

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES
Spécialité : Génie Civil
Option : Structures et matériaux

Soutenu par
GUELLIL Moustafa Khadhir

Sujet de thèse

Etude de Comportement mécanique des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques sous diverses conditions aux limites

Soutenu le : 06 /01/ 2022, Devant le Jury composé de :

TOUNSI Abdelouahed	Professeur	U.D.L SBA	Président
SAIDI Hayat	MCA	U.D.L SBA	Directeur de thèse
BOURADA Mohamed	Professeur	U.D.L SBA	Examineur
HEBALI Habib	MCA	U. Mascara	Examineur
SADOUNE Mohamed	MCA	U. Mascara	Examineur
ZINE Abdallah	MCA	U. Relizane	Examineur

Année universitaire : 2021-2022

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse se sont déroulés au sein du Laboratoire des Matériaux & Hydrologie LMH de l'Université de Sidi Bel Abbès. Mes remerciements s'adressent tout d'abord aux personnes avec lesquelles j'ai travaillé et qui m'ont fait part de leurs connaissances et de leur savoir-faire.

Docteur SAIDI Hayat qui a dirigé cette thèse, soutenu et orienté la réalisation de ce travail par son aide scientifique et ses précieux conseils. Qu'elle veuille bien accepter ma sincère reconnaissance et mon profond respect.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance au Professeur TOUNSI Abdelouahed, qui m'a fait le grand honneur de présider le jury de thèse.

Mes vifs remerciements sont adressés au Professeur BOURADA Mohamed, Directeur du laboratoire LMH, pour m'avoir fait l'honneur en acceptant d'examiner et de participer à mon jury de thèse.

Je remercie également, Monsieur HEBALI Habib, Docteur à l'Université de Mascara, Monsieur SADOUN Mohamed, Docteur à l'Université de Mascara et Monsieur ZINE Abdallah, Docteur à l'Université de Relizane qui m'ont fait l'honneur d'en être membre du jury de soutenance de cette thèse.

Je remercie vivement, Monsieur BOURADA Fouad, Docteur au Centre Universitaire de Tissemsilt et membre du laboratoire LMH pour sa disponibilité et le partage de ses connaissances qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse.

J'associe aussi à mes remerciements, Monsieur ADDOU Farouk Yahia, Docteur et membre du laboratoire LMH pour toute l'aide et les encouragements qu'il a pu m'apporter afin de réaliser ce travail.

Je ne remercie jamais assez mes parents, ma femme et mon enfant, mon frère et ma sœur ainsi que toute ma famille et mes amis.

Résumé

Dans ce travail de thèse, une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de flexion d'une plaque fonctionnellement graduée reposant sur une fondation Pasternak sous différentes conditions aux limites est exposée. La théorie proposée est basée sur l'hypothèse que des porosités peuvent être présentes dans une plaque fonctionnellement graduée, ce qui peut entraîner une diminution de la résistance des matériaux. Une nouvelle répartition de la porosité en fonction de l'épaisseur de la plaque FG est supposée. Les équations gouvernantes de la présente théorie sont dérivées en employant le principe du travail virtuel, et les solutions ont été obtenues en utilisant la solution de Navier. Des résultats numériques pour les déformations et les contraintes sous différentes conditions aux limites sont présentés. L'exactitude de la présente étude est confirmée en comparant les résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature. Les effets du paramètre de porosité, du rapport d'élanement, des paramètres de fondation, de l'indice de matériau et des conditions aux limites sur les flèches et les contraintes sont présentés.

Mots-clés : plaque fonctionnellement graduée ; fondation Pasternak ; conditions aux limites ; porosité.

Abstract

In this paper, a higher order shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on Pasternak foundation and under various boundary conditions is exposed. The proposed theory is based on the assumption that porosities can be produced within functionally graded plate which may lead to decline in strength of materials. In this research a novel distribution of porosity according to the thickness of FG plate are supposing. Governing equations of the present theory are derived by employing the virtual work principle, and the closed-form solutions of functionally graded plates have been obtained using Navier solution. Numerical results for deflections and stresses of several types of boundary conditions are presented. The exactitude of the present study is confirmed by comparing the obtained results with those available in the literature. The effects of porosity parameter, slenderness ratio, foundation parameters, power law index and boundary condition types on the deflections and stresses are presented.

Keywords: functionally graded plate; Pasternak foundation; boundary conditions; Porosity.

ملخص

في هذا العمل، يتم تقديم نظرية تشوه القص ذات درجة أعلى لتحليل الانحناء للصفائح ذات خواص متغيرة وظيفيا والمستندة على اساسات Pasternak وفق شروط حدية مختلفة. تستند النظرية المقترحة على افتراض أن المسامية يمكن أن تكون موجودة في صفيحة ذات خواص متغيرة وظيفيا مما قد يؤدي إلى انخفاض في قوة المواد. يفترض توزيع جديد للمسامية حسب سمك الصفيحة. تم اشتقاق المعادلات الحاكمة للنظرية الحالية عن طريق استخدام مبدأ العمل الافتراضي وتم الحصول على الحلول باستخدام حل Navier. يتم عرض النتائج العددية للإجهاد والتوتر في ظل شروط حدية مختلفة. يتم تأكيد دقة الدراسة الحالية من خلال مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك السابقة. تم عرض تأثيرات معامل المسامية ونسبة النحافة ومعلمات الأساس ومؤشر المواد وشروط الحدية على الانحناء والضغط.

الكلمات الرئيسية: صفيحة ذات خواص متغيرة وظيفيا؛ اساسات Pasternak ؛ المسامية ؛ شروط حدية

Liste des Figures

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

Figure I. 1 représentation schématique du (a) matériau fonctionnellement gradué et (b) du matériau composite stratifié conventionnel (Mahamood and Akinlabi, 2017).....	7
Figure I. 2 Variation des propriétés des composites conventionnels et des FGMs (Koizumi and Niino, 1995).....	8
Figure I. 3 Représentation hiérarchique des matériaux modernes.	9
Figure I. 4 La distribution composante des matériaux (Yoshihisa Uchida, 2004).....	9
Figure I. 5 (a) Machine de coulée centrifuge Horizontale (El-Galy et al., 2019), et (b) Concept de ségrégation de particules lors de la production des FGM (Jamian et al., 2019)..	10
Figure I. 6 Principales étapes de la métallurgie des poudres pour produire des FGM (Watanabe et al., 2015)].	11
Figure I. 7 Diagram Schématique du process de pulvérisation thermique (Metco, n.d.).....	12
Figure I. 8 Diagram Schématique du process CVD (El-Galy et al., 2019).....	13
Figure I. 9 Exemple typique de trois types différents de gradients de FGM (Mahmoud and Elbestawi, 2017).....	13
Figure I. 10 Géométrie d'une plaque en FGM.....	15
Figure I. 11 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	16
Figure I. 12 Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	17
Figure I. 13 Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	18
Figure I. 14 Divers domaines d'application des FGM (Saleh et al., 2020)	19

Chapitre II : Les Plaques FGM : Théorie, Stabilité, Fondation Elastique et Porosité

Figure II. 1 Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff	22
Figure II. 2 Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	23
Figure II. 3 Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CLPT) et (FSDT).....	25
Figure II. 4 Modèle de Winkler (Younesian et al., 2019).....	30
Figure II. 5 Illustration de différents modèles de variations de la porosité.	34

Chapitre III : Formulation Théorique

Figure III. 1 Représentation schématique d'une plaque rectangulaire FGM reposant sur une fondation élastique. 37

Chapitre VI : Résultats et Discussions

Figure IV. 1 La flèche en fonction de la porosité ξ de la plaque FG simplement appuyé pour différentes valeurs de l'indice matériel β 57

Figure IV. 2 : Les effets du paramètre de porosité sur la contrainte normale σ_1 à travers l'épaisseur de la plaque FG simplement appuyée sans et avec fondation élastique ($a = 10h$, $\beta = 4$)..... 57

Figure IV. 3 Les effets du paramètre de la porosité sur les contraintes de cisaillement transversal σ_5 à travers l'épaisseur de la plaque FG simplement appuyé sans et avec fondation élastique ($a = 10h$, $\beta = 4$)..... 58

Liste des tableaux

Chapitre II : Les Plaques FGM : Théorie, Stabilité, Fondation Elastique et Porosité

Tableau II. 1 Description des différentes théories de plaques d'ordre supérieur 26

Chapitre III : Formulation Théorique

Tableau III. 1 Différentes conditions aux limites pour la fonction $X(\lambda_m x)$ 44

Tableau III. 2 Différentes conditions aux limites pour la fonction $Y(\mu_n y)$ 44

Chapitre VI : Résultats et Discussions

Tableau IV. 1 Propriétés des matériaux 48

Tableau IV. 2 Les effets de l'indice matériel β et du rapport d'élanement (a / h) sur la flèche adimensionnelle w d'une plaque carrée fonctionnellement graduée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale 49

Tableau IV. 3 Effets de l'indice matériel β et des paramètres de fondation élastique sur la flèche w des plaques carrées fonctionnellement gradées sous une charge sinusoïdale ($a = 10h$) 50

Tableau IV. 4 Les effets de l'indice matériel β et des paramètres de fondation élastique sur les contraintes σ_i dans une plaque carrée fonctionnellement gradée sous une charge sinusoïdale ($a = 10h$) 51

Tableau IV. 5 flèche adimensionnelle w des plaques carrées FG selon diverses conditions aux limites sans fondation élastique..... 53

Tableau IV. 6 flèche adimensionnelle w de la plaque FG sous diverses conditions aux limites avec fondations élastiques ($k_p = k_w = 10$)..... 54

Tableau IV. 7 Flèche w et contrainte d'une plaque carrée FG sous différentes conditions aux limites sans fondations élastiques ($K_p = K_w = 0, a / h = 10$) 55

Tableau IV. 8 Flèche w et contrainte d'une plaque carrée FG sous différentes conditions aux limites avec fondations élastiques ($K_p = K_w = 10, a / h = 10$) 56

Liste des Notations

a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
E	Module de Young
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de la céramique
ν	Coefficient de Poisson
β	Indice matériel
$V(z)$	Fraction volumique
$\rho(z)$	Densité matérielle
ρ_c	Masse volumique céramique
ρ_m	Masse volumique métal
m_0	Masse volumique réelle
m	Masse volumique apparente
ξ	Fraction volumique des pores
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
$f(z)$	Fonction de gauchissement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
δU	La variation de l'énergie de déformation
δV	La variation du travail extérieur

$\partial u_0, \partial v_0, \partial w_b, \partial w_s$	Champ virtuel de déplacement
R	La densité de la force de réaction de la fondation
K_w	Le module de réaction de la fondation
K_p	Le module de cisaillement de la plate-forme
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion pure
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, A^{a_{ij}}, B^{a_{ij}}, C^{a_{ij}}$	Les composantes de rigidité
c_{ij}	Coefficients de rigidité
q	Charges mécaniques transversales
\bar{w}	Flèche adimensionnelle
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements

Sommaire

<i>Résumé</i>	i
<i>Abstract</i>	ii
ملخص.....	iii
<i>Liste des Figures</i>	iv
<i>Liste des tableaux</i>	vi
<i>Liste des Notations</i>	vii
<i>Introduction générale</i>	1
Chapitre I. Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés	6
I.1 Introduction	7
I.2 Comparatif entre les matériaux FGM et les matériaux composites.....	8
I.3 Méthodes de production des FGM	10
I.3.1 Méthodes de coulée centrifuge (<i>Centrifugal casting methods</i>).....	10
I.3.2 Métallurgie des Poudres	10
I.3.3 La méthode de pulvérisation thermique	11
I.3.4 Dépôt chimique en phase vapeur (<i>Chemical Vapour Deposition Method</i>)	12
I.4 Classification des FGM	13
I.4.1 Gradient de composition chimique	13
I.4.2 Gradient de microstructure.....	14
I.4.3 Gradient de porosité	14
I.5 Les Lois de mélange des plaques FGM.....	14
I.5.1 Loi de mélange en puissance P-FGM	15
I.5.2 Loi de mélange sigmoïde S-FGM	16
I.5.3 Loi de mélange exponentielle E-FGM.....	17
I.6 Avantages et inconvénients des FGM et leurs domaines d'applications.....	18
I.7 Conclusion.....	19
Chapitre II. Les Plaques FGM : Théorie, Stabilité, Fondation Elastique et Porosité.....	20

II.1	Théories des plaques.....	21
II.1.1	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT)	21
II.1.2	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).....	22
II.1.3	Théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	23
II.1.4	Théorie raffinée des plaques	26
II.2	Revue littéraire sur l'étude des plaques FGM reposant sur une fondation élastique	27
II.3	Modèles de fondations.....	29
II.3.1	Model de Winkler.....	29
II.3.2	Model de Pasternak	30
II.4	Les plaques fonctionnellement graduées en présence de la porosité.....	31
II.4.1	Modèles de porosité	32
II.5	Conclusion.....	35
Chapitre III. Formulation Théorique		36
III.1	Introduction.....	37
III.2	Configuration géométrique	37
III.3	Propriétés des matériaux	37
III.4	Relations constitutives	38
III.5	Équations d'équilibres	40
III.6	Conditions aux limites	43
III.7	Solution des équations gouvernantes	43
III.8	Conclusion	46
Chapitre IV. Résultats et Discussions		47
IV.1	Introduction.....	48
IV.2	Résultats et discussions.....	48
IV.3	Conclusion	58
<i>Conclusion Générale</i>		60
<i>Liste Des Références Bibliographiques</i>		63

Introduction générale

Les plaques fonctionnellement graduées sont largement utilisées dans de nombreux domaines de l'ingénierie, en particulier dans le génie civil, la mécanique, l'optique, les appareils électroniques, les turbines à gaz, le biomédical, les sources d'énergie nucléaire et le domaine de l'automobile. Ces plaques sont réalisées par un mélange de métal et de céramique dont les caractéristiques mécaniques varient continuellement d'une face à l'autre en éliminant ainsi la concentration des contraintes et les contraintes résiduelles présentes dans le matériau composite.

En raison de problèmes techniques lors de la fabrication, des porosités peuvent être créées dans la plaque en FGM, ce qui peut entraîner une diminution de la résistance du matériau (Faleh et al., 2018; Forsat et al., 2020; Timesli, 2020a; Wattanasakulpong et al., 2012; Zhu et al., 2001). Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de la porosité lors de la conception des structures en FGM soumises à des chargements statiques et dynamiques (Daouadji, Tahar Hassaine et al., 2016). De nombreux travaux ont été réalisés pour analyser le comportement des plaques fonctionnellement graduées.

Rezaei et Saidi (2015) ont présenté une solution exacte pour la vibration libre des plaques rectangulaires épaisses en matériaux poreux, basée sur la théorie des plaques de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy et tenant compte de l'effet du fluide dans le réseau de pores du milieu poreux. Zhang et Wang (2017) ont présenté une approche additive pour la fabrication de FGPM polymères avec des structures à cellules fermées et à cellules ouvertes à l'aide de techniques de stratification par liaison thermique. Sous une charge de compression appliquée, un chauffage contrôlé et un temps de maintien approprié, il a été montré que cette technique de liaison thermiquement induite peut lier des couches de feuilles de polymère pour créer des objets tridimensionnels poreux. Rezai et al. (2017) ont étudié l'analyse des vibrations libres des plaques rectangulaires composées de matériaux fonctionnellement gradués avec des porosités, basée sur une théorie simple des plaques de déformation de cisaillement du premier ordre. L'analyse de propagation des ondes pour des nano plaques hétérogènes poreuses PFG reposant sur des fondations élastiques sous un plan de champ magnétique est examinée par Karami et al (2018a) en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement du deuxième ordre. Kiran and Kattimani (Kiran and Kattimani, 2018) ont étudié les caractéristiques de vibration libre et le comportement statique de la plaque magnéto-élastique poreuse à gradation fonctionnelle (FGMEE) en utilisant la méthode des éléments finis. Heshmati and Daneshmand (2018) ont présenté des analyses vibratoires tridimensionnelles (3D) libres de plaques légères

faites de matériaux poreux à gradation uniforme et non uniforme reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres.

Nguyen et al (2018) ont proposé une méthode d'éléments finis polygonale efficiente (PFEM) en combinaison avec des fonctions de forme quadratique pour étudier les réponses statiques et dynamiques non linéaires de plaques à gradation fonctionnelle (FG) avec des porosités. Cong et al (2018) ont présenté une approche analytique pour étudier le flambement et le comportement post-flambement de plaques FGM avec des porosités reposant sur des fondations élastiques et soumises à des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques. Les formulations sont basées sur la théorie des plaques de déformation de cisaillement d'ordre élevé de Reddy en tenant compte de la non-linéarité de Von Karman, des imperfections géométriques initiales et des fondations élastiques Pasternak. Shahsavari et al. (2018) ont développé un modèle de gradient de déformation non locale d'ordre élevé pour examiner la propagation des ondes de nanoplaques FG imparfaites reposant sur une fondation hybride à gradient. En outre, plusieurs modèles analytiques et numériques sont développés pour examiner les comportements de divers éléments de structures (Abdelmalek et al., 2019; Akbas, 2015; Akbaş, 2019, 2018; Akgöz and Civalek, 2013; Al-Maliki et al., 2019; Belmahi et al., 2019; Bennai and Atmane, 2016; Bensattalah et al., 2018; Boulal et al., 2020; Chami et al., 2020; Hadji, 2020; Hadji et al., 2019; Hadji and Bernard, 2020; Merzoug et al., 2020; Nebab et al., 2020, 2019; Rachedi et al., 2020; Safa et al., 2019; Sahouane et al., 2019; Sellam et al., 2020; Selmi, 2020; Tayeb et al., 2019, 2020, 2020; Timesli, 2020b; Yaylac, 2016; Yaylaci et al., 2019; Yaylaci and Avcar, 2020, 2020; Yaylaci and Birinci, 2013).

Pour la première fois, la stabilité thermique d'une smart nanopoutre FG poreuse intégrée avec capteur piézoélectrique reposant sur une fondation de type Kerr est analysée par Karami et al. (2018b) en utilisant la HSDT non locale. Les imperfections géométriques sont prises en compte par Ahmed et al. (2019) pour analyser la réponse post-flambage des nanopoutres FG. L'influence des modèles de porosité sur la flexion mécanique de la poutre FG en fonction des dimensions est étudiée par Hamed et al. (2019). Mota and Loja (Mota and Loja, 2019) ont analysé le comportement mécanique de matériaux nano-composites poreux à gradation fonctionnelle, des simulations numériques basées sur la méthode des éléments finis, reproduisant les tests de traction et de flexion de « l'American Society for Testing and Materials (ASTM) » ont été prises en compte. Coskun et al. (Coskun et al., 2019) ont étudié la flexion statique, les vibrations libres et le flambement de microplaques poreuses à gradation fonctionnelle en utilisant une théorie générale des plaques de troisième ordre. Kim et al. (2019)

ont étudié la flexion, les vibrations libres et la réponse au flambement de microplaques poreuses à gradation fonctionnelle à l'aide des théories classiques et du premier ordre des plaques de déformation de cisaillement. Les vibrations libres d'une plaque rectangulaire poreuse fonctionnellement graduée (FGP) avec des conditions aux limites élastiques uniformes au moyen d'une méthode améliorée de série de Fourier (IFSM) ont été étudiées par Zhao et al. (Zhao et al., 2019). Saidi and Sahla (2019) ont étudié l'analyse vibratoire des plaques fonctionnellement graduées poreuses composées d'un mélange d'aluminium (Al) et d'alumine (Al_2O_3) noyé dans un milieu élastique. Une évaluation de l'influence du facteur de correction de cisaillement sur le comportement statique des plaques poreuses à gradation fonctionnelle a été discutée par Mota et al. (2020). Sur la base de la méthode de quadrature différentielle (DQ), Abdulrazzaq et al. (2020) ont étudié la réponse dynamique des nano-plaques composites FG poreux sur une fondation visco-élastique. Au cours de cette année, plusieurs travaux traitant l'effet de la porosité sur le comportement des structures / nanostructures FG sont publiés tels que (Akbari et al., 2020; Batou et al., 2019; Fenjan et al., 2020a, 2020b; Gafour et al., 2020; Ghandourah and Abdraboh, 2020; Hamed et al., 2020; Karami et al., 2020, 2019; Mirjavadi et al., 2020; Ramteke et al., 2019).

Dans le présent travail, une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la flexion d'une plaque fonctionnellement graduée sous diverses conditions aux limites et reposant sur une fondation élastique est exposée. La théorie proposée est basée sur l'hypothèse que des porosités peuvent être produites dans une plaque fonctionnellement graduée, ce qui peut entraîner une diminution de la résistance des matériaux. Pour prédire correctement le comportement à la flexion de la plaque imparfaite, une nouvelle répartition de la porosité en fonction de l'épaisseur de la plaque FG est supposée. Les équations gouvernantes de la présente théorie sont dérivées en employant le principe du travail virtuel, et les solutions analytiques des plaques fonctionnellement graduées ont été obtenues en utilisant la solution de Navier. Des résultats numériques pour les déformations et les contraintes sous plusieurs types de conditions aux limites sont présentés. L'exactitude de la présente étude est confirmée en comparant les résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature. Les effets du paramètre de porosité, du rapport d'élanement, du paramètre de fondation, de l'indice de matériau et des types de conditions aux limites sur les déformations et les contraintes sont présentés.

Le manuscrit résumant les travaux effectués dans le cadre de la thèse s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre présente quelques généralités sur les matériaux à gradient de propriétés comprenant un comparatif avec les matériaux composites, les principales techniques de fabrication des matériaux FGM, leur classification et les lois de mélange des plaques FGM. Ce chapitre comporte également un état de l'art des différents domaines d'application des FGM.

Le deuxième chapitre présente les théories des plaques les plus utilisées dans la littérature pour décrire le comportement mécanique des plaques FGM. Nous avons passé en revue l'étude de la stabilité des plaques FGM reposant sur une fondation élastique et présenté quelques modèles de fondation élastique. Nous avons également mis l'accent dans ce chapitre sur la présence de porosité dans les plaques fonctionnellement graduées en citant quelques modèles proposés dans la littérature pour décrire la distribution des micro-vides.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse de la flexion d'une plaque fonctionnellement graduée sous différentes conditions aux limites reposant sur une fondation élastique en utilisant une théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement. Pour prédire correctement le comportement de la flexion de cette plaque imparfaite, une nouvelle répartition de la porosité en fonction de l'épaisseur de la plaque FG est supposée.

Le quatrième chapitre présente les résultats numériques des contraintes et des déformations de l'étude d'une plaque fonctionnellement graduée soumise à la flexion, sous diverses conditions aux limites et reposant sur une fondation élastique, en se basant sur la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement présenté dans le troisième chapitre. Nous avons étudié les effets du paramètre de porosité, du rapport d'élancement, du paramètre de fondation, de l'indice matériel et les différents types de conditions aux limites sur les contraintes et déformations.

Enfin, nous achevons notre travail par une conclusion générale relative aux résultats obtenus incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I. Généralités
Sur Les Matériaux à
Gradient De Propriétés

I.1 Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une classe avancée de matériaux d'ingénierie dans lesquels deux matériaux ou plus sont présents et la microstructure / composition varie de manière discrète ou continue sur une géométrie bien définie.

L'idée d'un matériau à gradient de propriétés dans le domaine de l'ingénierie a été proposée pour la première fois au début des années 1980, lorsque des chercheurs japonais ont été confrontés à un problème qui nécessitait un type de matériau composite capable de résister à une différence de température très élevée dans un projet d'avion spatial.

Les matériaux composites stratifiés conventionnels étaient incapables de résister à de telles conditions de sollicitation extrêmes. La discontinuité aux interfaces était responsable du facteur de concentration de contrainte très élevé qui existe à cette interface.

Les chercheurs ont transformé cette interface discontinue en une interface à gradient en introduisant progressivement le deuxième matériau dans le premier matériau. L'utilisation de ce procédé d'introduction graduelle du deuxième matériau dans le premier matériau a aidé à développer le matériau composite et ainsi pu résister à l'application à haute température. Les applications des matériaux à gradient de propriétés ont maintenant été étendues à d'autres utilisations, comme les applications de résistance à l'usure (Argyropoulos, 2001; Wang, 1983).

La représentation schématique du matériau fonctionnellement gradué et celui du matériau composite stratifié conventionnel sont représentés sur les figures 1.1a, b, respectivement.

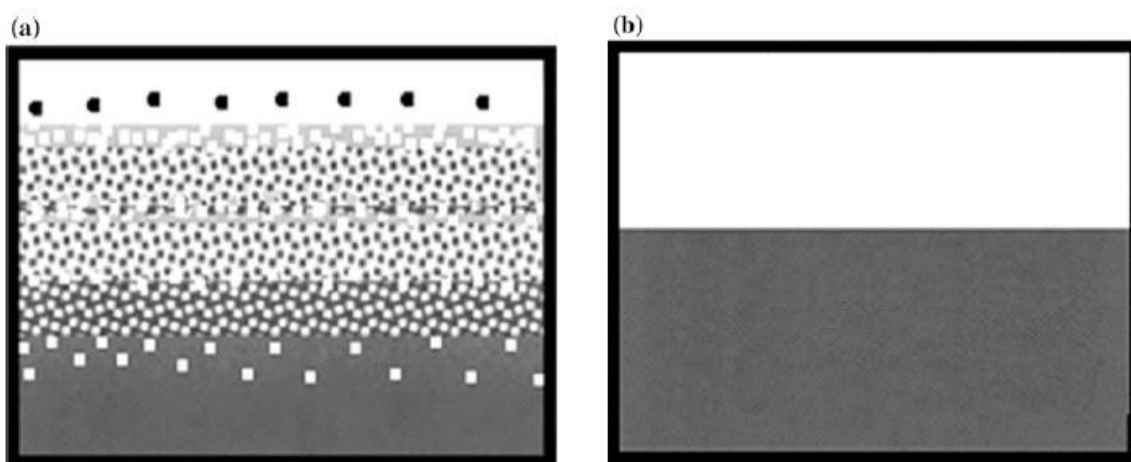


Figure I. 1 représentation schématique du (a) matériau fonctionnellement gradué et (b) du matériau composite stratifié conventionnel (Mahamood and Akinlabi, 2017)

I.2 Comparatif entre les matériaux FGM et les matériaux composites

Généralement, les FGM sont des matériaux faits de différents matériaux contenant différents composants comme la céramique et les métaux. Ils sont donc des composites avec des caractéristiques macroscopiques inhomogènes. Le changement continu de la composition et donc de la microstructure du matériau dans le FGM les distingue des matériaux composites conventionnels comme le montre la figure I.2 (Koizumi and Niino, 1995). Le résultat est un gradient déterminé par les propriétés matérielles du FGM. Dans certains cas, il peut y avoir un FGM composé d'un même matériau, mais de microstructure différente (Figure I.3).

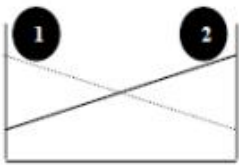
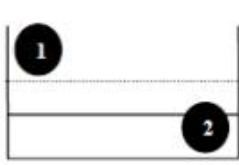
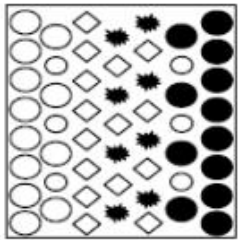
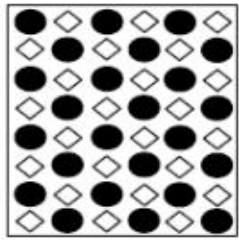
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibres ✱</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I. 2 Variation des propriétés des composites conventionnels et des FGMs (Koizumi and Niino, 1995).

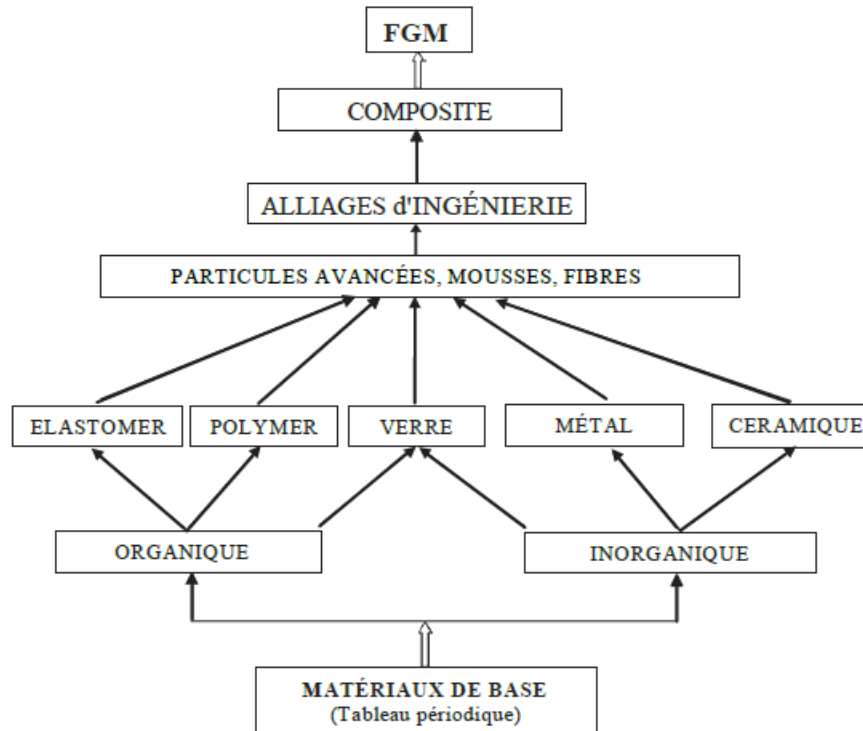
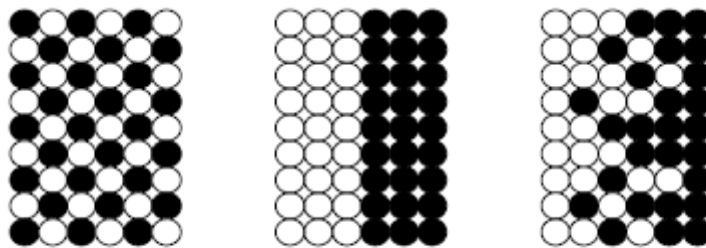


Figure I. 3 Représentation hiérarchique des matériaux modernes.

Un modèle simple illustrant les différences entre les FGM et les matériaux conventionnels est illustré à la figure I.4 : (a) un matériau plan composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau fonctionnellement gradué. Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié à une à une frontière à l'interface de deux matériaux.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué (c)

Figure I. 4 La distribution composante des matériaux (Yoshihisa Uchida, 2004).

Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de celles des matériaux plans et reliés. C'est pourquoi, les FGM sont intéressent en ce qui concerne leur application dans les domaines industriels, étant donné qu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, un FGM constitué de métal et de céramique a des caractéristiques de conductivité

thermique et de résistance métallique du côté métal et de résistivité aux températures élevées du côté céramique.

I.3 Méthodes de production des FGM

I.3.1 Méthodes de coulée centrifuge (*Centrifugal casting methods*)

Cette méthode dépend de la force centrifuge due à la différence de la densité entre deux matériaux, dont l'un est le métal de base, et les particules de renfort, où le métal fondu est versé après un mélange approprié par un processus d'agitation à l'intérieur d'un moule rotatif, comme illustré à la Figure I.5.

Dans la production de FGM, il existe deux différents types de machines de coulée centrifuge, l'un vertical, utilisé dans la production de pièces courtes et l'autre, horizontal, utilisé dans la production de pièces longues (Mahmood Ali, 2019).

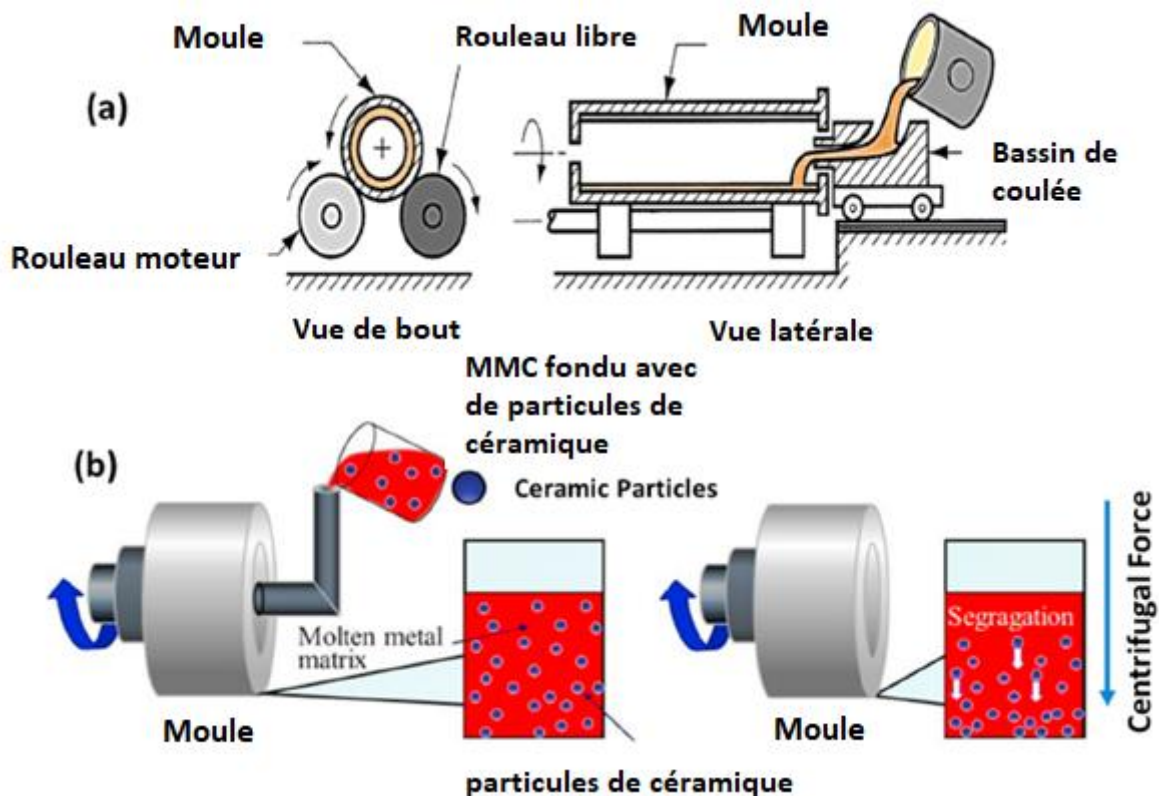


Figure I. 5 (a) Machine de coulée centrifuge Horizontale (El-Galy et al., 2019), et (b) Concept de ségrégation de particules lors de la production des FGM (Jamian et al., 2019).

I.3.2 Métallurgie des Poudres

C'est l'une des méthodes les plus importantes pour produire des FGM en vrac avec des caractéristiques de gradient discontinu (Kırmızı et al., 2019; Strojny-Nędzka et al., 2016). Cette

méthode utilise quatre étapes essentielles de production, à savoir : le mélange, l'empilement, le pressage et le frittage, comme illustré sur la figure I.6 (Watanabe et al., 2015) .

La première étape est le mélange de la poudre des matériaux choisis à des proportions bien déterminées selon les exigences des propriétés graduées.

La deuxième étape consiste à empiler le mélange séquentiellement dans le moule en fonction de la répartition spatiale des matériaux. L'étape suivante est le compactage de la poudre empilée pour donner force et intégrité (Saxena et al., 2019).

Finalement, le frittage aura généralement lieu à une température inférieure au point de fusion dans le composant principal.

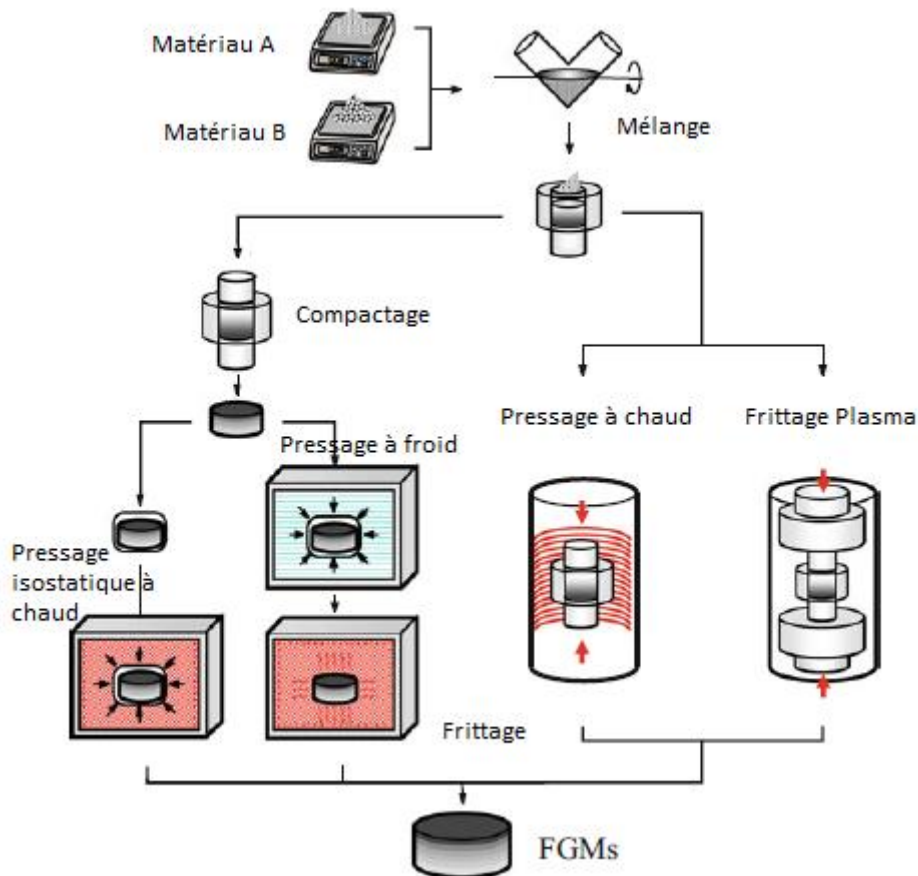


Figure I. 6 Principales étapes de la métallurgie des poudres pour produire des FGM (Watanabe et al., 2015)].

I.3.3 La méthode de pulvérisation thermique

La méthode de pulvérisation thermique est l'une des méthodes essentielles utilisées dans la production de l'FGM pour créer un revêtement de surface avec des dimensions minces grâce à un processus de pulvérisation (Majumdar and Manna, 2015).

La source de chaleur est utilisée pour faire fondre les matières premières pour le revêtement, puis en traitant les gaz et en les pulvérisant sur un matériau de base, ces matières fondues ou liquides sont pulvérisées jusqu'à ce qu'elles se solidifient et forment une couche solide comme indiqué sur la Figure I.7.

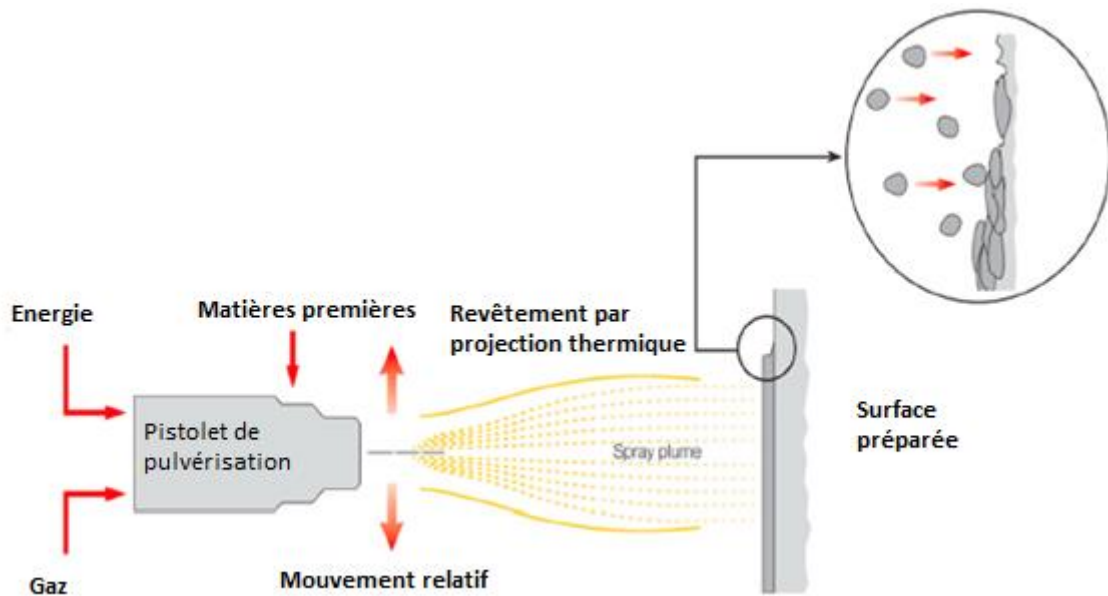


Figure I. 7 Diagram Schématique du process de pulvérisation thermique (Metco, n.d.)

I.3.4 Dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapour Deposition Method)

Le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) est un processus adopté pour fabriquer des matériaux solides de haute qualité à l'aide d'un système de dépôt sous vide.

Cette méthode est accomplie en insérant la substance qui doit être enduite à l'intérieur de la chambre sous vide, puis en vaporisant le matériau de revêtement jusqu'à ce que le matériau soit vaporisé comme indiqué sur la figure I.8.

Récemment, la méthode CVD a été utilisée pour produire un film FGM mince pour des applications de revêtement avec des propriétés graduées afin d'améliorer les propriétés mécaniques ainsi que la résistance à la corrosion et à l'usure (El-Galy et al., 2019).

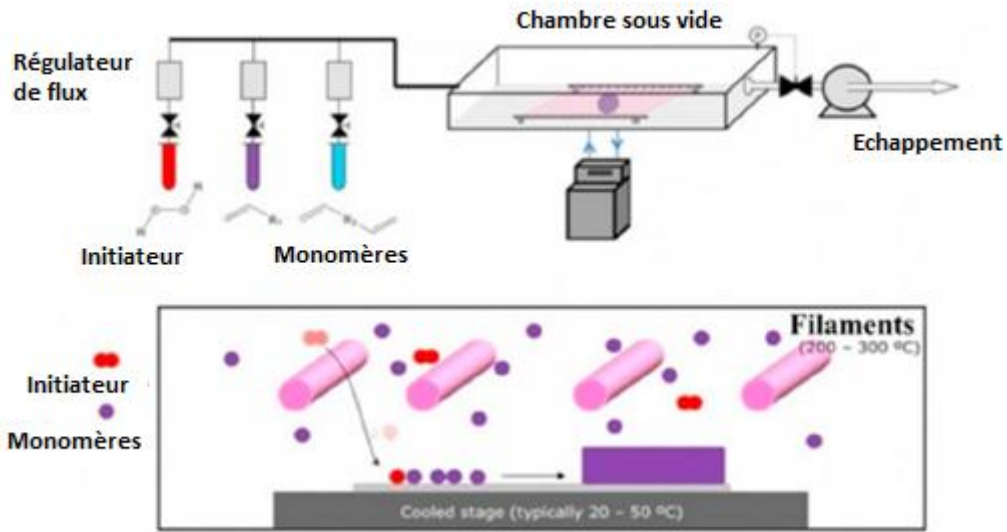


Figure I. 8 Diagram Schématique du process CVD (El-Galy et al., 2019).

I.4 Classification des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) peuvent généralement être classés en trois groupes différents de gradient : composition, microstructure et porosité comme le montre la figure I.9 (Mahmoud and Elbestawi, 2017).

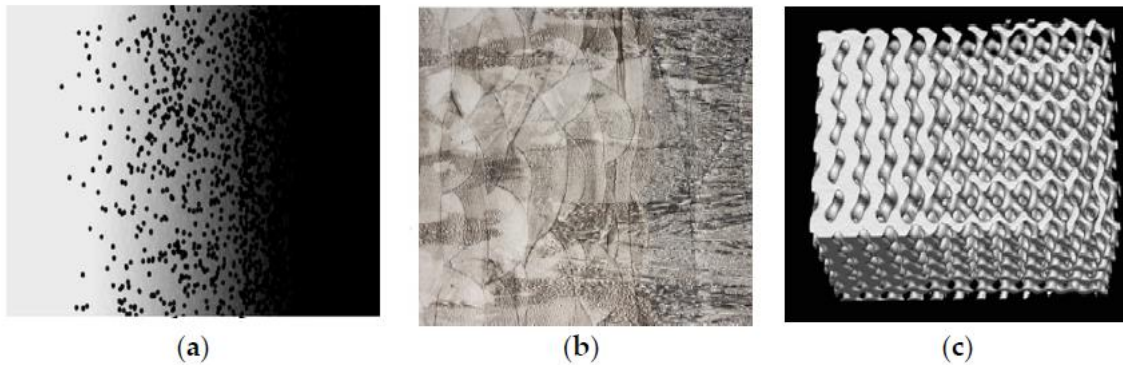


Figure I. 9 Exemple typique de trois types différents de gradients de FGM (Mahmoud and Elbestawi, 2017)

I.4.1 Gradient de composition chimique

Il s'agit de faire varier la composition chimique en matériaux mono ou polyphasiques en tenant compte de la solubilité des éléments. Les phases et les compositions varient à l'intérieur du matériau, ce qui donne différentes phases avec des compositions différentes (Mahmoud and Elbestawi, 2017).

I.4.2 Gradient de microstructure.

Un matériau fonctionnellement gradué de gradient microstructural est un autre type de FGM, dans lequel la microstructure est conçue de manière à produire différentes microstructures dans le matériau, qui sont amenées à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau (Mahmoud and Elbestawi, 2017).

I.4.3 Gradient de porosité

Le Gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite (Mahmoud and Elbestawi, 2017).

I.5 Les Lois de mélange des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Considérant une plaque rectangulaire élastique. Comme le montre la figure I.10, les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson, sont différents sur les surfaces supérieure et inférieure. Cependant, le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$.

Le module de Young varie dans le sens de l'épaisseur des plaques FGM en fonction des fonctions de loi de puissance (P-FGM), des fonctions exponentielles (E-FGM) ou des fonctions sigmoïdes (S-FGM) (Chi and Chung, 2006).

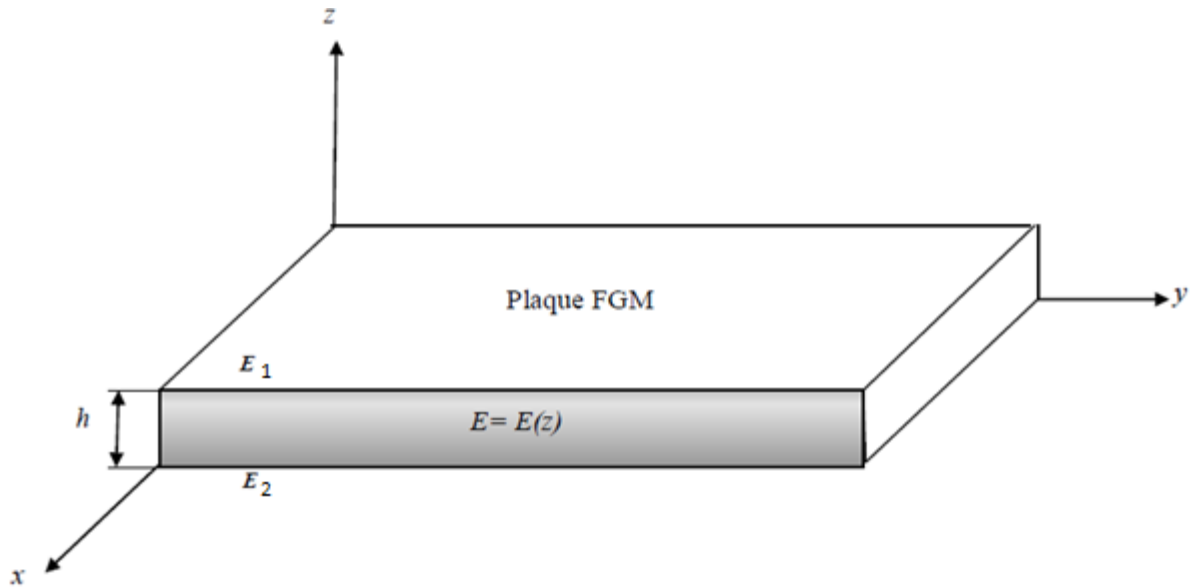


Figure I. 10 Géométrie d'une plaque en FGM

I.5.1 Loi de mélange en puissance P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad \text{I.1}$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao and Wang, 1995).

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad \text{I.2}$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure ($z = h/2$) et de la surface inférieure ($z = -h/2$) de la plaque FGM respectivement. La variation de la fraction volumique dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la Figure I.11, où il apparaît qu'elle change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

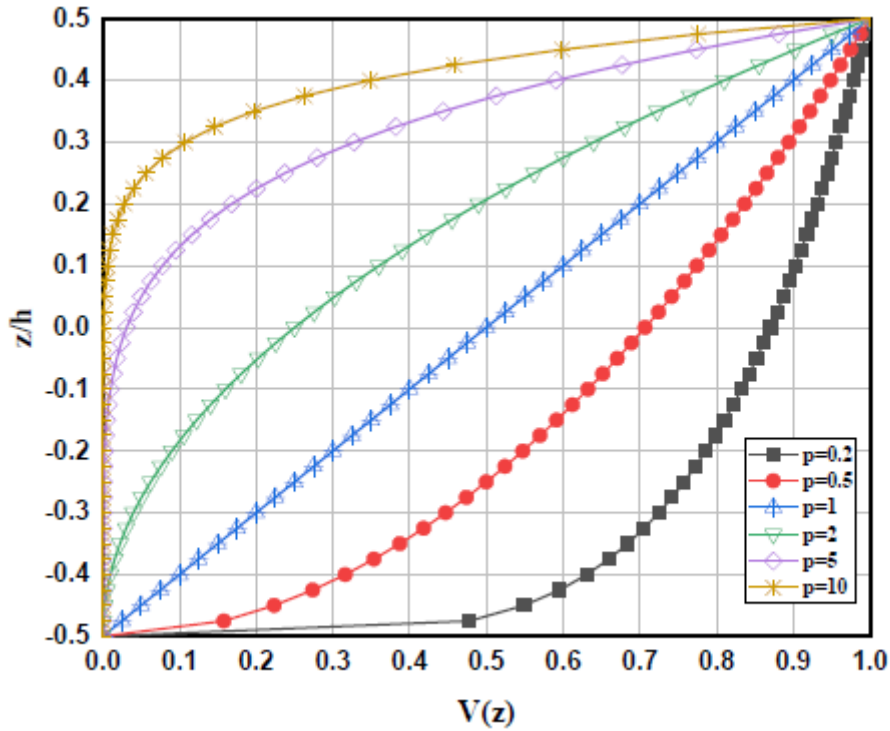


Figure I. 11 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.5.2 Loi de mélange sigmoïde S-FGM

Chung et al (Chung and Chi, 2001) ont défini la fraction de volume en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une distribution régulière des contraintes entre toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.3}$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.4}$$

En utilisant la loi de mélange, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.5}$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq h \leq 0 \quad \text{I.6}$$

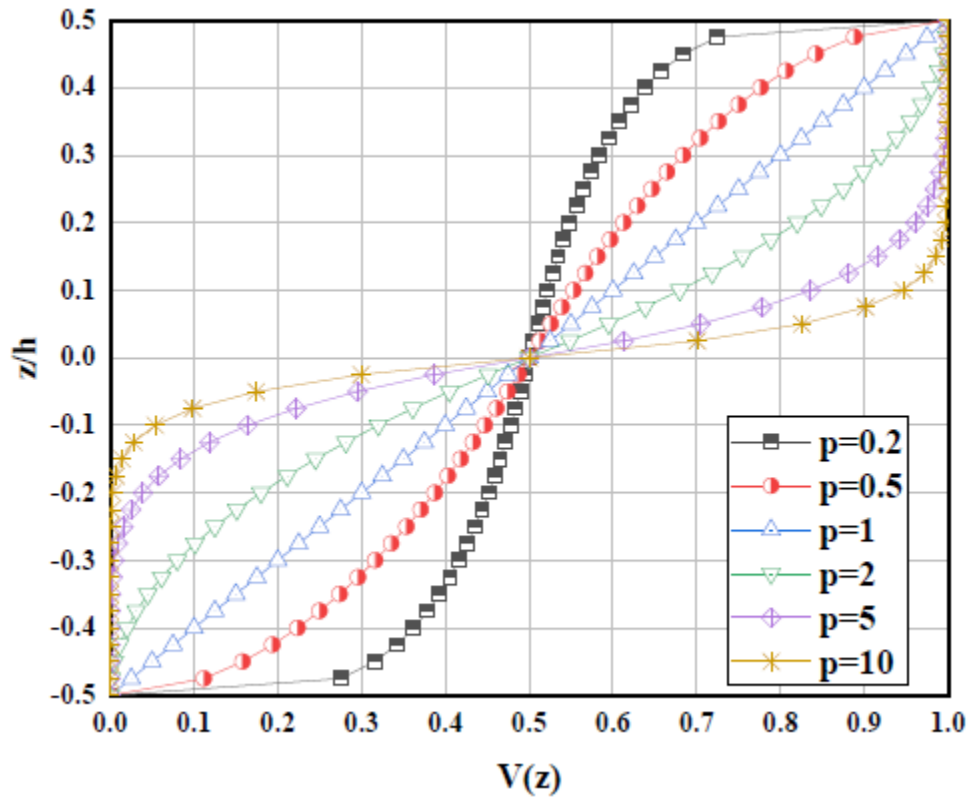


Figure I. 12 Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.5.3 Loi de mélange exponentielle E-FGM

De nombreux chercheurs ont utilisé la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des FGM comme suit (Delale and Erdogan, 1983)

$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad \text{I.7}$$

Avec

$$A = E_2 \text{ et } B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure. I.13.

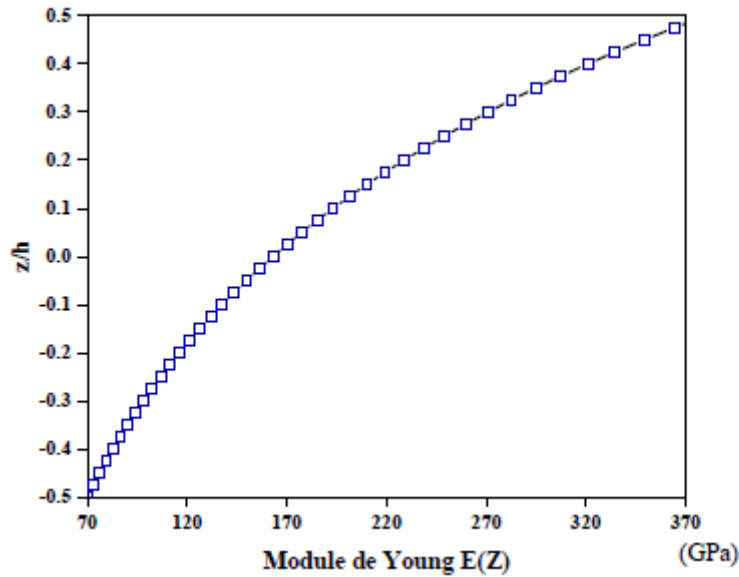


Figure I. 13 Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

I.6 Avantages et inconvénients des FGM et leurs domaines d'applications

Le matériau FGM présente comme tout autre matériau, des avantages et des inconvénients dans son utilisation que nous allons citer ci-dessous. Nous allons présenter les domaines d'application des FGM et citer quelques exemples d'emploi du FGM dans le domaine du génie civil.

Avantages du FGM

- Le FGM en tant que couche d'interface pour connecter deux matériaux incompatibles peut grandement améliorer la force de liaison.
- Le revêtement et l'interface du FGM peuvent être utilisés pour réduire la contrainte résiduelle et la contrainte thermique.
- Le matériau FGM a la capacité de contrôler la déformation, la réponse dynamique, l'usure, la corrosion, etc.
- Le FGM offre également la possibilité de tirer parti des avantages de différents types de matériaux, par exemple la céramique et les métaux.

Inconvénients du FGM

- Des recherches et un examen plus approfondi sont encore nécessaires sur les propriétés physiques du modèle de matériau.
- Les coûts de production restent encore élevés.

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) est applicable dans de nombreux et larges domaines tels que les matériaux de construction, les matériaux de conversion d'énergie, l'aéronautique, l'aérospatiale, le nucléaire et les semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés opposées : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production de matériaux légers, résistants et durables (Figure I.14).

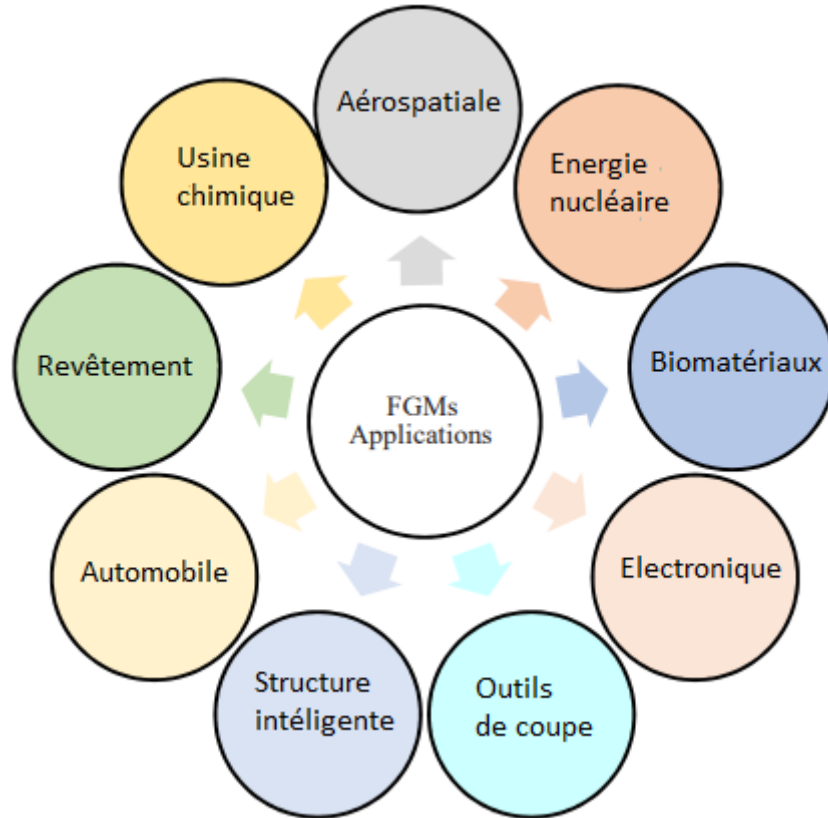


Figure I. 14 Divers domaines d'application des FGM (Saleh et al., 2020)

Dans le domaine du génie Civil, on trouve l'application des FGM dans les bétons à gradients de propriétés (Herrmann and Sobek, 2016), les systèmes d'isolations, le domaine de la chaussée (asphalte modifié), le revêtement des tabliers de pont et l'amélioration des joints dans la charpente métallique.

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les matériaux fonctionnellement gradués « FGM », leur classification selon les différents types, les différents process de leurs fabrications, les modèles d'homogénéisation de ce type des matériaux et enfin nous avons cité des exemples concrets sur leurs emplois dans le domaine du génie civil.

***Chapitre II. Les Plaques
FGM : Théorie, Stabilité,
Fondation Elastique et
Porosité***

II.1 Théories des plaques

Les plaques isotropes et les plaques composites sont utilisées dans divers domaines de l'ingénierie telle que la construction civile, militaire, aérospatiale, marine et automobile. Elles sont soumises à différents types de chargements qui nécessitent des matériaux avec des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées, ce qui a poussé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

En 1888, Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff pour fonder une théorie des plaques minces également appelée théorie classique (CLPT) ou théorie de Kirchhoff-Love. À l'aide des travaux de Rayleigh (Rayleigh, 1877), Timoshenko (Timoshenko, 1921), Reissner (Reissner, 1945) et Kapania (Kapania, 1989), Mindlin a présenté une théorie des plaques semi-épaisses appelée théorie des déformations du premier ordre (FSDT). La limite des théories classiques et du premier ordre (applicables pour les plaques minces et semi-épaisses) a mené au développement de théories d'ordre élevé qui sont venues pour améliorer l'évaluation de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

II.1.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT)

La théorie classique des plaques minces (CLPT) se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff : L'épaisseur est faible donc les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles, on reste en petites déformations, les sections normales au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation en négligeant les effets de déformation de cisaillement transverse. Cette théorie est très bien décrite dans Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959) et Reddy (1997) .

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit (figure II.1) :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad \text{II.1}$$

Où :

u_0 et v_0 sont les déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement, et w_0 la flèche de la plaque,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$: les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan (O, x, y) et l'épaisseur est orientée selon l'axe $z \in [-h/2 ; h/2]$. Comme ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il ne donne pas des résultats précis pour les plaques épaisses.

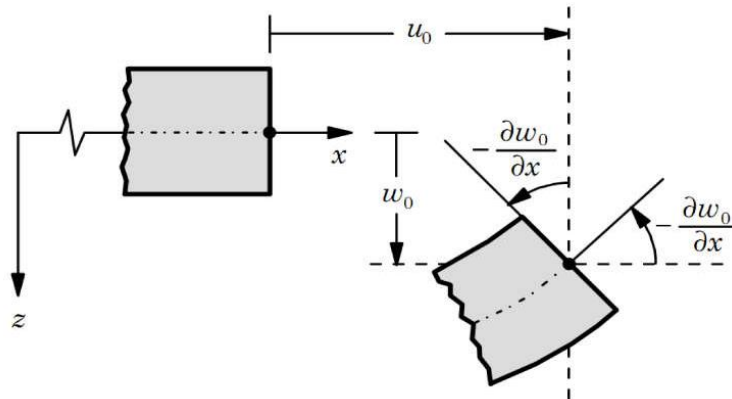


Figure II. 1 Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

II.1.2 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans des plaques moyennement épaisses, les déformations dues au cisaillement transverse doivent être prises en compte. La théorie de déformation du premier ordre est issue de la théorie classique, mais qui tient en compte l'effet de cisaillement transverse. Toutefois, il est nécessaire d'ajouter un facteur de correction de cisaillement, car les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Cette théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) est due à Reissner (1945) et Mindlin (1951).

Elle est basée sur l'hypothèse cinématique de Mindlin suivante : la normale reste droite, mais non perpendiculaire à la surface moyenne dans la configuration déformée à cause de l'effet du cisaillement transverse (Figure II.2).

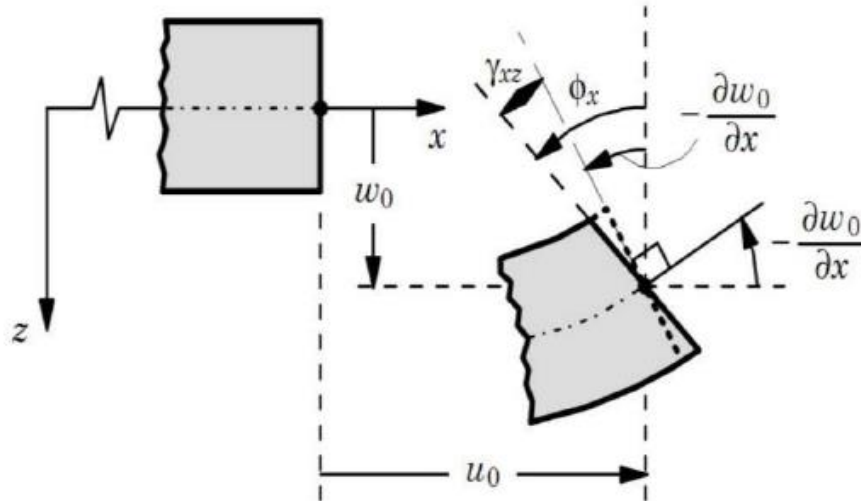


Figure II. 2 Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad \text{II.2}$$

Où :

u_0 et v_0 sont les déplacements de membrane dans les direction x et y respectivement, et w_0 la flèche de la plaque,

ϕ_x, ϕ_y : les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y respectivement.

II.1.3 Théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Ces théories sont une évolution de la théorie classique des plaques (CPT) et de la théorie du premier ordre (FSDT). Elles ont pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Contrairement aux précédentes théories, les HSDT sont basées sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur (figure II.3). Ces modèles n'exigent pas de facteurs de correction en tenant compte l'effet de cisaillement. Les théories d'ordre élevé sont applicables à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambement, ...). Kapania et Raciti (1989) ont réalisé une revue détaillée des théories de déformation de cisaillement utilisés en statique, en vibration et en flambement de poutres et de plaques composites. Patel et al. (2004) ont traité une structure coque assez complexe géométriquement avec un développement au 3ème ordre, afin d'améliorer l'état de déformation. Ils ont introduit l'effet de

zig-zag qui assure la continuité sur les interfaces, mais le nombre de paramètres augmente avec le nombre de couches. Zen Wu et al. (2006) ont proposé une théorie intéressante du point de vue des résultats sur les contraintes qui assure la continuité sur les interfaces et les conditions nulles (en bas et en haut). Elle définit sur chaque couche un champ de déplacement différent et utilise 11 degrés de liberté par nœud. Elle est communément appelée « High ordre shear refined theory ». D'autres auteurs ont utilisé des théories d'ordre élevé pour étudier le comportement des structures (poutres et plaques) en matériaux composites et en matériaux à gradients de propriétés FGM.

Pour les théories d'ordre élevé, le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) = w_0(x, y), \end{cases} \quad \text{II.3}$$

Où :

u_0 et v_0 sont les déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement, et w_0 la flèche de la plaque,

φ_x, φ_y : les rotations autour des axes y et x , respectivement avec $\left(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$,

$f(z)$: représente la fonction de cisaillement transverse le long de l'épaisseur contrairement à la théorie classique où $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre $f(z) = z$.

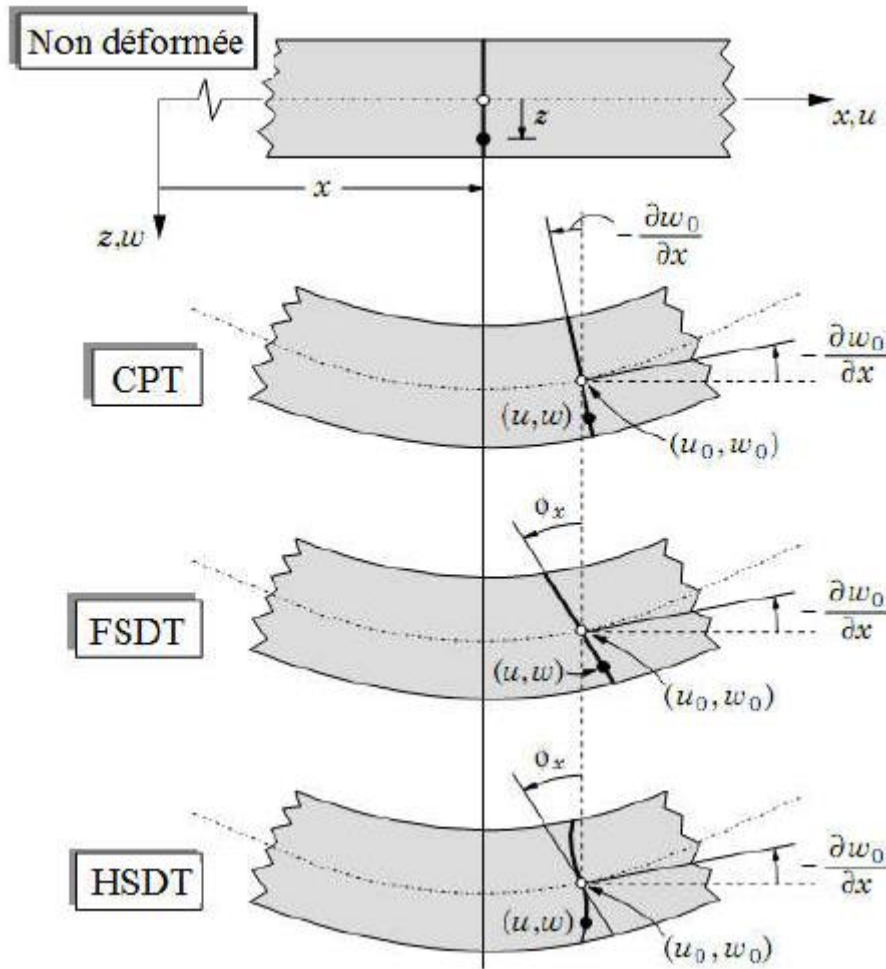


Figure II. 3 Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CLPT) et (FSDT)

Plusieurs chercheurs ont proposé des fonctions de cisaillement $f(z)$ pour franchir des limites des théories du premier ordre (Akavci and Tanrikulu, 2015; Ambartsumyan, 1991; Levinson, 1981; Lo et al., 1977; Nelson and Lorch, 1974; Reissner, 1945; Tounsi et al., 2013; Touratier, 1991), ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée par des fonctions de cisaillement $f(z)$.

Le tableau II.1 résume les théories les plus utilisées dans la littérature.

Tableau II. 1 Description des différentes théories de plaques d'ordre supérieur

Théorie	Intitulé	Fonction de Cisaillement $f(z)$	Domaine de validité
Ambartsumyan (1991)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner (1945)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	
Levinson, (1981) et Reddy (1984)	Théorie d'ordre supérieur (parabolique)	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	
TSDPT, Touratier (1991)	Théorie d'ordre supérieur (trigonométrique)	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	
ESDPT, Karama (2003)	Théorie d'ordre supérieur (exponentielle)	$ze^{-2(z/h)^2}$	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Tounsi (2013)	Théorie d'ordre supérieur (trigonométrique)	$z - \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	
Akavci et Tanrikulu, (2015)	Théorie de déformation quasi-3D (hyperbolique)	$3.7z(1.27 \operatorname{Sech}^{0.65}(z/h) - 1)$	

II.1.4 Théorie raffinée des plaques

La théorie raffinée des plaques (RPT : Refined Plate Theory) a été développée par Shimpi (1999), Ait Atmane et al. (2010) et Kim (2009) pour étudier la flexion, le flambement et les vibrations libres des plaques stratifiées, FGM et sandwich. Le nombre d'inconnues passe de quatre (u_0, v_0, w_b et w_s) au lieu de cinq pour les théories classiques (u_0, v_0, w_0, θ_x et θ_y). Cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique du cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions aux

limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \\ w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y), \end{cases} \quad \text{II.4}$$

Où :

w_b , w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement, respectivement.

II.2 Revue littéraire sur l'étude des plaques FGM reposant sur une fondation élastique

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux structures fonctionnellement graduées pour leurs caractéristiques telles que l'élimination de la concentration de contrainte présente dans les structures composites conventionnelles.

Talha et Singh (2010) ont étudié le comportement statique et aux vibrations libres de plaques fonctionnellement graduées en utilisant une modification spéciale du déplacement transversal avec des modèles d'éléments finis en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé. Abdelaziz et al. (2011) ont présenté un nouveau déplacement utilisant la théorie d'ordre élevé pour étudier la réponse statique d'une plaque sandwich fonctionnellement graduée. Mantari et al. (2011) ont développé une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse statique des plaques, coques composites et sandwich. Mantari et Soares (2012) ont présenté une théorie hybride de déformation de cisaillement quasi-tridimensionnelle généralisée pour l'analyse de flexion de plaques fonctionnellement graduées.

Natarajan et Manickam (2012) ont étudié la flexion et le comportement vibratoire libre des plaques et sandwich fonctionnellement gradués en utilisant la méthode des éléments finis basée sur la théorie d'ordre élevé. Bessaim et al. (2013) ont développé une nouvelle théorie d'ordre élevé comprenant la théorie du cisaillement transversal et de la déformation normale pour l'analyse de flexion et de vibration libre de plaques sandwich isotropes fonctionnellement gradué. Jha et al. (2013) ont analysé les contraintes et la vibration libres de plaques rectangulaires fonctionnellement graduées simplement supportées en utilisant une nouvelle théorie de plaque de cisaillement d'ordre élevé. Thai et Kim (2013) ont étudié l'analyse de

flexion et de vibration libre de plaques fonctionnellement graduées en utilisant une théorie raffinée de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Bousahla et al. (2013) ont développé une nouvelle théorie d'ordre élevé incluant l'effet d'étirement pour l'analyse statique de plaques composites avancées basées sur la position de la surface neutre. Fekrar et al. (2014) ont développé une théorie de cisaillement sinusoïdal et de déformation normale pour la flexion de plaques à gradation exponentielle, basée sur la position de la surface neutre.

Daouadji et al. (2013) ont étudié le comportement en flexion d'une plaque fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique et soumise à une charge hygro-thermomécanique en utilisant une théorie de cisaillement élevée. Thai et al. (2016) ont présenté une théorie de cisaillement et de déformations normales à quatre inconnues pour les analyses statiques, dynamiques et de flambement de plaques fonctionnellement graduées soumises à des charges mécaniques.

Différentes théories élevées de déformation de cisaillement avec et sans effet d'étirement pour étudier la réponse mécanique sont développées en utilisant une approche analytique afin d'évaluer le comportement des structures fonctionnellement gradées ((Avcar, 2019; Ayache et al., 2018; Benadouda et al., 2017; Boukhari et al., 2016; Hassen et al., 2015; Younsi et al., 2018; Zarga et al., 2019).

De nombreux chercheurs ont étudié en profondeur des structures composites et fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques, en raison de leur utilisation dans différents domaines de l'ingénierie (Ait Atmane et al., 2017; Avcar, 2016; Avcar and Mohammed, 2018; Boulefrakh et al., 2019; Chaabane et al., 2019; Civalek et al., 2006; Yaghoobi and Fereidoon, 2014; Yazid et al., 2018). Benyoucef et al. (2010) ont examiné la réponse statique des plaques fonctionnellement graduées soumises à des charges mécaniques et reposant sur une fondation élastique en utilisant un modèle de déplacement hyperbolique.

Plusieurs différentes théories de cisaillement raffinées pour l'analyse statique, des vibrations, du flambement, et de l'hygro-thermo-mécanique de plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques ont été étudiées (Lee et al., 2015; Thai et al., 2013; Zaoui et al., 2019; Zenkour et al., 2014). Wattanasakulpong et Chaikittiratana (2015) étudiaient le comportement statique et dynamique des plaques composites renforcées de nanotubes de carbone reposant sur la fondation élastique Winkler – Pasternak. Gupta et al. (2018a) ont analysé le comportement en flexion et en vibration d'une plaque à gradation fonctionnelle

reposant sur une fondation élastique en utilisant une théorie développée de cisaillement non polynomial d'ordre supérieur et de déformation normale utilisant les éléments finis.

Zenkour et Radwan (2018) ont étudié l'analyse des contraintes et des déplacements d'une plaque FGM reposant sur des fondations Winkler – Pasternak sous diverses conditions aux limites en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Nebab et al (2019) ont étudié la réponse à la flexion de plaques fonctionnellement graduée reposant sur des fondations élastiques type Pasternak-Winkler soumises à des charges mécaniques en utilisant une théorie de déformation de cisaillement supérieur à quatre variables.

II.3 Modèles de fondations

Pour décrire l'interaction des plaques FGM et la fondation, les chercheurs ont proposé différents types de modèles de fondation (Kerr, 1964). Le plus simple est le modèle Winkler, qui considère la fondation comme une série de ressorts indépendants sans effets de couplage entre eux, ce qui entraîne l'inconvénient de déflexions discontinues des surfaces en interaction avec la plaque. Zhemochkin et Sinitsyn (1947) ont introduit une fondation élastique combinée, qui est la fondation classique recouverte d'une couche de fondation Winkler. Filonenko-Borodich (1940) ont développé un modèle Winkler amélioré en reliant les extrémités supérieures des ressorts avec une membrane élastique sous une contrainte de traction constante. Hetényi (1946; 1950) a créé une interaction entre les ressorts en incorporant une plaque supplémentaire dans la fondation Winkler. Vlasov (1949) a également suggéré un modèle à deux paramètres plus raffinés. Gorbunov-Posadov (1949) a examiné les problèmes de flexion des plaques et des poutres reposant sur une fondation linéairement déformable. Pasternak (1954) a amélioré le modèle de Winkler en reliant les extrémités des ressorts à une plaque, ou «couche de cisaillement», constituée d'éléments verticaux incompressibles capables de se déformer uniquement en cisaillement latéral. Depuis, le modèle Pasternak a été largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structure – fondation (Filipich and Rosales, 2002; Huang et al., 2008; Matsunaga, 2000; OMURTAG, 1998; Shen, 1995; Zhou et al., 2004).

II.3.1 Model de Winkler

Pour calculer les contraintes s'exerçant sous une fondation reposante sur un milieu élastique, Winkler a supposé que la réaction du sol à chaque point sous la fondation est proportionnelle à la déflexion de la fondation à ce point (figure II.4). La déformation verticale caractéristique de la fondation est donc définie par l'utilisation de ressorts identiques, indépendants, étroitement

espacés, discrets et linéairement élastiques. La constante de proportionnalité de ces ressorts est connue comme étant le coefficient de réaction du sol (k_w).

$$p(x) = k_w w(x) \quad \text{II.5}$$

Avec $p(x)$: pression de réaction du sol et $w(x)$: déplacement vertical (tassement du sol).

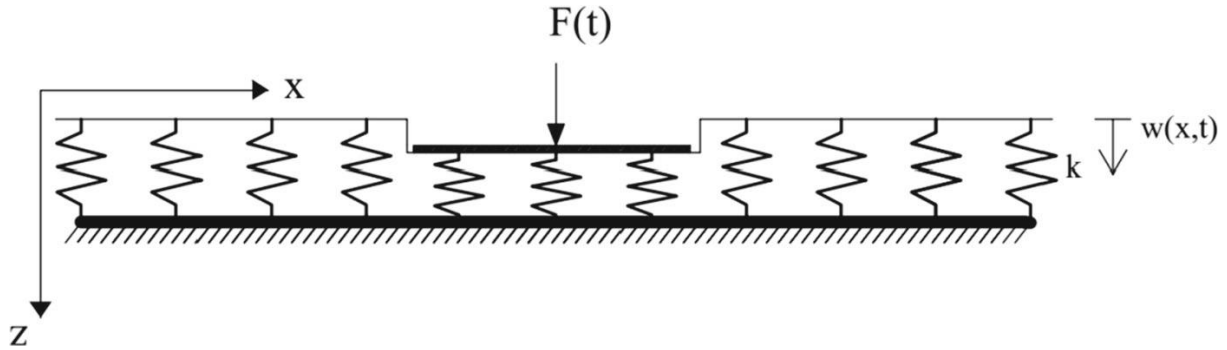


Figure II. 4 Modèle de Winkler (Younesian et al., 2019)

Malgré la simplicité du modèle Winkler, il a deux inconvénients majeurs. Premièrement, il ne prend pas en compte l'interaction entre les ressorts, ce qui revient à négliger le cisaillement vertical dans le sol. En conséquence, une discontinuité de déplacement se crée entre la zone chargée et la zone non chargée sous la fondation. Deuxièmement, il ne tient pas compte de la plasticité pouvant se produire dans le terrain.

Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak (1954) qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre. Dès lors, le modèle de Pasternak était largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions (structures-bases).

II.3.2 Model de Pasternak

Le modèle de Pasternak consiste à introduire un certain degré d'interaction entre les ressorts adjacents du massif de Winkler. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle k_p du sol en plus de la rigidité normale (ou de Winkler) k_w (Foroughi and Azhari, 2014). Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak : un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de Winkler, alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de Pasternak.

$$f_e = k_w w - k_p \nabla^2 w$$

II.6

Avec : f_e [N/m] la charge linéique s'appliquant sur le radier, k_p le module de cisaillement du sol dans le plan horizontal [N/m], k_w le module de réaction du sol [Pa/m] et w la déformée du terrain.

II.4 Les plaques fonctionnellement graduées en présence de la porosité

Les FGM sont des matériaux avancés composés de différents matériaux constitutifs tels que des métaux, des céramiques ou des polymères aux propriétés variables dans une direction spatiale spécifique. Au regard de la complexité des processus de fabrication des FGM (Sopyan et al., 2007), des micro-vides et des porosités se produisent souvent en raison de la grande différence de température de solidification des constituants du matériau FGM.

L'étude des matériaux fonctionnellement gradués poreux s'est imposée comme sujet de recherche d'intérêt, notamment en ce qui concerne la modélisation des distributions de porosité et les estimations correspondantes de leurs propriétés à la fois en situation réelle ou bien à travers les perspectives de modélisation du matériau.

Les matériaux fonctionnellement gradués poreux (FGP) combinent à la fois des caractéristiques de porosité et de gradient fonctionnel, où la porosité peut avoir une évolution graduelle à travers le volume, offrant des propriétés souhaitables pour certaines applications (comme dans les implants biomédicaux), et indésirables dans d'autres applications comme l'aéronautique, où les pores peuvent causer de graves problèmes (Zhang and Wang, 2017).

Dans une plaque FGM rectangulaire typique, il existe plusieurs configurations de gradient de porosité possibles. Indépendamment de la distribution spécifique, l'hétérogénéité et le gradient spatial des matériaux poreux joueront un rôle extrêmement important dans les propriétés mécaniques résultantes (Legrand et al., 2019).

Le module de Young et le module de cisaillement sont fortement influencés par plusieurs facteurs, du processus de fabrication, à la taille, la forme et la distribution des pores. Par conséquent, la prédiction analytique des propriétés des matériaux poreux n'est pas simple en raison du caractère aléatoire présent dans leurs structures et de la nécessité d'une connaissance de la microstructure la plus précise possible afin d'obtenir une prédiction numérique significative (Kováčik, 2006).

Concernant les distributions de porosité, Nguyen et al. (2018) ont étudié le comportement mécanique des FGP. Pour cela, ils ont pris en compte deux distributions de porosité différentes, variant à la fois dans le sens de l'épaisseur (à savoir, les distributions dites régulières et inégales). Zhang et Wang (2017) ont étudié huit structures de matériaux poreux différentes avec différentes distributions de gradient et de pores, et les ont soumis à des tests mécaniques afin d'évaluer les propriétés importantes des matériaux comme le module de Young. Avec ce travail, ils ont développé des techniques pour estimer le module de Young effectif des matériaux poreux fonctionnellement gradué. Après avoir vérifié qu'il existe une relation évidente entre cette propriété du matériau et la porosité, la relation entre les deux n'est pas nécessairement linéaire. Cependant, les résultats expérimentaux constituent une bonne base pour valider les propriétés des matériaux obtenues grâce à des modèles théoriques.

II.4.1 Modèles de porosité

L'apparition des pores au cours du processus de fabrication est modélisée à l'aide de différentes fonctions mathématiques telles que la loi exponentielle, la loi de puissance et la règle du cosinus. La plupart du temps, pour l'analyse des structures FGM, de nombreux modèles de formulation de la distribution des micro-vides dans des structures fonctionnellement graduées ont été proposés. On peut citer les porosités uniformes, non uniformes, logarithmiques-non uniformes et masse volumique.

II.4.1.1 Plaque FG avec porosité uniforme

Le premier modèle de distribution de la porosité a été développé par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) où la porosité est constante sur toutes l'épaisseur de la plaque FG (Fig.II.5a). Les propriétés effectives des matériaux de la plaque FG obtenues en introduisant la porosité uniforme sont données par l'équation (II.7).

$$P(z) = P_c \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p - \frac{\xi}{2} \right) + P_m \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p - \frac{\xi}{2} \right) \quad \text{II.7}$$

Où ξ est le paramètre qui tient compte de l'effet de la porosité.

En appliquant l'équation (II.7) sur les propriétés effectives de la plaque FG, les formulations du module de Young " $E(z)$ ", de la densité massique " $\rho(z)$ " et du coefficient de Poisson " $\nu(z)$ " peuvent être exprimées par les équations (II.8) (Wattanasakulpong and Ungbhakorn, 2014)

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{\xi}{2} (E_c + E_m) \quad \text{II.8a}$$

$$v(z) = (v_c - v_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + v_m - \frac{\xi}{2} (v_c + v_m) \quad \text{II.8b}$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \quad \text{II.8c}$$

II.4.1.2 Plaque FG avec porosité non uniforme

L'infiltration des matériaux dans la zone intermédiaire de la plaque est très difficile et peut augmenter le risque de production de micro-vides. En revanche, l'infiltration du matériau est facile dans les surfaces libres (surfaces supérieure et inférieure) de la plaque avec un risque de production de micro-vides. Se basant sur ces considérations, Wattanasakulpong et Ungbhakorn ont développé un autre modèle de distribution de porosité (la porosité varie en fonction de l'épaisseur). Les propriétés effectives des matériaux avec une distribution impaire (voir Figure.II.5b) sont données par les équations (II.9) :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{\xi}{2} (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{II.9a}$$

$$v(z) = (v_c - v_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + v_m - \frac{\xi}{2} (v_c + v_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{II.9b}$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{II.9c}$$

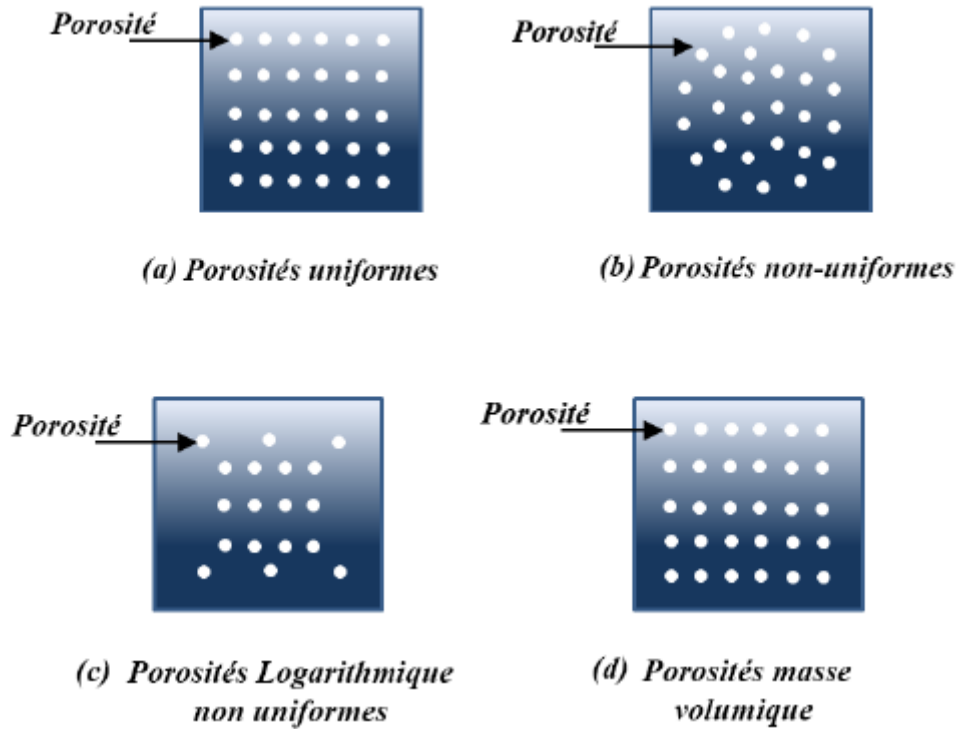


Figure II. 5 Illustration de différents modèles de variations de la porosité.

II.4.1.3 Plaque FG avec porosité logarithmique- non uniforme

Le troisième modèle a été proposé par Gupta et Talha (2018b) où la distribution de la porosité varie selon une fonction logarithmique à travers l'épaisseur de la plaque comme le montre la figure II.5c. Les propriétés effectives du matériau avec une distribution logarithmique impaire sont résumées dans les équations (II.10) :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{II.10a}$$

$$v(z) = (v_c - v_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + v_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) (v_c + v_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{II.10b}$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{II.10c}$$

II.4.1.4 Plaque FG avec porosité type masse volumique

Le quatrième modèle de la porosité est basé sur la densité de masse réelle et apparente. Les formulations de la masse volumique réelle et de la masse volumique apparente peuvent être traduites par l'équation (II.11) :

$$m_0 = \int_h \rho(z) dz \text{ at } \xi = 0 \text{ et } m_1 = \int_h \rho(z) dz \text{ at } \xi > 0 \quad \text{II.11}$$

Avec

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \quad \text{II.12}$$

Où " m_0 " et " m_1 " sont la densité de masse réelle et apparente respectivement. En supposant que le module d'élasticité dépend de la densité du matériau, l'expression du module de Young proposée par (Eltaher, 2018) sera donnée par l'équation (II.13) :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{m_0 - m_1}{m_0} (E_c + E_m) \quad \text{II.13}$$

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des différentes théories des plaques allant de la théorie classique, à la théorie du premier ordre et d'ordre élevé pour décrire la déformation des plaques. Chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Aussi, nous avons défini des modèles des milieux élastiques à savoir, le modèle de Winkler et celui de Pasternak. On conclut à travers ces définitions que le modèle de Winkler est le plus simple (un seul paramètre). Nous avons présenté une revue littéraire des principaux travaux sur l'étude du comportement des plaques FGM en présence de fondations élastiques.

Enfin, il était important pour nous d'aborder l'importance de la porosité dans le comportement des plaques FGM, car cette dernière influence directement le module de Young et le module de cisaillement.

Chapitre III. Formulation

Théorique

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, une théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement pour l'analyse de la flexion d'une plaque fonctionnellement graduée sous diverses conditions aux limites reposant sur une fondation élastique est exposée. La théorie proposée est basée sur l'hypothèse que des porosités peuvent être présentes dans une plaque fonctionnellement graduée, ce qui peut entraîner une diminution de la résistance des matériaux.

Pour prédire correctement le comportement en flexion de cette plaque imparfaite, une nouvelle répartition de la porosité en fonction de l'épaisseur de la plaque FG est supposée. Les équations gouvernantes de la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement sont dérivées en utilisant le principe du travail virtuel, et les solutions sont obtenues en utilisant la solution de Navier.

III.2 Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée de longueur a , largeur b et une épaisseur uniforme h , intégrée dans un milieu élastique sous différents types de conditions aux limites, comme représentées sur la figure III.1. Le milieu élastique est modélisé sous la forme de modèles à deux paramètres de Winkler-Pasternak pour exprimer l'interaction entre la plaque FGM et la fondation élastique.

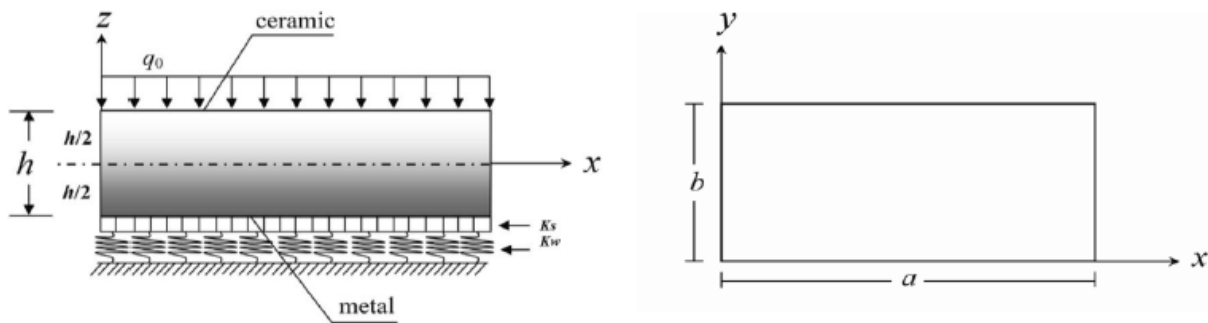


Figure III. 1 Représentation schématique d'une plaque rectangulaire FGM reposant sur une fondation élastique.

III.3 Propriétés des matériaux

La plaque est en aluminium (Al) et en alumine (Al_2O_3), dont les propriétés mécaniques varient en continu dans le sens de l'épaisseur uniquement. La surface supérieure ($z = h / 2$) de la plaque est en céramique, tandis que la surface inférieure ($z = - h / 2$) est en métal.

Le module de Young et la densité par unité de volume peuvent être déterminés selon Eltahar et al. (2018).

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\beta + E_m - \frac{m_0 - m}{m_0} (E_c + E_m) \quad \text{III.1}$$

$$m_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \text{ a } \xi = 0 \quad \text{III.2}$$

$$m = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \text{ a } \xi > 0 \quad \text{III.3}$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\beta + \rho_m - \frac{\xi}{2} (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{III.4}$$

Où les indices c et m désignent respectivement la céramique et le métal. β est l'indice matériel et ξ est le facteur prenant en compte la porosité. Le coefficient de Poisson est supposé constant avec $\nu = 0,3$ (Zenkour and Radwan, 2018).

III.4 Relations constitutives

Le champ de déplacement est exprimé par :

$$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{III.5a}$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{III.5b}$$

$$w(x, y, z) = w_b + w_s \quad \text{III.5c}$$

La fonction de forme $f(z)$ (fonction de gauchissement) est donnée selon Mantari et Granados (2015) :

$$f(z) = z - \sinh \frac{z}{h} e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad \text{III.6}$$

$f(z)$ représente la fonction de forme déterminant la répartition des déformations et contraintes transversales de cisaillement le long de l'épaisseur de la plaque.

Le champ de déplacement dans l'équation III.5 ne considère que quatre inconnues (u_0, v_0, w_b et w_s).

Les relations générales déformation-déplacement pour les petites déformations sont définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.7}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \text{III.8}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad \text{III.9}$$

Pour la plaque FG élastique et isotrope, les relations contraintes-déformations sont exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{III.10}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contraintes et déformations respectivement.

En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation III.1, les coefficients de rigidité c_{ij} , peuvent être écrits comme

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}, c_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}, c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad \text{III.11}$$

III.5 Équations d'équilibres

Sur la base du principe du travail virtuel, les expressions suivantes peuvent être obtenues :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad \text{III.12}$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation qui est calculée par

$$\delta U = \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \quad \text{III.13}$$

$$= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0] dA = 0$$

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad i = (x, y, xy) \quad \text{et} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) \quad \text{III.14}$$

δV est la variation du travail extérieur engendré par les forces extérieures appliquées à la plaque calculée par :

$$\delta V = - \int_A (q - R) \delta (w_b + w_s) dA \quad \text{III.15}$$

Où

R : est la densité de la force de réaction de la fondation, pour le modèle de fondation Pasternak

$$R = K_w w - K_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_p \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{III.16}$$

Où K_w est le module de réaction de la fondation (coefficient d'élasticité de la fondation) et K_p est le module de cisaillement de la plate-forme (coefficient de rigidité de cisaillement la fondation).

Les équations d'équilibre gouvernantes peuvent être dérivées de l'équation III.12 en intégrant les gradients de déplacement par parties et en mettant séparément les coefficients ∂u_0 , ∂v_0 , ∂w_b et ∂w_s égal à zéro.

$$\partial u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{III.17a}$$

$$\partial v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{III.17b}$$

$$\partial w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + R - q = 0 \quad \text{III.17c}$$

$$\partial w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + R - q = 0 \quad \text{III.17d}$$

En substituant l'Eq III.10 dans l'Eq III.14, les résultantes de contrainte d'une plaque FG peuvent être exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_x^s \\ M_y^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{11} & D_{12} & D_{13} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & E_{21} & E_{22} & E_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^b \\ k_x^s \\ \varepsilon_y^0 \\ k_y^b \\ k_y^s \end{Bmatrix} \quad \text{III.18a}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy}^b \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^a & A_{12}^a & A_{13}^a \\ B_{11}^a & B_{12}^a & B_{13}^a \\ C_{11}^a & C_{12}^a & C_{13}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^0 \\ k_{xy}^b \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad \text{III.18b}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{54} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{III.18c}$$

Les coefficients de rigidité en A_{ij} et B_{ij} ...etc., sont défini comme :

$$\{A_{11}, A_{12}, A_{13}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11}[F]dz, \quad \{B_{11}, B_{12}, B_{13}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{12}[F]dz, \quad \text{III.19a}$$

$$\{A_{21}, A_{22}, A_{23}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22}[F]dz, \quad \{C_{11}, C_{12}, C_{13}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11}[F]zdz, \quad \text{III.19b}$$

$$\{D_{11}, D_{12}, D_{13}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{12}[F]zdz, \quad \{C_{21}, C_{22}, C_{23}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22}[F]zdz, \quad \text{III.19c}$$

$$\{E_{11}, E_{12}, E_{13}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11}[F]f(z)dz, \quad \{F_{11}, F_{12}, F_{13}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{12}[F]f(z)dz, \quad \text{III.19d}$$

$$\{E_{21}, E_{22}, E_{23}\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22}[F]f(z)dz, \quad \{A_{11}^a, A_{12}^a, A_{13}^a\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{66}[F]dz, \quad \text{III.19e}$$

$$\{B_{11}^a, B_{12}^a, B_{13}^a\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{66}[F]zdz, \quad \{C_{11}^a, C_{12}^a, C_{13}^a\} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{66}[F]f(z)dz, \quad \text{III.19f}$$

$$A_{44} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{44}[g(z)]^2dz, \quad A_{55} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{55}[g(z)]^2dz, \quad \text{III.19g}$$

$$[F] = \{1, z, f(z)\} \quad \text{III.19h}$$

En remplaçant l'Eq. (18) dans l'Eq. (17), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_{11}d_{11}u_0 + A_{11}^a d_{22}u_0 + (A_{11}^a + B_{11})d_{12}v_0 - (A_{12}d_{111}w_b + (B_{12} \\ + 2A_{12}^a)d_{122}w_b) + \\ A_{13}d_{111}w_s - (B_{13} + 2A_{13}^a)d_{122}w_s = 0 \end{aligned} \quad \text{III.20a}$$

$$\begin{aligned} (A_{11}^a + B_{11})d_{12}u_0 + (A_{11}^a d_{11}v_0 + A_{21}d_{22}v_0) - (A_{22}d_{222}w_b + (B_{12} \\ + 2A_{12}^a)d_{112}) - \\ (A_{23}d_{222}w_s + (B_{13} + 2A_{13}^a)d_{112}w_s = 0 \end{aligned} \quad \text{III.20b}$$

$$\begin{aligned} C_{11}d_{111}u_0 + (D_{11} + 2B_{11}^a)d_{122}u_0 + C_{21}d_{111}v_0 + (D_{11} + 2B_{11}^a)d_{112}v_0 - \\ (C_{12}d_{1111}w_b + C_{22}d_{2222}w_b + (2D_{12} + 4B_{12}^a)d_{1122}w_b - K_w w_b + K_p d_{11}w_b \\ + K_p d_{22}w_b) - \end{aligned} \quad \text{III.20c}$$

$$\begin{aligned} (C_{13}d_{1111}w_s + C_{23}d_{2222}w_s + (2D_{13} + 4B_{13}^a)d_{1122}w_s - K_w w_s + K_p d_{11}w_s \\ + K_p d_{22}w_s) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{11}d_{111}u_0 + (F_{11} + 2C_{11}^a)d_{122}u_0 + E_{21}d_{222}v_0 + (F_{11} + 2C_{11}^a)d_{112}v_0 - \\ (E_{12}d_{1111}w_b + E_{22}d_{2222}w_b + (2F_{12} + 4C_{12}^a)d_{1122}w_b - K_w w_b + K_p d_{11}w_b \\ + K_p d_{22}w_b) \end{aligned} \quad \text{III.20d}$$

$$\begin{aligned} -(E_{13}d_{1111}w_s + E_{23}d_{2222}w_s + (2F_{13} + 4C_{13}^a)d_{1122}w_s - K_w w_s + K_p d_{11}w_s \\ + K_p d_{22}w_s) + A_{55}d_{11}w_s + A_{44}d_{22}w_s = 0 \end{aligned}$$

d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2) \quad \text{III.21}$$

III.6 Conditions aux limites

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type d'appuis utilisé. Nous nous intéressons ici par la solution exacte de la plaque fonctionnellement graduée sous différentes conditions aux limites. La plaque est supposée avoir des bords simplement appuyés (S) et encastrés (C) sous la forme suivante :

$$\text{SSSS: } v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x = 0 \text{ at } x = 0, a$$

$$u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y = 0 \text{ at } y = 0, b$$

$$\text{CCCC: } v_0 = u_0 = w_b = w_s = 0 \text{ at } x = 0, a$$

$$v_0 = u_0 = w_b = w_s = 0 \text{ at } y = 0, b$$

$$\text{SSCC: } v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x = 0 \text{ at } x = 0, a$$

$$v_0 = u_0 = w_b = w_s = 0 \text{ at } y = 0, b$$

$$\text{SSCS: } v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x = 0 \text{ at } x = 0, a$$

$$v_0 = u_0 = w_b = w_s = 0 \text{ at } y = 0$$

$$u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y = 0 \text{ at } y = b$$

III.7 Solution des équations gouvernantes

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté les charges mécaniques transversales q comme

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} X(\lambda_m x) Y(\mu_n y) \quad \text{III.22}$$

Où

$$q_{mn} = \begin{cases} q_0 & \text{pour un chargement sinusoïdal,} \\ \frac{16q_0}{m\pi^2} & \text{pour un chargement uniforme,} \end{cases} \quad \text{III.23}$$

Et $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \mu_n = \frac{n\pi}{b}$

Selon Navier, nous supposons la solution de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} X'(\lambda_m x) Y(\mu_n y) \\ V_{mn} X(\lambda_m x) Y'(\mu_n y) \\ W_{bmn} X(\lambda_m x) Y(\mu_n y) \\ W_{smn} X(\lambda_m x) Y(\mu_n y) \end{Bmatrix} \quad \text{III.24}$$

Où U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer tels que la solution dans l'équation III.24 satisfait les équations gouvernantes III.20. Les fonctions $X(\lambda_m x)$ et $Y(\mu_n y)$ sont définies dans le tableau III.1 et III.2 respectivement (Reddy, 2004).

Tableau III. 1 Différentes conditions aux limites pour la fonction $X(\lambda_m x)$

BC	$X(\lambda_m x)$	η_m
SS	$\sin(\lambda_m x)$	
CC	$\sin(\lambda_m x) - sh(\lambda_m x) - \eta_m(\cos(\lambda_m x) - ch(\lambda_m x))$	$(sh(\lambda_m a) - \sin(\lambda_m a))/(ch(\lambda_m a) - \cos(\lambda_m a))$
CS	$\sin(\lambda_m x) - sh(\lambda_m x) - \eta_m(\cos(\lambda_m x) - ch(\lambda_m x))$	$(sh(\lambda_m a) + \sin(\lambda_m a))/(ch(\lambda_m a) + \cos(\lambda_m a))$

Tableau III. 2 Différentes conditions aux limites pour la fonction $Y(\mu_n y)$

BC	$Y(\mu_n y)$	η_n
SS	$\sin(\mu_n y)$	
CC	$\sin(\mu_n y) - sh(\mu_n y) - \eta_n(\cos(\mu_n y) - ch(\mu_n y))$	$(sh(\mu_n b) - \sin(\mu_n b))/(ch(\mu_n b) - \cos(\mu_n b))$
CS	$\sin(\mu_n y) - sh(\mu_n y) - \eta_n(\cos(\mu_n y) - ch(\mu_n y))$	$(sh(\mu_n b) + \sin(\mu_n b))/(ch(\mu_n b) + \cos(\mu_n b))$

On obtient l'équation d'opérateur suivante :

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad \text{III.25}$$

Où

$$\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t, [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}, \quad \text{III.26a}$$

$$\{P\} = \{0, 0, q_{mn}\alpha_1, q_{mn}\alpha_1\}^t$$

$$K_{11} = A_{11}\alpha_{12} + A_{11}^a\alpha_8, K_{12} = (B_{11} + A_{11}^a)\alpha_8, \quad \text{III.26b}$$

$$K_{13} = -(A_{12}\alpha_{12} + (B_{12} + 2A_{12}^a)\alpha_8),$$

$$K_{14} = -(A_{13}\alpha_{12} + (B_{13} + 2A_{13}^a)\alpha_8),$$

$$K_{21} = (B_{11} + A_{11}^a)\alpha_{10}, K_{22} = A_{21}\alpha_4 + A_{11}^a\alpha_{10},$$

$$K_{23} = -(A_{22}\alpha_4 + (B_{12} + 2A_{12}^a)\alpha_{10}),$$

$$K_{24} = -(A_{23}\alpha_4 + (B_{13} + 2A_{13}^a)\alpha_{10}),$$

$$K_{31} = C_{11}\alpha_7 + (D_{11} + 2B_{11}^a)\alpha_{11}, K_{32} = C_{21}\alpha_5 + (D_{11} + 2B_{11}^a)\alpha_{11},$$

$$K_{33} = -(C_{12}\alpha_7 + C_{22}\alpha_5 + (2D_{12} + 4B_{12}^a)\alpha_{11}) + K_w\alpha_1 + K_p(\alpha_9 + \alpha_3)$$

$$K_{34} = -(C_{13}\alpha_7 + C_{23}\alpha_5 + (2D_{13} + 4B_{13}^a)\alpha_{11}) + K_w\alpha_1 + K_p(\alpha_9 + \alpha_3)$$

$$K_{41} = E_{11}\alpha_7 + (F_{11} + 2C_{11}^a)\alpha_{11}, K_{42} = E_{21}\alpha_5 + (F_{11} + 2C_{11}^a)\alpha_{11},$$

$$K_{43} = -(E_{12}\alpha_7 + E_{22}\alpha_5 + (2F_{12} + 4C_{12}^a)\alpha_{11}) + K_w\alpha_1 + K_p(\alpha_9 + \alpha_3)$$

$$K_{44} = -(E_{13}\alpha_7 + E_{23}\alpha_5 + (2F_{13} + 4C_{13}^a)\alpha_{11}) + A_{55}\alpha_9 + A_{44}\alpha_3 + K_w\alpha_1 \\ + K_p(\alpha_9 + \alpha_3)$$

Avec :

$$(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}) = \int_0^a \int_0^b (YX, Y''X, Y''''X, YX''''', YX'', Y''X'') YX dx dy, \quad \text{III.26c}$$

$$(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{10}) = \int_0^a \int_0^b (Y'X, Y'''X, YX''''', Y'X'') Y'X dx dy,$$

$$(\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{12}) = \int_0^a \int_0^b (YX', Y''X', YX''''') YX' dx dy,$$

Les conditions aux limites sont introduites en remplaçant X ($\lambda_m x$) du tableau III.2 et Y ($\mu_n y$) du tableau III.3 de chaque type d'appuis (SS, CC et CS) dans l'Équation III.26c et les résultats sont obtenues dans les éléments de la matrice de rigidité équation III.26b.

III.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une théorie d'ordre élevé raffinée à quatre variables a été utilisée pour analyser le comportement de la flexion d'une plaque FGM avec l'hypothèse de présence de la porosité et reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Psasternak sous différentes conditions aux limites. Les équations gouvernantes de la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement sont dérivées en utilisant le principe du travail virtuel, et les solutions sont obtenues en utilisant la solution de Navier.

Chapitre IV. Résultats et Discussions

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, les résultats numériques des contraintes et des déformations de l'étude d'une plaque fonctionnellement graduée soumise à la flexion, sous diverses conditions aux limites et reposant sur une fondation élastique sont présentés, en se basant sur la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement présenté dans le chapitre précédent. L'exactitude de la présente étude est confirmée en comparant les résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature. Nous allons étudier les effets du paramètre de la porosité, du rapport d'élanement, du paramètre de fondation, de l'indice matériel et les différents types de conditions aux limites sur les contraintes et déformations.

IV.2 Résultats et discussions

Dans cette section, nous présentons et discutons les résultats numériques afin de vérifier l'exactitude de la présente étude dans la prédiction de la réponse de la flexion pour une plaque fonctionnellement graduée en présence de la porosité et reposant sur une fondation élastique sous diverses conditions aux limites.

Pour présenter les différents résultats numériques, les quantités sans dimensions suivantes sont utilisées :

$$\bar{w} = \frac{10h^3 E_{ceramic}}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), K_W = \frac{a^4}{\rho} k_W, K_P = \frac{a^2}{\rho} k_P,$$

$$\sigma_1 = \frac{h}{q_0 a} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h} \right), \sigma_6 = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{z}{h} \right), \sigma_5 = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \frac{z}{h} \right), \rho = \frac{h^3 E_{ceramic}}{12(1 - \nu^2)}$$

Les propriétés des matériaux utilisés dans la plaque fonctionnellement graduée sont présentées dans le tableau VI.1 :

Tableau IV. 1 Propriétés des matériaux

Propriétés	Aluminium (Al)	Alumine (Al ₂ O ₃)
Module de Young (GPa)	70	380
Coefficient de poisson	0,3	0,3
Masse volumique (Kg/m ³)	2702	3800

Les valeurs de la flèche adimensionnelle de la plaque fonctionnellement graduée obtenue en utilisant la présente théorie avec différents rapports d'élanement (a/h) et indice matériel (β) sous une charge sinusoïdale sont comparées avec la littérature (Carrera et al., 2011; Neves et al., 2013, 2012; Thai and Choi, 2013; Zenkour and Radwan, 2018) et sont présentées dans le tableau VI.2.

Tableau IV. 2 Les effets de l'indice matériel β et du rapport d'élanement (a/h) sur la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque carrée fonctionnellement graduée simplement appuyée sous une charge sinusoïdale

β	a/h	Présente Étude	Zenkour&Radwan (2018)	Neves et al. (2012)	Neves et al. (2013)	Carrera et al. (2011)	Thai and Choi (2013)
1	4	0.7279	0.7284	0.6997	0.7020	0.7171	0.7304
	10	0.5889	0.5889	0.5845	0.5868	0.5875	0.5913
	100	0.5625	0.5625	0.5624	0.5648	0.5625	0.5649
4	4	1.1618	1.1573	1.1178	1.1108	1.1585	1.1644
	10	0.8819	0.8810	0.8750	0.8700	0.8821	0.8844
	100	0.8287	0.8287	0.8286	0.8240	0.8286	0.8312
10	4	1.3908	1.3889	1.3490	1.3334	1.3745	1.3953
	10	1.0088	1.0083	0.8750	0.9888	1.0072	1.0132
	100	0.9362	0.9362	0.8286	0.9227	0.9361	0.9406

Comme on peut le voir, les résultats sont en excellente concordance. On peut voir également que les flèches de la plaque fonctionnellement graduée augmentent lorsque l'indice matériel β augmente alors qu'elles diminuent lorsque le rapport d'élanement (a/h) augmente.

Pour démontrer l'exactitude de la présente théorie dans la prédiction de la flèche adimensionnelle d'une plaque (Al/Al_2O_3) reposant sur une fondation élastique sous une charge sinusoïdale pour différentes valeurs des paramètres de fondation de Winkler et Pasternak (K_w , K_p) et de l'indice matériel (β), les résultats numériques sont présentés dans le tableau IV.3 et comparés à ceux disponibles dans la littérature (Thai and Vo, 2013; Zenkour and Radwan, 2018).

Tableau IV. 3 Effets de l'indice matériel β et des paramètres de fondation élastique sur la flèche \bar{w} des plaques carrées fonctionnellement graduées sous une charge sinusoïdale ($a = 10h$)

kw	kp	Méthode	β						
			0	1	2	5	10	∞	
\bar{w}	0	Présente étude	0.29602	0.58890	0.75731	0.91182	1.00877	1,60697	
		Zenkour&Radwan	0.29604	0.58893	0.75718	0.91080	1.00832	1.60709	
		Thai &Vo (2013)	0.29603	0.58891	0.75733	0.91184	1.00892	1.60703	
	100	Présente étude	0.2329	0.38258	0.44719	0.49690	0.52437	0.65018	
		Zenkour&Radwan	0.23290	0.38259	0.44714	0.49660	0.52425	0.65019	
		Thai &Vo (2013)	0.23289	0.38258	0.44719	0.49691	0.52441	0.65019	
	0	10	Présente étude	0.19283	0.28525	0.31969	0.34431	0.35723	0.41154
			Zenkour&Radwan	0.19285	0.28526	0.31966	0.34417	0.35722	0.41155
			Thai &Vo (2013)	0.19284	0.28525	0.31969	0.34432	0.35729	0.41154
100	10	Présente étude	0.16389	0.22617	0.24729	0.26177	0.26920	0.29889	
		Zenkour&Radwan	0.16390	0.22617	0.24728	0.26169	0.26917	0.29889	
		Thai &Vo (2013)	0.16389	0.22617	0.24729	0.26178	0.26921	0.29889	

Les résultats de la flèche données dans le tableau IV.3 sont en accord avec ceux de la linéature en ce qui concerne l'effet des paramètres de fondation élastique (Kw , Kp) et l'indice matériel (β).

On peut constater aussi que l'effet du paramètre Pasternak est très considérable pour réduire la déflexion de la plaque FG par rapport à l'effet du paramètre Winkler et que les flèches de la plaque FG augmentent lorsque l'indice matériel augmente, car la plaque devient métallique.

Les contraintes non dimensionnelles des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques sous des charges sinusoïdales sont présentées dans le tableau VI.4. Les résultats sont comparés aux résultats donnés par (Thai and Vo, 2013; Zenkour and Radwan, 2018).

Tableau IV. 4 Les effets de l'indice matériel β et des paramètres de fondation élastique sur les contraintes σ_i dans une plaque carrée fonctionnellement gradée sous une charge sinusoïdale ($a = 10h$)

(σ _i)	kw	kp	Théorie	β					
				0	1	2	5	10	∞
σ ₁ (h/2)	0	0	Présente étude	1.99506	3.08626	3.60832	4.24707	5.08677	1.99506
			Zenkour&Radwan	1.99331	3.08330	3.60442	4.24122	5.08134	1.99331
			Thai &Vo (2013)	1.99550	3.08699	3.60936	4.24883	5.08901	1.99550
	100	0	Présente	1.56958	2.00501	2.13067	2.31448	2.64415	0.80720
			Zenkour&Radwan	1.56818	2.00304	2.12852	2.31247	2.64189	0.80645
			Thai &Vo (2013)	1.56991	2.00546	2.13127	2.31542	2.64513	0.80736
	0	10	Présente étude	1.29964	1.49493	1.52318	1.60374	1.80160	0.51093
			Zenkour&Radwan	1.29846	1.49344	1.52169	1.60265	1.80019	0.51045
			Thai &Vo (2013)	1.29991	1.49526	1.52360	1.60439	1.80222	0.51103
	100	10	Présente étude	1.10458	1.18531	1.17825	1.21929	1.35746	0.37108
			Zenkour&Radwan	1.10357	1.18412	1.17711	1.21858	1.35646	0.37073
			Thai &Vo (2013)	1.10480	1.18556	1.17857	1.21978	1.35791	0.37115
σ ₆ (-h/3)	0	0	Présente étude	0.70661	0.61109	0.54414	0.57552	0.58946	0.70661
			Zenkour&Radwan	0.70679	0.61118	0.54432	0.57586	0.58977	0.70679
			Thai &Vo (2013)	0.70652	0.61104	0.54409	0.57546	0.58937	0.70652
	100	0	Présente étude	0.55591	0.39700	0.32131	0.31364	0.30641	0.28589
			Zenkour&Radwan	0.55604	0.39705	0.32144	0.31398	0.30663	0.28595
			Thai &Vo (2013)	0.55584	0.39696	0.32128	0.31360	0.30634	0.28585
	0	10	Présente étude	0.46030	0.29600	0.22970	0.21732	0.20877	0.18096
			Zenkour&Radwan	0.46041	0.29603	0.22979	0.21760	0.20894	0.18099
			Thai &Vo (2013)	0.46024	0.29597	0.22968	0.21729	0.20872	0.18093
	100	10	Présente	0.39122	0.23469	0.17768	0.16522	0.15730	0.13143
			Zenkour&Radwan	0.39130	0.23472	0.17776	0.16545	0.15744	0.13145
			Thai &Vo (2013)	0.39116	0.23467	0.17766	0.16521	0.15726	0.13141
σ _s (0)	0	0	Présente étude	0.24889	0.24889	0.22908	0.20403	0.22196	0.24889
			Zenkour&Radwan	0.23216	0.23216	0.21191	0.18576	0.20424	0.23216
			Thai &Vo (2013)	0.24618	0.24618	0.22650	0.20167	0.21981	0.24618
	100	0	Présente	0.19581	0.16169	0.13527	0.11119	0.11538	0.10007
			Zenkour&Radwan	0.18264	0.15082	0.12514	0.10128	0.10619	0.09393
			Thai &Vo (2013)	0.19368	0.15993	0.13375	0.10989	0.11425	0.09960
	0	10	Présente étude	0.16213	0.12056	0.09670	0.07704	0.07861	0.06374
			Zenkour&Radwan	0.15123	0.11245	0.08946	0.07019	0.07236	0.05945
			Thai &Vo (2013)	0.16037	0.11924	0.09561	0.07615	0.07784	0.06304
	100	10	Présente étude	0.13780	0.09559	0.07480	0.05857	0.05923	0.04629
			Zenkour&Radwan	0.12853	0.08916	0.06920	0.05337	0.05452	0.04318
			Thai &Vo (2013)	0.13629	0.09455	0.07396	0.05789	0.05865	0.04579

On peut remarquer à partir du tableau IV.4 que la formulation actuelle utilisant quatre inconnues est en excellent accord avec les résultats d'autres théories utilisant cinq inconnues.

On constate également que lorsque la valeur de l'indice matériel (β) augmente, cela conduit à une augmentation de la contrainte axiale σ_1 et à une diminution de la contrainte de cisaillement transversale σ_5 .

Aussi, on remarque que la présence du milieu élastique conduit à réduire les contraintes de la plaque. Les résultats montrent également que le paramètre Pasternak a une influence prédominante par rapport au paramètre Winkler sur les contraintes normales et de cisaillement transverse de la plaque fonctionnellement graduée.

Le tableau IV.5 montre les résultats de la flèche pour une plaque fonctionnellement graduée sous différentes conditions aux limites sans fondation élastique.

La flèche est considérée pour $\beta = 0, 0,5, 1, 2, 5$ et 10 avec différents rapports d'élancement $a/h = 5, 10, 20, 50, 100$.

La flèche est plus grande lorsque la plaque fonctionnellement graduée est soumise à une condition d'appuis SSCS alors que la condition d'appuis SSCC donne la plus petite flèche. On peut observer que l'augmentation du rapport d'élancement (a/h) conduit à une diminution de la flèche adimensionnelle de la plaque (Al / Al_2O_3) et a tendance à augmenter lorsque l'indice matériel (β) augmente.

Le tableau IV.6 présente une comparaison des valeurs de la flèche de la plaque (Al / Al_2O_3) soumise à un chargement sinusoïdal avec des fondations élastiques en utilisant la théorie actuelle et celles prédites par Zenkour et Radwan (2018), pour $\beta = 0, 0,5, 1, 2, 5$ et 10 , avec différents rapports d'élancement $a/h = 5, 10, 20, 50, 100$.

Encore une fois, on peut dire que les résultats de la théorie proposée sont en bonne corrélation avec ceux de la littérature (Zenkour and Radwan, 2018).

Tableau IV. 5 flèche adimensionnelle \bar{w} des plaques carrées FG selon diverses conditions aux limites sans fondation élastique

a/h	β	Conditions aux limites					
		SSCC		CCCC		SSCS	
		Présente étude	Zenkour& Radwan	Présente étude	Zenkour& Radwan	Présente étude	Zenkour& Radwan
5	0	0.30010	0.31102	0.34989	0.35046	0.36385	0.36633
	0,5	0.44586	0.46093	0.51496	0.51574	0.54542	0.54884
	1	0.57345	0.59232	0.66038	0.66134	0.70343	0.70768
	2	0.74978	0.77440	0.86781	0.86766	0.91533	0.92016
	5	0.97932	1.01246	1.16051	1.15394	1.16859	1.17183
	10	1.11920	1.16382	1.33799	1.33646	1.32385	1.33195
	10	0	0.23257	0.23561	0.25183	0.25189	0.30117
0,5		0.35446	0.35861	0.38222	0.38232	0.46060	0.46152
1		0.45940	0.46458	0.49476	0.49487	0.59757	0.59869
2		0.59251	0.59933	0.63954	0.63931	0.76930	0.77059
5		0.72406	0.73369	0.79032	0.78828	0.93140	0.93236
10		0.80601	0.81904	0.88381	0.88296	1.03282	1.03507
20		0	0.21558	0.21637	0.22710	0.22711	0.28543
	0,5	0.33148	0.33255	0.34877	0.34878	0.43932	0.43957
	1	0.43071	0.43204	0.45300	0.45302	0.57098	0.57129
	2	0.55291	0.55467	0.58192	0.58184	0.73261	0.73297
	5	0.65969	0.66220	0.69666	0.69612	0.87174	0.87203
	10	0.72702	0.73043	0.76888	0.76864	0.95963	0.96025
	50	0	0.21082	0.21094	0.22016	0.22017	0.28102
0,5		0.32504	0.32521	0.33938	0.33938	0.43335	0.43342
1		0.42266	0.42288	0.44128	0.44129	0.56354	0.56361
2		0.54181	0.54209	0.56574	0.56573	0.72233	0.72242
5		0.64162	0.64203	0.67035	0.67026	0.85501	0.85511
10		0.70486	0.70541	0.73661	0.73657	0.93911	0.93925
100		0	0.21014	0.21017	0.21917	0.21917	0.28039
	0,5	0.32411	0.32416	0.33804	0.33804	0.43250	0.43254
	1	0.42152	0.42157	0.43961	0.43961	0.56247	0.56252
	2	0.54022	0.54029	0.56343	0.56342	0.72086	0.72091
	5	0.63904	0.63914	0.66659	0.66657	0.85263	0.85269
	10	0.70169	0.70183	0.73199	0.73198	0.93617	0.93625

Tableau IV. 6 flèche adimensionnelle \bar{w} de la plaque FG sous diverses conditions aux limites avec fondations élastiques ($k_p = kw = 10$)

a/h		Conditions aux limites					
		SSCC		CCCC		SSCS	
		Présente Étude	Zenkour& Radwan	Présente Étude	Zenkour& Radwan	Présente Étude	Zenkour& Radwan
5	0	0.21528	0.22084	0.26628	0.26661	0.23989	0.24097
	0,5	0.28123	0.28716	0.35220	0.35257	0.30735	0.30843
	1	0.32715	0.33320	0.41465	0.41503	0.35189	0.35295
	2	0.37784	0.38399	0.48787	0.48782	0.39798	0.39889
	5	0.42845	0.43467	0.56848	0.56689	0.43938	0.43984
	10	0.45322	0.46038	0.60798	0.60767	0.45965	0.46063
10	0	0.17817	0.17995	0.20541	0.20545	0.21095	0.21127
	0,5	0.24189	0.24382	0.28460	0.28465	0.27846	0.27879
	1	0.28656	0.28857	0.34263	0.34269	0.32324	0.32357
	2	0.33326	0.33541	0.40634	0.40624	0.36764	0.36793
	5	0.37119	0.37371	0.46238	0.46168	0.40099	0.40117
	10	0.39161	0.39466	0.49289	0.49262	0.41869	0.41906
20	0	0.16802	0.16850	0.18865	0.18866	0.20310	0.20319
	0,5	0.23097	0.23148	0.26563	0.26564	0.27053	0.27063
	1	0.27513	0.27567	0.32207	0.32208	0.31530	0.31539
	2	0.32036	0.32095	0.38228	0.38225	0.35905	0.35913
	5	0.35351	0.35423	0.42867	0.42846	0.38951	0.38957
	10	0.37197	0.37286	0.45496	0.45488	0.40613	0.40624
50	0	0.16512	0.16519	0.18384	0.18384	0.20086	0.20088
	0,5	0.22782	0.22790	0.26015	0.26015	0.26826	0.26828
	1	0.27182	0.27191	0.31610	0.31611	0.31302	0.31304
	2	0.31660	0.31669	0.37524	0.37523	0.35658	0.35658
	5	0.34825	0.34838	0.41856	0.41852	0.38614	0.38616
	10	0.36608	0.36623	0.44346	0.44345	0.40241	0.40244
100	0	0.16470	0.16472	0.18315	0.18315	0.20054	0.20055
	0,5	0.22737	0.22739	0.25936	0.25936	0.26793	0.26794
	1	0.27135	0.27137	0.31524	0.31524	0.31269	0.31270
	2	0.31606	0.31608	0.37422	0.37422	0.35620	0.35621
	5	0.34749	0.34752	0.41709	0.41708	0.38565	0.38566
	10	0.36523	0.36526	0.44179	0.44178	0.40187	0.40189

Les tableaux IV.7 et IV.8 donnent l'effet de la porosité sur la flèche adimensionnelle, les contraintes normales et de cisaillement transversales de la plaque FGM sous diverses conditions aux limites sans et avec fondation élastique respectivement.

Tableau IV. 7 Flèche \bar{w} et contrainte d'une plaque carrée FG sous différentes conditions aux limites sans fondations élastiques ($kp = kw = 0, a / h = 10$)

β		Conditions aux limites								
		SSSS			SSCC			SSCS		
		$\xi=0$	$\xi=0,1$	$\xi=0,2$	$\xi=0$	$\xi=0,1$	$\xi=0,2$	$\xi=0$	$\xi=0,1$	$\xi=0,2$
\bar{w}	0	0.29602	0.31182	0.32939	0.23256	0.24497	0.25878	0.30117	0.31726	0.33514
	0,5	0.45364	0.49962	0.55670	0.35446	0.39011	0.43422	0.46060	0.50716	0.56488
	1	0.58889	0.68313	0.81917	0.45940	0.53200	0.63646	0.59757	0.69278	0.83003
	2	0.75730	0.95638	1.34090	0.59251	0.74579	1.03960	0.76930	0.97037	1.35770
	5	0.91181	1.25330	2.23950	0.72406	0.99397	1.76100	0.93140	1.27970	2.27940
	10	1.0088	1.4143	2.7279	0.80601	1.1347	2.19540	1.03282	1.45040	2.80080
$\sigma_1(h/2)$	0	1.99500	1.99500	1.99500	1.76340	1.76350	1.76340	2.12370	2.12370	2.12370
	0,5	2.6192	2.68540	2.76760	2.31630	2.37460	2.44740	2.78850	2.85890	2.94600
	1	3.0864	3.26280	3.51860	2.73040	2.88620	3.11170	3.28640	3.47410	3.74550
	2	3.6083	3.99610	4.73260	3.19580	3.5383	4.18740	3.84390	4.25620	5.03930
	5	4.2474	4.83620	6.31100	3.77130	4.2985	5.61200	4.52840	5.15830	6.73300
	10	5.0869	5.8651	7.60800	4.51310	5.2119	6.78880	5.42190	6.2550	8.12650
$\sigma_5(0)$	0	0.24888	0.24889	0.24890	0.35787	0.35787	0.35790	0.33157	0.33157	0.33157
	0,5	0.25434	0.25483	0.25542	0.36573	0.36640	0.36728	0.33881	0.33947	0.34020
	1	0.24888	0.24889	0.24888	0.35788	0.35788	0.35788	0.33155	0.33156	0.33155
	2	0.22909	0.22526	0.21932	0.32938	0.32387	0.31530	0.30517	0.30008	0.29215
	5	0.20403	0.18865	0.15562	0.29327	0.27115	0.22363	0.27178	0.25128	0.20728
	10	0.22196	0.21061	0.17724	0.31906	0.30270	0.25465	0.29565	0.28052	0.23606

On peut observer à partir des tableaux IV.7 et IV.8 que l'augmentation du paramètre de la porosité conduit à l'augmentation des flèches et des contraintes normales et de cisaillement transverse pour les différentes conditions aux limites, ceci montre que la présence de la porosité a l'effet de réduire la rigidité de la plaque.

Les résultats montrent également que la condition d'appuis SSCS donne les plus grandes valeurs des flèches et des contraintes normales tandis que SSCC donne les valeurs les plus

petites. On peut observer également que le type SSCC donne les plus grandes valeurs de contraintes de cisaillement transverse par rapport aux types SSSS et SSCS.

De plus, les déformations et contraintes non dimensionnelles diminuent en présence des fondations élastiques.

Tableau IV. 8 Flèche \bar{w} et contrainte d'une plaque carrée FG sous différentes conditions aux limites avec fondations élastiques ($k_p = k_w = 10$, $a/h = 10$)

β	Conditions aux limites									
	SSSS			SSCC			SSCS			
	$\xi=0$	$\xi=0,1$	$\xi=0,2$	$\xi=0$	$\xi=0,1$	$\xi=0,2$	$\xi=0$	$\xi=0,1$	$\xi=0,2$	
\bar{w}	0	0.18949	0.19584	0.20263	0.17816	0.18536	0.19315	0.21096	0.21871	0.22707
	0,5	0.24369	0.25636	0.27062	0.27417	0.25798	0.27653	0.27850	0.29484	0.31346
	1	0.27799	0.29735	0.32052	0.28655	0.31323	0.34672	0.32326	0.34922	0.38099
	2	0.31059	0.33958	0.37808	0.33326	0.37683	0.43958	0.36766	0.40804	0.46368
	5	0.33379	0.37077	0.42632	0.37119	0.43122	0.53170	0.40101	0.45421	0.53797
	10	0.34596	0.38369	0.44133	0.39159	0.45573	0.56548	0.41872	0.47401	0.56270
$\sigma_1(h/2)$	0	1.27710	1.25300	1.22720	1.35090	1.3344	1.3164	1.4874	1.4640	1.4388
	0,5	1.40720	1.37780	1.34540	1.58070	1.5704	1.5587	1.6858	1.6619	1.6348
	1	1.45690	1.42030	1.37660	1.70320	1.6993	1.6951	1.7776	1.7511	1.7192
	2	1.47990	1.41880	1.33430	1.79760	1.7877	1.7706	1.8369	1.7898	1.7211
	5	1.55480	1.43060	1.20160	1.93340	1.8649	1.6944	1.9496	1.8310	1.5891
	10	1.74460	1.59120	1.23090	2.19260	2.0934	1.7486	2.1980	2.0445	1.6326
$\sigma_5(0)$	0	0.15932	0.15632	0.15311	0.27417	0.27080	0.26713	0.23222	0.22857	0.22466
	0,5	0.13662	0.13076	0.12416	0.24959	0.24233	0.23393	0.20483	0.19733	0.18880
	1	0.11748	0.10834	0.09738	0.22323	0.21070	0.19496	0.17935	0.16713	0.15218
	2	0.09395	0.07998	0.06183	0.18526	0.16363	0.13333	0.14584	0.12619	0.09978
	5	0.07468	0.05581	0.02962	0.15036	0.11764	0.06753	0.11700	0.08919	0.04892
	10	0.07612	0.05713	0.02868	0.15501	0.12158	0.06559	0.11985	0.09168	0.04743

Des résultats supplémentaires sont illustrés graphiquement sur les figures IV.1-3 en utilisant la présente théorie.

La variation de la flèche adimensionnelle sous l'effet de la porosité pour les différentes valeurs d'indice matériel β est présentée sur la figure IV.1 On peut observer que les flèches augmentent avec l'augmentation de l'indice matériel et le paramètre de porosité.

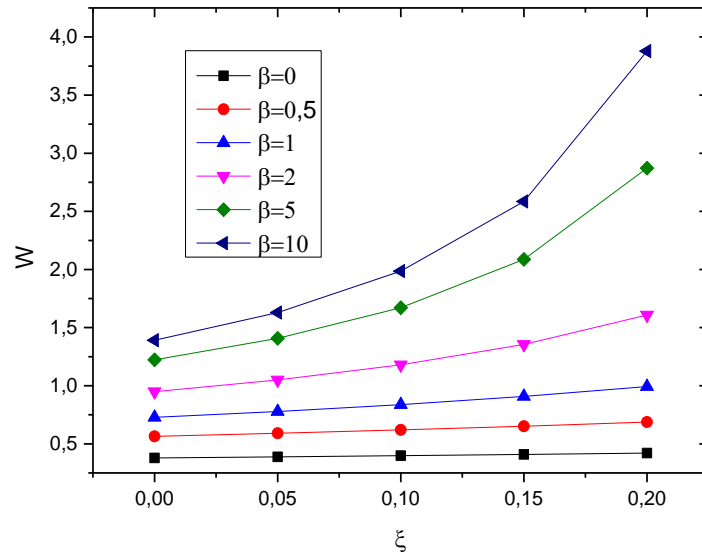


Figure IV. 1 La flèche en fonction de la porosité ξ de la plaque FG simplement appuyé pour différentes valeurs de l'indice matériel β

La figure IV.2 présente l'évolution de la contrainte axiale (σ_1) dans l'épaisseur de la plaque FG en présence ou non des fondations élastiques pour différentes valeurs de paramètre de la porosité. On peut remarquer que les contraintes sont compressives à la surface inférieure et tractée à la surface supérieure.

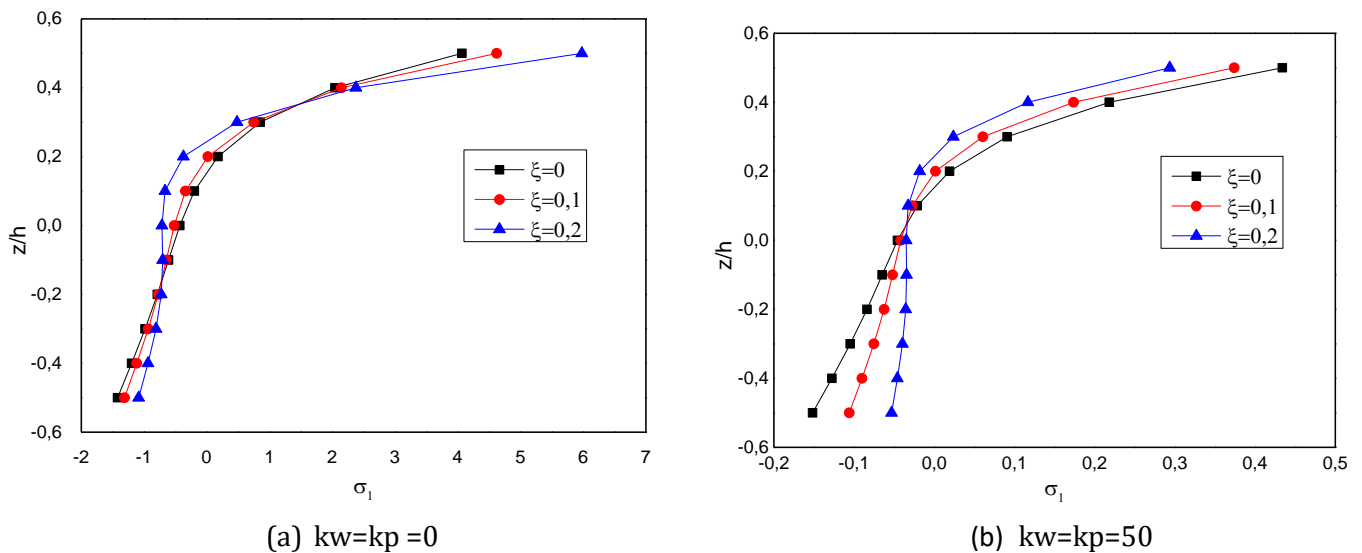


Figure IV. 2 : Les effets du paramètre de porosité sur la contrainte normale σ_1 à travers l'épaisseur de la plaque FG simplement appuyée sans et avec fondation élastique ($a = 10h$, $\beta = 4$)

On peut voir également que les contraintes normales augmentent à mesure que le paramètre de porosité augmente ; la présence des fondations élastiques conduit également à diminuer les contraintes normales.

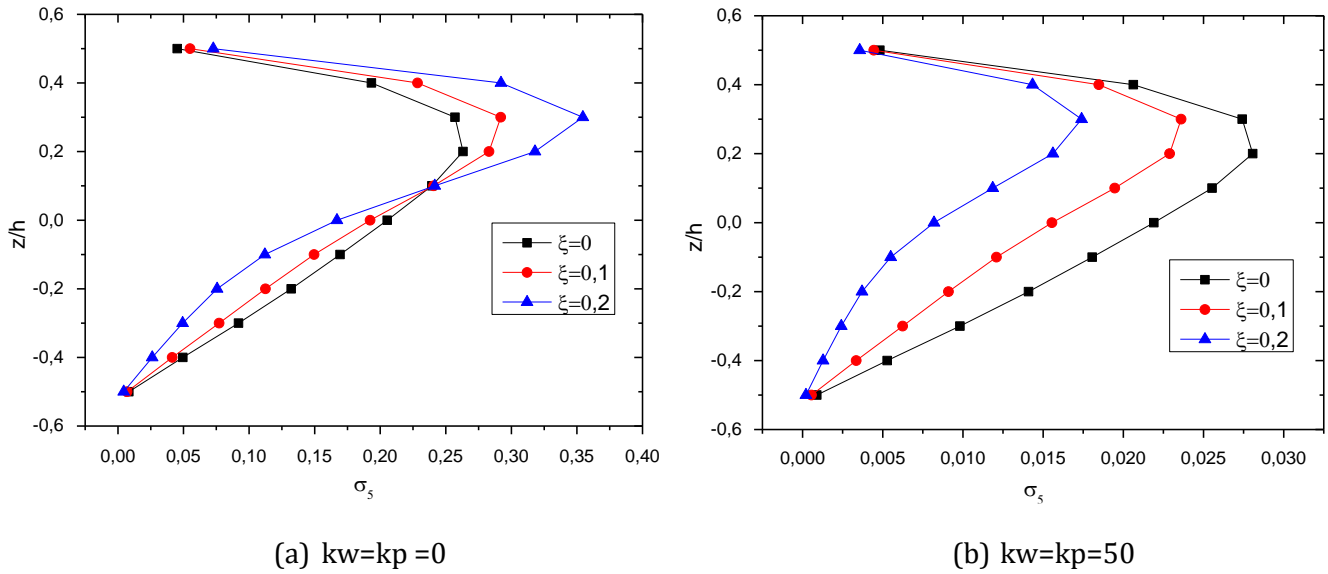


Figure IV. 3 Les effets du paramètre de la porosité sur les contraintes de cisaillement transversal σ_s à travers l'épaisseur de la plaque FG simplement appuyé sans et avec fondation élastique ($a = 10h$, $\beta = 4$)

La figure IV.3 montre l'effet du paramètre de la porosité sur les contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur d'une plaque FG sans et en présence des fondations élastiques respectivement.

On voit sur la figure que la présence des fondations élastiques conduit à diminuer les contraintes de cisaillement transversales.

On observe également que l'augmentation du paramètre de la porosité produit une réduction des contraintes de cisaillement transversales dans la plaque FG avec fondation élastique alors qu'elle produit une augmentation des contraintes de cisaillement transversales dans la plaque FG sans fondation élastique.

IV.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les résultats numériques de l'analyse de la flexion des plaques fonctionnellement graduées sous différentes conditions aux limites et reposant sur des fondations élastiques ont été présentés. Pour ce faire, nous nous sommes basés sur une nouvelle théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement à quatre variables que nous avons développée dans le chapitre précédent.

Les résultats obtenus sont satisfaisants et ont montré une bonne corrélation avec ceux de la littérature, ce qui nous a permis de valider notre théorie dans un premier lieu.

En second lieu, nous avons étudié l'effet de la porosité d'une plaque FGM sur la déflexion, les contraintes normales et de cisaillement transversales à travers son épaisseur, avec et sans présence de fondation élastique. Il s'avère que la porosité influence les réponses mécaniques en flexion de la plaque FGM et qu'il est important de tenir compte de ce paramètre dans l'étude de la stabilité.

Conclusion Générale

Les matériaux fonctionnellement gradués FGM sont une classe de matériaux composites avec une variation progressive et continue des fractions volumiques de chaque constituant. Ce concept permet d'éliminer les discontinuités aux interfaces et les caractéristiques des matériaux constitutifs sont préservées. Ils sont largement utilisés dans de nombreux domaines de l'industrie et d'ingénierie.

Cependant, lors de la fabrication des FGM, des micro-vides ou porosités peuvent se produire dans les matériaux pendant le processus en raison de problèmes techniques liés à la fabrication. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de la porosité lors de la conception des structures FGM soumises à des charges statiques et dynamiques.

Au terme d'un travail mené au sein du laboratoire des matériaux et hydraulique (LMH, de l'université Djilalli Lyabes Sidi Bel Abbas) dans le cadre de cette thèse de doctorat, une contribution à l'étude du comportement de la flexion des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) reposant sur des fondations élastiques sous différentes conditions aux limites en présence de la porosité, une théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement à quatre variables a été développée.

Le principe du travail virtuel est appliqué pour dériver les équations gouvernantes des plaques fonctionnellement graduées. Les effets du paramètre de la porosité, du rapport d'élanement, du paramètre de la fondation élastique, de l'indice matériel et des types de conditions aux limites sur les déformations et les contraintes ont été présentés. Les différents résultats tirés de ce travail permettent de sortir avec les conclusions suivantes :

- ✓ La flèche adimensionnelle de la plaque FG est en relation directe avec l'indice matériel.
- ✓ L'augmentation du rapport d'élanement (a/h) conduit à une diminution de la flèche.
- ✓ Le paramètre Pasternak a un effet plus important que celui du paramètre Winkler.
- ✓ L'augmentation du paramètre de la porosité conduit à l'augmentation de la flèche pour une plaque FGM simplement appuyée.
- ✓ La grande influence engendrée par les différentes conditions d'appuis sur les flèches et les contraintes normales et de cisaillement transverses.

Enfin, nous pouvons conclure que la théorie proposée est précise dans la résolution de la flexion des plaques fonctionnellement graduées en présence de la porosité.

En perspective, il est prévu d'appliquer la présente théorie d'ordre élevée pour étudier l'effet de la porosité sur le flambement et les vibrations des plaques FGM sous différentes conditions d'appuis.

*Liste Des Références
Bibliographiques*

- Abdelaziz, H.H., Atmane, H.A., Mechab, I., Boumia, L., Tounsi, A., Abbas, A.B.E., 2011. Static Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using an Efficient and Simple Refined Theory. *Chin. J. Aeronaut.* 24, 434–448. [https://doi.org/10.1016/S1000-9361\(11\)60051-4](https://doi.org/10.1016/S1000-9361(11)60051-4)
- Abdelmalek, A., Bouazza, M., Zidour, M., Benseddiq, N., 2019. Hygrothermal Effects on the Free Vibration Behavior of Composite Plate Using n th-Order Shear Deformation Theory: a Micromechanical Approach. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng.* 43, 61–73. <https://doi.org/10.1007/s40997-017-0140-y>
- Abdulrazzaq, M.A., Muhammad, A.K., Kadhim, Z.D., Faleh, N.M., 2020. Vibration analysis of nonlocal strain gradient porous FG composite plates coupled by visco-elastic foundation based on DQM. *Coupled Syst. Mech.* 9, 201–217. <https://doi.org/10.12989/csm.2020.9.3.201>
- Ahmed, R.A., Fenjan, R.M., Faleh, N.M., 2019. Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections. *Geomech. Eng.* 17, 175–180.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., 2017. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *Int. J. Mech. Mater. Des.* 13, 71–84. <https://doi.org/10.1007/s10999-015-9318-x>
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A., 2010. Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Des.* 6, 113–121. <https://doi.org/10.1007/s10999-010-9110-x>
- Akavci, S.S., Tanrikulu, A.H., 2015. Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories. *Compos. Part B Eng.* 83, 203–215. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.08.043>
- Akbari, H., Azadi, M., Fahham, H., 2020. Free vibration analysis of thick sandwich cylindrical panels with saturated FG-porous core. *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 0, 1–19. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1748051>
- Akbaş, Ş.D., 2019. Forced vibration analysis of functionally graded sandwich deep beams. *Coupled Syst. Mech.* 8, 259–271.
- Akbaş, Ş.D., 2018. Forced vibration analysis of cracked nanobeams. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 40, 392. <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1315-1>
- Akbas, S.D., 2015. Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments. *Steel Compos. Struct.* 19, 1421–1447. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.19.6.1421>

- Akgöz, B., Civalek, Ö., 2013. Buckling analysis of functionally graded microbeams based on the strain gradient theory. *Acta Mech.* 224, 2185–2201. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0883-5>
- Al-Maliki, A.F.H., Faleh, N.M., Alasadi, A.A., 2019. Finite element formulation and vibration of nonlocal refined metal foam beams with symmetric and non-symmetric porosities. *Struct. Monit. Maint.* 6, 147–159.
- Ambartsumyan, S.A., 1991. *Theory Of Anisotropic Plates: Strength, Stability, & Vibrations*, \$ {number}nd édition. ed. CRC Press, New York.
- Argyropoulos, D.S., 2001. *Wood and Cellulosic Chemistry. Second Edition, Revised and Expanded* Edited by David N.-S. Hon (Clemson University) and Nubuo Shiraishi (Kyoto University). Marcel Dekker: New York and Basel. 2001. vii + 914 pp. \$250.00. ISBN 0-8247-0024-4. *J. Am. Chem. Soc.* 123, 8880–8881. <https://doi.org/10.1021/ja015237p>
- Avcar, M., 2019. Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams. *Steel Compos. Struct.* 30, 603–615.
- Avcar, M., 2016. Effects of Material Non-Homogeneity and Two Parameter Elastic Foundation on Fundamental Frequency Parameters of Timoshenko Beams. *Acta Phys. Pol. A* 130, 375–378. <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.130.375>
- Avcar, M., Mohammed, W.K.M., 2018. Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation. *Arab. J. Geosci.* 11, 232. <https://doi.org/10.1007/s12517-018-3579-2>
- Ayache, B., Bennai, R., Fahsi, B., Fourn, H., Atmane, H.A., Tounsi, A., 2018. Analysis of wave propagation and free vibration of functionally graded porous material beam with a novel four variable refined theory. *Earthq. Struct.* 15, 369–382.
- Bao, G., Wang, L., 1995. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *Int. J. Solids Struct.* 32, 2853–2871. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00267-Z](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00267-Z)
- Batou, B., Nebab, M., Bennai, R., Atmane, H.A., Tounsi, A., Bouremana, M., 2019. Wave dispersion properties in imperfect sigmoid plates using various HSDTs. *Steel Compos. Struct.* 33, 699–716.
- Belmahi, S., Zidour, M., Meradjah, M., 2019. Small-scale effect on the forced vibration of a nano beam embedded an elastic medium using nonlocal elasticity theory. *Adv. Aircr. Spacecr. Sci.* 6, 1–18.

- Benadouda, M., Atmane, H.A., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R., 2017. An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities. *Earthq. Struct.* 13, 255–265.
- Bennai, R., Atmane, H.A., 2016. Analysis of Free Vibration of Sandwich Beams Consider Normal Deformation Effect, in: <https://Library.Crti.Dz/>. Presented at the 7th African Conference on Non Destructive Testing ACNDT 2016 & the 5th International Conference on NDT and Materials Industry and Alloys (IC-WNDT-MI).
- Bensattalah, T., Zidour, M., Daouadji, T.H., 2018. Analytical analysis for the forced vibration of CNT surrounding elastic medium including thermal effect using nonlocal Euler-Bernoulli theory. *Adv. Mater. Res.* 7, 163–174.
- Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H., Adda Bedia, E.A., 2010. Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Mech. Compos. Mater.* 46, 425–434. <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9159-5>
- Bessaim, A., Houari, M.S., Tounsi, A., Mahmoud, S., Bedia, E.A.A., 2013. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J. Sandw. Struct. Mater.* 15, 671–703. <https://doi.org/10.1177/1099636213498888>
- Boukhari, A., Atmane, H.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., 2016. An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates. *Struct. Eng. Mech.* 57, 837–859. <https://doi.org/10.12989/sem.2016.57.5.837>
- Boulal, A., Bensattalah, T., Karas, A., Zidour, M., Heireche, H., Bedia, E.A.A., 2020. Buckling of carbon nanotube reinforced composite plates supported by Kerr foundation using Hamilton's energy principle. *Struct. Eng. Mech.* 73, 209–223.
- Boulefrakh, L., Hebali, H., Chikh, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., 2019. The effect of parameters of visco-Pasternak foundation on the bending and vibration properties of a thick FG plate. *Geomech. Eng.* 18, 161–178. <https://doi.org/10.12989/gae.2019.18.2.161>
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., 2013. A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates. *Int. J. Comput. Methods* 11, 1350082. <https://doi.org/10.1142/S0219876213500825>

- Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., Soave, M., 2011. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Compos. Part B Eng.* 42, 123–133. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2010.10.005>
- Chaabane, L.A., Bourada, F., Sekkal, M., Zerouati, S., Zaoui, F.Z., Tounsi, Abdeldjebbar, Derras, A., Bousahla, A.A., Tounsi, Abdelouahed, 2019. Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation. *Struct. Eng. Mech.* 71, 185–196.
- Chami, K., Messafer, T., Hadji, L., 2020. Analytical modeling of bending and free vibration of thick advanced composite beams resting on Winkler-Pasternak elastic foundation. *Earthq. Struct.* 19, 091–101.
- Chi, S.-H., Chung, Y.-L., 2006. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *Int. J. Solids Struct.* 43, 3657–3674. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011>
- Chung, Y.-L., Chi, S.H., 2001. The residual stress of functionally graded materials. *J. Chin. Inst. Civ. Hydraul. Eng.* 13, 1–9.
- Civalek, O., Yavas, A., Parametrelı, İ., Zemine, E., Büyük, O., Dikdörtgen, D., Hesabı, P.S., 2006. Large Deflection Static Analysis of Rectangular Plates On Two Parameter Elastic Foundations.
- Cong, P.H., Chien, T.M., Khoa, N.D., Duc, N.D., 2018. Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy’s HSDT. *Aerosp. Sci. Technol.* 77, 419–428. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.03.020>
- Coskun, S., Kim, J., Toutanji, H., 2019. Bending, Free Vibration, and Buckling Analysis of Functionally Graded Porous Micro-Plates Using a General Third-Order Plate Theory. *J. Compos. Sci.* 3, 15. <https://doi.org/10.3390/jcs3010015>
- Daouadji, Tahar Hassaine, Adim, Belkacem, Benferhat, Rabia, 2016. Bending analysis of an imperfect FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading with analytical validation. *Adv. Mater. Res.* 5, 35–53. <https://doi.org/10.12989/AMR.2016.5.1.035>
- Daouadji, T.H., Tounsi, A., Bedia, E.A.A., 2013. A New Higher Order Shear Deformation Model for Static Behavior of Functionally Graded Plates. *Adv. Appl. Math. Mech.* 5, 351–364. <https://doi.org/10.1017/S2070073300002721>
- Delale, F., Erdogan, F., 1983. The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane. *J. Appl. Mech.* 50, 609–614. <https://doi.org/10.1115/1.3167098>

- El-Galy, I.M., Saleh, B.I., Ahmed, M.H., 2019. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Appl. Sci.* 1, 1378. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
- Eltaher, M.A., 2018. Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams | SpringerLink [WWW Document]. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s40430-018-1065-0> (accessed 5.11.21).
- Faleh, N.M., Ahmed, R.A., Fenjan, R.M., 2018. On vibrations of porous FG nanoshells. *Int. J. Eng. Sci.* 133, 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.08.007>
- Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., 2014. A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates. *Meccanica* 49, 795–810. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9827-3>
- Fenjan, R.M., Ahmed, R.A., Faleh, N.M., Hani, F.M., 2020a. Dynamic response of size-dependent porous functionally graded beams under thermal and moving load using a numerical approach. *Struct. Monit. Maint.* 7, 69–84.
- Fenjan, R.M., Moustafa, N.M., Faleh, N.M., 2020b. Scale-dependent thermal vibration analysis of FG beams having porosities based on DQM. *Adv. Nano Res.* 8, 283–292.
- Filipich, C.P., Rosales, M.B., 2002. A further study about the behaviour of foundation piles and beams in a Winkler–Pasternak soil. *Int. J. Mech. Sci.* 44, 21–36. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00087-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00087-X)
- Filonenko-Borodich, 1940. Some Approximate Theories of Die Elastic Foundation [in Russian].
- Foroughi, H., Azhari, M., 2014. Mechanical buckling and free vibration of thick functionally graded plates resting on elastic foundation using the higher order B-spline finite strip method. *Meccanica* 49, 981–993. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9844-2>
- Forsat, M., Badnava, S., Mirjavadi, S.S., Barati, M.R., Hamouda, A.M.S., 2020. Small scale effects on transient vibrations of porous FG cylindrical nanoshells based on nonlocal strain gradient theory. *Eur. Phys. J. Plus* 135, 81. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-019-00042-x>
- Gafour, Y., Hamidi, A., Benahmed, A., Zidour, M., Bensattalah, T., 2020. Porosity-dependent free vibration analysis of FG nanobeam using non-local shear deformation and energy principle. *Adv. Nano Res.* 8, 49–58.
- Ghandourah, E.E., Abdraboh, A.M., 2020. Dynamic analysis of functionally graded nonlocal nanobeam with different porosity models. *Steel Compos. Struct.* 36, 293–305.

- Gupta, A., Talha, M., 2018a. Static and Stability Characteristics of Geometrically Imperfect FGM Plates Resting on Pasternak Elastic Foundation with Microstructural Defect. *Arab. J. Sci. Eng.* 43, 4931–4947. <https://doi.org/10.1007/s13369-018-3240-0>
- Gupta, A., Talha, M., 2018b. Influence of Porosity on the Flexural and Free Vibration Responses of Functionally Graded Plates in Thermal Environment. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 18, 1850013. <https://doi.org/10.1142/S021945541850013X>
- Hadji, L., 2020. Vibration analysis of FGM beam: Effect of the micromechanical models. *Coupled Syst. Mech.* 9, 265–280. <https://doi.org/10.12989/csm.2020.9.3.265>
- Hadji, L., Bernard, F., 2020. Bending and free vibration analysis of functionally graded beams on elastic foundations with analytical validation. *Adv. Mater. Res.* 9, 63–98.
- Hadji, L., Zouatnia, N., Bernard, F., 2019. An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities Effect of the micromechanical models. *Struct. Eng. Mech.* 69, 231. <https://doi.org/10.12989/sem.2019.69.2.231>
- Hamed, M.A., Abo-bakr, R.M., Mohamed, S.A., Eltaher, M.A., 2020. Influence of axial load function and optimization on static stability of sandwich functionally graded beams with porous core. *Eng. Comput.* 36, 1929–1946. <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01023-w>
- Hamed, M.A., Sadoun, A.M., Eltaher, M.A., 2019. Effects of porosity models on static behavior of size dependent functionally graded beam. *Struct. Eng. Mech.* 71, 89–98.
- Hassen, A.A., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S., 2015. A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities. *Steel Compos. Struct.* 19, 369–384. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.19.2.369>
- Herrmann, M., Sobek, W., 2016. Functionally Graded Concrete - Numerical Design Methods and Experimental Tests of Mass-Optimised Structural Components. *Struct. Concr.* 18. <https://doi.org/10.1002/suco.201600011>
- Heshmati, M., Daneshmand, F., 2018. A study on the vibrational properties of weight-efficient plates made of material with functionally graded porosity. *Compos. Struct.* 200. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.099>
- Hetényi, M., 1950. A General Solution for the Bending of Beams on an Elastic Foundation of Arbitrary Continuity. *J. Appl. Phys.* 21, 55–58. <https://doi.org/10.1063/1.1699420>
- Hetenyi, M., 1946. *Beams on Elastic Foundation*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich.

- Huang, Z.Y., Lü, C.F., Chen, W.Q., 2008. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Compos. Struct.* 85, 95–104. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.10.010>
- Jamian, S., Watanabe, Y., Sato, H., 2019. Formation of compositional gradient in Al/SiC FGMs fabricated under huge centrifugal forces using solid-particle and mixed-powder methods. *Ceram. Int.*, A selection of papers presented at CIMTEC 2018 45, 9444–9453. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2018.08.315>
- Jha, D.K., Kant, T., Srinivas, K., Singh, R.K., 2013. An accurate higher order displacement model with shear and normal deformations effects for functionally graded plates. *Fusion Eng. Des.* 88, 3199–3204. <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2013.10.002>
- kapania, R., 1989. Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I - Sheareffects and buckling. | *AIAA Journal* [WWW Document]. URL <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.10202> (accessed 5.11.21).
- Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., 2019. On the dynamics of porous doubly-curved nanoshells. *Int. J. Eng. Sci.* 143, 39–55. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.014>
- Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., Li, L., 2020. Free vibration analysis of FG nanoplate with poriferous imperfection in hygrothermal environment. *Struct. Eng. Mech.* 73, 191–207.
- Karami, B., Shahsavari, D., Li, L., 2018a. Temperature-dependent flexural wave propagation in nanoplate-type porous heterogenous material subjected to in-plane magnetic field. *J. Therm. Stress.* 41, 483–499. <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1393781>
- Karami, B., Shahsavari, D., Nazemosadat, S.M.R., Li, L., Ebrahimi, A., 2018b. Thermal buckling of smart porous functionally graded nanobeam rested on Kerr foundation. *Steel Compos. Struct.* 29, 349–362.
- Kerr, A.D., 1964. Elastic and Viscoelastic Foundation Models. *J. Appl. Mech.* 31, 491–498. <https://doi.org/10.1115/1.3629667>
- Kim, J., Żur, K.K., Reddy, J.N., 2019. Bending, free vibration, and buckling of modified couples stress-based functionally graded porous micro-plates. *Compos. Struct.* 209, 879–888. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.023>
- Kim, S.-E., Thai, H.-T., Lee, J., 2009. A two variable refined plate theory for laminated composite plates. *Compos. Struct.* 89, 197–205. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.07.017>
- Kiran, M.C., Kattimani, S.C., 2018. Assessment of porosity influence on vibration and static behaviour of functionally graded magneto-electro-elastic plate: A finite element study.

- Eur. J. Mech. - ASolids 71, 258–277.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.04.006>
- KIRMIZI, G., ARIK, H., ÇINICI, H., 2019. Experimental study on mechanical and ballistic behaviours of silicon carbide reinforced functionally graded aluminum foam composites. *Compos. Part B Eng.* 164, 345–357.
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.11.076>
- Koizumi, M., Niino, M., 1995. Overview of FGM Research in Japan. *MRS Bull.* 20, 19–21.
<https://doi.org/10.1557/S0883769400048867>
- Kováčik, J., 2006. Correlation between Poisson's ratio and porosity in porous materials. *J. Mater. Sci.* 41, 1247–1249. <https://doi.org/10.1007/s10853-005-4237-0>
- Lee, W.-H., Han, S.-C., Park, W.-T., 2015. A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation. *Compos. Struct.* 122, 330–342. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.11.047>
- Legrand, A., Craig, G.A., Bonneau, M., Minami, S., Urayama, K., Furukawa, S., 2019. Understanding the multiscale self-assembly of metal–organic polyhedra towards functionally graded porous gels. *Chem. Sci.* 10, 10833–10842.
<https://doi.org/10.1039/C9SC04543K>
- Levinson, M., 1981. A new rectangular beam theory. *J. Sound Vib.* 74, 81–87.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(81\)90493-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90493-4)
- Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M., 1977. A High-Order Theory of Plate Deformation—Part 1: Homogeneous Plates. *J. Appl. Mech.* 44, 663–668.
<https://doi.org/10.1115/1.3424154>
- M. I. Gorbunov-Posadov, 1949. Beams and Plates on Elastic Foundation [in Russian].
- Mahmood, R.M., Akinlabi, E.T., 2017. *Functionally Graded Materials, Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering.* Springer International Publishing.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-53756-6>
- Mahmood Ali, S., 2019. Optimization of Centrifugal Casting Parameters of AlSi Alloy by using the Response Surface Methodology. *Int. J. Eng.* 32, 1516–1526.
<https://doi.org/10.5829/ije.2019.32.11b.02>
- Mahmoud, D., Elbestawi, M.A., 2017. Lattice Structures and Functionally Graded Materials Applications in Additive Manufacturing of Orthopedic Implants: A Review. *J. Manuf. Mater. Process.* 1, 13. <https://doi.org/10.3390/jmmp1020013>
- Majumdar, J., Manna, I., 2015. Development of Functionally Graded Coating by Thermal Spray Deposition. pp. 121–162. <https://doi.org/10.4018/978-1-4666-7489-9.ch005>

- Mantari, J.L., Granados, E.V., 2015. Thermoelastic analysis of advanced sandwich plates based on a new quasi-3D hybrid type HSDT with 5 unknowns. *Compos. Part B Eng.* 69, 317–334. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.10.009>
- Mantari, J.L., Guedes Soares, C., 2012. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos. Struct.* 94, 2561–2575. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.019>
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C., 2011. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory. *Compos. Struct.* 94, 37–49. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.020>
- Matsunaga, H., 2000. Vibration and Stability of Thick Plates on Elastic Foundations | *Journal of Engineering Mechanics* | Vol 126, No 1 [WWW Document]. URL <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290733-9399%282000%29126%3A1%2827%29> (accessed 5.25.21).
- Merzoug, M., Bourada, M., Sekkal, M., Abir, A.C., Chahrazed, B., Benyoucef, S., Benachour, A., 2020. 2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models. *Geomech. Eng.* 22, 361–374.
- Metco, S., n.d. *An Introduction to Thermal Spray* 24.
- Mindlin, R.D., 1951. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *J. Appl. Mech.* 18, 31–38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>
- Mirjavadi, S.S., Forsat, M., Nia, A.F., Badnava, S., Hamouda, A.M.S., 2020. Nonlocal strain gradient effects on forced vibrations of porous FG cylindrical nanoshells. *Adv. Nano Res.* 8, 149–156.
- Mota, A.F., Loja, M. a. R., 2019. Mechanical Behavior of Porous Functionally Graded Nanocomposite Materials. *C* 5, 34. <https://doi.org/10.3390/c5020034>
- Mota, A.F., Loja, M.A.R., Barbosa, J.I., Rodrigues, J.A., 2020. Porous Functionally Graded Plates: An Assessment of the Influence of Shear Correction Factor on Static Behavior. *Math. Comput. Appl.* 25, 25. <https://doi.org/10.3390/mca25020025>
- Natarajan, S., Manickam, G., 2012. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elem. Anal. Des.* 57, 32–42. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2012.03.006>

- Nebab, M., Atmane, H.A., Bennai, R., Tahar, B., 2019. Effect of nonlinear elastic foundations on dynamic behavior of FG plates using four-unknown plate theory. *Earthq. Struct.* 17, 447–462.
- Nebab, M., Benguediab, S., Atmane, H.A., Bernard, F., 2020. A simple quasi-3D HDST for dynamic behavior of advanced composite plates with the effect of variables elastic foundations. *Geomech. Eng.* 22, 415–431.
- Nelson, R.B., Lorch, D.R., 1974. A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates. *J. Appl. Mech.* 41, 177–183. <https://doi.org/10.1115/1.3423219>
- Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M., 2013. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos. Part B Eng.* 44, 657–674. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.089>
- Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M., 2012. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Part B Eng.* 43, 711–725. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.009>
- Nguyen, N.V., Nguyen, H.X., Lee, S., Nguyen-Xuan, H., 2018. Geometrically nonlinear polygonal finite element analysis of functionally graded porous plates. *Adv. Eng. Softw.* 126, 110–126. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.11.005>
- OMURTAG, M.H., 1998. FREE VIBRATION ANALYSIS OF KIRCHHOFF PLATES RESTING ON ELASTIC FOUNDATION BY MIXED FINITE ELEMENT FORMULATION BASED ON GÂTEAUX DIFFERENTIAL - OMURTAG - 1997 - International Journal for Numerical Methods in Engineering - Wiley Online Library [WWW Document]. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819970130%2940%3A2%3C295%3A%3AAID-NME66%3E3.0.CO%3B2-2> (accessed 5.25.21).
- Pasternak, P.L., 1954. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. undefined.
- Patel, B.P., Munot, C.S., Gupta, S.S., Sambandam, C.T., Ganapathi, M., 2004. Application of higher-order finite element for elastic stability analysis of laminated cross-ply oval cylindrical shells. *Finite Elem. Anal. Des.* 40, 1083–1104. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2003.06.001>

- Rachedi, M.A., Benyoucef, S., Bouhadra, A., Bouiadjra, R.B., Sekkal, M., Benachour, A., 2020. Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation. *Geomech. Eng.* 22, 65–80.
- Ramteke, P.M., Panda, S.K., Sharma, N., 2019. Effect of grading pattern and porosity on the eigen characteristics of porous functionally graded structure. *Steel Compos. Struct.* 33, 865–875.
- Rayleigh, 1877. On Progressive Waves. *Proc. Lond. Math. Soc.* s1-9, 21–26. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-9.1.21>
- Reddy, 2004. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition [WWW Document]. Routledge CRC Press. URL <https://www.routledge.com/Mechanics-of-Laminated-Composite-Plates-and-Shells-Theory-and-Analysis/Reddy/p/book/9780849315923> (accessed 5.11.21).
- Reddy, J.N., Wang, C.M., Lee, K.H., 1997. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *Int. J. Solids Struct.* 34, 3373–3384. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00211-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00211-9)
- Reissner, E., 1945. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *J. Appl. Mech.* 12, A69–A77. <https://doi.org/10.1115/1.4009435>
- Rezaei, A., Saidi, A., 2015. Exact Solution for Free Vibration of Thick Rectangular Plates Made of Porous Materials. *Compos. Struct.* 134, 1051–1060. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.125>
- Rezaei, A.S., Saidi, A.R., Abrishamdari, M., Mohammadi, M.H.P., 2017. Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: An analytical approach. *Thin-Walled Struct.* 120, 366–377. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.08.003>
- Safa, A., Hadji, L., Bourada, M., Zouatnia, N., 2019. Thermal vibration analysis of FGM beams using an efficient shear deformation beam theory. *Earthq. Struct.* 17, 329–336. <https://doi.org/10.12989/eas.2019.17.3.329>
- Sahouane, A., Hadji, L., Bourada, M., 2019. Numerical analysis for free vibration of functionally graded beams using an original HSDBT. *Earthq. Struct.* 17, 31–37.
- Saidi, H., Sahla, M., 2019. Vibration analysis of functionally graded plates with porosity composed of a mixture of Aluminum (Al) and Alumina (Al₂O₃) embedded in an elastic medium. *Frat. Ed Integrità Strutt.* 13, 286–299. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.50.24>
- Saleh, B., Jiang, J., Fathi, R., Al-hababi, T., Xu, Q., Wang, L., Song, D., Ma, A., 2020. 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications

- and Future Challenges. *Compos. Part B Eng.* 201, 108376.
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
- Saxena, A., Gupta, S., Singh, B., Dubey, A.K., 2019. Improved functional response of spark plasma sintered hydroxyapatite based functionally graded materials: An impedance spectroscopy perspective. *Ceram. Int.* 45, 6673–6683.
<https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2018.12.156>
- Sellam, S., Draiche, K., Tlidji, Y., Addou, F.Y., Benachour, A., 2020. A simple analytical model for free vibration and buckling analysis of orthotropic rectangular plates. *Struct. Eng. Mech.* 75, 157–174.
- Selmi, A., 2020. Dynamic behavior of axially functionally graded simply supported beams. *Smart Struct. Syst.* 25, 669–678.
- Shahsavari, D., Karami, B., Li, L., 2018. A high-order gradient model for wave propagation analysis of porous FG nanoplates. *Steel Compos. Struct.* 29, 053–066.
- Shen, H.-S., 1995. Postbuckling analysis of composite laminated plates on two-parameter elastic foundations. *Int. J. Mech. Sci.* 37, 1307–1316. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)00040-5](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00040-5)
- Shimpi, R.P., 1999. Zeroth-Order Shear Deformation Theory for Plates. *AIAA J.* 37, 524–526.
<https://doi.org/10.2514/2.750>
- Sopyan, I., Mel, M., Ramesh, S., Khalid, K.A., 2007. Porous hydroxyapatite for artificial bone applications. *Sci. Technol. Adv. Mater., APNF International Symposium on Nanotechnology in Environmental Protection and Pollution (ISNEPP2006)* 8, 116–123.
<https://doi.org/10.1016/j.stam.2006.11.017>
- Strojny-Nędza, A., Pietrzak, K., Węglewski, W., 2016. The Influence of Al₂O₃ Powder Morphology on the Properties of Cu-Al₂O₃ Composites Designed for Functionally Graded Materials (FGM). *J Materi Eng Perform* 25.
- Talha, M., Singh, B.N., 2010. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Model.* 34, 3991–4011.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.034>
- Tayeb, B., Zidour, M., Tahar, H.D., 2019. A new nonlocal beam model for free vibration analysis of chiral single-walled carbon nanotubes.
<https://doi.org/10.12989/cme.2019.1.1.021>
- Tayeb, T.S., Zidour, M., Bensattalah, T., Heireche, H., Benahmed, A., Bedia, E.A.A., 2020. Mechanical buckling of FG-CNTs reinforced composite plate with parabolic distribution using Hamilton's energy principle. *Adv. Nano Res.* 8, 135–148.

- Thai, C.H., Zenkour, A.M., Abdel Wahab, M., Nguyen-Xuan, H., 2016. A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Compos. Struct.* 139, 77–95. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.066>
- Thai, H.-T., Choi, D.-H., 2013. Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates. *Finite Elem. Anal. Des.* 75, 50–61. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2013.07.003>
- Thai, H.-T., Kim, S.-E., 2013. A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* 96, 165–173. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.025>
- Thai, H.-T., Park, M., Choi, D.-H., 2013. A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation. *Int. J. Mech. Sci.* 73, 40–52. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.03.017>
- Thai, H.-T., Vo, T.P., 2013. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Appl. Math. Model.* 37, 3269–3281. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.08.008>
- Timesli, A., 2020a. Prediction of the critical buckling load of SWCNT reinforced concrete cylindrical shell embedded in an elastic foundation. *Comput. Concr.* 26, 53–62.
- Timesli, A., 2020b. Buckling analysis of double walled carbon nanotubes embedded in Kerr elastic medium under axial compression using the nonlocal Donnell shell theory. *Adv. Nano Res.* 9, 69–82. <https://doi.org/10.12989/anr.2020.9.2.069>
- Timoshenko, P.S.P., 1921. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* 41, 744–746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
- Timoshenko, S.P., Woinowsky-Kreiger, S., 1959. *Theory of Plates and Shells*, \$ {number}nd édition. ed. McGraw-Hill Inc.,US, New York.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E.A., 2013. A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerosp. Sci. Technol., VFE-2* 24, 209–220. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2011.11.009>
- Touratier, M., 1991. An efficient standard plate theory. *Int. J. Eng. Sci.* 29, 901–916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y)
- V. Z. Vlasov, 1949. *Structural Mechanics of Thin Walled Three-Dimensional Systems* [in Russian],.

- Wang, S.S., 1983. Fracture Mechanics for Delamination Problems in Composite Materials. *J. Compos. Mater.* 17, 210–223. <https://doi.org/10.1177/002199838301700302>
- Watanabe, Y., Sato, H., Miura-Fujiwara, E., 2015. Functionally Graded Metallic Biomaterials. pp. 181–209. https://doi.org/10.1007/978-3-662-46842-5_9
- Wattanasakulpong, N., Chaikittiratana, A., 2015. Exact solutions for static and dynamic analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates with Pasternak elastic foundation. *Appl. Math. Model.* 39, 5459–5472. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.12.058>
- Wattanasakulpong, N., Gangadhara Prusty, B., Kelly, D.W., Hoffman, M., 2012. Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation. *Mater. Des.* 1980-2015, *Sustainable Materials, Design and Applications* 36, 182–190. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.10.049>
- Wattanasakulpong, N., Ungbhakorn, V., 2014. Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. *Aerosp. Sci. Technol.* 32, 111–120. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.12.002>
- Yaghoobi, H., Fereidoon, A., 2014. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory. *Compos. Part B Eng.* 62, 54–64. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.02.014>
- Yaylac, M., 2016. The investigation crack problem through numerical analysis. *Struct. Eng. Mech.* 57, 1143–1156.
- Yaylaci, M., Avcar, M., 2020. Finite element modeling of contact between an elastic layer and two elastic quarter planes. *Comput. Concr.* 26, 107–114.
- Yaylaci, M., Terzi, C., Avcar, M., 2019. Numerical analysis of the receding contact problem of two bonded layers resting on an elastic half plane. *Struct. Eng. Mech.* 72, 775–783. <https://doi.org/10.12989/sem.2019.72.6.775>
- Yaylaci, M., Birinci, A., 2013. The receding contact problem of two elastic layers supported by two elastic quarter planes. *Struct. Eng. Mech.* 48. <https://doi.org/10.12989/sem.2013.48.2.241>
- Yazid, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A., Houari, M., 2018. A novel nonlocal refined plate theory for stability response of orthotropic single-layer graphene sheet resting on elastic medium. *Smart Struct. Syst.* 21, 15–25. <https://doi.org/10.12989/sss.2018.21.1.015>

- Yoshihisa Uchida, 2004. Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications 39-B, 39-51-B,.
- Younesian, D., Hosseinkhani, A., Askari, H., Esmailzadeh, E., 2019. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. *Nonlinear Dyn.* 97, 853–895. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>
- Younsi, A., Tounsi, A., Zaoui, F.Z., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R., 2018. Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates. *Geomech. Eng.* 14, 519–532.
- Zaoui, F.Z., Ouinas, D., Tounsi, A., 2019. New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Compos. Part B Eng.* 159, 231–247. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.051>
- Zarga, D., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Bourada, F., Mahmoud, S.R., 2019. Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory. *Steel Compos. Struct.* 32, 389–410.
- Zenkour, A.M., Allam, M.N.M., Radwan, A.F., 2014. Effects of transverse shear and normal strains on fg plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loading. *Int. J. Appl. Mech.* 06, 1450063. <https://doi.org/10.1142/S175882511450063X>
- Zenkour, A.M., Radwan, A.F., 2018. Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak foundations under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory. *Arch. Civ. Mech. Eng.* 18, 645–658. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2017.10.003>
- Zhang, Y., Wang, J., 2017. Fabrication of Functionally Graded Porous Polymer Structures using Thermal Bonding Lamination Techniques. *Procedia Manuf.*, 45th SME North American Manufacturing Research Conference, NAMRC 45, LA, USA 10, 866–875. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2017.07.073>
- Zhao, J., Wang, Q., Deng, X., Choe, K., Zhong, R., Shuai, C., 2019. Free vibrations of functionally graded porous rectangular plate with uniform elastic boundary conditions. *Compos. Part B Eng.* 168, 106–120. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.044>
- Zhemochkin, B.N., Sinitsyn, A.P., 1947. *Practical Methods of Calculation of Foundation Beams and Slabs on Elastic Foundation* [in Russian].
- Zhen, W., Wanji, C., 2006. An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading. *Compos. Struct.* 73, 99–109. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.01.034>

- Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H., Au, F.T.K., 2004. Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 59, 1313–1334. <https://doi.org/10.1002/nme.915>
- Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J., Lee, S., 2001. Fabrication of ZrO₂–NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Mater. Chem. Phys.* 68, 130–135. [https://doi.org/10.1016/S0254-0584\(00\)00355-2](https://doi.org/10.1016/S0254-0584(00)00355-2)