération.

**Mots-clés :** Mécanique de la rupture, Critères de bifurcation, Facteurs d'intensité de contraintes, FGM, Mode mixte, Simulation numérique, T-stress.

**Abstract :**

The presence of cracks in functionally graded materials (FGM) can be problematic to predict numerically the crack path trajectory. When the loading or the geometry of the specimen are not symmetrical to the crack axis, the fracture occurs under mixed mode loading conditions. Therefore, it is necessary to use fracture criteria's to determine the crack growth direction.

The main purpose of this study is focused on a numerical simulation of crack path trajectory of FGM materials under mechanical and thermomechanical mixed mode loading. To this end, numerical programs are developed and integrated into a finite element code. Finally, the influence of different parameters on the crack behavior is considered.

**Key-words:** Fracture mechanics, Fracture criteria's, Stress intensity factors, FGM, Mixed mode, Numerical simulation, T-stress.

## ملخص:

إن وجود الشقوق داخل المواد ذات التدرج الوظيفي يشكل عائقاً للتنبؤ بمسار توسع هذه الشقوق عن طريق المحاكاة الرقمية. إذا كان الحمل المطبق أو شكل العينة غير متناظرين بالنسبة لمحور الشق، يكون الانكسار عن طريق الوضع المختلط (2+1). لذلك، من الضروري استخدام معايير التصدع لتحديد مسار نمو الشقوق. يركز الهدف الأساسي لهذه الأطروحة على دراسة رقمية عن طريق محاكاة مسار الشقوق في المواد ذات التدرج الوظيفي، وهذا تحت تأثير الحمل المطبق ميكانيكياً و ميكانيكياً-حرارياً في الوضع المختلط (2+1) لميكانيكا التصدع. لهذا الغرض، تم خصيصاً تطوير برامج رقمية ثم دمجها في برنامج حساب بطريقة العناصر المتناهية. في الأخير، تم الأخذ بعين الاعتبار العوامل المؤثرة في سلوك الشقوق ونموها داخل هذا النوع من المواد.

# Table des matières

Liste des figures .....	IV
Liste des tableaux .....	IX
Nomenclature .....	X
Introduction générale.....	1

## **Chapitre I : Généralités sur les matériaux FGM**

I.1 Introduction .....	4
I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	4
I.3 Domaine d'application des FGM .....	6
I.4 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	7
I.4.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	9
I.4.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	10
I.4.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	11
I.5 Procédés d'élaboration des FGM .....	12
I.5.1. La coulée par centrifugation.....	12
I.5.2 Dépôt en phase vapeur .....	13
I.5.3 Déposition par projection thermique.....	14
I.6 Comparaison entre les matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels .....	15
✓ Avantages des FGMs .....	16
✓ Inconvénients des FGMs .....	16
I.7. Conclusion.....	17

## *Chapitre II: Propagation quasi-statique de fissures dans les matériaux FGM*

II.1. Introduction.....	19
II.2. Généralités sur la mécanique de la rupture .....	19
II.2.1. Processus de fissuration.....	19
II.2.2. Modes élémentaires de fissuration.....	21
II.3. Mécanique linéaire élastique de la rupture .....	21
II.3.1 Critères de rupture .....	21
a) Approche énergétique.....	22
b) Approche d'intensité de contraintes .....	23
II.3. 2 Contrainte transversale T (T-stress).....	24
II.4. Mécanique élasto-plastique de la rupture.....	27



II.4.1. Ecartement à fond de fissure (CTOD).....	27
II.4.2. Intégrale de contour J.....	29
II.5. Propagation quasi-statique de fissures.....	30
a) Critère de la contrainte circonférentielle maximale : Critère CCM.....	30
b) Critère de la densité d'énergie de déformation minimale : Critère <i>DED. min</i> .....	32
c) Critère du taux de restitution d'énergie maximale : Critère TREM.....	33
d) Critère d'énergie de dilatation maximum : Critère- <i>Tv</i> .....	35
II.6. Méthodes numériques utilisées.....	36
II.7. Revue des recherches sur la propagation des fissures dans les matériaux FGM.....	37
II.8. Conclusion.....	41

### **Chapitre III : Simulation numérique de la propagation de fissures dans les matériaux FGM**

III.1 Introduction.....	41
III.2 Présentation du logiciel ANSYS.....	41
III.3. Calcul des paramètres de propagation.....	42
III.3.1 Facteurs d'intensité de contraintes (FICs).....	42
III.3.1.1 Méthode d'extrapolation de déplacement <i>DET</i> .....	42
III.3.1.2 Méthode de corrélation de déplacement <i>DCT</i> .....	42
III.3.2 Angle de propagation.....	43
III.3.3 Algorithme de propagation de fissures.....	43
III.4 Modélisation numérique du comportement mécanique des FGMs.....	45
III.5 Résultats et discussions.....	45
III.5.1 Propagation de fissures sous chargement mécanique.....	45
III.5.1.1 Cas d'une éprouvette de flexion 4-points en FGM.....	45
III.5.1.2 Cas d'une éprouvette de flexion 3-points en FGM.....	53
III.5.1.3 Cas d'une éprouvette en flexion trois points avec différents chargements.....	57
III. 5.2 Propagation de fissures sous chargement thermomécanique.....	62

III. 5.2.1 Cas d'une fissure débouchante dans une plaque FGM soumise à une charge thermique.....	63
III. 5.2.2 Cas d'une éprouvette Glass/Epoxy graduée sous chargement thermomécanique.....	65
III.6. Conclusion.....	71

### **Chapitre IV: Les paramètres influençant le trajet de propagation**

IV.1 Introduction .....	74
IV.2 Effet de la discontinuité géométrique.....	74
IV.2.1 Cas d'une plaque pré-fissurée contenant un trou .....	74
IV.2.2 Cas d'une plaque pré-fissurée contenant trois trous.....	78
IV.2.3 Cas d'une plaque fissurée contenant une inclusion.....	80
IV.2.4 Conclusion.....	85
IV.3 : Critère de propagation en considérant le terme non singulier :.....	85
IV.3.1 Détermination de la contrainte T-stress.....	85
IV.3.1.1 Cas d'une éprouvette plate homogène contenant une fissure inclinée :.....	86
IV.3.2 Influence de la contrainte T-stress sur l'angle initial de propagation : .....	87
IV.3.2.1 Cas d'une éprouvette plate en FGM contenant une fissure inclinée .....	88
IV.3.2.2 Cas d'une éprouvette pré-fissurée sollicitée en flexion trois points.....	90
IV.3.2.3 Cas d'une éprouvette de flexion trois points contenant une fissure inclinée .....	92
IV.4 Conclusion :.....	99

## LISTE DES FIGURES

### Chapitre I

Figure I. 1: Variation des propriétés.....	5
Figure I. 2: Photo d'une variation continue de la microstructure.....	6
Figure I. 3: Chambre de poussé de fusée.....	6
Figure I. 4: Implant dentaire.....	7
Figure I. 5: Géométrie d'une plaque FGM.....	9
Figure I. 6: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	10
Figure I. 7: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	11
Figure I. 8: Variation du module de Young à travers l'épaisseur selon la loi E-FGM.....	11
Figure I. 9: La centrifugation (Centrifugal casting). ....	12
Figure I. 10 : Schéma de principe de la déposition en phase vapeur [BES 85]. ....	13
Figure I. 11 : Principe de la déposition par voie chimique [BEL 10]. ....	14
Figure I. 12 : Schéma de principe de la projection thermique par flamme [PRO 99]. ....	14
Figure I. 13 : Schéma de principe de la projection par plasma [PRO 99]. ....	15
Figure I. 14 : La distribution composante des matériaux [YOS 04] ....	15
Figure I. 15 : Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et FGM [KOI 97].	16

### Chapitre II

Figure II. 1 : Zone délimitant le voisinage d'une pointe d'une fissure dans un milieu élastique. .....	20
Figure II. 2: Les modes de rupture.....	21
Figure II. 3 : Répartition des contraintes au voisinage du fond de fissure.....	23
Figure II. 4: Evolution de la contrainte d'ouverture le long du ligament en présence du terme T.....	25
Figure II. 5: Estimation du CTOD à partir du déplacement à la distance $r_y$ en amont de l'extrémité d'une fissure de longueur $(a + r_y)$ .....	28
Figure II. 6: Estimation du CTOD : Modèle de Dugdale-Barenblatt.....	29
Figure II. 7 : Intégrale de contour J.....	30
Figure II. 8 : Fond de fissure. ....	31
Figure II. 9 : Sens de l'angle de propagation (a) $K_{II}$ Positif, (b) $K_{II}$ négatif. ....	31
Figure II. 10: Chemin de propagation dans une plaque en T (Critère CCM). ....	32
Figure II. 11 : Paramétrage des éprouvettes pré-fissurées ( $r$ et $\theta$ sont les coordonnées polaires). .....	32

<b>Figure II. 12 :</b> Chemin de propagation : calcul numérique et expérimental [HUN 74].	33
<b>Figure II. 13.</b> Courbe $G(\theta)$ pour le calcul de la direction de propagation.	34
<b>Figure II. 14.</b> Chemin de propagation obtenu par le critère TREM [BOU 00]	34
<b>Figure II. 15:</b> Propagation de fissures dans les matériaux FGM.	39
<b>Figure II. 16:</b> Propagation de fissures dans les matériaux FGM : Méthode SBFEM	40

### Chapitre III

<b>Figure III. 1:</b> Elément singulier avec nœuds au quart des côtés.	43
<b>Figure III. 2 :</b> Organigramme de l'algorithme programmé pour la propagation de fissure.	44
<b>Figure III. 3:</b> Différentes étapes de propagation de la fissure.	44
<b>Figure III. 4:</b> Géométrie de l'éprouvette en flexion 4-points en FGM les dimensions sont données en [mm].	45
<b>Figure III. 5:</b> Maillage de l'éprouvette en flexion 4-points : (a) Maillage global pour les différentes positions de fissure, (b) Maillage détaillé au voisinage de la pointe de fissure.	46
<b>Figure III. 6:</b> Variation des propriétés matérielles <b>a)</b> Variations du module de Young $E$ (MPa), du coefficient de Poisson $\nu$ , <b>b)</b> la variation du $K_{IC}$ le long de la région graduée ( $0 \leq \xi \leq 1$ )	46
<b>Figure III. 7:</b> Extension de la fissure par le critère de bifurcation CCM (position $\xi=0.17$ )	47
<b>Figure III. 8:</b> Résultats expérimentaux des chemins de propagation pour les trois positions de fissure [ROU 00].	48
<b>Figure III. 9:</b> Prédiction numérique des trajets de propagation obtenue par Kim et Paulino [KIM 07].	48
<b>Figure III. 10:</b> Résultats numériques des trajets de fissuration obtenus par le critère CCM	48
<b>Figure III. 11:</b> Trajets de propagation obtenus numériquement pour les trois positions de fissure ( $P_1$ , $P_2$ et $P_3$ ).	49
<b>Figure III. 12:</b> Trajets de fissuration obtenus pour les différentes positions $\xi$ .	50
<b>Figure III. 13:</b> Chemins de propagation obtenus par les critères : CCM, TREM et DEDmin pour $P_1$ ( $\xi=0.17$ ).	51
<b>Figure III. 14:</b> Evolution de l'angle de bifurcation ( $\theta_0$ ) dans la zone graduée.	52
<b>Figure III. 15:</b> Géométrie de l'éprouvette de flexion 3 points en FGM (ZrO <sub>2</sub> /NiCr).	53
<b>Figure III. 16:</b> Géométrie de l'éprouvette de flexion 3 points a) FGM-A, b) FGM-B.	54
<b>Figure III. 17:</b> Variations du module de Young $E$ dans le matériau FGM.	54
<b>Figure III. 18:</b> Modèle typique de maillage : a) Maillage global de l'éprouvette, b) Eléments singuliers autour de la pointe de fissure.	55
<b>Figure III. 19:</b> Configuration finale de trajet de fissuration (FGM-A).	55
<b>Figure III. 20:</b> Chemin de propagation de la fissure pour FGM-A et FGM-B	56

<b>Figure III. 21:</b> Evolution de la charge appliquée en fonction de l'extension de la fissure de FGM-A et FGM-B.....	57
<b>Figure III. 22:</b> poutre flexion trois points pour un chargement :.....	58
<b>Figure III. 23:</b> Modèle typique de maillage : a) Maillage global de l'éprouvette, b) Eléments singuliers autour de la pointe de fissure. ....	58
<b>Figure III. 24:</b> Trois étapes de l'extension de fissure dans le matériau PMMA (cas 1). ....	59
<b>Figure III. 25:</b> Chemin de propagation dans le matériau FGM (cas 1).....	59
<b>Figure III. 26:</b> Comparaison du chemin de propagation pour PMMA obtenus numériquement et les résultats expérimentaux [GAL 96]......	60
<b>Figure III. 27:</b> Comparaison du chemin de propagation pour les deux matériaux : homogène et FGM.....	60
<b>Figure III. 28:</b> Comparaison du chemin de propagation entre différents critères DEDmin, TREM, Tv avec les résultats de Kim [KIM 04]. ....	61
<b>Figure III. 29:</b> Evolution de la charge en fonction de l'extension de la fissure pour un chargement asymétrique. ....	61
<b>Figure III. 30:</b> Configuration finale de propagation de fissure obtenue par : a) MEF (présente étude), b) Méthode sans Maillage Memari [MEM 19].....	62
<b>Figure III. 31:</b> Organigramme de l'analyse thermique et structurale.....	63
<b>Figure III. 32:</b> Fissure débouchant dans une plaque fissurée en FGM .....	63
<b>Figure III. 33:</b> Evolution du facteur d'intensité de contrainte normalisé en fonction de $(a/W)$ pour différents rapports $(E_2/E_1)$ . ....	65
<b>Figure III. 34:</b> Géométrie, chargement et maillage de l'éprouvette considérée, (a) Géométrie de l'éprouvette, (b) Maillage globale pour différentes positions de fissure, (c) Eléments singuliers au voisinage de la pointe de fissure.....	66
<b>Figure III. 35:</b> Comparaison entre les chemins de propagation obtenus sous chargement mécanique et thermomécanique pour les positions de fissure A et B .....	67
<b>Figure III. 36:</b> Evolution des FICs $K_I$ et $K_{II}$ durant l'extension de la fissure ( $\xi = 0.17$ ).....	68
<b>Figure III. 37:</b> Evolution des FICs $K_I$ et $K_{II}$ durant l'extension de la fissure ( $\xi = 0.58$ ).....	68
<b>Figure III. 38:</b> Chemins de propagation de fissure en chargement mécanique et thermomécanique pour différentes températures.....	69
<b>Figure III. 39:</b> Chemins de propagation de fissure sous chargement mécanique et thermomécanique pour différentes températures.....	70

## Chapitre IV

<b>Figure IV. 1:</b> Modèle géométrique de la plaque pré-fissurée contenant un trou.....	75
<b>Figure IV. 2:</b> Représentation du maillage de la plaque : .....	75
<b>Figure IV. 3:</b> Evolution de $K_I$ et $K_{II}$ obtenus durant l'extension de la fissure avec trois critères différents.....	76
<b>Figure IV. 4:</b> Chemins de propagation de la fissure dans une plaque contenant un trou. ....	76
<b>Figure IV. 5:</b> Chemin de propagation obtenue par le critère de bifurcation $Tv$ pour un FGM. ....	77
<b>Figure IV. 6:</b> Comparaison des chemins de propagation pour une plaque pré-fissurée contenant un trou a) Rashid [RAS 98], b) Bouchard et al. [BOU 00].....	77
<b>Figure IV. 7:</b> Comparaison du chemin de propagation entre un matériau homogène et FGM. ....	77
<b>Figure IV. 8:</b> a) Modèle géométrique de la plaque fissurée en FGM contenant trois trous.....	78
<b>Figure IV. 9:</b> a) Variation des propriétés $E$ et $\nu$ , b) Variation du FIC critique $K_{Ic}$ .....	78
<b>Figure IV. 10:</b> Modèle typique du maillage (configuration initiale). ....	79
<b>Figure IV. 11:</b> Trajet de fissuration obtenu par simulation numérique (matériau FGM).....	79
<b>Figure IV. 12:</b> Comparaison du trajet de fissuration entre les matériaux PMMA et FGM.....	79
<b>Figure IV. 13:</b> Evolution des FICs $K_I$ et $K_{II}$ durant l'extension de la fissure (cas de FGM). 80	80
<b>Figure IV. 14:</b> Modèle géométrique de la plaque homogène (a) et FGM (b), ainsi que le maillage de la configuration initiale(c). ....	81
<b>Figure IV. 15:</b> Comparaison des résultants de $K_I$ et $K_{II}$ obtenus durant la propagation de fissure. ....	82
<b>Figure IV. 16:</b> Propagation de fissure dans un matériau homogène contenant une inclusion avec : a) $E_{inc}/E_{plq}= 1$ , b) $E_{inc}/E_{plq}= 0.1$ , c) $E_{inc}/E_{plq}= 10$ .....	82
<b>Figure IV. 17:</b> Chemin de propagation de fissure dans un matériau homogène contenant une inclusion avec : $E_{inc}/E_{plq}= 1$ , b) $E_{inc}/E_{plq}= 0.1$ , c) $E_{inc}/E_{plq}= 10$ .....	83
<b>Figure IV. 18:</b> Evolution de $K_I$ et $K_{II}$ normalisés en fonction de l'extension de la fissure pour $E_{inc}/E_1=0.1$ et $E_{inc}/E_2=10$ . ....	84
<b>Figure IV. 19:</b> Chemin de propagation obtenu par le critère $Tv$ pour les deux cas $E_{inc}E_2 = 0.1$ , $E_{inc}E_2 = 10$ . ....	84
<b>Figure IV. 20:</b> Eprouvette plate contenant une fissure inclinée en matériau homogène. ....	87
<b>Figure IV. 21:</b> Eprouvette plate en FGM contenant une fissure inclinée. ....	89
<b>Figure IV. 22:</b> Influence du paramètre T-stress sur l'angle d'initiation de la fissure pour une éprouvette plate contenant une fissure inclinée.....	90

<b>Figure IV. 23:</b> Présentation de l'éprouvettes avec les conditions aux limites. ....	90
<b>Figure IV. 24:</b> Variation du module de Young. ....	91
<b>Figure IV. 25:</b> Influence du paramètre T-stress sur l'angle d'initiation de la fissure en flexion 3 points. ....	91
<b>Figure IV. 26:</b> Epreuve de flexion 3 points contenant une fissure inclinée. ....	92
<b>Figure IV. 27:</b> Evolution du facteur d'intensité de contrainte $K_I$ en fonction de l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ) pour différents rapports de $a/W$ et $S/W$ . ....	93
<b>Figure IV. 28:</b> Evolution du facteur d'intensité de contrainte $K_{II}$ en fonction de l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ) pour différents rapports de $a/W$ et $S/W$ . ....	94
<b>Figure IV. 29:</b> Evolution de T-stress en fonction de l'angle ( $\alpha$ ) pour différents $a/W$ et $S/W$ . ....	95
<b>Figure IV. 30:</b> Comparaison de l'angle initial de propagation $\theta$ en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure $\alpha$ entre le critère CCM et $CCM_G$ ( $S/W=0.5$ ). ....	96
<b>Figure IV. 31:</b> Comparaison de l'angle initial de propagation $\theta$ en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure $\alpha$ entre le critère CCM et $CCM_G$ ( $S/W=0.6$ ). ....	97
<b>Figure IV. 32:</b> Comparaison de l'angle initial de propagation $\theta$ en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure $\alpha$ entre le critère CCM et $CCM_G$ ( $S/W=0.75$ ). ....	98

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau III. 1:</b> Propriétés matérielles, $E$ , $\nu$ et $K_{IC}$ dans la zone graduée.....	47
<b>Tableau III. 2:</b> Comparaison entre les angles d'amorçage $\theta_0$ .....	50
<b>Tableau III. 3:</b> comparaisons des angles initiaux de bifurcation pour différents critères.....	51
<b>Tableau III. 4:</b> Calcul de la charge critique $P_{cr}$ pour les positions $\xi = 0.17, 0.58, 1$ .....	52
<b>Tableau III. 5:</b> Calcul les FICs critiques $K_I$ et $K_{II}$ pour les positions $\xi = 0.17, 0.58, 1$ .....	53
<b>Tableau III. 6 :</b> Propriétés mécaniques de FGM aux points d'extrémité dans la région graduée.....	54
<b>Tableau III. 7:</b> Variation de $K_I$ , $K_{II}$ l'angle de bifurcation $\theta_0(^{\circ})$ et la charge critique $P_{cr}$ (N) .....	56
<b>Tableau III. 8:</b> Propriétés mécaniques de FGM aux deux extrémités de la région graduée. ...	57
<b>Tableau III. 9:</b> Facteur d'intensité de contrainte normalisé pour différents rapports $(a/W)$ et $(E_2/E_1)$ .....	64
<b>Tableau III. 10:</b> Valeurs du FIC normalisé $(K_I/K_0)$ avec $E_2/E_1=5$ et $\alpha_2/\alpha_1=2$ .....	65
<b>Tableau III. 11:</b> Propriétés mécaniques ( $E$ , $\nu$ et $K_{IC}$ et thermiques (facteur d'expansion thermique $\alpha$ ) dans la zone graduée ( $0 \leq \xi \leq 1$ ).....	66
<b>Tableau III. 12:</b> Variation des facteurs d'intensité de contrainte $K_I$ et $K_{II}$ en fonction de la température (position A).....	69
<b>Tableau III. 13:</b> Variation des facteurs d'intensité de contrainte $K_I$ et $K_{II}$ en fonction de la température (position B).....	69
 <b>Tableau IV. 1:</b> Calcul des paramètres $K_I$ , $K_{II}$ et $T$ en fonction des angles d'orientation $\alpha$ .....	 87



## Nomenclature

$a$	Longueur de fissure
$K_I$	Facteur d'intensité de contrainte en mode I
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$	Les contraintes en coordonnées polaires
$DED_{min}$	Critère de la densité d'énergie de déformation minimale
$K_{IC}$	Facteur d'intensité de contrainte critique
$K_{II}$	Facteur d'intensité de contrainte en mode II
$T_v$	Critère d'énergie de dilatation maximum :
$r_c$	Le rayon critique
$u_{xx}$	Déplacement dans la direction x
$\nu, \nu_{tip}$	Coefficient de Poisson calculé à la pointe de fissure
$\varepsilon_{xx}$	Déformation dans les directions x
$\mu_{tip}$	Module de cisaillement calculé à la pointe de fissure
$\mu_{tip}$	Module de cisaillement calculé à la pointe de fissure
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$	Composantes des contraintes dans les directions x et y
$\nu_{tip}$	Coefficient de Poisson calculé à la pointe de fissure
<i>APDL</i>	Langage de conception paramétrique Ansys
<i>CCM</i>	Critère de la contrainte circonférentielle maximale
<i>CCMG</i>	Critère de la contrainte circonférentielle maximale généralisé
<i>DCT</i>	Technique de corrélation des déplacements
<i>DET</i>	Technique d'extrapolation par déplacement
<i>FGM</i>	Matériau fonctionnellement graduée
<i>FIC</i>	Facteur d'intensité de contrainte
$M^e$	Le paramètre du mode mixte
<i>TREM</i>	Critère du taux de restitution d'énergie maximale
<i>T-stress</i>	Contrainte transversale
$\alpha$	Angle d'inclinaison de la fissure
$\alpha_T$	Angle spécifique d'inclinaison de la fissure
$\Delta a$	Variation de longueur de fissure
$\theta$	Angle initial de propagation de fissure
$\zeta$	Positions de la fissure
$\sigma_t$	La résistance à la traction
$E, E_{tip}$	Module de Young ; Module de Young calculé à la pointe de fissure

## *Introduction générale*

---

## **Introduction générale**

Face aux nouveaux défis de conception et aux sollicitations complexes, et exigeant des matériaux avec des propriétés contradictoires, les matériaux métalliques conventionnels ont montré quelques limites et leur utilisation est devenu de plus en plus difficile. Ce qui a amené les concepteurs à l'utilisation des matériaux composites. L'évolution des matériaux est basée sur la limitation d'une classe de matériaux qui nécessite le développement d'autres classes de matériaux. Deux ou plusieurs matériaux de natures différentes sont nécessaires pour constituer un matériau composite. Cette association permet d'obtenir de très bonnes performances largement supérieures comparées à celles des matériaux pris séparément. Il est alors possible d'améliorer le comportement mécanique, la résistance à la fatigue et à la corrosion ainsi que la rigidité tout en réduisant le poids de la structure. Cependant, les matériaux composites conventionnels sont limités, et leur plus grand problème se situe au niveau des interfaces à cause de la discontinuité des propriétés ce qui provoque une grande concentration de contraintes conduisant à la fissuration de la matrice ou pire, à un délaminage à cause de la transition brutale de la composition, et particulièrement en cas de sollicitations à hautes températures.

Face à la limite des matériaux métalliques et des matériaux composites, une nouvelle classe de matériaux a vu le jour ; les matériaux à gradient fonctionnel ou les matériaux fonctionnellement gradués (**F**unctionally **G**raded **M**aterials). Ce sont des matériaux composites sophistiqués, constitués de deux matériaux ou plus avec des propriétés physico-chimiques différentes. Comme leur nom l'indique, ils sont caractérisés par un changement graduel et continu des propriétés du matériau, éliminant ainsi les discontinuités et les contraintes au niveau des interfaces tout en préservant les propriétés des matériaux constituants.

Bien que les matériaux fonctionnellement gradués aient initialement été développés pour une application de barrière thermique, leur application a augmenté et ont été utilisés pour résoudre un certain nombre de problèmes dans les applications d'ingénierie et dans différents domaines. La connaissance du comportement des fissures dans les FGM est importante pour évaluer et améliorer leur intégrité structurelle. L'étude de leur comportement nécessite une approche particulière car ils ont la caractéristique d'être un mélange de fraction volumique de deux matériaux, de propriétés mécaniques et physiques complètement différentes.

La course à l'innovation et l'avancé rapide des progrès pousse les chercheurs à utiliser des outils numériques et informatique tel que la simulation numérique qui est devenu un outil indispensable d'ingénierie des objets industriels complexes du fait de ces avantages tel que sa

rapidité de mise en œuvre, de son cout qui est incomparablement moins onéreux pour simuler une expérience que de la réaliser en réalité, la possibilité de simuler des condition difficilement reproductible dans la réalité telles que les températures extrêmes.

## **Objectif de la thèse**

Ce travail de thèse se porte principalement sur une étude numérique par la méthode des éléments finis, de la propagation de fissures dans les matériaux FGM, sous les conditions de chargement mécanique et thermomécanique en mode mixte. Des programmes numériques seront conçus spécialement et seront par la suite intégrés dans un code de calcul par éléments finis. L'influence des différents paramètres sur le processus de propagation de fissure sera prise en considération.

## **Plan de la thèse**

Afin d'atteindre les objectifs fixés au départ, le premier chapitre est consacré aux matériaux à gradient de propriété, leurs utilisations, leurs développements, leurs domaines d'application, les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles.

Dans le second chapitre, nous présentons un rappel sur la mécanique de la rupture, les mécanismes et les paramètres qui régissent une propagation de fissure tel que les facteurs d'intensité de contrainte, le taux de restitution d'énergie. Une attention particulière sera donnée sur les travaux scientifiques portant sur le comportement en rupture des matériaux fonctionnellement gradués, en mettant l'accent sur les approches locales et globales, ainsi les résultats des travaux publiés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude numérique de la propagation de fissures dans les matériaux à gradient fonctionnel, sous l'effet des conditions de chargement mécanique et thermomécanique. Un intérêt particulier est porté au calcul du FICs par la méthode d'extrapolation de déplacements et la méthode de corrélation des déplacements. Cette étude est basée sur l'utilisation des critères de bifurcations locales et énergétiques. Dans ce chapitre, nous allons examiner l'efficacité et la fiabilité du programme de calcul élaboré, en se basant sur des approches numériques et expérimentales publiées dans la littérature.

Le quatrième chapitre, est consacré à l'étude numérique de la propagation de fissure dans les matériaux FGM sollicitée en mode mixte, avec une analyse de l'effet des défauts géométriques sur le trajet final de propagation de fissure dans les matériaux FGM. Les calculs numériques ont été réalisés sur des exemples d'applications suffisamment variés, en utilisant le code de

calcul par éléments finis ANSYS. Les résultats obtenus sont comparés et validés avec d'autres travaux numériques afin de montrer que le modèle numérique utilisé est capable de reproduire avec fiabilité le chemin de propagation de fissure dans le cas des structures complexes. La seconde partie du même chapitre s'articule sur l'étude de l'influence du paramètre T-stress sur le chemin de propagation de fissure dans les matériaux FGM. Ce paramètre sera associé au terme singulier pour être introduits dans un critère de rupture généralisé.

Finalement, notre thèse s'achève par une conclusion générale mettant en valeur les résultats obtenus et dégageant des perspectives pour des travaux futurs.

## *Chapitre I*

### *Généralités sur les matériaux FGM*

---

## I.1 Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials : FGM) est une classe de matériaux composites caractérisés par une variation graduelle de la composition et de la microstructure avec la position d'une façon qui permet l'optimisation des performances mécaniques et thermiques dans la structure. L'intégration des propriétés et des fonctions désirées dans la phase de conception permet de considérer les matériaux FGM comme des matériaux intelligents. Selon les applications spécifiques et les contraintes environnementales, le matériau peut être choisi à chaque interface. Les avantages multiples de ces matériaux et particulièrement leur potentiel d'application augmentent leur demande et les rendent plus attractifs. L'amélioration des propriétés telles que la rigidité, la tenue à la fatigue ainsi que la résistance à la corrosion et de la conductivité thermique sont parmi les critères les plus recherchés dans le choix des matériaux FGM.

Le concept est né suite à une réflexion de deux chercheurs japonais voulant concevoir un engin spatial avec un revêtement pouvant résister à des contraintes thermiques très sévères. Ni les matériaux métalliques ni les composites pouvaient satisfaire ce type de conception. Le concept des matériaux FGM est alors apparu. L'idée consiste à produire une transition graduelle (douce) en partant d'un métal pur vers un matériau céramique pur. Même si le concept a été proposé pour résoudre un problème de revêtement dans le domaine spatial, l'utilisation des matériaux FGM a été élargie petit à petit dans les différents secteurs industriels à savoir le domaine de l'automobile, la fabrication des outils, biomécanique...

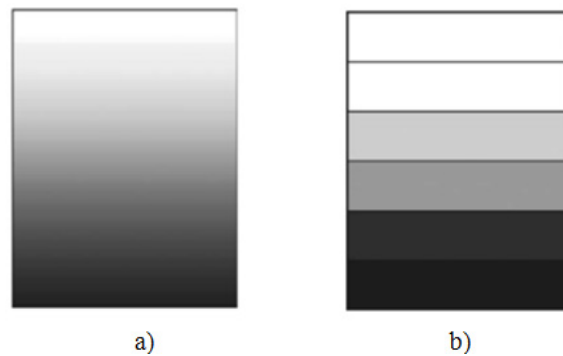
## I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (Figure I.1a) ou discrète (, b) Variation discrète

à travers l'épaisseur [HIR 96]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter la concentration de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

La figure (I.2) illustre un exemple d'une micrographie par microscope électronique à balayage d'une éprouvette de flexion 3 points en FGM ( $Al_2O_3$ -SUS304) [KEI 05]. L'utilité de la transition graduelle se montre dans le cas où la face supérieure est exposée à une haute température tandis que la face inférieure est exposée à une basse température. Il est alors

nécessaire que la face supérieure soit à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une variation continue de la microstructure entre les deux.



**Figure I. 1:** Variation des propriétés

a) Variation continue, b) Variation discrète

Les matériaux céramiques n'ont pas été choisis au hasard, au fait, c'est grâce à leurs caractéristiques exceptionnelles qu'ils sont utilisés :

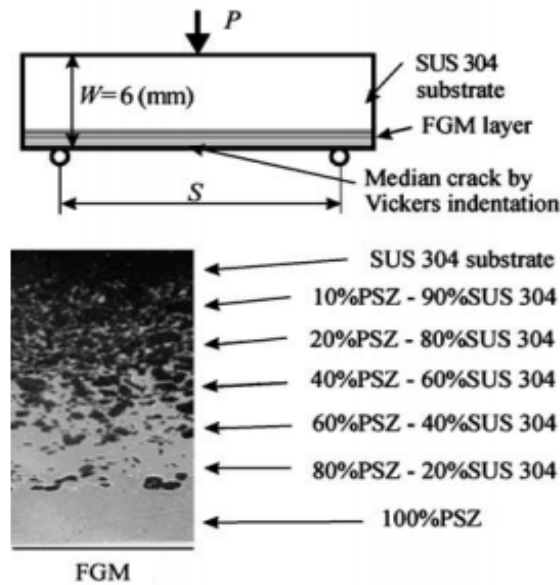
- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haut module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.





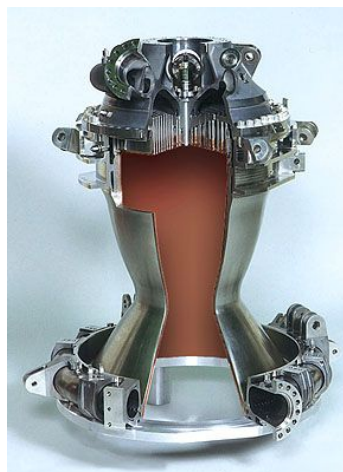
*Figure I. 2: Photo d'une variation continue de la microstructure.*

### I.3 Domaine d'application des FGM

Les caractéristiques importantes des FGM ont favorisées leur utilisation dans presque tous les domaines d'activité humains, ils sont actuellement appliqués dans certaine industrie, avec un énorme potentiel pour être utilisé dans d'autres horizons à l'avenir.

#### ✓ Aérospatial

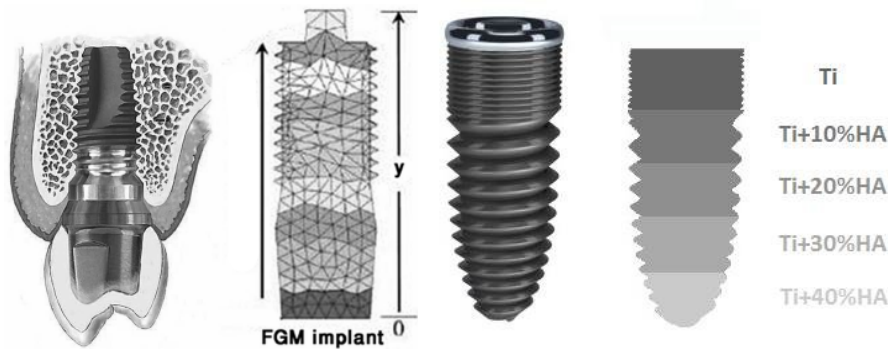
Initialement, c'est pour les besoins de ce domaine que le matériau fonctionnellement gradué a été développé. L'application de ce nouveau matériau a augmenté au fil des années dans l'industrie aérospatiale. La plupart des équipements et des structures aérospatiaux sont maintenant constitués de matériaux fonctionnellement gradués tel que les composants du moteur de fusée, chambre de poussé de fusée figure I.3 qui doit faire face à des températures très élevé, les réflecteurs, les panneaux solaires, les roues de turbine, revêtements des navettes spatiales.



*Figure I. 3: Chambre de poussé de fusée.*

### ✓ Médecine

C'est parce que le corps humain est composé de tissus vivants de constitution spéciale, que ces matériaux intéressent d'avantage le domaine biomédicale grâce à leur propriété flexible. A cause du processus de vieillissement naturel et l'endommagement, les os et les dents sont souvent les pièces les plus remplacées du corps humain. Le gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués sont les plus couramment utilisés dans cette industrie, car leurs propriétés sont très proches de celles des pièces qu'ils ont l'intention de remplacer et servent un matériau idéalement compatible tel que les : implants de remplacement du squelette, Les implants dentaires en titane (Figure I.4).



*Figure I. 4: Implant dentaire.*

### ✓ Énergie nucléaire

Parmi le point fort de l'application de ce matériau et sa capacité thermique, on le trouve ainsi dans l'industrie nucléaire dans des dispositifs de conversion d'énergie comme barrière thermique, dans le générateur thermoélectrique.

Les propriétés différentes et variables des FGM offrent la capacité de ce type des matériaux à résister à la pénétration, en freinant la fissuration et la propagation de fissure, donnent une propriété attractive qui rend le matériau privilégié dans l'industrie de la défense telle que des plaques de blindage et des gilets pare-balles.

#### **I.4 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM**

Les matériaux FGM consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. L'un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi-phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au « modèle de Voigt » [SHE 09].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

$P_i$  et  $V_i$  sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du Constituant  $i$ , La sommation des fractions volumiques de tous les constituants du matériau FGM est égale à l'unité.

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique (c) et du métal inoxydable en général (m). Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (\text{I.3})$$

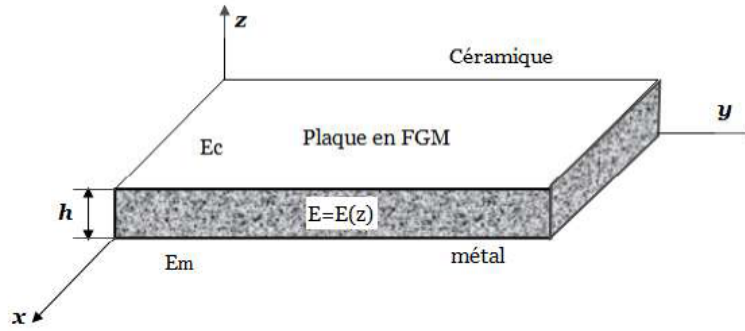
Avec :

$$V_c + V_m = 1 \quad (\text{I.4})$$

Le matériau FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. Les fonctions les plus employées sont la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

La figure (I.5) représente un exemple de la géométrie de la plaque en FGM, les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe  $z$ ), soit :

$$E = E(z) \text{ et } \nu = \nu(z) \quad (\text{I.5})$$



**Figure I. 5:** Géométrie d'une plaque FGM.

L'effet du coefficient de Poisson a été négligé par Jin et Batra [JIN 96], ce dernier peut être considéré comme constant. Contrairement à l'effet du module de Young dont l'influence sur les déformations est considérable. Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

#### I.4.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

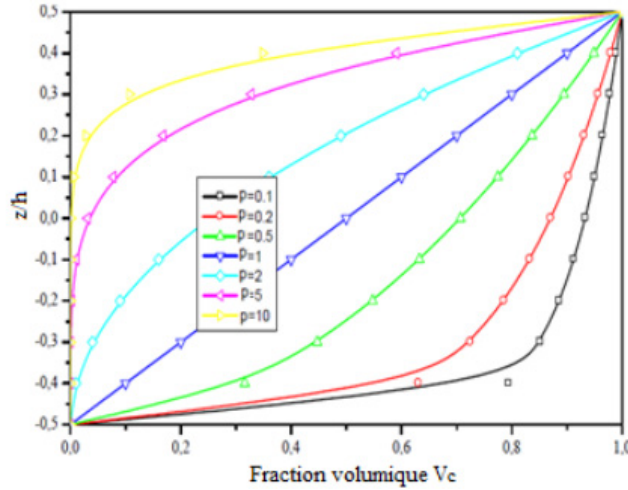
La fraction volumique de la distribution obéissant à une fonction en loi de puissance P-FGM s'écrit comme suit :

$$V(z) = \left( \frac{z+h/2}{h} \right)^p \quad (I.5)$$

Où  $p$  est un paramètre matériel et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  est déterminée, les propriétés matérielles de la loi P-FGM se déterminent par la loi des mélanges comme suit [BAO 95] :

$$E(z) = (E_c - E_m)V(z) + E_m \quad (I.6)$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = +h/2$ ) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (Figure I.6). Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .



**Figure I. 6:** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

#### I.4.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chi et Chung [CHI 03] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_c(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7})$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq +h/2 \quad (\text{I.8})$$

En utilisant la loi de Voigt, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)] \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

$$E(z) = V_m(z) \cdot E_c + [1 - V_m(z)] \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq +h/2 \quad (\text{I.10})$$

L'allure de ces deux fonctions de puissance est sous forme de sigmoïde, de ce fait la loi de distribution est notée par S-FGM. Elle est représentée sur la figure (1.7). On remarque que cette distribution est antisymétrique par rapport au plan moyen.

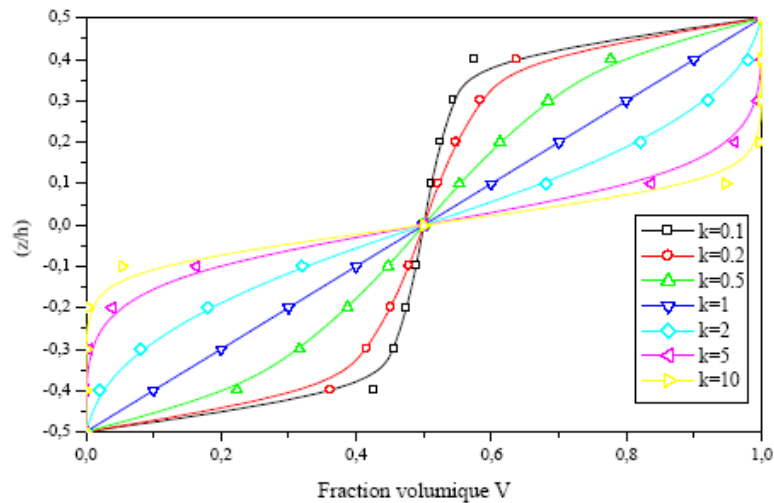


Figure I. 7: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.4.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Une fonction exponentielle a été utilisée par Delale en 1983 [DEL 83] pour représenter les propriétés matérielles des FGM. Elle est de la forme :

$$E(z) = E_c e^{B(z+h/2)} \tag{I.11}$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_c}{E_m} \right) \tag{I.12}$$

Un exemple de la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représenté sur la (Figure I.8).

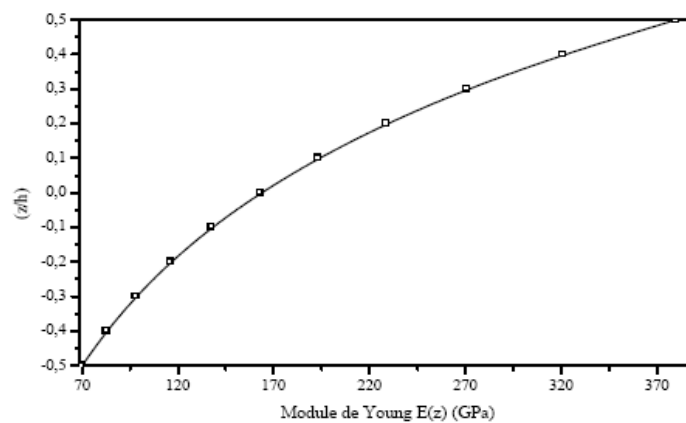


Figure I. 8: Variation du module de Young à travers l'épaisseur selon la loi E-FGM.

## I.5 Procédés d'élaboration des FGM

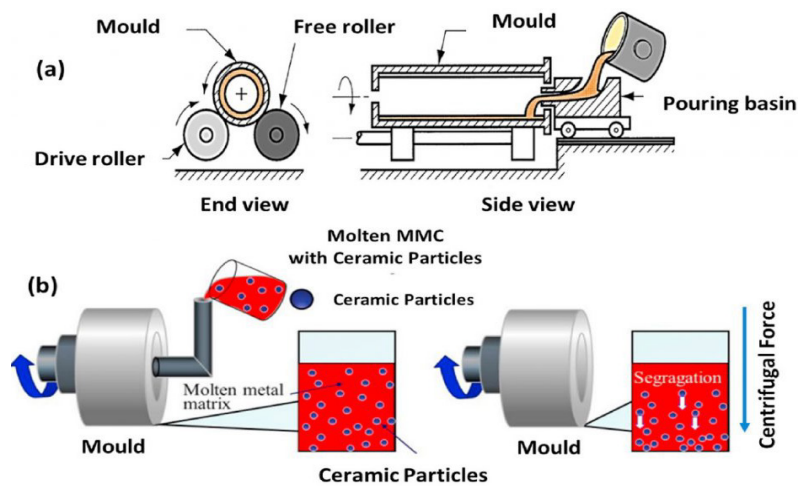
Au cours de ces années, de nombreuses techniques de mise en forme ont été utilisées. Les principales techniques sont présentées dans la suite. Dans cette partie de la recherche bibliographique, quelques techniques seront brièvement expliquées.

### I.5.1. La coulée par centrifugation

La méthode de coulée centrifuge est réalisée en versant un mélange composé d'un métal en fusion et d'une poudre métallique, qui ont une densité différente. Au sein d'une enceinte annulaire, en tournant le dispositif, le mélange est soumis à une force centrifuge. Les particules sont soumises à différentes forces dont on peut exploiter l'action afin d'établir une distribution volumique radiale de la phase divisée [BIE 01].

Donc, la répartition du matériau FGM considérablement influencée par la différence de densité entre les particules de poudre fondue, la granulométrie et la distribution granulométrique de la poudre, la viscosité du matériau fondu et le temps de solidification.

Le schéma de principe de la centrifugation horizontale est présenté par la Figure I.9.



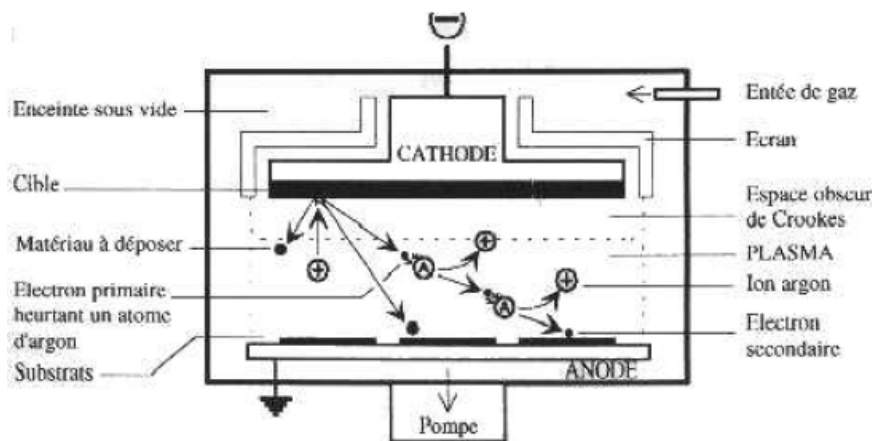
*Figure I. 9: La centrifugation (Centrifugal casting).*

- L'avantage de cette technique est qu'il est possible d'avoir une production massive des matériaux gradués.
- Son inconvénient principal est qu'il ne peut être utilisé que pour produire une section cylindrique, tels que les tubes, douilles et pièces moulées de forme simple. La gradation est limitée par la force centrifuge et la différence de densité des matériaux constitutifs [WAZ 15].

### I.5.2 Dépôt en phase vapeur

Cette méthode est réalisée suivant deux façons :

- a) **Le dépôt par voie physique** qui consiste à faire chauffer un matériau nommé « cible » jusqu'à son évaporation, puis il est vaporisé par le principe de l'ionisation d'un gaz (argon) entre la cible (cathode) et le substrat (anode). Le champ électrique créé entre la cathode et l'anode dirige les atomes de gaz ionisés vers la cible pour arracher un atome de la cible et le déposer sur le substrat (Figure I. 10) [BES 85].



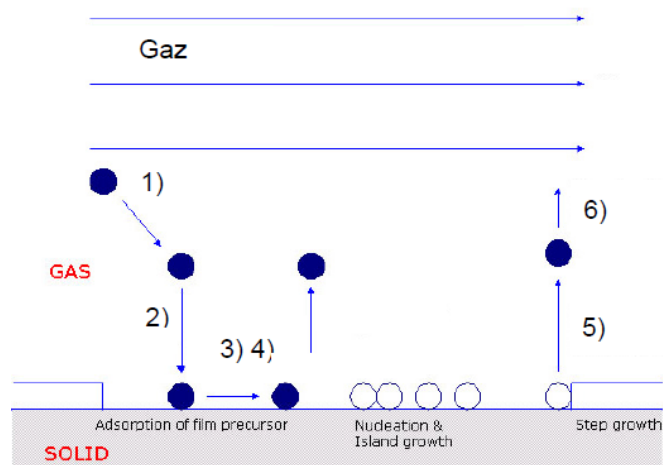
*Figure I. 10 : Schéma de principe de la déposition en phase vapeur [BES 85].*

- b) **Le dépôt par voie chimique (CVD)** : ce type de procédé consiste à mettre en contact un composé volatil du matériau à déposer avec un autre gaz au voisinage de la surface à recouvrir. Ce procédé se fait en cinq étapes illustrées sur la Figure I. 11.

- 1- La diffusion en phase gazeuse vers le substrat,
- 2- L'adsorption à la surface du substrat,
- 3- La réaction chimique et la germination des grains. Ensuite, on observe sur le substrat la diffusion des atomes déposés à la surface,
- 4- La désorption,
- 5- La diffusion dans la phase gazeuse.

Malheureusement, cette technique a un taux de dépôt assez faible qui dépend du matériau à déposer [BEL 10]. Le contrôle des réactions de formation des composés est la clé pour former des matériaux gradués.



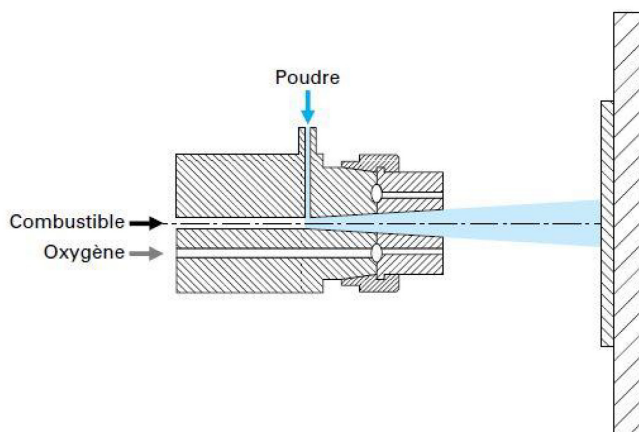


*Figure I. 11 : Principe de la déposition par voie chimique [BEL 10].*

### I.5.3 Déposition par projection thermique

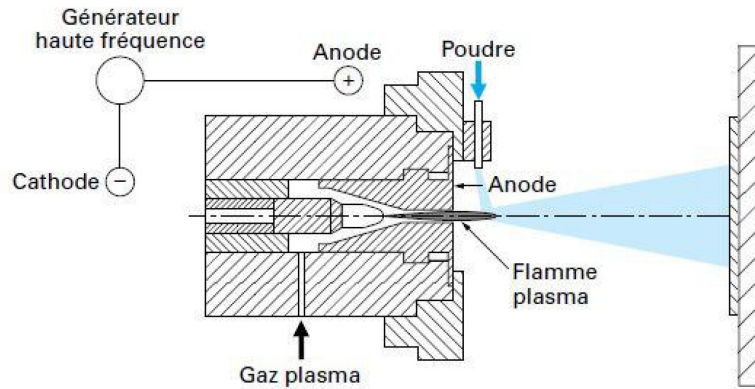
#### La projection par flamme

Le principe est basé sur la combustion d'un gaz afin de porter le matériau à sa température de fusion et le projeter sur un substrat (Figure I. 12). La simplicité de cette technique ainsi que son faible coût sont les principaux avantages. Par contre, la température peu élevée avec une faible vitesse de projection implique un dépôt poreux ( $\approx 90\%$ ) [PRO 99]



*Figure I. 12 : Schéma de principe de la projection thermique par flamme [PRO 99].*

**La projection PLASMA :** Ce procédé consiste à soumettre un gaz à une forte température, ce qui permet de transformer le gaz en état ionisé (plasma), ensuite, il est projeté sur un substrat. L'avantage de cette technique est de pouvoir déposer divers matériaux, même les métaux réfractaires et les céramiques. Ce procédé est schématisé par la Figure I. 13 [PRO 99], [MAT 05].



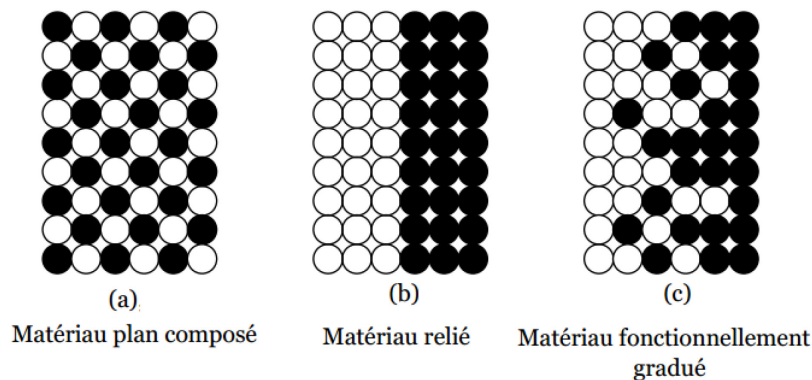
*Figure I. 13 : Schéma de principe de la projection par plasma [PRO 99].*

### I.6 Comparaison entre les matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels

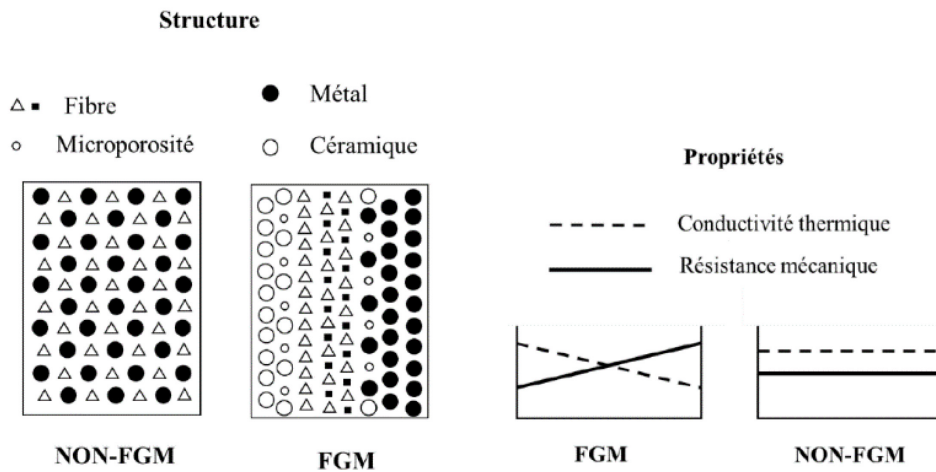
Par rapport aux matériaux composites traditionnels, les matériaux FGMs ont des propriétés macroscopiquement inhomogènes, car ils sont composés de plusieurs couches contenant des composants différents (telles que les céramiques et les métaux).

Dans le cas général, les FGMs sont des matériaux dont les propriétés varient à travers une direction préférentielle telle que leur épaisseur, contrairement aux matériaux composites classiques où les propriétés sont supposées constantes à travers chaque couche individuelle.

Yoshihisa [YOS 04] a établi un modèle simple montrant la différence entre les matériaux FGMs et les matériaux composites traditionnels, comme le montre la figure I.14, tandis que Koizumi [KOI 97] a résumé cette différence par la Figure I. 15.



*Figure I. 14 : La distribution composante des matériaux [YOS 04]*



**Figure I. 15 :** Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et FGM [KOI 97]

### ✓ Avantages des FGMs

Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application ; on peut citer quelques-uns d'entre eux :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les sur faces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

### ✓ Inconvénients des FGMs

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, à l'exemple de la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc.

Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion ( $T_1$ ) et une céramique avec une température de fusion ( $T_2$ ). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T_1 \ll T_2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ ( $T_1$ ), la céramique

est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de ( $T_2$ ) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux, la formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [NAR 11].

### **I.7. Conclusion**

Ce chapitre est consacré aux matériaux composites, et plus précisément aux matériaux à gradient de propriété, leurs utilisations, leurs développements, leurs domaines d'application, les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application. D'un point de vue mécanique, les principaux avantages du classement des propriétés des matériaux semblent être une résistance améliorée, une ténacité et une résistance à l'usure et à la corrosion, ainsi qu'une réduction des contraintes résiduelles et thermiques.

## *Chapitre II*

### *Propagation quasi-statique de fissures dans les matériaux FGM*

---

## II.1. Introduction

En mécanique de la rupture, la caractérisation du comportement des fissures dans les structures se fait par l'intermédiaire des paramètres quantifiables d'un point de vue ingénierie, particulièrement le champ de contraintes, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Après l'introduction de cette discipline par Griffith vers 1920, c'est au tour de Westergaard d'entreprendre les premiers développements théoriques d'analyse des champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure vers 1940. L'extension de la discipline a été amorcée par Irwin vers 1960. Et depuis, le développement de la mécanique de la rupture ne cesse de s'étendre aux problèmes non linéaires d'un point de vue matériau et géométrie, ainsi qu'aux problèmes de bifurcation des fissures en modes mixtes et, aux techniques numériques de résolution et à l'état de l'art relatif au dimensionnement de diverses structures complexes.

Le mécanisme de rupture par fissuration peut intervenir selon deux types de fissuration :

- La fissuration brutale : pour les solides, ou pour les matériaux à très haute résistance, les contraintes de travail sont très élevées, une énergie potentielle considérable est ainsi créée ; la présence de petites fissures peut alors conduire à une rupture brutale qui souvent ne s'accompagne pas de déformations plastiques macroscopiques par suite de la très faible ductilité.
- La fissuration successive : il s'agit ici, d'une succession de mécanismes (fragile-ductile) qui, sous contraintes répétées, entraîne la fissuration successive, appelée la rupture par fatigue.

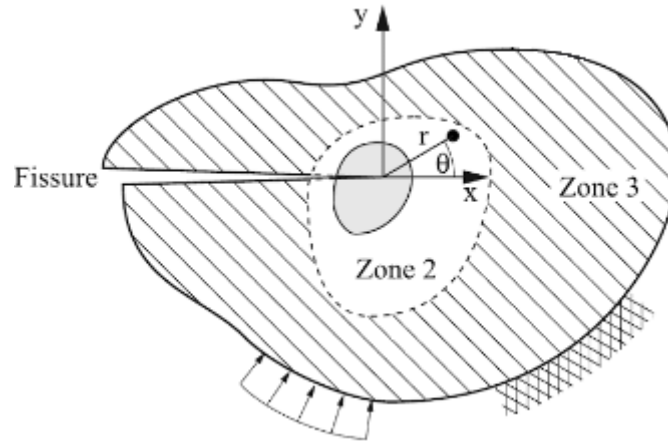
## II.2. Généralités sur la mécanique de la rupture

### II.2.1. Processus de fissuration

Dans le cas général, la fissuration se produit dans un matériau suivant quatre étapes :

- a) La plastification locale au voisinage des défauts et singularités géométriques ou matériels : le degré de la singularité a une influence primordiale sur l'ampleur de la zone plastique ainsi que sur la concentration de contraintes.
- b) La formation des fissures : cette étape peut se réaliser à partir des traitements de surface, des traitements ou chargement thermique générant des contraintes résiduelles dépassant largement le seuil plastique.
- c) La propagation des fissures réelles naissantes : cette propagation peut être brutale ou successive. Souvent on assiste à une propagation successive faisant augmenter la taille de la fissure jusqu'à atteindre une taille critique, entraînant une propagation brutale.

d) Cette propagation brutale constitue la dernière étape. Elle peut être accompagnée de grandes déformations généralisées (striction), ou sans déformations importantes (rupture fragile). La mécanique de la rupture étudie l'interaction entre la discontinuité géométrique (fissure) et le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité. Schématiquement, on peut distinguer dans un milieu fissuré trois zones successives, figure II.1.



*Figure II. 1 : Zone délimitant le voisinage d'une pointe d'une fissure dans un milieu élastique.*

### **Zone 1 : Zone d'élaboration**

Elle se trouve à la pointe de la fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause de contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. La taille de cette zone est généralement très petite, de l'ordre de quelques cristaux.

### **Zone 2 : Zone singulière**

La zone dans laquelle les champs de déplacements, déformations et de contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. Cette zone est petite par rapport au solide, mais elle est grande par rapport aux cristaux.

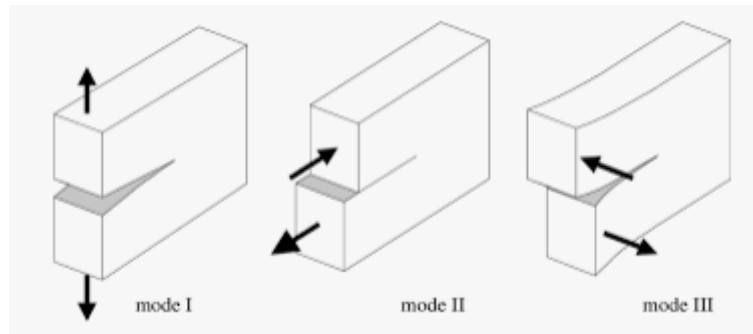
Dans cette zone, les composantes du champ de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ( $r \rightarrow 0$ ), et plus exactement, la singularité est en  $r^{-1/2}$  en milieu élastique linéaire d'où le nom de la zone singulière ou zone fine. Ainsi la singularité en  $r^{-1/2}$ , ne sera pas valable en dessous d'un certain rayon dit plastique ( $r_p$ ). Les valeurs de  $r_p$  autour de la pointe de fissure déterminent la forme de la zone plastique qui, en fonction de sa taille, l'on dira que la rupture est fragile ou ductile.

### Zone 3 : Zone extérieure

Les champs lointains se raccordent d'une part à la zone singulière et d'autre part aux conditions aux limites de chargement et de déplacement. Dans cette zone, les champs de déplacements, déformations et contraintes varient peu.

#### II.2.2. Modes élémentaires de fissuration

L'ouverture d'une fissure peut être obtenue selon trois modes indépendants de sollicitations. Ces modes désignent une séparation géométrique dont une représentation est donnée sur la figure (II.2), les flèches indiquent les déplacements relatifs des deux lèvres.



*Figure II. 2:* Les modes de rupture.

- **Mode I** : « mode d'ouverture de la fissure » ; où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation.
- **Mode II** : « mode de cisaillement dans le plan » ; où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.
- **Mode III** : « mode de cisaillement hors plan » ; où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

### II.3. Mécanique linéaire élastique de la rupture

#### II.3.1 Critères de rupture

En mécanique linéaire de la rupture, deux critères principaux sont utilisés ; le premier proposé par Griffith [GRI 21], est basé sur une approche énergétique, le second, proposé par Irwin [IRW 49], est défini à partir du champ de contraintes au voisinage de la pointe de fissure.



### a) Approche énergétique

La propagation de fissure est un phénomène d'énergie selon la théorie de Griffith [GRI 21]. L'énergie consommée c'est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Griffith a postulé que c'était une caractéristique intrinsèque du matériau.

Selon Griffith, la propagation statique de la fissure résulte de la conversion du travail des forces extérieures  $W$  et de l'énergie élastique disponible  $U$  en énergie libre de surface  $\gamma$ . On peut donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial a}(W - U) \geq \gamma \frac{\partial A}{\partial a} \quad (\text{II.1})$$

Où :  $\partial A$  est l'augmentation de surface associée à l'incrément de longueur de fissure  $\partial a$ .

En milieu bidimensionnel d'épaisseur  $b$ , le critère précédent (II.1) devient :

$$\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial a}(W - U) \geq 2\gamma \quad (\text{II.2})$$

On définit alors le paramètre  $G$ , le taux de restitution d'énergie élastique par :

$$G = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial a}(W - U) \quad (\text{II.3})$$

Dans un corps élastique contenant une fissure, l'extension de celle-ci est possible lorsque l'énergie disponible  $G$ , atteindra une valeur critique  $G_C$  qui représente la valeur au-delà de laquelle on aura théoriquement création de deux nouvelles surfaces, soit ( $G = G_C = 2\gamma$ ).

Avec :  $\gamma$  est l'énergie libre de création de surface.

Néanmoins on a constaté expérimentalement que la fissure ne croit que pour des valeurs :

$$G \geq G_C \quad (\text{II.4})$$

$G$  est indépendant de la géométrie de la structure,

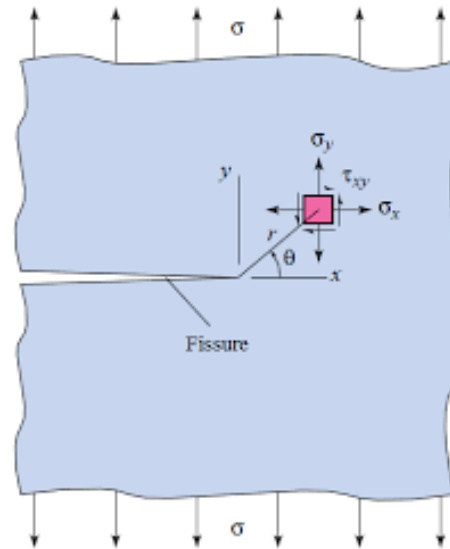
$\gamma$  ne prend en compte que l'énergie de séparation des atomes lorsqu'un solide présente une plasticité appréciable. Une autre quantité  $U$  qui représente le travail dû à la déformation plastique doit être ajoutée, soit :

$$G_C = 2\gamma + 2U = 2(\gamma + U) \quad (\text{II.5})$$

### b) Approche d'intensité de contraintes

La deuxième approche considère les champs de contrainte et de déformation locaux autour de la pointe de fissure dans un matériau linéaire élastique. Ces champs peuvent être définis uniquement par un paramètre  $K$ , appelé *facteur d'intensité de contraintes* (FIC). La rupture peut intervenir lorsque  $K$  atteint une valeur critique  $K_C$ .

La théorie d'élasticité permet de calculer le champ de contraintes au voisinage du fond de fissure dans une plaque de dimensions finies. Westergaard [WES 39], a développé des relations qui relient ces contraintes en tête de fissure de longueur  $2a$  dans une plaque de dimension infinie, soumise à une contrainte de traction  $\sigma$  perpendiculaire au plan de la fissure, (Figure II.3).



**Figure II.3 :** Répartition des contraintes au voisinage du fond de fissure.

Au voisinage de la fissure, les contraintes sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Où :  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point considéré.

Le champ de déplacements est décrit par les relations :

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Où  $\mu$  est le module de cisaillement et  $\kappa = (3 - 4\nu)$  en état de déformation plane, et  $\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$  en état de contrainte plane.

Les deux paramètres : le taux de restitution d'énergie élastique  $G$  et le facteur d'intensité de contraintes  $K$  permettent de décrire le comportement mécanique des fissures. Le premier est un paramètre global qui quantifie la variation d'énergie qui accompagne la propagation de la fissure, le second est un paramètre local.

En mode I, pour les matériaux élastiques linéaire  $K$  et  $G$  sont liés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} G_I = \frac{K_I^2}{E} & \text{En contrainte plane} \\ G_I = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) & \text{En déformation plane} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Dans le cas général on a :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (\text{II.9})$$

Les paramètres  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  représentent les facteurs d'intensité de contraintes respectivement en mode I, II et III qui traduisent l'état de contrainte au voisinage du fond de fissure.

L'équation (II.9) peut être mise sous la forme suivante :

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (\text{II.10})$$

d'où :

$$G_I = \frac{K_I^2}{E^*}, \quad G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad \text{et} \quad G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (\text{II.11})$$

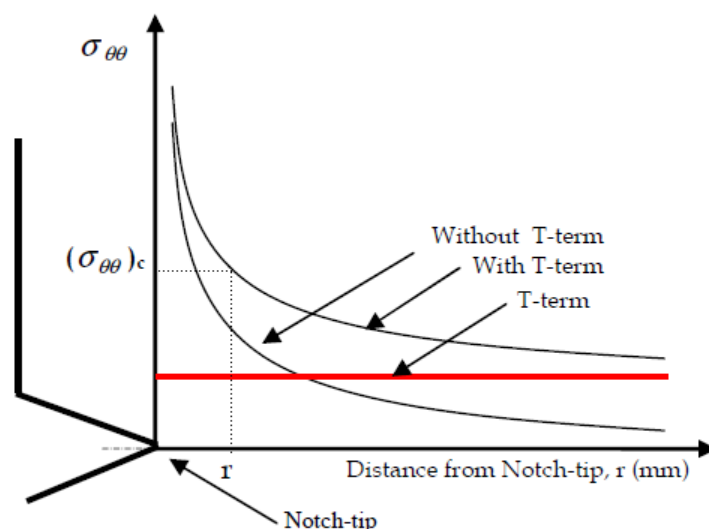
$$\text{Avec} \quad \begin{cases} E^* = E & \text{En contrainte plane} \\ E^* = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{En déformation plane} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

### II.3. 2 Contrainte transversale T (T-stress)

En mécanique linéaire élastique de la rupture, le FIC est le paramètre clé pour la quantification de la nocivité des fissures. Il est proportionnel au premier terme singulier de l'expansion

asymptotique de Williams [WIL 57]. Mais l'approche basée sur un seul paramètre, n'est pas suffisante pour interpréter complètement certaines circonstances. Un deuxième paramètre, introduit pour la première fois par Irwin [IRW 58], appelé contrainte-T (*T-stress*), peut influencer de manière significative le processus de propagation de la fissure. C'est le deuxième terme non singulier dans l'expansion asymptotique de Williams [WIL 57]. Le T-stress joue un rôle très important ; Larsson et Carlsson [LAR 73] et Rice [RIC 74] ont montré que le signe et l'amplitude du T-stress modifient la taille et la forme de la zone plastique de la fissure. Cotterell [COT 66], Melin [MEL 02] et Fett et Munz [FET 03] ont étudié l'effet de la contrainte T sur la stabilité de la direction du trajet de la fissure.

Le T-stress représente une contrainte constante activant parallèlement dans le sens de propagation de la fissure. Son amplitude est proportionnelle à la contrainte nominale à la pointe de la fissure. La figure II.4 schématise la contrainte d'ouverture le long du ligament, avec et sans la présence du paramètre T-stress.



**Figure II. 4 :** Evolution de la contrainte d'ouverture le long du ligament en présence du terme T.

Williams et Ewing [WIL 72] ont montré que les champs de contraintes à l'extrémité d'une fissure, dans un matériau isotrope et élastique, peuvent être exprimés à l'aide de séries infinies en puissance de  $r$  dont le 1<sup>er</sup> terme prépondérant correspond à la singularité en  $1/\sqrt{r}$ , le second terme est constant, le troisième terme est proportionnel à  $\sqrt{r}$ . En mécanique de la rupture classique tous les termes sont négligés à l'exception du terme singulier. Cependant si les termes au-delà du second terme, en  $r^{1/2}$ ,  $r^{3/2}$ ... s'annulent à l'extrémité de la fissure, le second terme constant garde sa valeur. Ce terme peut avoir une influence importante sur la forme de la zone

plastifiée et sur les contraintes à l'intérieur de cette zone. Pour une fissure, dans un matériau élastique et isotrope, sollicitée en mode d'ouverture sous déformations planes, les deux premiers termes intervenant dans l'expression (II.13) sont :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{xi} \delta_{xj} + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.13})$$

avec:

$f_{ij}$  : Fonction de l'angle  $\theta$ ,

$\delta_{xi} \delta_{xj}$ : Symbole de Kronecker.

$T$  une contrainte uniforme, correspondant aux contraintes de compression/traction transverses évoquées lors de l'étude de la fissure stationnaire.

On peut écrire dans le plan (x,y) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.14})$$

Le développement de (II.14) devient:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ 1 - \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] + T + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.15})$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ 1 + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.16})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right] + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.17})$$

Pour déterminer le T-stress, plusieurs méthodes ont été proposées pour les éprouvettes normalisées en mécanique de la rupture (Leevers et Radon [LEE 82], Kfoury [KFO 86], Sham [SHA 89, 91], Wang et Parks [WAN 92], Toshio et Parks [TOS 92]). Une étude sur un modèle tridimensionnel a été menée par Henry et Luxmoore [HEN 95] pour les plaques contenant des fissures centrales. Yang et Ravi-Chandar [YAN 99] ont développé une méthode de différence des contraintes pour évaluer le T-stress dans un problème de fissure. Ayatollahi et al. [AYA 99] ont déterminé la contrainte-T en utilisant une analyse par éléments finis, ils ont obtenu des valeurs stables le long du ligament. Maleski et al. [MAL 04] ont étendu la méthode de Dally et Sanford pour calculer le FIC et le T-stress en mode I. Ils ont utilisé des rosettes rectangulaires pour évaluer la contrainte-T. Hadj Meliani et al. [MEL 10] ont estimé la contrainte T et les chemins de fissures émanant des entailles en U. L'estimation du T-stress était basée sur la méthode de différence des contraintes. Bouchelarm et al. [BOU 17, 18] ont proposé

une méthode analytique basée sur l'approche généralisée de Werstergaard pour déterminer le FIC et le T-stress sans l'intervention des paramètres géométriques. Cette méthode a été appliquée pour déterminer la position optimale pour l'emplacement des rosettes afin d'éliminer les erreurs dues aux termes d'ordres supérieur.

#### II.4. Mécanique élasto-plastique de la rupture

La mécanique linéaire-élastique de la rupture (MLER) peut être appliquée lorsque la zone plastique est petite par rapport à la dimension de la fissure. Lorsque cette zone plastique devient grande par rapport à la dimension de la fissure, la MLER ne peut plus s'appliquer. La mécanique élasto-plastique de la rupture ou mécanique non linéaire de la rupture s'applique aux matériaux ductiles, lorsque la plastification à l'extrémité des fissures est importante.

Comme pour la mécanique linéaire de la rupture, où deux paramètres équivalents ( $K$  et  $G$ ) peuvent être utilisés comme critère de rupture, deux paramètres caractéristiques de la mécanique non linéaire de la rupture sont présentés dans cette partie. Nous verrons que ces deux paramètres, le déplacement à fond de fissure ou CTOD (*Crack Tip Opening Displacement*) et l'intégrale de contour notée  $J$  sont aussi équivalents entre eux. Ils décrivent tous les deux, les conditions à l'extrémité d'une fissure (champs de contraintes et de déplacements) et peuvent être utilisés comme critère de rupture.

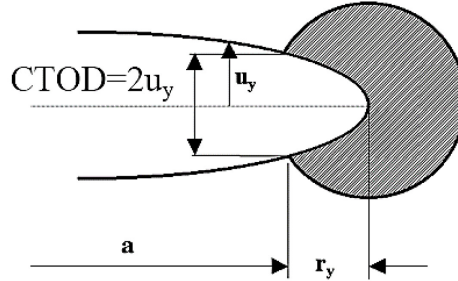
##### II.4.1. Ecartement à fond de fissure (CTOD)

L'analyse proposée par WELLS [WEL 63] tente de relier l'écartement des deux surfaces en fond de fissure (*CTOD / Crack Tip Opening Displacement*) au FIC  $K_I$  lorsqu'on est en régime de plasticité confinée. Pour examiner cette approche on va considérer une fissure avec une faible zone plastifiée comme indiqué sur la figure (II.5). Irwin montra qu'une telle fissure se comporte comme si elle était effectivement plus longue du fait de l'écoulement plastique à fond de fissure. On peut alors estimer le CTOD en augmentant la longueur de fissure de  $r_y$ , la correction de zone plastifiée. Le CTOD est pris égal à l'ouverture de la fissure à la distance  $r_y$  en amont de l'extrémité ; le déplacement à cette distance est estimé à partir de la MLR qui prévoit en mode I :

$$u_y = \frac{\kappa+1}{2\mu} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} \quad (\text{II.18})$$

Avec :

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contrainte plane} \\ 3 - 4\nu & \text{en déformation plane} \end{cases}$$



**Figure II. 5:** Estimation du CTOD à partir du déplacement à la distance  $r_y$ , en amont de l'extrémité d'une fissure de longueur  $(a + r_y)$ .

La longueur effective de fissure est  $(a + r_y)$  avec  $r_y$  le rayon de la zone plastifiée calculé d'après l'approche d'Irwin :

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 \quad (\text{II.19})$$

En combinant les deux relations précédentes, on trouve :

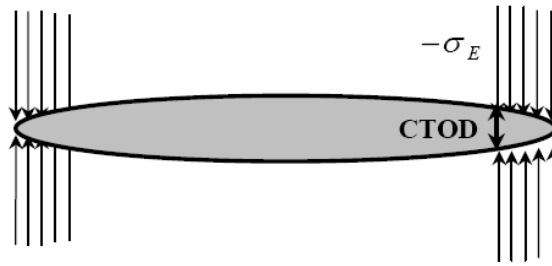
$$\delta = 2\mu_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_E E} \quad (\text{II.20})$$

$\delta$  ou CTOD représente l'écartement à fond de fissure. Le CTOD peut être relié au taux de restitution d'énergie  $G$  en utilisant la relation liant  $G$  au FIC  $K_I$ . En contraintes planes, on a :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \Rightarrow \delta = \frac{4}{\pi} \frac{G}{\sigma_E} \quad (\text{II.21})$$

Ainsi, lorsqu'on est en régime de plasticité confinée où la mécanique linéaire de la rupture s'applique, le CTOD est relié à  $G$  et au FIC  $K_I$ . Wells postula alors que le CTOD est un paramètre approprié pour caractériser le comportement à l'extrémité d'une fissure lorsqu'on atteint les limites d'application de la MLR. Cette hypothèse s'est avérée correcte quelques années plus tard lorsqu'on établit une relation unique entre le CTOD et l'intégrale de contour  $J$  introduite par Rice.

Le modèle de Dugdale-Barenblatt peut aussi être utilisé pour estimer le CTOD (Figure II.6) [ZEG 03].



**Figure II. 6:** Estimation du CTOD : Modèle de Dugdale-Barenblatt.

Le modèle de Dugdale-Barenblatt suppose un état de contraintes planes et un matériau élastique-plastique parfait c'est à dire sans consolidation. La relation plus générale entre le CTOD  $\delta$  et le FIC  $K_I$  est de la forme :

$$\delta = \frac{K_I^2}{m\sigma_E E} = \frac{G}{m\sigma_e} \quad (\text{II.22})$$

Où  $m$  est un coefficient sans dimension qui vaut à peu près 1 en contraintes planes et 2 en déformations planes.

#### II.4.2. Intégrale de contour $J$

Dans le cadre de la mécanique de rupture, Rice [RIC 68] a utilisé une intégrale de contour définie par Eshelby appelée intégrale  $J$  [ESH 56, ESH 69]. Cette approche s'applique à des matériaux présentant un comportement élastique linéaire ou élasto-plastique. Cette intégrale se présente par la relation (II.23), avec les notations de la figure (II.7).

$$G = J = \int_{\Gamma} W dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \quad (\text{II.23})$$

Où  $W$  est la densité de déformation d'énergie élastique (ou plastique pour les matériaux plastifiés),  $\vec{n}$  la normale au contour,  $\vec{T}$  le vecteur contraint en un point et  $\vec{u}$  le vecteur déplacement au même point.  $ds$  l'élément de contour. Cette intégrale est indépendante du contour, à condition que le contour se trouve en milieu élastique linéaire.



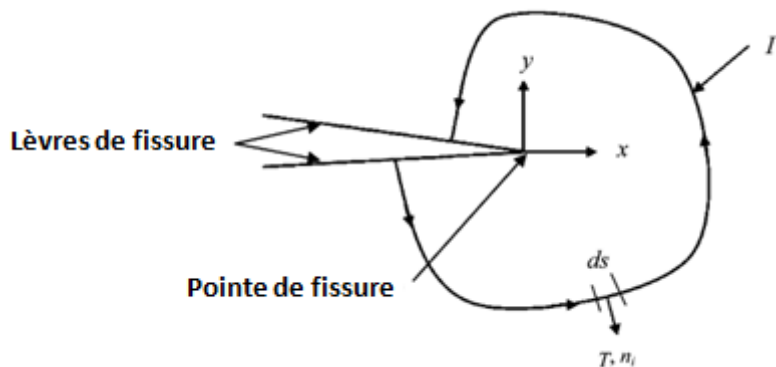


Figure II. 7 : Intégrale de contour J.

Pour un matériau globalement élastique, il est démontré que le taux de restitution d'énergie  $G$  est directement lié aux facteurs d'intensité de contraintes par :

$$J = G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (\text{II.24})$$

## II.5. Propagation quasi-statique de fissures

Après avoir déterminé les facteurs d'intensité de contraintes numériquement ou analytiquement d'une part, et la ténacité  $K_{Ic}$  expérimentalement d'autre part, le critère de bifurcation doit déterminer l'angle de bifurcation  $\theta_0$  par rapport à l'axe de fissure.

Depuis les premières études de Erdogan et Sih [ERD 63] sur les fissures inclinées, de nombreux critères de bifurcation de fissures ont été proposés. Tous ces critères ont été établis en considérant un chargement quasi-statique, et la plupart se place en milieu élastique linéaire.

### a) Critère de la contrainte circonférentielle maximale : Critère CCM

Le phénomène de rupture est supposé être piloté par l'intensité de la contrainte circonférentielle au voisinage du front de fissure, introduit par Erdogan et Sih [ERD 63]. C'est un critère local, basé sur la connaissance du champ des contraintes en pointe de fissure. Selon ce critère, la bifurcation s'amorce à l'extrémité de la fissure dans la direction pour laquelle la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale.

En élasticité linéaire, cela se traduit par :

$$\sigma_{\theta\theta} > 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[ K_I \left( \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - 3K_{II} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (\text{II.26})$$

On peut déduire :

$$K_I \cos \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (\text{II.27})$$

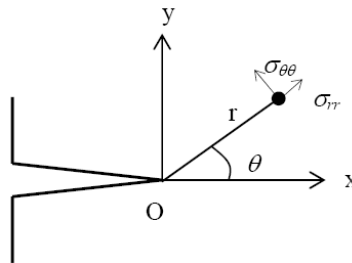
Nous avons donc :

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \quad (\text{II.28})$$

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (\text{II.29})$$

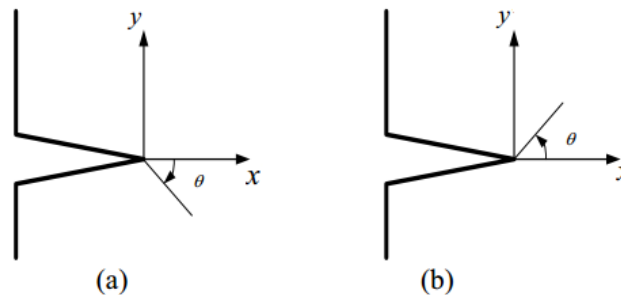
Pour ce critère, la direction de propagation  $\theta_0$  est indépendante de la nature du matériau, et plus particulièrement du coefficient de poisson  $\nu$ .

L'angle  $\theta$  donne la direction du maximum de la contrainte circonférentielle qui détermine l'angle de bifurcation qui est montré sur la figure (II.8).



**Figure II. 8 :** Fond de fissure.

Le signe du facteur d'intensité de contraintes  $K_{II}$  désigne le signe de l'angle de bifurcation  $\theta$ . Les deux possibilités sont illustrées sur la figure (II.9).



**Figure II. 9 :** Sens de l'angle de propagation (a)  $K_{II}$  Positif, (b)  $K_{II}$  négatif.

En se basant sur le critère CCM, la figure (II.10) illustre un exemple de la propagation de fissure dans une poutre en T est soumise à un chargement vertical sur sa partie supérieure. La direction de propagation est calculée à l'aide du critère de la contrainte normale maximale, en utilisant un code de calcul par éléments finis.

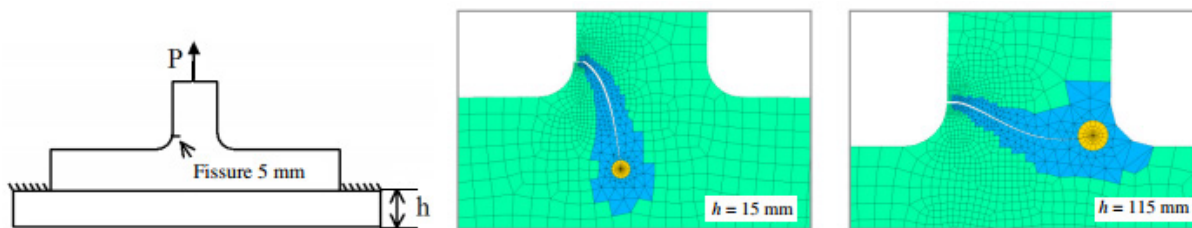


Figure II. 10: Chemin de propagation dans une plaque en T (Critère CCM).

**b) Critère de la densité d'énergie de déformation minimale : Critère  $DED_{min}$**

L'inconvénient des critères locaux tels que le critère de la contrainte normale maximale, est que la connaissance des champs mécaniques n'est parfois qu'approximative au voisinage immédiat de la pointe de fissure. Il pourrait être intéressant de se placer un peu plus loin du fond de fissure pour calculer la direction de propagation. Sih [SIH 74] a proposé le critère du minimum de densité d'énergie de déformation basé sur la densité d'énergie ( $dW/dV$ ) d'un élément du volume au voisinage de la pointe de fissure à une distance  $r$  et un angle  $\theta$  dans la zone du comportement asymptotique. Selon ce critère, la fissure se propage dans la direction le long de laquelle le facteur de la densité d'énergie de déformation  $S = (dW/dV)/r$ , est minimum.

La figure (II.11) illustre schématiquement la relation entre les paramètres : distance  $r$ , angles  $\theta$  et  $\alpha$ .

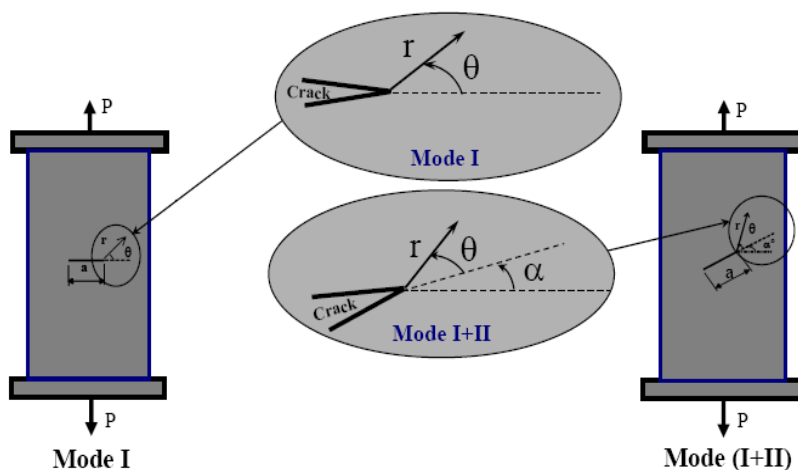


Figure II. 11 : Paramétrage des éprouvettes pré-fissurées ( $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires).

Le paramètre  $S$  est écrit sous la forme suivante :

$$S = \frac{1}{\pi r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \tag{II.30}$$

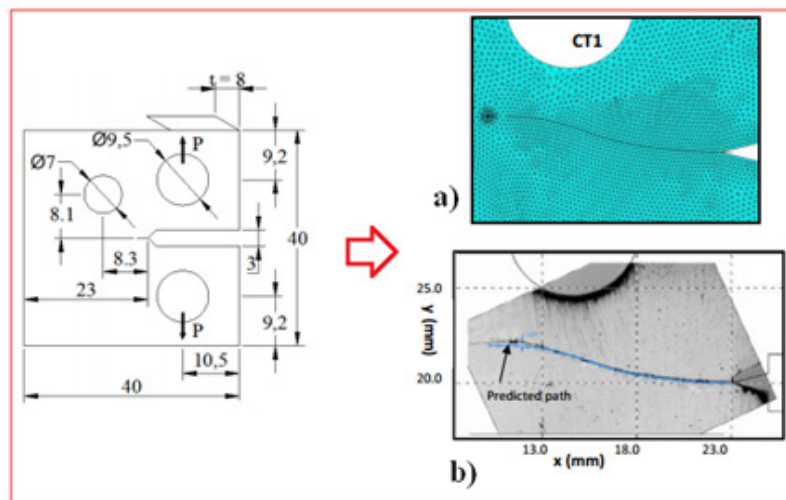
Les constantes  $a_{ij}$  représentent des fonctions de l'angle polaire  $\theta$ , du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(1+\nu)}{8E} [(3 - 4\nu - \cos \theta)(1 + \cos \theta)] \\ a_{22} &= \frac{(1+\nu)}{8E} [4(1 - \nu)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3\cos \theta - 1)] \\ a_{12} &= \frac{(1+\nu)}{8E} [(2\sin \theta)(\cos \theta - (1 - 2\nu))] \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

La direction de propagation de fissure est définie comme suit :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \geq 0 \quad (\text{II.32})$$

Les figures (II.12) illustrent chemins de propagation obtenus expérimentalement et numériquement sur des éprouvettes CT, en utilisant le critère énergétique de Sih [SIH 74].



**Figure II. 12** : Chemin de propagation : calcul numérique et expérimental [HUN 74].

### c) Critère du taux de restitution d'énergie maximale : Critère TREM

Ce critère reprend la notion de taux de restitution d'énergie  $G$  déjà utilisée par Griffith, mais il se place dans un cadre d'étude plus général, celui de la fissure présentant une bifurcation. La direction recherchée est celle qui rend maximale le taux de restitution d'énergie pour un avancement  $\Delta a$ .

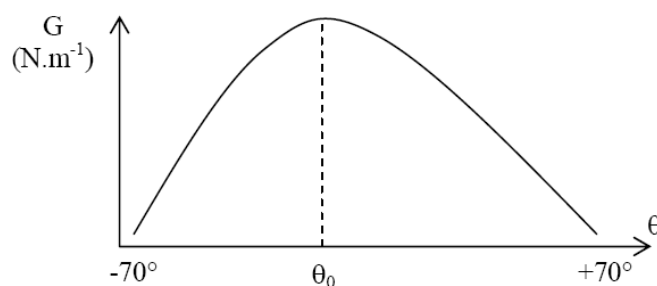
Il existe de nombreuses méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie. Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode  $G(\theta)$  (Destuynder et al.) [DES 83] qui est à la fois précise, rapide et facilement généralisable.

Selon le critère, la fissure se propagera dans la direction qui maximisera le taux de restitution d'énergie

$$\frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\text{II.33})$$

Ce critère devrait nécessiter de faire un calcul dans chaque direction afin de déterminer celle pour laquelle le taux de restitution d'énergie est maximal.

La courbe représentant  $G$  en fonction de  $\theta$  est très régulière (croissante puis décroissante), et permet donc facilement de calculer l'angle  $\theta_0$  qui maximise  $G$  (Figure II.13.).

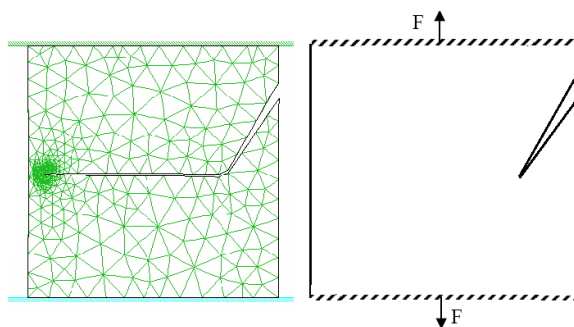


**Figure II. 13.** Courbe  $G(\theta)$  pour le calcul de la direction de propagation.

Le taux de restitution d'énergie  $G$  peut-être calculer en fonction de l'angle  $\theta$  par la relation de Jun Chang [JUN 06] :

$$G(\theta) = \frac{1}{2\mu} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{k+1}{8} [K_I^2 (1 + \cos\theta) - 4K_I K_{II} \sin\theta + K_{II}^2 (5 - 3\cos\theta)] + K_{III}^2 \right\} \quad (\text{II.34})$$

La figure (II.14) illustre le chemin de propagation d'une fissure débouchant inclinée obtenu par le critère du taux de restitution d'énergie maximal.



**Figure II. 14.** Chemin de propagation obtenu par le critère TREM [BOU 00]

**d) Critère d'énergie de dilatation maximum : Critère- $T_v$** 

Theocaris et Andrianopoulos [THEO 82a, THEO 82b] ont postulé un critère de bifurcation, appelé le critère-T, qui indique qu'une fissure commence à se propager lorsque l'énergie de dilatation maximale  $T_{vmax}$  atteint une valeur critique  $T_{vc}$ , à un point au voisinage de sa pointe, qui peut être évalué à partir du simple test de traction.

Le critère sépare l'énergie de déformation totale en deux composantes, c'est-à-dire une composante de dilatation qui provoque principalement la nucléation de la cavité, et une composante de distorsion qui modifie la forme d'un élément. Par conséquent, la condition de propagation de fissure est la suivante [BIA 13] :

$$T_{vmax} = T_v \quad (\text{II.35})$$

La densité totale d'énergie de déformation élastique est divisée en deux composantes, la densité d'énergie de déformation de dilatation  $T_v$  et la densité d'énergie de déformation de distorsion  $T_D$ . Elles sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_v = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_x + \sigma_y)^2 \\ T_D = \frac{(1+\nu)}{3E} [(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{En contrainte plane} \\ \text{En déformation plane} \end{array} \quad (\text{II.36})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_v = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)^2}{6E} (\sigma_x + \sigma_y)^2 \\ T_D = \frac{(1+\nu)}{3E} [(v^2 - v + 1)(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{En déformation plane} \\ \text{En déformation plane} \end{array} \quad (\text{II.37})$$

Nous obtenons alors le champ de contraintes en coordonnées cartésiennes :

A partir des champs de contrainte locaux autour de la pointe de fissure, nous définissons les fonctions  $f_x(\theta)$ ,  $f_y(\theta)$ ,  $f_{xy}(\theta)$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_x(\theta) \\ \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_y(\theta) \\ \sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{xy}(\theta) \end{array} \right. \quad (\text{II.38})$$

Avec :

$$\begin{cases} f_x(\theta) = \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right\} - \left\{ K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right\} \right] \\ f_y(\theta) = \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right\} + \left\{ K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \right] \\ f_{xy}(\theta) = \left[ \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\} + \left\{ K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right\} \right] \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

L'utilisation des équations (II.37) et (II.39), nous permet de trouver :

$$\begin{cases} T_v = \frac{(1-2\nu)}{12\pi E r} (f_x + f_y)^2 \\ T_D = \frac{(1+\nu)}{6\pi E r} (f_x^2 + f_y^2 - f_x f_y + 3f_{xy}^2) \end{cases} \quad \text{En contrainte plane} \quad (\text{II.40})$$

Selon le critère, la fissure se propagera dans la direction qui maximisera l'énergie de déformation de dilatation :

$$\frac{\partial T_v}{\partial \theta} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T_v}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\text{II.41})$$

## II.6. Méthodes numériques utilisées

Plusieurs méthodes ont été proposées et développées pour étudier la propagation d'une fissure : méthode des différences finies, équations intégrales (méthode des éléments frontière, Bush [BUS 99]), puis la méthode des éléments finis. Récemment, quelques auteurs ont proposé d'autres méthodes novatrices.

On peut citer par exemple la méthode sans maillage (meshless) « *Element-Free Galerkin Method* » proposée par Belytschko et al. [BEL 94], et appliquée à la mécanique de la rupture par la suite. Dans ces méthodes, l'interpolation est réalisée uniquement à l'aide de nœuds et de la surface de la pièce, ce qui offre l'avantage de propager des fissures sans nécessiter de remaillage. Rashid [RAS 98] a également proposé une approche intéressante (*Arbitrary Local Mesh Replacement Method*), basée sur la méthode des éléments finis, qui consiste à superposer deux maillages. Un maillage de la pièce, qui ne prend pas en compte la fissuration, et un maillage circulaire centré sur la pointe de fissure, et qui va se déplacer en même temps que celle-ci. Cette méthode s'avère être assez rapide, mais reste pour l'instant réservée aux matériaux élastiques, et pose des problèmes dans le cas de l'étude de plusieurs fissures.

Finalement la méthode des éléments finis reste la plus utilisée, car son domaine d'application est beaucoup plus large : matériaux à comportement non-linéaire, problèmes de contact, grandes déformations, couplages thermomécaniques, etc... De nombreux auteurs l'ont utilisé dans le cadre de la mécanique de la rupture, et on peut distinguer trois catégories principales (Jirásek [JIR 99]) :

- Pour les modèles continus, le comportement du matériau est décrit par une relation contrainte-déformation.

Les méthodes basées sur la notion d'endommagement (Gurson [GUR 77]), Rousselier [ROU 87] appartiennent à ces modèles. Des lois, basées sur des paramètres micromécaniques du matériau, sont liées à son comportement et permettent de modéliser la fissuration en faisant chuter les propriétés mécaniques dans la zone endommagée. Cependant, cette approche peut conduire à des dégénérescences importantes du maillage en grandes déformations. Les modèles « *smearred crack* », développés spécifiquement pour l'étude de pièces en béton sous tension, sont également basés sur une décomposition de la déformation totale en une partie élastique, et une partie inélastique [RAS 68]. Ces deux parties correspondent respectivement à la déformation élastique du matériau non fissuré, et à la déformation inélastique due à la fissuration. La partie élastique est gouvernée par une loi reliant contrainte et déformation élastique, comme la loi de Hooke. La partie inélastique correspond à la déformation due à l'ouverture de microfissures, ces dernières étant amorcées lorsque les contraintes atteignent une valeur critique. Ces modèles sont cependant affectés par un blocage en contrainte car une fois la microfissure introduite, son orientation est fixée.

- Dans les modèles mixtes, on enrichit la description mécanique des milieux continus par des discontinuités de déplacement correspondant aux fissures macroscopiques. La partie continue du solide est décrite par une loi reliant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations, tandis que les discontinuités sont introduites à partir de critères d'amorçage et de propagation de fissures, propres à la mécanique de la rupture. L'approche discrète, quant à elle, consiste à modéliser les discontinuités en propageant des fissures réelles à l'intérieur du maillage [ELO 93]. Une telle approche permet de modéliser finement la propagation des fissures, mais nécessite plusieurs remaillages.

- Les modèles discrets (à ne pas confondre avec l'approche discrète présentée ci-dessus) ne sont pas basés sur une description continue du solide, mais sont plutôt constitués d'assemblages de barres, poutres ou ressorts. Ces entités élémentaires peuvent permettre de modéliser des structures complexes à partir d'éléments simplifiés, ou encore de représenter les liaisons à l'échelle microstructurale du matériau. La rupture est alors prise en compte par la rupture d'une de ces entités élémentaires.

## II.7. Revue des recherches sur la propagation des fissures dans les matériaux FGM

Cette section présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur la propagation des fissures dans les matériaux FGM en mettant l'accent sur les travaux publiés.



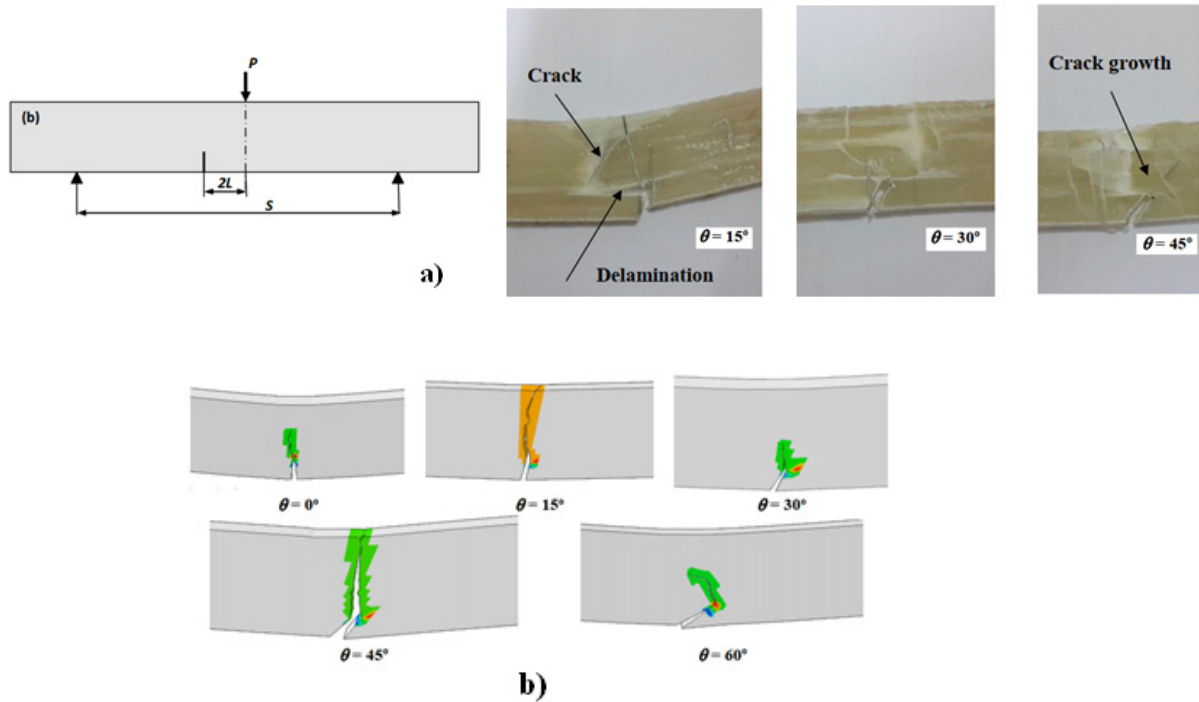
La plupart de ces études sont basées sur l'utilisation de l'approche locale et énergétique de la mécanique linéaire de la rupture fondée sur la détermination du FIC. L'évolution de ce paramètre a été utilisée pour déterminer l'angle de direction  $\theta_0$ , à chaque incrément de propagation  $\Delta a$ .

Pour le but de déterminer l'effet de la présence d'un défaut géométrique sur la propagation d'une fissure dans une structure en FGM. Boulenouar et al. [BOU 15] ont considéré une plaque mince trouée pré-fissurée. Ils ont constaté que la fissure s'oriente tout d'abord vers la cavité. Ceci vient du fait que la cavité crée une « dépression » de contrainte qui va modifier la contrainte principale maximale dans la plaque et attire ensuite cette fissure. Une fois la cavité passée, cette fissure se réoriente en mode I, et elle s'éloigne très légèrement de la cavité [BEN 17].

Benamara et Boulenouar [BEN 17b] ont analysé le chemin de la propagation de fissures dans des plaques en FGM, en utilisant deux critères de bifurcation, le critère de la densité d'énergie de déformation (critère  $DED_{min}$ ) et le critère de la contrainte circonférentielle maximale (critère CCM). Chafi et Boulenouar [CHA 19] ont étudié par la MEF, le chemin de propagation d'une fissure dans une éprouvette de flexion en FGM. La méthode d'extrapolation du déplacement (DET) et le critère de la contrainte normal maximale sont considérés pour déterminer l'angle de bifurcation à chaque incrément de propagation.

Anandakumar et al. [ANA 10] ont utilisé la MEF afin de déterminer le trajet de fissuration dans les poutres en FGM sous chargement thermique et thermomécanique avec prise en compte de la contrainte-T.

Ma et al. [MA 08] ont considéré des éprouvettes de flexion 4-points en FGM et la méthode XFEM pour déterminer le chemin éventuel de propagation en mode mixte. Cette méthode a été utilisée par Hosseini et al. [HOU 13] sur des matériaux isotropes et orthotropes en FGM, sous l'effet du chargement mécanique et thermique. Martinez-Paneda et al. [MAR 15] ont étudié la capacité et la limite de modélisation numérique des problèmes de rupture et de fissuration dans les matériaux FGM, en utilisant le code des éléments finis ABAQUS. Mousa et al. [MOU 91] ont réalisé un matériau FGM, en utilisant une matrice en polyester renforcée par une distribution variable des fibres de verre. L'objectif principal de ses travaux est de présenter une étude expérimentale et numérique de l'effet de l'angle d'inclinaison sur le chemin final de fissuration (Figure. II.15). A chaque incrément de propagation, les facteurs d'intensités des contraintes sont calculés par la méthode de l'intégrale d'interaction.

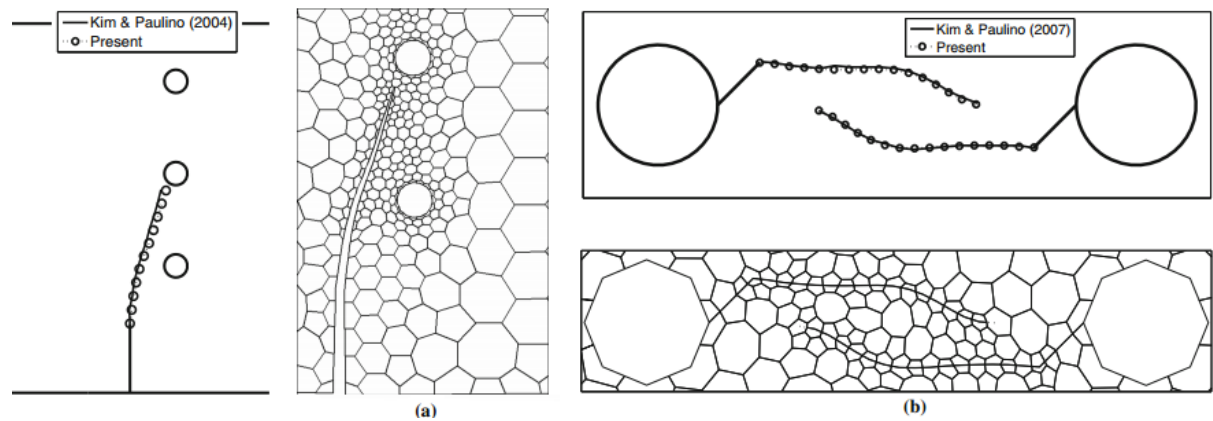


**Figure II. 15:** Propagation de fissures dans les matériaux FGM

a) Essai Expérimental, b) Calcul numérique.

Ooi et al. [OOI 15] ont développé la formulation de la méthode SBFEM (Scaled boundary finite element method) pour modéliser la propagation des fissures dans le cas des matériaux FGM, en utilisant des éléments de forme polygone à 6 côtés (hexagone), comme le montre la figure (II. 16).

Khalaf et Haider [KHA 17] ont adopté la méthode sans maillage dite « *extended element free Galerkin method* » (XEFGM) pour simuler la propagation des fissures des poutres en verre/époxy soumises à une flexion non proportionnelle. La méthode de l'intégrale d'interaction a été utilisée pour déterminer les FIC à chaque incrément de propagation. Les résultats ont montré une bonne fiabilité, stabilité et efficacité de la technique utilisée. Un bon accord est remarqué avec les travaux expérimentaux de la propagation de fissures dans les matériaux gradués.



**Figure II. 16:** Propagation de fissures dans les matériaux FGM : Méthode SBFEM [Ooi 15]

Kim et Paulino [KIM 07] ont analysé numériquement le trajet de propagation de fissures dans les matériaux gradués, en utilisant le code de calcul FRANC 2D. D'autres exemples numériques ont été proposés par Kim [KIM 03] pour étudier le cas des plaques en multi-amorçages.

**II.8. Conclusion**

Ce chapitre est un rappel sur les concepts de base de la mécanique de la rupture, les mécanismes et les paramètres qui régissent une propagation de fissure tel que les facteurs d'intensité de contrainte, le taux de restitution d'énergie. La définition de T-stress et son influence sur le processus de propagation de fissure sont aussi illustrés à travers plusieurs travaux de référence. Un état de l'art est présenté dans cette partie d'étude sur les critères de bifurcation utilisés dans les matériaux FGM, pour le but de déterminer l'angle de direction à chaque incrément de propagation.

Dans le chapitre suivant, nous tentons de présenter une étude numérique de la propagation de fissures en mode mixte pour les matériaux FGM, sous l'effet du chargement mécanique et thermomécanique. Des programmes sous forme de script APDL seront conçus pour reproduire numériquement le chemin de propagation d'une fissure avec une grande précision en utilisant des critères locaux et énergétiques.

## *Chapitre III*

# *Simulation numérique de la propagation de fissures dans les matériaux FGM*

---

### **III.1 Introduction**

L'évolution d'une fissure dépend de plusieurs paramètres intrinsèques au matériau, tels que les propriétés géométriques et mécaniques de la structure, ou extrinsèques comme l'étendue de cette fissure ou la nature des charges appliquées. Tous ces paramètres doivent être pris en compte dans la simulation numérique, de façon à permettre l'étude de la propagation quasi-statique d'une ou de plusieurs fissures.

Les paramètres de rupture décrivant les champs de contraintes en fond de fissure dans les FGM tels que les facteurs d'intensité de contraintes (FIC), sont importants pour déterminer la direction de croissance des fissures. En mécanique de la rupture, plusieurs approches numériques ont été adoptées pour la détermination du facteur d'intensité des contraintes, dans ce travail deux techniques sont utilisées : la technique d'extrapolation par déplacement (DET), et la technique de corrélation des déplacements (DCT)

Nous essayons de présenter à travers ce chapitre une étude numérique de la propagation de fissures en mode mixte sous l'effet du chargement mécanique et thermomécanique en prenant des exemples de simulations variés de la propagation de fissure dans des pièces homogènes et FGM. L'approche développée est validée à l'aide des résultats numériques et expérimentaux disponibles rapportés dans la littérature.

En utilisant le langage de conception paramétrique Ansys (APDL), la variation continue des propriétés du matériau est intégrée en spécifiant les paramètres du matériau au centre de chaque élément fini (FE), et l'angle de direction est évalué avec différents critères de bifurcation en fonction des facteurs d'intensité de contrainte (FIC) au moyen d'un algorithme.

### **III.2 Présentation du logiciel ANSYS**

ANSYS, Inc. est un éditeur de logiciels spécialisé en simulation numérique. Ses produits majeurs sont des logiciels qui mettent en œuvre la méthode des éléments finis, afin de résoudre des modèles préalablement discrétisés.

Deux logiciels permettent de mettre en œuvre le code ANSYS :

- ✓ **ANSYS Classic** : est destinée à la construction de modèles éléments finis à la géométrie plus ou moins simple, facilement constructible à l'aide d'opérations basiques en utilisant le langage de script APDL (ANSYS Parametric Design Language). ANSYS Classic est donc destiné à des utilisateurs compétents dans le domaine de la simulation numérique
- ✓ **ANSYS Workbench** : Elle est particulièrement adaptée au traitement de cas à la géométrie complexe (nombreux corps de pièces) et aux utilisateurs non confirmés dans le domaine du calcul. La plateforme est donc chargée de convertir les requêtes entrées par l'utilisateur en

code ANSYS avant de lancer la résolution. Le modèle élément finis généré reste néanmoins manipulable en insérant des commandes propres au code ANSYS.

La procédure générale du code APDL est classée en deux étapes, une étape initiale et une étape en boucle. Dans la phase initiale, une géométrie en 2D avec la position et la dimension d'une fissure initiale est défini ainsi que les conditions aux limites, dans la phase de boucle, la fissure se propage avec un incrément donné et une direction déterminée à partir des facteurs d'intensité de contrainte et des critères de bifurcation, la fissure cesse de se propager lorsqu'elle atteint un bord ou lorsque le nombre d'étapes défini par l'utilisateur est atteint. Une description plus détaillée du code APDL et de l'algorithme est donnée dans la section suivante.

### III.3. Calcul des paramètres de propagation

#### III.3.1 Facteurs d'intensité de contraintes (FICs)

Il est connu que la détermination du chemin de propagation est basée sur la détermination des facteurs d'intensité de contraintes FICs, à chaque incrément de propagation. Dans cette étude numérique, deux techniques ont été sélectionnées pour évaluer les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  :

##### III.3.1.1 Méthode d'extrapolation de déplacement DET

(*Displacement Extrapolation technique*) : est une méthode basée sur le déplacement des nœuds autour de la pointe de la fissure, en mode mixte, les facteurs  $K_I$  et  $K_{II}$  sont calculés par les équations suivantes III.1 et III.2, cette technique a été utilisée dans différentes études [BEN 17a, BEN 17b, CHA 19, AIT 21] :

$$K_I = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[ 4(\nu_b - \nu_d) - \frac{(\nu_c - \nu_e)}{2} \right] \quad (III.1)$$

$$K_{II} = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[ 4(u_b - u_d) - \frac{(u_c - u_e)}{2} \right] \quad (III.2)$$

##### III.3.1.2 Méthode de corrélation de déplacement DCT

(*Displacement Correlation Technique*) : est une méthode utilisée pour évaluer les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  pour les matériaux fonctionnellement gradués. Cette corrélation est effectuée sur des points spécifiques localisés sur les lèvres de la fissure, les paramètres  $K_I$  et  $K_{II}$  sont donnés par les équations suivantes :

$$K_I = \frac{\mu_{tip}}{k_{tip}+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(\nu_b - \nu_d) - (\nu_c - \nu_e)] \quad (III.3)$$

$$K_{II} = \frac{\mu_{tip}}{k_{tip}+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(u_b - u_d) - (u_c - u_e)] \quad (III.4)$$

Où :

$E_{tip}$ ,  $\nu_{tip}$  et  $\mu_{tip}$  sont le module de Young, le coefficient de poisson et le module de cisaillement, respectivement. Ces paramètres sont calculés à la pointe de la fissure.

En élasticité linéaire, le paramètre  $k_{tip}$  égal à  $\left(\frac{3-\nu_{tip}}{1+\nu_{tip}}\right)$  en état de contrainte plane et égale à  $(3 - 4\nu_{tip})$  en état de déformation plane.

$L$  est la longueur de l'élément singulier.  $u$  et  $v$  sont, respectivement, les déplacements suivant les directions  $x$  et  $y$  (Figure III. 1).

Dans ce travail, les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  sont déterminés à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul ANSYS 16.0, en utilisant le langage de script APDL (*Ansys Parametric Design Language*).

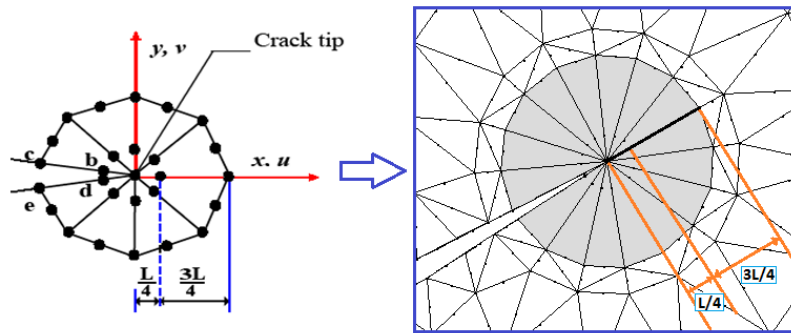


Figure III. 1: Elément singulier avec nœuds au quart des côtés.

### III.3.2 Angle de propagation

L'angle de direction ( $\theta$ ) à chaque incrément de propagation ( $\Delta a$ ) est déterminé par la résolution d'un système d'équations définissant le critère choisi. Dans cette partie d'étude, quatre critères sont utilisés :

- Critère de la contrainte circonférentielle maximale (Critère *CCM*),
- Critère de la densité d'énergie de déformation minimale (Critère *DED<sub>min</sub>*),
- Critère du taux de restitution d'énergie maximale (Critère *TREM*).
- Critère d'énergie de dilatation maximale (Critère-  $T_v$ ).

### III.3.3 Algorithme de propagation de fissures

La prédiction du chemin de propagation de fissures est basée sur la résolution mathématique de système d'équations définissant le critère sélectionné à chaque incrément de propagation, en utilisant le programme Maple 12 ou Matlab.



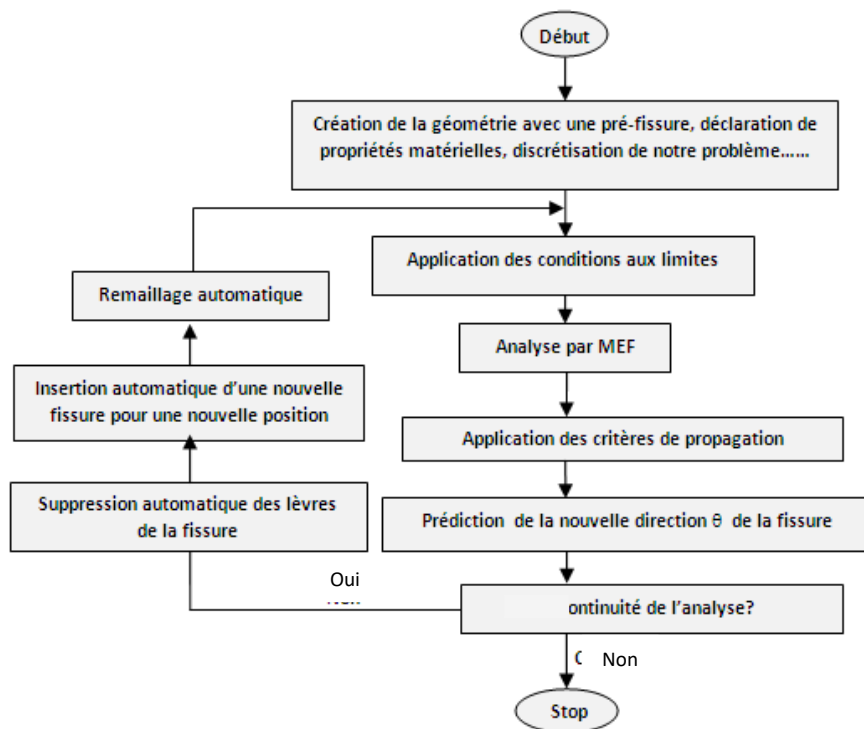
L'angle de bifurcation ( $\theta$ ) est calculé dans le repère local par rapport à l'axe de fissure. Pour tous les exemples proposés, les calculs sont effectués étape par étape, en supposant des petites extensions de la fissure ( $\Delta a$ ).

A chaque étape, les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  sont déterminés par l'une des méthodes choisies DET ou DCT.

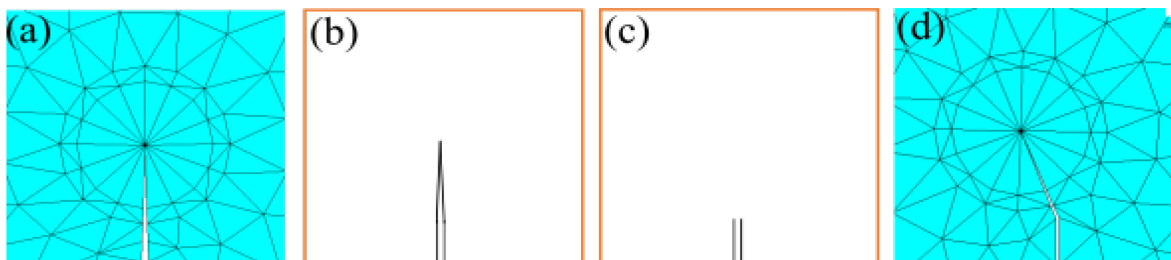
L'angle de bifurcation ( $\theta$ ) est déterminé par l'un des critères choisis, le nouvel angle est établi, les lèvres et la pointe de fissure sont créées, la fissure se propage avec un incrément  $\Delta a$  en prenant en considération le nouvel angle de bifurcation,

Cette procédure à partir de la fissure actuelle est répétée en boucle pour le nombre d'étapes défini par l'utilisateur ou jusqu'à ce que la fissure atteinte un bord.

La Figure III. 2 montre un organigramme qui résume les démarches nécessaires afin de déterminer le chemin éventuel de propagation. Une illustration de la technique de l'avancement de fissure, par la création de la nouvelle position de sa pointe est donnée sur la Figure III. 3



**Figure III. 2 :** Organigramme de l'algorithme programmé pour la propagation de fissure.



**Figure III. 3:** Différentes étapes de propagation de la fissure.

### III.4 Modélisation numérique du comportement mécanique des FGMs

Les propriétés mécaniques de la plaque en FGM sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul ANSYS. Ce programme permet de localiser les coordonnées du centre de chaque élément du maillage ( $e_i$ ) et de calculer ensuite, le module élastique  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  (pour chaque élément  $e_i$ ), à travers les lois de mélange.

### III.5 Résultats et discussions

#### III.5.1 Propagation de fissures sous chargement mécanique

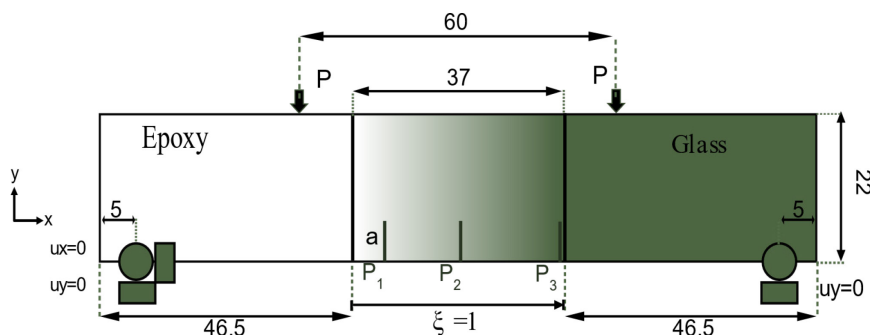
Afin de démontrer la robustesse et l'efficacité de notre technique de détermination de la propagation de fissure dans les matériaux fonctionnellement gradués, plusieurs cas sont étudiés, les résultats obtenus ont été comparés avec d'autres travaux expérimentaux et numériques disponibles dans la littérature.

- Epreuve en flexion 4-points en FGM,
- Epreuve en flexion 3-points en FGM,
- Epreuve en flexion 3-points sous différents chargements.

##### III.5.1.1 Cas d'une éprouvette de flexion 4-points en FGM

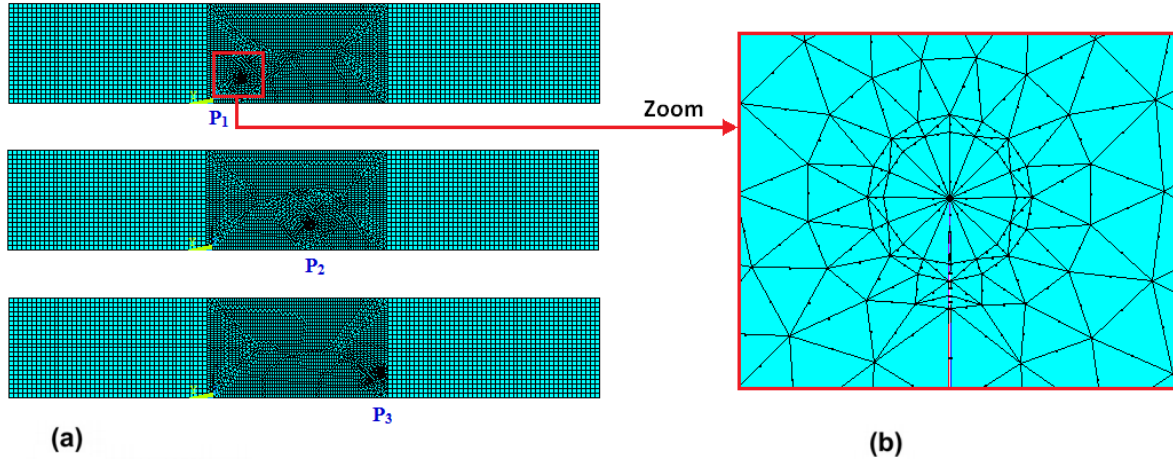
Dans cet exemple, on considère une éprouvette de flexion 4-points en FGM (Epoxy/Glass). L'éprouvette contenant une fissure de longueur  $a=5.5$  mm, supposée amorcer perpendiculairement à la gradation des propriétés du matériau. La Figure III. 4 montre le modèle géométrique, les forces appliquées et les conditions aux limites. Trois positions de fissure :  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , sont considérées dans cette étude (avec :  $\xi = 0.17, 0.58$  et  $1$ , respectivement). Dans la figure (III.4),  $u_x$  et  $u_y$  indiquent les déplacements suivant les directions (Ox) et (Oy), respectivement.

On note que cette géométrie a été utilisée par Rousseau et Tippur [ROU 00] pour réaliser des essais expérimentaux sur les matériaux FGM et ensuite, ce modèle géométrique a été étudié avec différents critères dans plusieurs travaux numériques [KIM 07, CHA 19, COM 07, KHA 19, NAT 19].



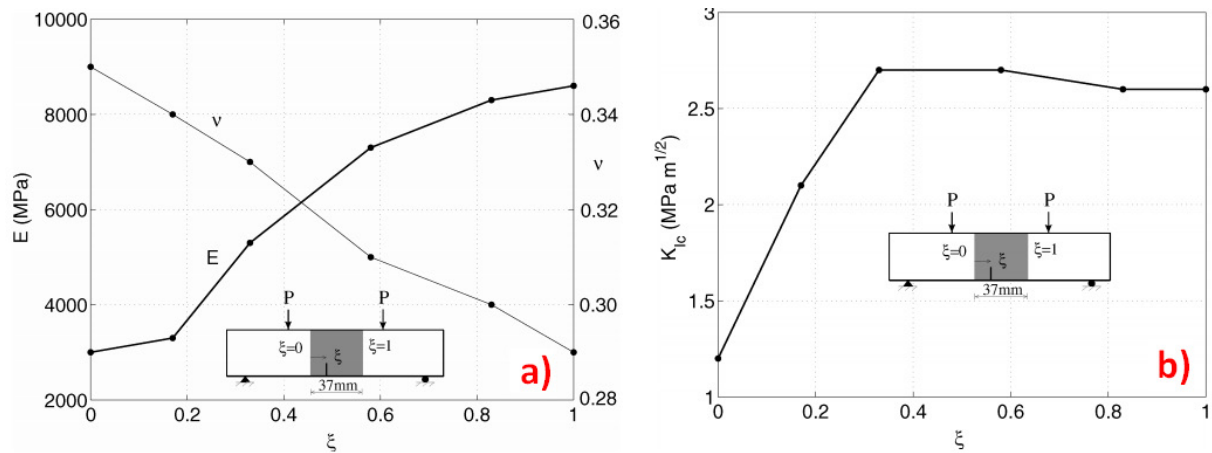
**Figure III. 4:** Géométrie de l'éprouvette en flexion 4-points en FGM les dimensions sont données en [mm].

La structure considérée est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds (quadrangulaires et triangulaires), des éléments spéciaux ont été utilisés pour caractériser la singularité en pointe de la fissure. Les Figure III. 5 (a) et (b) illustrent respectivement, le maillage global de l'éprouvette avec différentes positions de la fissure  $\xi$ , et le maillage au voisinage de la pointe de fissure.



**Figure III. 5:** Maillage de l'éprouvette en flexion 4-points : (a) Maillage global pour les différentes positions de fissure, (b) Maillage détaillé au voisinage de la pointe de fissure.

La Figure III. 6 illustre la variation des propriétés mécaniques ( $E$ ,  $\nu$  et  $K_{IC}$ ), le long de la région graduée ( $0 \leq \xi \leq 1$ ). Les valeurs numériques de ces paramètres sont illustrées dans le tableau (III.1).



**Figure III. 6:** Variation des propriétés matérielles **a)** Variations du module de Young  $E$  (MPa), du coefficient de Poisson  $\nu$ , **b)** la variation du  $K_{IC}$  le long de la région graduée ( $0 \leq \xi \leq 1$ )

Comme mentionné auparavant, pour déclarer les propriétés mécaniques du matériau, un sous-programme a été conçu spécialement puis intégré dans le code de calcul sous forme de script APDL.

$\xi$	$E(\text{MPa})$	$\nu$	$K_{IC} (\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}})$
0	3000	0.35	1.2
0.17	3300	0.34	2.1
0.33	5300	0.33	2.7
0.58	7300	0.31	2.7
0.83	8300	0.30	2.6
1	8600	0.29	2.6

Tableau III. 1: Propriétés matérielles,  $E$ ,  $\nu$  et  $K_{IC}$  dans la zone graduée.

La Figure III. 7 illustre un exemple composé de 4 étapes du chemin de propagation de la fissure initiée en position  $P_1$  ( $\xi = 0,17$ ), en utilisant le critère local de bifurcation CCM (Critère de la contrainte circonférentielle maximale).

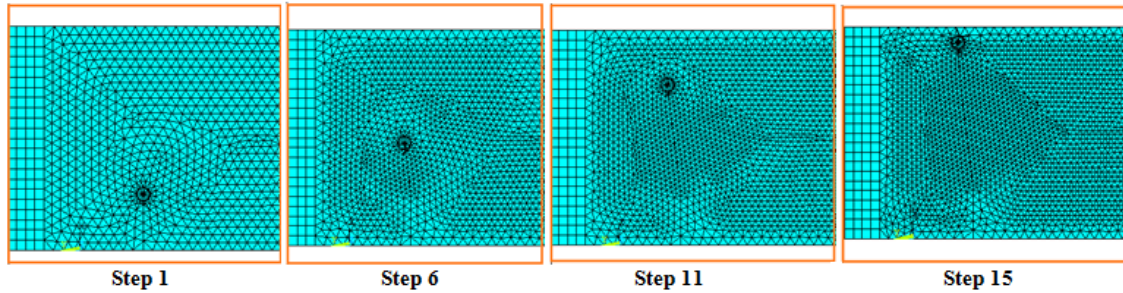
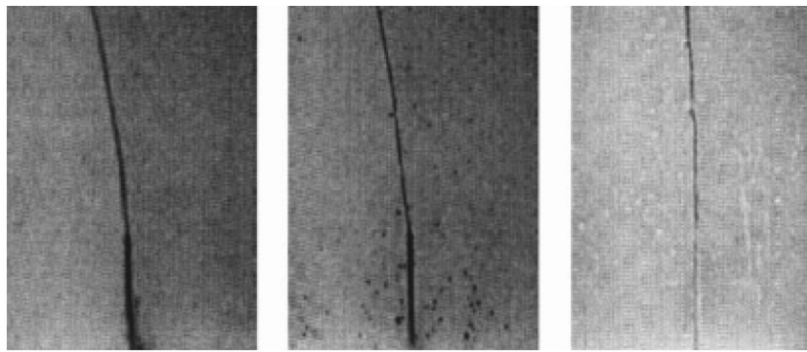


Figure III. 7: Extension de la fissure par le critère de bifurcation CCM (position  $\xi=0.17$ ).

Afin de valider notre modèle numérique de la propagation des fissures dans les matériaux fonctionnellement gradués, nous avons montré dans les Figure III. 8.(a~c) et dans les Figure III. 9 (a~c) les résultats expérimentaux obtenus par Rousseau et Tippur [ROU 00], ainsi que les résultats obtenus numériquement par Kim et Paulino [KIM 07] en utilisant le code FRANC 2D (Fracture Analysis Code 2D) respectivement, ces résultats illustrent les chemins de propagation de fissure, pour les trois positions  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  ( $\xi = 0.17$ ,  $\xi = 0.58$  et  $\xi = 1$ ), respectivement.

En utilisant le critère de bifurcation CCM et la technique DET, les Figure III. 10 (a~c) représentent les résultats numériques des chemins de propagation pour les trois positions  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , respectivement. Ces résultats sont obtenus pour l'incrément de fissure  $\Delta a = 1\text{mm}$ .

Il existe un accord raisonnable entre nos résultats (Figure III. 10) et les résultats expérimentaux et numériques (Figure III. 8, et Figure III. 9) des travaux cités plus haut. On peut dire à partir de ces résultats, que la technique de programmation utilisée reproduit fidèlement le chemin de propagation dans les matériaux FGM.

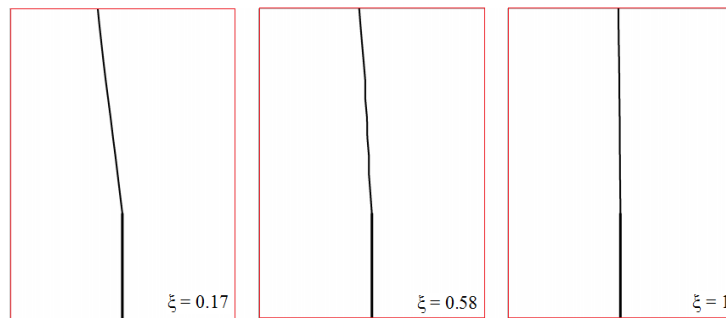


a)  $P_1=0.17$

b)  $P_2=0.58$

c)  $P_3=1$

Figure III. 8: Résultats expérimentaux des chemins de propagation pour les trois positions de fissure [ROU 00].

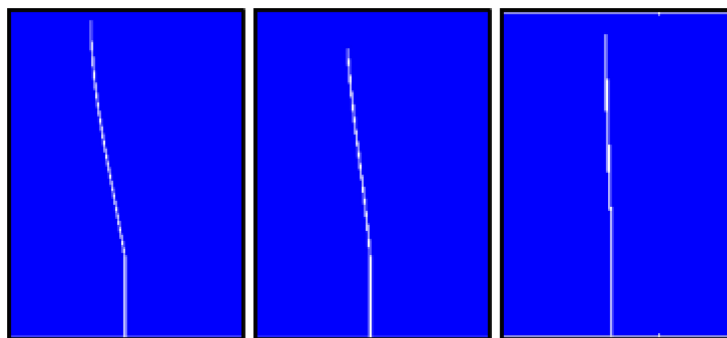


a)  $P_1=0.17$

b)  $P_2=0.58$

c)  $P_3=1$

Figure III. 9: Prédiction numérique des trajets de propagation obtenue par Kim et Paulino [KIM 07].



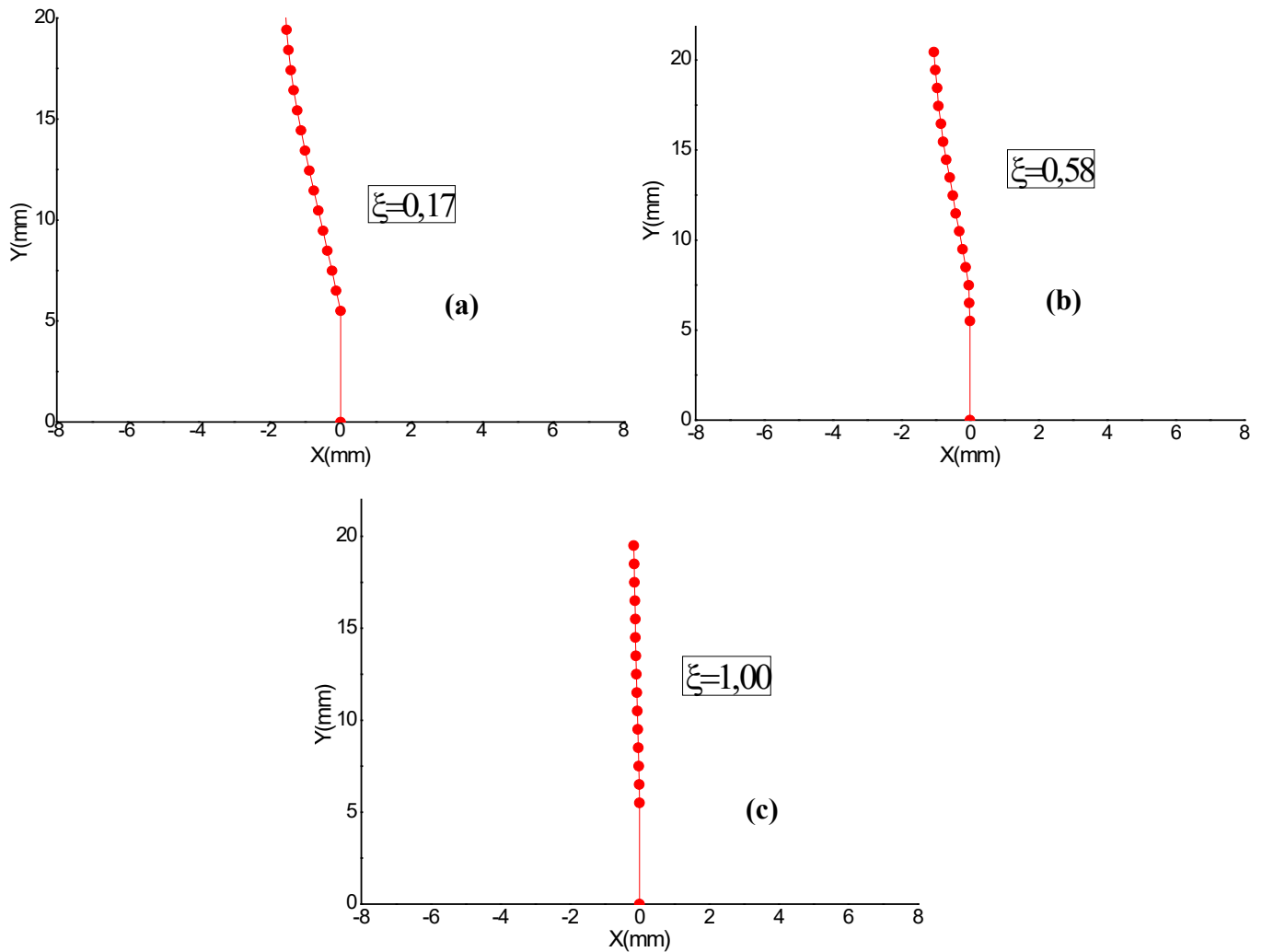
a)  $P_1=0.17$

b)  $P_2=0.58$

c)  $P_3=1$

Figure III. 10: Résultats numériques des trajets de fissuration obtenus par le critère CCM

Pour bien visualiser la comparaison, nous avons représenté sur la figure III.11 les coordonnées de la fissure représentant le chemin de propagation de nos résultats numériques obtenus pour les fissures localisées aux positions  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  ( $\xi=0.17$  ; 0.58 et 1).



**Figure III. 11:** Trajets de propagation obtenus numériquement pour les trois positions de fissure ( $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ ).

- Pour les positions  $P_1$  et  $P_2$  ( $\xi=0.17$  et  $0.58$ ) figure III.11(a) et (b) : la fissure bifurque vers le point d'application de la force et s'oriente vers le côté où les propriétés du matériau sont faibles (module d'élasticité et la ténacité  $K_{IC}$ ), les deux fissures  $P_1$  et  $P_2$  prennent le même chemin avec des degrés légèrement différents.
- Pour la position  $P_3$ , (III.11 (c)) : la fissure se propage d'une façon quasi-rectiligne en mode I et ce à cause de la nature du matériau dans cette partie. Bien que le point d'application de la force soit très proche, la fissure est piégée dans cette direction, vu que le module de Young est plus faible.

Pour mieux illustrer l'influence de la position de la fissure dans la région graduée sur la prédiction du trajet final de fissuration, nous avons regroupé sur la figure (III.12) les trois trajectoires obtenues pour les positions  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , respectivement.

On remarque que la fissure dans les positions  $P_1$  et  $P_2$  se propage de la même manière c'est-à-dire que la fissure se dirige vers le point d'application de la charge avec une légère différence

d'inclinaison. Pour expliquer cette différence, il est important de voir l'angle initial avec lequel la fissure va débiter sa propagation.

On peut noter que la fissure initiée en position  $P_1$  ( $\xi=0.17$ ) présente une valeur maximale de l'angle d'amorçage ( $\theta_0$ ). Plus la position de la fissure se déplace vers la position  $P_3$  ( $\xi=1$ ), plus l'angle d'amorçage ( $\theta_0$ ) diminue. Cette différence de l'angle initial de propagation a une influence directe sur le trajet final de propagation.

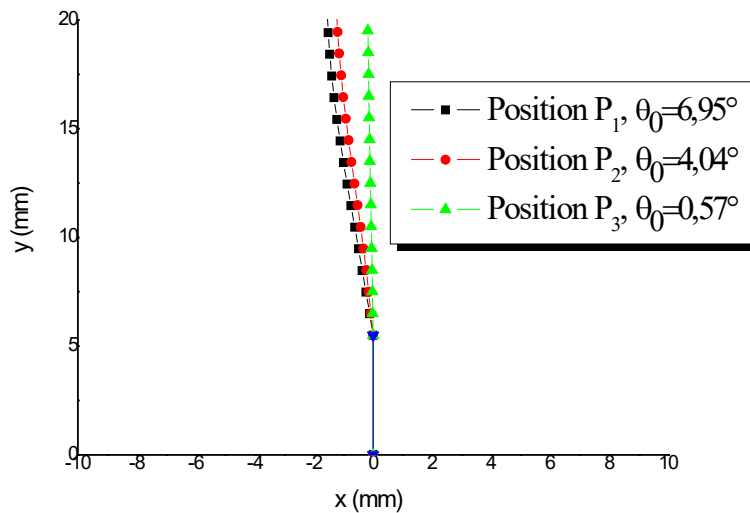


Figure III. 12: Trajets de fissuration obtenus pour les différentes positions  $\xi$ .

Dans le tableau suivant (III.2) une comparaison des résultats de l'angle initial de propagation ( $\theta_0$ ) est donnée. Ce cas d'éprouvette en flexion 4 points a été souvent repris pour différents essais et différentes méthodes numériques on cite : MEF [KIM 07], X-FEM [COM 07], XEFGM (Extended Element Free Galerkin Method) [HAI 17], SBFEM (Scaled Boundary Finite Element Method) [EAN 15].

		Angle initial de propagation $\theta_0$ (°)				
Position de fissure $\xi$	Présente étude	Expérimental	MEF	X-MEF	XEFGM	SBFEM
		Rosseau et Tippur [ROU 00]	Kim et Paulino [KIM 07]	Comi et Mariani [COM 07]	Haider et Hassanein [HAI 17]	Ean et al. [EAN 15]
0.17	6.95°	7°	6.98°	7.22°	6.90°	6.82°
0.58	4.04°	4°	4.01°	4.07°	4.02°	/
1.00	0.57°	0.5°	0.59°	1.02°	0.60°	/

Tableau III. 2: Comparaison entre les angles d'amorçage ( $\theta_0$ )

En comparant les résultats numériques obtenus avec ceux disponibles dans la littérature on peut dire qu'un bon accord a été constaté et que le modèle décrit bien le trajet de fissuration et obtient des valeurs précises de l'angle initial de propagation ( $\theta_0$ ).

Sur la figure (III.13), nous avons représenté le chemin de propagation d'une fissure amorcée en position  $P_1$  estimée par trois critères différents :  $DED_{min}$  « Critère de la densité d'énergie de déformation minimale », le critère  $CCM$  « Contrainte circonférentielle maximale » et le critère  $TREM$  « Critère du taux de restitution d'énergie maximal ». Les trajets de fissuration obtenus donnent de bons résultats ce qui veut dire que la technique de programmation numérique utilisée a montré son efficacité pour les différents critères de bifurcation, locaux et énergétiques.

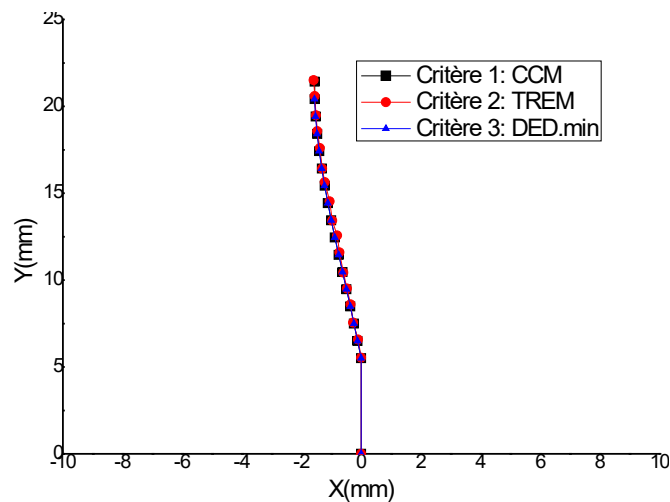


Figure III. 13: Chemins de propagation obtenus par les critères :  $CCM$ ,  $TREM$  et  $DED_{min}$  pour  $P_1$  ( $\xi=0.17$ ).

Sur le tableau (III.3) une meilleure visualisation est présentée en comparant l'angle initial de bifurcation ( $\theta_0$ ) calculé par les différents critères ( $CCM$ ,  $DED_{min}$ ,  $TREM$  et  $T_v$ ), pour les trois positions de fissures. Les résultats obtenus sont très proches.

Tableau III. 3: comparaisons des angles initiaux de bifurcation pour différents critères.

Position de fissure $\xi$	Critères de bifurcation			
	$CCM$	$DED_{min}$	$TREM$	$T_v$
0.17	6.94°	6.902°	6.9501°	6.503°
0.58	4.038°	4.029°	4.040°	4.040°
1	0.576°	0.576°	0.576°	0.576°

La figure (III.14) illustre l'évolution de l'angle initial de bifurcation ( $\theta_0$ ), le long de la zone graduée, évaluée numériquement par le critère local  $CCM$  et le critère énergétique  $DED_{min}$ . On peut remarquer clairement, pour les deux approches, que l'angle de bifurcation ( $\theta_0$ ) augmente et atteint sa valeur maximale lorsque la fissure est localisée à la position  $\xi=0.22$  noté  $P(\theta_0)_{max}$ .



Ensuite, cet angle diminue progressivement lorsque la position de fissure tend vers la position  $\xi=1$ .

L'étude comparative montre un bon accord entre la simulation numérique et le résultat expérimental pour les trois positions de fissure. Il semble que tous les résultats obtenus par approche théorique, numérique ou expérimentale présentent des résultats très similaires lorsque la fissure passe de la position  $P(\theta_0)_{max}$  vers la position  $P_3$  ( $\xi = 1$ ). La procédure numérique développée donne donc un résultat très satisfaisant.

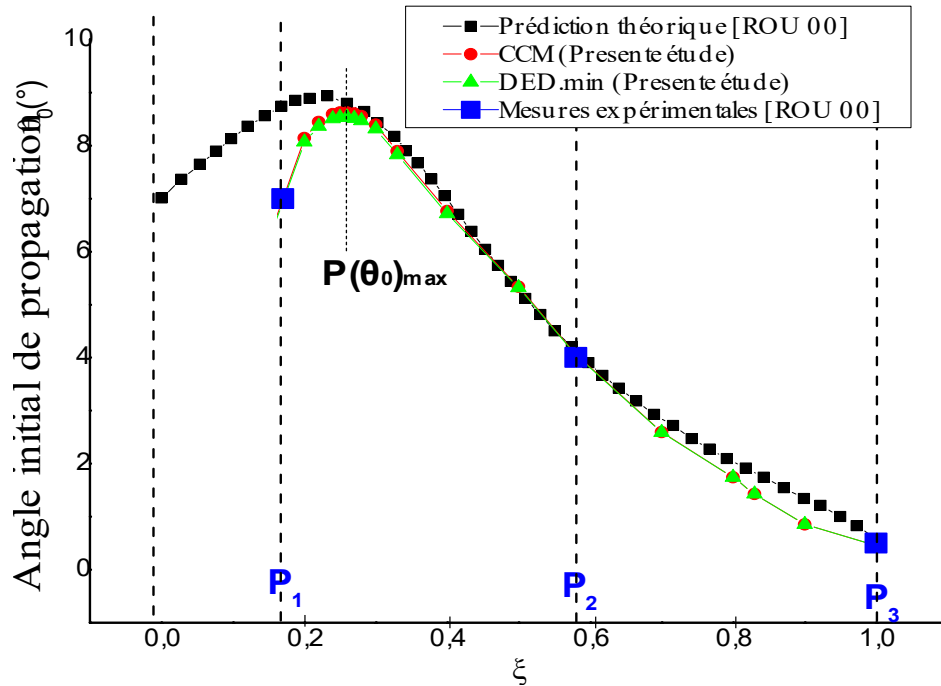


Figure III. 14: Evolution de l'angle de bifurcation ( $\theta_0$ ) dans la zone graduée.

- Calcul de la charge critique

En utilisant le critère CCM, les tableaux (III.4) et (III.5) récapitulent respectivement, le chargement critique appliqué ( $P_{cr}$ ) pour faire propager la fissure et les FICs  $K_I$  et  $K_{II}$ , évalués numériquement pour des fissures localisées aux positions  $\xi=0.17$ ,  $\xi=0.58$ ,  $\xi=1$ .

Références	$P_{cr}(N)$		
	$\xi=0.17$	$\xi=0.58$	$\xi=1$
Présente étude	252	297	290
Kim et Paulino [KIM 04]	249.3	298	289.9
Bayesteh [BAY 13]	250	300	/
Ait Ferhat [AIT 21]	257	/	/

Tableau III. 4: Calcul de la charge critique  $P_{cr}$  pour les positions  $\xi = 0.17, 0.58, 1$ .

On remarque que la fissure localisée au point  $P_2$  nécessite une charge  $P_{cr}$  plus élevée par rapport aux autres positions ( $P_1$  et  $P_3$ ) ceci est due à la nature du matériau dans cette zone, où la ténacité du matériau est la plus élevée.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus dans la littérature. On peut dire que les calculs réalisés présentent des résultats très fiables.

Références	$K_I$ (MPa. $\sqrt{m}$ )			$K_{II}$ (MPa. $\sqrt{m}$ )		
	$\xi=0.17$	$\xi=0.58$	$\xi=1$	$\xi=0.17$	$\xi=0.58$	$\xi=1$
Présente étude	2.094	2.695	2.598	-0,12	-0.09	-0.017
Kim et Paulino [KIM 04]	2.008	2.695	2.568	-0,127	-0.094	-0.013
Khazal et Saleh [KHA 19]	2.087	2.689	2.588	-0.116	-0.087	-0,01
Bayesteh [BAY 13]	2.087	2.694	/	-0,117	-0.085	/
Ait Ferhat [AIT 21]	2.170	/	/	-0.129	/	/

Tableau III. 5: Calcul les FICs critiques  $K_I$  et  $K_{II}$  pour les positions  $\xi = 0.17, 0.58, 1$ .

### III.5.1.2 Cas d'une éprouvette de flexion 3-points en FGM

Dans cet exemple, on considère une éprouvette de flexion 3-points en FGM de type (ZrO<sub>2</sub>/NiCr), les poudres de ZrO<sub>2</sub> et NiCr sont mélangées avec des pourcentage différents dans des rapports volumiques de 10-0, 9-1, 8-2, 7-3, 6-4 et 5-5, respectivement. Une fissure de longueur ( $a$ ) est supposée amorcer au milieu de l'éprouvette, perpendiculairement à la gradation matérielle suivant l'axe ( $Y$ ). La figure (III.15) illustre la géométrie de l'éprouvette et les conditions aux limites. Toutes les dimensions sont données en [mm].

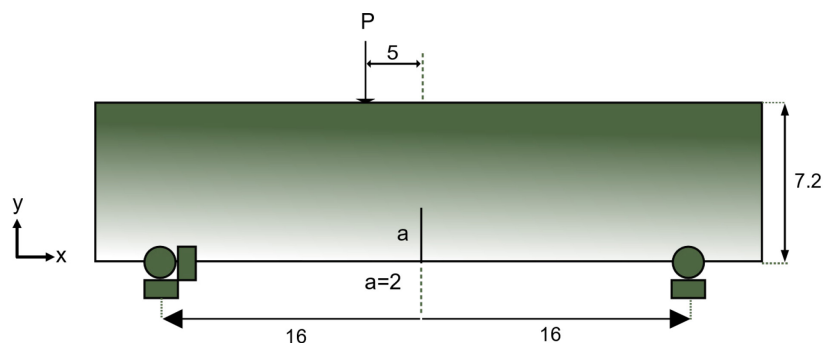


Figure III. 15: Géométrie de l'éprouvette de flexion 3 points en FGM (ZrO<sub>2</sub>/NiCr).

Pour étudier l'influence de la variation des propriétés mécaniques ( $E$  et  $K_{IC}$ ) sur le chemin de propagation d'une fissure deux matériaux sont considérés :

- FGM-A (Figure III.16 a) : correspond à l'éprouvette avec une fissure située sur le côté rigide et se propage dans le sens décroissant du module d'élasticité  $E$  et de la ténacité  $K_{IC}$  (100% ZrO<sub>2</sub>).
- FGM-B (Figure III.16 b) : correspond à l'éprouvette avec une fissure se propageant dans le sens croissant du module d'élasticité  $E$  et de la ténacité  $K_{IC}$  (60% ZrO<sub>2</sub>).

Les propriétés des matériaux FGM sont données dans le tableau III.6

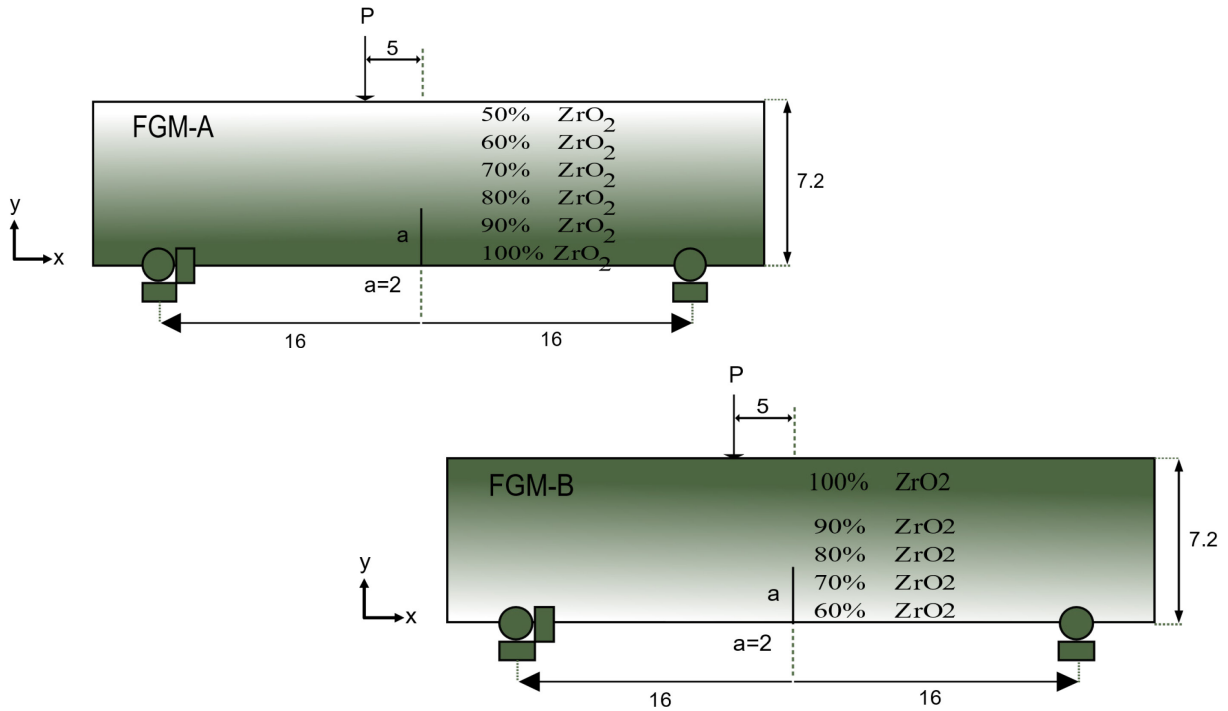


Figure III. 16: Géométrie de l'éprouvette de flexion 3 points a) FGM-A, b) FGM-B.

Teneur (%) ZrO <sub>2</sub> /NiCr	E (GPa)	K <sub>IC</sub> (MPa.√m)
100/0	201	11
90/10	188	9.4
80/20	170	7.5
70/30	152	6.2
60/40	135	4.7
50/50	120	3.8

Tableau III. 6 : Propriétés mécaniques de FGM aux points d'extrémité dans la région graduée.

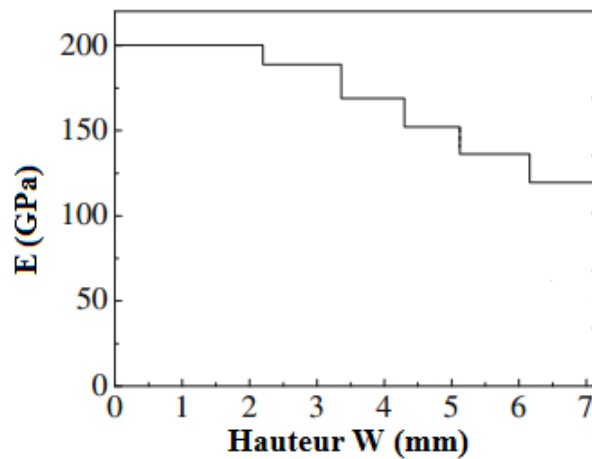
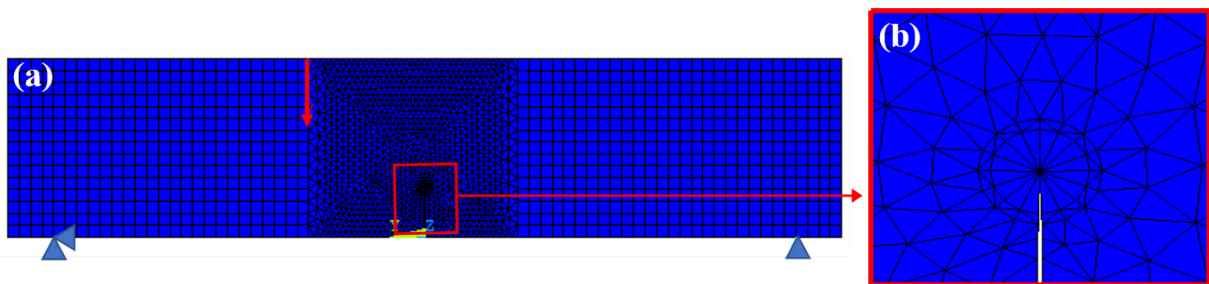


Figure III. 17: Variations du module de Young E dans le matériau FGM.

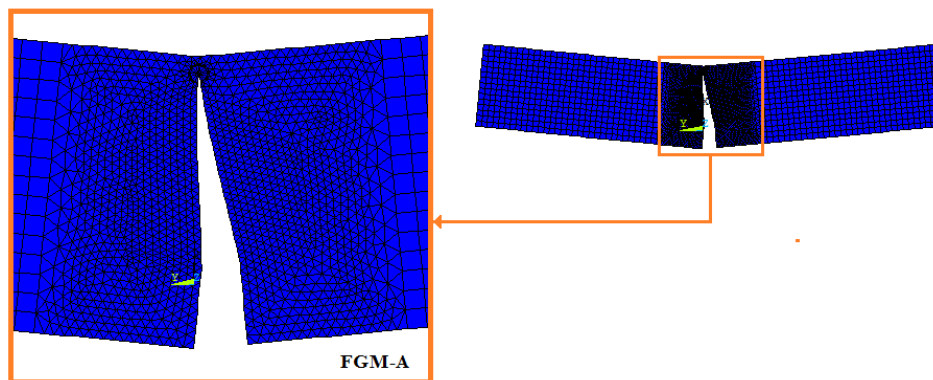
La figure (III.17) illustre la variation du module de Young  $E$  des deux matériaux FGM-A et FGM-B. Le coefficient de Poisson  $\nu$  est supposé constant ( $\nu=0.3$ ). Le module élastique diminue de façon monotone de 201 à 119 GPa avec l'augmentation de la teneur en NiCr.

L'éprouvette est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds, des éléments spéciaux ont été utilisés pour caractériser la singularité en tête de la fissure. La figure (III.18) illustre le maillage global de l'éprouvette de flexion et la rosette circulaire créée autour de la pointe de fissure. Le modèle comprend environ 2686 éléments à huit nœuds. La simulation numérique de la propagation de fissure a été réalisée en supposant des conditions de déformation plane et une longueur de propagation de fissure  $\Delta a = 1\text{mm}$ .



**Figure III. 18:** Modèle typique de maillage : a) Maillage global de l'éprouvette, b) Eléments singuliers autour de la pointe de fissure.

La figure (III.19) montre un exemple de la configuration finale du trajet de fissuration dans l'éprouvette pour le FGM-A, obtenu par le critère local CCM.



**Figure III. 19:** Configuration finale de trajet de fissuration (FGM-A).

La figure III.20 illustre le chemin de propagation de la fissure pour les deux types de matériaux (FGM-A et FGM-B), les fissures se propagent de la même manière dans les deux matériaux, c'est-à-dire qu'elles s'orientent vers le point d'application de la charge, une légère différence est notée entre les deux matériaux ceci est dû à la nature du matériau qui a une influence directe sur l'angle initial de la propagation ( $\theta_0$ ).

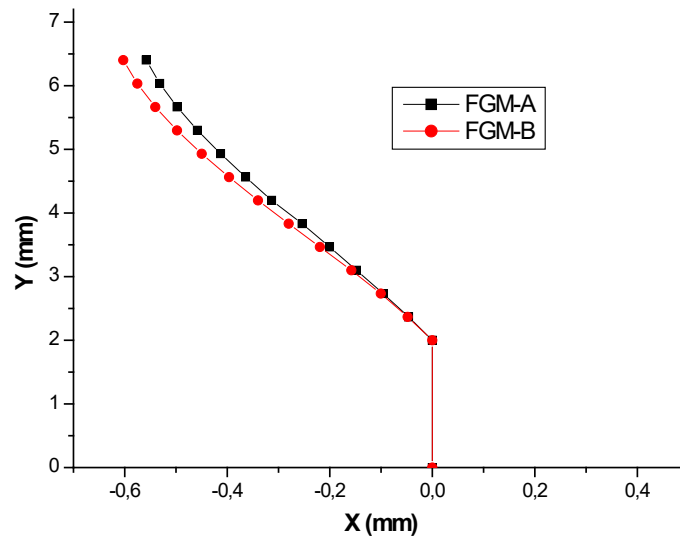


Figure III. 20: Chemin de propagation de la fissure pour FGM-A et FGM-B

Le tableau (III.7) liste les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$ , l'angle initial de la propagation de fissure, ainsi que la valeur de la charge nécessaire appliquée pour faire propager la fissure. Ces valeurs sont déterminées pour les trois matériaux FGM-A, FGM-B et homogène (50% ZrO<sub>2</sub> et 50%NiCr) en utilisant la méthode d'extrapolation de déplacement (DET). D'après les résultats, on remarque que :

- Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  diffèrent pour chaque matériau, elles sont plus élevées pour le FGM-A.
- L'angle initial de propagation de fissure ( $\theta_0$ ) est légèrement différents pour les trois matériaux ce qui est illustré sur la figure précédente du chemin de propagation (figure III.20)
- La charge critique nécessaire pour faire propager la fissure pour le FGM-A est plus importante que pour les deux autres matériaux (FGM-B et homogène) ceci dépend des propriétés du matériau plus précisément le facteur d'intensité de contrainte critique  $K_{IC}$  qui représente la capacité d'un matériau à résister à une propagation de fissure.

Matériau	$K_I (MPa \cdot \sqrt{m})$	$K_{II} (MPa \cdot \sqrt{m})$	Angle $\theta_0$ (°)	$P_{cr} (N)$
FGM-A	11.014	-0.696	7.18	170
FGM-B	4.750	-0.313	7.47	94
Homogène	3.912	-0.259	7.53	70

Tableau III. 7: Variation de  $K_I$ ,  $K_{II}$  l'angle de bifurcation  $\theta_0$  (°) et la charge critique  $P_{cr}$  (N)

Afin de montrer la différence de charge nécessaire pour faire propager la fissure, la figure III.21 illustre la charge appliquée sur les deux échantillons FGM-A et FGM-B. On remarque clairement que la charge appliquée pour le premier matériau FGM-A est plus importante que

celle obtenue pour le matériau FGM-B, c'est-à-dire que la propagation d'une fissure, située dans la partie rigide du matériau, nécessite une charge plus élevée.

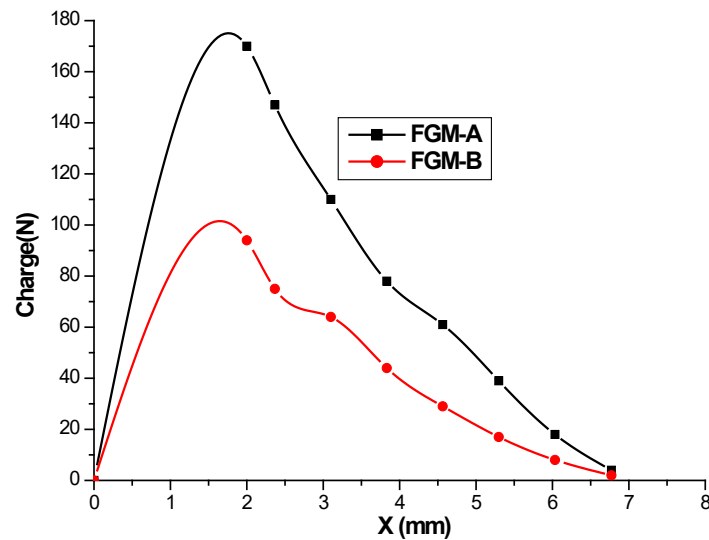


Figure III. 21: Evolution de la charge appliquée en fonction de l'extension de la fissure de FGM-A et FGM-B.

### III.5.1.3 Cas d'une éprouvette en flexion trois points avec différents chargements

Dans cette partie du travail le but est d'étudier l'influence de la position du chargement sur le chemin de propagation d'une fissure. A cet effet, deux modèles sont considérés : un matériau fonctionnellement gradué et un matériau homogène en PMMA. Tous les essais sont soumis à une flexion trois points.

Les propriétés du matériau PMMA utilisé sont les suivantes :

$$E = 2890 \text{ MPa}, \nu = 0.4, K_{IC} = 1.09 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

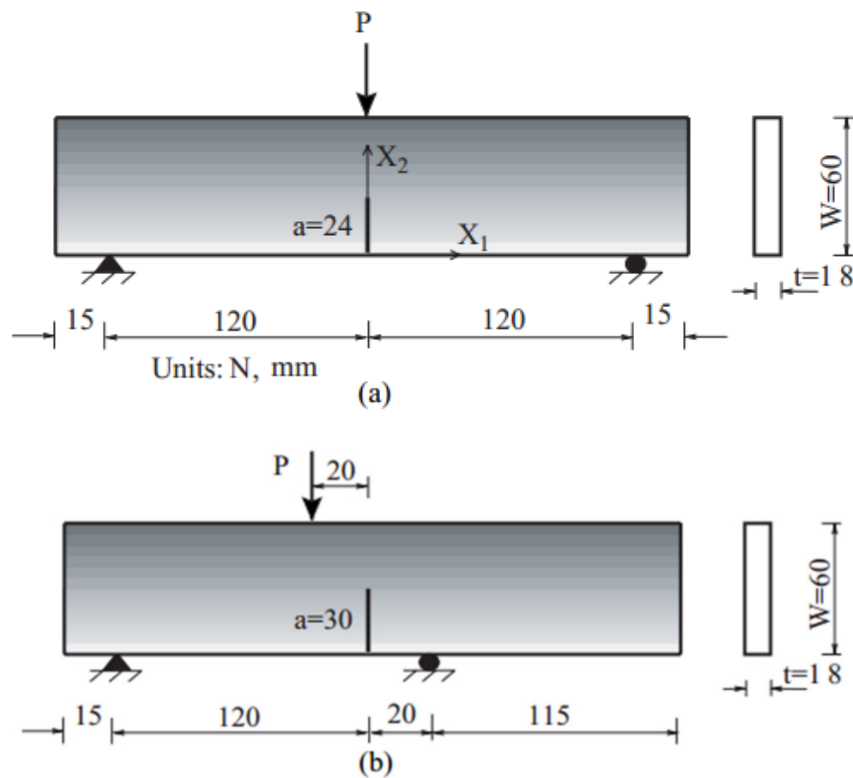
Pour le matériau fonctionnellement gradué, la variation des propriétés du matériau est supposée linéaire suivant la direction  $X_2$ . Le tableau (III.8) illustre les propriétés mécaniques du FGM aux deux extrémités de la région graduée.

$X_2(\text{mm})$	$E(\text{MPa})$	$\nu$	$K_{IC}(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$
0	1780	0.41	0.99
60	4000	0.39	1.19

Tableau III. 8: Propriétés mécaniques de FGM aux deux extrémités de la région graduée.

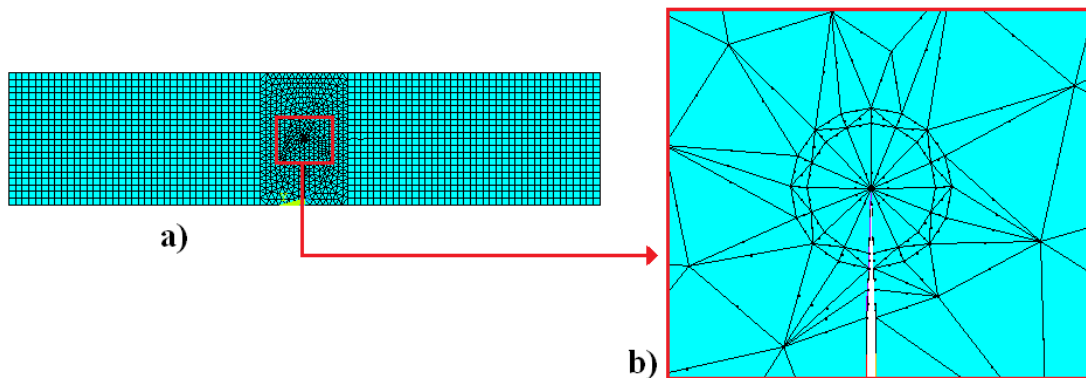
Les figures (III.22a) et (III.22b) montrent la géométrie de l'éprouvette en flexion trois points, les dimensions et les conditions aux limites pour deux cas de chargement :

- A : géométrie et conditions aux limites considérant le chargement symétrique figure III.22 (a)
- B : géométrie et conditions aux limites considérant le chargement asymétrique figure III.22(b)



**Figure III. 22:** Poutre flexion trois points pour un chargement :  
a) symétrique, b) asymétrique

Les structures considérées sont modélisées par des éléments à huit nœuds, sous les conditions de déformation plane. Un maillage spécial est utilisé autour de la pointe de fissure afin de caractériser la singularité en tête de la fissure. Les figures (III.23a) et (III.23.b) montrent respectivement, le modèle typique de maillage avec 2394 éléments ainsi que les éléments spéciaux au voisinage de la pointe de fissure.

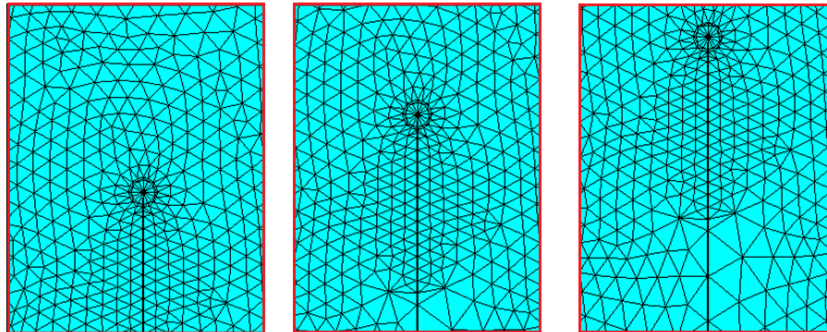


**Figure III. 23:** Modèle typique de maillage : a) Maillage global de l'éprouvette, b) Eléments singuliers autour de la pointe de fissure.

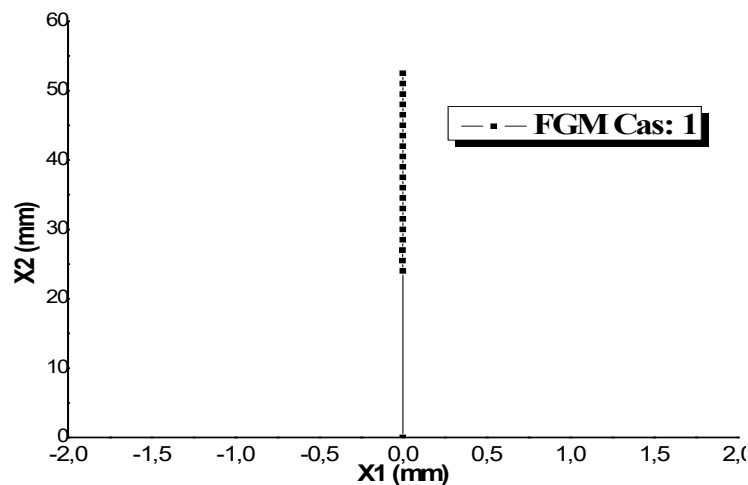
### A : Chargement symétrique

La figure (III.24) montre trois étapes d'extension de la fissure initiale du matériau homogène, en considérant le critère énergétique  $DED_{min}$ . Comme prévu, la fissure se propage d'une façon rectiligne, suivant le mode d'ouverture de la fissure (Mode I). Lors de la propagation de la

fissure, le trajet de fissuration est régulier et le maillage concentrique garde une bonne précision au fond de la fissure. Le même chemin de propagation de fissure est observé pour le matériau gradué sur la figure III.25.



**Figure III. 24:** Trois étapes de l'extension de fissure dans le matériau PMMA (cas 1).



**Figure III. 25:** Chemin de propagation dans le matériau FGM (cas 1)

### **B : Chargement asymétrique**

En considérant le matériau homogène en PMMA, la figure (III.26) montre la comparaison du chemin de propagation obtenus par Galvez et al [GAL 96] avec nos résultats numériques. Un excellent accord est observé entre les deux approches.

Sur la figure III.27 une comparaison du chemin de propagation pour les deux matériaux homogène et gradué obtenus numériquement par le critère  $DED_{min}$  avec un incrément d'extension  $\Delta a= 1.5\text{mm}$ .

En raison de l'asymétrie du chargement, la fissure se propage en mode mixte, en s'orientant vers le point d'application de la fissure. On note aussi que la gradation du matériau n'a pas d'influence sur le chemin de propagation.



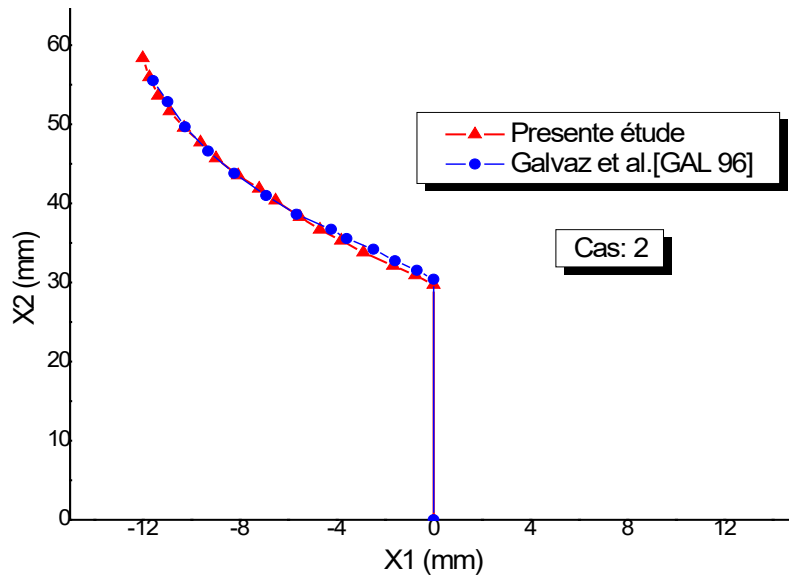


Figure III. 26: Comparaison du chemin de propagation pour PMMA obtenus numériquement et les résultats expérimentaux [GAL 96].

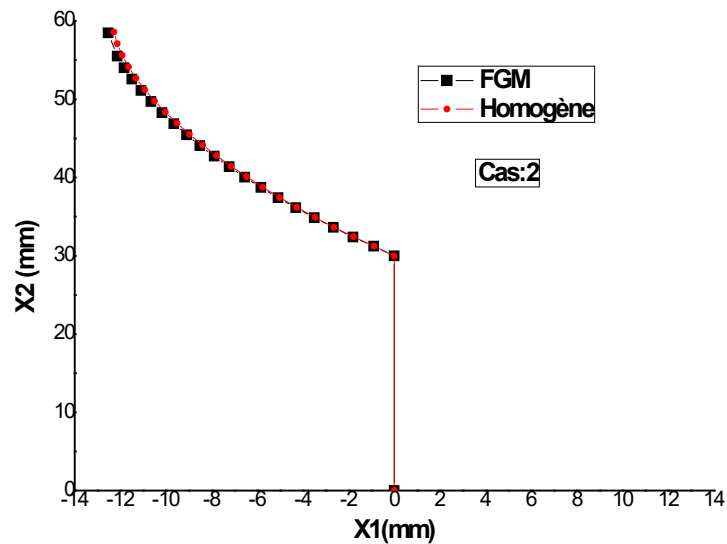


Figure III. 27: Comparaison du chemin de propagation pour les deux matériaux : homogène et FGM.

Sur la figure III.28 une comparaison du chemin de propagation obtenus par différents critères de propagation :  $DED_{min}$ ,  $TREM$ , et  $Tv$  est illustrée. Cette comparaison nous permet de dire que les trois critères donnent des résultats fiables et qui concordent bien avec les résultats de la simulation numérique de Kim et al [KIM 04]. On note ici, que ces auteurs ont utilisé la méthode de l'intégrale d'interaction et le critère  $TREM$  combiné avec la formulation de Hussain et al. [HUS 74] pour déterminer les FICs et l'angle de propagation, respectivement.

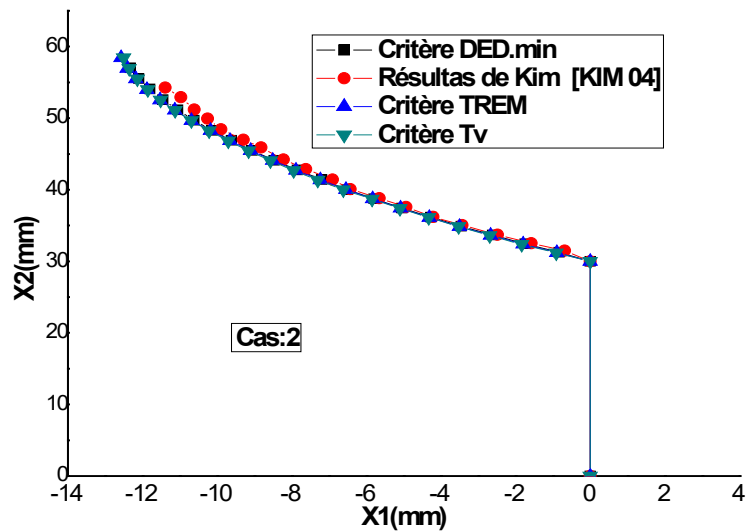


Figure III. 28: Comparaison du chemin de propagation entre différents critères  $DED_{min}$ ,  $TREM$ ,  $Tv$  avec les résultats de Kim [KIM 04].

- Calcul de la charge critique

La figure (III.29) montre l'évolution du chargement appliqué lors de l'extension de fissure en utilisant le critère de bifurcation  $DED_{min}$ . Ce travail est comparé avec celui obtenu par Kim et Paulino [KIM 07] et par Chen et al. [CHE 18]. La charge maximale prévue au début de la propagation de la fissure présente une différence d'environ 14% entre les résultats de Chen et al. [CHE 18] et 9% entre les résultats de Kim et Paulino [KIM 07]. Cette légère différence peut être attribuée aux différentes méthodes de calcul employées pour simuler le problème. Globalement, on peut dire que la concordance entre les résultats reste acceptable.

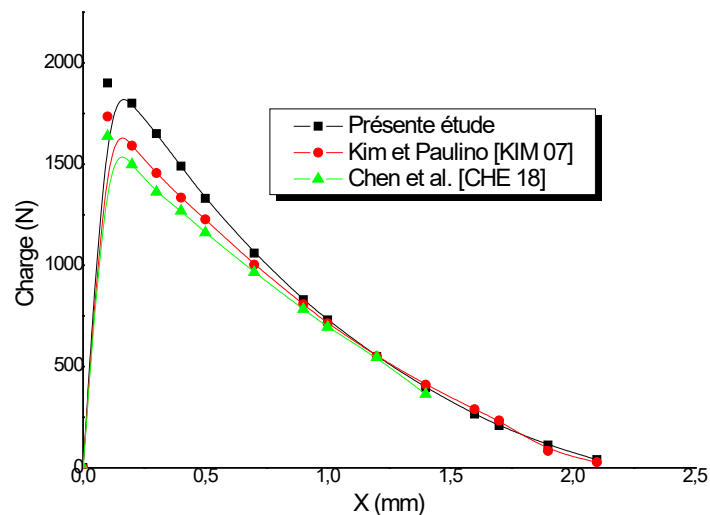
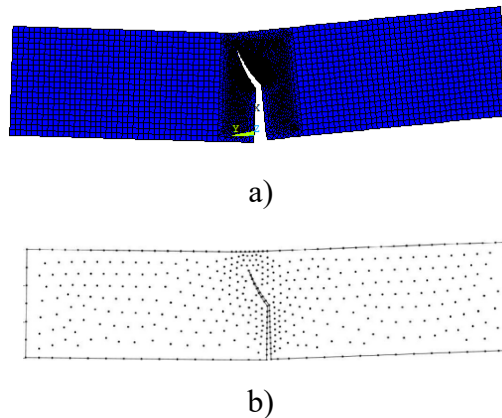


Figure III. 29: Evolution de la charge en fonction de l'extension de la fissure pour un chargement asymétrique.

Sur la figure (III.30a), nous avons représenté la configuration finale du trajet de fissuration obtenu par la méthode des éléments finis combinée avec le critère de bifurcation  $DED_{min}$ . Les

résultats sont comparés avec ceux obtenus par Memari [MEM 19] (figure III.30b), en utilisant l'approche de Petrov-Galerkin locale sans maillage MPLG (meshless local Petrov-Galerkin method). Un excellent accord a été observé entre les deux configurations.



**Figure III. 30:** Configuration finale de propagation de fissure obtenue par : a) MEF (présente étude), b) Méthode sans Maillage Memari [MEM 19].

### **III. 5.2 Propagation de fissures sous chargement thermomécanique**

Dans le cas d'un problème sollicité sous chargement thermomécanique, la démarche consiste à modéliser le problème sous chargement thermique en régime permanent et ensuite faire lancer l'analyse structurale. L'organigramme de la figure III.31 résume les principales parties de chaque analyse (thermique et structurale).

Le programme de l'analyse structurale utilise les mêmes paramètres de calcul définis dans le programme de l'analyse thermique.

La commande ETCHG (*Element Type Change*) permet de garder exactement le même modèle (géométrie et maillage) créé pour l'analyse thermique en changeant uniquement l'élément thermique par son correspondant structural (PLANE77 à PLANE183).

ANSYS dispose de la commande LDREAD (*Load Read*) qui va lire, à chaque pas de calcul, les températures des nœuds des éléments thermiques, à partir d'un fichier créé automatiquement lors de l'analyse thermique, puis les transmettre aux mêmes nœuds des éléments structuraux, au même pas de calcul.

Dans cette section, un premier exemple d'une plaque FGM soumise à une charge thermomécanique est considéré. Cet exemple est étudié afin de valider l'algorithme décrit précédemment. Après la validation de notre modèle numérique, un autre cas est étudié ; il s'agit d'une éprouvette Glass/Epoxy graduée sous chargement thermomécanique.

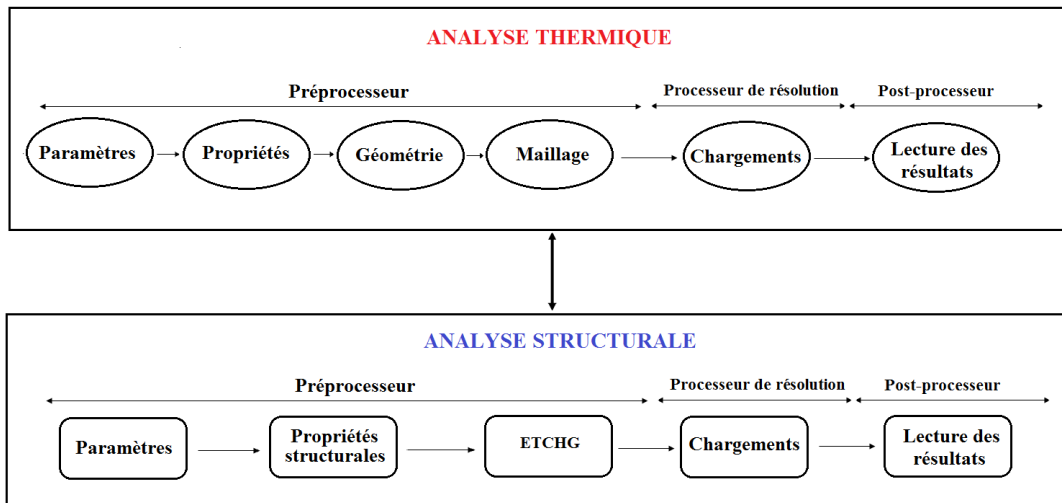


Figure III. 31: Organigramme de l'analyse thermique et structurale.

### III. 5.2.1 Cas d'une fissure débouchante dans une plaque FGM soumise à une charge thermique

Pour cet exemple, on considère une plaque en FGM de longueur  $H = 8$  unités et de largeur  $W = 1$  unité, soumise à des charges thermiques. Une fissure de longueur  $a = 1$  unité est supposée amorcer au bord de la plaque. La figure III.32 (a) illustre le modèle géométrique et le chargement thermique appliqué sur la plaque pré-fissurée en FGM.

La structure considérée est maillée par des éléments triangulaires avec des éléments singuliers de Barsoum [BAR 74] pour la représentation correcte du champ de déplacements près de la pointe de la fissure. Les valeurs du FIC, en mode d'ouverture de la fissure, sont calculées sous les conditions de déformations planes, en se basant sur la méthode de corrélation de déplacement (DCT).

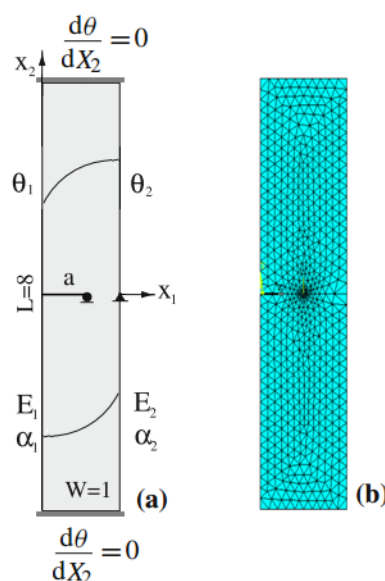


Figure III. 32: Fissure débouchant dans une plaque fissurée en FGM

(a) Géométrie et conditions aux limites (b) Maillage globale de la plaque.

La figure III.32 (b) illustre le maillage global de la structure. La discrétisation bidimensionnelle contient 2344 éléments avec 4889 nœuds.

Dans cette analyse, nous avons considéré un coefficient de Poisson constant ( $\nu=0.3$ ), car son effet est négligeable sur le comportement en rupture des matériaux FGM en mode-I [AMI 08].

Le coefficient de conductivité thermique  $k$  est considéré aussi constant.

Le module élastique et le coefficient de dilatation thermique de la plaque en FGM sont donnés par la fonction exponentielle [AMI 08] :

$$E(X1) = E_1 e^{\beta X1} \tag{III.5}$$

$$\alpha(X1) = \alpha e^{\gamma X1} \tag{III.6}$$

Avec :  $\beta = \frac{1}{W} \ln \left( \frac{E_2}{E_1} \right)$  et  $\gamma = \frac{1}{W} \ln \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)$

$E_1 = 1$  et  $E_2 = 5$

$\alpha_1 = 0.01$  ( $^{\circ}C^{-1}$ ) et  $\alpha_2 = 0.02$  ( $^{\circ}C^{-1}$ )

Les conditions aux limites thermiques sont définies comme suit :

$T_0 = 10$  ( $^{\circ}C$ ),  $T_1$  (à  $X_1 = 0$ ) et  $T_2$  (à  $X_1 = W$ )

Le tableau III.9 résume les valeurs du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  normalisé ( $K_I/K_0$ ) avec  $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$ . La présente étude est comparée avec les résultats de Erdogan [ERD 97] et de Ganesh [GAN 10], le FIC normalisé est calculé sous l'effet du chargement mécanique, en considérant plusieurs rapports de ( $a/W = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ ) avec différente valeur de  $E_2/E_1$ . Ces résultats montrent que notre modèle donne des résultats très proches.

**Tableau III. 9:** Facteur d'intensité de contrainte normalisé pour différents rapports ( $a/W$ ) et ( $E_2/E_1$ )

$E_2/E_1$	$a/W=0.2$			$a/W=0.3$			$a/W=0.4$		
	P. Etude	[ERD 97]	[ANA10]	P. Etude	[ERD 97]	[ANA10]	P. Etude	[ERD 97]	[ANA 10]
<b>0.1</b>	1.22	1.29	1.29	1.84	1.85	1.84	2.68	2.56	2.54
<b>0.2</b>	1.24	1.395	1.392	1.77	1.839	1.83	2.5	2.443	2.43
<b>1</b>	1.11	//	1.36	1.5	//	1.65	2.07	//	2.11
<b>5</b>	0.88	1.13	1.13	1.2	1.36	1.36	1.67	1.74	1.748
<b>10</b>	0.78	1	1.003	1.07	1.22	1.22	1.52	1.58	1.588

$E_2/E_1$	$a/W=0.5$			$a/W=0.6$			$a/W=0.7$		
	P. Etude	[ERD 97]	[ANA10]	P. Etude	[ERD 97]	[ANA10]	P. Etude	[ERD 97]	[ANA10]
<b>0.1</b>	3.85	3.57	3.49	5.66	5.18	4.96	9.02	8.48	7.78
<b>0.2</b>	3.57	3.32	3.29	5.28	4.76	4.66	8.5	7.52	7.18
<b>1</b>	2.96	//	2.82	4.48	//	4.03	7.47	//	6.34
<b>5</b>	2.45	2.36	2.36	3.81	3.44	3.44	6.58	5.58	5.58
<b>10</b>	2.26	2.17	2.17	3.55	3.21	3.21	6.24	5.28	5.28

La figure III.33 illustre l'évolution du facteur d'intensité de contrainte normalisé en fonction de la taille de la fissure ( $a/W$ ) pour différents rapports ( $E_2/E_1$ ), avec  $E_1 = \text{cst}$ . Le FIC normalisé  $K_I$  augmente avec l'augmentation de la longueur de fissure.

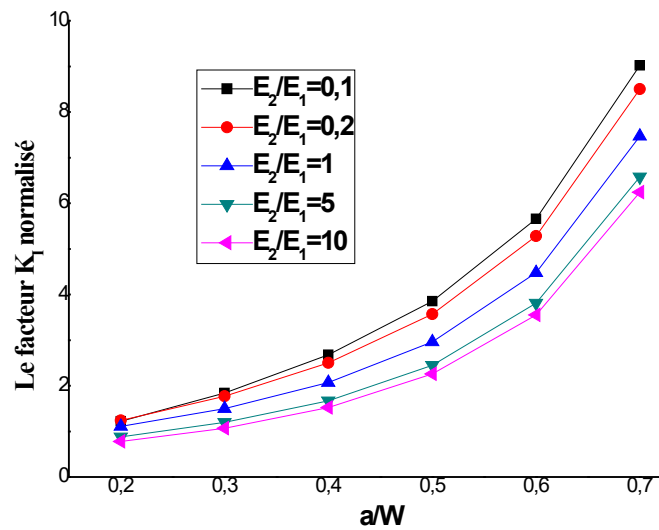


Figure III. 33: Evolution du facteur d'intensité de contrainte normalisé en fonction de ( $a/W$ ) pour différents rapports ( $E_2/E_1$ ).

En utilisant les différentes conditions du chargement thermique, le tableau III.10 résume les résultats du facteur d'intensité de contrainte normalisé ( $K_I/K_0$ ) avec  $K_0 = \left(\frac{E_1 \alpha_1 T_0}{1-\nu_1}\right) \sqrt{\pi a}$ , obtenus par la méthode des éléments finis. Ces résultats sont comparés avec ceux rapportés par Erdogan et Wu [ERD 96] et, Amit et Kim [AMI 08]. La comparaison montre un bon accord avec les résultats de référence.

FIC normalisé ( $K_I/K_0$ )			
Température	Présente étude	Amit & Kim [AMI 08]	Erdogan & Wu [ERD 96]
$T_1=T_2=5^\circ$	0.0129	0.0128	0.0125
$T_1= T_2=0.5^\circ$	0.0245	0.0244	0.0245

Tableau III. 10: Valeurs du FIC normalisé ( $K_I/K_0$ ) avec  $E_2/E_1 = 5$  et  $\alpha_2/\alpha_1 = 2$ .

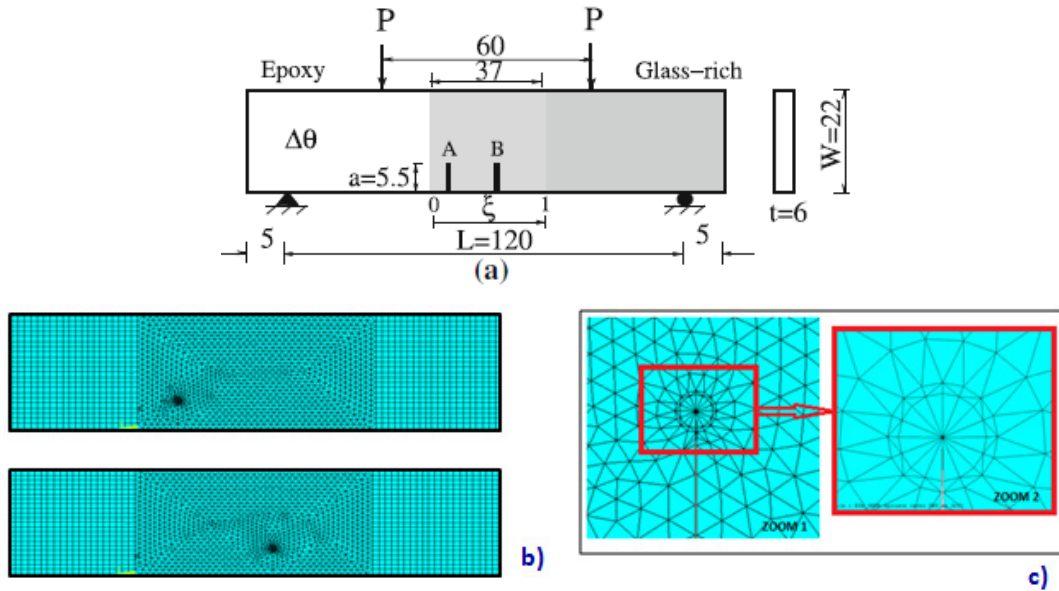
Cet exemple a été étudié dans le but de valider notre modèle numérique et de comparer nos résultats avec d'autres résultats disponibles dans la littérature. L'algorithme de programmation développé permet d'obtenir des résultats fiables et précis.

### III. 5.2.2 Cas d'une éprouvette Glass/Epoxy graduée sous chargement thermomécanique

Dans cet exemple, on considère une éprouvette de flexion 4-points en FGM (Epoxy/Glass). L'éprouvette contenant une fissure de longueur  $a=5.5\text{mm}$ , supposée amorcer perpendiculairement à la gradation matérielle. La figure III.34 (a) montre le modèle géométrique, les conditions aux limites et la force appliquée P.

Deux positions de fissure : A et B, sont considérées dans cette étude (avec  $\xi = 0.17$  et  $0.58$ ). Les figures III.34(b) et III.34(c) illustrent respectivement, le maillage global de l'éprouvette avec les deux positions de la fissure ainsi que le maillage au voisinage de la pointe de fissure.

La détermination des FICs est effectuée sous les conditions de contraintes planes. Les propriétés mécaniques et thermiques du matériau FGM sont illustrées dans le tableau III.11.



**Figure III. 34:** Géométrie, chargement et maillage de l'éprouvette considérée, (a) Géométrie de l'éprouvette, (b) Maillage globale pour différentes positions de fissure, (c) Eléments singuliers au voisinage de la pointe de fissure.

$\xi$	$E$ (Mpa)	$\nu$	$\alpha$ ( $1/K^\circ$ )	$K_{IC}$ (Mpa $\sqrt{m}$ )
0.00	3000	0.35	0.00040	1.2
0.17	3300	0.34	0.00034	2.1
0.33	5300	0.33	0.00029	2.7
0.58	7300	0.31	0.00020	2.7
0.83	8300	0.30	0.00014	2.6
1.00	8600	0.29	0.00009	2.6

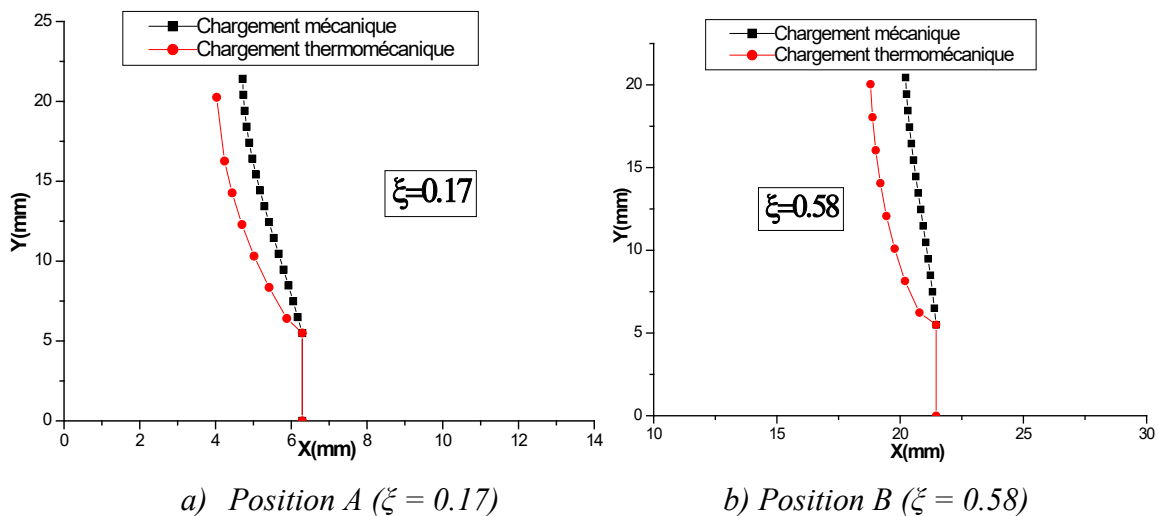
**Tableau III. 11:** Propriétés mécaniques ( $E$ ,  $\nu$  et  $K_{IC}$ ) et thermiques (facteur d'expansion thermique  $\alpha$ ) dans la zone graduée ( $0 \leq \xi \leq 1$ ).

Les figures III.35(a) et III.35(b) illustrent respectivement, les trajets de fissuration obtenus pour les deux positions A et B, sous les conditions du chargement mécanique et thermomécanique. On peut remarquer que :

- Pour une fissure localisée à la position A (figure III.35a) une différence du chemin de propagation est observée entre les deux modes de chargement mécanique et thermomécanique, les deux fissures se propagent du même, côté c'est-à-dire ou le module de Young et la ténacité du matériau sont faibles. Sous l'effet de la température on a une déviation plus prononcée de la

fissure, elle se propage en se dirigeant vers le coté où le coefficient de dilatation thermique est élevé.

- Pour une fissure localisée à la position B (figure III.35b) le chemin de propagation de la fissure sous chargement thermomécanique dévie légèrement par rapport au mode de chargement mécanique. Cette différence est moins marquée que celle de la position de fissure A, ceci peut être expliqué par le coefficient de dilatation thermique qui est faible dans cette zone de gradation du matériau. Comme conclusion, on peut dire que la température joue un rôle très important sur le trajet de fissuration dans le matériau, si le coefficient de dilatation thermique est élevé.



**Figure III. 35:** Comparaison entre les chemins de propagation obtenus sous chargement mécanique et thermomécanique pour les positions de fissure A et B

Pour les deux positions de la fissure ( $\xi = 0.17$  et  $0.58$ ), nous avons montré sur les figures III.36 et III.37), l'évolution des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  durant l'extension de la fissure dans la zone graduée, sous les conditions du chargement mécanique et thermomécanique. Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats numérique de Anandakumar [ANA 10].

Les figures III.36 (a) et III.37(a) montrent une comparaison des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  entre un chargement mécanique et un chargement thermomécanique.

- Pour une fissure située en position A ( $\xi = 0.17$ ) la valeur de  $K_I$  sous chargement thermomécanique est plus importante que celle obtenue sous chargement mécanique, ce qui montre l'effet de la température sur les paramètres de rupture. En fait, le facteur de dilatation thermique dans cette zone rend le matériau plus ductile ce qui nécessite une plus grande énergie pour que la fissure se propage.
- Pour la fissure située en position B ( $\xi = 0.58$ ), le coefficient de dilatation thermique est moins important dans cette zone et par conséquent, l'effet de la température est minime sur la valeur



du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ , et sa valeur s'approche plus de la valeur de  $K_I$  sous le chargement mécanique. Notons que les valeurs du facteur d'intensité de contrainte sont plus importantes que le cas de ( $\xi= 0.17$ ).

Les figures III.36(b) et III.37(b) présentent l'évolution du facteur d'intensité de contrainte  $K_{II}$  pour les deux positions de fissure A et B dans le cas d'un chargement mécanique et thermomécanique. On peut dire que  $K_{II}$  contribue à la déviation du chemin de propagation et ses valeurs tendent à osciller autour de zéro au cours de l'extension de la fissure.

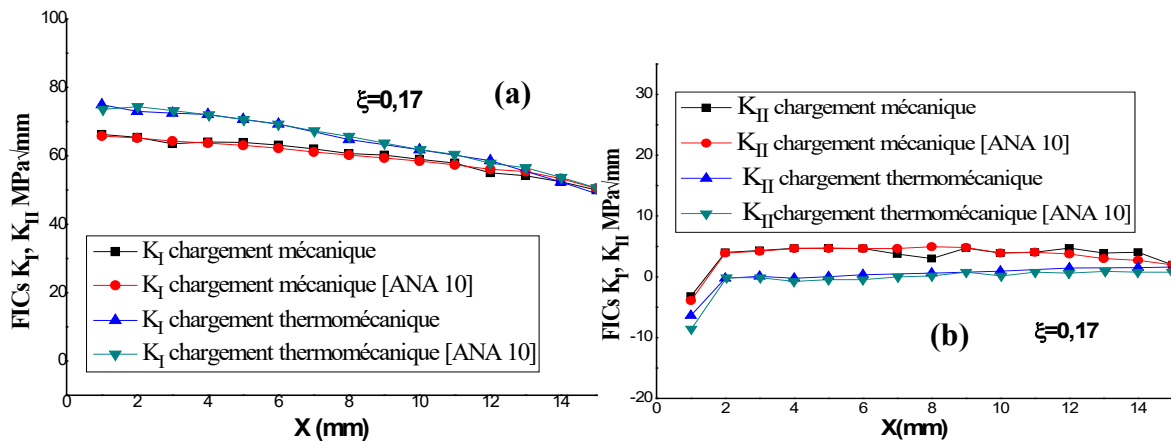


Figure III. 36: Evolution des FICs  $K_I$  et  $K_{II}$  durant l'extension de la fissure ( $\xi = 0.17$ )

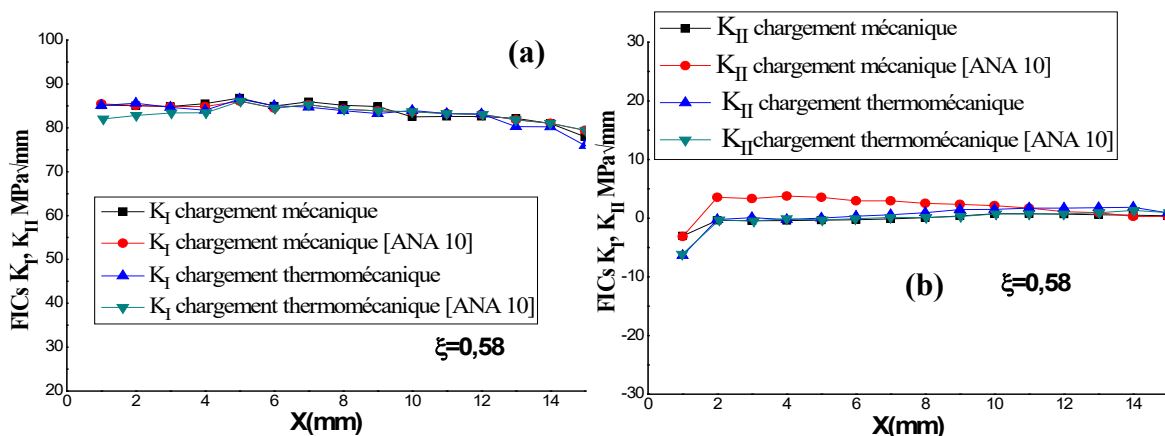


Figure III. 37: Evolution des FICs  $K_I$  et  $K_{II}$  durant l'extension de la fissure ( $\xi = 0.58$ )

Les tableaux III.12 Et III.13 présentent le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  calculé pour différentes températures et pour les deux positions de fissure A et B. On peut remarquer que plus la température augmente plus la valeur de  $K_I$  augmente. Les valeurs du facteur  $K_I$  obtenues en position B sont plus élevées par rapport à celles de la position A. Cette différence est due à la variation des propriétés mécaniques et thermiques du matériau dans cette zone.

Position A ( $\xi=0.17$ )			
Température (°)	50	100	150
$K_I$ (MPa. $\sqrt{m}$ )	2.20	2.28	2.37
$K_{II}$ (MPa. $\sqrt{m}$ )	-0.33	-0.54	-0.75

Tableau III. 12: Variation des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de la température (position A).

Position B ( $\xi=0.58$ )			
Température (°)	50	100	150
$K_I$ (MPa. $\sqrt{m}$ )	2.46	2.69	3.075
$K_{II}$ (MPa. $\sqrt{m}$ )	-0.91	-1.74	-2.58

Tableau III. 13: Variation des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de la température (position B)

Les figures III.38 et III.39 illustrent le chemin de propagation de la fissure en chargement mécanique et thermomécanique en considérant différentes valeurs de températures pour les deux positions de fissure A et B (0.17 et 0.58) respectivement.

La différence observée dans le trajet de propagation de fissure est due à la superposition des paramètres de rupture dans le champ de contraintes à la pointe de la fissure ce qui affecte l'angle initial de propagation et donc le trajet final de fissuration.

On note que plus la température augmente plus la déviation du chemin de propagation est prononcée entre le chargement thermomécanique et mécanique.

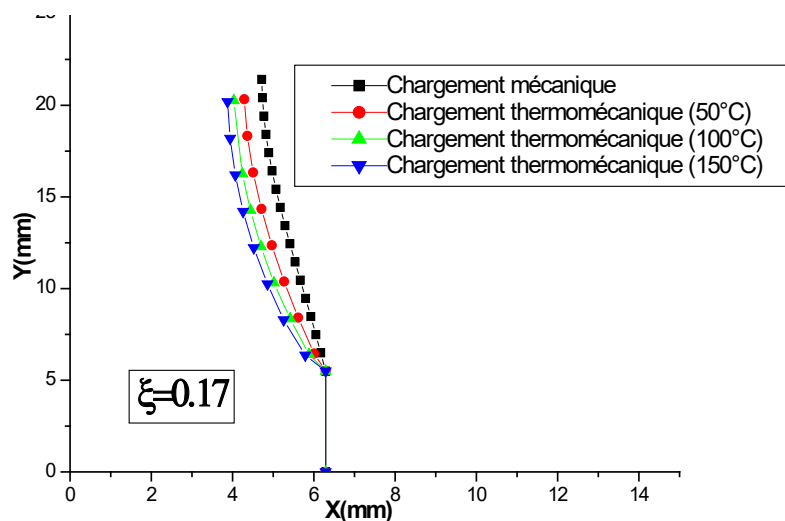


Figure III. 38: Chemins de propagation de fissure en chargement mécanique et thermomécanique pour différentes températures.

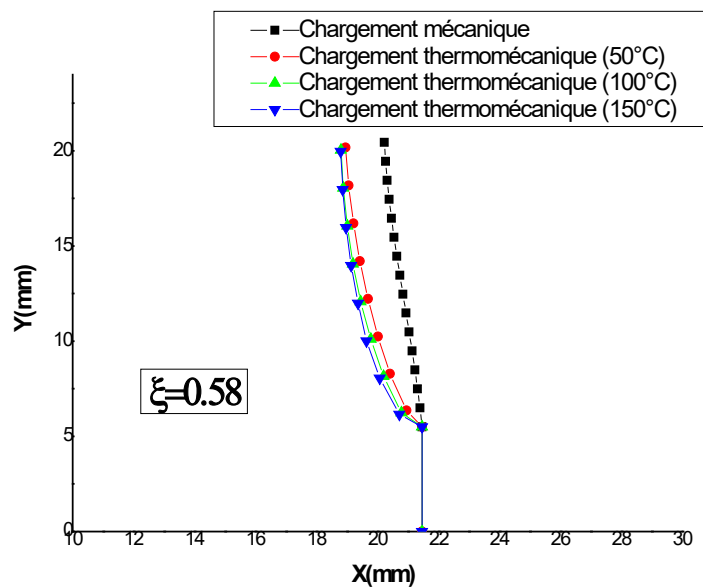


Figure III. 39: Chemins de propagation de fissure sous chargement mécanique et thermomécanique pour différentes températures.

### **III.6. Conclusion**

Dans ce chapitre, une simulation numérique de la propagation de fissures en mode mixte est étudiée pour deux types de chargement : chargement mécanique et chargement thermomécanique. La détermination des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  est faite en utilisant deux techniques : la DET et la DCT, ces deux méthodes sont basées sur le calcul des déplacements au niveau des lèvres de fissure. Un programme spécial a été conçu et intégré dans le code de calcul par éléments finis.

La détermination des angles initiaux de propagation ainsi que les angles de bifurcation tous le long de l'avancement de la fissure sont calculés par l'un des critères de bifurcation expliqués et détaillés dans le chapitre précédent. Ces méthodes ont été modifiées pour les matériaux FGM et implémentées sous forme de programme APDL ANSYS.

Les résultats obtenus ont été comparés avec des travaux numériques et expérimentaux cités dans la littérature. Les algorithmes développés dans cette étude ont montré leur efficacité et leur précision pour reproduire numériquement le processus de propagation de fissure.

Un chargement thermomécanique affecte d'une manière considérable le chemin de propagation d'une fissure. En effet, la fissure en mode mixte dévie de son chemin de propagation sous chargement mécanique. Sous l'effet de la température elle se propage en se dirigeant vers le côté où le coefficient de dilatation thermique est le plus élevé.

## *Chapitre IV*

### *Les paramètres influençant le trajet de propagation*

---

## IV.1 Introduction

Lorsque le chargement ou la géométrie d'une structure n'est pas symétrique par rapport à l'axe de la fissure, la rupture se présente en mode mixte, et la fissure ne se propage pas de façon rectiligne. Il est alors nécessaire d'utiliser des critères de bifurcation, afin de déterminer la nouvelle direction de propagation. De nombreux critères ont été proposés pour déterminer l'angle de bifurcation d'une fissure. Une fois cet angle déterminé, la fissure se propage d'une certaine distance ( $\Delta a$ ). Plus cette distance est petite, et plus on se rapproche de la solution exacte.

La présence de défauts dans les structures affaiblit leur résistance mécanique, peut entraîner leur ruine et être à l'origine de catastrophes graves. Afin d'éviter ces dernières, ingénieurs et scientifiques doivent donc être capables de prédire le comportement des structures fissurées, et d'en garantir l'intégrité. De ce fait, nous avons présenté dans ce chapitre une analyse numérique de l'effet des défauts géométriques sur le trajet final de propagation de fissure dans les matériaux FGM. Cette étude est basée sur l'utilisation des critères de bifurcation les plus efficaces. Les calculs numériques ont été réalisés sur plusieurs exemples, en utilisant le code de calcul par éléments finis ANSYS.

✓ Dans la première partie du travail, des exemples de différents cas sont étudiés, ces exemples contiennent des défauts géométriques qui peuvent influencer le chemin de propagation d'une fissure, tel que les trous ou les cavités. Les résultats obtenus sont comparés avec des résultats disponibles dans la littérature afin de montrer que le modèle numérique utilisé est capable de reproduire avec fiabilité le chemin de propagation de fissure dans le cas des structures complexes.

✓ Dans la deuxième partie, l'effet de la contrainte T-stress sur le chemin de propagation de fissure sera étudié. Ce paramètre ainsi que le terme singulier seront introduits dans un critère de rupture généralisé.

## IV.2 Effet de la discontinuité géométrique

### IV.2.1 Cas d'une plaque pré-fissurée contenant un trou

Représentée ci-dessous, une plaque pré-fissurée contenant un trou, proposée par Rashid [RAS 98]. La plaque contient une cavité circulaire ayant pour but de modifier le champ des contraintes dans la plaque. Le chargement appliqué et les dimensions de la plaque sont illustrés dans la Figure IV. 1

La structure considérée est maillée par des éléments triangulaire, des éléments spéciaux ont été utilisés pour caractériser la singularité en tête de la fissure, illustrés sur la Figure IV. 2, sous les conditions de contraintes planes.

Le module élastique de la plaque FGM est donné par la fonction exponentielle [CHE 00, KIM 02a] :

$$E(x) = E_1 e^{\lambda x}; \quad 0 \leq x \leq w \quad (IV.1)$$

Avec :  $E = E_1$  ( $x = 0$ ),  $E = E_2$  ( $x = w$ ), et  $\lambda = \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$  avec  $E_1 = 1$

Le coefficient de Poisson  $\nu$  est supposé constant ( $\nu=0.3$ ).

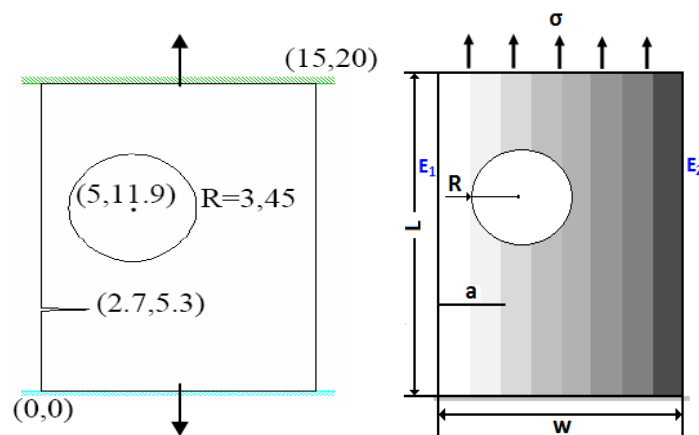


Figure IV. 1: Modèle géométrique de la plaque pré-fissurée contenant un trou.

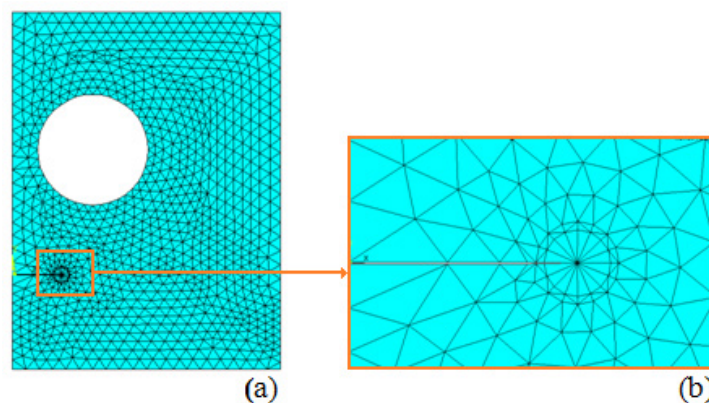
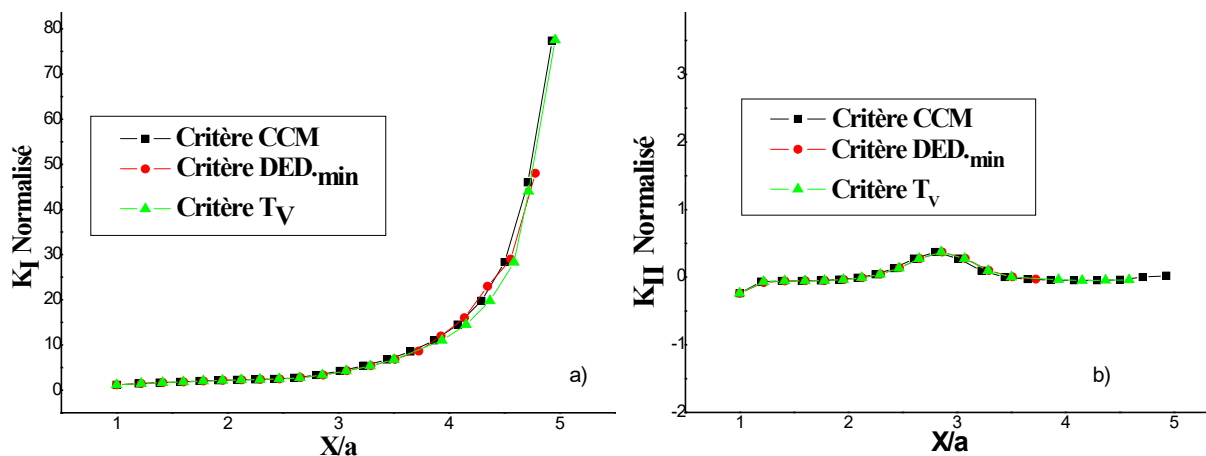


Figure IV. 2: Représentation du maillage de la plaque :

(a) Maillage globale, (b) Maillage détaillé au voisinage de la pointe de fissure.

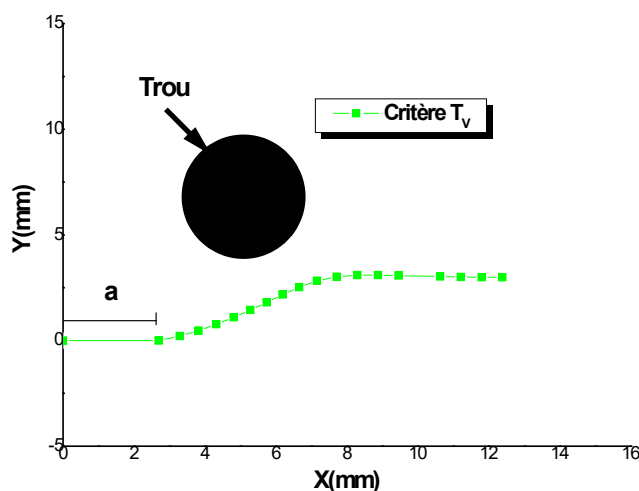
Les courbes tracées sur la Figure IV. 3 (a) et (b) montrent respectivement, l'évolution des facteurs d'intensité de contraintes normalisés ( $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ ) et ( $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$ ) durant l'extension de la fissure, en utilisant le Critère- $T_v$  proposé par Théocaris. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par les critères de bifurcation  $DED_{min}$  et CCM on remarque que le FIC  $K_I$  normalisé prend des valeurs positives, et augmente avec l'extension de la fissure. Les valeurs

$K_{II}$  normalisé sont très faibles comparativement aux valeurs de  $K_I$ , et oscillent autour de zéro. Notons que  $K_{II}$  contribue à la déviation de la fissure durant le processus de propagation.



**Figure IV. 3:** Evolution de  $K_I$  et  $K_{II}$  obtenus durant l'extension de la fissure avec trois critères différents

La Figure IV. 4 montre le chemin de propagation de la fissure obtenus par le critère  $T_v$ . On note que la fissure se propage en direction du défaut, une fois le trou dépassé la fissure se propage en mode I.

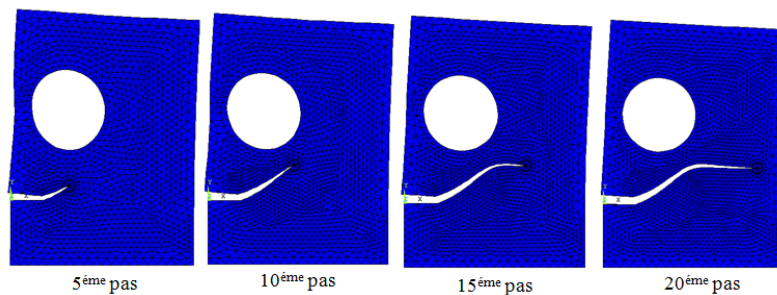


**Figure IV. 4:** Chemins de propagation de la fissure dans une plaque contenant un trou.

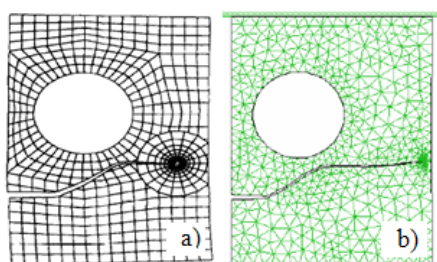
La Figure IV. 5 présente un exemple de l'extension de la fissure au moyen de la technique DET et le critère de bifurcation  $T_v$ .

L'absence de contraintes dans le trou, ainsi que la concentration de contraintes qu'il génère sur ses parois latérales, modifie les contraintes principales en pointe de fissure. La fissure s'oriente donc vers le trou, une fois ce défaut dépassé la fissure se propage horizontalement, en mode I. Ce comportement a été observé par Rashid [RAS 98], Bouchard et al [BOU 00] pour des matériaux homogènes (Figure IV. 6).



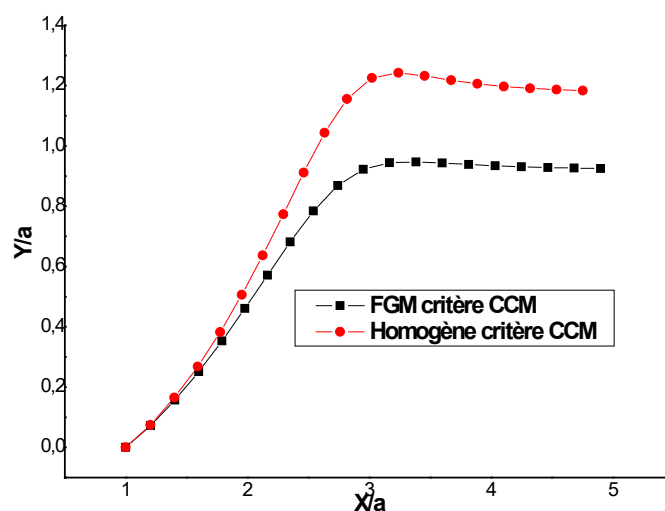


**Figure IV. 5:** Chemin de propagation obtenue par le critère de bifurcation  $T_v$  pour un FGM.



**Figure IV. 6:** Comparaison des chemins de propagation pour une plaque pré-fissurée contenant un trou a) Rashid [RAS 98], b) Bouchard et al. [BOU 00]

La Figure IV. 7 montre une comparaison entre le chemin de propagation de la fissure d'un matériau homogène et un matériau fonctionnellement gradué. La fissure pour les deux matériaux se propage en suivant le même chemin, c'est-à-dire qu'elles se propagent en direction du trou puis une fois le défaut géométrique dépassé la fissure se propage d'une façon rectiligne. La différence constatée de cette comparaison est que la fissure dans le matériau homogène se rapproche plus du trou que celle dans le FGM. Ceci est attribué à la nature physique du matériau FGM, ce comportement a été observé aussi par Ooi et al. [OOI 15].



**Figure IV. 7:** Comparaison du chemin de propagation entre un matériau homogène et FGM.

### IV.2.2 Cas d'une plaque pré-fissurée contenant trois trous

Dans cet exemple, en se basant sur les travaux réalisés par Bittencourt et al. [BIT 96]. Ces auteurs ont effectué une étude expérimentale et numérique d'une fissure dans une poutre homogène en PMMA ayant trois trous, soumise à une flexion trois points, illustré sur la Figure IV. 8.

Pour un matériau FGM on considère la même géométrie de la plaque PMMA avec les propriétés mécaniques représentées sur Figure IV. 9 (a) et (b).

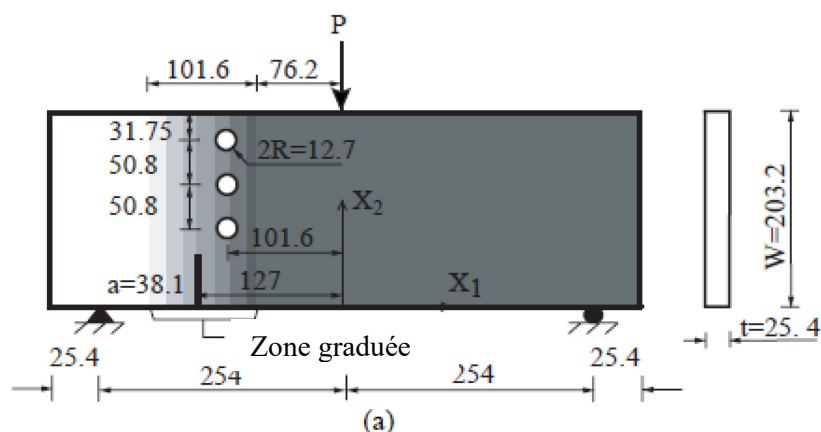


Figure IV. 8: a) Modèle géométrique de la plaque fissurée en FGM contenant trois trous.

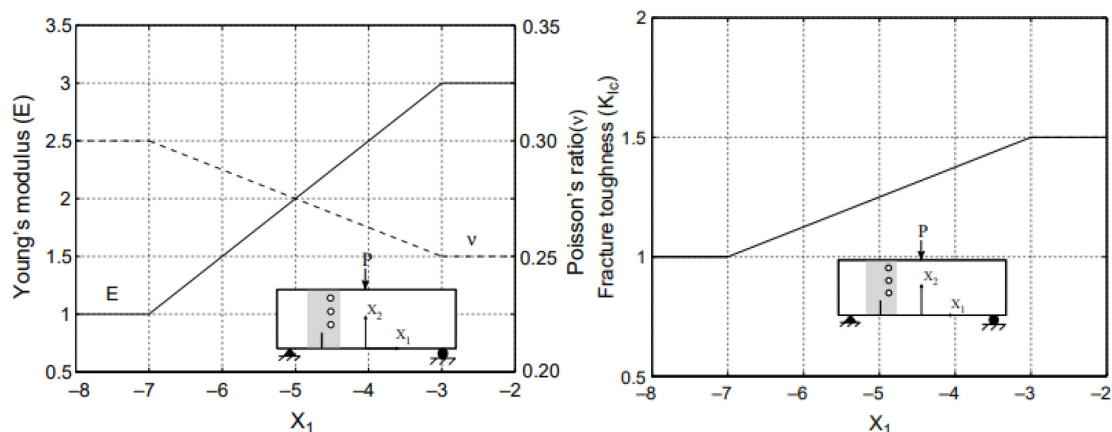
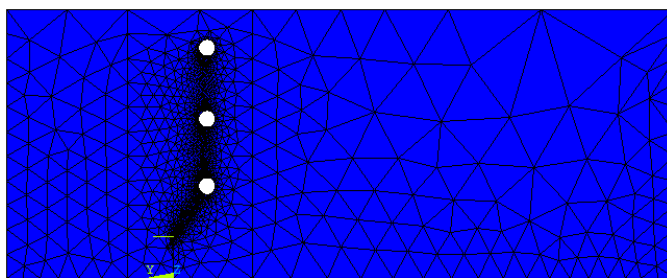
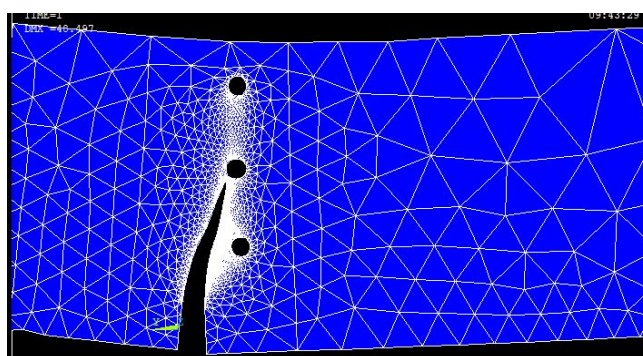


Figure IV. 9: a) Variation des propriétés  $E$  et  $\nu$ , b) Variation du FIC critique  $K_{Ic}$

La structure considérée est maillée par des éléments triangulaire avec des éléments spéciaux en tête de la fissure (Figure IV. 10). La structure est discrétisée en 5098 éléments et 9152 nœuds. Les calculs numériques par éléments finis sont réalisés sous les conditions de contraintes planes. La Figure IV. 11 montre le chemin de propagation de la fissure obtenu par simulation numérique pour le matériau gradué. On peut voir que la fissure se propage en direction du trou du milieu puis cesse de se propager lorsqu'elle atteint son contour.

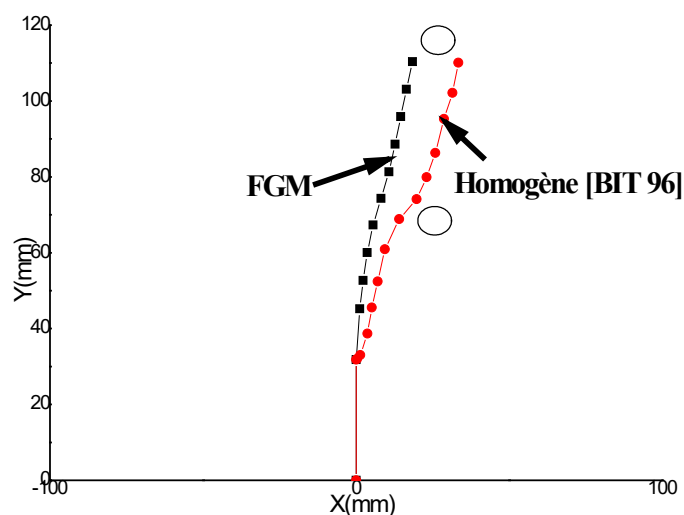


**Figure IV. 10:** Modèle typique du maillage (configuration initiale).



**Figure IV. 11:** Trajet de fissuration obtenu par simulation numérique (matériau FGM).

Sur la Figure IV. 12 une comparaison est présentée entre le trajet de fissuration obtenu expérimentalement pour un matériau homogène [BIT 96] avec les résultats obtenus numériquement par la MEF du matériau FGM.



**Figure IV. 12:** Comparaison du trajet de fissuration entre les matériaux PMMA et FGM.

Une fissure est toujours attirée par un défaut géométrique, ceci est attribué à la dépression de contrainte qui va modifier la contrainte principale maximale de façon à ce que la fissure s'oriente vers ce défaut. Pour le matériau gradué, la fissure se propage en se dirigeant vers le trou du milieu du côté gauche. Ceci est dû au fait que la gradation du matériau est plus faible de ce côté. La fissure continue sa propagation avant d'être piégé par le deuxième trou. Pour le cas du matériau homogène, la propagation de fissure est attirée davantage vers les défauts

géométriques. On peut dire que la dépression au niveau des trous est la cause principale de la déviation du trajet de fissuration.

L'évolution des facteurs d'intensités de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  tracée sur la Figure IV. 13 permet de mieux visualiser la différence entre les chemins de propagation des deux matériaux FGM et homogène. Une comparaison est présentée entre les résultats numériques d'un matériau gradué avec les résultats d'un matériau homogène obtenus par Kim [KIM 04] en utilisant la méthode de l'intégrale d'interaction (ou l'intégrale M).

Les valeurs du facteur  $K_I$  augmente en fonction de l'extension de la fissure pour le FGM.

Les valeurs du facteur  $K_{II}$  oscillent autour de zéro. Une augmentation ou une diminution des valeurs du facteur  $K_{II}$  indique le changement de l'orientation de la fissure, ce changement est bien marqué pour le matériau homogène, lorsque la fissure s'approche du trou

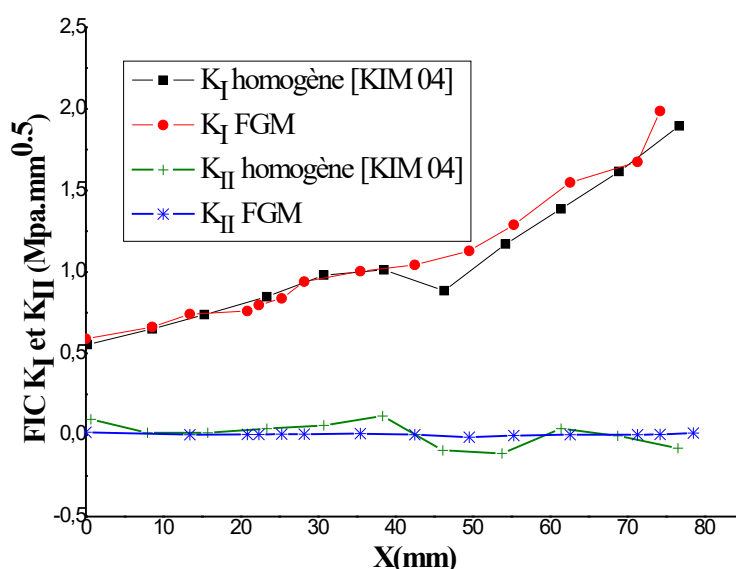
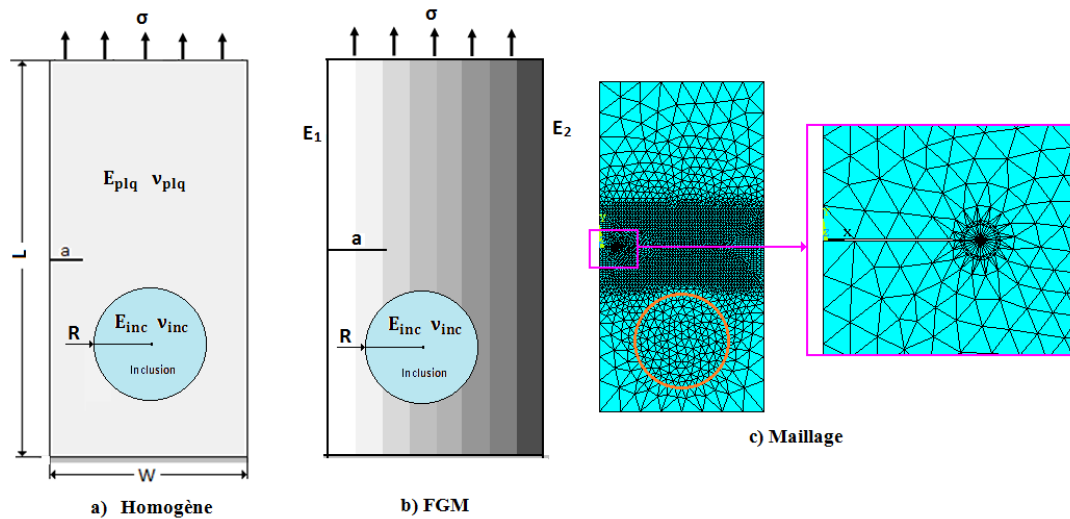


Figure IV. 13: Evolution des FICs  $K_I$  et  $K_{II}$  durant l'extension de la fissure (cas de FGM).

### IV.2.3 Cas d'une plaque fissurée contenant une inclusion

Dans cet exemple, présenté sur la Figure IV. 14 a-b-c, une plaque mince contenant une inclusion, la plaque est fixée sur la partie inférieure et chargée suivant la direction verticale par une traction uni-axiale.

La structure est modélisée par des éléments finis de forme triangulaire avec un maillage raffiné à la pointe de fissure, en considérant un total de 4098 éléments et 8309 nœuds à l'état initial de propagation. La résolution par éléments finis est effectuée sous les conditions de contraintes planes. Les résultats sont calculés par la méthode DCT avec le critère  $T_v$



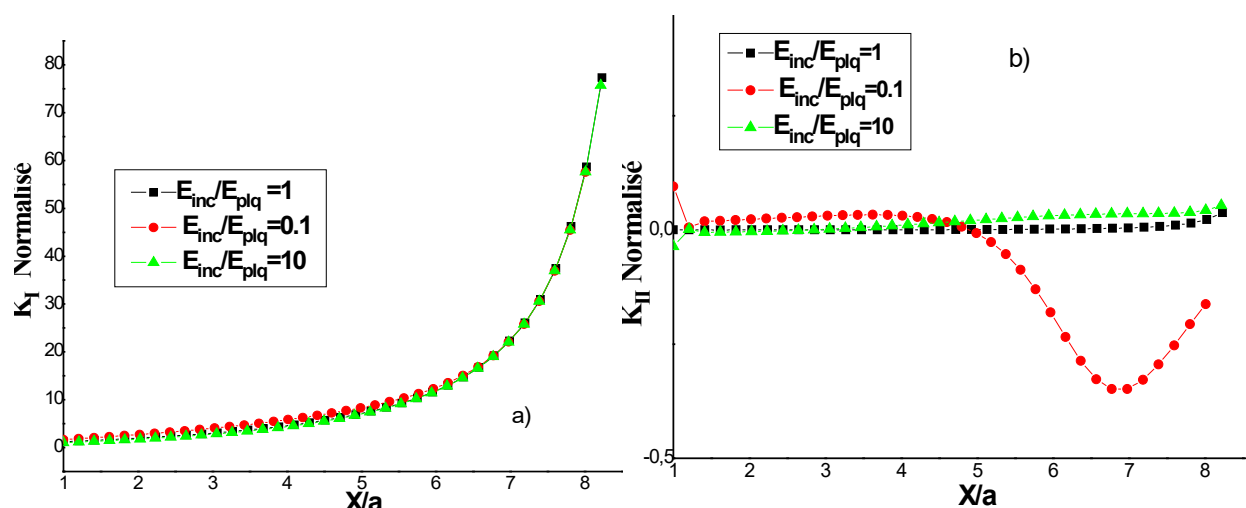
**Figure IV. 14:** Modèle géométrique de la plaque homogène (a) et FGM (b), ainsi que le maillage de la configuration initiale(c).

✓ En première partie un matériau homogène est considéré, ses propriétés mécaniques sont définies comme suit :  $E_{plq} = 72400 \text{ MPa}$ ,  $\nu_{plq} = 0.33$ . L'inclusion présente dans la plaque est caractérisée par son module de Young  $E_{inc}$  et par le coefficient de Poisson  $\nu_{inc} = \nu_{plq}$ .

Afin de montrer l'effet de la présence d'une inclusion sur le chemin de propagation de la fissure, trois rapports de  $E_{inc}/E_{plq} = 1, 0.1$  et  $10$  sont évalués, pour chaque rapport de  $E_{inc}/E_{plq}$  les facteurs d'intensité de contraintes et la direction de bifurcation sont calculés en utilisant le critère CCM en fonction de l'extension de la fissure.

La Figure IV. 15 illustrent l'évolution des FICs normalisés durant l'extension de la fissure. On peut remarquer que :

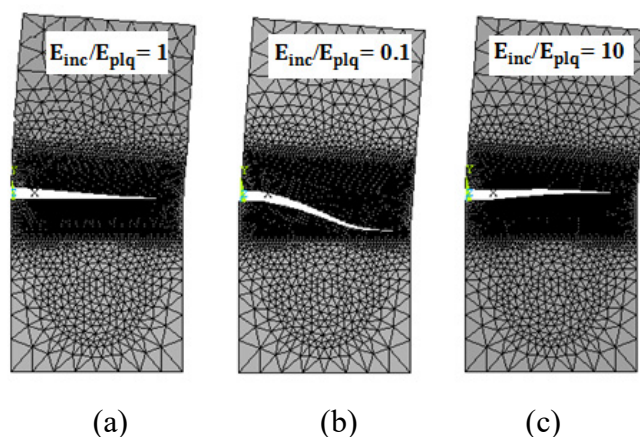
- Les valeurs du FIC  $K_I$  normalisé sont positives, ces valeurs augmentent avec l'extension de la fissure (Figure IV.15a).
- Les valeurs du FIC  $K_{II}$  normalisé sont faibles et oscillent autour de zéro. On note que pour le cas où l'inclusion est moins rigide que le matériau ( $E_{inc}/E_{plq} = 0.1$ ), les valeurs de  $K_{II}$  diminuent lorsque la fissure s'approche de l'inclusion. Ceci peut être interprété par le fait que les valeurs de  $K_{II}$  contribuent à l'orientation de la fissure.



**Figure IV. 15:** Comparaison des résultants de  $K_I$  et  $K_{II}$  obtenus durant la propagation de fissure.

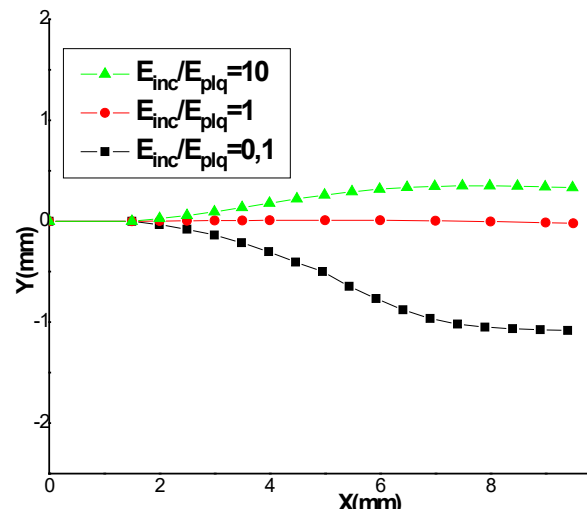
La Figure IV. 16 illustre les trajets de fissuration obtenus pour les trois rapports, on remarque que :

- Lorsque la plaque et l'inclusion ont les mêmes caractéristiques mécaniques ( $E_{inc}/E_{plq} = 1$ ), la fissure se propage horizontalement et adopte le comportement d'un matériau homogène.
- Dans le cas où l'inclusion est moins rigide que la matrice ( $E_{inc}/E_{plq} = 0.1$ ) on retrouve un résultat similaire à celui obtenu pour une plaque pré-fissurée contenant un trou, l'inclusion étant moins rigide, modifie la répartition de contraintes et attire la fissure. Une fois l'inclusion dépassée la fissure se réoriente horizontalement et continue à se propager en mode I.
- Dans le cas où l'inclusion est plus rigide que la matrice ( $E_{inc}/E_{plq} = 10$ ), la fissure est cette fois-ci légèrement repoussée, elle se propage en s'éloignant de l'inclusion.



**Figure IV. 16:** Propagation de fissure dans un matériau homogène contenant une inclusion avec : a)  $E_{inc}/E_{plq} = 1$ , b)  $E_{inc}/E_{plq} = 0.1$ , c)  $E_{inc}/E_{plq} = 10$

Pour mieux visualiser la différence entre les chemins de propagation pour chaque cas, la Figure IV. 17 montre une comparaison des chemins de propagation pour les trois rapports de  $E_{inc}/E_{plq}$ .



**Figure IV. 17:** Chemin de propagation de fissure dans un matériau homogène contenant une inclusion avec :  $E_{inc}/E_{plq} = 1$ , b)  $E_{inc}/E_{plq} = 0.1$ , c)  $E_{inc}/E_{plq} = 10$

Les trajets de fissuration obtenus pour le matériau homogène correspondent bien à celles obtenus par Bordas et Nguyen [BOR 06], Hirshikesh [HIR 19] et Sudhakar et Wall [SUD 17], en utilisant d'autres méthodes numériques.

✓ En deuxième partie, un matériau fonctionnellement gradué contenant une inclusion est considéré. Les propriétés mécaniques de la plaque sont données par :

$$E(X1) = E_1 e^{\beta X1} \quad (IV.1)$$

Avec :  $\beta = \frac{1}{W} \ln \left( \frac{E_2}{E_1} \right)$ ,  $E_1=1$  et  $E_2=10$

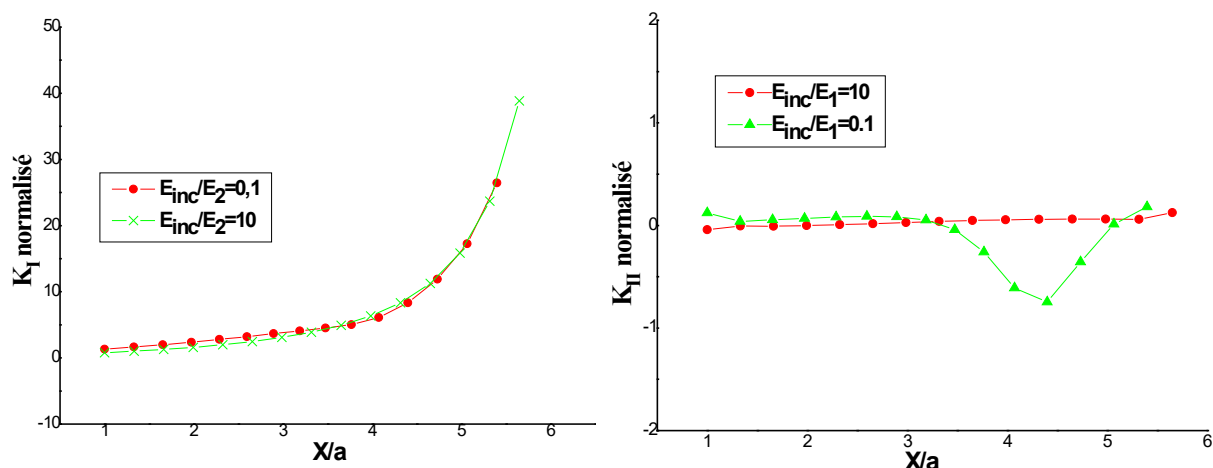
L'inclusion est caractérisée par un coefficient de Poisson  $\nu_{inc} = \nu = 0.3$  et un module de Young  $E_{inc}$ , deux cas sont considérés :

- 1)  $E_{inc} < E_1$  avec  $\frac{E_{inc}}{E_1} = 0.1$
- 2)  $E_{inc} > E_2$  avec  $\frac{E_{inc}}{E_2} = 10$

La Figure IV. 18 présentent l'évolution des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  normalisés ( $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ ) et ( $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$ ), respectivement, pour les deux cas  $E_{inc} < E_1$  et  $E_{inc} > E_2$ .

- Les valeurs du facteur  $K_I$  normalisé sont positives et augmentent en fonction de l'extension de la fissure pour les deux cas étudiés.

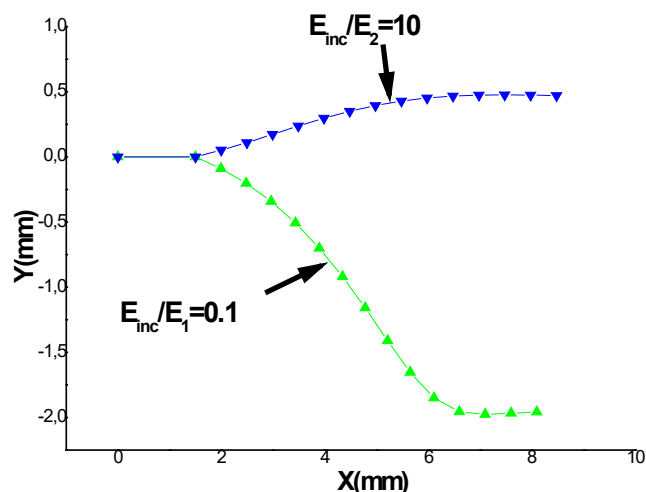
- Les valeurs du facteur  $K_{II}$  normalisé sont faibles et oscillent autour de zéro. Pour le cas où l'inclusion est moins rigide que le matériau FGM les valeurs de  $K_{II}$  diminuent et prennent des valeurs négatives lorsque la fissure s'approche de l'inclusion.



**Figure IV. 18:** Evolution de  $K_I$  et  $K_{II}$  normalisés en fonction de l'extension de la fissure pour  $\frac{E_{inc}}{E_1} = 0.1$  et  $\frac{E_{inc}}{E_2} = 10$ .

Les courbes tracées dans la Figure IV. 19 représentent le chemin de propagation de la fissure pour les deux cas analysés, les résultats montrent que lorsque l'inclusion est moins rigide que le FGM  $E_{inc}/E_1 = 0.1$ , on retrouve un résultat similaire à celui obtenu pour une plaque pré-fissurée contenant un trou : cette inclusion modifie la répartition de contraintes et attire la fissure. Une fois l'inclusion dépassée, la fissure se réoriente horizontalement.

Pour le deuxième cas  $E_{inc}/E_2 = 10$ , l'inclusion est plus rigide que le FGM, on constate donc que la fissure va se propager en marquant un léger éloignement de l'inclusion.



**Figure IV. 19:** Chemin de propagation obtenu par le critère  $T_v$  pour les deux cas  $E_{inc}/E_2 = 0.1$ ,  $E_{inc}/E_2 = 10$ .



#### IV.2.4 Conclusion

Le but de cette partie du travail est de faire une étude numérique sur la propagation de fissure dans une plaque contenant des défauts géométriques tels que les trous et les inclusions. Afin de bien visualiser l'effet de ces défauts géométriques, divers cas et exemples ont été étudiés et comparés. Il a été constaté qu'une fissure est toujours attirée par un défaut géométrique, ceci est attribué à la dépression de contrainte qui va modifier la contrainte principale maximale de façon à ce que la fissure s'oriente vers ce défaut. On peut conclure que la présence de défauts telles que les trous ou les inclusions a une influence significative sur le chemin de propagation de fissure et nous avons pu à travers les algorithmes de programmation développés reproduire ces trajets d'une manière efficace et fiable.

Dans ce qui va suivre, nous présenterons une partie qui s'articule sur l'influence du paramètre T-stress sur le chemin de propagation de fissure dans les matériaux FGM. Ce paramètre sera associé au terme singulier pour être introduits dans un critère de rupture généralisé.

#### IV.3 : Critère de propagation en considérant le terme non singulier :

La caractérisation de la rupture des matériaux nécessite la connaissance des quantités provenant des champs au voisinage d'un défaut ou d'une fissure. La mesure de ces quantités avec précision permet de les comparer avec les propriétés du matériau qui décrivent sa résistance à la rupture. Généralement, le facteur d'intensité des contraintes permet de quantifier la sévérité des contraintes au voisinage d'une fissure. Cependant, le terme non-singulier appelé T-stress a montré son importance à travers les études réalisées auparavant. L'utilisation de l'approche globale à deux paramètres ne cesse de croître et plusieurs chercheurs associent le facteur d'intensité de contrainte au T-stress dans le traitement des problèmes en mécanique linéaire élastique de la rupture. Pour pouvoir appliquer une telle méthodologie, il est important d'avoir des solutions précises pour la détermination des paramètres de rupture au voisinage d'une fissure.

##### IV.3.1 Détermination de la contrainte T-stress

Dans un chargement en mode mixte, il existe un terme singulier correspondant au mode I, ou au mode II ou les deux à la fois. Les méthodes utilisées pour le mode I ne sont donc pas valables pour le cas d'un mode mixte I/II. T-stress peut être déterminé sans l'utilisation des facteurs d'intensité de contraintes quand les propriétés symétriques du mode I et les propriétés antisymétriques du mode II sont utilisées. Les contraintes dans la première moitié de l'éprouvette fissurée sont ajoutées aux contraintes de l'autre moitié. Les contraintes du mode II sont simplifiées et les contraintes du mode I sont doublées. Ce qui donne la possibilité de

déterminer T-stress par les équations suivantes en utilisant l'analyse par éléments fini [AYA 98].

$$T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{\theta=0} \quad (IV.2)$$

$$T = \frac{1}{2} [(\sigma_{xx})_{\theta=-\pi} + (\sigma_{xx})_{\theta=\pi}] \quad (IV.3)$$

$$T = \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{yy}) \right)_{\theta=-(\pi/3)} + \left( \sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{yy}) \right)_{\theta=\pi/3} \right] \quad (IV.4)$$

$$T = \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{yy}) \right)_{\theta=-(\pi/2)} + \left( \sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{yy}) \right)_{\theta=\pi/2} \right] \quad (IV.5)$$

$$T = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{\theta=-(2\pi/3)} + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{\theta=2\pi/3} \right] \quad (IV.6)$$

Il est pratique d'utiliser l'équation IV.3 puisqu'une seule composante de contrainte est utilisée.

Une manière plus efficace pour déterminer T-stress sans avoir recours à un maillage très raffiné est l'utilisation de la méthode des déplacements. La loi de Hook pour les petites déformations peut être écrite comme suit:

$$\sigma_{xx} = E' \varepsilon_{xx} = E' \frac{du_x}{dx} \quad (IV.7)$$

Où :  $\varepsilon_{xx}$  et  $u_{xx}$  sont respectivement la déformation et le déplacement parallèles à la fissure et  $E'$  est défini en contrainte plane comme  $E' = E$  et en déformation plane comme  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ .

Où :  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

En utilisant l'équation (IV.7) pour les lèvres de la fissure, T-stress peut être déterminé :

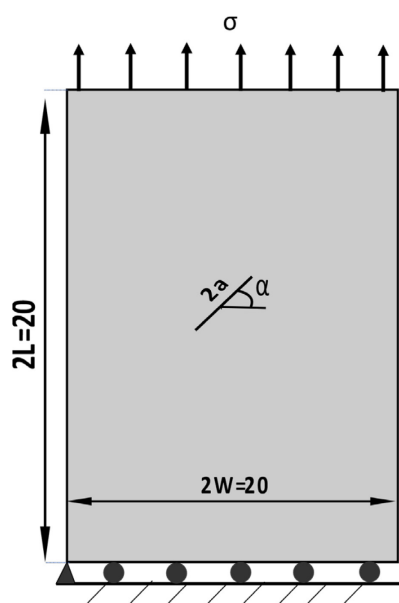
$$T = \frac{1}{2} E' \left( \left( \frac{du_x}{dx} \right)_{\theta=-\pi} + \left( \frac{du_x}{dx} \right)_{\theta=\pi} \right) \quad (IV.8)$$

Afin de valider notre modèle numérique sur la détermination de la contrainte T, l'exemple suivant est considéré

#### IV.3.1.1 Cas d'une éprouvette plate homogène contenant une fissure inclinée :

Dans cette partie du travail, une plaque homogène contenant une fissure de longueur (a) est étudiée (Figure IV. 20), plusieurs angles d'inclinaison de la fissure ( $\alpha$ ) sont considérés, la plaque est chargée en traction sous des conditions de contrainte plane. Les propriétés mécaniques de la plaque sont [KIM 03]:  $E=1.0$  unité,  $\nu=0.3$ .

L'angle ( $\alpha$ ) varient entre  $0^\circ$  et  $70^\circ$  ( $0^\circ$  ou la fissure est à l'horizontale).



**Figure IV. 20:** Eprouvette plate contenant une fissure inclinée en matériau homogène.

Le tableau IV.1 liste les résultats des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  ainsi que le paramètre T-stress obtenus dans la présente étude, comparés aux résultats obtenus numériquement par KIM [KIM 03] et analytiquement par Smith [SMI 01]

D'après les résultats obtenus, on peut dire que le modèle numérique développé pour le calcul et la détermination du paramètre T-stress ainsi que les composantes du terme singulier  $K_I$  et  $K_{II}$  donne de bons résultats ce qui nous permet de le valider pour la suite du travail.

**Tableau IV. 1:** Calcul des paramètres  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $T$  en fonction des angles d'orientation  $\alpha$

$\alpha$ (°)	Présente étude			KIM [KIM 03]			Solution analytique [SMI 01]		
	$K_I$	$K_{II}$	$T$	$K_I$	$K_{II}$	$T$	$K_I$	$K_{II}$	$T$
0	1.797	0.00	-1.079	1.788	0.00	-1.007	1.772	0.00	-1.00
10	1.731	0.334	-1.015	1.735	0.304	-0.947	1.719	0.303	-0.939
20	1.544	0.622	-0.830	1.581	0.571	-0.773	1.565	0.569	-0.766
30	1.269	0.825	-0.550	1.343	0.771	-0.508	1.329	0.767	-0.500
40	0.946	0.925	-0.211	1.052	0.878	-0.179	1.040	0.872	-0.173
50	0.621	0.917	0.138	0.741	0.878	0.167	0.732	0.872	0.173
60	0.331	0.811	0.451	0.448	0.773	0.493	0.443	0.767	0.500
70	0.107	0.627	0.677	0.210	0.574	0.759	0.207	0.569	0.766

### IV.3.2 Influence de la contrainte T-stress sur l'angle initial de propagation :

Pour prédire le chemin de propagation d'une fissure, il est nécessaire de connaître son angle initial de propagation. En se basant sur le critère de la contrainte circonférentielle maximale (CCM), l'angle d'initiation de la fissure peut être déterminé.

Et vu l'importance du paramètre T-stress dans la description du comportement d'une fissure, il est nécessaire d'élargir notre champ d'étude et d'introduire ce paramètre dans un critère plus généralisé qui considère le deuxième paramètre du développement asymptotique.

Le champ de contrainte suivant les coordonnées polaires peut être écrit comme suit :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \times \left[ K_I \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left( \frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \theta + O(r^{1/2}) \quad (\text{IV.9})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}) \quad (\text{IV.10})$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] - T \sin \theta \cos \theta + O(r^{1/2}) \quad (\text{IV.11})$$

Où  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{r\theta}$  sont les contraintes en coordonnées polaires, les termes d'ordre supérieur peuvent être négligés au voisinage de la fissure.

On peut déterminer l'angle initial de propagation par le critère généralisé de la contrainte circonférentielle maximale (CCM<sub>G</sub>) selon les conditions :

$$\sigma_{\theta} > 0, \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 \sigma_{\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\text{IV.12})$$

Dans la partie suivante, une analyse de l'angle initial de propagation de fissure est effectuée avec deux critères CCM et le critère généralisé CCM<sub>G</sub> qui prend en considération le paramètre T-stress. Des exemples variés sont considérés.

#### IV.3.2.1 Cas d'une éprouvette plate en FGM contenant une fissure inclinée

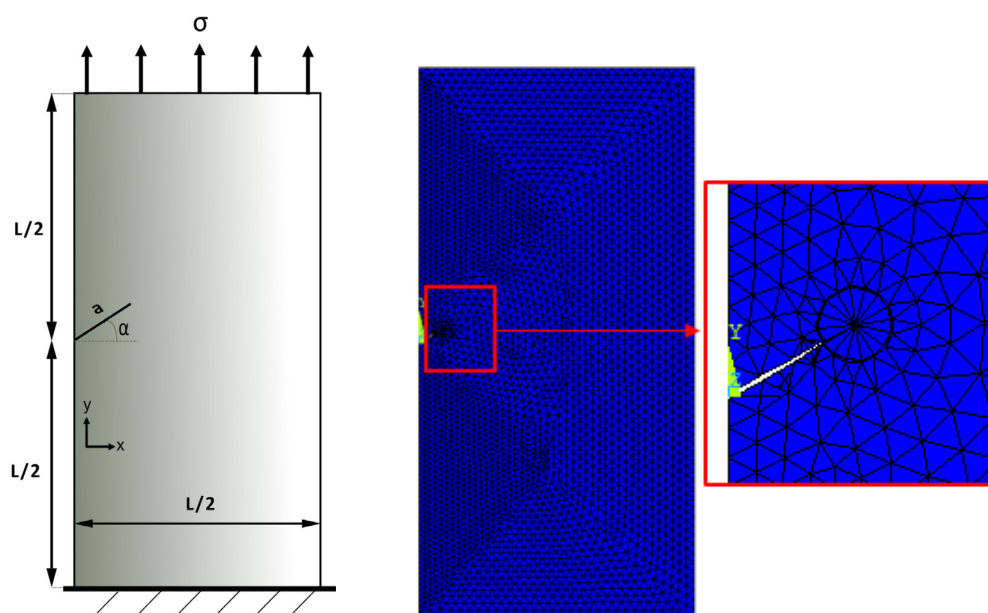
Dans cette partie, une plaque FGM contenant une fissure inclinée par rapport à l'axe horizontal est considérée. Différentes inclinaisons de fissure ont été simulées ( $\alpha$  de 0 à 70°). Un sous-programme a été conçu spécialement pour la détermination des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  ainsi que le paramètre T-stress par les méthodes citées plus haut.

L'angle initial de bifurcation a été déterminé avec les critères CCM et CCM<sub>G</sub> intégrés aussi dans le code de calcul par éléments finis sous forme de programme en langage APDL.

Il faut noter que dans cet exemple, la gradation du matériau est faite suivant l'axe  $\vec{X}$  (Figure IV. 21) selon la relation :

$$E(X) = E_1 e^{\beta X} \quad (\text{IV.13})$$

Avec :  $\beta = 0.5$ ,  $E_1 = 1$  et  $\nu$  est supposé constant ( $\nu = 0.3$ ). [KIM 03]



**Figure IV. 21:** Eprouvette plate en FGM contenant une fissure inclinée.

La Figure IV. 22 illustre la prédiction de l'angle initial de propagation  $\theta$  en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure. Les résultats obtenus en utilisant le critère classique CCM ont été comparés à ceux obtenus en utilisant le critère généralisé CCM<sub>G</sub>.

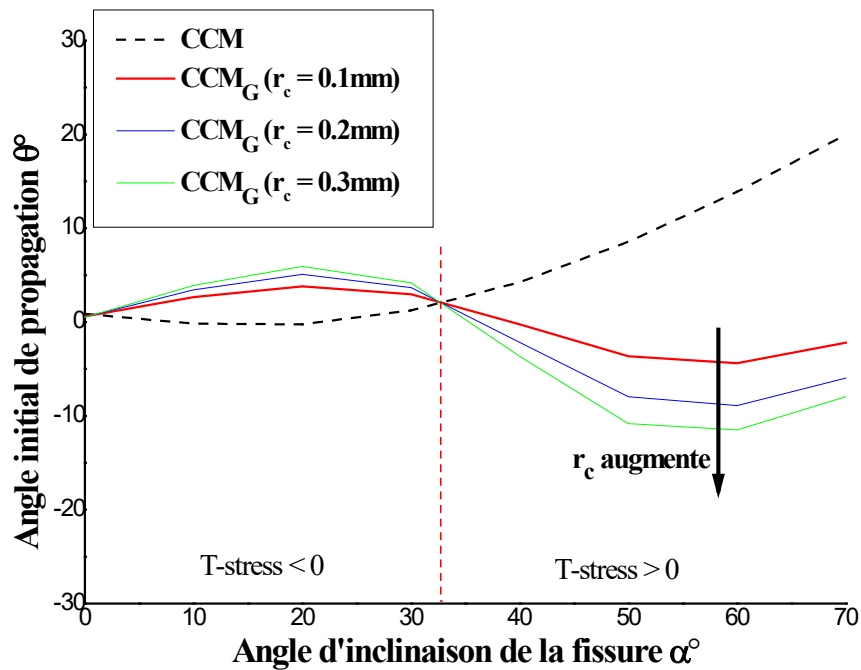
La distance critique par rapport à la pointe de la fissure est définie par le rayon critique  $r_c$ , ce dernier représente approximativement la taille de la zone d'endommagement pour la plupart des matériaux fragiles et quasi-fragiles. [AYA 07].

$$r_c = \frac{\pi}{2} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 \quad (\text{IV.14})$$

Avec  $K_{IC}$  et  $\sigma_t$ , le facteur d'intensité de contrainte critique et la résistance à la traction respectivement.

On peut diviser les résultats en deux parties ; la première partie ou l'angle initial prédit par le critère généralisé augmente par rapport à celui du critère classique CCM lorsque  $\alpha < 33^\circ$ . La deuxième partie des résultats ou l'angle d'inclinaison de la fissure  $\alpha > 33^\circ$ , l'angle de bifurcation obtenu par le critère généralisé diminue.

Cela veut dire que l'angle de bifurcation est directement influencé par le terme non singulier. Les valeurs négatives de T-stress augmentent l'angle initial de propagation, tandis que des valeurs positives de T-stress le diminuent. Ceci confirme que la prise en compte du terme non singulier peut influencer les résultats obtenus et donc influencer le chemin de propagation de la fissure en général.

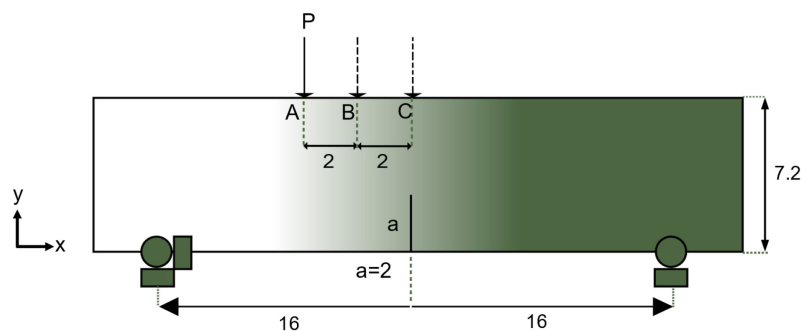


**Figure IV. 22:** Influence du paramètre  $T$ -stress sur l'angle d'initiation de la fissure pour une éprouvette plate contenant une fissure inclinée.

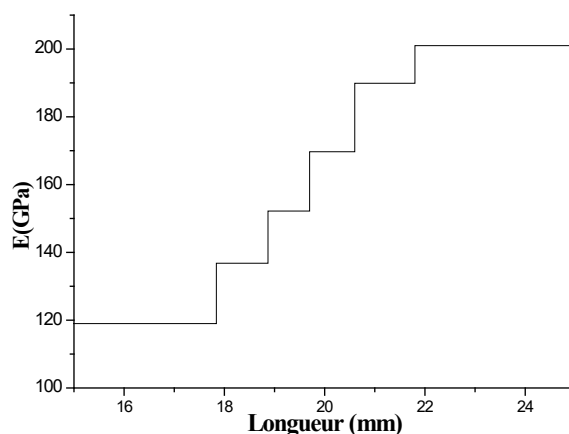
#### IV.3.2.2 Cas d'une éprouvette pré-fissurée sollicitée en flexion trois points

Nous avons considéré pour cette éprouvette un matériau à gradient fonctionnel dont la gradation est supposée linéaire suivant l'axe  $\vec{x}$  (Figure IV. 24). L'éprouvette est sollicitée par une force appliquée dans l'une des trois positions A ou B ou C selon la configuration illustrée dans la Figure IV. 23

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus dans la littérature. On peut dire que les calculs réalisés présentent des résultats très fiables.



**Figure IV. 23:** Présentation de l'éprouvette avec les conditions aux limites.

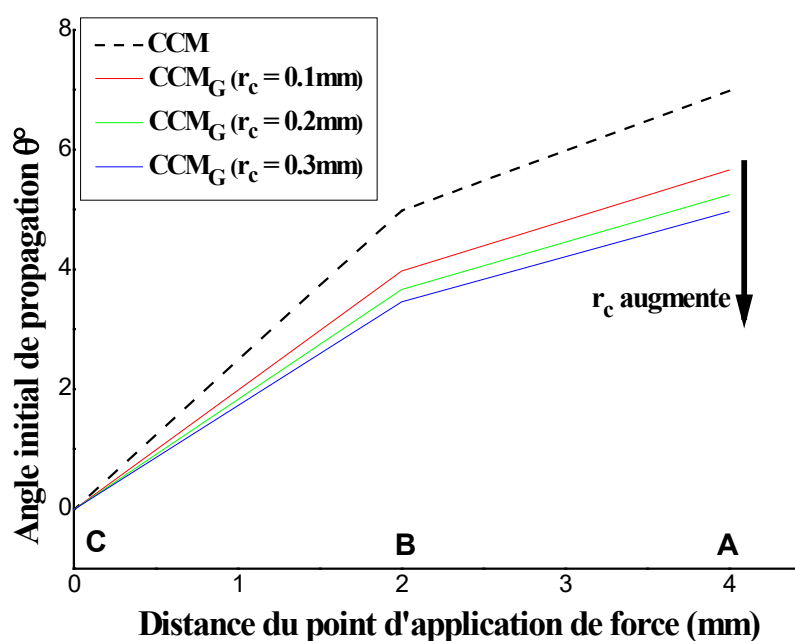


**Figure IV. 24:** Variation du module de Young.

La Figure IV. 25 illustre la prédiction de l'angle initial de propagation de la fissure  $\theta$  en fonction de la distance du point d'application de la force (A, B et C).

Les résultats obtenus en utilisant le critère classique CCM ont été comparés à ceux obtenus en utilisant le critère généralisé CCM<sub>G</sub>. Ce dernier prend non seulement l'effet du terme singulier sur la propagation de la fissure mais aussi l'effet du terme non singulier T-stress.

On remarque que lorsque le chargement est en mode I pure, l'influence du T-stress n'est pas significative et l'angle initial de propagation prédit par les deux critères est presque identique. Dès que le mode de chargement passe en mode mixte, l'influence du T-stress sur l'angle de bifurcation apparaît. On peut remarquer une déviation de ce dernier par rapport à l'angle prédit par le critère CCM.



**Figure IV. 25:** Influence du paramètre T-stress sur l'angle d'initiation de la fissure en flexion 3 points.

On note qu'un chargement en flexion trois points ne permet pas d'avoir une combinaison en mode mixte I+II dont le paramètre du mode mixte  $M^e$  tend vers zéro (mode II pur). Ce dernier est défini comme étant un paramètre qui représente les différentes combinaisons entre le mode I et le mode II) [SMI 01]. Les valeurs de  $M^e$  varient entre 1 (mode I pur) et 0 (mode II pur

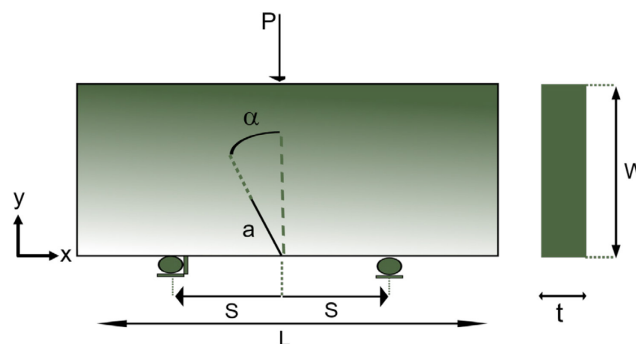
$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right) \quad (\text{IV.15})$$

Cependant, la différence dans la prédiction de l'angle initial de propagation entre les deux critères CCM et CCM<sub>G</sub> existe.

### IV.3.2.3 Cas d'une éprouvette de flexion trois points contenant une fissure inclinée

Dans cette partie, une éprouvette contenant une fissure inclinée soumise à une charge de flexion symétrique en trois points a été examinée. Pour une étude en rupture en mode mixte le rapport longueur/largeur et la distance des appuis sont considérés petits comparés à ceux des autres types d'éprouvettes de flexion conventionnelles. Les paramètres de rupture à la pointe de la fissure à savoir les facteurs d'intensité de contrainte et la contrainte T-stress ont été calculés numériquement pour cette éprouvette en utilisant une série d'analyses par éléments finis. Il a été démontré que l'éprouvette est capable de produire des combinaisons complètes des modes I et II, y compris le mode II pur ainsi que des modes mixtes I+II.

La Figure IV. 26 illustre les détails de la géométrie proposée par Mousavi [MOU 19], et la configuration du chargement en flexion trois points pour l'éprouvette courte contenant une fissure inclinée qui est suggérée ici pour étudier le problème de rupture en mode mixte I+II. Contrairement aux autres éprouvettes conventionnelles, le rapport  $L/W$  de celle-ci ne dépasse pas 3. Par conséquent, cette éprouvette de petite taille réduit la quantité de matériau nécessaire pour la préparation des échantillons et peut donc être considérée comme une géométrie favorable pour les essais de rupture des matériaux coûteux ou peu disponibles.



**Figure IV. 26:** Eprouvette de flexion 3 points contenant une fissure inclinée

L'éprouvette est défini comme suit :  $L = 36$  mm,  $W = 12$  mm et  $t = 4$  mm. Différentes combinaisons de  $(a/W) = (0.3, 0.4$  et  $0.5)$ ,  $(S/W) = (0.5, 0.6$  et  $0.75)$  sont considérées, ainsi que

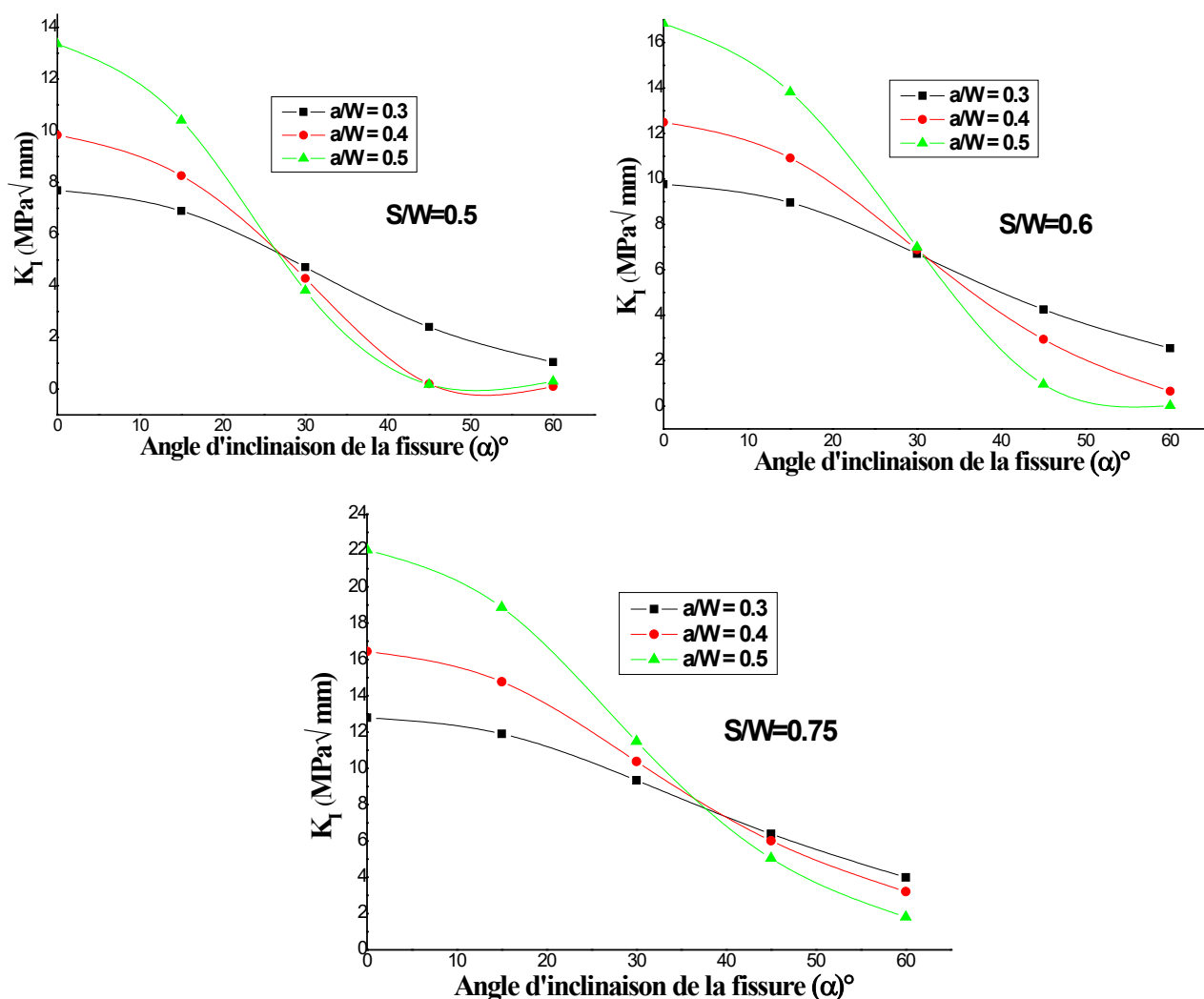


l'angle d'inclinaison de la fissure  $\alpha$  qui varie de zéro  $0^\circ$  jusqu'à  $60^\circ$ . La gradation du matériau est supposée linéaire suivant l'axe ( $\vec{y}$ ) (Figure IV. 24).

En modifiant la géométrie et les paramètres de chargement tels que  $S$ ,  $a$ ,  $W$  ainsi que l'angle d'inclinaison de la fissure  $\alpha$ , l'état du mode mixte au fond de la fissure de l'éprouvette serait modifié et par conséquent, on s'attend à ce que différentes combinaisons de déformations seront engendrées dans cette éprouvette.

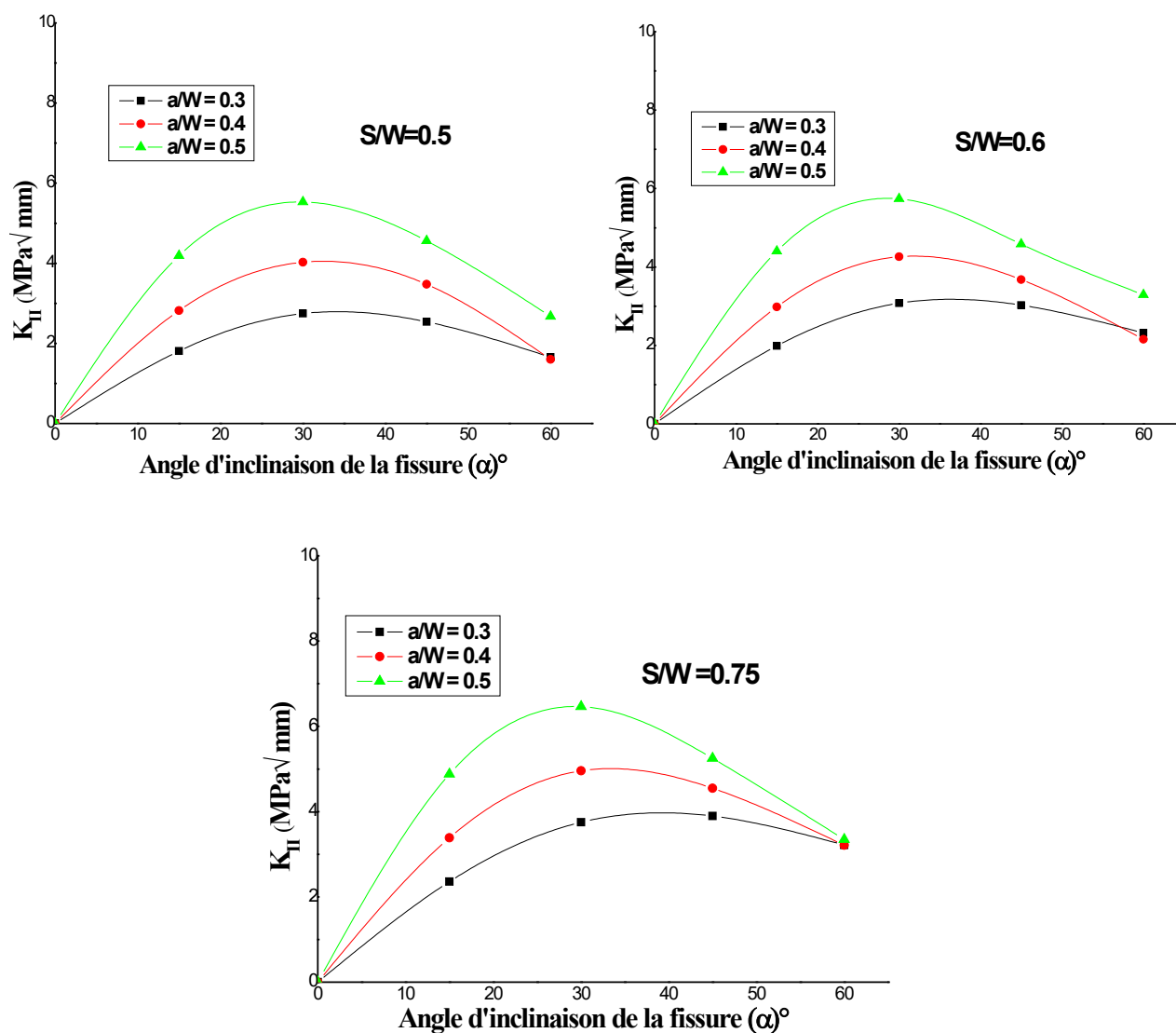
Les Figure IV. 27 et Figure IV. 28 représentent l'évolution des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ) pour différents rapports de  $a/W$  ainsi que le rapport  $S/W$ .

A partir des figures on remarque que la valeur de  $K_{II}$  est toujours nulle lorsque l'angle d'inclinaison de la fissure  $\alpha = 0^\circ$  ce qui correspond au mode I pur et ce, pour tous les rapports  $S/W$  et  $a/W$ . Cependant, pour des valeurs non nulles de  $\alpha$ , l'influence du FIC des modes I et II est observée simultanément en pointe de la fissure de l'éprouvette.



**Figure IV. 27:** Evolution du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  en fonction de l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ) pour différents rapports de  $a/W$  et  $S/W$ .

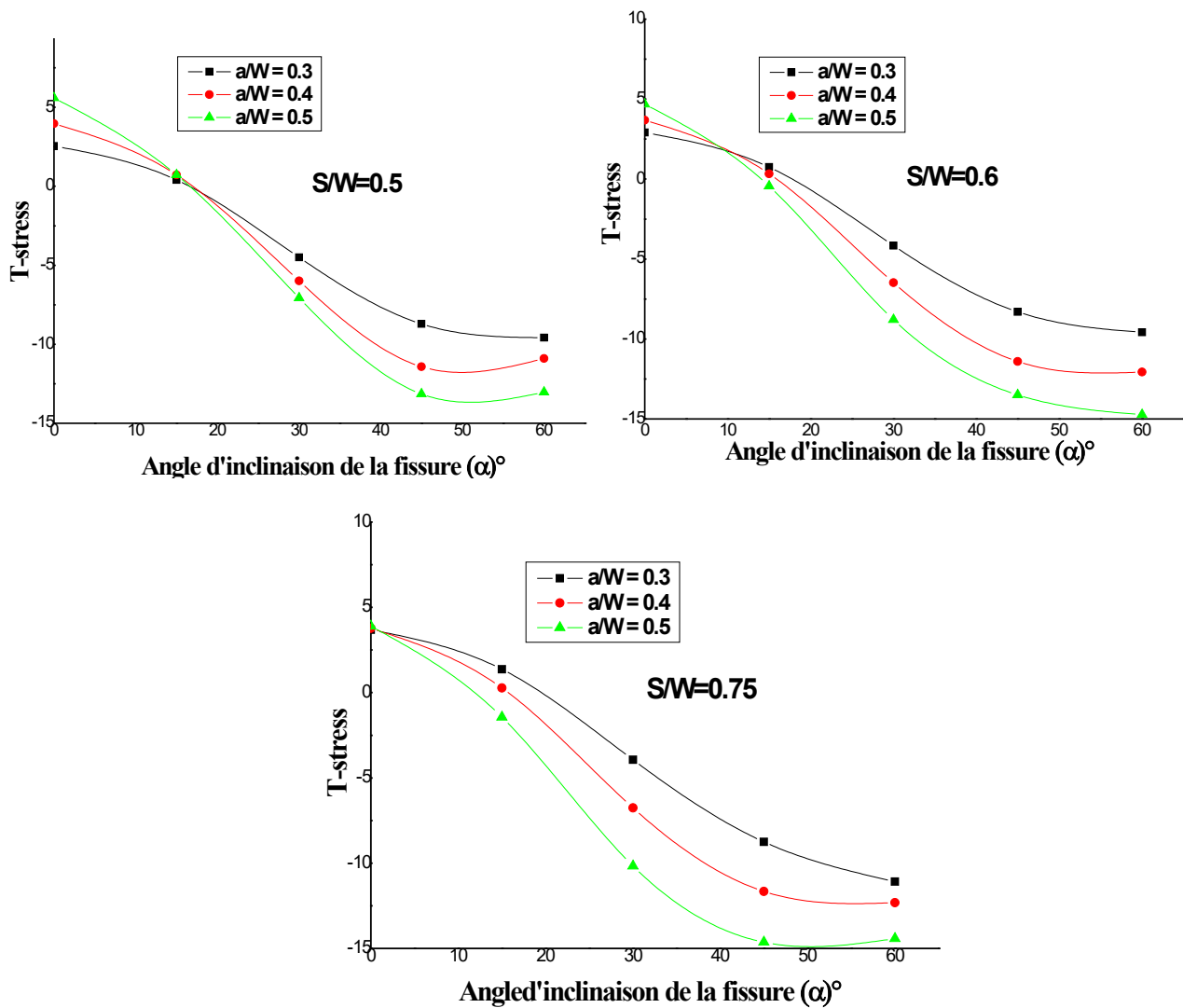
En augmentant l'angle d'inclinaison de la fissure, l'amplitude du FIC en mode I diminue et inversement la valeur du FIC en mode II devient plus grande. Par conséquent, à un angle  $\alpha$  spécifique et pour tous les rapports de  $a/W$  et  $S/W$ , le mode II pur est atteint. Cela démontre que l'éprouvette SBB (Short bend beam) peut produire des combinaisons de mode I et de mode II ainsi que le mode mixte simplement en choisissant des valeurs appropriées pour les paramètres  $a/W$ ,  $S/W$ .



**Figure IV. 28:** Evolution du facteur d'intensité de contrainte  $K_{II}$  en fonction de l'angle d'inclinaison ( $\alpha$ ) pour différents rapports de  $a/W$  et  $S/W$ .

L'évolution du terme non singulier T-stress pour différentes conditions de géométrie et de chargement est présentée dans la Figure IV. 29. Il est montré que généralement en augmentant soit le rapport de longueur de fissure  $a/W$ , le rapport  $S/W$  ou l'angle d'inclinaison de la fissure, le T-stress prend une allure décroissante avec des valeurs positives dans la première partie puis des valeurs négatives non négligeables. Ces valeurs montrent l'importance considérable du T-stress dans le comportement en rupture en mode mixte I+II. L'amplitude et le signe de la

contrainte transversale dépend de la géométrie et des conditions de chargement de l'éprouvette. Ainsi, la valeur significative du T-stress et son influence pour cette éprouvette pour différentes inclinaisons de fissure est prouvée dans la partie suivante ou une comparaison de l'angle initial de propagation est présentée en utilisant un critère de propagation classique et un critère généralisé avec la prise en compte du T-stress.



**Figure IV. 29:** Evolution de T-stress en fonction de l'angle ( $\alpha$ ) pour différents  $a/W$  et  $S/W$ .

Les Figure IV. 30 Figure IV. 31 Figure IV. 32 illustre la prédiction de l'angle initial de propagation  $\theta$  en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure  $\alpha$ . Différents rapports  $a/W$  et  $S/W$  ont été pris en considération. Les résultats obtenus en utilisant le critère classique  $CCM$  ont été comparés à ceux obtenus en utilisant le critère généralisé  $CCM_G$ .

Selon les résultats, on peut diviser l'évolution des courbes en deux parties. La première partie ou l'angle d'initiation de la fissure obtenu par le critère généralisé est plus faible par rapport à celui obtenu par le critère  $CCM$ , cette différence est attribuée aux valeurs positives du T-stress. On peut dire que dans cette partie le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  est le paramètre

dominant dans le processus de propagation de fissure. Au-delà, l'angle initial de propagation prédit par le critère généralisé devient plus grand par rapport à celui obtenu par le critère  $CCM$  à cause de l'influence des valeurs négatives du T-stress. Dans cette partie, la valeur du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  diminue et celle de  $K_{II}$  augmente ce qui se traduit par un passage en mode mixte et par une compétition entre les modes d'ouverture et de cisaillement avec une dominance considérable de ce dernier lorsque l'angle d'inclinaison de la fissure augmente.

Il existe un angle d'inclinaison de la fissure spécifique noté  $\alpha_T$  qui marque le passage et le changement de signe du T-stress d'une valeur positive à une valeur négative. La valeur de cet angle dépend de la géométrie et de la configuration de l'éprouvette. On remarque que dans ce point d'intersection entre les courbes, l'absence de l'influence de T-stress sur les résultats de l'angle d'initiation de la fissure  $\theta$  obtenus par les critères  $CCM$  et  $CCM_G$ , ceci est attribué à la valeur nulle du T-stress.

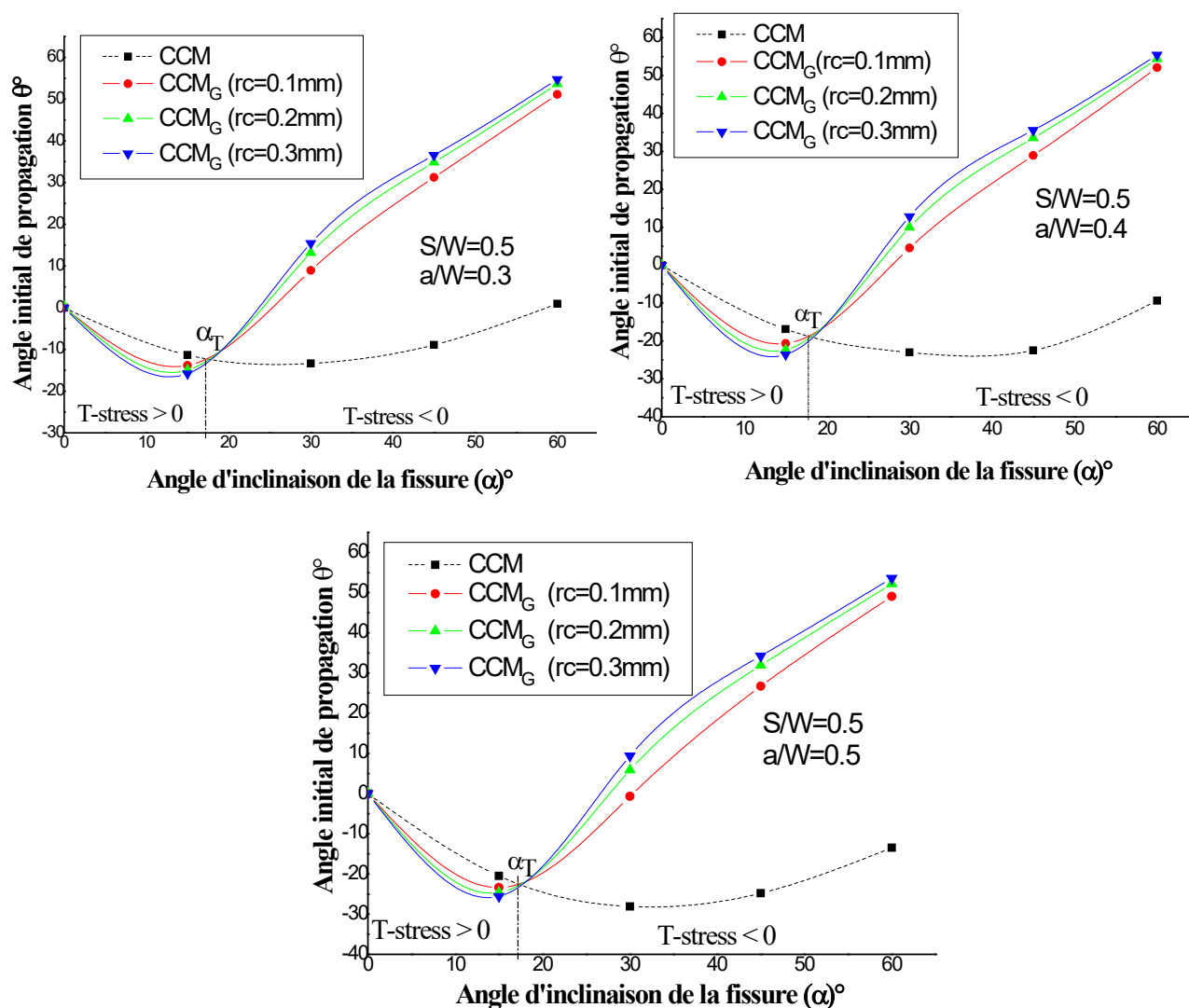


Figure IV. 30: Comparaison de l'angle initial de propagation  $\theta$  en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure  $\alpha$  entre le critère  $CCM$  et  $CCM_G$  ( $S/W=0.5$ ).

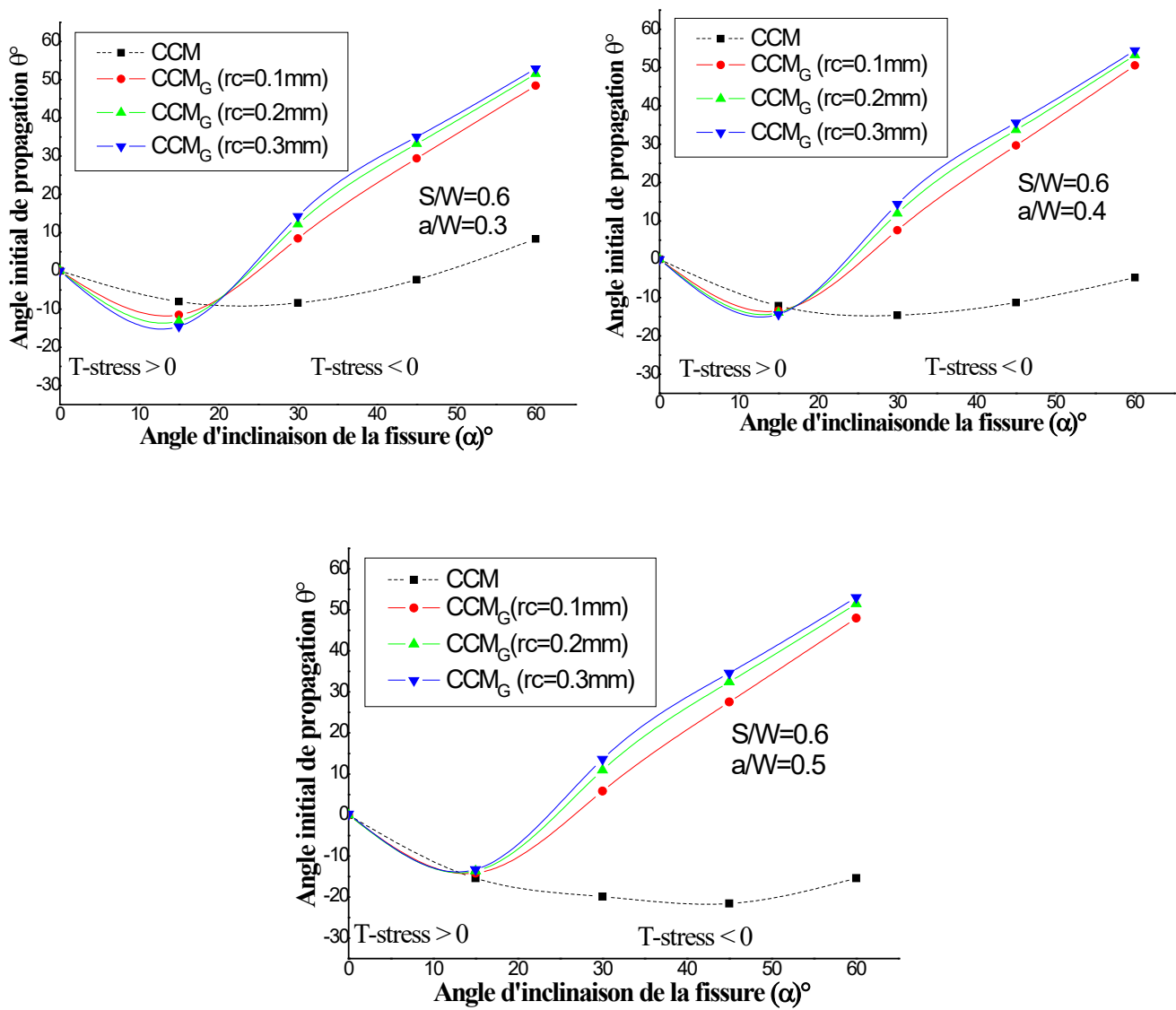


Figure IV. 31: Comparaison de l'angle initial de propagation  $\theta$  en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure  $\alpha$  entre le critère CCM et CCM<sub>G</sub> ( $S/W=0.6$ )

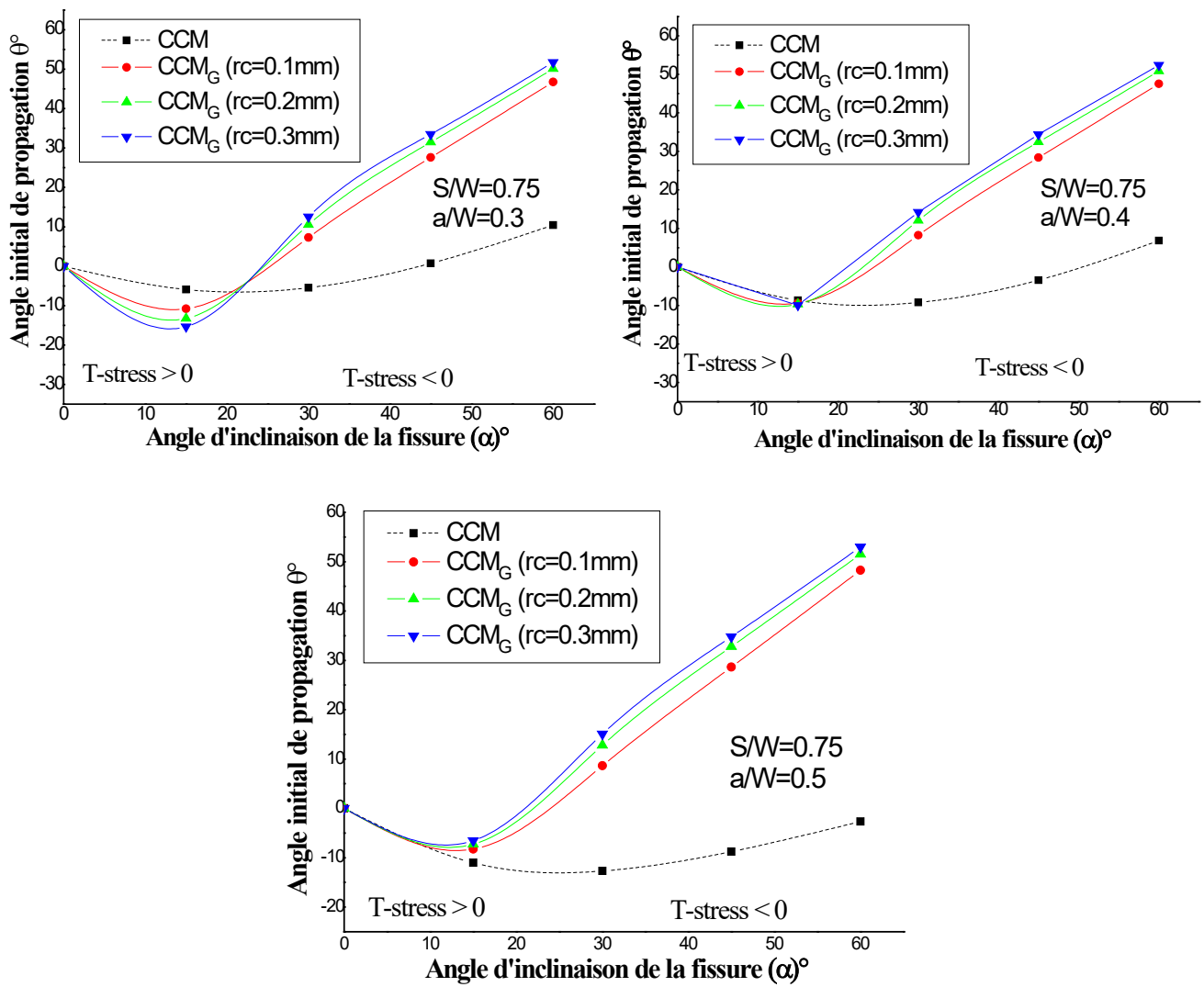


Figure IV. 32: Comparaison de l'angle initial de propagation  $\theta$  en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure  $\alpha$  entre le critère CCM et CCM<sub>G</sub> ( $S/W=0.75$ )

**IV.4 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse numérique de l'effet des différents paramètres qui influencent le trajet de la propagation des fissures dans les matériaux FGM.

Dans la première partie, nous avons étudié l'effet des défauts géométriques sur le trajet final de propagation de fissure. Cette étude était basée sur la détermination des facteurs d'intensité de contrainte et l'utilisation des différents critères de bifurcation. Plusieurs modèles géométriques ont été considérés afin de visualiser l'effet des défauts tels que les trous ou les inclusions sur le trajet de fissuration. Nous avons conclu qu'une fissure est toujours attirée par un défaut géométrique, ce qui est attribué à la dépression de contrainte qui va modifier la contrainte principale maximale de façon à ce que la fissure s'oriente vers ce défaut. Nos résultats ont été comparés avec d'autres travaux numériques et expérimentaux et nous pouvons dire que les techniques de programmation développées dans ce travail peuvent reproduire d'une manière fiable un chemin de propagation de fissure en présence de défauts géométriques dans les matériaux FGM.

Dans la deuxième partie, nous avons présenté une étude qui s'articule sur l'influence du paramètre T-stress sur le chemin de propagation de fissure dans les matériaux FGM. A l'aide d'un sous-programme en langage APDL, nous avons déterminé l'évolution du T-stress pour plusieurs modèles géométriques et nous l'avons associé au terme singulier pour être introduits dans un critère de rupture généralisé. Les résultats ont été comparés à ceux d'un critère local (CCM) qui prend en considération seulement le terme singulier. Il a été montré que la présence du T-stress dans le développement asymptotique influence la valeur de l'angle initial de propagation et donc le trajet de fissuration. Dans le cas d'un chargement en mode mixte des valeurs positives du T-stress diminuent la valeur de l'angle initial de propagation tandis que des valeurs négatives l'augmentent.

## *Conclusion générale*

---



## **Conclusion générale**

Ce travail s'inscrit dans le cadre général de l'étude numérique de la propagation de fissures dans les matériaux à gradient fonctionnel, sous les conditions de chargement mécanique et thermomécanique. Afin d'orienter notre étude dans une bonne direction, il était indispensable, dans un premier temps, de dresser un bilan des études sur les travaux scientifiques portant sur la propagation de fissures et les différentes techniques exploitées.

La modélisation numérique des propriétés mécaniques des matériaux FGM sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul par éléments finis. Ce programme permet de localiser automatiquement les coordonnées du centre de chaque élément du maillage et de calculer ensuite, le module élastique et le coefficient de Poisson à travers les lois de mélange.

La méthode d'extrapolation de déplacements et la méthode de corrélation des déplacements ont été programmées et implémentées dans le code de calcul par éléments finis afin de déterminer les facteurs d'intensité de contraintes en se basant sur les déplacements au niveau des lèvres de fissure. L'angle initial de propagation ainsi que les angles de bifurcation sont déterminés à chaque incrément de propagation en utilisant les critères de bifurcation. Ces méthodes ont été modifiées pour les matériaux FGM et implémentées sous forme de programme APDL ANSYS. Différents exemples d'applications variés ont été considérés pour plusieurs combinaisons, en considérant la forme de la plaque, la longueur et les différentes orientations de la gradation des propriétés du matériau par rapport à l'emplacement de la fissure, et la loi de mélange constituant le matériau FGM. Les résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis ont été comparés avec des travaux numériques et expérimentaux cités dans la littérature, et ils ont montré que le modèle intégré décrit correctement le champ de contraintes et de déformations au voisinage du fond de fissure, par l'évaluation des différents paramètres en mode-I et mode mixte, et permet de reproduire numériquement avec efficacité le trajet de fissuration dans les matériaux FGM.

L'étude des conditions du chargement thermomécanique nous a permis de conclure que ce dernier affecte d'une manière considérable le chemin de propagation d'une fissure. En effet, la propagation d'une fissure en mode mixte sous chargement thermomécanique dévie de son chemin habituel de propagation sous chargement mécanique. Sous l'effet de la température elle se propage en se dirigeant vers le côté où le coefficient de dilatation thermique est élevé.

L'étude des paramètres influençant le trajet de fissuration semblait intéressante pour ce travail. Nous avons dans un premier temps, étudié l'effet des défauts géométriques sur le trajet final. Plusieurs modèles géométriques ont été considérés afin de visualiser l'effet des défauts tels que les trous ou les inclusions sur le chemin de propagation. Nous avons conclu qu'une fissure est toujours attirée par un défaut géométrique, ce qui est attribué à la dépression de contrainte qui va modifier la contrainte principale maximale de façon à ce que la fissure s'oriente vers ce défaut. A travers ce travail, nous avons pu confirmer que les techniques de programmation développées peuvent reproduire avec fidélité un chemin de propagation de fissure dans des modèles géométriques complexes.

Dans un second temps, nous avons montré que la considération du T-stress dans le développement asymptotique influence la valeur de l'angle initial de propagation et donc le trajet de fissuration. Dans le cas d'un chargement en mode mixte des valeurs positives du T-stress diminuent la valeur de l'angle initial de propagation tandis que des valeurs négatives l'augmentent si on compare ces résultats avec ceux obtenus par un critère classique (ex : CCM) reposant seulement sur le terme singulier.

Nous pouvons dire que ce travail représente une contribution de notre équipe de recherche dans l'enrichissement de la base des données numériques dans le domaine des matériaux à gradient fonctionnel et leur comportement en présence de fissures.

Et enfin comme perspectives de ce travail, cette étude peut être élargie aux autres axes de recherche concernant la propagation de fissures dans les matériaux FGM anisotropes, en se basant sur la méthode de l'intégrale de domaine afin de déterminer les FICs. Il est aussi prévu de développer le présent modèle de calcul dans le cas de la propagation dynamique de fissures dans les matériaux FGM.

## *Références bibliographiques*

---

- [ABA 02] Abanto-Bueno J, Lambros J. Investigation of crack growth in functionally graded materials using digital image correlation. *Eng Fract Mech.* 2002 Sep 1;69(14–16):1695–711.
- [AIT 21] AIT FERHAT Yazid, Étude numérique du comportement en rupture des matériaux en FGM sous différents types de chargement, These de Doctorat, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbas, Algérie, 2021
- [ALS 21] ALSHOAIBI, Abdalnaser M. et FAGEEHI, Yahya Ali. Simulation of Quasi-Static Crack Propagation by Adaptive Finite Element Method. *Metals*, 2021, vol. 11, no 1, p. 98.
- [AMI 08] Amit, K. C., & Kim, J. H. (2008). Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(8), 2542-2565.
- [AYA 98] Ayatollahi. M. R, M. J. Pavier, and D. J. Smith, “Determination of T -stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I / II loading,” *Int. J. Fract.*, vol. 4505, 1998
- [BAO 95] Bao, G. L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995
- [BAR 74] Barsoum, R. S. (1974). Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 10(4), 603-605
- [BAY 13] Bayesteh, H., Mohammadi, S. (2013). XFEM fracture analysis of orthotropic functionally graded materials. *Composites Part B : Engineering*, 44(1), 8-25.
- [BEL 10] Belmonte, T. (2010). Dépôts chimiques à partir d'une phase gazeuse. *Techniques de l'ingénieur, m1660*, 1-10.
- [BEL 94] Belytschko, L. Gu et Y.Y. Lu – Fracture and crack growth by element free Galerkin method, *Modelling Simul. Mater. Sci. Engng.*, Vol. 2, pp. 519-534, 1994.
- [BES 85] Bessot, J. (1985). Dépôts par pulvérisation cathodique. *Techniques de l'ingénieur, m1657*, 1-25.
- [BIA 13] Bian. L, Taheri. F, A proposed maximum ratio criterion applied to mixed mode fatigue crack propagation, *Materials and Design* 32 (2011) 2066–2072
- [BIE 01] Biesheuvel, P.M. Breedveld, V, A.P. Higler, H. Verweij. (2001). Graded membrane supports produced by centrifugal casting of a slightly polydisperse suspension. *Chemical Engineering Science*, 56(11), 3517-3525.

- [BIT 96] Bittencourt, T. N. Wawrzynek, P. A. and A. R. Ingraffea. Quasi-static simulation of crack propagation for 2D LEFM problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(2):321-334, 1996.
- [BOR 06] Bordas, S., Nguyen, P. V., Dunant, C., Guidoum, A., & Nguyen-Dang, H. (2007). An extended finite element library. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(6), 703-732.
- [BOU 00] Bouchard, P., Bay, F., Chastel, Y., Tovenca, I. (2000). Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 189(3), 723-742.
- [BOU 15] Boulenouar, N. Benamara, M. Merzoug, (2015). Prediction of Mixed-Mode Crack Propagation Paths in FGMs, *Journal of Materials, Processes and Environment*, 3(1) 1-12
- [BOU 17] Bouchelarm, M. A., Mazari, M., & Benseddiq, N. (2017). Stress intensity factor KI and T-stress determination in HDPE material. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 17(5), 919-934.
- [BOU 18] Bouchelarm, M.A, 'Prédiction de la rupture par une approche à deux paramètres (FIC et T-stress). Application aux canalisations sous pression en polyéthylène haute densité (PEHD)' Thèse de Doctorat, 2018, UDL- Sidi Bel Abbes
- [BOU 20] Boulenouar A. (2020). Numerical Study of the Fracture Behavior of a FGM Circular Disk. *Journal of Mineral and Material Science*, 1(2), 1006
- [BUS 99] Bush (1999) – Prediction of crack trajectory by the boundary element method, *Structural Engng. and Mech.*, Vol. 7, N°6, pp. 575-588.
- [CHA 19] Chafi, M., Boulenouar, A. (2019). A numerical modelling of mixed mode crack initiation and growth in functionally graded materials. *Materials Research*, 22(3).
- [CHE 18] Chen, X., Luo, T., Ooi, E. T., Ooi, E. H., & Song, C. (2018). A quadtree-polygon-based scaled boundary finite element method for crack propagation modeling in functionally graded materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 94, 120-133.
- [CHI 03] Chi. Sh, Chung Yen-Ling, (2003) Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- [COM 07] Comi, C., & Mariani, S. (2007). Extended finite element simulation of quasi-brittle fracture in functionally graded materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44), 4013-4026.

- [COT 66] Cotterell. B (1966) “Notes on the paths and stability of cracks,” *Int. J. Fract. Mech.*, vol. 2, no. 3, pp. 526–533, Sep.
- [DEL 83] Delale, F. Erdogan (1983), The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- [DES 83] Destuynder, M. Djaoua, S. Lescure (1983), Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *J. de Méca. Théorique et Appliquée*, Vol. 2, N°1, pp. 113-135.
- [ELO 93] Elouard.A (1993), Etude numérique par éléments finis de la fissuration avec remaillage automatique. Application à la mécanique des chaussées, Thèse de Doctorat de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [ERD 63] Erdogan, F., Sih, G. (1963). On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal Of Basic Engineering*, 85(4), 519-525
- [ERD 96] Erdogan F, Wu BH. Crack problems in FGM layers under thermal stresses. *J Thermal Stresses* 1996;19(3):237–65.
- [ESH 56] Eshelby, J.D. (1956), The continuum theory of lattice defects, solid state physics, edited by P. Seitz and D. Tunbulla, vol. 3 , Academic press, New-York.
- [ESH 69] Eshelby, J.D. (1969), Energy relations and the energy momentum tensor in continuum mechanics inelastic behavior of solid, Mf Kanninen ed McGraw-Hill, New York, pp. 77-115.
- [FET 03] Fett. T and D. Munz, (2003) “T-stress and crack path stability of DCDC specimens,” *Int. J. Fract.*, vol. 124, no. 1/2, pp. L165–L170.
- [GAL 96] Galvez, M. Elices, G. V. Guinea, and J. Planas (1996). Crack trajectories under mixed mode and non-proportional loading. *International Journal of Fracture*, 81(2):171-193.
- [GAN 10] Ganesh A, Kim JH, (2010). A thermomechanical fracture modeling and simulation for functionally graded solids using a residual-strain formulation. *Int J Fract.* 164(1) :31–55.
- [GRI 21] Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221(582), 163-198.
- [GUR 77] Gurson (1977) – Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Transaction of the ASME*.

- [HAI 17] Haider, I. K., Khazal, M.H. (2017). Analysis of mixed-mode crack tip in functionally graded beams by using xefgm. *Iraqi journal of mechanical and material engineering*, 17(3), 496-514.
- [HEN 95] Henry. B. S, and A. R. Luxmoore, "Three-dimensional evaluation of the T-stress in centre cracked plates," *Int. J. Fract.*, vol. 70, no. 1, pp. 35–50, 1995.
- [HIR 19] Jansari, C., Kannan, K., Annabattula, R. K., & Natarajan, S. (2019). Adaptive phase field method for quasi-static brittle fracture using a recovery-based error indicator and quadtree decomposition. *Engineering Fracture Mechanics*, 220, 106599.
- [HIR 96] Hirai, T. (1996), "Functional gradient materials", *Processing of ceramics Part 2*, p. 293–341.
- [HOU 13] Hosseini, H. Bayesteh, S. Mohammadi, (2013). Thermo-mechanical XFEM crack propagation analysis of functionally graded materials, *Materials Science & Engineering A* 561 285–302
- [HUN 74] Hung The Dinh, Akhrawat Lenwari, Teerapong Senjuntichai and Toshiro Hayashikawa, (2012). Finite element simulation of mixed-mode crack propagation based on strain energy density criterion, *ASEAN Engineering Journal Part C*, Vol 2 No 2, p.66.
- [HUS 74] Hussain M.A., Pu E.L. and Underwood J.H. (1974), Strain energy release rate for a crack under combined Mode-I and Mode-II, *ASTM STP 560*, ASTM, pp. 2–28.
- [IRW 58] Irwin. G. R, (1958) "Discussion of 'The Dynamic Stress Distribution Surrounding a Running Crack - A Photoelastic Analysis'," in *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, p. Vol. 16, No. 1, pp. 93–96.
- [JIN 96] Jin. Z. H, Batra. R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339.
- [JIR 99] Jirásek.M (1999). Numerical modeling of deformation and failure of materials, *Short Course*, Aachen, 3-7.
- [JUN 06] Jun Chang, Jin-quan Xu, Yoshiharu Mutoh, (2006). A general mixed-mode brittle fracture criterion for cracked materials, *Engineering Fracture Mechanics* 73 1249-1263.
- [KAW 97] Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", *Composites Part B,Engineering*, 29–35.
- [AMI 08] AMIT, KC, Kim, J. H. (2008). Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(8), 2542-2565.

- [KEI 05] Keiichiro Tohgo, Takafumi Suzuki, Hiroyasu Araki, (2005) "Evaluation of R-curve behavior of ceramic-metal functionally graded materials by stable crack growth", *Engineering Fracture Mechanics* 72: 2359-2372
- [KFO 86] Kfour. A. P, (1986) "Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby's method," *Int. J. Fract.*, vol. 30, no. 4, pp. 301–315.
- [KHA 17] Khalaf D. (2017). ANALYSIS OF MIXED-MODE CRACK TIP IN FUNCTIONALLY GRADED BEAMS BY USING XEFGM. *Iraqi J Mech Mater Eng*.
- [KHA 19] Khazal, H., & Saleh, N. A. (2019). XEFGM for crack propagation analysis of functionally graded materials under mixed-mode and non-proportional loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(11), 975-983.
- [KIM 07] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2007). On fracture criteria for mixed-mode crack propagation in functionally graded materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(4), 227-244.
- [KIM 03] Kim, J.-H. and Paulino. G. H. T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: A unified approach using the interaction integral method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11-12):1463-1494, 2003.
- [KIM 03] KIM J.H, MIXED-MODE CRACK PROPAGATION IN FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS. Thèse de doctorat University of Illinois at Urbana-Champaign, 2003
- [KIM 04] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2004). Simulation of crack propagation in functionally graded materials under mixed-mode and non-proportional loading. *Mechanics and Materials in Design*, 1(1), 63-94.
- [KOI 97] Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4.
- [LAR 73] Larsson S. G. and A. J. Carlsson, "Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 21, no. 4, pp. 263–277, 1973.
- [LEE 82] Leever. P. S, and J. C. Radon, "Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries," *Int. J. Fract.*, vol. 19, no. 4, pp. 311–325, Aug. 1982.
- [MA 08] Ma, Zhi-Yong Wang & Lin-Zhi Wu, Simulation of crack propagation in functionally graded materials, XXII ICTAM, 25-29 August 2008, Adelaide, Australia
- [MAL 04] Maleski. M. J, M. S. Kirugulige, and H. V. Tippur, "A method for measuring mode I crack tip constraint under static and dynamic loading conditions," *Exp. Mech.*, vol. 44, no. 5, pp. 522–532, Oct. 2004.



- [MAR 15] Martínez-Pañeda, E., Gallego, R. (2015). Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 11(4), 405-424.
- [MAT 05] Matejicek, J. Chraska, P. Linke, J. (2005). Thermal Spray Coatings for fusion Applications - Review. *Journal of Thermal Spray Technology*, 16(1), 64-83.
- [MEL 02] Melin, S., "The influence of the T-stress on the directional stability of cracks," *Int. J. Fract.*, vol. 114, no. 3, pp. 259–265, 2002.
- [MEL 10] Meliani, M. H, Z. Azari, G. Pluvinage, and Y. G. Matvienko, "The effective T-stress estimation and crack paths emanating from U-notches," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 77, no. 11, pp. 1682–1692, Jul. 2010.
- [MEM 19] Memari, A. (2019). Computational analysis of linear elastic crack growth in functionally graded bodies using non-uniform steps integrated in the MLPG. *International Journal of Applied Mechanics*, 11(08), 1950080
- [MOU 91] Mousa S, Abd-Elhady AA, Abu-Sinna A, Enab T, Alhazmi WH, Sallam H. Mixed mode crack growth in functionally graded material under three-point bending. In: *Procedia Structural Integrity*. Elsevier B.V.; 2019. p. 284–91.
- [NAR 11] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi. (2011). "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions»; John Wiley & Sons, 110.
- [NAT 19] Natarajan, S., & Annabattula, R. K. (2019). A FEniCS implementation of the phase field method for quasi-static brittle fracture. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 13(2), 380-396.
- [OOI 15] Ooi, E. T., Natarajan, S., Song, C., & Tin-Loi, F. (2015). Crack propagation modelling in functionally graded materials using scaled boundary polygons. *International Journal of Fracture*, 192(1), 87-105.
- [PRO 99] Proner, A. (1999). Revêtement par projection thermique. *Techniques de l'ingénieur*, M 1645, 3-20.
- [RAS 68] Rashid, Y.R. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels, *Nuclear Engng and Design*, Vol. 7, pp. 334-344, 1968.
- [RAS 98] Rashid. The arbitrary local mesh replacement method: an alternative to remeshing for crack propagation analysis, *Computer Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 154, pp. 133-150, 1998.
- [RIC 68] Rice, J. (1968). A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2), 379.

- [RIC 74] Rice J. R.(1974) "Limitations to the small-scale yielding approximation for crack tip plasticity," J. Mech. Phys. Solids, vol. 22, no. 1, pp. 17–26.
- [ROU 00] Rousseau, C.-E., and Tippur, H. V, (2000)"Compositionally graded materials with cracks normal to the elastic gradient," Acta Materialia 48(16), 4021–4033.
- [ROU 87] Rousselier.G – Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture, Nucl. Engng. And Design, Vol. 105, pp. 97-111, 1987.
- [RW 49] Irwin, G. R. (1949). Fracturing of metals, *Metallurgia*, 39 (231), 133-137.
- [SHA 89] Sham. T. L, "The theory of higher order weight functions for linear elastic plane problems," Int. J. Solids Struct., vol. 25, no. 4, pp. 357–380, Jan. 1989.
- [SHA 91] Sham. T.-L, "The determination of the elastic T-term using higher order weight functions," Int. J. Fract., vol. 48, no. 2, pp. 81–102, Mar. 1991.
- [SHE 09] Shen, H.-S. (2009), "Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [SIH 74] Sih, G. (1974). Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal Of Fracture*, 10(3), 305-321.
- [SMI 01] Smith, D. J., Ayatollahi, M. R., & Pavier, M. J. (2001). The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 24(2), 137-150.
- [SUD 17] Sudhakar, Y., & Wall, W. A. (2017). Mesh refitting approach: a simple method to model mixed-mode crack propagation in nonlinear elastic solids. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 4(1), 1-23.
- [THE 82 a] Theocaris PS, Andrianopoulos NP. The Mises elastic-plastic boundary as the core region in fracture criteria. *Engng Fract Mech* 1982;16(3):425-32.
- [THE 82 b] Theocaris PS, Andrianopoulos NP.1(982) The T -criterion applied to ductile fracture. *Int J Fract* ;20: R125-30.
- [THE 82 c] Theocaris PS, Kardomateas GA, Andrianopoulos NP. Experimental study of the T -criterion in ductile fracture. *Engng Fract Mech* 1982;17(5):439-47.

- [TOS 92] Toshio. N and D. M. Parks, “Determination of elastic T-stress along three-dimensional crack fronts using an interaction integral,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 29, no. 13, pp. 1597–1611, 1992.
- [WAN 92] Wang.Y. Y, and D. M. Parks, “Evaluation of the elastic T-stress in surface-cracked plates using the line-spring method,” *Int. J. Fract.*, vol. 56, no. 1, pp. 25–40, Jul. 1992.
- [WAZ 15] EL-Wazery, M.S., EL-Desouky, A.R.: A review on functionally graded ceramic-metal materials. *Mater. Environ. Sci.* 6(5), 1369–1376 (2015)
- [WEL 63] Wells, A. A. (1963). Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British Welding Journal*, 10.
- [WES 39] Westergaard, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of applied mechanics*, 6(2), 49-53.
- [WIL 57] Williams, M. L. (1957). “On the stress distribution at the base of a stationary crack,” *J. Appl. Mech.*, vol. 24, no. 1, pp. 109–114.
- [WIL 72] Williams. J. G, and P. D. Ewing,(1972). “Fracture under complex stress —The angled crack problem,” *Int. J. Fract. Mech.*, vol. 8, no. 4, pp. 441–446.
- [XIN 09] Xin Jin, Linzhi Wu, Licheng Guo, Hongjun Yu, Yuguo Sun (2009). Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO<sub>2</sub>/NiCr functionally graded materials, *Engineering Fracture Mechanics* 76 1800–1810.
- [YAN 99] Yang. B, and K. Ravi-Chandar, (1999) “Evaluation of elastic T-stress by the stress difference method,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 64, no. 5, pp. 589–605.
- [YOS 04] Yoshihisa, U., (2004). Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications. *Composites Part B*, 39, 39-51.
- [ZEG 03] Zeghloul, A. (2003). Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture. Livre édition arts et métiers paristech.