

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES -SIDI BEL ABBES-

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

LABORATOIRE DES STRUCTURES ET MATERIAUX AVANCES DANS LE
GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **structures et matériaux**

Présentée par: **ABBACHE ALI**

Sujet de thèse

Analyse Des Vibrations Non Linéaires Des Structure De
Génie Civil Amorties

Soutenu le devant le Jury composé de :

M^r. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	Président
M^r. MEFTAH Sid Ahmed	Professeur	UDL-SBA	Directeur de thèse
M^r. BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	M.C.A	UDL-SBA	Examineur
M^r. HEBALI Habib	M.C.A	U.MASCARA	Examineur
Mr. HADJ MOSTEFA Adda	M.C.A	U.RELIZANE	Examineur
M^r. ZINE Abdellah	M.C.A	U.RELIZANE	Examineur
Mr. YOUZERA Hadj	M.C.A	U.MASCARA	Invité

Année universitaire 2021/2022

Dédicace

Je dédie cette thèse :

*À la mémoire de ma mère **HALIMA**.*

*À la mémoire de mon père **ABDELKADER**.*

À ma femme.

*À mes enfants, **HAITHEM** et **HIBA**.*

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Remerciements

*Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements après mon Dieu à mon directeur de thèse, Monsieur le professeur, **MEFTAH SID AHMED** pour la confiance et l'attention qu'il m'a offertes tout au long de ce travail, son sens de la motivation et son aide pour finir ce travail.*

*J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur **HADJ YOUZERA**, docteur à l'université de Mascara, de m'avoir confié un sujet prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, son amabilité et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.*

J'adresse aussi mes sincères remerciements aux membres de jury :

- Professeur **TOUNSI Abdelouahed** de l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes.*
- Docteur **BOUSAHLA Abdelmoumen Anis** de l'Université de Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes*
- Docteur **HEBALI Habib** de l'Université de Mascara*
- Docteur **HADJ MOSTEFA Adda** de l'Université de Relizane*
- Docteur **ZINE Abdellah** de l'Université de Relizane*

Je voudrais adresser mes francs remerciements envers mes collègues du laboratoire des structures et matériaux avancés dans le génie civil et travaux publics

Sommaire

Liste des figures	07
Liste des tableaux	10
Listes des symboles et notations	11
Résumé	13
Abstract	13
Introduction générale	14

Chapitre I: Considérations Bibliographiques

I.1. Introduction	17
I.2. Définition des matériaux composites (Ledru, 2009).....	17
I.2.1. Renfort (Benferdi, 2010)	18
I.2.2. Matrices	24
I.2.2.1. Les résines thermoplastiques	25
I.2.2.2. Les élastomères	26
I.2.2.3. Les résines thermodurcissables	26
1. 3. Caractéristiques mécaniques des matériaux	26
I.4. Applications des matériaux composites.....	27
I.5. Classification suivant la structure des matériaux composites	30
I.5.1. Monocouches	30
I.5.2. Stratifiés	31
I.6. Les Avantages et Inconvénients des Matériaux Composites	32
I.7 Les matériaux sandwichs	32
I.7.1 Présentation d'un matériau sandwich	32
I.7.2 Les constituants d'un matériau sandwich	34
I.7.3 Intérêt des structures sandwichs.....	35
I.7.4 Techniques d'assemblage des matériaux sandwichs	35
I.7.4.1 Le collage de peau sur l'âme	35
I.7.4.2 Technique de pliage	36
I.7.5 Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs	37
I.7.5.1 Flambement généralisé des peaux	37

I.7.5.2 Rupture des peaux en traction ou en compression.....	38
I.7.5.3 Modes locaux de rupture.....	38
I.7.5.4 Rupture de l'âme en cisaillement.....	38
I.7.5.5 Flambement généralisé de l'âme	39
I.7.5.6 Flambement localisé	39
I.7.5.7 Dégradation de l'adhésive.....	40
I.7.6 Domaine d'application des structures sandwichs	41
I.7.6.1 Construction aérospatiale.....	41
I.7.6.2 Construction automobile et ferroviaire	41
I.7.7 Avantages des Sandwichs	42
I.7.8 Inconvénients des Sandwichs	42
I.8 Rappels sur les matériaux viscoélastiques et notion d'amortissement	42
I.8.1 Principes fondamentaux en viscoélasticité	42
I.8.2 Modules complexes le comportement viscoélastique des matériaux composites	42
I.8.3 Formulation de la loi de comportement d'un matériau viscoélastique	45
I.8.3.1 Viscoélasticité linéaire	45
I.8.3.2 Principe de superposition de Boltzmann	46
I.8.3.3 Matériau non vieillissant	46
I.8.3.4 Loi de comportement pour une sollicitation harmonique	48
I.9. Conclusion	49

Chapitre II : Théories Des Poutres

II.1 Introduction	52
II.2 Aperçu historique des théories des poutres	52
II.3 Les différents types de poutres	52
II.4 Le comportement linéaire des poutres composites	53
II.5 Le Comportement mécanique non-linéaire des structures	54
II.6 Non linéarités dans les structures minces	54
II.7 Quelques Méthode de résolution du problème de la réponse forcée de structures minces en non linéaire géométrique	56
II.7.1 Méthode de l'équilibrage harmonique	56
II.7.2 autre méthode « Méthode Asymptotique Numérique (MAN) »	57
II.8 Différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle	57

II.8.1 Approche monocouche équivalente	57
II.8.1.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)	57
II.8.1.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT)	58
II.8.1.3 Théorie d'Ordre Elevé	60
II.8.2 Approche par couche	62
II.8.3 Les modèles zig-zag	62
II.9 Méthodes de résolution.....	63
II.9.1 Procédure de Navier	63
II.9.2 Méthode de RAYLEIGH-Ritz.....	63
II.9.3 Méthode des éléments finis	64
II.10 Conclusion	64

Chapitre III : Résonance Super-Harmonique Des Poutres Sandwich

III.1. Introduction	66
III.2. Modèle viscoélastique pour les matériaux composites	68
III.3. Formulation	71
III.3. 1. Cinématique	71
III.3.2 Équations de mouvement	74
III.3.3 Modèle de transformation.	77
III.4 Méthode de résolution utilisant la méthode de perturbation	78
III.4.1 Cas non résonnant	79
III.4.2 Résonance Super harmonique	80
III.5. Conclusion.....	81

Chapitre IV : Résultats Numériques Et Discussion

IV.1 Introduction	83
IV.2. résonance super-harmonique.....	84
IV.3. Résultat et discussion	84
IV.4. Conclusion	89
Conclusion Générale	90
Références Bibliographiques	92

Liste des figures

Chapitre I : Considérations Bibliographiques

Figure I.1. Principaux matériaux de renforts	18
Figure I.2. Fibres de verre	19
Figure I.3. Tissue de fibres de verre	19
Figure I.4. Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage des fibres de verre (Chawla, 2013)	20
Figure I.5. Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN (Chawla, 2013) et (Baker, 1983)	20
Figure I.6. Plaques et rouleaux en fibres de carbone	21
Figure I.7. Utilisation des fibres de carbone dans la famille des avions Airbus	21
Figure I.8. Tissue en fibre d'aramide (Kevlar)	22
Figure I.9. Processus de fabrication des fibres d'aramide (Chawla, 2013)	23
Figure I.10. Exemples de fibres végétales	24
Figure I.11. Familles des matrices	25
Figure I.12. Résines thermoplastiques	25
Figure I.13. Exemples d'élastomères	26
Figure I.14. Formes structurelles en fibre de verre et résine fabriquées par pultrusion (Chawla, 2013)	28
Figure I.15. Tuyau à filament enroulé (diamètre $\frac{1}{4}$ 2 m) destiné à l'irrigation en Équateur. (Chawla, 2013)	28
Figure I.16. Utilisation des matériaux composites dans l'avion Boing 787	29
Figure I.17. Colonne enveloppée d'une enveloppe en fibre de carbone / époxy (Courtoisie de B. Kad.)	30
Figure I.18. Matériau composite UD (Perrot. Y, 2006).	30

Figure I.19. Un matériau composite stratifié (Bensaid. S, 2006)	31
Figure I.20. Schéma d'un sandwich (Ambartsumyan S.A 1969)	33
Figure I.21. Différents constituants d'une structure sandwich (Whitney. JM, 1973)	34
Figure I.22. Panneaux réalisés par collage à partir de profils divers.....	36
Figure I.23. Pliage de panneaux sandwich (Reissner. E, 1975)	36
Figure I.24. Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich	37
Figure I.25: Flambement généralisé des peaux du sandwich.	37
Figure I.26. Rupture des peaux en traction ou en compression	38
Figure I.27. Modes locaux de rupture par indentation	38
Figure I.28. Rupture de l'âme en cisaillement	39
Figure I.29. Flambement généralisé de l'âme du sandwich.....	39
Figure I.30 (a). Flambement localisé « Wrinkling »	40
Figure I.30 (b). Flambement localisé «Damppling»	40
Figure I.31. Type de dégradation de l'adhésif (Cho.M, 1993)	40

Chapitre II : Théorie Des Plaques

Figure II.1. Cinématique d'Euler Bernoulli.....	58
Figure II.2. Cinématique de Timoshenko.	59
Figure II.3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.	60
Figure II.4.1. Champ de déplacements des modèles des couches discrètes, approche cinématique	62
Figure II.4.2. Champ de déplacements Modèles zig-zag, approche cinématique.....	62
Figure II.5. Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.	63

Chapitre III : Résonance Super-Harmonique Des Poutres Sandwich

Figure III. 1 : Poutre sandwich.....	71
---	----

Chapitre IV : Résultats Numériques Et Discussion

Figure IV.01 : Courbes des réponses des poutres courtes ($L/H_t=5$) lorsque ω est proche de $\omega_{nL}/3$ selon différents modèles cinématiques 85

Figure. IV.2. Courbes des réponses des poutres courtes ($L/H_t=10$) lorsque ω est proche de $\omega_{nL}/3$, selon différents modèles cinématiques.....86

Figure. IV.3. Courbes des réponses des poutres courtes ($L/H_t=10$) lorsque ω est proche de $\omega_{nL}/3$, avec d'orientation des fibres différent θ par le modèle de Touratier..... 87

Figure. IV.4. Courbes des réponses des poutres lorsque ω est proche de $\omega_{nL}/3$, pour différents amplitudes d'excitation F 88

Liste des tableaux

Chapitre I : Considérations Bibliographiques

Tableau I.1 .Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques (fibres seules) (Zouggar, 2016) 22

Tableau I.2. Caractéristiques mécaniques spécifiques des fibres (Zouggar, 2016) 27

Chapitre III : Résonance Super-Harmonique Des Poutres Sandwich

Tableau III.1.Modèles cinématiques considérés dans l'étude..... 72

CHAPITRE IV : Résultats Numériques Et Discussion

Tableau IV.1. Caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre 83

Listes des symboles et notations

Symboles alphabétiques :

- A: Amplitude .
- b : Largeur du sandwich.
- $B(x)$: Mode de rotation
- E_f : Module d'Young des faces.
- $f(z)$: Fonction de cisaillement.
- \mathcal{F}, \mathcal{G} : Fonctionnelles.
- H_c : L'épaisseur de cœur
- H_f : L'épaisseur des faces
- H_t : L'épaisseur totale du sandwich.
- I_c : Moment quadratique de la section droite du cœur.
- I_f : Moment quadratique de la section droite des faces.
- \mathcal{J} : Fonction de fluage.
- \mathcal{J}^* : Complaisance opérationnelle.
- K_l, K_{nl} Rigidités modales.
- \mathcal{L} : Operateur de la transformation de Laplace.
- L : Longueur de la poutre.
- M : Masse modale.
- M_i, M_β moments fléchissant.
- N_i : Force axiale dans la couche i .
- n : Nombre de mode.
- P_{acc} : Force d'inertie.
- P_{ext} : Travail virtuel externe.
- P_{int} : Travail virtuel interne.
- Q : Force modale.
- Q_{11}^* : Module d'Young complexe du matériau composite.
- Q_{55}^* : Module de cisaillement complexe du cœur.
- \mathcal{R} : Fonction de relaxation

- \mathcal{R}^* : Module opérationnel.
- T : Effort tranchant de cisaillement.
- t : Variable temporelle.
- S_c : Aire de la section droite du cœur
- S_f : Aire de la section droite des faces
- u_i : Déplacement longitudinal de la couche i . (suivant (Ox))
- u_i^0 : Déplacement longitudinal du plan moyen de la couche i . (suivant (Ox))
- W : Mode de flexion.
- w : Déplacement transversal suivant (Oz) .

Symboles grecs :

- β : La rotation additionnelle de la normale à la ligne moyenne.
- $\eta_i, \eta_l, \eta_{nl}$ Amortissement ou facteur de perte structurel.
- ε_i : Déformation normale dans la couche i ,
- σ : Contrainte normale.
- τ : Contrainte tangentielle.
- γ : Déformation de cisaillement dans la couche centrale.
- ν_i : Coefficient de Poisson du cœur.
- ρ_c : Masse volumique du cœur.
- ρ_c : Masse volumique des faces.
- Ω_l, Ω_{nl} Fréquence.
- ω : La pulsation.
- ω_a : La fréquence dépend de l'amplitude
- θ : L'orientation des fibres.

Notations :

- $\delta(\bullet)$ Quantité virtuelle.
- δP_{int} Puissance virtuelle des efforts intérieurs.
- δP_{ext} Puissance virtuelle des efforts extérieurs.
- δP_{acc} Puissance virtuelle des efforts d'inertie.
- $\bullet^R = Re(\bullet)$ Partie réelle.
- $\bullet^J = Im(\bullet)$ Partie imaginaire.
- $(*)$ Operateur du produit de convolution.
- $|\bullet|$ Module du nombre

Résumé

Ce travail traite des problèmes des vibrations secondaires dans le cas super-harmonique près de l'excitation harmonique de $1/3\omega_1$, les résultats de la non-linéarité des vibrations qui caractérise la poutre stratifiée mince et moins amortissant avec cœur en matériau composite. Dans ce but, la méthode à échelle multiple en conjonction avec les théories du zig-zag d'ordre supérieur est utilisée pour obtenir les réponses de résonance. Ensuite, une étude paramétrique est menée pour démontrer la vulnérabilité des structures stratifiées aux vibrations super harmoniques et pour réduire autant que possible les vibrations d'amplitude obtenues par une conception structurelle plus appropriée.

Mots clés: vibration non linéaire; Méthode à plusieurs échelles; Vibrations super-harmoniques; poutres sandwichs ; Matériaux composites; théories du zig-zag d'ordre supérieur.

Abstract

This paper deals with the secondary vibration problem in the super harmonic case near the harmonic excitation of $1/3\omega_1$, arising from the vibration nonlinearity that characterizes the slender and less damping laminated beam with composite material core. For this aim the multiple scale method in conjunction with the higher order zigzag theories are using to obtain the resonance responses. Following, parametric study is conducted to demonstrate the vulnerability of the laminated structures to the super harmonic vibrations and to reduce as far as possible the amplitude vibrations achieving by more appropriated structural design.

Keywords : Nonlinear vibration; Multiple scale method; Super harmonic vibrations; Laminated beams ; Composite materials; higher order zig-zag theories.

Introduction générale

Les matériaux composites à hautes performances mécaniques possèdent des propriétés mécaniques spécifiques (propriétés rapportées à la masse volumique) élevées.

Ces matériaux, de nature anisotrope, sont réalisés soit sous forme de structures stratifiés, soit sous forme de structures sandwichs.

Les problèmes des vibrations des structures sont devenus l'une des préoccupations actuelles dans plusieurs domaines (aéronautique, construction navale, automobile, etc.), et l'amortissement des vibrations est un facteur essentiel dans de nombreuses applications structurales.

Pour réduire et contrôler l'amplitude des vibrations, trois types de solutions existent. La première solution consiste à éliminer le bruit engendré par la vibration. Pour ce faire, la technique utilisée est une production d'une source de bruit secondaire émettant le négatif du bruit primaire de sorte à parvenir à l'annulation des deux sources opposées.

La deuxième solution est une isolation consistant à éviter la transmission des vibrations d'un système à un autre sans toutefois éliminer la source émettrice elle-même.

Enfin, la troisième solution est une technique d'atténuation ou d'amortissement utilisée pour diminuer l'amplitude des vibrations d'un système par intégration des matériaux absorbants ou adaptatifs depuis la conception. Cette dernière solution est la plus répandue « passive ».

Parmi les solutions passives, on trouve l'utilisation des poutres sandwichs avec un cœur à fort pouvoir amortissant, ces poutres sont constituées d'une mince couche de matériau composite viscoélastique intercalée entre deux parements d'acier.

Le matériau composite viscoélastique permet d'introduire la fonction amortissante de la poutre, dans cette situation, l'amortissement est dû principalement à l'écart entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques, les propriétés amortissantes de ces poutres sont caractérisées par deux quantités modales, à savoir le facteur de perte et la fréquence propre.

Le calcul numérique de ces quantités pose un problème qui est lié au modèle qui devrait être capable de rendre compte du cisaillement dans la couche centrale, en permettant des

modélisations avec un coût de calcul raisonnable, ces modèles sont basés sur la cinématique de Timoshenko, de Mindlin, de Reissner, de Afaq ou de Touratier selon le principe de zigzag.

La fonction amortissante de ces poutres est apportée par le matériau composite viscoélastique, ayant des caractéristiques mécaniques complexes et dépendant d'un effet bien connu de ces non-linéarités est la variation des fréquences de résonance avec l'amplitude de vibration, il est important de noter que pour des poutres élancées, ces effets non linéaires peuvent déjà être importants pour des amplitudes de vibrations modérées (par exemple, de l'ordre de l'épaisseur dans le cas de plaques).

On comprend l'importance, pour disposer d'outils permettant de décrire l'évolution des amplitudes en résonance super-harmonique forcées, tenant compte des non-linéarités géométriques et de connaître le domaine d'applicabilité de ces outils.

L'objectif de ce travail est d'étudier la résonance super-harmonique des poutres composites stratifiées en trois couches.

Le document comporte quatre chapitres.

Le chapitre I consacré à l'étude bibliographique du comportement du matériau composite sandwichs, et un rappel de la théorie de la viscoélasticité linéaire de matériau composite.

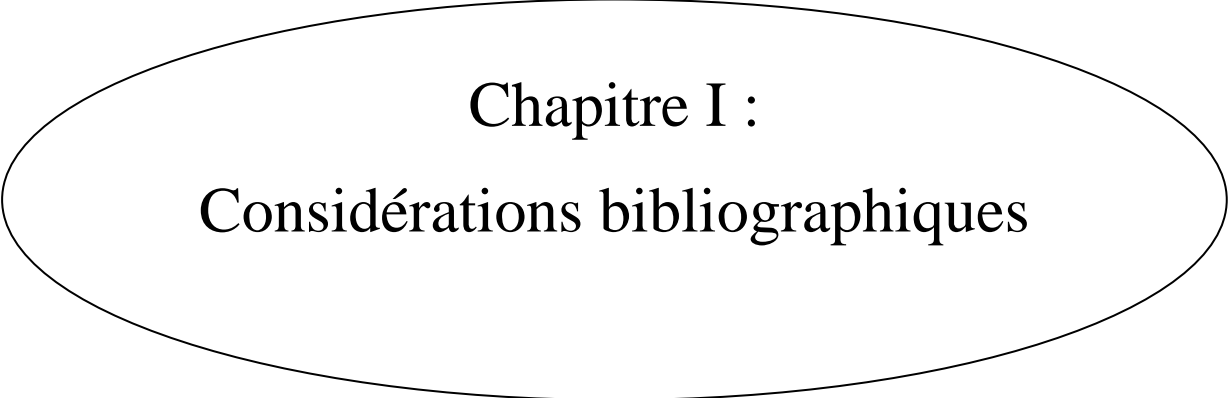
Le Chapitre II consacré à l'évaluation des divers modèles cinématiques des poutres sandwichs, le calcul en vibration linéaire et non linéaire ont été effectué sur des poutres stratifiées symétriques.

Dans le Chapitre III, nous abordons l'étude de résonance super-harmonique des poutres Sandwichs, ainsi, nous appliquant la méthode des échelles multiples pour l'analyse des poutres sandwichs en vibration non linéaire.

Cette étude est basée sur la technique d'équilibrage harmonique couplée à la méthode de Galerkin un seul mode, ensuite, en appliquant la méthode de superpositions pour obtenir l'équation d'amplitude et sa résolution permet de caractériser les courbes des réponses pour les poutres sandwichs.

Chapitre IV présente l'analyse des poutres sandwich pour différentes variantes, mécaniques et matérielles.

Enfin une conclusion générale conclue la thèse.



Chapitre I :
Considérations bibliographiques

I.1. Introduction

Une multitude de matériaux naturels, les uns rigides mais légers, comme les os, les autres souples mais résistants, comme le bois, doivent leurs propriétés mécaniques à leur **structure composite**. Ces matériaux font partie de la famille des composites puisqu'ils comprennent des **fibres** noyées dans une **matrice** de nature différente (Spaulding.K.B, 1966). A titre d'exemple, le bois contient des fibres de cellulose souples et résistantes en traction associées à une matrice de lignine qui les enveloppe et assure la continuité structurale. Sa structure fibreuse se manifeste par le fil du bois.

L'objet de ce chapitre est de mettre en évidence les matériaux composites, leurs types et leurs domaines d'applications suivis par une présentation des principales caractéristiques mécaniques et physiques de ces matériaux.

I.2. Définition des matériaux composites (Ledru, 2009)

Un matériau composite peut être défini comme une combinaison de deux matériaux ou plus qui résulte par la formation d'un matériau dont les performances mécaniques, thermiques, électriques et physico-chimiques améliorées. Contrairement aux alliages métalliques dont chaque matériau retient ses propriétés physiques et mécaniques.

Le matériau composite est constitué d'un renfort, qui contribue aux propriétés mécaniques de la pièce, et d'une matrice, le rôle de ce dernier est d'assurer la cohésion entre les éléments du renfort. La matrice permet de transférer les flux d'efforts entre les plis, de garantir la tenue à l'environnement (Corrosion, vieillissement humide) et la tenue en température. Aujourd'hui, il existe une grande variété de matériaux composites qui peuvent être classés selon différents critères. La nature de la matrice est un de ces critères qui permet de classer les composites en trois grandes familles :

- Les Composites à Matrices Organiques (CMO), telles que les polymères organiques (Résine thermodurcissable ou thermoplastique) ;
- Les Composites à Matrices Céramiques (CMC) réservés aux applications à haute température ;
- Les Composites à Matrice Métallique (CMM).

Ces matériaux peuvent aussi être classés selon la nature du renfort, ou selon l'objectif recherché de leurs utilisations. Si l'optimisation des coûts est le principal objectif, on parlera de composites à 'grande diffusion'. En revanche, pour une utilisation dans le but d'optimiser les performances mécaniques ou thermiques, liées à une réduction de poids, on parlera de composite 'hautes performances' (Billoët, 1993).

I.2.1. Renfort (Benferdi, 2010)

Le renfort du matériau composite est le constituant qui supporte la grande partie des efforts mécaniques. Il peut se présenter sous différentes formes (Figure I.1).

- Particulaire, charges sous forme de microbilles, de fibres broyées, d'écailles ou de poudre micro ou nano particulaire.
- Fibres courtes, pour les renforts surfaciques non texturés tel que le mat,
- Fibres continues pour les renforts texturés tels que les tissus ou les renforts unidirectionnels tels que les nappes.

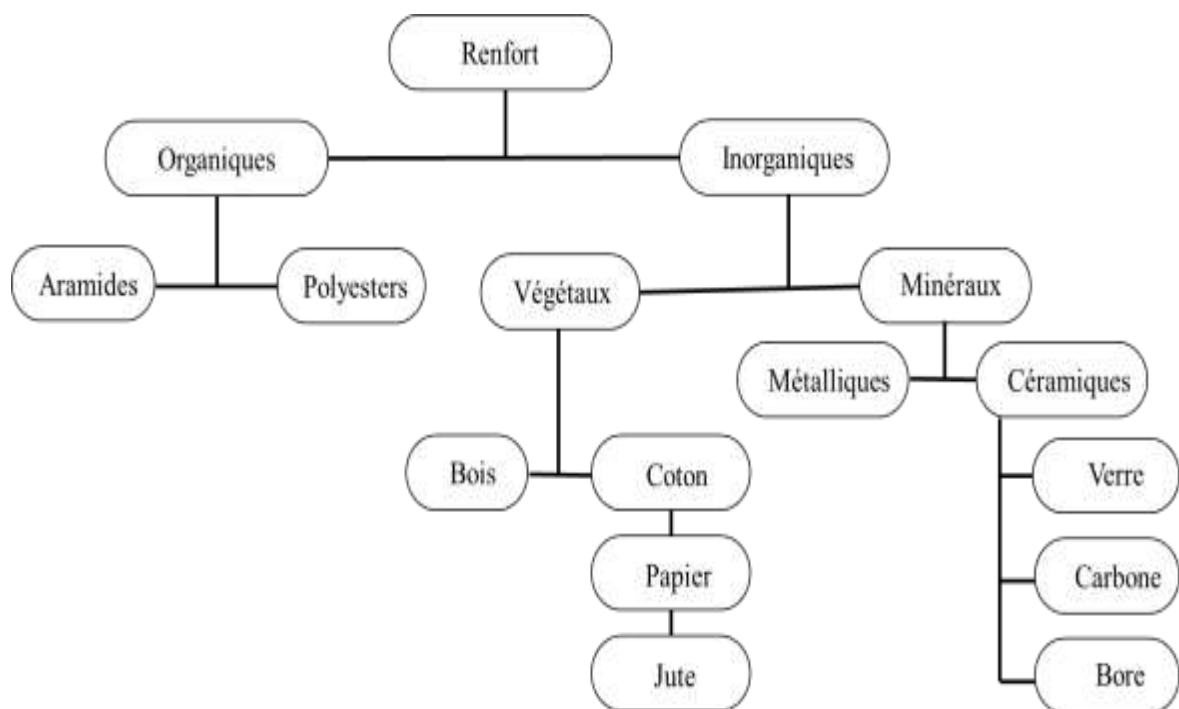


Figure I.1: Principaux matériaux de renforts

Le type de tissu est choisi en fonction de sa drapabilité, c'est-à-dire son aptitude à recouvrir la forme plus ou moins complexe de la pièce sans faire de plis. Il est aussi, surtout, choisi en fonction des sollicitations mécaniques que va subir la pièce.

Parmi les fibres les plus employées, nous citons :

a. Fibres de verre (Bensaid, 2014)

Ces fibres sont à faible coût de production, et qui constituent le renfort le plus utilisé actuellement (Bâtiment, nautisme et autres applications non-structurales aéronautiques) (Figure I.2-I.3). Leur fabrication se fait en général par étirage illustré dans la figure (1.4). Les oxydes minéraux constituant la matière première (Silice, alumine etc...) sont mélangés en proportion voulue suivant le type de fibre de verre désiré. Ce mélange est ensuite porté à très haute température ($>1500^{\circ}\text{C}$) afin d'être liquéfié pour être étiré à travers une filière sous forme de filaments de diamètres calibrés. Ces filaments isotropes sont ensimés pour optimiser l'adhésion de la matrice, puis assemblés pour former les fils, eux-mêmes stockés sous forme de bobine. Cette bobine est alors étuvée, pour éliminer l'eau résiduelle et pour stabiliser l'ensimage. Les fibres de verre ainsi obtenues sont amorphes, ce qui leur confère des caractéristiques mécaniques, parfaitement isotropes. Cependant, leur faible module d'élasticité, ainsi que leur densité supérieure aux fibres de carbone limitent leur utilisation pour la fabrication de pièces structurales.



Figure I.2: Fibres de verre



Figure I.3: Tissue de fibres de verre

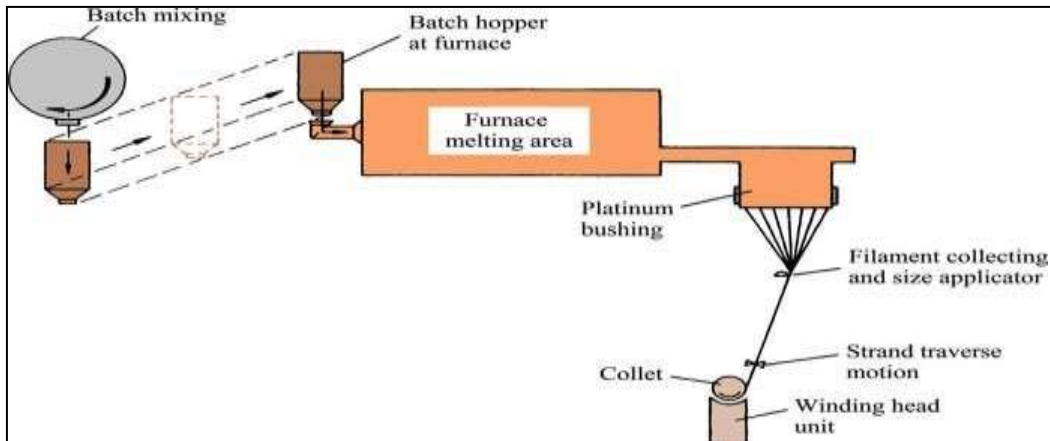


Figure I.4: Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage des fibres de verre (Chawla, 2013)

b. Fibres de carbone (Ledru, 2009)

Sont utilisées pour des applications structurales telles que les panneaux monolithiques du caisson central de l'A380 (Figure I.5-I.6). Ces fibres sont généralement obtenues par pyrolyse d'un précurseur organique sous atmosphère contrôlée (Figure I.5). Le plus utilisé de ces précurseurs est le PolyAcryloNitrile (PAN). Celui-ci est oxydé entre 200 et 300 °C sous air ambiant puis carbonisé sous azote entre 800 et 1500 °C. Il ne subsiste alors que la structure lamellaire hexagonale 2D d'atomes de carbone, (Figure I.6).

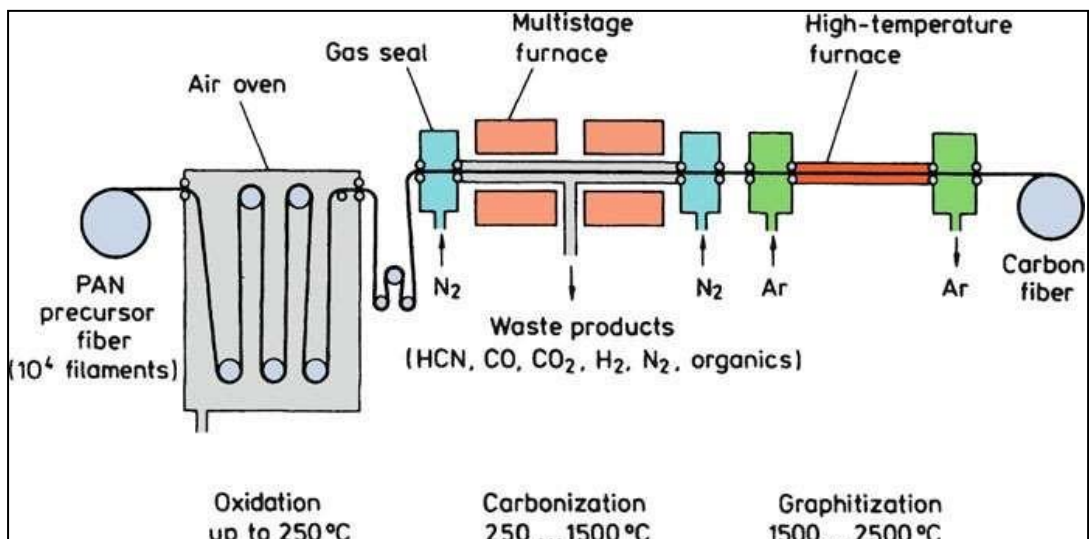


Figure I.5: Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN (Chawla, 2013) et (Baker, 1983)



Figure I.6: Plaques et rouleaux en fibres de carbone

Les filaments dits à Haute Résistance (HR) de 7 μm de diamètre ainsi que ceux dits à Module Intermédiaire (IM) sont ainsi obtenus. Les filaments à haut module (HM) voir très haut module (THM) (5,5 μm de diamètre) subissent en revanche une étape supplémentaire de graphitisation autour de 3000 $^{\circ}\text{C}$, sous argon. Cette graphitisation entraîne une réorientation des réseaux hexagonaux et permet d'augmenter la rigidité des fibres. Tel que utilisés en aviation, (Figure I.7).



Figure I.7: Utilisation des fibres de carbone dans la famille des avions Airbus

De même que pour les filaments de verre, les filaments de carbone sont soumis à un traitement de surface (Imprégnation par un produit spécifique) afin d'améliorer les propriétés d'adhérence fibre/matrice, (tableau I.1).

Tableau I.1: Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques (fibres seules) (Zouggar, 2016)

Type de fibre	Module élastique E (GPa)	Contrainte à rupture σ_R (Mpa)	Exemple de fibre
Haute Résistance (HR)	$E_l < 265$	3500	P-30X (Cytec), F1
Module Intermédiaire (IM)	$265 < E_l < 320$	5600	P-55S (Cytec), F2
Haut Module (HM)	$320 < E_l < 440$	4400	M40J (Torayca)
Très Haut Module (THM)	$E_l > 440$	3900	P-75S (Cytec), M55J (Torayca)

Ce traitement de surface est suivi par un procédé d'ensimage textilo-plastique qui facilite l'accrochage de la matrice organique, qui protège les fibres contre l'abrasion et qui favorise l'agglomération des filaments lors de la fabrication des mèches. Il est important de noter que les fibres de carbone sont sensibles à l'oxygène dès 400 °C, et qu'elles présentent une mauvaise résistance aux chocs. Enfin, le prix de ces fibres reste relativement élevé, mais il n'a cessé de diminuer avec l'augmentation des volumes de production.

c. Fibres d'aramide

Plus connues sous leurs noms commerciaux Kevlar®, Twaron®, Technora®, Nomex®, etc... (Billoët, 1993) utilisées pour des applications spécifiques telles que la protection balistique (Gilets pare-balles) ou bien pour les réservoirs souples de carburant en Formule 1.



Figure I.8: Tissue en fibre d'aramide (Kevlar)

Pour les fibres aramides, la méthode « Dry jet wet spinning » est utilisée. Le processus est illustré à la (Figure I.9). La polycondensation en solution de diamines et d'halogénures de diacides à basses températures (Près de 0 °C) donne les polyamides formant un aramide.

Les basses températures sont utilisées pour inhiber toute génération de sous-produits et favoriser la formation de polyamide. Le polymère résultant est pulvérisé, lavé et séché ; mélangé avec H₂SO₄ concentré ; et extrudés à travers une filière à environ 100 °C. Les jets des orifices traversent environ 1 cm de couche d'air avant de pénétrer dans un bain d'eau froide (0 - 4 °C). La fibre se solidifie dans une lame d'air et l'acide est éliminé dans le bain de coagulation. Le capillaire de la filière et l'intervalle d'air provoquent la rotation et l'alignement des domaines, ce qui donne des résultats hautement cristallins et orientés tels quels les fibres. La température plus élevée permet d'utiliser une solution de filage plus

Concentrée et des vitesses de filage plus élevées. Des vitesses de rotation de plusieurs centaines de mètres par minute peuvent être atteintes. (Chawla, 2013)

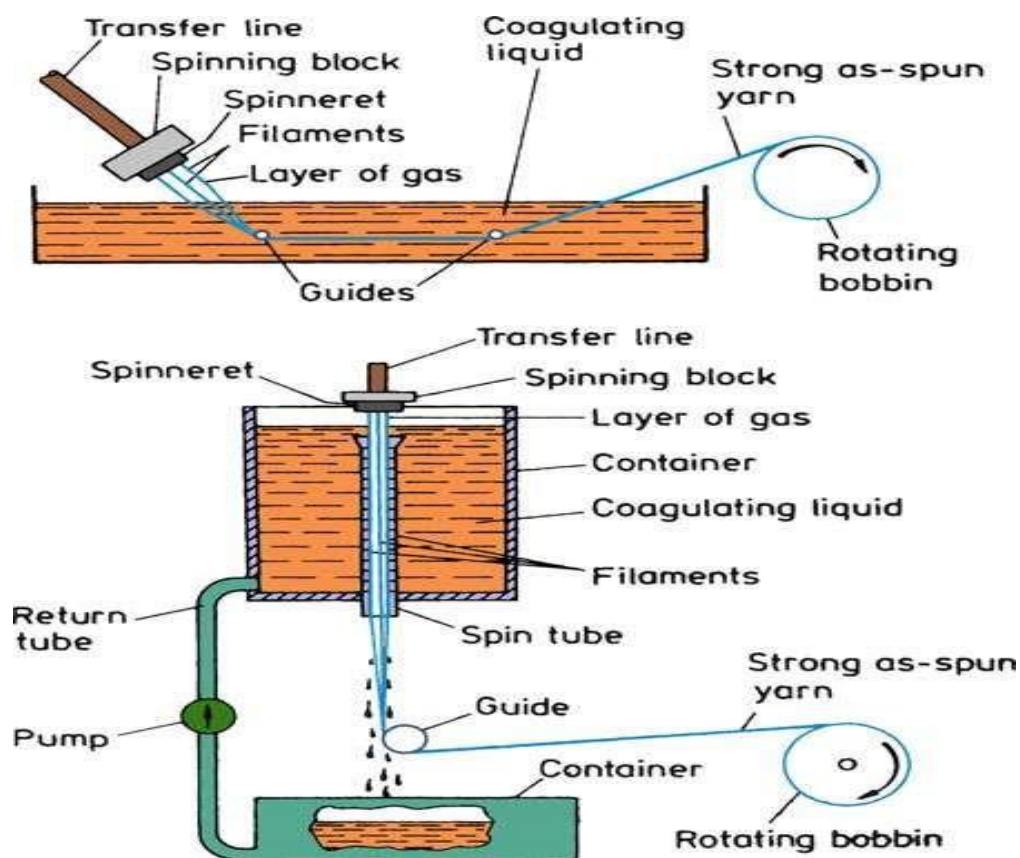


Figure I.9: Processus de fabrication des fibres d'aramide (Chawla, 2013)

d. Fibres végétales

Présentent l'avantage d'être particulièrement écologiques, car sont mises en œuvre à partir de produits naturels, tel que le chanvre, le lin, ou le bambou (Figure I.10).



Figure I.10: Exemples de fibres végétales

Ces fibres au prix modeste sont de plus en plus utilisées pour la fabrication des composites dits « d'entrée de gamme ». (Balay et al, 2004) ; (Billoët, 1993)

I.2.2. Matrices

L'objectif principal de la matrice se résume dans la transmission des efforts mécaniques au renfort. Elle doit aussi assurer la protection du renfort vis-à-vis des différentes conditions environnementales (Oxydation, vieillissement humide, corrosion, ...). On distingue trois catégories principales :

- Résines thermoplastiques ;
- Résines thermodurcissables
- Élastomères.

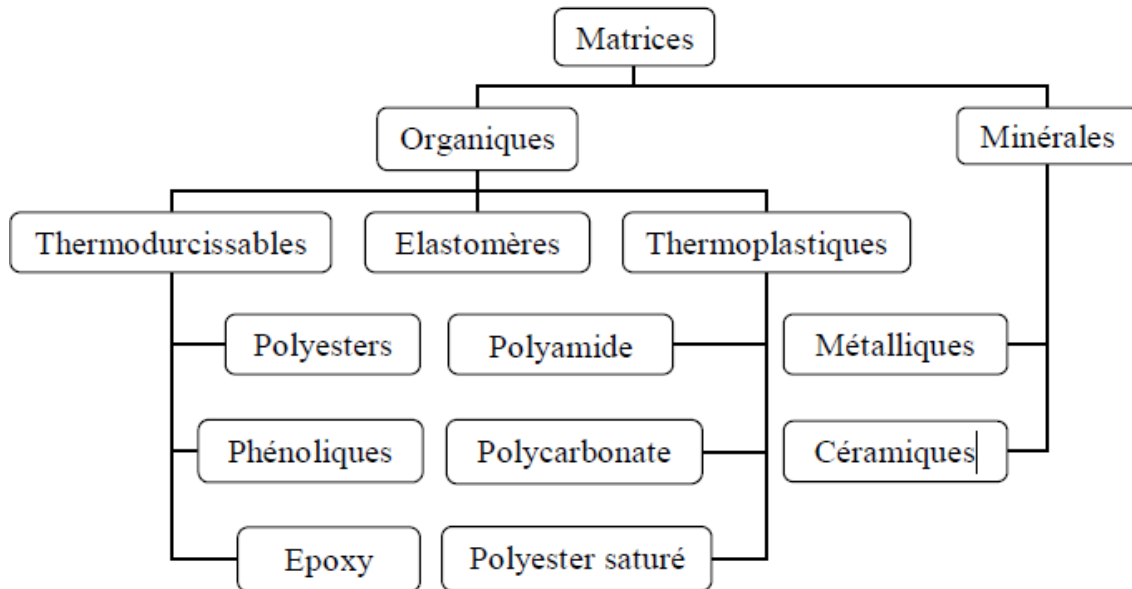


Figure I.11: Familles des matrices

I.2.2.1. Les résines thermoplastiques

Sont des polymères à chaînes monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont généralement fusibles et solubles. L'avantage de ces résines consiste à pouvoir être alternativement ramollies par chauffage et durcies par refroidissement ce qui facilite leur moulage par viscoplasticité. Cette transformation est réversible, permettant donc le recyclage de ce matériau. Renforcées par des fibres longues ou courtes, l'utilisation de ces résines se développe fortement et notamment comme matrice des composites "structuraux".



Figure I.12: Résines thermoplastiques

I.2.2.2. Les élastomères

Sont des polymères synthétiques ou naturels dont la structure particulière confère une importante élasticité (Jusqu'à 500 % d'allongement par rapport à la taille initiale). À titre d'exemple, nous citons : les polyuréthanes, les silicones d'élastomères, le latex, le néoprène,...etc.



Figure I.13: Exemples d'élastomères

I.2.2.3. Les résines thermodurcissables

Sont les produits les plus utilisés comme matrice de matériaux composites "structuraux". Généralement associées avec des fibres longues, elles sont liquides ou liquides visqueux et réticulent sous l'action thermiquement activée d'un catalyseur et d'un durcisseur. La transformation est irréversible et forme un produit infusible et insoluble.

1. 3. Caractéristiques mécaniques des matériaux

En se basant sur les considérations précédentes, les matériaux composites sont donc caractérisés par une faible masse volumique et un module élevé. Le domaine d'utilisation de ces matériaux devient de plus en plus spécifique aux constructions aérospatiales et aéronautiques, où les hautes performances sont recherchées, et le coût d'élaboration du matériau n'a pas d'incidence. Par ailleurs, les autres domaines d'utilisation des matériaux de hautes performances ne peuvent pas se faire au détriment du coût excessif du produit fini. Pour augmenter les performances d'un matériau, tel que les valeurs des contraintes à la rupture, de nouvelles méthodes qui mènent à une diminution des défauts sont élaborées. L'objectif d'élaboration, part des matériaux qui ont déjà des caractéristiques spécifiques

élevées, puis les mètrent sous forme fibreuse. Ces fibres ne peuvent être utilisées directement dans des applications mécaniques, d'où l'idée de les incorporer dans une matrice polymère pour constituer un composite à fibres. La matrice assure diverses fonctions : Protéger et lier les fibres entre elles ; transférer les charges mécaniques aux fibres. C'est ainsi qu'une nouvelle famille de matériau fait son apparition, avec la possibilité d'être modulable et présentant des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées. Les caractéristiques mécaniques des matériaux élaborés sous forme des fibres montrent clairement l'intérêt de cette technique (voir tableau I.2). Les fibres de verre sont les plus utilisées, du fait de leur faible coût, mais leur rigidité reste toutefois limitée. Les autres fibres présentent par contre un module spécifique élevé d'où leur intérêt.

Tableau I.2: Caractéristiques mécaniques spécifiques des fibres (Zouggar, 2016)

	Module E (GPa)	Contrainte à la rupture σ_u (MPa)	Masse volumique ρ (kg/m ³)
Verre-E	72.4	3500	2540
Verre-S	85.5	4600	2480
Carbone à H.M (haut module)	390	2100	1900
Carbone HC (contrainte élevée)	240	3500	1850
Kevlar (aramide)	130	2800	1500
Bore	385	2800	2630

I.4. Applications des matériaux composites

Les polymères renforcés de fibres de verre sont utilisés dans une grande variété d'industries : en passant par les articles de sport, construction civile jusqu'au domaine aérospatial. Les citernes et les navires (sous pression et non-pression) dans l'industrie des procédés chimiques, ainsi que les pipelines sont généralement fabriqués de résine de polyester renforcée par des fibres de verre. La figure (I.14) montre une variété de formes structurelles de matrice en fibre de verre et de résine fabriquées par la technique de pultrusion. Les fibres de verre S-2 et les fibres aramides sont utilisées pour le revêtement des sols d'aéronefs civils. La fibre d'aramide est également utilisée dans les composants légers dans les hélicoptères et les petits avions. Les patches destinés pour courses et les bateaux privés sont des exemples de fibres d'aramide où la performance est plus importante que le coût. Les applications militaires varient du simple

casque au boîtier de moteur de fusée. Dans l'industrie des énergies renouvelables, les longues hélices des éoliennes (60 m) peuvent être fabriquées par un mélange judicieux de fibres de verre et de carbone pour réduire la masse de l'hélice. (Chawla, 2013)

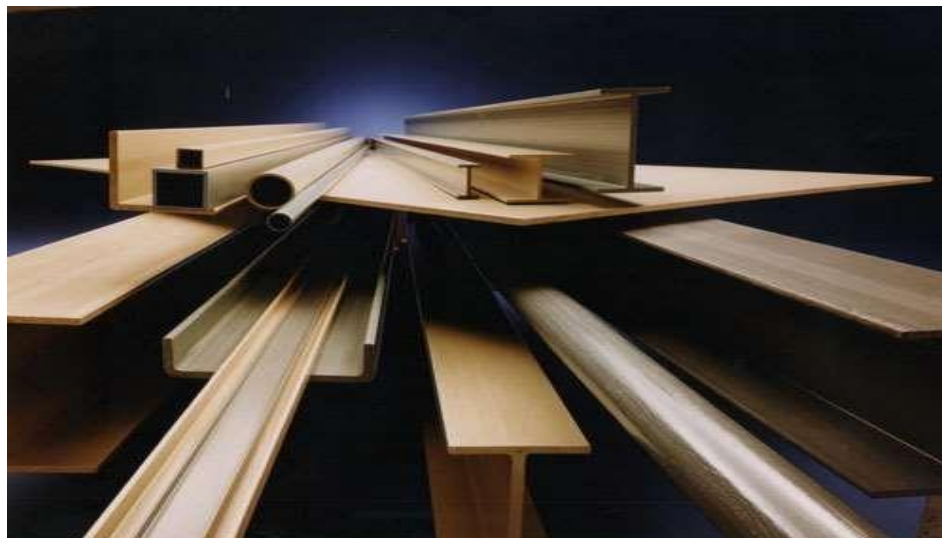


Figure I.14: Formes structurales en fibre de verre et résine fabriquées par pultrusion :
(Chawla, 2013)



Figure I.15: Tuyau à filament enroulé (diamètre ¼ 2 m) destiné à l'irrigation en Équateur.
(Chawla, 2013)

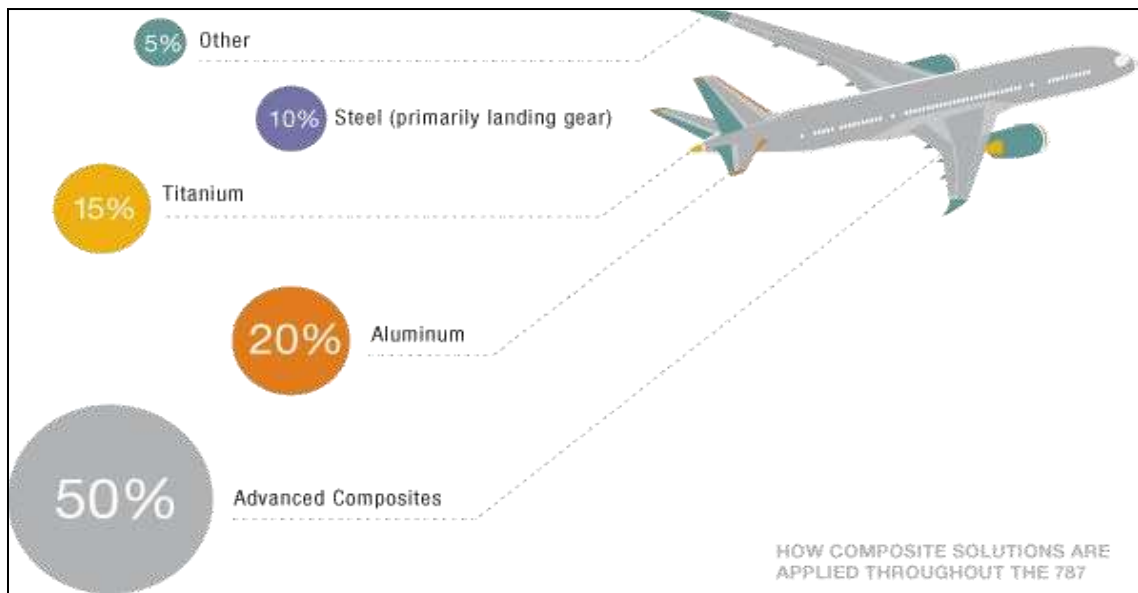


Figure I.16: Utilisation des matériaux composites dans l'avion Boeing 787

L'utilisation de composites renforcés par des fibres dans les infrastructures civiles a constitué un développement majeur dans les années 90. Parmi les principaux facteurs à cet égard figure: la réduction des coûts, la résistance à la corrosion, une durée de vie améliorée et un entretien réduit, ainsi qu'une réduction possible des problèmes sismiques. Des efforts importants ont été déployés dans le domaine des ponts, ainsi que des travaux de réparation et de modernisation. À titre d'exemple, les structures en béton et en maçonnerie peuvent être renforcées par des composites plutôt que par des plaques d'acier. Un tel processus implique la préparation de la surface et l'application d'un apprêt approprié sur la structure en béton et les structures métalliques, l'application d'une couche de résine, suivie d'une feuille de composite et d'une seconde couche de résine. Des composites renforcés de fibres de verre et de carbone sont utilisés, bien que les composites polymères renforcés de fibres de carbone donnent des résultats supérieurs. La figure (I.17a) représente une colonne en béton entourée d'une enveloppe en composite de fibre carbone et d'époxy, tandis que la figure (I.17b) présente les résultats après l'application d'une charge compressive. Dans la partie de la colonne en béton sans l'enveloppe composite, on peut voir l'écaillage du béton et le flambement des barres de renforcement en acier.



Figure I.17: Colonne enveloppée d'une enveloppe en fibre de carbone

Dans la partie de la colonne protégée par une enveloppe en composite, il n'y a pas d'effets visibles. Potentiellement, l'enveloppement en composite des colonnes structurelles pour le renforcement sismique semblerait constituer un marché énorme. Cependant, cette technique est loin d'être parfaite, elle présente de nombreux problèmes, tels que la durabilité, l'absorption de l'humidité par la matrice et d'autres effets environnementaux.

Une autre application des matériaux composites en fibre de carbone dans les infrastructures mécaniques et civils sont analogue à la capacité des ponts et autres structures à résister aux séismes. La protection antisismique des colonnes de ponts est réalisée par enroulement des colonnes avec des composites renforcés par fibres de carbone.

I.5. Classification suivant la structure des matériaux composites

I.5.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

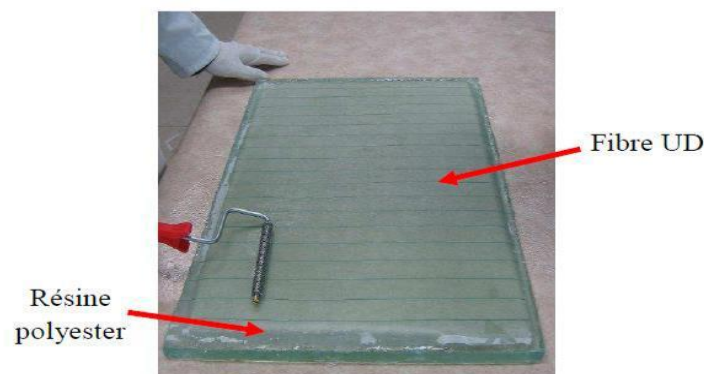


Figure I.18: Matériau composite UD (Perrot. Y, 2006)

I.5.2. Stratifiés

Le matériau composite stratifié est composé d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. La figure ci-après représente un matériau composite stratifié (Teknea, 1989).

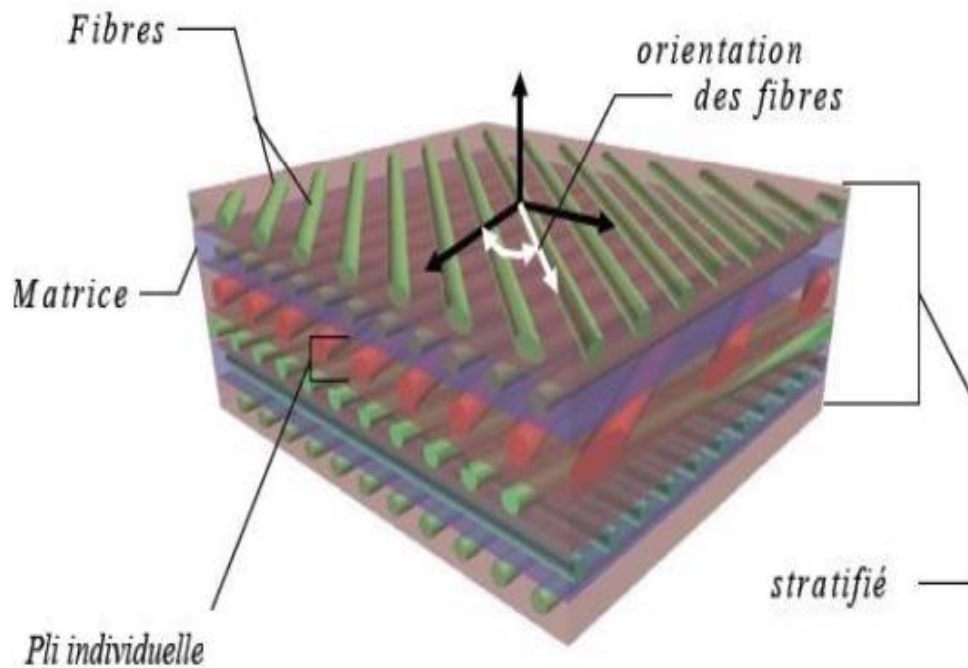


Figure I.19: Un matériau composite stratifié (Bensaid.S , 2006)

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations, permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. Un stratifié possédant l'empilement $(0, +45, +90, -45)_2s$ est un stratifié avec quatre couches dans les directions 0° , -45° , 90° et $+45^\circ$, l'orientation 0° coïncidant avec la direction une du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié. On pourra avoir des stratifiés de type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches 90° .

I.6. Les Avantages et Inconvénients des Matériaux Composites :

1. Une grande résistance à la fatigue,
2. Un faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu-carbone),
3. Sont insensibles aux produits chimiques "mécaniques " comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole,
4. Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes !
5. Les composites sont très anciens : bois (composite naturel), torchis, béton (agrégats et pâte de ciment), béton armé, bois contre-plaqué (sandwichs), lamifiés décoratifs par exemple.
6. Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre),
7. Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs,
8. Problèmes aux niveaux : manipulation, compatibilité chimique, mouillage.

I.7. Les matériaux sandwichs

I.7.1. Présentation d'un matériau sandwich

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Figure I.8) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble.

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le rapport t_f/t_c (t_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01.

On peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_f (d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = t_c + t_f$.

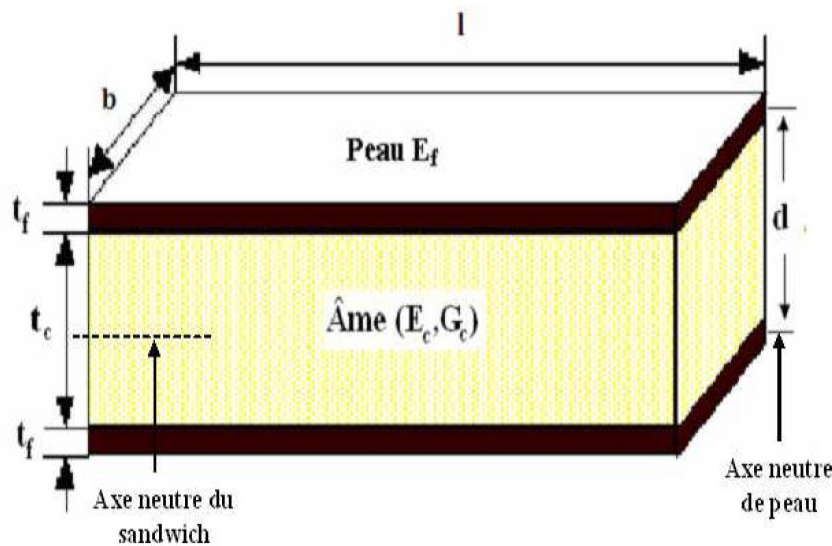


Figure I.20: Schema d'un sandwich (Ambartsumyan S.A, 1969)

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante :

Si le rapport d/t_f est supérieur à 100, on parle de sandwich à peaux très fines ;

Pour un rapport d/t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;

Dans le cas où d/t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

En plus de leur bonne rigidité en flexion, de leur bonne résistance au flambement et de leur légèreté, les matériaux sandwichs possèdent également de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique. Ceci explique leur emploi de plus en plus fréquent comme cloison. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans l'aéronautique ou l'industrie du transport en tant que structures primaires ou secondaires, comme par exemple les coques de bateaux rapides, les planchers d'avions.

I.7.2. Les constituants d'un matériau sandwich

Une structure sandwich est formée généralement de trois composants possédant des propriétés différentes, mais complémentaires : les peaux, l'âme et l'adhésif. La figure (I.9) présente les différents éléments constitutifs d'un matériau en construction sandwich.

L'âme, l'élément central d'une structure sandwich, est généralement un matériau ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Elle a pour rôle de résister aux contraintes de cisaillement engendrées suite au mouvement de glissement des peaux sous charge, et de maintenir leur écartement. En effet, si l'épaisseur des panneaux n'est pas maintenue constante, il en résulte une diminution des capacités des peaux externes à résister à la flexion. L'âme est souvent épaisse et de faible masse volumique. L'épaisseur élevée de l'âme a pour but d'accroître le moment d'inertie du panneau sans augmenter la masse volumique. Comme le montre dans (Figure I.9). Les types d'âmes les plus communs dans le secteur industriel sont :

- Le bois de balsa
- Les nids d'abeilles
- Les mousses en polymères rigides

L'élément final, dont l'importance est le film adhésif. Ce film forme la liaison entre l'âme et les peaux. Cette liaison doit être continue, sans porosité et d'épaisseur constante. Par ailleurs, une capacité suffisante pour s'opposer à la déformation est nécessaire afin de transmettre des sollicitations mécaniques. Mais, aussi elle doit être suffisamment élastique pour absorber et atténuer les impacts.

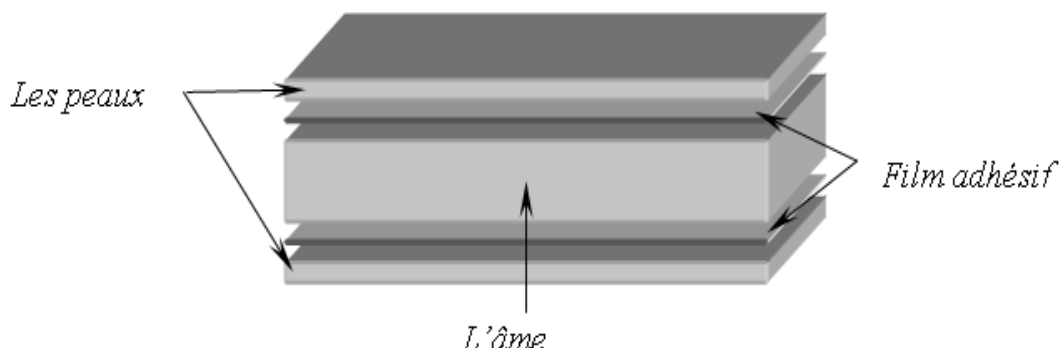


Figure I.21: Différents constituants d'une structure sandwich (Whitney. JM, 1973)

I.7.3. Intérêt des structures sandwichs

L'intérêt principal des structures sandwich, par opposition aux composites traditionnels dits monolithiques, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de 100 kg m^{-3} . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

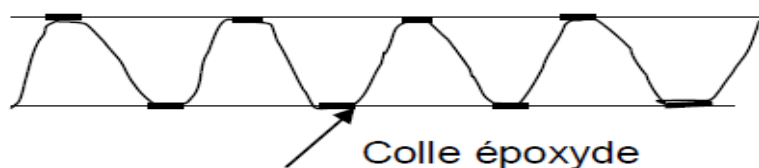
Les matériaux composites sandwichs disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes. (Ambartsumyan S.A, 1969).

I.7.4. Techniques d'assemblage des matériaux sandwichs

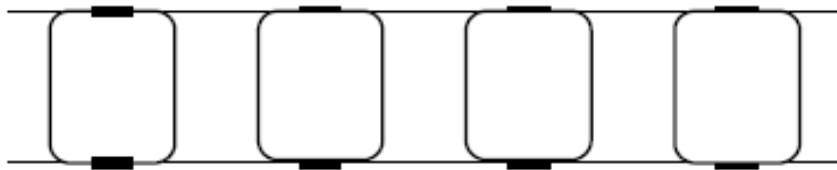
I.7.4.1. Le collage de peau sur l'âme

Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

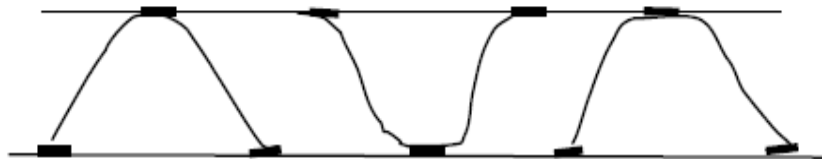
L'assemblage est réalisé selon (Figure I.22) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.



(a): collage de tôle ondulée ou raidisseurs ω sur tôle



(b): panneaux avec tubes carrés



(c): panneaux avec ω inversés

Figure I.22: Panneaux réalisés par collage à partir de profils divers

I.7.4.2. Technique de pliage

Après mise en œuvre les panneaux sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur (Figure I.23)

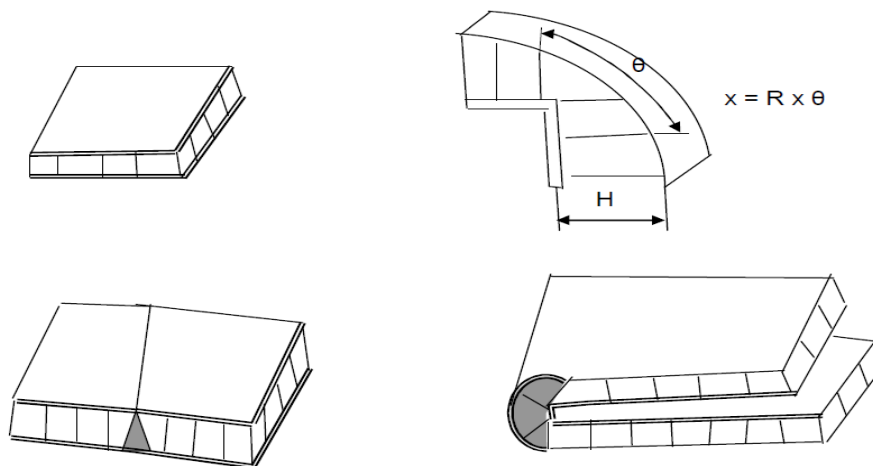


Figure I.23: Pliage de panneaux sandwich (Reissner. E, 1975)

On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.

I.7.5. Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension (Figure I.24). Un sandwich peut être donc soumis à un :

- Moment de flexion,
- Moment de torsion,
- Effort normal,
- Effort tranchant.
- Effort tranchant.

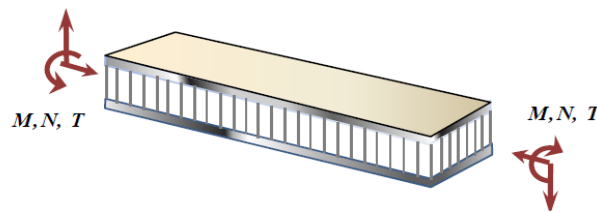


Figure I.24: Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich

Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwichs soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécaniques de ces structures.

I.7.5.1. Flambement généralisé des peaux

Une plaque sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la plaque (Figure I.25). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.

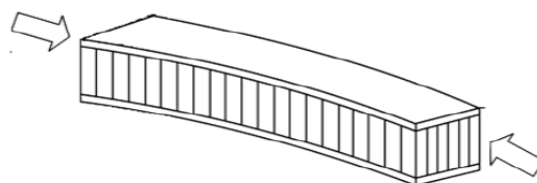


Figure I.25: Flambement généralisé des peaux du sandwich

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, augmenter l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériau avec un module de cisaillement plus élevé.

I.7.5.2. Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux (Figure I.26). Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, en augmentant l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), où en augmentant l'épaisseur de l'âme (ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux). La manière la plus adéquate de résoudre le problème est d'augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, une âme de plus forte densité (plus rigide) n'affecte pas les contraintes dans la peau.

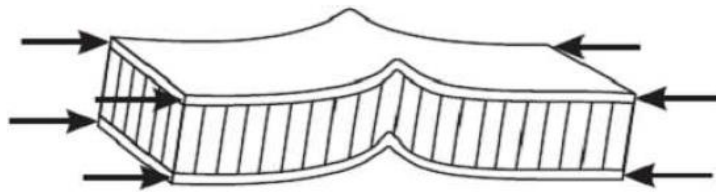


Figure I.26: Rupture des peaux en traction ou en compression

I.7.5.3. Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Figure I.27)

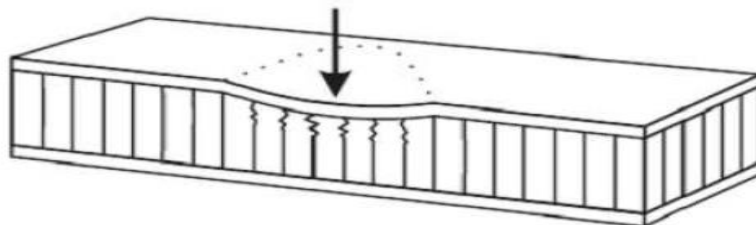


Figure I.27: Modes locaux de rupture par indentation

I.7.5.4. Rupture de l'âme en cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (Figure I.28). Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet.

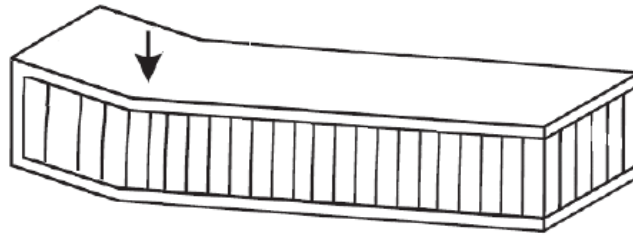


Figure I.28: Rupture de l'âme en cisaillement

I.7.5.5. Flambement généralisé de l'âme

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme. Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé. (Figure I.29).

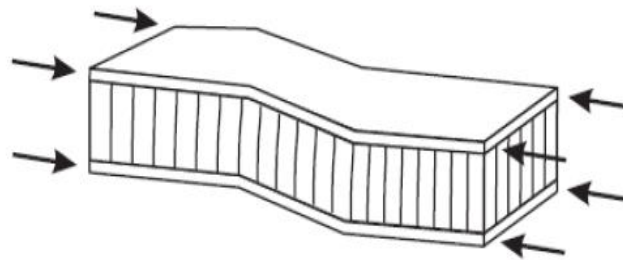


Figure I.29: Flambement généralisé de l'âme du sandwich

I.7.5.6. Flambement localisé

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement.

Dans ce cas, le flambement localisé des peaux (Figure I.30.a), se produit. Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux, un matériau avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme, un matériau présentant des propriétés

élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures, il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes (Figure I.30).

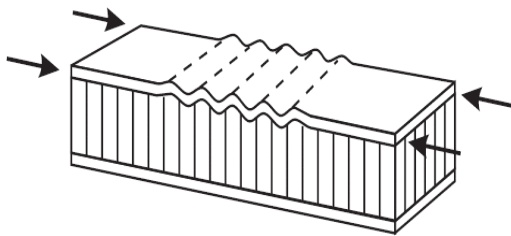


Figure I.30 (a): Flambement localisé

« Wrinkling »

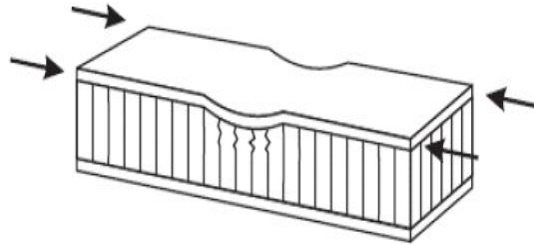


Figure I.30 (b): Flambement localisé

«Dimpling»

I.7.5.7. Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types :

- Dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure (I.31) illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

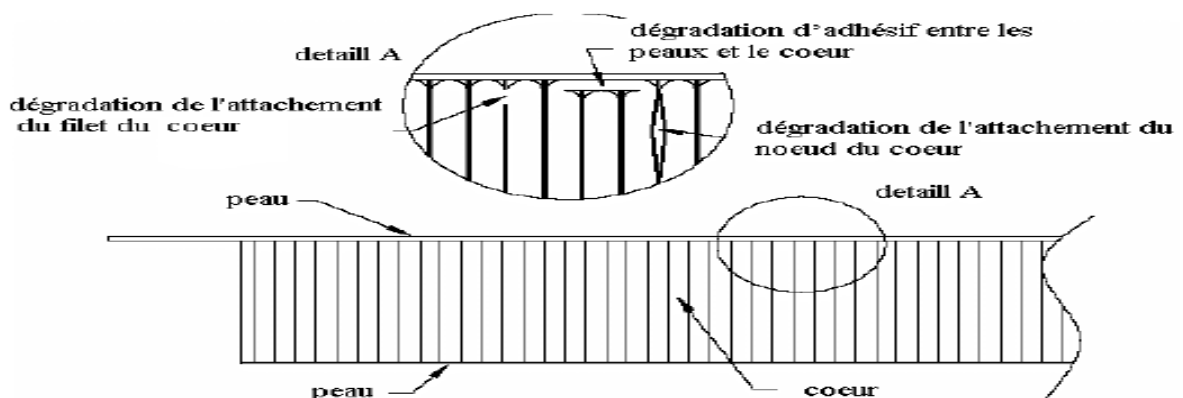


Figure I.31: Type de dégradation de l'adhésif (Cho. M, 1993)

I.7.6. Domaine d'application des structures sandwichs

Les panneaux sandwichs sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire.

I.7.6.1. Construction aérospatiale

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwichs et par cuisson de stratifiés composites (carbone/ époxyde, kevlar/époxyde) sur nida nomex ou aluminium collés avec des adhésifs époxydes en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwichs constitués de peaux en carbone / époxyde collés sur des âmes en nida aluminium.

Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxydes phénoliques ou polyamides.

Les panneaux acoustiques sont des structures sandwichs dont la peau intérieure, coté moteur est constituée d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwich avec peaux en composites collées sur nida

Dans les domaines astronautique et d'armement, on à besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/époxyde et l'âme en nida nomex.

I.7.6.2. Construction automobile et ferroviaire

Les matériaux sandwichs sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction de camions, d'autobus, dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé.

Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwichs. Les portes d'accès sont en panneaux sandwichs avec des peaux en composites verre/ polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwichs avec âme en nida aluminium ou nomex. (Reissner.E, 1975).

I.7.7. Avantages des Sandwichs

- Grande légèreté
- Grande rigidité flexionnelle (rapport EI/ρ)
- Excellentes caractéristiques d'isolation

I.7.8. Inconvénients des Sandwichs

- Mauvais amortissement et isolation acoustique (problème lié à la densité relativement basse)
- Tenue au feu moyenne pour certaines catégories d'âme
- Risques de flambement plus élevé que sur les autres structures
- Problème de décollement peaux/âme.

I.8. Rappels sur les matériaux viscoélastiques et notion d'amortissement

I.8.1. Principes fondamentaux en viscoélasticité

La viscoélasticité est définie comme caractérisant un comportement mécanique particulier intermédiaire entre le comportement d'un solide idéal dit "Hook" et celui d'un liquide idéal dit "Newtonien". La réponse d'un matériau viscoélastique à une déformation est alors un couplage entre la réponse d'un fluide visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation) et celle d'un solide élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). Cela revient à considérer que les propriétés mécaniques observées sont de façon générale dépendante du temps ou de ses quantités dérivées. Ainsi, une contrainte appliquée engendre une déformation dans le temps et vice versa, ce qui traduit que les propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique évoluent dans le temps et dépendent de l'histoire des sollicitations. de (Mandel, 1955), de (Christensen, 1982) et de (Salençon, 1983).

I.8.2. Modules complexes le comportement viscoélastique des matériaux composites

Un matériau viscoélastique montre une réponse différée à un chargement mécanique donné et possède la capacité d'emmagasiner une énergie mécanique tout en dissipant une partie. Un traitement général de la théorie de la viscoélasticité des matériaux a été développé initialement par Gross (Kerwin, 1959), en ce qui concerne les différentes formes des relations entre contraintes et déformations. Des aspects complémentaires ont été traités par (Christensen, 1971) et (Pipkin, 1972).

Une des formes permettant de décrire les relations entre contraintes et déformations est d'introduire la notion de modules complexes. Dans le cas d'un régime harmonique en fonction du temps, la déformation est explicitée sous la forme complexe (Assrar, 2008) :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (\text{I.1})$$

Où ω est la fréquence angulaire d'oscillation. Les contraintes sont ensuite explicitées sous la forme complexe.

$$\sigma(t) = Q(\omega) \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (\text{I.2})$$

Où $Q(\omega)$ est le tenseur des rigidités complexes. La forme précédente peut également être inversée en déterminant le tenseur des souplesses complexes $S(\omega)$ inverse de $Q(\omega)$ ayant établi le principe de correspondance entre élasticité et viscoélasticité dans le cas d'un matériau homogène donné ce principe peut-il être appliqué au cas d'un matériau hétérogène, constitué de plusieurs matériaux viscoélastiques, C'est à dire, une relation établie dans le cadre du comportement élastique d'un matériau hétérogène, peut-elle être transposée pour décrire le comportement viscoélastique. en remplaçant les grandeurs élastiques par des grandeurs complexes Ce problème a été abordé d'abord dans le cas de matériaux composites statistiquement isotropes (Hashin, 1965), dans le cas de matériaux composites renforcés par des particules, puis dans le cas de composites unidirectionnels (Assrar, 2008).

Ce problème peut être explicité sous une forme générale dans le cas de faibles amortissements. Soit une propriété évaluée pour un comportement élastique sous la forme :

$$Q = Q(K_j, V_j) \quad (\text{I.3})$$

le matériau constitué de N constituants, chaque constituant ayant une fraction volumique V_j et dont le comportement élastique est caractérisé par les modules K_j . Le comportement viscoélastique correspondant s'écrit :

$$Q = Q(K_j) \quad (\text{I.4})$$

Ou sous forme explicite
$$Q = Q(K_{1j} + iK_{2j}) \quad (\text{I.5})$$

Si l'expression peut être développée sous forme d'une série complexe, et dans le cas où

$$K_{2j} \ll K_{1j} \quad (\text{I.6})$$

Nous pouvons écrire :

$$Q = Q(K_{1j}) + \sum_{j=1}^N (K_i^* - K_i) \frac{\partial Q(K_i)}{\partial K_i} \quad (\text{I.7})$$

En nous limitant au premier ordre, la relation précédente s'écrit sous la forme

$$Q = Q_1 + iQ_2 \quad (\text{I.8})$$

L'expression (I.8) établit sous forme généralisée le principe d'équivalence élasticité viscoélasticité considéré par (Hashin,1965), dans des cas particuliers. Le principe de correspondance permet ainsi de transposer les expressions des modules complexes effectifs des matériaux composites à partir des expressions analytiques établies pour les modules dans le domaine élastique. Le principe de correspondance élasticité viscoélasticité a été appliqué par divers auteurs pour expliciter l'amortissement des matériaux composites (Hashin, 1965) et (Gibson et al, 1987). Ainsi, pour un matériau composite orthotrope (Assrar, 2008).

Les modules de l'ingénieur sont explicités sous la forme complexe suivante :

$$Q_L^* = Q_L(1 + i\eta_L) \quad (\text{I.9.a})$$

$$Q_T^* = Q_T(1 + i\eta_T) \quad (\text{I.9.b})$$

$$Q_{LT}^* = Q_L(1 + i\eta_{LT}) \quad (\text{I.9.c})$$

$$\nu_{LT}^* = \nu_{LT}(1 + i\eta_{\nu_{LT}}) \quad (\text{I.9.d})$$

Où $\eta_{\nu_{LT}}$ est le coefficient d'amortissement relatif au coefficient de Poisson.

Les expressions des rigidités réduites complexes sont :

$$Q_{11}^* = \frac{Q_L^*}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{Q_T^*}{Q_L^*}} \quad (\text{I.10.a})$$

$$Q_{12}^* = \frac{\nu_{LT} Q_L^*}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{Q_T^*}{Q_L^*}} \quad (\text{I.10.b})$$

$$Q_{22}^* = \frac{Q_T^*}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{Q_T^*}{Q_L^*}} \quad (\text{I.10.c})$$

$$Q_{66}^* = G_{LT}^* \quad (\text{I.10.d})$$

Et peut être écrites sous la forme :

$$Q_{11}^* = Q_{11}(1 + i\eta_{Q_{11}}) \quad (\text{I.11.a})$$

$$Q_{22}^* = Q_{22}(1 + i\eta_{Q_{22}}) \quad (\text{I.11.b})$$

$$Q_{12}^* = Q_{12}(1 + i\eta_{Q_{12}}) \quad (\text{I.11.c})$$

$$Q_{66}^* = Q_{66}(1 + i\eta_{Q_{66}}) \quad (\text{I.11.d})$$

I.8.3. Formulation de la loi de comportement d'un matériau viscoélastique

La formulation fonctionnelle permet d'établir la loi mathématique liant la réponse du matériau à une sollicitation. Puisqu' une contrainte appliquée au matériau engendre une déformation dans le temps et inversement, alors a chaque instant t , la déformation dépend de l'histoire de la contrainte depuis $(-\infty)$ jusqu'a cet instant et inversement (Bilasse ,2010), (Koutsawa,2008).

Il existe alors des fonctionnelles F et G qui lient les contraintes aux déformations.

$$\sigma_{ij}(t) = \mathcal{F}[\mathcal{E}_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] \quad (\text{I.12})$$

$$\mathcal{E}_{ij}(t) = \mathcal{G}[\sigma_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] \quad (\text{I.13})$$

I.8.3.1. Viscoélasticité linéaire

Le matériau viscoélastique est dit linéaire, s'il y a une correspondance fonctionnelle linéaire entre les histoires de contraintes et de déformations. Cette linéarité se traduit par le fait que par exemple pour deux états de déformation distincts $\mathcal{E}_{kl}^{(1)}$ et $\mathcal{E}_{kl}^{(2)}$, on a :

$$\{\mathcal{F}[\mathcal{E}_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t) + \mathcal{E}_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t)] = \mathcal{F}[\mathcal{E}_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t)] + \mathcal{F}[\mathcal{E}_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t)] \quad (\text{I.14})$$

$$\{\mathcal{F}[\lambda\mathcal{E}_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] = \lambda\mathcal{F}[\mathcal{E}_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{I.15})$$

Dans ce cas, pour un échelon de contrainte $\sigma_{kl}^{(0)}$ appliquée à l'instant t_0 (respectivement).Un échelon de déformation $\mathcal{E}_{kl}^{(0)}$ appliquée à l'instant t_0), la fonction de fluage J (respectivement de relaxation R) est indépendante de $\sigma_{kl}^{(0)}$ (respectivement de $\mathcal{E}_{kl}^{(0)}$). Ainsi, pour un matériau viscoélastique linéaire, les réponses en déformation et en contrainte (Bilasse ,2010), (Koutsawa,2008).

$$\mathcal{E}_{ij}(t) = \mathfrak{J}_{ijkl}(t, t_0)\sigma_{kl}^0 \quad (\text{I.16})$$

$$\sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0) \mathcal{E}_{kl}^0 \quad (\text{I.17})$$

I.8.3.2. Principe de superposition de Boltzmann

La linéarité du comportement permet d'exprimer la réponse du matériau à toute histoire de sollicitation à partir de la connaissance des fonctions de fluage ou de relaxation. Ainsi, une histoire de contrainte $\sigma_{kl}(\tau)$ peut être considérée comme la superposition d'échelons infiniment petits $d\sigma_{kl}(\tau)\mathcal{H}(t - \tau)$ (ou H est la fonction échelon unité de Heaviside) et éventuellement des sauts notés σ_{kl} aux instants τ_n .

La réponse $\mathcal{E}_{ij}(t)$ sera alors d'après la définition de la linéarité, la superposition des réponses $d\mathcal{E}_{ij}(t)$ produites par ces échelons [Bilasse, 2010], soit : $d\mathcal{E}_{ij}(t, \tau) d\sigma_{kl}(\tau)$, (Bilasse, 2010), (Koutsawa, 2008).

Alors l'intégrale de Boltzmann peut être réécrite sous la forme :

$$\mathcal{E}_{ij}(t) = \int_{-}^t \mathfrak{S}_{ijkl}(t, \tau) \sigma_{kl} d\tau \quad (\text{I.18})$$

En intégrant par partie l'expression on peut constater que la réponse est la somme d'une élasticité instantanée et d'un effet de mémoire tenant compte de l'histoire de la contrainte σ_{kl} .

$$\mathcal{E}_{ij}(t) = \mathfrak{S}_{ijkl}(t, t) \sigma_{kl}(t) - \int_{-}^t \frac{\partial \mathfrak{S}_{ijkl}(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (\text{I.19})$$

I.8.3.3. Matériau non vieillissant :

Un matériau est dit non vieillissant si ses propriétés n'évoluent pas dans le temps (Christensen, 1982). Cela signifie que sa réponse à l'instant t pour une sollicitation à l'instant τ antérieur à t est la même que sa réponse à l'instant $t + \Delta \tau$ pour la même sollicitation appliquée à l'instant $\tau + \Delta \tau$. D'après cette définition, les fonctions de fluage et de relaxation ne dépendent donc que de l'intervalle de temps séparant l'effet et la cause c'est-à-dire $(t - \tau)$. Dans ce cas, les équations (I.18) et (I. 19) s'écrivent (Bilasse, 2010), (Koutsawa, 2008) :

$$\mathcal{E}_{ij}(t) = \mathfrak{S}_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(t) - \int_{-}^t \frac{\partial \mathfrak{S}_{ijkl}(t - \tau)}{\partial \tau} \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (\text{I.20})$$

Les fonctions de fluage et de relaxation possèdent les propriétés $\mathfrak{S}_{ijkl}(0) = 0$.

Lois de comportement (I.7) et (I.8) s'écrivent alors :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-}^t \mathfrak{S}_{ijkl}(t - \tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) \quad (\text{I.21})$$

Mathématiquement, ce sont des produits de convolution de Riemann que nous noterons

(*) et qui pour deux fonctions f et g sont définis par :

$$f(t) * g(t) = \int_{-}^t f(t - \tau) g(\tau) dt \quad (\text{I.22})$$

Les formules précédentes montrent que pour les matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants, les calculs de lois de comportement s'effectuent dans l'algèbre de convolution de Riemann. L'expression (I.12) est équivalente en terme de produit de convolution a

(Koutsawa,2008). :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \mathfrak{S}_{ijkl}(t) * \sigma_{kl}(t) \quad (\text{I.23})$$

Dans le domaine fréquentiel, la formulation fonctionnelle de la viscoélasticité s'introduit grâce à l'usage de la transformation de Laplace et de la transformation de Carson.

L'opérateur \mathcal{L} de la transformation de Laplace et l'opérateur \mathcal{C} de la transformation de Carson sont définis pour une fonction $f(t)$ par:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^+ f(t) e^{-st} dt = f(s) \quad s \in \mathbb{C} \quad (\text{I.24})$$

$$\mathcal{C}[f(t)] = s \int_0^+ f(t) e^{-st} dt = f^*(s) \quad (\text{I.25})$$

Ou $f(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$ et $f^*(s)$ la transformée de Carson de $f(t)$.

Il en découle que :

$$f^*(s) = sf(s) \quad (\text{I.26})$$

$$\mathcal{C}[f(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{I.27})$$

La transformée de Laplace possède les propriétés suivantes sur le produit de convolution de deux fonctions $f(t)$, $g(t)$ et sur la dérivée :

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = f(s)g(s) \quad (\text{I.28})$$

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{C}[f(t)] = f^*(s) \quad (\text{I.29})$$

En se servant des propriétés (I.17), les lois de comportement (I.14) s'écrivent respectivement dans l'espace de Laplace et de Carson comme suit :

$$\mathcal{E}_{ij}(s) = s\mathfrak{S}_{ijkl}(s)\sigma_{kl}(s) \quad (\text{I.30})$$

$$\mathcal{E}_{ij}^*(s) = s\mathfrak{S}_{ijkl}^*(s)\sigma_{kl}^*(s) \quad (\text{I.31})$$

La combinaison de (I.18) et (I.19) permet d'écrire tout simplement :

$$\mathcal{E}_{ij}(s) = \mathfrak{S}_{ijkl}^*(s)\sigma_{kl}(s) \quad (\text{I.32})$$

Même formulation pour $\sigma_{ij}(t)$

$$\sigma_{ij}(s) = \mathcal{R}_{ijkl}^*(s)\mathcal{E}_{kl}(s) \quad (\text{I.33})$$

Ou (\mathcal{R}_{ijkl}^*) est le tenseur d'ordre 4 des modules opérationnels et (\mathfrak{S}_{ijkl}^*) le tenseur d'ordre 4 des complaisances opérationnelles.

D'après la relation (I.19) ou (I.20), on en déduit que :

$$\mathcal{R}_{ijkl}^*(s) = [\mathfrak{S}_{ijkl}^*(s)]^{-1} \quad (\text{I.34})$$

Ainsi, grâce a l'hypothèse de non vieillissement du matériau viscoélastique, les calculs intégraux sont transformés en calculs opérationnels.

Les équations précédentes sont analogues à la loi de Hooke généralisée reliant les contraintes aux déformations en élasticité linéaire.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\mathcal{E}_{kl} \quad (\text{I.35})$$

Ou (C_{ijkl}) est le tenseur d'ordre 4 des modules élastiques. C'est le principe de correspondance élastique-viscoélastique pour lequel la résolution d'un problème de viscoélasticité peut se ramener a la résolution d'un problème élastique équivalent (Koutsawa,2008).

I.8.3.4. Loi de comportement pour une sollicitation harmonique

Considérons un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant subissant des sollicitations harmoniques de la forme :

$$\sigma_{kl}(t) = Re[\sigma_{kl}^0 e^{i\omega t}] = \sigma_{kl}^0 \cos(\omega t) \quad (\text{I.36})$$

Ou (Re) désigne la partie réelle,

D'après l'équation (I.14), les déformations résultantes sont de la forme :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \int_{-}^t \mathfrak{S}_{ijkl}(t - \tau) \text{Re}[e^{i\omega t}] d\tau \quad (\text{I.37})$$

En posant ($s = i\omega$) et ($u = t - \tau$) dans l'intégrale, la réponse en déformation du matériau soumis aux sollicitations harmoniques s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \text{Re}[\mathfrak{S}_{ijkl}^*(i\omega) e^{i\omega t}] \quad (\text{I.38})$$

$$\mathfrak{S}_{ijkl}^*(i\omega) = i\omega \int_0^+ \mathfrak{S}_{ijkl}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{I.39})$$

Le tenseur $\mathfrak{S}_{ijkl}^*(i\omega)$ peut être décomposé en sa partie réelle et imaginaire :

$$\mathfrak{S}_{ijkl}^*(i\omega) = \mathfrak{S}'_{ijkl}(\omega) + i\mathfrak{S}''_{ijkl}(\omega) \quad (\text{I.40})$$

Où $\mathfrak{S}'_{ijkl}(\omega)$ est appelé la complaisance de stockage et $\mathfrak{S}''_{ijkl}(\omega)$ la complaisance de perte.

Inversement, pour une déformation harmonique de la forme :

$$\sigma_{kl}(t) = \text{Re}[\varepsilon_{kl}^0 e^{i\omega t}] = \varepsilon_{kl}^0 \cos(\omega t) \quad (\text{I.41})$$

La loi de comportement duale de (I.25) correspondant à la réponse en contrainte s'écrit :

$$\sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{kl}^0 \text{Re}[\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega) e^{i\omega t}] \quad (\text{I.42})$$

$$\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathcal{R}_{ijkl}^*(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{I.43})$$

Avec la définition des parties réelle et imaginaire

$$\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega) = \mathcal{R}'_{ijkl}(\omega) + i\mathcal{R}''_{ijkl}(\omega) \quad (\text{I.44})$$

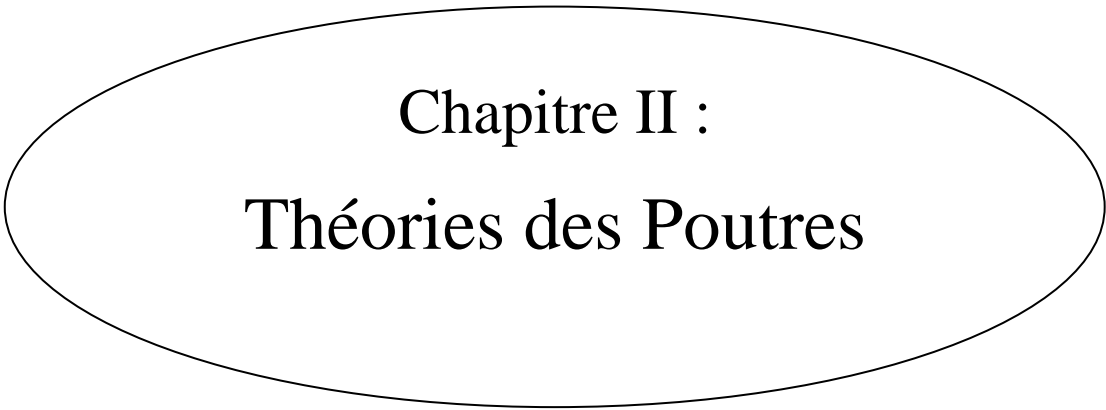
Où $\mathcal{R}'_{ijkl}(\omega)$ est appelé le module de stockage et $\mathcal{R}''_{ijkl}(\omega)$ le module de perte (Bilasse, 2010).

I.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des généralités sur les matériaux composites, leurs différents types, familles, propriétés, méthodes de fabrication et leur domaine d'application. La connaissance de leurs propriétés et de leurs constituants contribue à la compréhension du comportement de ce matériau composite lui-même, tel que la nature, la résistance, l'orientation et le pourcentage volumique des fibres.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous avons vu des connaissances sur les matériaux sandwichs, ainsi que ses domaines d'application et leurs constituent et les techniques d'assemblages, les sollicitations et modes de dégradations, en fin en terminé par les avantages et les inconvénients.

Dans la troisième partie, nous avons présenté un rappel de la théorie de la viscoélasticité linéaire des matériaux et faisons le lien avec le phénomène de dissipation et la source de l'amortissement dans ces matériaux.



Chapitre II:
Théories des Poutres

II.1. Introduction

La théorie des poutres est un élément fondamental de l'étude de la résistance des matériaux. Elle consiste à étudier les objets les plus simples tels que les poutres. La connaissance de base de la résistance des matériaux est primordiale à fin de pouvoir analyser le comportement d'un élément structural tel que une poutre dans notre cas, de ce fait, des brèves définitions, illustrations, rappels de résistance de matériaux sont présents dans ce chapitre. Les théories des poutres s'appuient sur la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie d'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles sont appliquées sur des solides élancés (des prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale), Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elles permettent d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

II.2. Aperçu historique des théories des poutres

A la fin de XVI^{ème} siècle, Galilée effectue les premiers essais connus de traction et de flexion, c'est pratiquement le premier pas dans la théorie des poutres, puis Hook énonce en 1678 la loi de proportionnalité entre les déformations et les contraintes tandis que Bernoulli étudie la flexion plane. (Varigno A, 1654-1722) on voit le polygone funiculaire, En 1773 Colomb donne une théorie satisfaisante de la flexion simple par l'application des équations d'équilibre interne, et Euler étudie la stabilité des pièces longues comprimées. Ce n'est qu'à partir de 1823 que Navier établit un cours de résistance des matériaux. Ensuite Gulmann, Muller Breslau, Mohr, Gastigliano, Ménabréa, Bresse, Clapeyron, Wilson-maney, Hardy Cross, Verechaguine, Bernard de Fontvialant établissent des relations et mettent au point des méthodes nouvelles permettant une systématisation des calculs. Actuellement les recherches portent plus particulièrement sur : les théories mathématiques de l'élasticité, la photoélasticité, la plasticité, des matériaux nouveaux, obtenus par alliage ou par synthèse, font l'objet d'études poussées dans les domaines des hautes et basses températures et des efforts répétés. (Guy, 1974)

II.3. Les différents types de poutres

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre :

- **Poutre simple**

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

- **Poutre console**

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

- **Poutre avec porte-à-faux**

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis.

Ces trois précédents types des poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

- **Poutre continue :**

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

- **Poutre à double encastrement**

C'est une poutre supportée par deux encastresments, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

- **Poutre supportée à double encastrement**

C'est une poutre supportée par deux encastresments ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire.

Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

II.4. Le comportement linéaire des poutres composites

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple (Timoshenko, 1970), Cela est du au caractère

hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

II.5. Le Comportement mécanique non-linéaire des structures

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans nombreux domaines, en particulier les transports, le génie civil etc. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...). En ingénierie ou en recherche, la plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement vibratoire. Concernant le cas particulier des plaques, les premières études ont été menées par (Chia,1787), qui a étudié les vibrations libres d'une plaque carrée en "libre-libre", puis (Rayleigh, 1877) ou encore (Ritz,1909). (Leissa,1973), propose un article de revue des vibrations libres de plaques rectangulaires, et de leur solutions analytiques lorsque celles-ci existent. (Hutchinson, 1988), (Liew et al, 1995) pour les plaques épaisses, fournissent également un grand nombre de références sur le sujet.

Cependant, l'hypothèse des vibrations linéaires a un domaine de validité restreint. En effet, les structures couramment utilisées sont de plus en plus légères tout en étant soumises à des niveaux d'excitation toujours plus importants. Cela conduit à des mouvements de grande amplitude, pour lesquels l'approximation des petits déplacements n'est plus valable, et nécessitant une modélisation non linéaire. C'est le cas par exemple, des panneaux légers utilisés en aéronautique, soumis à de hauts niveaux de bruit et conduisant à des amplitudes importantes, présentes dans (Ribeiro, 1998).

II.6. Non linéarités dans les structures minces

Dans la suite on s'intéressera uniquement aux non linéarités géométriques mais on présente auparavant les différentes sources de non linéarités possibles dans les structures minces.

On a distingue trois cas :

1. Les non linéarités liées au matériau ;

2. Celles liées aux conditions limites ;

3. Celles liées à la géométrie ;

Les premières concernent les matériaux pour lesquels les contraintes sont des fonctions non linéaires des déplacements, on parle alors selon les cas d'élasticité, de viscoélasticité etc. ces problèmes sont en général résolus par l'utilisation de méthodes itératives.

Dans la seconde catégorie, on classe tous les problèmes pour lesquels les conditions limites changent au cours du chargement. C'est le cas notamment des chocs, frottements, contacts, etc... Ce type de conditions peut entraîner par exemple un amortissement non linéaire.

Enfin, des amplitudes de déplacement importantes conduisent soit à une grande courbure soit à l'étirement du plan moyen pour certaines conditions limites restreignant le mouvement. On parle alors de non linéarités géométriques.

La relation entre les déformations et les déplacements n'est plus linéaire, c'est à dire qu'on sort de l'hypothèse des petites déformations ou perturbations (HPP) pour lesquelles on considère une approximation au premier ordre linéaire, des déformations qui devient rapidement limitée pour des structures élancées ou très minces, soumises a des déplacements importants. Dans ce cas, la partie non linéaire du tenseur des déformations n'est plus négligeable, ce qui conduit à un couplage entre la partie membrane et la partie flexion.

Historiquement, les premières études en non linéaires géométrique ont concerne les problèmes de flambement, ou l'utilisation de modèles non linéaires est nécessaire pour la détermination de la charge limite. Depuis, de nombreuses études ont été menées, en particulier pour les vibrations libres ou forcées de structures minces.

Outre les ouvrages généraux de (Nayfeh ,1975) ; (Szemplinska et al ,1990). On trouve une revue bibliographique sur les vibrations non linéaires géométriques, ainsi que sur l'influence sur celles-ci de différents paramètres tels que la température, un défaut de forme, l'anisotropie du matériau. Les vibrations libres et forcées sont également traitées dans (Srinivasan, 1966) (poutres), (Lau et al, 1981) (coques) ou (Reddy et al, 1981) (plaques circulaires et annulaires). La dépendance des fréquences et des formes modales vis à vis de l'amplitude du mouvement est montrée numériquement et expérimentalement dans (White, 1971), qui utilise un modèle de Duffing pour le comportement des poutres. (Benamar et al, 1991 et1993) étudient les vibrations libres de poutres et de plaques et montrent, entre autres, qu'une amplitude de l'ordre de l'épaisseur conduit a 18% de décalage sur les fréquences propres. Ces travaux sont

complets par des résultats expérimentaux. (Han et al, 1997a et 1997b) s'intéressent au calcul des trois premiers modes de vibrations libres pour des plaques rectangulaires. Dans plusieurs articles, Lewandowski traite le cas de la réponse libre ou forcée de poutres. (Lewandowski ,1992 et 1994). (Van Dooren, 1975) à décrivent la réponse sous-harmonique d'une poutre pour une excitation bimodale. Les résonances internes sont étudiées dans (Bennett et al, 1970), pour des vibrations libres et forcées de poutres, pour des plaques circulaires dans (Sridhar et al, 1975), rectangulaires dans (Lau et al, 1984). De manière générale, les résonances internes modifient la courbure de branches de solution déjà existantes ou conduisent à l'apparition de branches secondaires. Le couplage entraîne également un changement dans les formes modales (Ribeiro et al, 1999).

II.7. Quelques Méthode de résolution du problème de la réponse forcée de structures minces en non linéaire géométrique

Dans les problèmes non linéaires la réponse change en fonction d'un ou de plusieurs paramètres du système. L'étude de la réponse exige, alors, des méthodes de continuation pour voir son évolution en fonction de ces paramètres.

Plusieurs auteurs ont utilisé les méthodes (itératives d'intégration) pour résoudre ces problèmes contenant des non linéarités géométriques (Ramesh et al, 1994) a trouvé deux inconvénients dans l'utilisation d'une méthode d'intégration « méthode de tir » en le comparant avec les méthodes basées sur l'équilibrage harmonique dans le domaine fréquentiel. Le premier est la difficulté de passer les points tournants dans la courbe où la fréquence change de l'état croissant à décroissant ou inversement. Le deuxième est que la méthode d'intégration utilisée est plus exigeante en termes de ressources informatiques (temps de calcul, mémoire attribuée ... etc.) (Matter,2008).

II.7.1. Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibre harmonique ("harmonic balance") est une des plus anciennes méthodes utilisée pour le traitement des systèmes non linéaires. Ses exemples d'application sont très nombreux dans la littérature ((Langley,1988 ; Worden ,1996),...). Elle permet de transformer le système d'équations dynamiques en un problème algébrique équivalent et facile pour l'étude du comportement dynamique des structures minces amorties (Boumediene,2010).

II.7.2 Autre méthode « Méthode Asymptotique Numérique (MAN) »

La MAN est une méthode de continuation à pseudo longueur d'arc, permettant de résoudre des systèmes algébriques non linéaires dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. Son principe consiste à développer les inconnues en séries entières en fonction du même paramètre (perturbation) qu'on intègre dans le problème à résoudre. (Boumediene, 2010).

II.8. Différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adoptée :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couches.
- Approche développement asymptotique.

II.8.1. Approche monocouche équivalente

II.8.1.1. Modèle d'euler bernoulli (classical beam theory- CBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane (figureII.1).

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$\phi(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z w_{,x}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

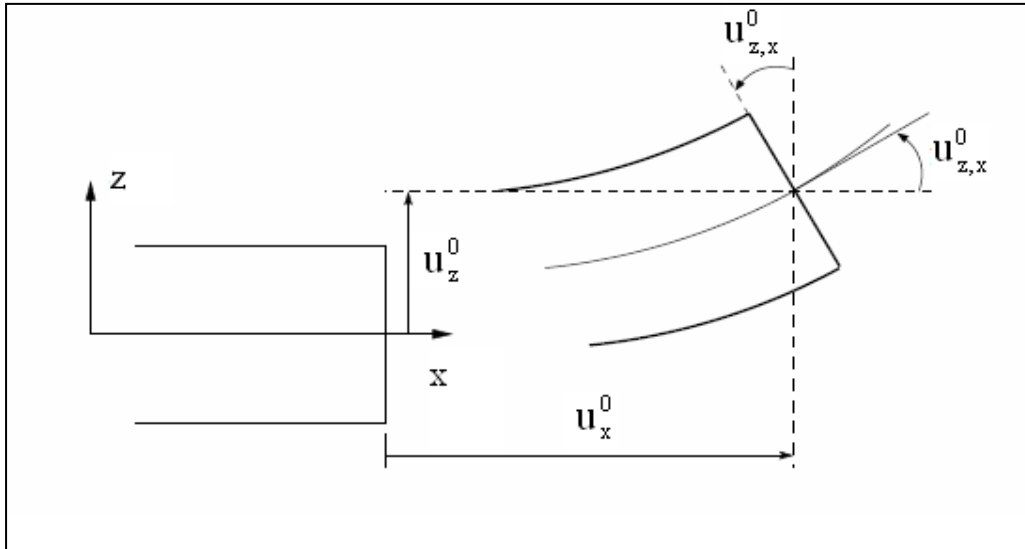


Figure II.1: Cinématique d'Euler Bernoulli

$u(x, z)$ C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w_{,x}^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

II.8.1.2. Modèle de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre.

Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $\phi(z)$ est égale à Z .

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z w_{,x}^0(x) + z \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

$\gamma_{xz}^0(x)$, c'est la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

$$\text{Tel que : } \gamma_{xz}^0(x) = w_{,x}^0(x) - \phi^0(x) \quad (\text{II.5})$$

$\phi^0(x)$ Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

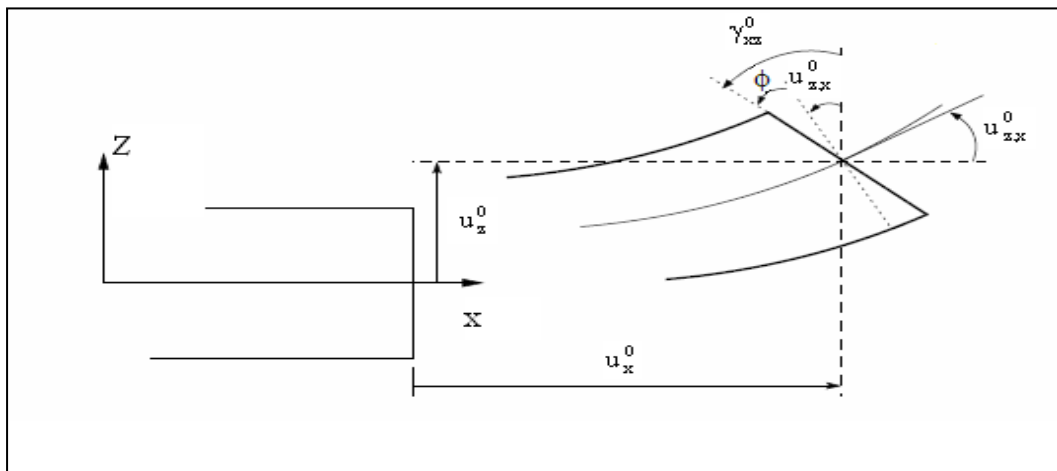


Figure II.2: Cinématique de Timoshenko

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = - w_{,x}^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_{,x}^0(x) \quad (\text{II.6})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0 \quad (\text{II.7})$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par (Mind lin et Deresiewicz). (Cowper et Murtyont) donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques

Bien qu'issues de la théorie classique, ces solutions sont toutefois entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

II.8.1.3. Théorie d'ordre élevé

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement». Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.3).

La fonction représente le gauchissement et sa dérivée $\psi'(z)$ représente le cisaillement.

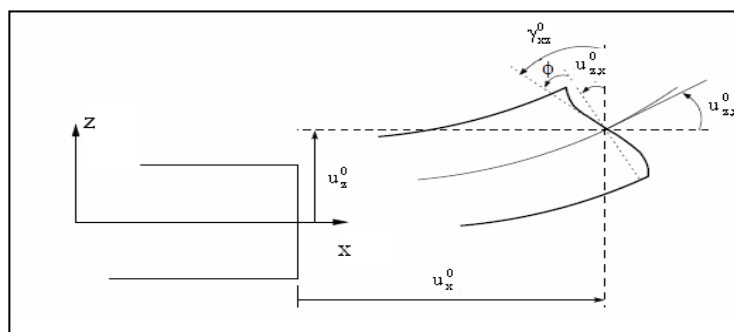


Figure II.3: Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_{,x}^0(x) + \Phi(z) \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_{,x}^0(x) + \Phi'(z) \gamma_{xz}^0(x) + w_{,x}^0(x) \quad (\text{II.9})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \Phi'(z) \gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II.10})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$\Phi'(z)|_z = \pm h/2 = 0 \quad (\text{II.11})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition.

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\psi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT):

$$\psi(z) = 0 \quad (\text{II.12.a})$$

Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$\psi(z) = z \quad (\text{II.12.b})$$

Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (\text{II.12.c})$$

Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) :

$$\psi(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.12.d})$$

Le modèle trigonométrique :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{II.12.e})$$

Avec, h : épaisseur de la poutre

II.8.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface, ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Srinivas, 1973) ; (Pagano, 1978) ; (Seide, 1980) ; (Disciua, 1984 et 1986) ; (Murakami, 1986) ; (Reddy, 1987) ; (Ossadzow, 2001) ; (Diaz, 2002) ; (Afaq, 2003).

Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couche). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (le nombre de variables dépend du nombre de couche), mais permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacement ou en contrainte aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact et est indépendante du nombre de couche (Figures II.4.1, II.4.2).

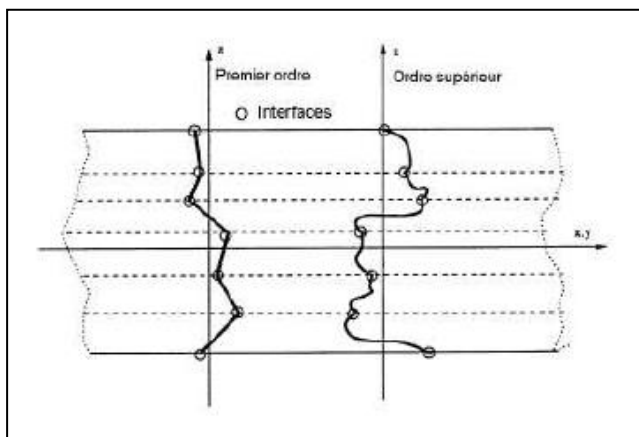


Figure. II.4.1: Champ de déplacements des modèles des couches discrètes, approche

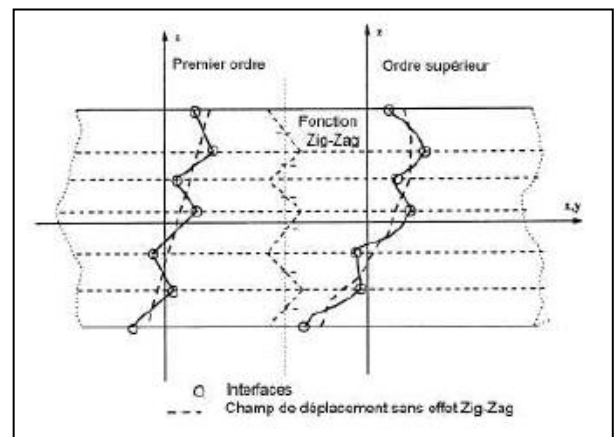


Figure. II.4.2: Champ de déplacements Modèles zig-zag, approche cinématique

II.8.3. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, (Di Sciuva, 1984) est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z . mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure II.5). Les déformations

transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

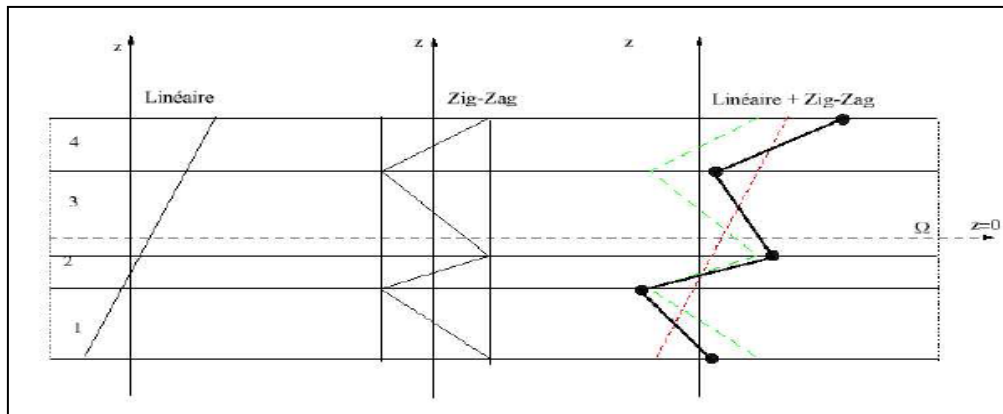


Figure. II.5: Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre

II.9. Méthodes de résolution

II.9.1. Procédure de Navier

Nous choisissons ici de nous référer à cette méthode par le terme générique de procédure de Navier. Cette méthode est adaptée à des cas de chargement particuliers : c'est à dire que chaque variable est projetée sur une fonction d'une base trigonométrique adaptée. Dans sa version la plus classique, cette méthode est utilisée pour simuler une poutre ou plaque rectangulaire simplement appuyée chargée avec une pression de forme sinusoïdale ou uniforme ; la déflexion associée est alors supposée sinusoïdale. Les autres degrés de liberté sont exprimés sur une base trigonométrique correspondante.

II.9.2. Méthode de RAYLEIGH-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz permet, en projetant les déplacements sur une base donnée, d'implémenter un modèle pour la simulation de poutres ou plaques rectangulaires soumises à des conditions aux limites et des chargements variés. Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait que, avec un choix de base de projection adapté, les dérivées – successives – des fonctions de la base sont simples à obtenir, et par conséquent, cette méthode est tout à fait adaptée aux modèles nécessitant le calcul des dérivées multiples de la base. La qualité des résultats obtenus est souvent relative au choix de la base.

II.9.3. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a progressivement fait son apparition depuis les années 1950. C'est une méthode qui permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Elle est couramment utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structures complexes proches de cas pratiques. Les principes généraux de la méthode ainsi qu'un certain nombre de raffinements sont regroupés dans le livre de Zienkiewicz.

II.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes attachés à présenter l'historique des théories des poutres. Dans un premier temps, nous avons présenté le comportement des poutres composites qui est plus complexe que celui d'une poutre en matériaux traditionnels, métalliques par exemple, et nous l'avons terminé par une démonstration des différents théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

Enfin, on a détaillé une étude bibliographique sur le comportement non-linéaire en vibrations des poutres sandwichs.

Chapitre III:
Résonance super-harmonique des
poutres sandwich

III.1. Introduction

Les matériaux composites renforcés par des fibres sont généralement utilisés dans de nombreux domaines tels que le génie maritime, aérospatial, civil et mécanique. Les structures des poutres sandwichs sont de plus en plus utilisées comme composants structurels d'éléments porteurs légers et lourds, qui peuvent inclure une faible densité, une rigidité élevée, une résistance chimique, un amortissement élevé. De nombreuses recherches intéressantes se sont concentrées sur l'analyse dynamique et statique de ces structures et diverses théories ont été suggérées pour la modélisation des poutres et des plaques multicouches (Kolahchi, 2017) ; Kolahchi et al, 2017a,b). Les poutres sandwichs et stratifiées ont été analysées selon les principales théories. La première théorie était connue sous le nom de théorie classique CPT. Dans cette théorie, le cisaillement et les déformations transversales normales sont négligés, ce qui conduit à des résultats erronés, principalement dans l'analyse des vibrations libres et du flambage des poutres stratifiées (Emam et Nayfeh, 2009) ; (Belouettar et al, 2008).

Il convient de noter que cette théorie est plus adaptée aux structures de poutres à une seule couche et devient peu fiable pour les poutres composites stratifiées. Pour cette raison, une théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) a été suggérée en prenant en compte la déformation de cisaillement transversale (Reissner, 1945), dans laquelle la déformation de cisaillement transversale est supposée constante le long de l'épaisseur de la couche. Il s'ensuit que les conditions d'équilibre sur les faces inférieure et supérieure de la poutre ne sont pas vérifiées. De ce fait, des facteurs de correction de cisaillement étaient nécessaires pour corriger la variation irréaliste du cisaillement / contrainte à travers l'épaisseur (Timoshenko, 1922). Pour dépasser la limitation du FSDT, divers types de théorie déformable par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont alors été proposés (Reddy, 1984) ; (Touratier, 1991) ; (Afaq et al, 2003) ; (Abualnour et al, 2018) ; (Houari et al, 2018) ; (Abualnour et al, 2019) ; (Soltani et al, 2019) ; (Daikh et al, 2020). Les HSDT ont été largement et avec succès utilisés pour la conception de composants structurels multicouches. Cependant, ces théories sont incapables de satisfaire les conditions de continuité des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur, que subissent les structures multicouches. Pour pallier les inconvénients des HSDT, des théories en zigzag ont été préconisées pour ces structures (Kapuria, 2004) ; (Youzera et al, 2012), afin de vérifier la condition de compatibilité aux interfaces. Ces théories ont prouvé leur efficacité pour une prédiction satisfaisante des résultats dynamiques et de flambage des structures multicouches.

Afin de contrôler les amplitudes de résonance des vibrations et donc d'allonger la durée de vie de telles structures sous charge / impact périodique, de nombreuses recherches intéressantes ont été abordées à ce sujet. Certains des premiers travaux sur les vibrations linéaires et l'amortissement des poutres sandwich ont été réalisés par (Gibson et Plunkett, 1977) ; (Gibson et Wilson, 1979).

Un aperçu très détaillé de la littérature disponible relative au comportement vibratoire en présence de matériau viscoélastique peut être trouvé par (Heng et al, 2008) ; (Rao, 1978) ; (Rickards, 1993) et (Bhoomaraddi, 1995). Dans ces travaux, un module complexe, constitué d'une partie réelle représentant la rigidité élastique et d'une partie imaginaire liée à la dissipation, a souvent été utilisé pour modéliser le comportement dynamique des matériaux viscoélastiques sous vibrations harmoniques. (Youzera et al, 2012) ont développé une bonne théorie pour une prédiction plus efficace du comportement vibratoire non linéaire des poutres composites stratifiées en utilisant une théorie du zig-zag d'ordre supérieur. Plusieurs chercheurs ont construit des modèles de vibrations forcées pour des analyses linéaires et non linéaires en utilisant une formulation analytique, ou des éléments finis ou une combinaison des deux ayant une formulation d'éléments finis semi-analytiques. (Kovac et al, 1971) et (Hyer et al, 1976) ont étudié les réponses théoriques aux vibrations forcées non linéaires d'une poutre sandwich. Ces études intéressantes sont basées sur un Galerkinmultimode et la méthode de l'équilibre harmonique simple. (Bilasse et al, 2010) ont utilisé la solution à base d'éléments finis pour prédire la vibration linéaire et non linéaire de poutres sandwich viscoélastiques avec diverses lois viscoélastiques dépendant de la fréquence.

(Youzera et al, 2017a) ont présenté une étude analytique consacré pour analyser du problème des vibrations non linéaires des poutres composites stratifiées en considérant divers modèles de fonction de cisaillement. Dans cette étude, la méthode des échelles multiples est utilisée pour trouver des relations amplitude-fréquence pour la résonance super-harmonique.

Le but du présent travail est d'étudier les réponses aux vibrations forcées non linéaires des résonances super harmoniques, des poutres sandwich sous excitations fortes. La poutre sandwich concernée par cette étude est constituée d'une poutre à trois couches avec un matériau composite viscoélastique dans l'âme, prise en sandwich entre deux couches isotropes sur les faces supérieure et inférieure.

Pour effectuer l'analyse des vibrations non linéaires sous excitation harmonique, la méthode des échelles multiples est employée pour cet objectif. L'effet géométrique non linéaire dû aux

forces normales résultant des contraintes axiales est modélisé à l'aide de théories en zig-zag d'ordre supérieur, qui incorporent divers modèles de fonction de cisaillement pour décrire la cinématique dans le cœur. La résolution des équations amplitude-fréquence permet d'obtenir des relations amplitude-fréquence. Celles-ci sont liées aux vibrations secondaires, données près du $1/3w_1$

III.2. Modèle viscoélastique pour les matériaux composites

La forme générale de la théorie linéaire d'un corps viscoélastique est donnée par (Zinoviev et Ermakov, 1994)

$$\sigma_{ij}(t) = - \int_{-\infty}^t Q_{ijkl}^*(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau) \quad (III.1)$$

On utilisant le modèle viscoélastique Kelvin – Voigt, on obtient :

$$\sigma_{ij}(t) = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) + C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \quad (III.2)$$

Où Q_{ijkl} et C_{ijkl} sont les modules de rigidité et d'amortissement de matériaux composite

L'hypothèse, le coefficient de Poisson utilisé indépendant du temps, comme (Daya et al, 2004), pour simplifier les caractérisations des fibres de verre et de fibres de carbone renforcées le matériau composite sous conditions de chargement. Le coefficient de Poisson est considéré comme réel et constant. Dans ce cas, le module dissipation (amortissement) peuvent être écrits sous forme matricielle :

$$[C] = \frac{[Q][\eta]}{\omega_l} \quad (III.3)$$

Où η le facteur de perte et ω_l la fréquence linéaire. L'équation constitutive de chaque couche dans la poutre multicouche peut être exprimée dans les directions principales du matériau. Si les conditions de symétrie des matériaux transversalement isotropes sont considérées. Les deux matrices définies dans l'Eq. (III.3) peut être exprimé comme (Youzera et al, 2017b)

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{23} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

$$[\eta] = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_6 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Les relations constitutives viscoélastiques des matériaux transversalement isotropes peuvent être décrites en terme de huit paramètres; cinq paramètres de rigidité indépendants E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} et ν_{23} , et trois facteurs de perte d'amortissement indépendants η_1 , η_2 , et η_6 , et exprimés comme suit:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{12}} \quad (\text{III.6.a})$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{12}} \quad (\text{III.6.b})$$

$$Q_{12} = \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (\text{III.6.c})$$

$$Q_{55} = Q_{66} = G_{13} = G_{12} \quad (\text{III.6.d})$$

$$Q_{44} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (\text{III.6.e})$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2\nu_{12}}{E_1} \quad (\text{III.6.f})$$

La contrainte normale et tangentielle σ_2 et τ_2 peut être exprimée en fonction des déformations au moyen de la matrice de rigidité.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{2,xx} \\ \tau_{2,xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^* & 0 \\ 0 & \overline{Q}_{55}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{2,xx} \\ \gamma_{2,xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{C}_{11}^* & 0 \\ 0 & \overline{C}_{55}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{2,xx} \\ \dot{\gamma}_{2,xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Avec :

$$\overline{Q}_{11}^* = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{22}n^4 \quad (\text{III.8.a})$$

$$\overline{Q}_{55}^* = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2 \quad (\text{III.8.b})$$

$$\overline{C}_{11}^* = \frac{1}{\omega_i} (Q_{11}(\eta_1)m^4 + (Q_{12}(\eta_1) + Q_{12}(\eta_2) + 4Q_{66}(\eta_6))n^2m^2 + Q_{22}(\eta_2)n^4) \quad (\text{III.8.c})$$

$$\overline{C}_{55}^* = \frac{1}{\omega_i} (Q_{44}(\eta_2)n^2 + Q_{55}(\eta_6)m^2) \quad (\text{III.8.d})$$

Où

$$m = \cos(\theta) \quad (\text{III.8.e})$$

$$n = \sin(\theta) \quad (\text{III.8.f})$$

Où

θ est l'angle entre l'axe global et l'axe local de fibre dans la couche de matériau composite

(.) Désigne la première dérivée par rapport au temps*

III.3. Formulation

III.3. 1. Cinématique

Considérons une poutre sandwich comme présentée sur la (Figure.III. 1), l'axe x étant la ligne moyenne de la poutre et z est l'axe transversal. H_f et H_c représentent respectivement les épaisseurs des faces et du cœur. La longueur et l'épaisseur de la poutre sont représentées respectivement par L et H_t .

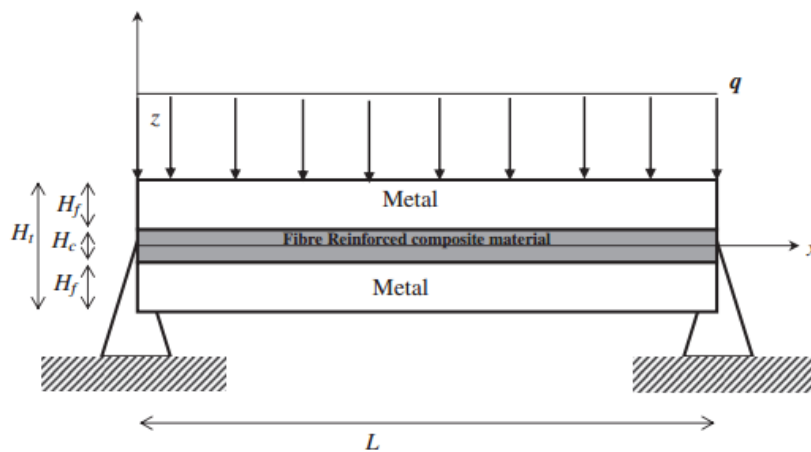


Figure III.1: Poutre sandwich

Les hypothèses classiques de calcul des sandwichs sont considérées à savoir :

- 1- Le champ de déplacement est continu aux niveaux des interfaces ;
- 2- la contrainte normale transverse dans la direction (Oz) est très faible comparativement à la contrainte normale axiale dans la direction (Ox) ;
- 3- l'effet de cisaillement est pris en compte seulement dans la couche centrale ;
- 4- le déplacement transverse w est le même dans les trois couches ;

L'équilibre inter-laminaire est assuré en introduisant une fonction de cisaillement notée $f(z)$, dans la théorie de type zig-zag, le champ de déplacement est écrit en trois parties, pour reproduire un champ continu par morceaux dans la direction de l'épaisseur.

- Aucun glissement ne se produit aux interfaces entre les trois couches de la poutre.

Tableau III.1: Modèles cinématiques considérés dans l'étude.

Model	Name	f(z)
1	Timoshenko (1922)	$f(z) = z$
2	Reddy (1984)	$f(z) = z - 4z^3/3H_c^2$
3	Touratier (1991)	$f(z) = H_c \sin(\pi z/H_c)/\pi$
4	Afaq (2003)	$f(z) = ze^{-2(z/H_c)^2}$

Pour la comparaison des différentes fonctions de cisaillement $f(z)$, le présent travail se limite aux poutres stratifiées composites et sandwich. Dans les théories du zig-zag d'ordre supérieur, le champ de déplacement est divisé en trois parties afin de satisfaire les conditions de continuité des contraintes de déplacement et de cisaillement transversal aux interfaces par introduction d'une fonction de cisaillement $f(z)$. L'inconvénient majeur de ces théories réside dans le fait que le nombre total d'inconnues dépend du nombre de couches.

Le champ de déplacement s'exprime de la façon suivante:

$$u_1(x, z, t) = u_1^0(x, t) - \left(z - \frac{H_c + H_f}{2} \right) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad \frac{H_c}{2} \leq z \leq \frac{H_t}{2} \quad (\text{III.9})$$

$$u_2(x, z, t) = u_2^0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \beta(x, t) \quad -\frac{H_c}{2} \leq z \leq \frac{H_c}{2} \quad (\text{III.10})$$

$$u_3(x, z, t) = u_3^0(x, t) - \left(z + \frac{H_c + H_f}{2} \right) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad -\frac{H_t}{2} \leq z \leq -\frac{H_c}{2} \quad (\text{III.11})$$

Où

$u_i(x, z, t)$ ($i = 1..3$) : est le champ de déplacement longitudinal de la couche i ;

$u_i^0(x, t)$, ($i = 1..3$) : représente le déplacement longitudinal du plan moyen de la couche i et

$w(x, t)$ représente le déplacement transversal,

$\beta(x, t)$ Présente la rotation additionnelle de la normale à la ligne moyenne,

$f(z)$ est la “fonction de cisaillement”, on considère que le champ de déplacement est continu aux interfaces.

L’hypothèse de la continuité du champ de déplacement au niveau des interfaces permet d’exprimer la relation entre les déplacements longitudinaux des plans moyens des couches externes et celui de la couche centrale.

Le champ de déplacement peuvent être exprimés en fonction de $u_2^0(x, t)$

$$u_1^0(x, t) = u_2^0(x, t) - \left(\frac{H_c + H_f}{2} \right) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f \left(\frac{H_c}{2} \right) \beta(x, t) \quad (\text{III.12})$$

$$u_3^0(x, t) = u_2^0(x, t) + \left(\frac{H_c + H_f}{2} \right) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - f \left(\frac{H_c}{2} \right) \beta(x, t) \quad (\text{III.13})$$

En insérant les équations. (III.12) et (III.13) dans les équations. (III.9) et (III.11), on obtient

$$u_1(x, z, t) = u_2^0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f \left(\frac{H_c}{2} \right) \beta(x, t) \quad (\text{III.14})$$

$$u_2(x, z, t) = u_2^0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \beta(x, t) \quad (\text{III.15})$$

$$u_3(x, z, t) = u_2^0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - f \left(\frac{H_c}{2} \right) \beta(x, t) \quad (\text{III.16})$$

Le champ de déformation en tenant compte de la non-linéarité s’exprime pour les trois couches de la manière suivante :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1(x, z, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{III.17.a})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2(x, z, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{III.17.b})$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3(x, z, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{III.17.c})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_2(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (\text{III.17.d})$$

Où ε_i : est la déformation normale dans la couche i , et γ la déformation de cisaillement dans la couche centrale

III.3.2. Équations de mouvement :

Dans le domaine des vibrations forcées, le principe de Hamilton est défini comme suit

$$\delta P_{\text{int}} = \delta P_{\text{ext}} - \delta P_{\text{acc}} \quad (\text{III.18})$$

δP_{acc} Représente le terme d'inertie alors que δP_{int} et δP_{ext} d'écrivent respectivement le travail virtuel interne et externe.

Le travail virtuel intern δP_{int} :

$$\delta P_{\text{int}} = \int_{v_1} \sigma_{1,xx} \varepsilon_{1,xx} \delta \varepsilon_{1,xx} dv_1 + \left(\int_{v_2} \sigma_{2,xx} \varepsilon_{2,xx} \delta \varepsilon_{2,xx} + \int_{v_2} \tau_{2,xz} \gamma_{2,xz} \delta \gamma_{2,xz} \right) dv_2 + \int_{v_1} \sigma_{3,xx} \varepsilon_{3,xx} \delta \varepsilon_{3,xx} dv_3 \quad (\text{III.19})$$

Remplaçant les équations. (III.17a-d) dans l'Eq. (III.19) et intégrant par partie on trouve :

$$\delta P_{\text{int}} = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} N_T \left(\frac{\partial \delta u_2(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial x} \right) + M_\beta \frac{\partial \delta \beta(x,t)}{\partial x} + \\ M_w \frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} + T \delta \beta(x,t) \end{array} \right\} dx \quad (\text{III.20})$$

$M_i (i=w, \beta)$ le moment de flexion et N_T est la force axiale.

T : l'effort tranchant induit par la déformation de cisaillement de la couche centrale.

$$N_T(x,t) = \left(2E_f S_f + \overline{Q}_{11}^* S_c \right) \left(\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) + \overline{C}_{11}^* S_c \left(\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t \partial x} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) \quad (\text{III.21})$$

$$M_w = s_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - s_2 \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial x} + s_5 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t \partial x^2} - s_6 \frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial t \partial x} \quad (\text{III.22})$$

$$M_\beta = -s_2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + s_3 \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial x} - s_6 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t \partial x^2} + s_7 \frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial t \partial x} \quad (\text{III.23})$$

$$T = s_4 \beta(x,t) + s_8 \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} \quad (\text{III.24})$$

Avec :

$$s_1 = 2E_f S_f \left(\frac{H_c + H_f}{2} \right)^2 + 2E_f I_f + \overline{Q}_{11}^* I_c \quad (\text{III.25.a})$$

$$s_2 = 2E_f S_f \left(\frac{H_c + H_f}{2} \right) f \left(\frac{H_c}{2} \right) + \overline{Q}_{11}^* b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} z f(z) dz \quad (\text{III.25.b})$$

$$s_3 = 2E_f S_f \left(f \left(\frac{H_c}{2} \right) \right)^2 + \overline{Q}_{11}^* b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} f(z)^2 dz \quad (\text{III.25.c})$$

$$s_4 = \overline{Q}_{55}^* b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (\text{III.25.d})$$

$$s_5 = \overline{Q}_{11}^* I_c \quad (\text{III.25.e})$$

$$s_6 = \overline{Q}_{11}^* b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} z f(z) dz \quad (\text{III.25.f})$$

$$s_7 = \overline{Q}_{11}^* b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} f(z)^2 dz \quad (\text{III.25.g})$$

$$s_8 = \overline{C}_{55}^* b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (\text{III.25.h})$$

Les grandeurs géométriques utilisées dans les équations. (III.25 a-h) sont l'aire de la section transversale et les moments quadratiques I_f et I_c des faces et des couches centrales.

Ou :

E_f : Représente le module d'Young des faces (supérieure et inférieure), S_f et I_f représente respectivement la surface et le moment quadratique de leur section droite.

Q : Représente le module d'Young de cœur (centrale), S_c et I_c représente respectivement la surface et le moment quadratique de leur section droite.

Pour le test dynamique, $\delta P_{acc(\delta u)}$ et $\delta P_{ext(\delta u)}$ sont donnés par :

$$\delta P_{ext} = \int_0^L q(t) \delta w(x,t) dx \quad (\text{III.26})$$

$$\delta P_{acc} = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \delta w(x,t) dx \quad (\text{III.27})$$

ρ : La masse volumique

Remplaçant les équations. (III.20), (III.26) et (III.27) dans l'équation. (III.18) et intégrant par parties, on obtient les équations de mouvement de la poutre composite stratifiée comme suit:

$$\frac{\partial N_T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (III.28.a)$$

$$\frac{\partial M_\beta(x,t)}{\partial x} - T = 0 \quad (III.28.b)$$

$$-N_T(x,t) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_w}{\partial x^2} + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \overset{\square}{\mathcal{W}}(x,t) = q(t) \quad (III.28.c)$$

$\left(\overset{\square}{\mathcal{W}} \right)$ Désigne la seconde dérivée par rapport le temp.

L'équation (III.29a) conduit à une force axiale constante $N_T(x,t) = N_T(t)$ exprimée par :

$$N(t) = \frac{1}{2L} \left(2E_f S_f + \overline{Q}_{11}^* S_c \right) \int_0^L \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{\overline{C}_{11}^* S_c}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t \partial x} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) dx \quad (III.29)$$

La substitution des équations. (III.21-III.24) dans les équations. (III.28b) et (III.28c) et après quelques manipulations, on obtient les équations différentielles suivantes

$$-s_2 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} + s_2 \frac{\partial^2 \beta(x,t)}{\partial x^2} - s_6 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t \partial x^3} + s_7 \frac{\partial^3 \beta(x,t)}{\partial t \partial x^2} - s_4 \beta(x,t) - s_8 \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (III.30.a)$$

$$\begin{aligned} & -N_T(x,t) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + s_1 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - s_2 \frac{\partial^3 \beta(x,t)}{\partial x^3} + s_5 \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial t \partial x^4} - s_6 \frac{\partial^4 \beta(x,t)}{\partial t \partial x^3} \\ & + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(t) \end{aligned} \quad (III.30.b)$$

Dans le cas d'une poutre simplement appuyée, les variables de déplacement satisfaisant aux conditions aux limites peuvent s'écrire comme suit:

$$w(x) = A \sin(kx) \quad (III.31.a)$$

$$B(x) = B \cos(kx) \quad (III.31.b)$$

Ou :

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (III.31.c)$$

Remplaçant l'Eq. (III.31) dans l'Eq. (III.29), on obtient :

$$N(t) = N_1 A^2 + N_2 A \overset{\square}{A} \quad (III.32.a)$$

Avec :

$$N_1 = \frac{k^2}{2L} \left(2E_f S_f + \overline{Q}_{11}^* S_c \right) \int_0^L (\cos(kx))^2 dx \quad (III.32.b)$$

$$N_2 = \frac{\overline{C}_{11}^* S_c k^2}{L} \int_0^L (\cos(kx))^2 dx \quad (III.32.c)$$

En insérant l'équation (III.31) dans l'Eq. (III.30) et après intégration entre 0 et 1 . l'équation amplitude s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha_3 A^2 + \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 + \alpha_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_4 A^2 + \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} + \alpha_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{\square}{A} \\ \overset{\square}{B} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{\square\Box}{A} \\ \overset{\square\Box}{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (III.33)$$

Les coefficients ($\alpha_i, i=1-12$) sont donnés en annexe.

III.3.3. Modèle de transformation :

Le système d'Eq. (III.33) étant transformé par la méthode de superposition modale sous la forme suivante:

$$d_1 r^3(t) + \omega_l^2 r(t) + d_1 r^2(t) \overset{\square}{r}(t) + d_4 r(t) \overset{\square}{r}(t) + \overset{\square\Box}{r}(t) = F_1(t) \quad (III.34)$$

$$\text{Ou} \quad d_1 = \alpha_3 \quad (III.35.a)$$

$$d_3 = \alpha_4 \quad (III.35.b)$$

$$d_4 = \alpha_1 + (\alpha_9 + \alpha_2) y + (\alpha_{10} + \alpha_{12}) y^2 \quad (III.35.c)$$

$$\omega_l^2 = \frac{(-\alpha_6 \alpha_7 + \alpha_5 \alpha_8 - \alpha_5 \alpha_{11})}{\alpha_8 + \alpha_{11}} \quad (III.35.d)$$

$$y = \frac{-\alpha_7}{\alpha_8 + \alpha_{11}} \quad (III.35.e)$$

$r(t)$: Amplitude en fonction du temps et correspond au premier mode.

III.4. Méthode de résolution utilisant la méthode de perturbation

En utilisant la méthode des échelles multiples (Khanin et al.2000, Youzera et al.2017a), la solution approximative sera exprimée par:

$$r(t, \varepsilon) = r_0(T_0, T_1) + \varepsilon r_1(T_0, T_1) + \dots \quad (\text{III.36})$$

T_0 s'appelle l'échelle de temps rapide associée à l'oscillation relativement rapide se produisant avec la fréquence ω_l , et T_1 est l'échelle de temps lente associée à la variation relativement lente de l'amplitude et de la phase de la réponse.

Les dérivés temporels sont exprimés comme :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{d}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (\text{III.37})$$

Pour analyser les résonances super-harmoniques sous charges très important, l'excitation de l'équation (III.34) sont:

$$\square r(t) + \omega_l^2 r(t) = -\varepsilon \left(d_1 r(t)^3 + d_3 r(t)^2 \square r(t) + d_4 \square r(t) \right) + F_1 \cos(\omega t) \quad (\text{III.38})$$

Où ε est un paramètre de comptabilité

En insérant les équations (III.36) et (III.37) dans l'équation. (III.38) on obtient :

Ordre ε^0

$$D_0^2 r_0 + \omega_l^2 r_0 = F_1 \cos(\omega T_0) \quad (\text{III.39})$$

Ordre ε^1

$$D_0^2 r_1 + \omega_l^2 r_1 = -2D_0 D_1 r_0 - d_1 r_0^3 - d_3 r_0^2 D_0 \quad (\text{III.40})$$

La solution de l'équation du premier ordre (ε^0) de la forme :

$$r_0 = A(T_1) e^{i\omega_l T_0} + \Lambda(T_1) e^{-i\omega_l T_0} + cc \quad (\text{III.41})$$

Avec :

$$\Lambda = \frac{F_1}{2(\omega_l^2 - \omega^2)}$$

Où cc dénote le complexe conjugué, et $A(T_1)$ est une fonction complexe inconnue

Remplaçant l'Eq. (III.41) sur le côté droit de l'Eq. (III.40), on obtient

$$\begin{aligned}
 D_0 r_1 + \omega_l^2 r_1 = & \left[2i\omega_l (A' + uA) + A^2 \bar{A} (3d_1 + i\omega_l d_3) + 2A\Lambda^2 (3d_1 + i\omega_l d_3) \right] e^{i\omega_l T_0} + \\
 & \left[(3d_1 + i\omega_l d_3) (\Lambda^2 + 2A\bar{A}) + 2iu\omega \right] \Lambda e^{i\omega_l T_0} + (d_1 + d_3 i \omega_l) A^3 e^{3i\omega_l T_0} + \\
 & (d_1 + d_3 i \omega) \Lambda^3 e^{3i\omega_l T_0} (d_3 i (\omega - 2\omega_l) + 3d_1) \bar{A}^2 \Lambda e^{i(\omega - 2\omega_l) T_0} + (d_3 i (\omega + 2\omega_l)) A^2 \Lambda e^{i(\omega + 2\omega_l) T_0} + \\
 & (3d_1 + d_3 i (\omega_l + 2\omega)) A \Lambda^2 e^{i(2\omega + \omega_l) T_0} + (3d_1 + d_3 i (\omega_l - 2\omega)) A \Lambda^2 e^{i(\omega_l - 2\omega) T_0} + \\
 & (3d_1 + d_3 i (2\omega_l - \omega)) A^2 \Lambda e^{i(2\omega_l - \omega) T_0} + (3d_1 + d_3 i (2\omega - \omega_l)) \bar{A} \Lambda^2 e^{i(2\omega - \omega_l) T_0} + cc
 \end{aligned} \tag{III.42}$$

Où (A') désigne la différenciation par rapport à T_1 et $u = d_4 / 2$

III.4.1. Cas non résonnant

Dans le cas sans résonance, les termes séculiers sont éliminés si

$$2i\omega_l (A' + uA) + A^2 \bar{A} (3d_1 + i\omega_l d_3) + 2A\Lambda^2 (3d_1 + i\omega_l d_3) = 0 \tag{III.43}$$

En résolvant l'équation ci-dessus, on trouve l'expression de $A(T_1)$ sous la forme polaire comme :

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\psi T_1} \tag{III.44.a}$$

Et

$$\bar{A}(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\psi T_1} \tag{III.44.b}$$

En insérant l'Eq (III.44) dans l'Eq. (III.43) et en séparant les parties réelle et imaginaire de l'équation résultante, on obtient :

$$a' = -\left(u + \Lambda^2 d_3\right) a - \frac{d_3}{8} a^3 \tag{III.45}$$

$$\psi' = \frac{3d_3}{8\omega_l} a^2 + \frac{3d_3}{\omega_l} \Lambda^2 \tag{III.46}$$

III.4.2. Résonance Super-harmonique $\omega = 1/3\omega_l$

Pour étudier la réponse de comportement près de la troisième fréquence naturelle $\omega = 1/3\omega_l$ on introduit le paramètre δ :

$$3\omega = \omega_l + \varepsilon \delta' \quad (III.47)$$

La formulation suivante est utilisée pour éliminer les termes séculaires :

$$3\omega T_0 = \omega_l T_0 + \delta' T_1 \quad (III.48)$$

En insérant l'équation (III.48) dans l'Eq. (III.42) et en éliminant les termes séculiers, on obtient :

$$2i\omega_l (A' + uA) + A^2 \bar{A} (3d_1 + i\omega_l d_3) + 2A\Lambda^2 (3d_1 + i\omega_l d_3) + (d_1 + i\omega_l d_3) \Lambda^3 e^{i\omega_l T_1} = 0 \quad (III.49)$$

Utilisation des équations. (III.49) et (III.44), les équations différentielles non linéaires liées à l'amplitude a et à la phase ψ sont les suivantes:

$$a' + ua + \frac{1}{8} d_3 a^3 + \Lambda^2 d_3 a = -\Lambda^3 d_3 \frac{\omega}{\omega_l} \cos(\xi) - \Lambda^3 \frac{d_1}{\omega_l} \sin(\xi) \quad (III.50)$$

$$a\xi' - a\sigma + \frac{3}{8\omega_l} d_1 a^3 + 3\Lambda^2 \frac{d_1}{\omega_l} a = \Lambda^3 d_3 \frac{\omega}{\omega_l} \sin(\xi) - \Lambda^3 \frac{d_1}{\omega_l} \cos(\xi) \quad (III.51)$$

La stabilité de la réponse est étudiée, en obtenant les points fixes des équations. (III.51) et (III.50). Ces points fixes se produisent lorsque $a' = \xi' = 0$ qui correspond à la solution de la fréquence-amplitude non linéaire et des relations de phase, sont données par :

$$\left(\delta' - \frac{3}{8\omega_l} d_1 a^2 - 3 \frac{d_1}{\omega_l} \Lambda^2 \right)^2 + \left(u + \frac{d_3}{8} a^2 + d_3 \Lambda^2 \right)^2 = \left(\Lambda^3 \frac{\omega d_3}{a\omega_l} \right)^2 + \left(\Lambda^3 \frac{d_1}{a\omega_l} \right)^2 \quad (III.52)$$

$$\tan(\zeta + \xi) = \frac{-u - (d_3/8)a^2 - \Lambda d_3}{-\delta' + (3d_1/8\omega_l)a^2 + (3\Lambda^2/\omega_l)d_1} \quad (III.53)$$

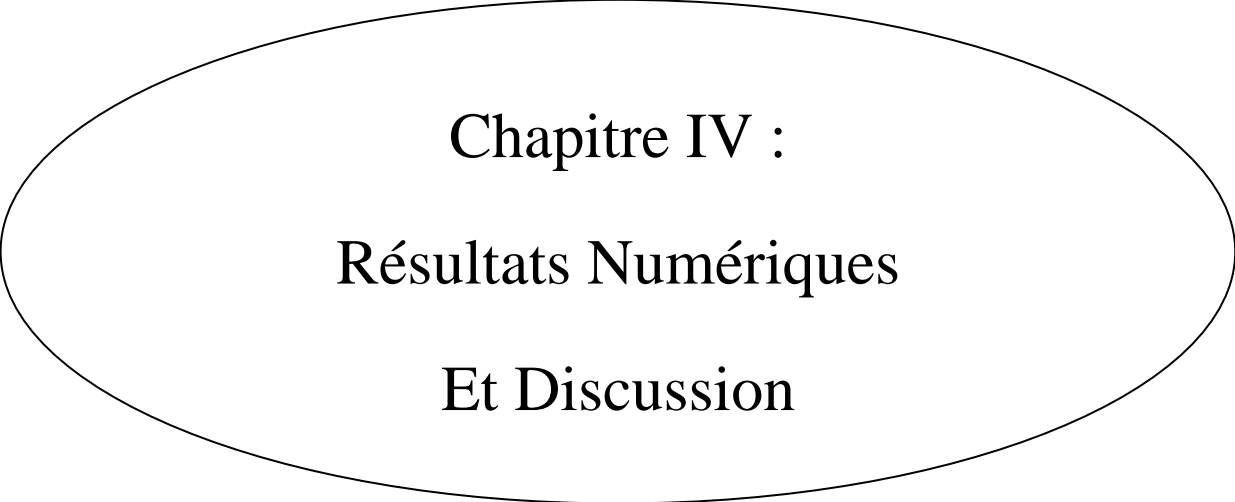
$$\tan(\xi) = \frac{d_3 \omega_l}{d_1} \quad (III.54)$$

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté un model analytique qui permet d'étudier le comportement non-linéaire en vibrations des poutres sandwichs.

Le champ de déplacement de la poutre est supposé continu aux niveaux des interfaces (Zig-Zag), la contrainte normale transversale est négligeable par rapport à la contrainte normale axiale, l'effet de cisaillement est pris en compte seulement dans la couche centrale, le déplacement transverse w est le même dans les trois couches.

Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels pour les deux cas de vibration (linéaire et non-linéaire). Pour résoudre le problème de la vibration non-linéaire, nous avons utilisé la méthode des échelles multiples. Dans le chapitre suivant, des applications numériques sur des poutres sandwichs seront réalisées.



Chapitre IV :
Résultats Numériques
Et Discussion

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous avons étudié la résonance super-harmonique des poutres sandwichs sous une excitation dure, ces poutres se présentent sous la forme d'une couche mince en matériau composite intercalée entre deux parements élastiques. Le comportement viscoélastique du matériau composite permet d'introduire la fonction amortissante de la poutre.

Des résultats obtenus pour des poutres sandwichs simplement appuyées (figure VI.1).

Le matériau composite est constitué par des matrice époxyde et des fibres de verre (Tableau IV.1)

Afin d'évaluer les modèles cinématiques associés aux fonctions de cisaillement $f(z)$, Les courbes d'amplitude-fréquence non linéaire sont présentées pour des poutres courtes ($L/H=5$) et élancées ($L/H=10$).Le calcul numérique de ces quantités pose un problème qui est lié au modèle qui devrait être capable de rendre compte du cisaillement dans la couche centrale, en permettant des modélisations avec un coût de calcul raisonnable.

Les propriétés géométriques et matérielles de la structure sont énumérées dans le tableau suivant :

Tableau IV.1: Caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre

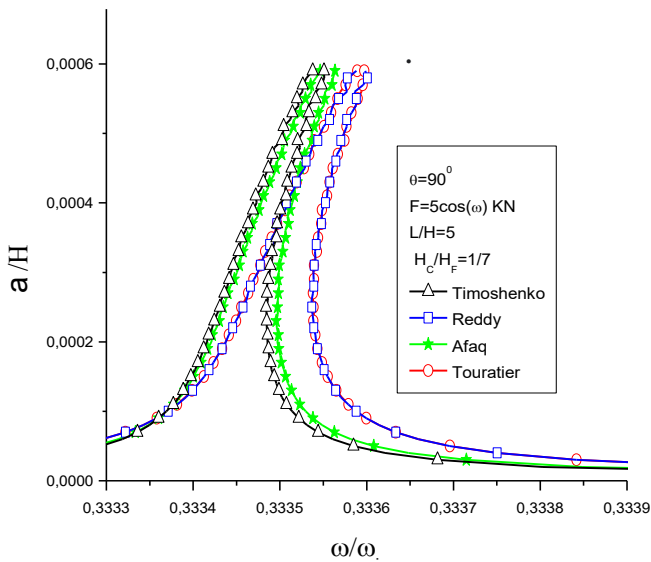
Couches élastiques	cœur composite	Dimension de la poutre
$E_f = 2.1. 10^{11} Pa$	$E_1 = 154.5 GPa$	$H_t = 0.01 m$
$\rho_f = 7800 Kg/m^3$	$E_2 = 9.9 GPa$	$b = 4H_t$
	$E_3 = 9.9 GPa$	
	$G_{12} = 7.1 GPa$	
	$\nu_{23} = 0.49$	
	$\nu_{12} = 0.35$	
	$\eta_1 = 5.7. 10^{-3}$	
	$\eta_2 = 8.5. 10^{-3}$	
	$\eta_6 = 13.2. 10^{-3}$	
	$\rho_C = 1566 Kg/m^3$	

IV.2. Résonance super-harmonique

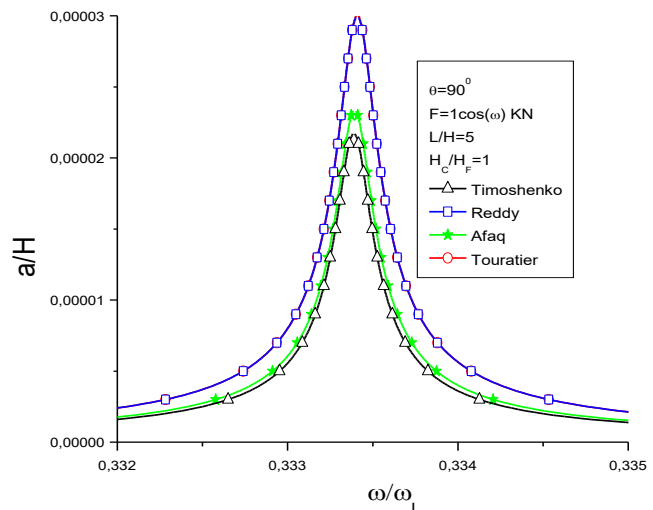
Le modèle cinématique adopté ici utilise des divers modèles de fonction de cisaillement (Tableau III.1). Les relations de fréquence-amplitude non linéaires sont établies pour différents paramètres géométriques des poutres sandwichs Eq (III. 52) simplement appuyées. Les résultats donnés par HSDT sont comparées de celles fournis par la FSDT, une attention particulière est axée sur les effets des orientations des fibres sur les changements de la rigidité.

IV.3. Résultat et discussion

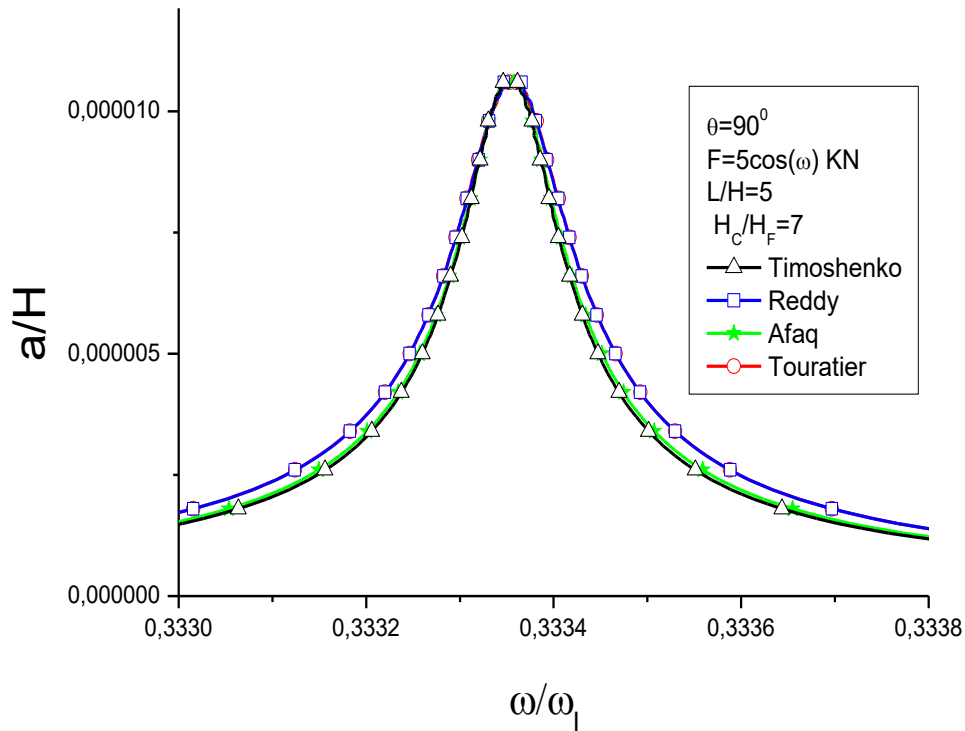
La variation du rapport de fréquence non linéaire est représentée pour les poutres sandwichs courtes avec ($L / H = 5$) sur la (figure IV.1) et les plus élancées avec $L / H = 10$ sur la (figure IV.2). Le rapport d'épaisseur H_c / H_f varié entre $1/7$, 1 et 7 . Ces valeurs correspondent respectivement à une couche centrale mince ($H_c / H_f = 1/7$), une épaisseur de couche centrale modérée ($H_c / H_f = 1$) et une couche centrale épaisse ($H_c / H_f = 7$). L'angle d'orientation des fibres de verre au couche centrale composite $\theta = 90^\circ$. Les résultats obtenus sont présentées et comparées par différents modèles cinématiques liées respectivement à différents modèles de fonction de cisaillement (Timoshenko, 1922) ; (Reddy, 1984) ; (Afaq, 2003) et (Touratier, 1991).



(a): ($H_c / H_f = 1/7$)



(b): ($H_c / H_f = 1$)



(c): ($H_c / H_f = 7$)

Figure IV.1: Courbes des réponses des poutres courtes ($L/H_t=5$) lorsque ω est proche de $\omega_{nL}/3$, selon différents modèles cinématiques.

On remarque que la (figure IV.1a) ou la couche centrale mince de la poutre sandwich ($H_c / H_f = 1/7$) sous estime l'effet durcissement comparé par rapport à celles réalisées avec les deux autres cas $H_c / H_f = 1$ et 7 comme indiqué sur les (figures IV.1b et 1c). Il a été clairement rapporté à partir de la (figure IV.1b) que les modèles de Timoshenko et d'Afaq conduisent à un comportement plus rigide par rapport à ceux présentés par les modèles de Reddy et de Touratier.

Ainsi, il a été rapporté à partir de ces résultats, une corrélation parfaite entre les résultats donnés par les modèles Reddy et Touratier. D'autre part, les résultats décrits par le modèle de Timoshenko correspondent parfaitement à ceux fournis par le modèle d'Afaq.

On remarque que ces résultats peuvent être généralisés dans le cas des poutres élancées avec ($L / H = 10$), comme le montre la figure (IV.2)

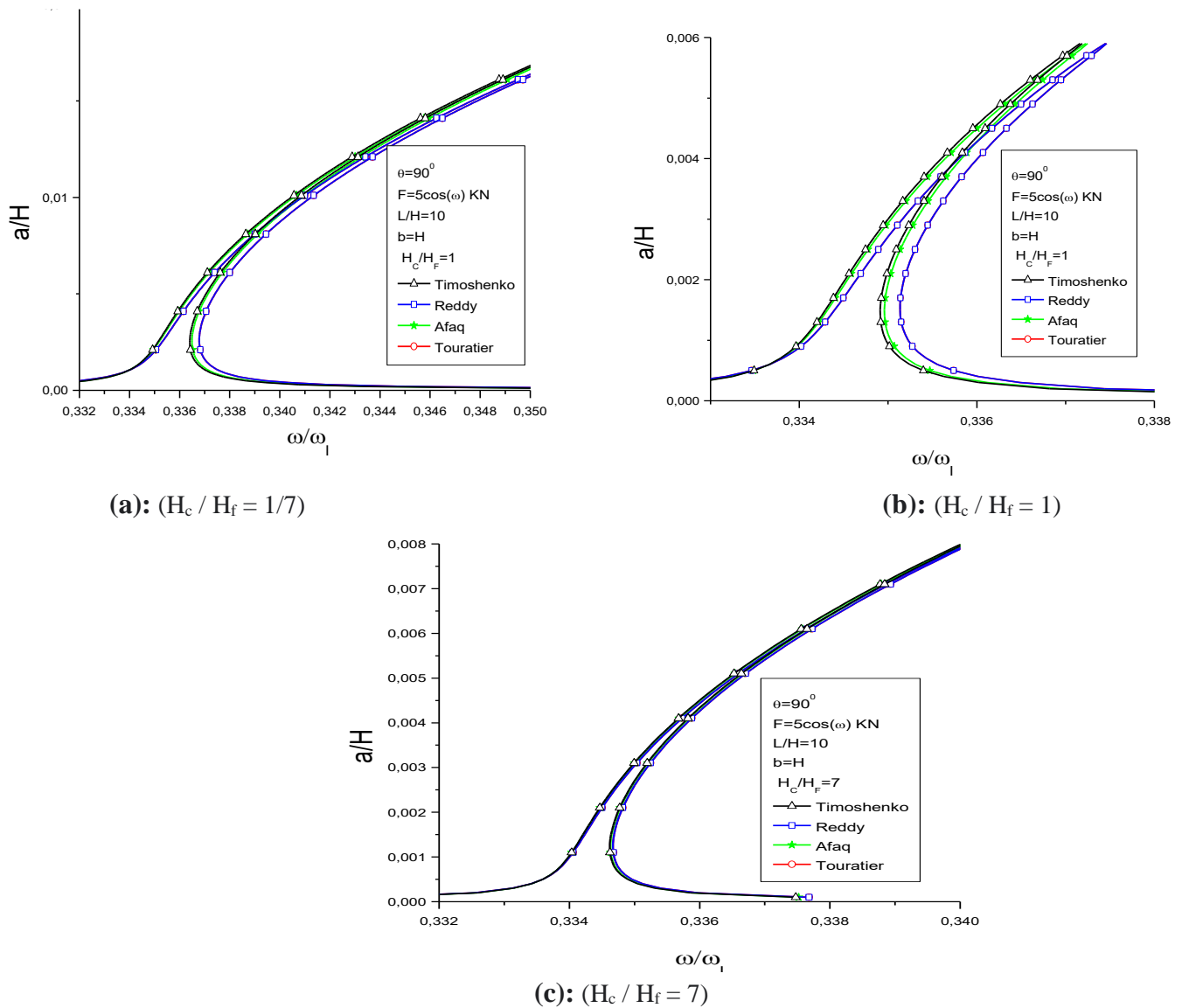


Figure IV.2: Courbes des réponses des poutres courtes ($L/H_f=10$) lorsque ω est proche de $\omega_{nL}/3$, selon différents modèles cinématiques

Dans ce cas lié à des poutres élancées, un comportement plus important est enregistré par les poutres sandwich, que ce soit avec couches centrales épaisses et minces. Il convient de noter que la présence de l'effet de durcissement dans les poutres élancées peut être attribuée à la non-linéarité géométrique qui caractérise ces types de structures.

Une grande attention a été accordée à l'effet de l'angle d'orientation des fibres θ sur l'amplitude des vibrations sur les figures (IV.3 a, b et c). Ces figures montrent la variation des amplitudes de vibration, fournies par des stratifiés de couche centrale minces ($H_c / H_f = 1/7$)

modérés ($H_c / H_f = 1$) et épais ($H_c / H_f = 7$) ayant d'orientation d'angle des fibres a différente θ , variant à $\theta = 90^\circ$, 45° et 0° .

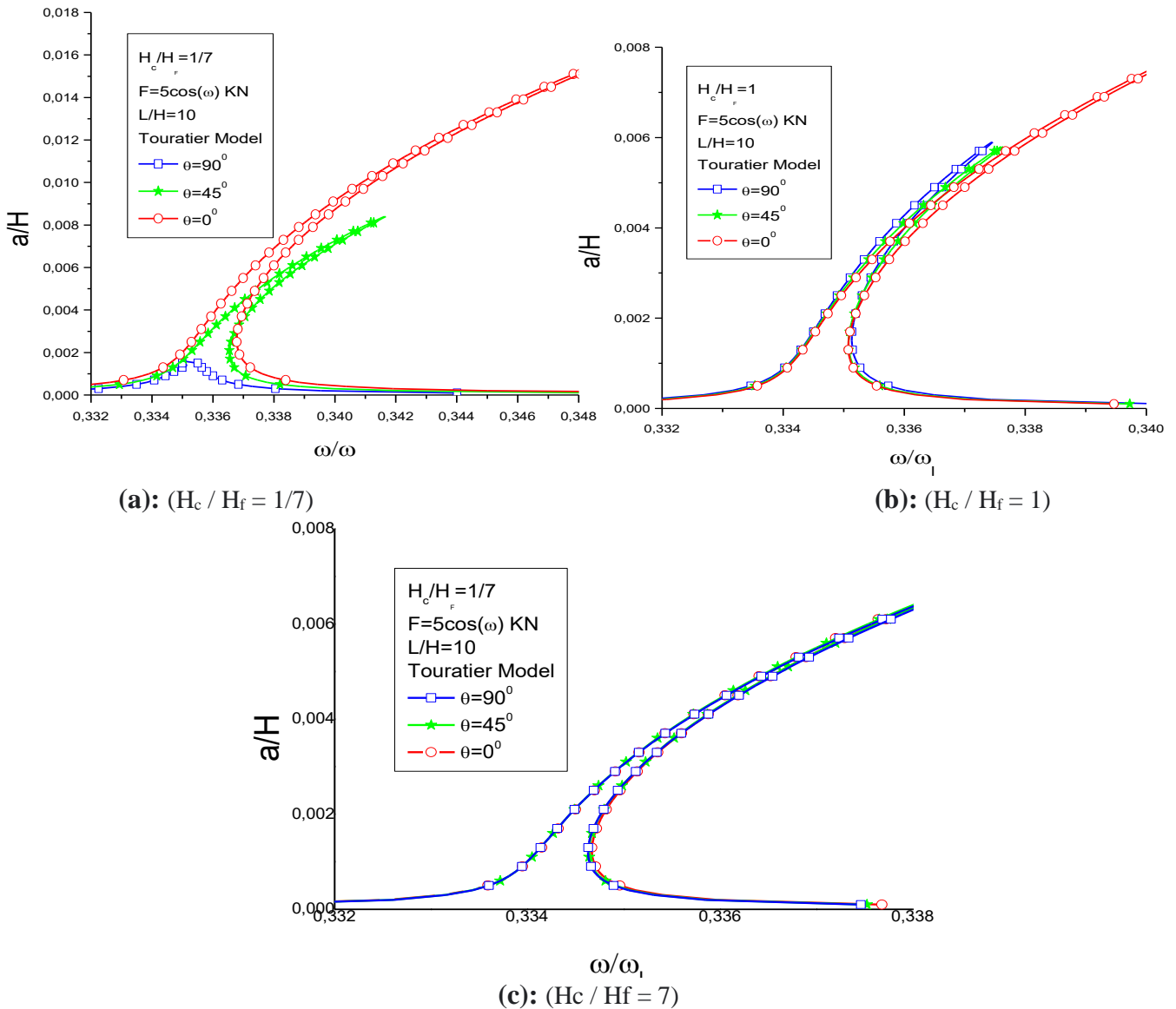


Figure IV.3: Courbes des réponses des poutres courtes ($L/H_f=10$) lorsque ω est proche de $\omega_{nL}/3$, avec d'orientation des fibres différent θ par le modèle de Touratier .

On observe sur la figure (IV.3a), une sensibilité plus clair pour les poutres a cœur mince ($H_c / H_f = 1/7$) aux vibrations super-harmoniques pour différentes orientations des fibres θ .

En effet, cette sensibilité se caractérise par une amplification de déplacement importante de la poutre sandwich avec $\theta = 0^\circ$. Il a été indiqué à partir de cette figure que pour les poutres à cœur mince, l'amplitude de déplacement diminue lorsque θ augmente, jusqu'à atteindre la

valeur de $\theta = 90^\circ$. Pour cette valeur de l'angle $\theta = 90^\circ$, la réponse structurelle au problème des vibrations super-harmoniques a tendance à disparaître.

La figure (IV.3.b) illustre une petite dépendance des réponses de la courbe de résonance dans les vibrations super-harmoniques à l'angle θ , obtenu par la poutre stratifié avec une épaisseur de couche centrale modérée ($H_c / H_f = 1$). Nous soulignerons ici que les poutres avec $\theta = 45^\circ$ et 90° subissent la même réponse de résonance, inversement à celle avec $\theta = 0^\circ$, qui présente une amplification de déplacement importante. À son tour, une autre tendance est enregistrée sur la (figure IV.3.c), qui démontre que l'angle θ n'affecte pas les vibrations d'amplitude des couches centrales épaisses.

Dans ce contexte, il a été trouvé à partir de cette étude, que la contribution matérielle de ces structures peut être omise pour l'évaluation des réponses dynamiques dans le cas super-harmonique.

L'effet de l'amplitude de la force d'excitation sur l'effet de durcissement est représenté sur la (figure IV.4)

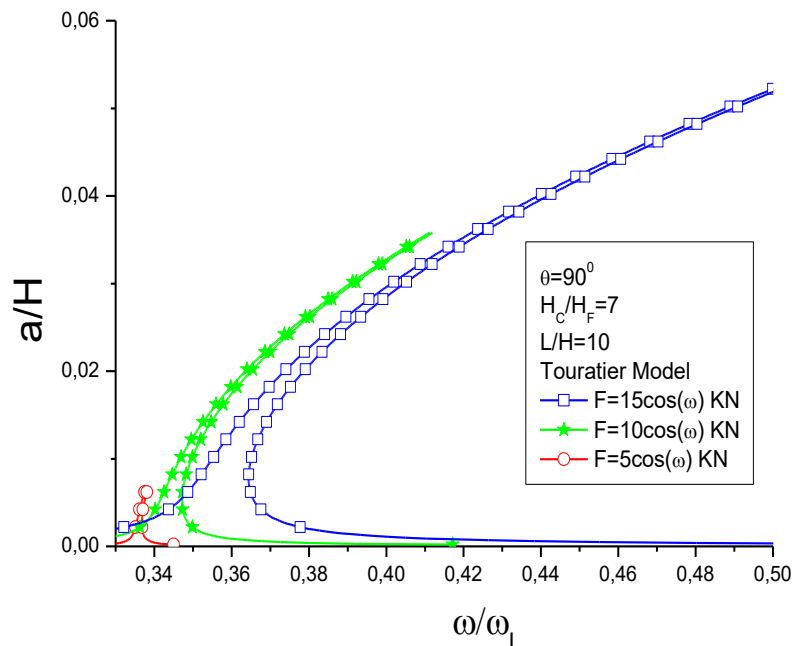


Figure IV.4: Courbes des réponses des poutres lorsque ω est proche de $\omega_{nL}/3$, pour différents amplitudes d'excitation F .

Cette figure présente l'influence de l'amplitude de l'excitation F sur les réponses d'amplitude – fréquence. Ces figures montrent que le pic d'amplitude augmente avec l'excitation F .

IV.4. Conclusion

L'analyse dynamique non linéaire des poutres composites sandwichs a été étudiée dans ce travail. Les HSDT et la méthode de zig-zig ont été utilisées pour le champ de déplacement sur la base de la méthode des échelles multiples, les résonances super-harmoniques sont analysées, en résolvant le système d'équations différentielles non linéaires.

Les propriétés matérielles des matériaux composites ont également une grande influence sur le changement de durcissement, par conséquent, le cœur est mou pour un angle d'orientation des fibres de 90^0 , est plus approprié pour contrôler passivement l'amplitude de vibration de poutre stratifiée, en particulier, dans le cas d'excitation de grande amplitude.

Conclusion générale

Un phénomène intéressant dans les matériaux composites est la dissipation interne d'énergie lorsqu'ils sont soumis à des vibrations ou en d'autres mots, leur amortissement interne. Il est connu qu'un amortissement interne élevé permet de **limiter l'amplitude** des vibrations d'une structure lorsqu'elle est sollicitée dynamiquement.

Le comportement viscoélastique du matériau composite permet d'introduire la fonction amortissant de la poutre sandwich.

Dans le cadre de ce travail, nous avons présenté une analyse des vibrations non linéaires est réalisée pour les poutres sandwich à couches d'âme composites, sous excitation harmonique, pour étudier le problème de vibration secondaire dans le cas de la résonance super-harmonique, proche de $1 / (3\omega_{nl})$.

Nous avons développé notre étude suivant deux axes :

Premièrement, une formulation analytique permet décrire l'équations d'équilibres des poutres sandwichs en résonance super-harmonique définies par plusieurs coefficients complexes, avec un non linéarité géométrique, l'effet de cisaillement est pris en considération par l'utilisation de la théorie **zig-zag** d'ordre supérieur en conjonction avec la méthode à échelles multiples sont utilisées comme stratégie de solution. Ensuite, une relation de fréquence d'amplitude non linéaire scalaire a été déterminée au moyen de la technique de transformation modale appliquée au mode fondamental de vibration .

Deuxièmement, nous avons détaillé la mise en œuvre de la méthode d'équilibrage harmonique couplée avec la technique de Galerkin et la méthode de superposition a un seul mode pour résoudre les équations d'équilibres.

La non-linéarité géométrique conduit à une équation d'amplitude fréquentielle non linéaire définie par plusieurs coefficients complexes.

Deuxièmement, nous avons analysé la résonance des poutres dans les cas des grandes et petites amplitudes, les courbes de fréquences présentées et discutées pour différentes propriétés géométriques et matérielles.

La théorie d'ordre élevé enrichit calcul des structures sandwichs stratifiées et ont permis une bonne estimation des propriétés de ces structures , les paramètres géométriques ont des effets importants sur durcissements .

. Les résultats obtenus indiquent que les poutres sandwich ayant une couche centrale épaisse sont moins sensibles au cas des vibrations super harmoniques. Contrairement aux poutres sandwich à couche mince.

L'étude de l'effet d'orientation de l'angle de fibre sur la réponse de résonance dans le cas super-harmonique démontre l'importance de ce paramètre pour réduire autant que possible la réponse aux vibrations des poutres ont cœurs mince, en adoptant l'orientation de la fibre conforme à la direction faible donné par $\theta = 90^\circ$. On peut conclure de cette étude que la conception la plus efficace de poutre stratifiée sandwich, soumise à une excitation dynamique dure, consiste à recourir à une couche composite mince aux propriétés mécaniques douces afin d'éviter les vibrations super-harmoniques. Cette étude peut fournir des lignes directrices utiles, suffisamment pour être utilisées dans la phase de conception des structures de poutres sandwich.

Références bibliographiques

- Ambartsumyan S.A. (1969).** “Theory of Anisotropic Plate. Economic Publishing Co.
- Afaq, K. M. Karama, S. Mistou. (2003)** “Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes rendues des 13eme journées nationales sur les composites”, Strasbourg; p.289–292.
- Abualnour, M., Houari, M. S. A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2018).** “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates”. *Composite Structures.*, 184, 688-697. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.047>
- Abualnour, M., Chikh, A., Hebali, H., Kaci, A., Tounsi, A., Bousahla, A. A., & Tounsi, A. (2019).** “Thermomechanical analysis of antisymmetric laminated reinforced composite plates using a new four variable trigonometric refined plate theory”. *Computers and Concrete.*, 24(6), 489-498. <http://dx.doi.org/10.12989/cac.2019.24.6.489>
- Benferdi, S.(2010).** “Caractérisation du comportement micromécanique d’un matériau composite par différentes approches mathématiques. Mémoire de magister en Génie Mécanique, Université MENTOURI Constantine Algérie.
- Bensaid, I., Kerboua, B. & Cheikh, A.(2014a).** “Interfacial stresses analysis of damaged structures strengthened with bonded prestressed FRP plate having variable fiber spacing. *International Journal of Structural Integrity*, 6(2), pp. 159-175.
- Baker, A.(1984).** “Repair of cracked or defective metallic aircraft components with advanced fibre composites—an overview of Australian work. *Composite Structures, Volume 2*, pp. 153- 181.
- Balay, C., Grohens, Y. & Pillin, I.(2004).** “ Etat de l’art sur les matériaux composites biodégradables. *Revue des Composites et des Matériaux Avancés, Volume 14*, pp. 135-166.
- Billoët, J. L.(1993).** “Introduction aux matériaux composites à hautes performances.
- Bensaid S.(2006).** “Contribution à la caractérisation et à la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotrope, *Engineering Sciences*, Hal id : tel-00424804, Université de Nantes,. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00424804>.
- Bilasse M. (2010).** “Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs âme viscoélastique”, Thèse de Doctorat a l’Université Paul Verlaine de Metz.
- Benamar R., M.M.K. Bennouna, et R.G. White. (1991).** “The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures - part 1 : simply supported and clamped-clamped beams”. *Journal of Sound and Vibration*, 149(2) :179–195.

- Benamar . R, M.M.K. Bennouna, et R.G. White.(1993).** “The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures - part 2: fully clamped isotropic plates”. *Journal of Sound and Vibration*, 164(2):295–316.
- Bennett J.A. et J.G. Easley. (1970).** “A multiple degree of freedom approach to nonlinear beam vibration”, *AIAA Journal*, 8 :734–739.
- Boumediene. F.(2010).** “Méthode asymptotique numérique et techniques de réduction de modèles pour les vibrations non linéaires de plaques minces amorties”, *Thèse de Doctorat a l’Université de Bretagne sud*.
- Belouettar, S., Azrar, L., Daya, E. M., Laptev, V., & Potier-Ferry, M. (2008).** “Active control of nonlinear vibration of sandwich piezoelectric beams”: A simplified approach. *Computers & structures* ., 86(3-5), 386-397. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.02.009>
- Bilasse, M., Daya, E. M., & Azrar, L. (2010).** “ Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams”. *Journal of Sound and vibration* ., 329(23), 4950-4969. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.06.012>
- Bhimaraddi, A. (1995).** “Sandwich beam theory and the analysis of constrained layer damping”. *Journal of sound and vibration.*, 179(4), 591-602. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0039>
- Cho M., and Parmarter R.R.(1993).** “Efficient higher order composite plate theory for general lamination configuration”,. *AIAA Journal*, 31: 1299-1306.
- Christensen R. M.(1982).** “Theory of viscoelasticity”,:an introduction. Academic Press, New York.
- Chawla, K. K.(2013).** “Composite Materials Science and Engineering. s.l.:Springer.
- Christensen.R .M.(1971).** “Theory of Viscoelasticity”, Academic, New York.
- Daya, E. M., Azrar, L., & Potier-Ferry, M. (2004).** “An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams”. *Journal of Sound and Vibration* ., 271(3-5), 789-813. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00754-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00754-5).
- Di Sciuva. M. (1986).** “Bending, vibration and buckling of simply supported thick multi-layered orthotropic plates. An evaluation of a new displacement model. *Journal of Sound and Vibration*”, vol. 105, no. 3, pages 425-442.
- Diaz Diaz, A. J.F. Caron & R.P. (2002).** “Carreira. Software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges. *Composite Structures*”,vol. 58,pages 195-208.
- Daikh, A. A., Draï, A., Houari, M. S. A., & Eltaher, M. A. (2020).** “Static analysis of multilayer nonlocal strain gradient nanobeam reinforced by carbon nanotubes”. *Steel and Composite Structures.*, 36(6), 643-656. <https://doi.org/10.12989/scs.2020.36.6.643>.
- Di Sciuva M.(1984).** “A reffined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*”, vol. 118, pages 279-295.

- Emam, S. A., & Nayfeh, A. H. (2009).** “ Postbuckling and free vibrations of composite beams”. *Composite Structures* , 88(4), 636-642.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.06.006>
- Guy Villard. (1972).** “ Notions de résistance des matériaux Tome I ” N° d’édition: 262/72, p 48.
- Gibson, R. F., & Wilson, D. G. (1979) .** “Dynamic mechanical properties of fiber-reinforced composite materials”. *Shock and Vibration Digest*, 11(10).
- Hashin Z. (1965).** “Viscoelastic behaviour of heterogeneous media”, *Journal of Applied Mechanics*, 32, p 630.
- Hwang S. J. et R. F. Gibson. (1987).** “Micromechanical modelling of damping in discontinuous fiber composites using a strain energy / finite element approach”, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 109, pp 47-52.
- Hutchinson.J.R.(1988).** “ Vibration of plates. invited paper”, BEM X, Springer-verlag, vol 4.
- Han .W. et M. Petyt. (1997a).** “Geometrically nonlinear vibration analysis of thin rectangular plates using the hierarchical finite element method - 1 : the fundamental mode of isotropic plates”. *Journal of Computers and structures*, 63(2):295–308.
- Han .W. et M. Petyt. (1997b).** “Geometrically nonlinear vibration analysis of thin rectangular plates using the hierarchical finite element method - 2 : 1st mode of laminated plates and higher modes of isotropic and laminated plates”, *Journal of Computers and structures*, 63(2) :309–318.
- Houari, M. S. A., Bessaim, A., Bernard, F., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2018).** “Buckling analysis of new quasi-3D FG nanobeams based on nonlocal strain gradient elasticity theory and variable length scale parameter”. *Steel and Composite Structures.*, 28(1), 13-24.
<https://doi.org/10.12989/scs.2018.28.1.013>
- Hyer, M. W., Anderson, W. J., & Scott, R. A. (1976).** “ Non-linear vibrations of three-layer beams with viscoelastic cores I. Theory”. *Journal of Sound and Vibration.*, 46(1), 121-136.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90822-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90822-1).
- Hu, H., Belouettar, S., & Potier-Ferry, M. (2008).** “Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites”. *Composite Structures.*, 84(3), 282-292.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.08.007>.
- Koutsawa Y.(2008).** “Modélisation et conception multi échelles des matériaux : de la description atomique discrète aux modèles du continu. Application aux Propriétés amortissantes des pare-brises”, Thèse de Doctorat a l’Université Paul Verlaine de Metz.
- Kerwin E.M .(1959).** “Damping of flexural waves by a constrained visco-elastic layer. *J.Acoust. Soc. Am.*, 31(7):952–962.
- Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H. and Nouri, A. (2017b).** “Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory”, *Int. J. Mech. Sci.*, 130, 534-545.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.06.039>

- Khanin, R., Cartmell, M., & Gilbert, A. (2000)** . “A computerised implementation of the multiple scales perturbation method using Mathematica” . *Computers & Structures.*, 76(5), 565-575. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00184-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00184-4).
- Kolahchi, R. (2017)**. “A comparative study on the bending, vibration and buckling of viscoelastic sandwich nano-plates based on different nonlocal theories using DC, HDQ and DQ methods”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 66, 235-248. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.03.016>.
- Kapuria, S., Dumir, P. C., & Jain, N. K. (2004)**. “Assessment of zigzag theory for static loading, buckling, free and forced response of composite and sandwich beams”. *Composite structures.*, 64(3-4), 317-327. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.08.013>.
- Kovac Jr, E. J., Anderson, W. J., & Scott, R. A. (1971)**. “Forced non-linear vibrations of a damped sandwich beam” . *Journal of Sound and Vibration* ., 17(1), 25-39. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(71\)90131-3](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90131-3)
- Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H. and Oskouei, A.N. (2017a)**. “Viscononlocalrefined Zigzag theories for dynamic buckling of laminated nanoplates using differential cubature-Bolotin methods”, *Thin-Wall. Struct.*, 113, 162-169. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.01.016>
- Ledru, Y.(2009)**. “Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés Aéronautiques.
- Lewandowski R.(1992)** “Non-linear, steady-state vibration of structures by harmonic balance/finite element method”, *Journal of Computers and structures*, 44(1) :287–296.
- Liew K.M., Y. Xiang, et S. Kitipornchai.(1995)**. “Research on thick plate vibration :a literature survey”. *Journal of Sound and Vibration*, 180(1) :163–176.
- Lau S.L. et Y.K. Cheung. (1981)**. “Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems”. *Journal of Applied Mechanics*, 48 :959–964.
- Langley. R.S.(1988)**. “Harmonic linearisation of geometrically non-linear finite element models”, *Journal of Computers and Structures*, 28(2) :165–172.
- Lau .S.L., Y.K. Cheung, et S.Y. Wu. (1984)**. “Nonlinear vibration of thin elastic plates part 2 :Internal resonance by amplitude-incremental finite element”, *Journal of Applied Mechanics*, 51 :845–851.
- Lewandowski R. (1994)**. “Solutions with bifurcation points for free vibration of beams : an analytical approach”, *Journal of Sound and Vibration*, 177(2) :239–249.
- Leissa A.W.(1973)**. “The free vibration of rectangular plates”. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3) : 257–293.
- Mandel J. (1955)**. “Sur les corps viscoélastiques linéaires à comportement linéaire”., *C.R. As. Sc. Paris*,.
- Matter. M.(2008)**. “Identification modale numérique-expérimentale des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites”, *Thèse Doctorat a École polytechnique Fédérale de Lausanne*.

Murakami. H. (1986). “Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *Journal of Applied Mechanics*”, vol. 53, pages 661-666.

Nayfeh S. Sridhar, D.T. Mook, et A.H. Nayfeh. (1975). “Non-linear resonances in the forced response of plates, part i : symmetric responses of circular plates”. *Journal of Sound and Vibration*, 41(3) : 359–373.

Ossadzow ,C. M. Touratier. (2001). “An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. *Composite Structures*”, vol. 52, pages 85-95.

Pagano. N.J.(1978). “Stress laminates. *International Journal of Solids and Structures*”, vol. 14, page 385.

Pipkin A.C. (1972). “Lectures on Viscoelasticity”, Theory. Springer-Verlag, New York.

Perrot Y.(2006). “Contribution à l'étude des matériaux composites utilisés en construction navale de plaisance, Thèse de l'Université de Bretagne Sud, U.F.R Sciences et Sciences de l'Ingénieur.

Reissner E(1975). “On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation”, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.

Ribeiro P.(1998). “Geometrical nonlinear vibration of beams and plates by the hierarchical finite element method. PhD thesis”, University of Southampton - Institute of Sound and Vibration Research.

Reddy J.N. (1987). “A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates”. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173-180.

Ribeiro. P. et M. Petyt. (1999). “Geometrical non-linear, steady state, forced, periodic vibration of plates, part 1 : model and convergence studies”, *Journal of Sound and Vibration*, 226(5) : 955–983.

Ramesh .T.,N.Ganesan.(1994). “Orthotropic cylindrical shells with a viscoelastic core: a vibration and damping analysis”, *J Sound Vib*, Vol 175, No 4, 535-555.

Reddy, J. N. (1984) . “A simple higher-order theory for laminated composite plates”. *J Appl Mech.* , 1984: 51:745–52. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>

Reissner, E. (1945). “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”. *J. appl. Mech.*, A69-A77.

Rao, D. K.(1978). “Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions”. *Journal of Mechanical Engineering Science.*, 20(5), 271-282. <https://doi.org/10.1243/JMES JOUR 1978 020 047 02>.

Rikards, R. (1993). “Finite element analysis of vibration and damping of laminated composites”. *Composite structures.*, 24(3), 193-204. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(93\)90213-A](https://doi.org/10.1016/0263-8223(93)90213-A)

Spaulding K.B. April (1966). “Fiber glass Boats in Naval Service, *Naval Engineers Journal*, , volume 78, numéro 2, pp 333-342.

Soltani, K., Bessaim, A., Houari, M. S. A., Kaci, A., Benguediab, M., Tounsi, A., & Alhodaly, M. S. (2019). “A novel hyperbolic shear deformation theory for the mechanical buckling analysis of advanced composite plates resting on elastic foundations”. *Steel and Composite structures.*, 30(1), 13-29. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.1.013>.

Szemplinska W. -Stupnicka. (1990). “The behavior of nonlinear vibrating systems - Volume I – Fundamental concepts and methods : application to single-degree-of-freedom systems. Kluwer academic publishers”.

Srinivasan A.V.(1966). “Non-linear vibrations of beams and plates”. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1 :179–191.

Sridhar. S., D.T. Mook, et A.H. Nayfeh. (1975). “Non-linear resonances in the forced response of plates, part i : symmetric responses of circular plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 41(3) : 359–373.

Seide. P.(1980). “An improved approximate theory for the bending of laminated plates. *Mech Today*”, vol. 5, pages 451-466.

Srinivas .S. & A.K. Rao.(1973). “Flexure of thick plates. *ASME*”, pages 298-299.

Salençon J.(1983). “Viscoélasticité”, *Presse de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris*.

Teknea. (1989). “Matériaux composites : Introduction à l'usage des ingénieurs et des techniciens, *Ecrit par la Société Européenne de Propulsion (S.E.P), éditeur TEKNEA, , ISBN : 9782877170079, p 288.*

Timoshenko, S.P.Goodier,J.N. (1970). “Theory of elasticity”, 3rd ed. McGraw- Hill, New York.

Touratier, M. (1991). “An efficient standard plate theory”. *International journal of engineering science.*, 29(8), 901-916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y)

Timoshenko, S. P. (1922). X. “On the transverse vibrations of bars of uniform crosssection”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.*, 43(253), 125-131.

Van Dooren R. et R. Bouc.(1975). “Two modes subharmonic and harmonic vibrations of a nonlinear beam forced by a two mode harmonic load”, *International Journal of nonlinear mechanics*, 10 :271–280.

Whitney JM. (1973). “Sun CT.A higher order theory for extensional motion of laminated composites”, *J Sound Vib*; 30: 85–97.

White R.G.(1971). *Effects of non-linearity due to large deflections in the resonance testing of structures*”. *Journal of Sound and Vibration*, 16(2) :255–267.

Worden. K.(1996). *On jump frequencies in the response of the duffing oscillator. Journal of Sound Vibration*”, 198(4):522–525.

Youzera, H., Meftah, S. A., Challamel, N., & Tounsi, A. (2012). “Nonlinear damping and forced vibration analysis of laminated composite beams”. *Composites Part B: Engineering.*, 43(3), 1147-1154. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.008>.

Youzera, H., & Meftah, S. A. (2017) . “Nonlinear damping and forced vibration behaviour of sandwich beams with transverse normal stress”. *Composite Structures* ., 179, 258-268. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.07.038>

Youzera, H., Meftah, S. A., & Daya, E. M. (2017) . “Superharmonic resonance of cross-ply laminates by the method of multiple scales”. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.*, 12(5). <https://doi.org/10.1115/1.4036914>

Zouggar K.(2016). “Etude du comportement mécanique d'une plaque composite de type verre/polyester soumise à un impact à faible énergie, thèse de doctorat, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés, Algérie.

Zinoviev, P. A., & Ermakov, Y. N. (1994). “Energy dissipation in composite materials”. *CRC Press*.