

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Soutenue par

ALLAM Othmane

Sujet de thèse :

**ÉTUDE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE
DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIÉES
AVEC L'EFFET DE GAUCHISSEMENT**

Soutenue le : 20 / 12 / 2021, devant le Jury composé de :

M. BOURADA Mohamed	Professeur UDL SBA	Président
M. DRAICHE Kada	Professeur UIK TIARET	Directeur de thèse
M. TOUNSI Abdelouahed	Professeur UDL SBA	Co-directeur de thèse
M. BENYOUCEF Samir	Professeur UDL SBA	Examineur
M. ZIDOUR Mohamed	Professeur UIK TIARET	Examineur
M. BENSATTALAH Tayeb	MCA UIK TIARET	Examineur

Année universitaire : 2021-2022

Remerciements

Avant tout, LOUANGE À DIEU !

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur TOUNSI Abdelouahed, Professeur à l'université (UDL), pour avoir bien voulu accepter la tâche du rapporteur de cette thèse et pour m'avoir guidé tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur DRAICHE Kada, Maître de conférences (UIK), Je la remercie vivement de sa disponibilité de tous les instants qui ont rendu ce travail possible. Quel trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur BOURADA Mohamed, Professeur à l'université (UDL) et directeur du Laboratoire LM&H, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie également Monsieur BENYOUCEF Samir, Professeur à l'université (UDL), Monsieur ZIDOUR Mohamed, Professeur à l'université (UIK) et Monsieur BENSATTALAH Tayeb, Maître de conférences (UIK), d'avoir accepté d'être membre du jury de cette thèse.

Mes pensées vont pareillement à tous les personnels du laboratoire de recherche des Matériaux & Hydrologie (enseignants, doctorants, magisters et techniciens) pour leur accueils et aide dans la réalisation de mon travail, et à tous les autres personnels que j'ai rencontrés.

Ces remerciements ne seraient pas complets si je ne citais pas les personnes qui ont eu à supporter tous les hauts et les bas qui se sont succédé tout au long de ce travail.

Enfin, pour leur soutien très précieux de tous les instants, j'associe à ce travail mes parents ainsi que toute ma famille, à eux je l'offre et à tous mes amis.

ملخص

هذا البحث مخصص لدراسة سلوك الانحناء والاهتزاز الحر للصفائح والأغلفة المركبة / الساندويتش، من خلال تطبيق نموذج تحليلي مبني على نظرية إجهاد القص البسيطة والمعممة ذات الترتيب العالي (RHSDT) مع أربعة متغيرات غير معروفة مستقلة. يتم تحديد حركات النموذج النظري المقترح من خلال مكون متكامل غير محدد ويستخدم وظيفة الشكل الزائدي لتضمين تأثيرات ضغوط القص المستعرض من خلال سمك اللوحة / الغلاف؛ لذلك، فإن عامل تصحيح القص ليس ضروريًا.

يتم اشتقاق المعادلات التفاضلية المهيمنة وشروط الحدود المرتبطة بها باستخدام مبدأ العمل الافتراضي ويتم حلها من خلال التحليل التحليلي لإجراء نوع نافير للتحقق من صحة وقابلية تطبيق هذه النظرية المكررة، تم تقديم بعض النتائج العددية المتعلقة بعمليات الإزاحة والضغوط والترددات الأساسية للألواح والأغلفة المركبة / الساندويتش المدعومة ببساطة ومقارنتها مع تلك التي حصلت عليها النماذج الأخرى والإجهاد القص الذي تم تناوله في هذه المقالة.

يمكن من التحليل أن نستنتج أن الحركة القائمة على المكون المتكامل غير المحدد فعالة للغاية، ويؤدي استخدامها إلى تحقيق دقة أكبر من النماذج التقليدية في دراسة الألواح والأصداف المصفحة.

الكلمات الرئيسية: انثناء، اهتزاز حر، مركب مصفح، ساندويتش؛ الصدف.

Abstract

This research is devoted to investigate the bending and free vibration behaviour of laminated composite/sandwich plates and shells, by applying an analytical model based on a generalized and simple refined higher-order shear deformation theory (RHSDT) with four independent unknown variables. The kinematics of the proposed theoretical model is defined by an undetermined integral component and uses the hyperbolic shape function to include the effects of the transverse shear stresses through the plate/shell thickness; hence a shear correction factor is not required.

The governing differential equations and associated boundary conditions are derived by employing the principle of virtual work and solved via Navier-type analytical procedure. To verify the validity and applicability of the present refined theory, some numerical results related to displacements, stresses and fundamental frequencies of simply supported laminated composite/sandwich plates and shells are presented and compared with those obtained by other shear deformation models considered in this work.

From the analysis, it can be concluded that the kinematics based on the undetermined integral component is very efficient, and its use leads to reach higher accuracy than conventional models in the study of laminated plates and shells.

Keywords: bending; free vibration; laminated composite; sandwich; shell

Résumé

Cette recherche est consacrée à étudier le comportement de flexion et de vibration libre des plaques lamine composite / sandwich et coques, en appliquant un modelé analytique basé sur une simple théorie généralisée et raffinée de déformation en cisaillement d'ordre élevé (RHSDT) avec quatre variables inconnues indépendantes. La cinématique du modèle théorique proposé est définie par un composant intégral indéterminé et utilise la fonction de forme hyperbolique pour inclure les effets des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque / coque ; par conséquent, un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

Les équations différentielles de mouvement et les conditions aux limites associées sont dérivées en employant le principe des travaux virtuels et résolues via la procédure analytique de type Navier. Pour vérifier la validité et l'applicabilité de la présente théorie raffinée, certains résultats numériques liés aux déplacements, les contraintes et les fréquences fondamentales des plaques et coques stratifiées composites / sandwich simplement appuyées sont présentées et comparées par rapport à ceux obtenus par d'autres modelés de déformation en cisaillement considérés dans ce travail.

D'après l'analyse, il peut être conclu que la cinématique basée sur la composante intégrale indéterminée est très efficace, et son utilisation conduit à atteindre des précisions que les modèles conventionnels dans l'étude des plaques et coques laminées.

Mots-clés : flexion, vibration libre, composite stratifié, sandwich, coque.

Remerciements

ملخص

Abstract

Résumé

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	16
Chapitre 1 : Les matériaux composites.....	20
1.1 Introduction.....	20
1.2 Description des constituants élémentaires des composites.....	21
1.3 Matériaux composites.....	21
1.3.1 Les renforts.....	22
1.3.1.1 Architecture des renforts	24
1.3.2 La matrice	25
1.3.2.1 Interfaces.....	27
1.3.2.2 Charges – additifs	27
1.4 Les matériaux composites structuraux	28
1.4.1 Les monocouches	28
1.4.2 Les stratifiés.....	29
1.4.3 Les sandwiches	29
1.5 Les avantages et inconvénients des matériaux composites	30
1.6 Les domaines d’application des composites	30
1.7 Mise en œuvre des matériaux composites	35
1.8 Endommagement des matériaux composites.....	36
1.9 Loi de comportement.....	37
1.9.1 Matériau anisotrope.....	37
1.9.2 Matériau monoclinique.....	37
1.9.3 Matériau orthotropique	38
1.9.4 Matériau transversalement isotrope	38
1.9.5 Matériau isotrope.....	39
1.10 Conclusion	39
Chapitre 2 : Aperçu sur les composites stratifiés.....	40
2.1 Introduction.....	40
2.2 Architecture des stratifiés	41
2.3 Qu’est-ce qu’un composite stratifié ?.....	42

2.4	Les différents types des stratifiés	42
2.6	Expression des résultantes et moments	44
2.6.1	Résultantes en membrane	44
2.6.2	Moments par unité de longueur	46
2.7	Rupture des stratifiés composites sous l'effet de plusieurs phénomènes	47
2.7.1	Rupture intralaminaire	49
2.7.2	Rupture interlaminaire	50
2.7.3	Rupture translaminaire	50
2.7.3.1	Rupture translaminaire en traction	51
2.7.3.2	Rupture translaminaire en compression	51
2.8	Conclusion	51
Chapitre 3 : Modèles et théories des plaques		52
3.1	Introduction.....	52
3.2	Définition des plaques.....	53
3.3	Synthèse sur les théories.....	53
3.4	Facteurs de correction du cisaillement transversal	56
3.5	Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur	56
3.5.1	Théorie des plaques stratifiées	58
3.5.1.1	Les modèles classiques Love-Kirchhoff (Plaques Stratifiées CLPT)	59
3.5.1.2	Les modèles Reissner-Mindlin (Théorie de Déformation en Cisaillement du Premier Ordre FSDT)	60
3.5.1.3	La théorie d'ordre élevé (Modèle d'Ordre Supérieur)	62
3.5.2	Approche par couche	66
3.5.3	Les modèles Zig-Zag.....	67
3.6	Modèles éléments finis des structures multicouches.....	69
3.6.1	Modèles éléments finis 2D.....	69
3.6.2	Modèles éléments finis 3D.....	71
3.7	Conclusion	72
Chapitre 4 : Formulation théorique pour l'analyse des plaques composites stratifiées et sandwiches et coques		73
4.1	Introduction.....	73
4.2	Les mouvements vibratoires	74
4.2.1	Principales sources de vibrations	74
4.3	Aperçu sur des travaux de recherche.....	74
4.4	Formulation théoriques et équations de base	76

4.4.1	Géométrie de la plaque.....	77
4.4.2	Equations cinématiques et constitutives	78
4.4.3	Equations de mouvement	80
4.5	Procédure de solution de Navier.....	83
4.6	Conclusion	85
Chapitre 5 : Discussion et validation des résultats		86
5.1	Introduction.....	86
5.2	Hypothèses de base	87
5.3	Propriétés des matériaux	87
5.4	Résultats numériques et discussion	88
5.4.1	Analyse de la flexion des plaques composites stratifiées à plis croisés antisymétriques.....	89
5.4.2	Analyse de la flexion des plaques sandwiches symétriques à trois couches (0°/Noyau/0°)	95
5.4.3	Analyse de la flexion des coques sphériques stratifiées à deux couches antisymétriques à plis croisés	97
5.4.4	Analyse des vibrations libres des plaques stratifiées antisymétriques à plis croisés (0°/90°) _n 100	
5.4.5	Analyse de la vibration libre des coques cylindriques et sphériques stratifiées à plis croisés 102	
5.5	Conclusion	104
CONCLUSION GENERALE		105
Références bibliographiques		

Liste des figures

Figure 1. 1 : Relation contrainte déformation en traction pour les différents composants. ..	21
Figure 1. 2 : Classification des matériaux composites.	22
Figure 1. 3 : Les différents renforts.	23
Figure 1. 4 : Les différentes géométries et textures de renforts.	25
Figure 1. 5 : Les différentes matrices.	26
Figure 1. 6 : Pli à renforcement unidirectionnel.	28
Figure 1. 7 : Matériau composite stratifié.....	29
Figure 2. 1 : Élément de plaque [25].	41
Figure 2. 2 : Un stratifié constitué de couches parfaitement liées.	42
Figure 2. 3 : Composition d'un stratifié quasi-isotrope.	42
Figure 2. 4 : Pli au stratifié [34].	43
Figure 2. 5 : Un stratifié symétrique.....	43
Figure 2. 6 : La géométrie de déformation [70].	44
Figure 2. 7 : Forces par unités de longueur.....	45
Figure 2. 8 : Moments par unités de longueur.....	46
Figure 2. 9 : Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) $\pm 45^\circ$, (d) $0^\circ/90^\circ$ [24].	48
Figure 2. 10 : Mécanismes de rupture dans un stratifié $0^\circ/90^\circ/0^\circ$	49
Figure 2. 11 : Evolution de la fissuration transverse [24].	49
Figure 2. 12 : Schéma de la rupture interlaminaire (a) Mode I traction, (b) Mode II cisaillement.	50
Figure 3. 1 : Distribution des contraintes de cisaillement τ_{xz} selon 3 théories [6].....	55
Figure 3. 2 : Approximations de la contrainte du cisaillement transversal.	55
Figure 3. 3 : Cinématique de Love-Kirchhoff.....	60
Figure 3. 4 : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	61
Figure 3. 5 : Variation de la fonction de gauchissement $\psi(z) = z$ et $\psi'(z)$ suivant l'épaisseur.	62
Figure 3. 6 : Cinématique des théories d'ordre supérieur.....	63
Figure 3. 7 : Variation de la fonction de forme $\phi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.	65
Figure 3. 8 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $\phi'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.	66
Figure 3. 9 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique [28].	67
Figure 3. 10 : Champ de déplacements des modèles Zig-zag, approche cinématique [28]. ...	67
Figure 3. 11 : Champ de déplacements des modèles Zig-zag du premier ordre [28].....	67
Figure 3. 12 : Champ de déplacements des modèles Zig-zag d'ordre supérieur [28].	68

Figure 3. 13 : Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds [150].	70
Figure 3. 14 : Élément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [150].	70
Figure 3. 15 : Élément brique mixte à 18 nœuds [150].	71
Figure 3. 16 : Élément d'interface [150].	71
Figure 4. 1 : Géométrie et notations pour coques stratifiées génériques avec ensemble positif d'axes de référence couche / stratifiés, composants de déplacement et orientation des fibres.	77
Figure 5. 1 : Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur le déplacement transversal adimensionnel d'une plaque carrée stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale.	92
Figure 5. 2 : Variation du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale ($a/h = 4$).	93
Figure 5. 3 : Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur le déplacement transversal adimensionnel d'une plaque carrée stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge uniforme.	93
Figure 5. 4 : Variation de la contrainte normale dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches croisées ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge sinusoïdale ($a/h = 4$).	94
Figure 5. 5 : Variation de la contrainte de cisaillement dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale ($a/h = 4$).	94
Figure 5. 6 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale ($a/h = 4$).	95

Liste des tableaux

Tableau 1. 1 : Critères essentiels des matrices TD et TP [65].	27
Tableau 1. 2 : Caractéristiques mécaniques des résines polyesters.....	33
Tableau 5. 1 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale, ($b = a$, Matériau 1).....	90
Tableau 5. 2 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque stratifiée à quatre couches ($0^\circ/90^\circ$) ₂ à plis croisés sous une charge sinusoïdale, ($b = a$, Matériau 1).....	90
Tableau 5. 3 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque stratifiée à huit couches ($0^\circ/90^\circ$) ₄ à plis croisés sous une charge sinusoïdale, ($b = a$, Matériau 1).....	91
Tableau 5. 4 : Comparaison du déplacement maximal transversal et des contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée sandwich symétrique sous une charge uniforme ($a/h = 10$, Matériau 2).....	96
Tableau 5. 5 : Comparaison du déplacement transversal adimensionnel de coques sphériques stratifiées à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge sinusoïdale, ($b = a$, $R_1 = R_2 = R$, Matériau 1).....	98
Tableau 5. 6 : Comparaison du déplacement transversal adimensionnel de coques sphériques stratifiées à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge uniforme, ($b = a$, $R_1 = R_2 = R$, Matériau 1).....	99
Tableau 5. 7 : Comparaison du déplacement transversal adimensionnel de coques sphériques stratifiées à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge ponctuelle, ($b = a$, $R_1 = R_2 = R$, Matériau 1).....	99
Tableau 5. 8 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques carrées composites stratifiées antisymétriques à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) _n , ($a/h = 5$, Matériau 3).	101
Tableau 5. 9 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des coques cylindriques à plis croisés, Matériau 1.	102
Tableau 5. 10 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des coques sphériques à plis croisés, Matériau 1.....	103

Liste des notations

x_1, x_2, x_3 :	Cordonnées cartésiennes.
ξ_1, ξ_2, ξ_3 :	Directions de la plaque.
E :	Le module de Young.
E_{ij} :	Module de Young suivant les directions ($i, j = 1, 2, 3$).
G_{ij} :	Module de cisaillement dans le plan (x_1, x_2) ou le plan (x_1, x_3) ($i, j = 1, 2, 3$).
ν_{ij} :	Le coefficient de Poisson suivant les directions ($i, j = 1, 2, 3$).
\bar{Q}_{ij}^k :	Les constantes de rigidité du matériau dans le repère local du stratifié.
Q_{ij} :	Les constantes de rigidité du matériau dans le repère principal du stratifié.
ϑ_k :	L'angle formé par les axes du repère principal des stratifiés avec les axes du repère local de chaque couche.
ρ :	La masse volumique.
a :	Longueur de la plaque suivant la direction de x_1 .
a_1, a_2 :	Valeurs scalaires associées au type de coques.
b :	Largeur de la plaque suivant la direction de x_2 .
h :	L'épaisseur de la plaque suivant la direction de x_3 .
a/h :	L'élancement de la plaque.
A', B' :	Coefficients de la déformation.
u, v, w, ϕ_1, ϕ_2 :	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$:	Les déplacements dans les directions x_1, x_2, x_3 .
$f(\xi_3)$:	fonction de forme qui désigne la distribution de la contrainte de cisaillement ou de la déformation transversale sur l'épaisseur de la plaque.
$g(\xi_3)$:	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à ξ_3 .
ω :	Fréquence naturelle du système.
∂ :	Dérivée partielle.
i, j :	Nombres naturels.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6, \sigma_4, \sigma_5$:	Contraintes normales et de cisaillement.
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_4, \varepsilon_5$:	Déformations normales et de cisaillement.
q :	Une charge transversale distribuée.
N_i :	Efforts normaux et tranchants suivant les directions ($i = 1, 2, 6$) par unité de longueur.
M_i :	Moments de flexion et de torsion suivant les directions ($i = 1, 2, 6$) par unité de longueur.
P_i, Q_i :	Moment supplémentaire dû au cisaillement transverse suivant les directions ($i = 1, 2, 6 / i = 4, 5$) par unité de longueur.

$\{ \}$:	Vecteur colonne.
$[K]$:	Matrice de rigidité.
δ :	Opérateur variationnel.
$\delta_u, \delta_v, \delta_w, \delta_\vartheta$:	Champ virtuel de déplacement.
A_{ij} :	Les constantes de la rigidité en membrane.
B_{ij} :	Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-flexion/torsion.
D_{ij} :	Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-cisaillement.
E_{ij} :	Les constantes de la rigidité en flexion.
F_{ij} :	Les constantes de la rigidité de couplage en flexion-cisaillement.
H_{ij} :	Les constantes de la rigidité en cisaillement.
E_1/E_2 :	Rapport d'orthotropie de la plaque en composite stratifiée.
a/h :	Rapport de la longueur sur l'épaisseur de la plaque.
R/a :	Rapport de courbure.
σ_i :	Tenseur de contraintes.
ε_i :	Tenseur de déformations.

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux composites connaissent une utilisation progressive dans de nombreux domaines d'application aussi variés que l'automobile, l'aéronautique, les structures, les accessoires de sport...etc., cela est dû au fait que ces matériaux sont plus légers, Ils allient de bonnes propriétés mécaniques et une faible densité et peuvent permettre d'améliorer les performances et d'accroître la longévité des structures, les applications actuelles des matériaux composites prouvent l'intérêt des éléments de structure plaques ou coques, constitués de plusieurs couches (plis) empilées les unes sur les autres suivant différentes orientations (stratifiés).

La conception et le dimensionnement de stratifié consiste à déterminer le nombre de couches, l'orientation des plis, tout en s'assurant que ce dernier vérifie un ensemble de règles, qui, dans la pratique, intègrent des contraintes diverses comme le coût, le poids et la fiabilité. Une plaque composite utilisée comme élément structural est souvent soumise à différents types de chargement, un cumul de connaissances et de théories des stratifiées ont été développées dans cet axe pour étudier le comportement mécanique des plaques composites, la connaissance du comportement critique s'avère alors nécessaire dans le dimensionnement de ces plaques.

Habituellement, ces éléments légers ont de nombreuses propriétés mécaniques supérieures (résistance spécifique élevée, rigidité et stabilité), sont assemblés pour former de grandes structures capables d'absorber une quantité d'énergie supplémentaire par rapport aux autres structures pendant leur durée de vie.

De plus, le nombre d'articles et de livres de recherche publiés au cours des quatre dernières décennies indique que la demande croissante et rapide de structures en matériaux composites, semble être la force motrice derrière l'évolution technologique récente observée dans les diverses branches de l'ingénierie, en particulier dans le génie civil et architectural (variétés de toits en coque, courbes ponts, silos, réservoirs de stockage, barrages voutes, confinement coquilles de centrales nucléaires et tours de refroidissement). Ils sont également appliqués dans la construction aéronautique (fusées, ailes d'avions à hélices).

D'autre part, la conception de la coque des structures nécessite la capacité de combiner l'esthétique et les connaissances pour donner à la construction une attirance d'apparence, ainsi que l'analyse structurelle pour dimensionner la structure est nécessaire pour assurer la précision, la sécurité et la conception économique. Puisque les structures de coque sont plus compliquées par rapport aux structures plates en raison de leur effet de courbure (cylindrique, sphérique, ellipsoïdale, conique coques, ... etc.), divers modèles numériques ont été proposés par des spécialistes en structure utilisant la méthode d'éléments finis et / ou les procédures de solution analytique, ont été établis par des chercheurs scientifiques utilisant de nombreuses théories des coques pour analyser leur comportement structurel. Néanmoins, ils ont la particularité d'être parmi les plus délicats structures à étudier.

En général, l'analyse du comportement dynamique et statique du matériau composite / sandwich stratifié mince à épais structure et coques dans le passé ont été classées selon l'une des différentes approches dérivées des équations d'élasticité, comme les théories équivalentes à une seule couche (ESC), théories en Zigzag, théorie de l'élasticité tridimensionnelle et / ou méthodes de modèles multiples.

Étant donné que les plaques composites et la courbure des coques posent des problèmes nouveaux et délicats par rapport au cas des plaques conventionnelles, plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont par la suite été développées pour optimiser l'analyse de différents types de plaques et coques stratifiés / sandwich. Sont largement utilisées par de nombreux chercheurs. Kumar *et al.* [79] ont appliqué un nouveau modèle d'éléments finis basé sur HSDT pour

résoudre de nombreux problèmes de réponse statique des coques de biais composites stratifiées en tenant compte de différentes géométries, conditions aux limites, chargements et autres paramètres de coque. La même année, Viola *et al.* [151] ont proposé un HSDT 2D pour l'analyse des vibrations libres de coques et de panneaux stratifiés doublement courbés moyennement épais avec différentes courbures, en utilisant la technique de quadrature différentielle généralisée et un champ de déplacement à neuf degrés de liberté fixes. Sayyad et Ghugal [129] ont passé en revue les différentes méthodes mises en œuvre dans la littérature disponible pour l'analyse des vibrations libres de plaques composites stratifiées multicouches et de plaques sandwich à l'aide de différents HSDT. L'année suivante, de nouvelles théories de déformation de cisaillement ont été proposées par Sarangan et Singh [128] pour étudier l'analyse de la flexion, du flambage et des vibrations libres des plaques stratifiées composites et sandwich. En outre, la forme généralisée des équations différentielles de gouvernance est dérivée en employant le principe des travaux virtuels et résolue par la technique de résolution de forme fermée de Navier. Par la suite, Tornabene [148] a proposé une théorie par couches d'ordre supérieur, dans laquelle l'effet d'étirement est inclus pour chaque couche en utilisant un champ de déplacement général basé sur la Formulation Unifiée de Carrera pour l'analyse des vibrations libres de coques composites stratifiées épaisses à double courbure et panneaux. Une solution analytique pour le problème statique thermoélastique des plaques composites stratifiées simplement supportées sous une charge thermique bisinusoidale a été présentée par Ramos *et al.* [118], en utilisant un champ de déplacement non polynomial modifié basé sur la Formulation Unifiée de Carrera. Abed et Majeed [4] ont analysé l'effet des conditions aux limites sur la réponse harmonique des plaques stratifiées.

Récemment, de nombreux chercheurs ont travaillé sur le développement de la théorie des plaques et coques orthotropes stratifiées [143, 130, 154, 146, 26, 66, 21, 74, 102, 36, 16 et 131]. L'objectif principal du présent travail est d'étudier le comportement en flexion et en vibration libre des plaques composites stratifiés et des coques et sandwich, en utilisant une théorie généralisée et simple raffinée de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT), qui tient compte des effets

des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque / coque et sans nécessiter le facteur de correction de cisaillement. Les équations de mouvement et ses conditions aux limites sont dérivées en employant le principe des travaux virtuels. Des solutions analytiques sont obtenues pour la flexion et la réponse à la vibration libre de plaques et coques composites et sandwiches simplement appuyées en appliquant la procédure de solution de Navier. Plusieurs exemples numériques sont présentés et comparés avec d'autres théories de déformation de cisaillement pour vérifier la validité et l'applicabilité de la présente théorie.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre général de l'étude du comportement des matériaux composites. Plus essentiellement, l'objet du travail est d'étudier le comportement mécanique des plaques composites stratifiées et sandwiches avec l'effet de gauchissement.

Le manuscrite s'articule en plusieurs chapitres. Tout d'abord, une étude bibliographique est proposée. Elle comporte une introduction générale, un aperçu des recherches sur les matériaux composites d'une manière générale. Le second chapitre illustre les composites stratifiés leurs géométries, types, caractéristiques et rupture...etc. une recherche sur les différentes approches et théories développés dans le domaine des plaques composites stratifiée constitue le chapitre trois. Par la suite un aspect analytique est présenté. Chapitre quatre est réservé à la formulation théoriques pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques stratifiés sandwiches/coques simplement appuyées, une théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT) a été présenté en détail, sur la base d'une fonction qui satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces (supérieur et inférieur) de la plaque. La discussion et validation des résultats des différents problèmes étudiés est ensuite abordée dans le dernier chapitre, enfin une conclusion générale rassemble les points importants tirés de ce travail.

CHAPITRE 1 : LES MATÉRIAUX COMPOSITES

1.1 Introduction

De point de vue structure et matériaux nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude du comportement de composants du matériau composite. Une description sera présentée sur quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renfort utilisés, un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possède des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants.

Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite. Ce dernier est le plus répandu dans le domaine industriel présent caractérisé généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues, les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits.

1.2 Description des constituants élémentaires des composites

On appelle matériaux composites des arrangements de fibres, continues ou non, d'un matériau résistant, appelé renfort, qui sont noyées dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible [99]. La matrice conserve la disposition géométrique des fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce.

Les produits ainsi obtenus présentent des propriétés mécaniques proches de celles des fibres et garantissent une résistance chimique similaire à celle de la matrice (figure 1.1).

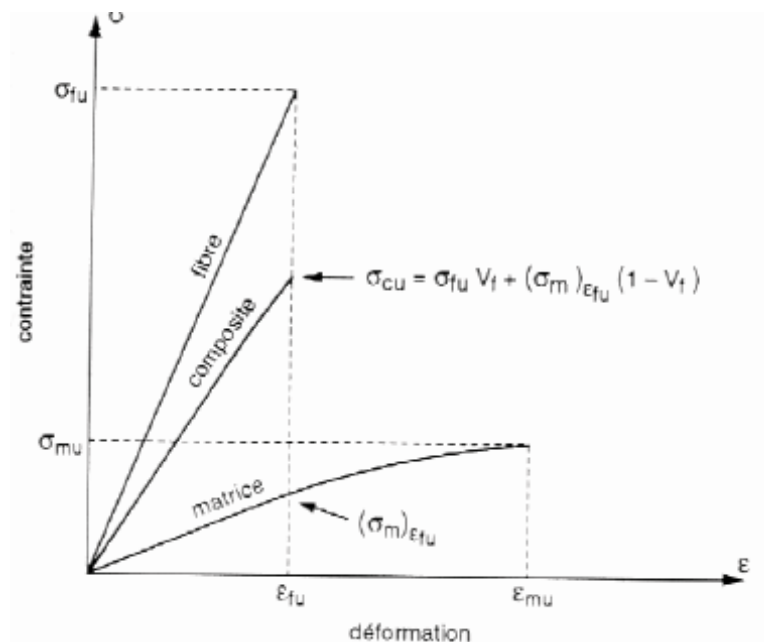


Figure 1.1 : Relation contrainte déformation en traction pour les différents composants.

1.3 Matériaux composites

Les composites sont des matériaux solides, hétérogènes et généralement anisotropes constitués de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes. Cette association conduit à un matériau dont les performances sont supérieures à celles d'un matériau à un seul constituant. On appelle maintenant « matériau composite » des arrangements de deux phases distinctes : l'une dispersée et constituée d'un matériau résistant appelée

renfort, tandis que l'autre qui contient le renfort, est caractérisée par une résistance mécanique plus faible et est appelée la matrice.

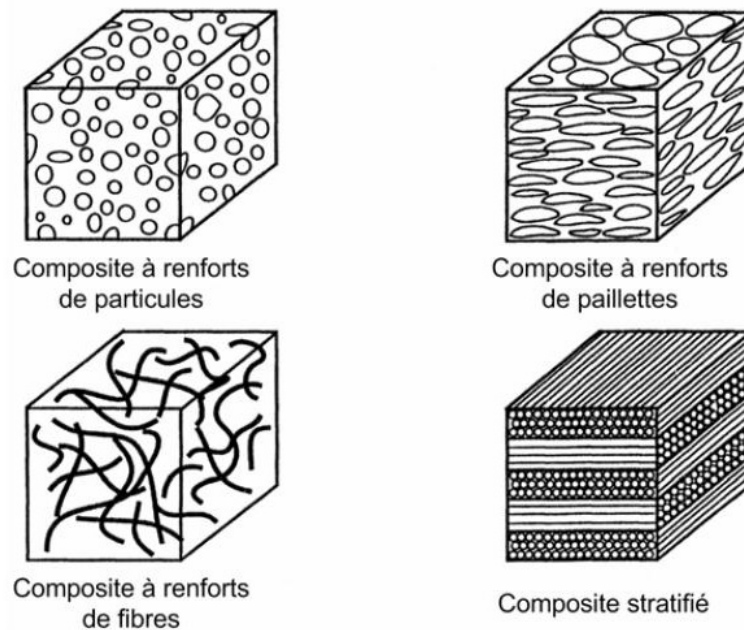


Figure 1. 2 : Classification des matériaux composites.

Le renfort : son rôle est d'assurer la fonction mécanique. Il se présente généralement sous la forme des fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elle doit supporter.

La matrice : son but est de réaliser la liaison entre les renforts, leur protection vis-à-vis des agents agressifs et la prévention contre une rupture catastrophique.

D'une manière générale, les matériaux composites structuraux de par la nature du renfort sont fortement anisotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés sont très différentes suivant la direction considérée.

D'autre part, les matériaux composites sont légers, c'est-à-dire que les masses volumiques de leurs constituants sont de l'ordre de 1 à 3.5 g/cm³.

1.3.1 Les renforts

Le renfort est le squelette supportant les efforts mécaniques. Il peut se présenter sous de nombreuses formes : fibres courtes (mat) ou fibres continues (tissus ou textures multidirectionnelles) en fonction de l'application envisagée. Les fibres

possèdent généralement une bonne résistance à la traction mais une résistance à la compression faible.

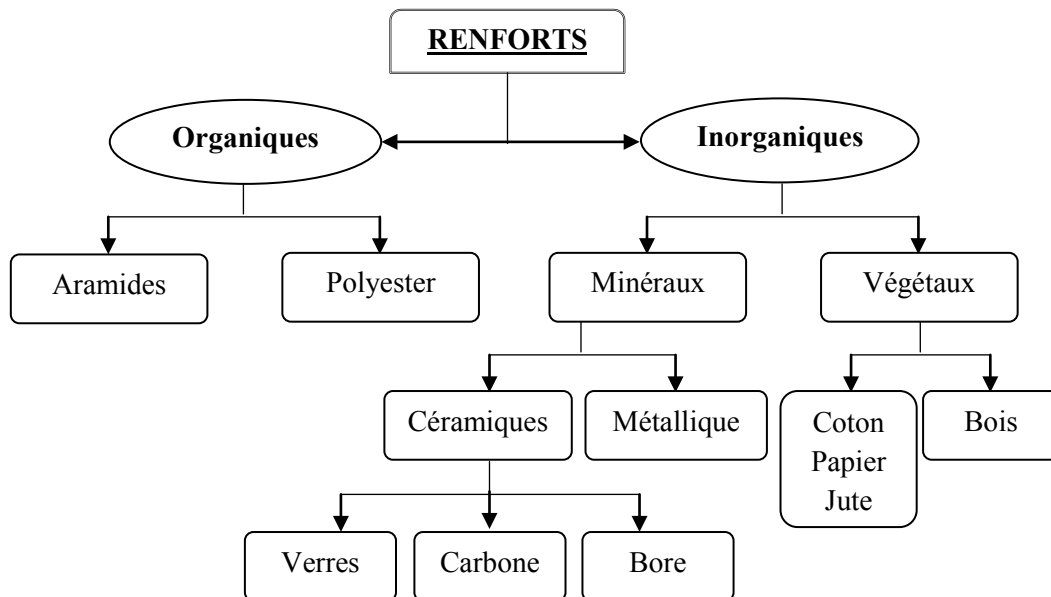


Figure 1. 3 : Les différents renforts.

Parmi les principaux renforts [30] on peut citer :

Fibre de verre : Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres :

- E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- R : pour les composites hautes performances ;
- D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).

Fibre de carbone : C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- Fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ;
- Fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

Fibre d'aramide : Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- Les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;
- Les fibres haute module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

Fibre de bore : Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

Fibre de silice (ou de quartz) : Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée.

Fibres de polyéthylène de haut module : Elles présentent une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité. Pour des structures peu sollicitées, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester.

1.3.1.1 Architecture des renforts

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement.

Afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques des structures en composites, il est nécessaire de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée aux contraintes mécaniques.

En fonction des propriétés recherchées, on rencontre plusieurs architectures de renforcements, il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée. Il existe différentes géométries et textures de renforts (figure 1.3) :

- Les unidirectionnels (UD) : Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Les

tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entre eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise ;

- Toile ou taffetas : Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques ;
- Serge : Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au-dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils ;
- Satin : Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs ($n-1$) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique.

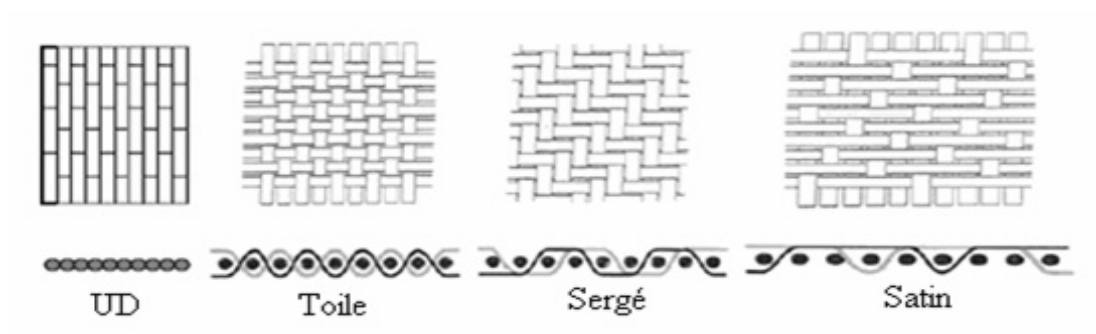


Figure 1. 4 : Les différentes géométries et textures de renforts.

Il est également possible de réaliser des structures de renforts hybrides en tissant des fibres de natures différentes ou en superposant des tissus ou nappes de renforts de fibres différentes.

1.3.2 La matrice

Comme il a été mentionné plus haut, les matrices servent à enrober les fibres et à les assembler afin d'assurer le transfert des charges. Leurs propriétés mécaniques sont

négligeables par rapport à celles des fibres. On distingue deux types de matrices : les matrices organiques et les matrices inorganiques. Le choix d'un type ou d'un autre dépendra des propriétés et des conditions d'utilisation des fibres. Les matrices organiques sont, en général, à base de polymères. Elles peuvent être thermoplastiques ou thermodurcissables. Les premières peuvent être réutilisées après une nouvelle fusion alors que les secondes subissent un procédé de fabrication initial irréversible. Les résines thermodurcissables sont surtout utilisées avec de fibres longues et les thermoplastiques avec de fibres plus courtes. Les principaux avantages des matrices organiques, en général, sont le faible coût de production, la faible densité de volume, la bonne maniabilité et la grande résistance chimique. Elles sont pour cela les plus utilisées. Les matrices inorganiques sont à base de matériaux métalliques ou céramiques. Elles sont moins utilisées et servent en général dans des applications à des températures supérieures à 300°C.

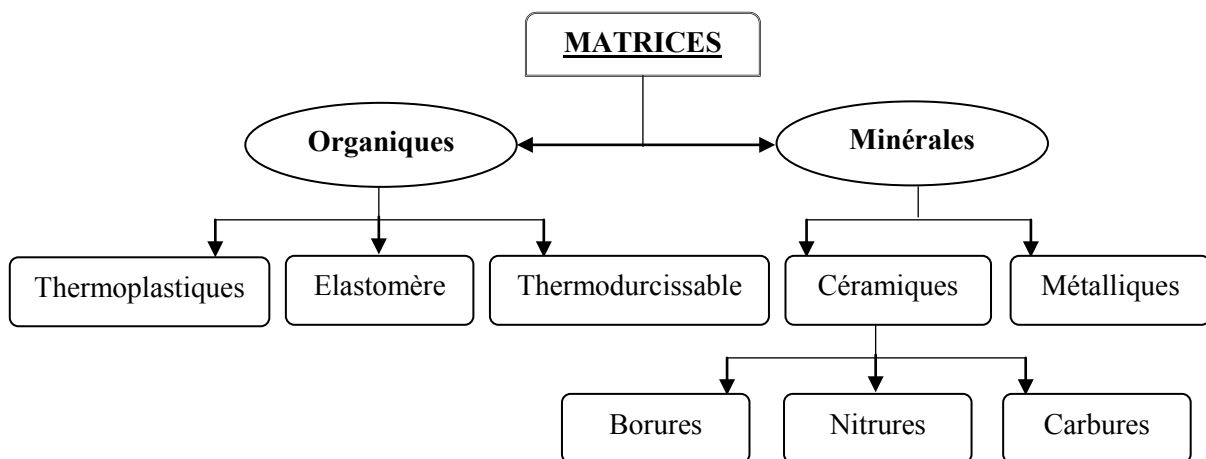


Figure 1. 5 : Les différentes matrices.

Les principales matrices ou résines utilisées sont : les résines époxy, les polyamides, les polyéthers, les polyesters, les vinylesters, les phénoliques et les polyuréthanes.

La structure des TP se présente sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible.

La structure des TD à la forme d'un réseau tridimensionnel qui se pontent (double liaison de polymérisation) pour durcir en forme de façon définitive, lors d'un échauffement. La transformation est donc irréversible.

Tableau 1. 1 : Critères essentiels des matrices TD et TP [65].

	TP : THERMOPLASTIQUES	TD : THERMODURCISSABLES
Etat de base	solide (prêt à l'emploi : polymérise)	liquide visqueux à polymériser
Stockage matière de base	illimité	temps réduit (précautions à prendre)
Mouillabilité des renforts	difficile	aisée
Moulage	chauffage (fusion/ramollissement + refroidissement de fixation)	chauffage continu
Cycle	court	plus long (polymérisation)
<u>Caractéristiques spécifiques</u>		
Tenue au choc	assez bonne	limitée
Tenue thermique	réduite sauf nouveaux TP thermostable	meilleure
Chutes et déchets	recyclables	perdus
Conditions de mise en œuvre	bonnes + propreté	émanations pour méthode humide (allergie possible)

1.3.2.1 Interfaces

L'utilisation d'une couche d'interface (Sizing) permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Les fibres destinées à la fabrication des composites reçoivent un apprêt spécifique comportant un agent collant qui permet de coller les filaments pour en faire des fils et assure, en outre, une fonction de lubrification (pour le protéger contre l'abrasion due au frottement entre fibres).

1.3.2.2 Charges – additifs

On désigne sous le nom général de charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement, de réduire le prix de revient du matériau transformé.

A l'inverse des matières thermoplastiques, les matières thermodurcissables ont toujours contenu des charges de nature et de formes variées, à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse. Pour un polymère donné, le choix d'une charge est déterminé en fonction des modifications recherchées pour l'objet fini. Mais, d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matières plastiques devront d'abord satisfaire à un certain nombre d'exigences à savoir : la compatibilité avec la résine de base, la mouillabilité, l'uniformité de qualité et de granulométrie, la faible action abrasive et le bas prix de revient [30].

1.4 Les matériaux composites structuraux

Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories : Les monocouches, Les stratifiés et Les sandwiches. Leur rigidité est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement...etc.

1.4.1 Les monocouches

L'élément de base des structures composites ces les monocouches, ils sont constituées d'une matière plastique (résine) renforcée d'un matériau fibreux (renfort). La variation des multitudes types de monocouches sont définis par la forme du renfort : fibres longues, fibres tissées, ou à fibres courtes.

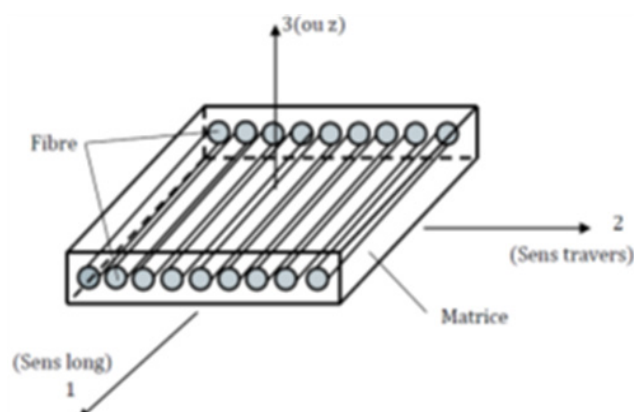


Figure 1. 6 : Pli à renforcement unidirectionnel.

1.4.2 Les stratifiés

La superposition de plusieurs monocouches dans la direction de l'épaisseur permet d'obtenir des structures composites stratifiées qui sont constituées de couches de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également désignées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. La résistance mécanique aux efforts est assurée par le renfort. La résine quant à elle assure la cohésion entre les renforts de sorte à distribuer les excitations mécaniques.

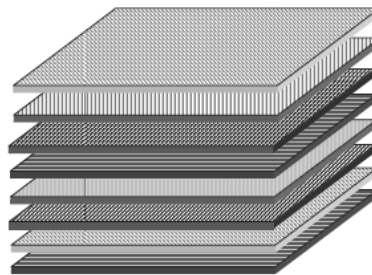


Figure 1. 7 : Matériau composite stratifié.

1.4.3 Les sandwichs

La structure des composites sandwichs est constituée de deux peaux ou bien de couvercle en matériaux composites entre lesquelles est collé un noyau à faible densité permettant d'augmenter les propriétés du matériau en flexion tout en conservant un poids très faible. Typiquement, l'industrie aéronautique utilise un noyau en forme de nid d'abeille constitué de feuilles ondulées collées ensemble. Ces feuilles sont fabriquées en imprégnant des fibres d'aramide dans une résine phénolique ayant des propriétés ignifuges. Lors de la mise en forme de ce type de panneaux sandwichs, il est souvent nécessaire d'utiliser plusieurs morceaux de noyau afin de fabriquer de grandes pièces. La jonction entre deux noyaux pose un problème de discontinuité qui est réglé dans l'industrie en injectant une mousse dans l'interstice. L'injection de cette mousse ajoute une étape à la fabrication de grandes pièces et constitue un ajout de masse à la structure. Dans le domaine aéronautiques Les panneaux sandwichs intégrés dans les structures sont légers et rigides ce qui en fait de très bon

transmetteurs de vibration mécaniques et sonores. Ces dernières vont à l'encontre du confort des passagers et peuvent même causer des bris mécaniques si elles ne sont pas amorties. Plus de détail sera discuté dans le prochain chapitre, les avantages et l'importance d'utiliser ce matériau dans des différents domaines d'application.

1.5 Les avantages et inconvénients des matériaux composites

- Une grande résistance à la fatigue ;
- Un faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu- carbone) ;
- Sont insensibles aux produits chimiques "mécaniques " comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole ;
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes !
- Les composites sont très anciens : bois (composite naturel), torchis, béton (agrégats et pâte de ciment), béton armé, bois contre-plaqué (sandwiches), lamifiés décoratifs par exemple ;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwiches ;
- Problèmes aux niveaux : manipulation, compatibilité chimique, mouillage du plan médian, $\theta(z) = \theta(-z)$.

1.6 Les domaines d'application des composites

▪ Les composites dans la construction civile

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. Inconvénient majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 6€/kg [100].

Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone la résistance aux séismes. L'utilisation des composites dans le bâtiment ne pourra se développer que si les prescriptions techniques actuelles sont mieux adaptées à leur spécificité.

▪ **Les composites dans l'automobile**

Le secteur de l'automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais intègre massivement les composites thermoplastiques depuis 2003.

Les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d'entretien et une grande liberté de conception ; l'allègement de 1 kg, obtenu par l'utilisation des composites, autorise un surcoût de 3€/kg gagné ou permet d'économiser 1,5 € de carburant par 100 km.

Dans l'automobile, le développement à long terme des composites est menacé par la difficulté de les intégrer dans les chaînes de fabrication et par les exigences de recyclabilité.

En Europe, environ 12 millions de véhicules, d'une masse moyenne de 1000 kg sont produits annuellement, soit 12 millions de tonnes de matériaux [60].

Si à ses débuts, il y a environ 100 ans, une automobile était constituée principalement de bois et d'acier, ce jour elle rassemble de nombreux matériaux appartenant à différentes familles :

- Matériaux ferreux : fontes, aciers (environ 70 % de sa masse) ;
- Matériaux non ferreux : aluminium, cuivre, magnésium (environ 5 %) ;
- Matériaux minéraux : verres, céramiques (environ 4 %) ;
- Matériaux organiques : peintures, adhésifs, textiles, fluides, caoutchoucs, thermoplastiques et thermodurcissables renforcés ou non par des fibres (verre, carbone, aramide, naturelles) ou des charges minérales (environ 20 %).

Les matériaux organiques composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70. Même s'ils sont

aujourd'hui utilisés presque exclusivement pour remplir certaines fonctions, leur taux d'utilisation ne dépasse pas 10 à 15 % selon les véhicules.

A priori, ces matériaux présentent en effet trois handicaps majeurs par rapport aux matériaux métalliques dans le cadre d'une utilisation dans le secteur automobile :

- Un prix élevé au kilogramme ;
- Des caractéristiques mécaniques plus faibles ;
- Des procédés de mise en œuvre souvent lents à l'exception du procédé d'injection.

Pourtant les matériaux composites à matrice organique présentent des avantages importants :

- Une faible densité ;
- Des technologies de mise en œuvre par moulage qui limitent la matière engagée dans la filière, offrent la possibilité d'obtenir des pièces de forme complexe et suppriment les usinages de finition.

▪ **Les composites et la construction électrique**

La consommation massive des composites GD, sous forme de semi-produits SMC comprimés, dans les domaines électrique et électronique, prends de l'ampleur avec l'utilisation importante de l'audio-visuel (TV, microordinateurs, lecteurs de DVD...etc.).

En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durée de vie.

Les cadences de production des composants électriques, pouvant atteindre plusieurs milliers par jour, sont peu compatibles avec celles du procédé de compression SMC. Des exigences croissantes en recyclabilité des produits constituent une menace importante pour ce secteur d'application des composites.

▪ **Les composites et la construction industrielle**

Le développement des composites TD et TP, avec la possibilité de jouer sur leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel.

Les fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

Tableau 1. 2 : Caractéristiques mécaniques des résines polyesters.

Masse volumique	kg/m ³	1200
Module d'élasticité en traction	GPa	2,8 à 3,5
Contrainte à la rupture en traction	MPa	50 à 80
Allongement à la rupture en traction	(%)	2 à 5
Résistance au cisaillement	MPa	10 à 20

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Pour les constructions industrielles standards, les matériaux composites gardent encore leur handicap d'un coût élevé par rapport aux matériaux conventionnels, les métaux. Leur caractérisation en milieu corrosif est encore insuffisamment connue.

▪ **Les composites dans les équipements de sports et loisirs**

Les performances sportives exigent des matériaux performants. Les matériaux composites répondent bien à ces exigences, malgré un coût relativement élevé. Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%. Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques.

Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports.

La résistance mécanique et élastique des composites TP reste encore trop faible comparée à celle des alliages légers, en particulier pour les composites à matrice en polypropylène et en polyamide.

▪ **Les composites et la construction nautique**

Dans la construction nautique de plaisance et de pêche, les composites sont indispensables pour les embarcations de taille inférieure à 40 mètres. Le moulage au contact représente encore 85% des composites utilisés dans ce secteur. D'ailleurs c'est

le seul domaine exploité en Algérie. Les entreprises étatiques et privées telles que ECOREP, 3S, POLYOR, se sont spécialisées dans la construction des bateaux de pêche et de plaisance. Elles utilisent surtout de la résine polyester et la fibre de verre E.

Les problèmes d'environnement sont susceptibles de menacer à terme l'industrie nautique des matériaux composites ; en effet, les nouvelles réglementations européennes limitant les émissions des composés organiques volatiles COV (styrène), qui pourraient constituer une menace pour cette industrie si elle ne s'adapte pas.

▪ **Les composites dans l'aéronautique**

Avec l'augmentation du prix du pétrole, l'utilisation des matériaux composites est devenue une nécessité. Chaque kilogramme gagné sur la structure d'un avion, fait gagner aux compagnies de voyageurs de l'argent et protège en parallèle l'environnement par réduction des émanations de CO₂. L'aéronautique utilise principalement des composites HP constitués d'une matrice époxy associée à un taux élevé de renforts en fibres de carbone.

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, de leur souplesse de forme et des économies de frais de maintenance qu'ils engendrent. Le gain total de 450 kilos sur un Airbus permet d'accueillir six passagers supplémentaires. Un gain de 100 kilos sur la structure d'une fusée allonge sa trajectoire de 100 kilomètres.

▪ **Les composites dans le ferroviaire**

Les matériaux composites sont utilisés dans le domaine ferroviaire pour deux principaux atouts : un bon comportement au feu et un moulage facile des pièces utilisées. Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice thermodurcissable et fibres longues, mais il apparaît peu dynamique.

La généralisation des composites dans le ferroviaire est handicapée par leur coût supérieur à 9€/kg, contre 2€/kg pour les solutions en acier et par les difficultés de l'approche fonctionnelle rencontrées par les concepteurs.

▪ Les composites dans le secteur médical

Les composites TD et TP ont investi récemment le secteur médical et de la sécurité, comme ils ont investi auparavant les autres secteurs. Il s'agit surtout des composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part. L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards).

Le médical reste attaché à l'utilisation des aciers spéciaux dont le prix de 9€/kg reste bien au-dessous de celui des composites HP qui peut atteindre 50€/kg.

1.7 Mise en œuvre des matériaux composites

Les procédés de mise en œuvre des matériaux composites sont beaucoup plus nombreux que les techniques de transformation des métaux. Le terme "Liquid Composite Molding" (LCM) regroupe les procédés de type Transfert (RTM, VARTM, RTMLight, RTMeco, VARI), les procédés de type Transfert/Infusion (CRTM, LRI, FASTRAC) ainsi que l'infusion (RFI, Semi-preg).

Le moulage par injection de résine (RTM) est un procédé de mise en forme des composites dans lequel une résine thermodurcissable, à viscosité relativement faible, est injectée à basse pression, à travers un renfort sec placé dans un moule fermé. Ses principales étapes sont : le placement du renfort fibreux dans le moule, le remplissage du moule et la polymérisation de la résine. Il présente de nombreux avantages par rapport à la technologie du pré imprégné comme la possibilité de la mise en œuvre des pièces de géométrie complexe et à plusieurs fonctionnalités. Lors de l'injection de la résine, un paramètre important entre en jeu :

La viscosité doit être assez faible pour pouvoir entièrement infiltrer la préforme. Quelques résines initialement utilisées pour les prés imprégnés, ont des viscosités plus importantes que celles utilisées lors du procédé RTM. Pour cela le procédé d'infusion d'un film de résine (RFI) a été développé.

L'infusion de film de résine (RFI) est un procédé de mise en œuvre de matériaux composites en cours de développement, il consiste à placer un film de résine en dessous d'une préforme sèche dans un moule et de comprimer l'ensemble. Il présente un important avantage par rapport au RTM celui de l'utilisation de résine à viscosité importante et permet le déroulement en même temps de l'infiltration, la consolidation et la cuisson.

Bien que le procédé d'injection (RTM) soit relativement ancien, sa mise en œuvre reste complexe et nécessite un savoir-faire technique important fondé le plus souvent sur l'expérience acquise.

De ce fait, depuis plusieurs années des outils numériques ont été développés pour permettre la simulation des différentes étapes de mise en œuvre. Ces outils permettent la description de :

La progression du front de résine, la déformation des tissus comprimés dans le moule, la perméabilité des renforts fibreux, les échanges thermiques et l'avancée de la réaction de polymérisation...etc. Certains d'entre eux ont atteint une maturité, d'autres n'en sont encore qu'au stade du développement.

1.8 Endommagement des matériaux composites

Le phénomène d'endommagement et de rupture dans les matériaux composites est caractérisé par une rupture non brutale précédé d'une dégradation progressive. Ces dégradations peuvent résulter de plusieurs mécanismes élémentaires

- La rupture des fibres ;
- La rupture transverse de la matrice ;
- La rupture longitudinale de la matrice ;
- La rupture de l'interface "fibre - matrice ».

Auxquels s'ajoute, dans le cas de stratifiés, un mécanisme de rupture entre couches, appelé rupture par délaminage.

Ces divers mécanismes coexistent et se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

1.9 Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\sigma = C\varepsilon \quad (1-1)$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

Cette loi, généralement appelée loi de HOOKE généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij} .

1.9.1 Matériau anisotrope

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

1.9.2 Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie. L'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan (e_1, e_2) plan de symétrie du matériau, la loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

La matrice de souplesse à la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduite à 13.

1.9.3 Matériau orthotropique

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

1.9.4 Matériau transversalement isotrope

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e_1 . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope à 5 constantes d'ingénieur.

1.9.5 Matériau isotrope

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope.

Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad (1-6)$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

1.10 Conclusion

Ce chapitre présentant une revue bibliographique sur les divers aspects qui enveloppent la compréhension du comportement structural des matériaux composites d'une manière générale, cette présentation rapide montre une généralité sur les caractères avantageux de ces matériaux à savoir légèreté et une grande résistance mécanique.

Enfin, après avoir donné des généralités sur les principales propriétés des matériaux constitutifs et les différentes caractéristiques, dans le second chapitre on va approfondi notre recherche dans ces matériaux spécialement sur le composite stratifié et leur principales caractéristiques.

CHAPITRE 2 : APERÇU SUR LES COMPOSITES STRATIFIÉS

2.1 Introduction

Ce chapitre présente un aperçu sur les composites stratifiés, ces matériaux constituant le stratifié sont généralement choisis en fonction de l'application que l'on souhaite. Cette structure sous forme d'empilement permet de maximiser certaines propriétés mécaniques dans les directions voulues. Ainsi, le taux rigidité/poids de la structure peut être fortement amélioré, ce qui fait des stratifiés, un type de matériau composite de plus en plus utilisé dans différents domaines.

Dans la littérature, les stratifiés sont particulièrement sensibles aux chargements, comme les impacts à basse vitesse, qui peuvent créer des dommages internes (délaminage, rupture de matrice et de fibres), dès l'apparition des structures stratifiés, de nombreux chercheurs ont mis en équations le comportement mécanique de ces matériaux.

2.2 Architecture des stratifiés

Généralement l'architecture des stratifiés résulte de la conception des pièces en matériaux composites :

- Suivant des plaques ou coques ;
- Par stratification de couches successives.

Ce mode de conception justifie l'importance des plaques dans l'analyse des structures en composites. En effet, outre les structures de type plaques, l'analyse des plaques permet également, dans le cadre de calcul par éléments finis, de modéliser les structures coques.

D'une manière générale, une plaque est un solide limité par deux plans parallèles (figure 2.1), dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme plan Oxy . L'axe Oz correspond à la direction suivant l'épaisseur.

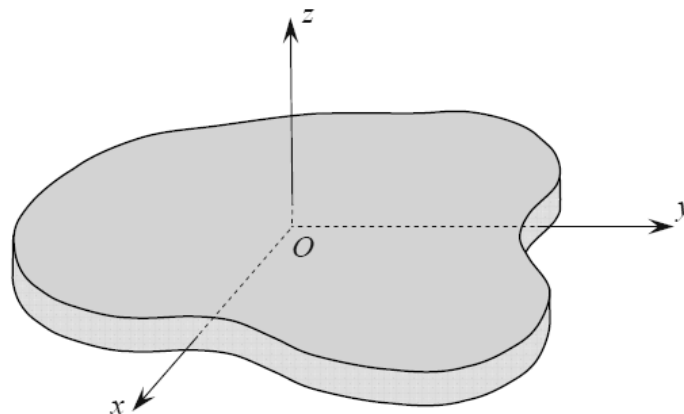


Figure 2. 1 : Élément de plaque [25].

Le stratifié est constitué de n couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence (Oxy) et l'axe Oz est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

2.3 Qu'est-ce qu'un composite stratifié ?

On appelle composite stratifié ; ce qui résulte de plusieurs couches (ou pli) de nappes unidirectionnelles (figure 2.2) ou de tissus avec des orientations propres à chaque pli. Il est défini par ses séquences d'empilement.

Un stratifié est construit de plusieurs couches dans la direction de l'épaisseur [34].

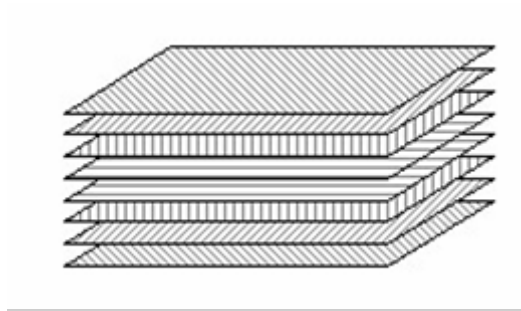


Figure 2. 2 : Un stratifié constitué de couches parfaitement liées.

Un stratifié monolithique est constitué de plusieurs plis composites (fibre/résine), caractérisés par leur orientation. La figure 2.3 présente la composition d'un stratifié dit quasi isotrope $[45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 0^\circ]_S$.

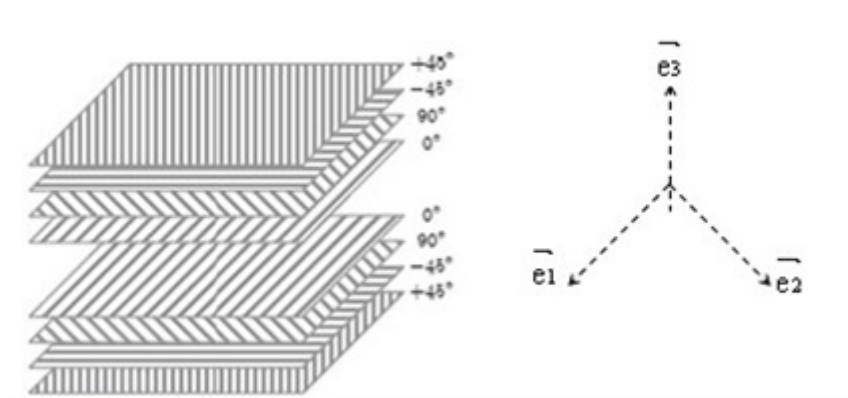


Figure 2. 3 : Composition d'un stratifié quasi-isotrope.

2.4 Les différents types des stratifiés

Parmi les stratifiés, il existe quatre types :

-Stratifié Unidirectionnel

L'orientation des fibres est la même dans tous les plis, ils sont toutes dans la même direction. Exemple : un stratifié unidirectionnel à 0° , $\theta=0^\circ$ dans les différents plis.

-Stratifié à Pli Orienté $\pm\theta$

L'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $(+\theta/-\theta/)$, avec θ différent de 0 ou de 90° .

-Stratifié à Pli Croisé

L'orientation des fibres est alternée (figure 2.4) d'un pli à l'autre, $0/90^\circ/0/90^\circ$.

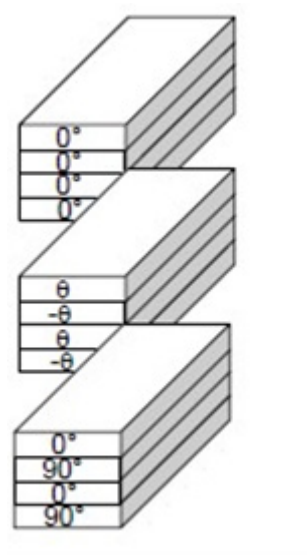


Figure 2. 4 : Pli au stratifié [34].

- Stratifié Symétrique

L'orientation des fibres est symétrique par rapport à la ligne centrale du stratifié (figure 2.5), c'est à dire pour chaque pli à angle θ au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté

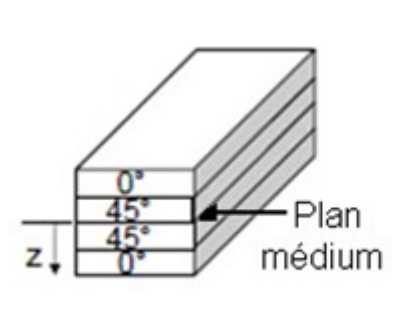


Figure 2. 5 : Un stratifié symétrique.

2.5 Hypothèses de la théorie des stratifiés

Les hypothèses suivantes sont fondamentales pour la théorie des plaques stratifiées :

- L'interface entre les couches est parfaite (Continuité des déplacements et des déformations) ;
- Chaque couche est un matériau homogène avec des propriétés effectives connues ;
- Les propriétés de la couche individuelle peuvent être isotropes, orthotropes ou transversalement isotropes ;
- Chaque couche est dans un état de contrainte plane ;
- Le stratifié se déforme selon les hypothèses de « Kirchhoff - Love » pour la flexion et la traction des plaques minces :
 - La normale au plan médium reste droite et est normale au plan médium déformé après déformation ;
 - Les normales au plan médium ne changent pas de longueur.

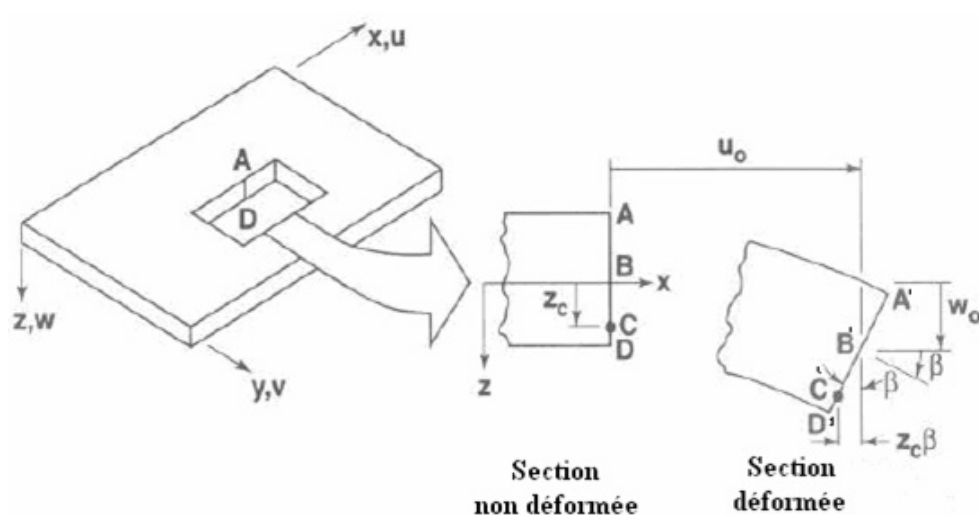


Figure 2. 6 : La géométrie de déformation [70].

2.6 Expression des résultantes et moments

2.6.1 Résultantes en membrane

Les forces par unité de longueur $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ (voir figure ci-dessous) sont définies :

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz \quad (2-1)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz \quad (2-2)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz \quad (2-3)$$

Comme suit :

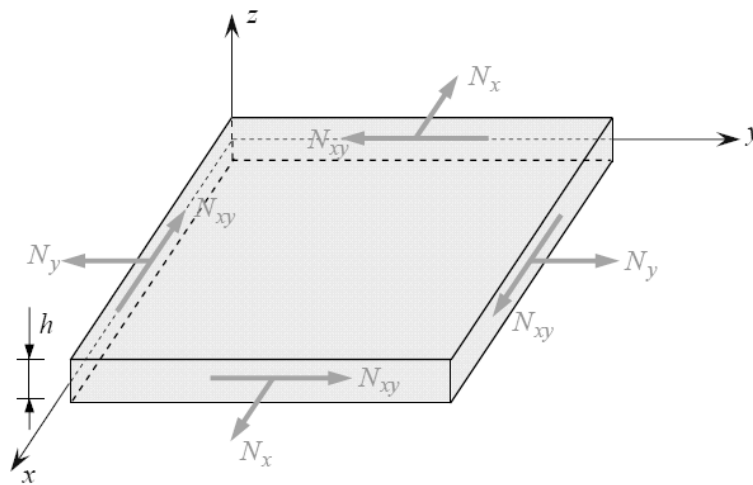


Figure 2. 7 : Forces par unités de longueur.

Les trois équations peuvent être sous la forme condensée :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} dz \quad (2-4)$$

Nous aurons :

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} [\bar{Q}]^k \{k\} z dz \quad (2-5)$$

Ou bien sous une autre forme :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz \right) \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]^k z dz \right) \{k\} \quad (2-6)$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\}$$

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k - z_{k-1})$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$
(2-7)

Où La matrice $[\bar{Q}]^k$ est constante à travers chaque couche mais peut être différente d'une couche à une autre.

L'équation (2-6) relie les forces de membrane par unité de longueur aux déformations du plan médium $\{\varepsilon^0\}$, et les courbures du stratifié $\{k\}$ par les matrices $[A]$ et $[B]$. La matrice $[A]$ représente « la membrane » et la matrice $[B]$ représente « la matrice de couplage membrane – flexion »

2.6.2 Moments par unité de longueur

On définit les moments par unité de longueur $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ comme l'intégrale des forces « $\sigma_i z dz$ », ainsi :

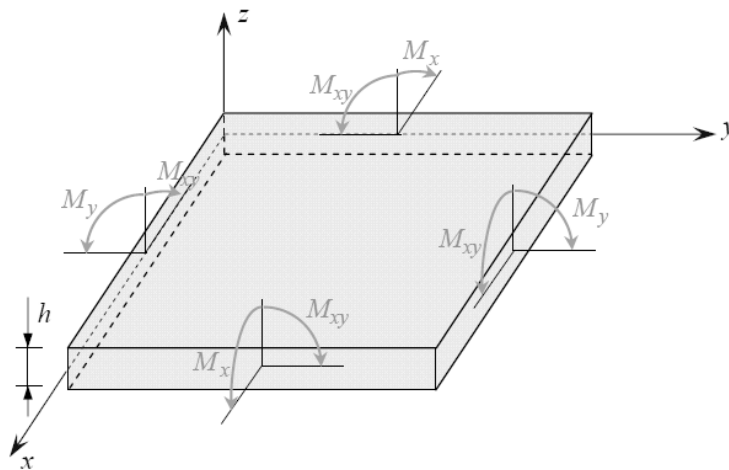


Figure 2. 8 : Moments par unités de longueur.

M_x : Moment fléchissant d'axe y , dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y .

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_x\} z dz \quad (2-8)$$

M_y : Moment fléchissant d'axe x , dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x .

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_y\} z dz \quad (2-9)$$

M_{xy} : Moment de torsion d'axe x , dû aux contraintes τ_{xy}

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\tau_{xy}\} z dz \quad (2-10)$$

Ou bien sous une forme condensée :

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} z dz \quad (2-11)$$

Substituant l'équation dans les équations (2-8), (2-9) et (2-10), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \quad (2-12)$$

Où la matrice de flexion est définie comme suit :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2-13)$$

2.7 Rupture des stratifiés composites sous l'effet de plusieurs phénomènes

L'étude des matériaux composites comporte plusieurs thèmes tels que procédés de fabrication, élasticité anisotrope, micromécanique...etc. Nous nous intéressons au sujet de l'endommagement de ces matériaux, plus particulièrement des stratifiés composites. Ce type de matériau est très répandu dans des applications où la réduction de poids est critique. Comme l'utilisation s'agrandit, la probabilité des ruptures

éventuelles est également augmentée. La capacité de caractériser les ruptures, par exemple en termes des modes de rupture, des paramètres, ou des valeurs critiques à la rupture, est essentielle pour assurer l'intégrité des pièces en service et pour la conception des futurs produits.

La rupture des stratifiés composites peut se produire de plusieurs façons très complexes. Les modes de rupture dépendent de la stratification et de la direction du chargement par rapport à l'orientation des fibres. La figure 2.9 illustre les allures des ruptures par flexion. Des différences remarquables à l'échelle macroscopique peuvent être constatées selon différentes stratifications [24].

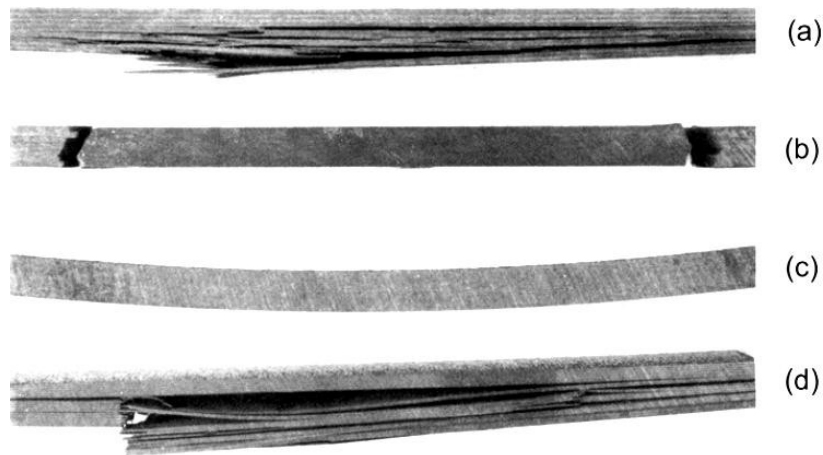


Figure 2. 9 : Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) $\pm 45^\circ$, (d) $0^\circ/90^\circ$ [24].

La description de la rupture à l'échelle du pli est, par contre, relativement efficace pour le classement des mécanismes de rupture. Les stratifiés à renforts de fibres longues ont trois types de rupture : rupture intralaminare, rupture interlaminare, et rupture translaminare.

Ces trois mécanismes de rupture (figure 2.10) définissent le plan de rupture par rapport aux constituants du matériau. La rupture intralaminare se trouve à l'intérieur d'un pli tandis que la rupture interlaminare décrit une rupture entre deux plis adjacents. La rupture translaminare est orientée transversalement à l'orientation de fibres dans le pli endommagé.

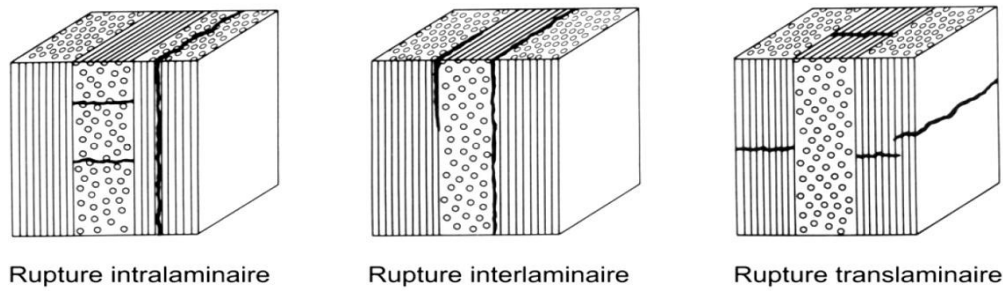


Figure 2. 10 : Mécanismes de rupture dans un stratifié $0^\circ/90^\circ/0^\circ$.

Avec cette convention, les ruptures des stratifiés à renforts de fibres longues peuvent être décrites en termes des mécanismes de rupture à l'échelle du pli, identifiables par des observations microscopiques sur les surfaces de rupture.

2.7.1 Rupture intralaminare

La rupture intralaminare est due principalement à la faible résistance de la matrice et de l'adhérence entre la matrice et les fibres. Elle est provoquée par les contraintes dans le plan du stratifié. Un pli se détériore par la contrainte résultante en traction dans la direction normale aux fibres. Ce type de rupture est donc couramment appelée la « fissuration transverse ».

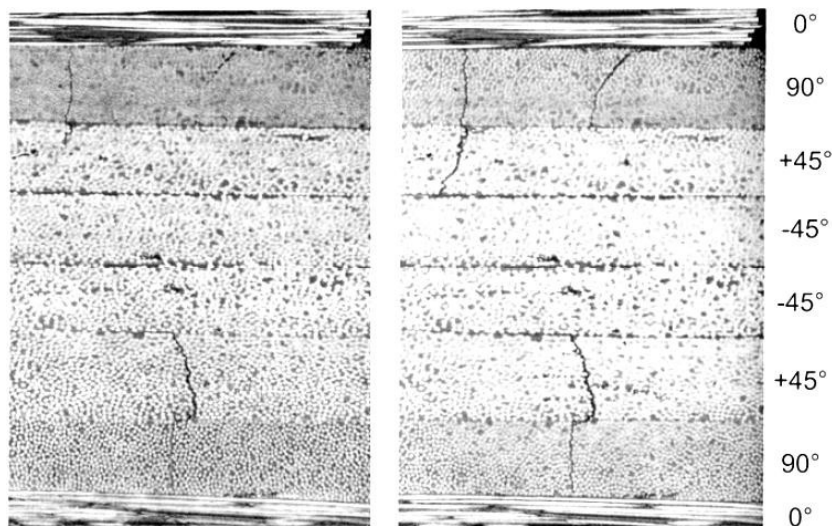


Figure 2. 11 : Evolution de la fissuration transverse [24].

Dans les stratifiés multidirectionnels, la fissuration transverse se présente, en général, successivement du pli le plus faible au plus résistant. Par exemple, la figure 2.11 présente un stratifié $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_S$ d'un graphite/époxy qui subit une

traction uniaxiale. La première fissure apparaît dans les plis de 90° . Quand la charge augmente, plus de fissures se développent mais elles restent dans les plis de 90° . Lorsque la charge augmente davantage, des fissures se produisent dans les plis adjacents ($+45^\circ$), puis elles continuent vers les interfaces $+45^\circ/-45^\circ$.

2.7.2 Rupture interlaminaire

La rupture interlaminaire se produit dans l'interface entre deux plis d'un stratifié. La surface de rupture montre, en général, la rupture de la matrice et la décohésion fibre/matrice. Ces mécanismes impliquent peu de rupture de fibres. Comme pour les matériaux métalliques, la rupture peut être en mode I (ouverture), mode II (glissement droit), mode III (glissement vis), ou une combinaison des trois modes. Un grand nombre d'études décrivent les mécanismes de séparation en mode I et mode II (figure 2.12).

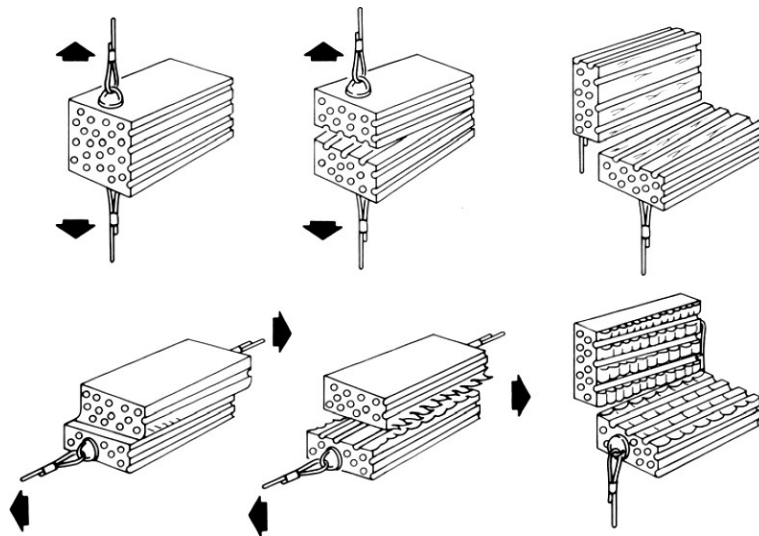


Figure 2. 12 : Schéma de la rupture interlaminaire
(a) Mode I traction, (b) Mode II cisaillement.

2.7.3 Rupture translaminaire

La rupture translaminaire concerne la rupture de fibres. Les surfaces de rupture sont donc généralement marquées par la morphologie rugueuse des bouts de fibres. En effet, la contrainte à rupture des fibres est plus importante que celle de tous les autres constituants d'un stratifié composite. Par conséquent, ce mécanisme de rupture entraîne souvent la rupture totale du stratifié. La rupture translaminaire peut être

séparée en deux modes selon les chargements : la rupture par traction et le microflambage par compression.

2.7.3.1 Rupture translaminaire en traction

La rupture fragile des fibres est le mécanisme principal, avec la rupture de la matrice environnante considérée comme secondaire. Les fibres se cassent typiquement par paquets ; les fibres dans chaque paquet ont un plan de rupture commun. Différents plans de rupture sont ensuite joints par la décohésion fibres/matrice et par la rupture en cisaillement de la matrice.

2.7.3.2 Rupture translaminaire en compression

Le microflambage par compression est le mécanisme principal de ce type de rupture. Les fibres individuelles flambent localement au point où l'instabilité est maximum. Le coude de chaque fibre provoque deux ruptures séparées par une distance de 5 à 10 fois le diamètre de la fibre.

2.8 Conclusion

L'intérêt de ce chapitre est de démontrer un aspect général sur les composites stratifiés, tel que leur architecture, définition, type et endommagement, une synthèse était présentée sur les hypothèses de la théorie des stratifiés qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses.

Une fois un aperçu sur les composites stratifiés présentés, les différentes théories développées et appliquées au matériau composite (plaque) seront définies dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3 : MODÈLES ET THÉORIES DES PLAQUES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, une synthèse bibliographique regroupe et présente les travaux de recherche effectués sur les différents types de modèles ou approches employés pour les matériaux composites. On présente aussi une étude dans la littérature écrivant l'état de l'art de la recherche sur les structures en matériaux composites.

La théorie classique des plaques (CPT) est la plus simple, également connue par la théorie de Kirchoff [77], qui ignore à la fois les effets de cisaillement et de déformation normale. La théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) développée par Mindlin [101]. Cette théorie (FSDT) rend compte de l'effet de déformation de cisaillement au moyen d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Un facteur de correction de cisaillement est donc requis. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été introduites. Ces derniers sont les plus utilisées en raison de leurs simplicités et précision.

3.2 Définition des plaques

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés, définies par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur, notée $h(x, y)$, petite par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur, suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince ou épais aux plaques et coques.

Différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel, d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique régnant le comportement :

- a. Les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée ;
- b. Les plaques minces avec de grandes flèches (Karman) ;
- c. Plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

3.3 Synthèse sur les théories

Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich...etc.) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

La théorie la plus ancienne est celle de Kirchhoff, Dhatt [38] qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre couramment associée à Mindlin, Reissner [123] qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de par l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de cisaillement transversal constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion/ cisaillement transversal.

Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du cisaillement transversal γ sont introduits. Les éléments finis formulés en déplacement basés sur la théorie du premier ordre donnent généralement de bons résultats pour les structures isotropes et orthotropes.

Ils deviennent peu précis une fois appliqués aux matériaux composites contenant plusieurs couches avec une anisotropie très différente d'une couche à une autre, auquel cas il faudrait imposer des conditions de continuité sur les interfaces [108]. Certes, les facteurs de correction du cisaillement transversal, une fois introduits dans les modèles du 1^{er} ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluation dépend malheureusement du nombre de stratifications.

Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre supérieur ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney [152], qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet un grand nombre de paramètres.

D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Une synthèse sur l'aspect des théories du premier ordre et d'ordre supérieur est développée dans la section suivante.

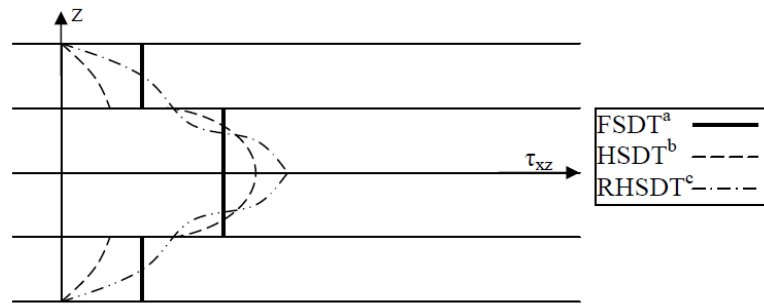


Figure 3. 1 : Distribution des contraintes de cisaillement τ_{xz} selon 3 théories [6].

a : FSDT, First order shear deformation theory

b : HSDT, High order shear deformation theory

c : RHSDT, Refined high order shear deformation theory

Un premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre [35, 14]. En optant pour ce choix, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure composite.

Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (figure 3.2). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre, des facteurs de corrections doivent être introduits [6].

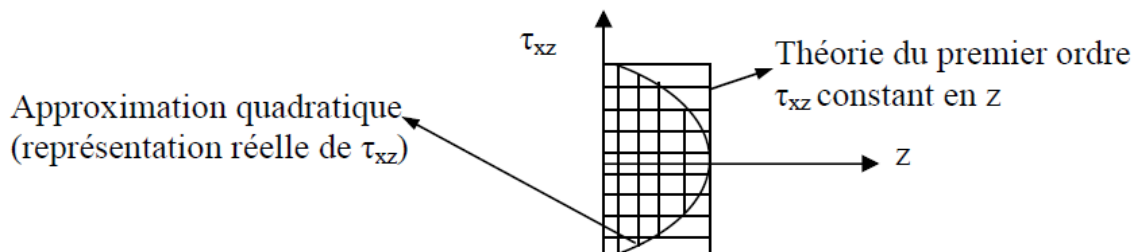


Figure 3. 2 : Approximations de la contrainte du cisaillement transversal.

3.4 Facteurs de correction du cisaillement transversal

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse, associée à la théorie du 1^{er} ordre, et celle due aux contraintes de cisaillement. Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre. [35, 14, 83, 27 et 10], Un calcul plus exact [10, 61 et 93] des facteurs de correction est obtenu en comparant l'énergie de cisaillement du 1er ordre et celle associée à la théorie d'ordre supérieur.

Bouabdallah [27] a développé une méthode de calcul des facteurs de correction du cisaillement transversal pour les coques cylindriques courbes. Il les identifie par une comparaison entre l'énergie de cisaillement résultante des équations d'équilibre et celle provenant de la déformation de cisaillement de premier ordre (énergie effective). Bouabdallah a aussi étudié l'influence du rapport épaisseur/rayon (h/R) sur les facteurs de correction k_{xz} et k_{yz} on note que R est le rayon courbure de la coque. Il a conclu que plus h/R augmente, plus l'écart entre $k = 5/6$ (plaque isotrope) et k_{xz} augmente.

Choa *et al.*, [33] ont proposé une autre méthode de calcul des facteurs de correction en comparant l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier ordre et celle déduite des équations d'équilibre de façon à obtenir des facteurs de correction initiale entre FSDT(First Shear Deformation Theory) et EHOST(Efficient High Order Theory) (Pour corriger les déformations de cisaillement transversal qui réduisent l'effet de rotation de l'angle de cisaillement g) [6].

3.5 Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée [80, 69 et 91]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme [150] :

$$U_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + x_3 \vartheta_i^{0(1)}(x_1, x_2) + Z_3^2 \vartheta_i^{0(2)}(x_1, x_2) + x^3 \vartheta_i^{0(3)}(x_1, x_2) + x^4 \vartheta_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (3-1)$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3^{ème} ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur ϑ_i^0 détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :

$$\vartheta_i^{0(j)} = 0 \quad \text{pour } j= 2, 3, 4 \dots$$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (3-1) est utilisé avec $\vartheta_i^{0(4)} = \vartheta_i^{0(2)} = \vartheta_i^{0(1)} = 0, \alpha = \{1, 2\}$.

Le champ de déplacement (3-1) devient :

$$\begin{cases} U_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_\alpha + f(z) \gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ U_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3-2)$$

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature pour décrire le gauchissement à travers l'épaisseur. Nous citons en particulier :

-L'approche de Touratier [M. Touratier.1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (3-3)$$

-L'approche de Karama [Karama *et al.* 2003] avec ;

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (3-4)$$

-L'approche de Akavci [Akavci.2010] avec ;

$$f(z) = (3\pi/2)h \tanh(z/h) - (3\pi/2)z \sec h^2(1/2) \quad (3-5)$$

-L'approche de Nguyen [Nguyen *et al.* 2015] avec ;

$$f(z) = \cot^{-1}(h/z) - 16z^3/15h^3 \quad (3-6)$$

-L'approche de Cukanovi'c [Cukanovi'c *et al.* 2018] avec ;

$$f(z) = z \left(\cos h \left(\frac{z}{h} \right) - 1.388 \right) \quad (3-7)$$

3.5.1 Théorie des plaques stratifiées

Le terme plaque peut avoir différentes significations, mais en construction et en génie mécanique, une plaque est une pièce dont l'épaisseur est négligeable devant les autres dimensions (voir aussi Tôle) [101].

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Elle s'inspire de la théorie des poutres.

En 1888, Love [87] utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres, afin de fonder une théorie sur plaques minces.

Augustus Edward Hough Love (1863-1940) est un mathématicien anglais connu principalement pour ses travaux sur la théorie des déformations élastiques et la propagation des ondes.

La théorie des plaques épaisse a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de [119, 147 et 123].

Comme pour l'étude des poutres, on met en relation une forme finale de la plaque. Grâce au principe d'équivalence, on peut établir la relation entre le champ des déplacements et le champ de tenseur des déformations, ainsi que les efforts de cohésion avec le tenseur des contraintes. Quant à la liaison entre les contraintes et le tenseur des déformations, s'écrit grâce à la loi de Hooke généralisée.

Une plaque composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes et collées. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwiches) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses.

On trouve dans des recherches bibliographiques [2, 114], des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'approche tridimensionnelle est utilisée pour l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption de cette approche s'avère nécessaire dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. Elle est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple.

Plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés ces dernières années, pour la modélisation des structures multicouches. Ces modèles permettent de réduire le problème d'élasticité 3D en 2D ; en considérant un champ de déplacement continu suivant l'épaisseur avec également une continuité de déformation entre les différentes couches.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté : [2] et [114].

- Approche monocouche équivalente ;
- Approche par couche ;
- Approche développement asymptotique.

Dans l'approche monocouche équivalente, la plaque multicouche hétérogène complexe est homogénéisée et considérée comme un seul lamina (une seule couche) statiquement équivalente.

3.5.1.1 Les modèles classiques Love-Kirchhoff (Plaques Stratifiées CLPT)

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [124, 107].

L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [77] de contraintes planes et les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et elle est perpendiculaire à la surface moyenne après déformation (figure 3.3).

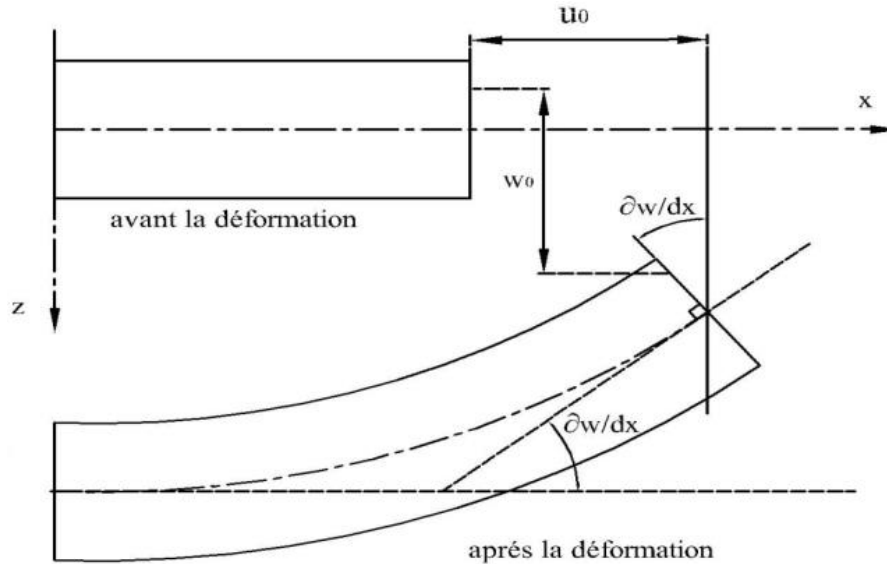


Figure 3.3 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$U(M) = \begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) - zw_x^0(x) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) - zw_y^0(y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (3-8)$$

Avec,

$u^0(x, y), v^0(x, y)$: Les déplacements de membrane dans la direction x et y ,

w : La flèche de la plaque,

$w^0(x), w^0(y)$: Rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

3.5.1.2 Les modèles Reissner-Mindlin (Théorie de Déformation en Cisaillement du Premier Ordre FSĐT)

Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique de Mindlin adoptée est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (figure 3.4).

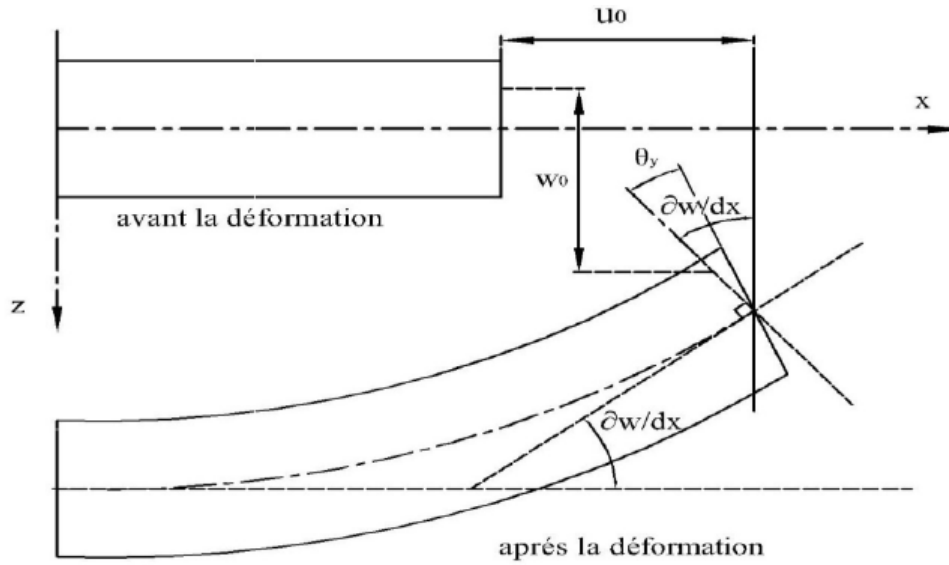


Figure 3. 4 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin [101] s'écrit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) - zw_x^0(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) - zw_y^0(y) + z\gamma_{yz}^0(y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (3-9)$$

Avec,

γ_{xz}^0 et γ_{yz}^0 , Les distorsions ou déformations angulaires mesurées sur la ligne moyenne de la plaque. Tel que :

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^0(x) &= w_x^0(x) - \vartheta^0(x) \\ \gamma_{yz}^0(y) &= w_y^0(y) - \vartheta^0(y) \end{aligned} \quad (3-10)$$

$\vartheta^0(x)$ et $\vartheta^0(y)$: Etant les rotations totales de la section mesurée sur la ligne moyenne de la plaque

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches.

Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal [69]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des composites épais restes aléatoires par ce type d'approche cinématique.

La figure 3.5 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il y'a une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

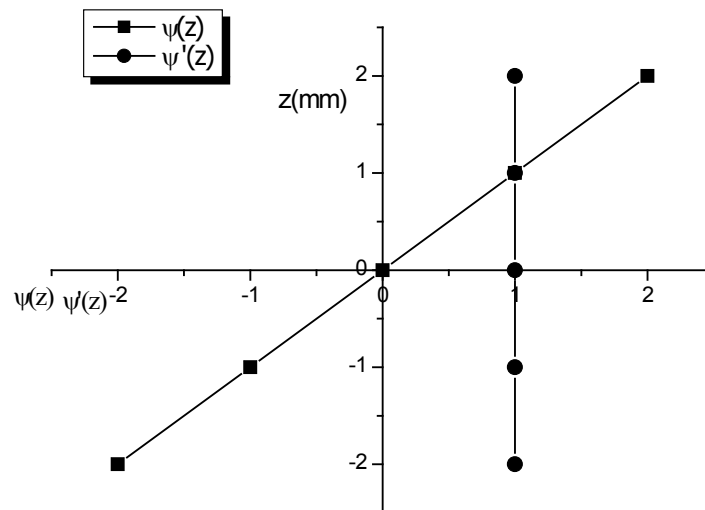


Figure 3. 5 : Variation de la fonction de gauchissement $\psi(z) = z$ et $\psi'(z)$ suivant l'épaisseur.

3.5.1.3 La théorie d'ordre élevé (Modèle d'Ordre Supérieur)

Pour passer les limites des théories de déformation en cisaillement du premier ordre, certains auteurs proposent des théories à un ordre supérieur.

Ces théories sont basées sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur (figure 3.6) et permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée [91].

Le champ de déplacements est en général défini par une série de Taylor de la forme suivante :

$$u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) + z\phi_i^{0(1)}(x, y) + z^2\phi_i^{0(2)}(x, y) + z^3\phi_i^{0(3)}(x, y) + z^4\phi_i^{0(4)}(x, y) \quad (3-11)$$

Dans la théorie du premier ordre (Reissner-Mindlin), la fonction $\phi_i^{0(j)}=0$ pour $j=2, 3, 4$. La précision augmente dans les modèles d'ordre supérieur que dans les modèles du premier ordre.

Elle augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques, Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées.

On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Finalement, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x) - zw'_x(x) + \phi(z)\gamma'_{xz}(x) \\ v(x, y, z) = v^0(y) - zw'_y(y) + \phi(z)\gamma'_{yz}(y) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases} \quad (3-12)$$

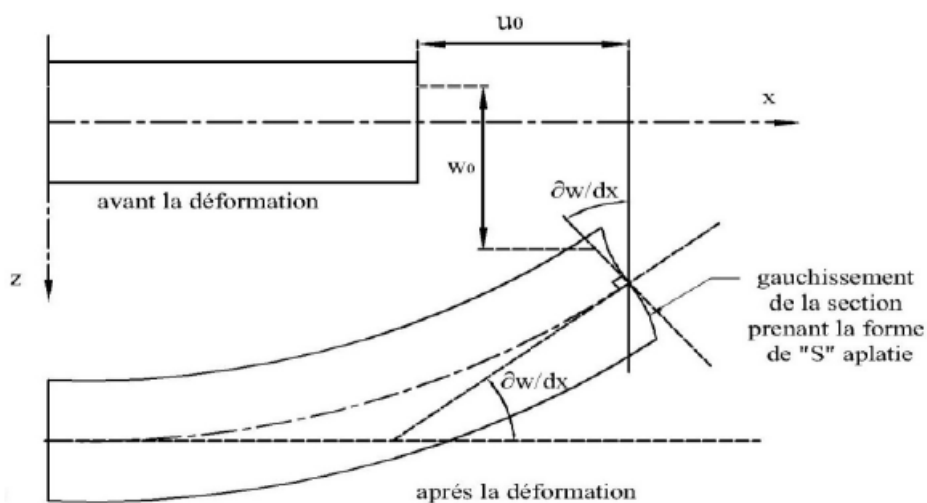


Figure 3. 6 : Cinématique des théories d'ordre supérieur.

On va citer quelques exemples des fonctions de cisaillement utilisées dans les modèles d'ordre supérieur :

- L'approche de [9] avec ;

$$\phi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (3-13)$$

- L'approche de [123, 109 et 74] avec ;

$$\phi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (3-14)$$

- L'approche de [90, 92 et 120] avec ;

$$\phi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (3-15)$$

h : étant l'épaisseur de multicouches.

Dans le modèle de [120], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de [91] avec le modèle sinus ; fonction trigonométrique sinusoïdale utilisée pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque et la fonction de cisaillement transverse s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3-16)$$

- Récemment, Afaq *et al.*, [71] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse prend la forme suivante :

$$\phi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \tag{3-17}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" ne permet qu'un développement en puissances impaires.

- L'approche de [98] avec ;

$$\phi(z) = z\alpha \frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0 \tag{3-18}$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

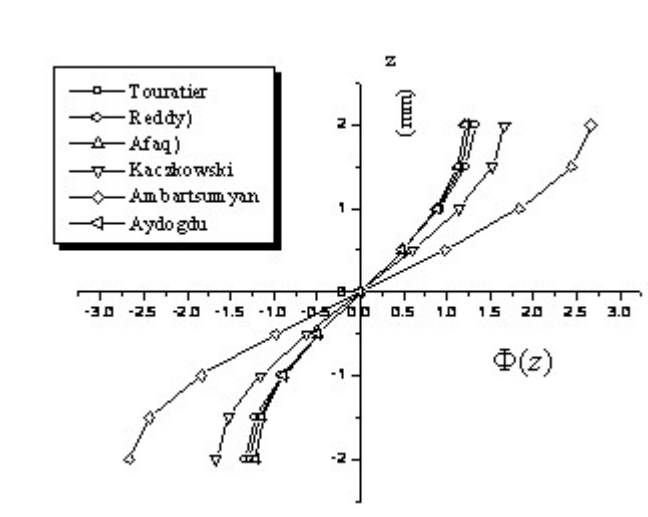


Figure 3. 7 : Variation de la fonction de forme $\phi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

Selon la figure 3.7 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un peu loin des autres fonctions de forme ; elles sont servies comme éléments de base pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

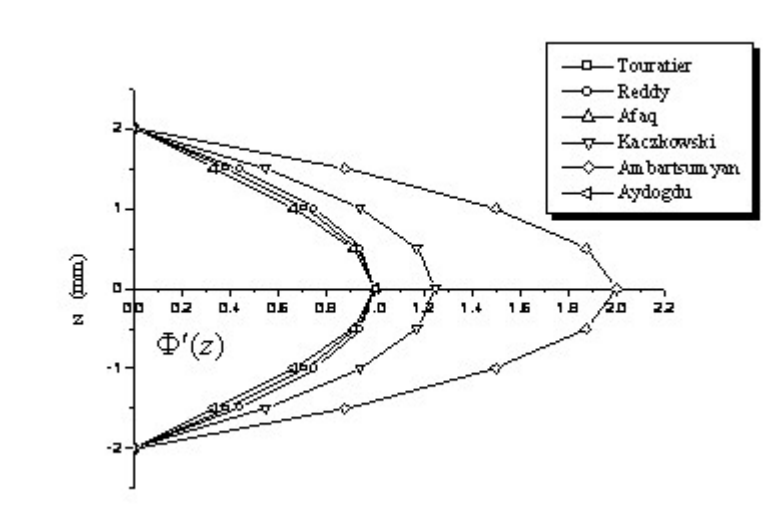


Figure 3. 8 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $\Phi'(z)$ des différents modèles Suivant l'épaisseur.

Pour la figure 3.8 on remarque aussi la divergence des deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski par rapport aux autres approches.

Il faut signaler aussi que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage). Mais, pour le cas des matériaux FGM, cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

3.5.2 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les équations (3-11) et (3-12) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [1, 41, 71, 120 et 88]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du

nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles Zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact sont indépendantes du nombre de couches (figure 3.9 et figure 3.10).

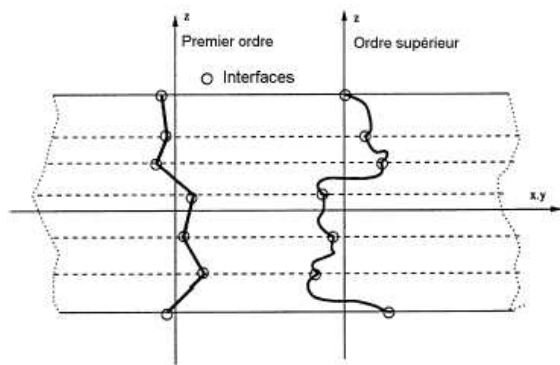


Figure 3. 9 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique [28].

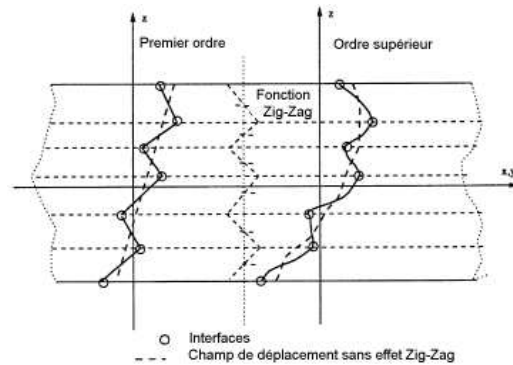


Figure 3. 10 : Champ de déplacements des modèles Zig-zag, approche cinématique [28].

3.5.3 Les modèles Zig-Zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle Zig-zag du premier ordre [88]. Dans ce modèle, les déplacements

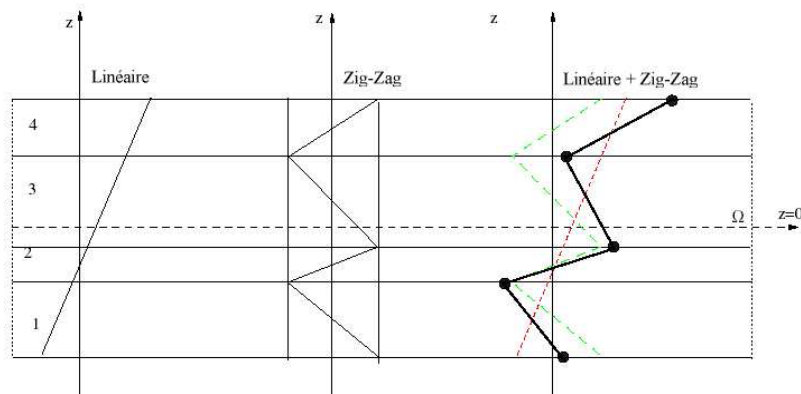


Figure 3. 11 : Champ de déplacements des modèles Zig-zag du premier ordre [28].

membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction Zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction Zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z , mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (figure 3.11). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transversal aux interfaces est assurée.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles Zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle Zig-zag [28]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ Zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (figure 3.12). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

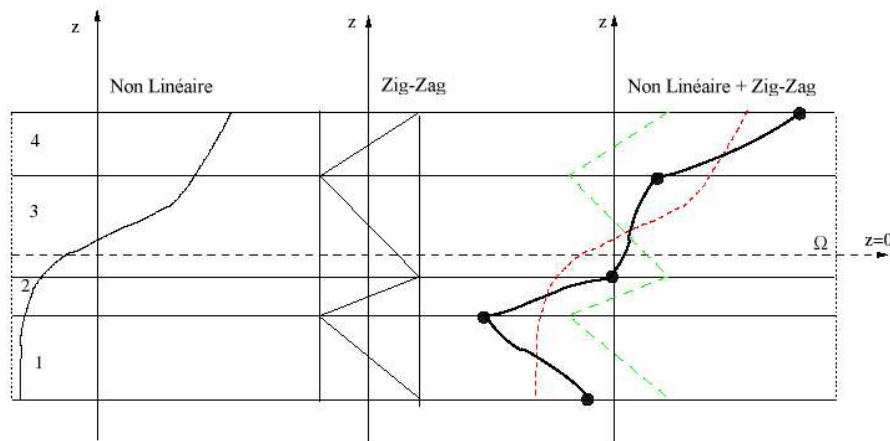


Figure 3. 12 : Champ de déplacements des modèles Zig-zag d'ordre supérieur [28].

Dans les travaux de [89, 29], la fonction sinus de Touratier [91] est combiné avec la fonction Zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, Afaq *et al.* [71] combine le modèle exponentiel avec l'effet Zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle Zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles Zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces quelques modèles peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transversal par les équations constitutives des modèles Zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élanement diminue [149]. Un autre inconvénient des modèles Zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

3.6 Modèles éléments finis des structures multicouches

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'aux méthodes des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides).

3.6.1 Modèles éléments finis 2D

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction [120, 57]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud.

L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transversal. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité, les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide.) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux.

Un des inconvénients majeurs de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans [150] une procédure en deux phases pour

l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transversal calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer.

Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux w mais encore leurs dérivées normales doivent être continus à travers des frontières inters éléments.

Dans Ren [125], un élément de continuité C1 basé sur le modèle cubique de Reddy [120] est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par nœud. Les contraintes de cisaillement transversal sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transversal. En se basant sur le modèle "sinus" de Touratier [91], différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité C1 sont développés [150, 113].

Les travaux de Khare *et al.* [76] ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 nœuds sont proposés (figure 3.13 et figure 3.14). Ils diffèrent par l'ordre du développement en série de Taylor adopté pour le champ de déplacement :

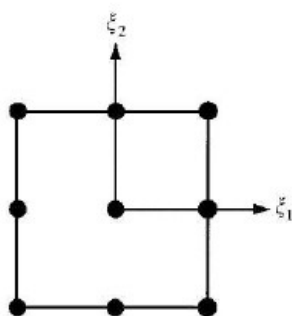


Figure 3. 13 : Elément quadrilatère de type Lagrange à 9 nœuds [150].

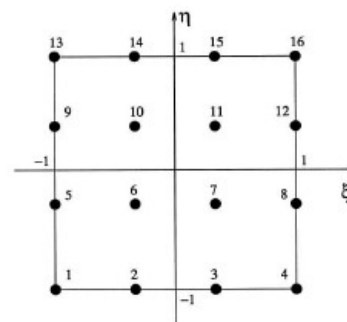


Figure 3. 14 : Elément quadrilatère de type Lagrange à 16 nœuds [150].

3.6.2 Modèles éléments finis 3D

Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso paramétrique 20 nœuds de Raju [117] sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres.

Icardi *et al.* [149] étudient la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément brique 20 nœuds et un élément singulier 15 nœuds généré à partir d'un élément de brique 20 nœuds. Une procédure de calcul à deux phases prédicateur-correcteur est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces. Le maillage utilisé est présenté sur la figure 3.15.

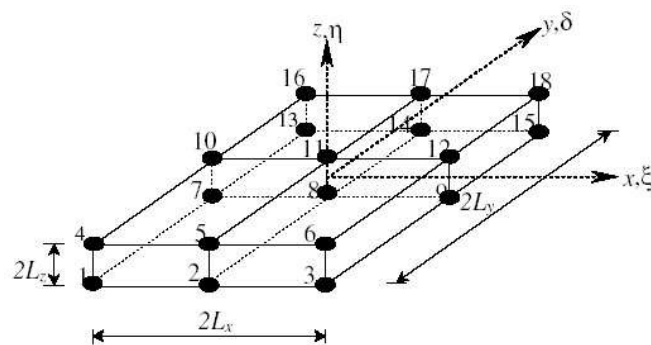


Figure 3.15 : Elément brique mixte à 18 nœuds [150].

Dans Bui [28] les interfaces sont modélisées par un élément typique à l'épaisseur zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégénérant continuellement vers zéro l'épaisseur d'un élément de plaque mince (figure 3.16). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

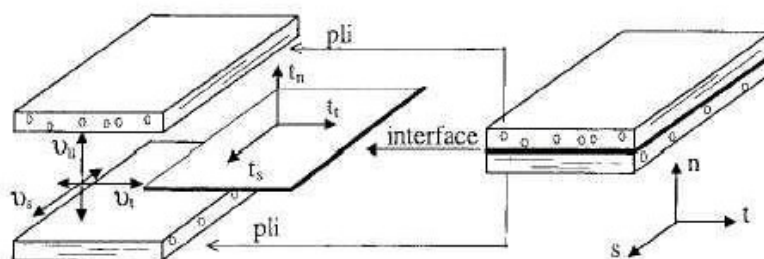


Figure 3.16 : Elément d'interface [150].

Cette méthode évite un obstacle classique des approches 3D. Compte tenu du fait que les contraintes sont calculées dans l'élément et non sur sa frontière, l'estimation des contraintes d'interface par les éléments finis 3D nécessite souvent un travail de post-processeur pour relocaliser et calculer les valeurs précises aux interfaces. En plus, les contraintes obtenues aux voisinages des bords libres sont singuliers et dépendent du raffinement du maillage.

3.7 Conclusion

Les éléments présentés dans cette section montrent, le développement de divers modèles pour la modélisation et l'analyse des plaques telle que, la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. La majorité des recherches menées purement analytique, pour prédire la réponse globale des plaques et des coques sous des charges mécaniques thermiques...etc.

CHAPITRE 4 : FORMULATION THÉORIQUE POUR L'ANALYSE DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIÉES , SANDWICHES ET COQUES

4.1 Introduction

L'analyse du comportement dynamique et statique du matériau composite / sandwich stratifié mince a structure épais et coques dans le passé ont été classées selon l'une des différentes approches dérivées des équations d'élasticité.

Dans les structures sandwich modernes les peaux sont généralement composées de métal ou de matériaux composites laminés, et une âme compressible est composée d'un matériau de faible résistance ou de mousse polymère, la construction sandwich a été développée et utilisé à cause de sa grande rigidité en flexion, de poids spécifique faible et des qualités d'isolation importante, des bonnes caractéristiques en vibration, et excellentes propriétés contre la fatigue. La construction sandwich composite donne un grand potentiel pour les grands projets d'infrastructures civiles telles que les bâtiments industriels et les ponts routiers.

La théorie actuelle satisfait les conditions d'équilibre sur les faces supérieures et inférieure de la plaque sandwich et coque sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. La solution de Navier est utilisée pour obtenir la forme de solution rapprochée pour les plaques sandwiches simplement appuyée.

4.2 Les mouvements vibratoires

On appelle généralement mouvement vibratoire, un mouvement périodique rapide s'effectuant de part et d'autre d'une position d'équilibre. La vibration de l'extrémité libre d'une lame de d'acier (lame de rasoir, lame de scie) dont l'autre extrémité est serrée dans un étau, les oscillations des branches d'un diapason, celles d'une corde de piano sont des exemples de mouvements vibratoires.

4.2.1 Principales sources de vibrations

Parmi les sources de vibrations qui peuvent avoir un effet défavorable sur les structures de résistance on peut mentionner : les outillages et installations ayant des masses non équilibrées ; les agrégats ayant des charges variables de courte durée ; les convois mobiles dues à l'action des ponts ; les mouvements sismiques ; l'action du vent et les explosions.

- Vibrations libres, dues à l'application d'un choc, il est à observer que les vibrations propres représentent un cas particulier des vibrations libres ;
- Vibrations forcées ou entretenues effets d'une perturbation extérieure, indépendante de la caractéristique propre du système oscillant ;
- Vibrations paramétriques produites par la vibration périodique d'un paramètre quelconque : masse, constante élastique, amortissement ;

4.3 Aperçu sur des travaux de recherche

Divers modèles de calcul disponibles dans la littérature ouverte, ont été utilisés par Noor et Burton [106] pour prédire les réponses thermiques et thermomécaniques des plaques et des coques multicouches, tandis que Leissa et Chang [84] ont dérivé une théorie rigoureuse et complète qui régit la déformation linéairement élastique, y compris les effets de la déformation de cisaillement et de l'inertie rotative pour résoudre les problèmes statiques et dynamiques des coques composites stratifiées peu profondes, ayant une courbure arbitraire et une épaisseur constante.

Les formulations de forme fermée de HSDT 2D sont fournies par Khare *et al.* [75] pour l'analyse de flexion de coques composites stratifiées croisées simplement supportées et de coques sandwichs peu profondes dans des conditions de charge

thermomécanique. De plus, l'effet de la variation de la géométrie, de la superficialité, du schéma de stratification et des autres paramètres sur la déflexion centrale transversale est examiné en détail dans cette analyse. Dans une autre étude, Panda et Singh [110] ont étudié la réponse thermique post-flambage de panneaux composites cylindriques / hyperboloïdes à coque peu profonde soumis à un champ de température uniforme, en utilisant un modèle d'éléments finis non linéaire basé sur le HSDT pour différents paramètres géométriques.

Étant donné que les plaques composites et la courbure des coques posent des problèmes nouveaux et délicats par rapport au cas des plaques conventionnelles, plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont par la suite été développées pour optimiser l'analyse de différents types de plaques et coques laminées / sandwich. Sont largement utilisées par de nombreux chercheurs. Kumar *et al.* [79] ont appliqué un nouveau modèle d'éléments finis basé sur HSDT pour résoudre de nombreux problèmes de réponse statique des coques de biais composites stratifiées en tenant compte de différentes géométries, conditions aux limites, chargements et autres paramètres de coque. La même année, Viola *et al.* [151] ont proposé un HSDT 2D pour l'analyse des vibrations libres de coques et de panneaux stratifiés doublement courbes moyennement épais avec différentes courbures, en utilisant la technique de quadrature différentielle généralisée et un champ de déplacement à neuf degrés de liberté fixes. Sayyad et Ghugal [129] ont passé en revue les différentes méthodes mises en œuvre dans la littérature disponible pour l'analyse des vibrations libres de plaques composites stratifiées multicouches et de plaques sandwichs à l'aide de différents HSDT. L'année suivante, de nouvelles théories de déformation de cisaillement ont été proposées par Sarangan et Singh [128] pour étudier l'analyse de la flexion, du flambage et des vibrations libres des plaques stratifiées composites et sandwichs. En outre, la forme généralisée des équations différentielles de gouvernance est dérivée en employant le principe des travaux virtuels et résolue par la technique de résolution de forme fermée de Navier. Par la suite, Tornabene [148] a proposé une théorie par couches d'ordre supérieur, dans laquelle l'effet d'étirement est inclus pour chaque couche en utilisant un champ de déplacement général basé sur la formulation unifiée de Carrera pour l'analyse des

vibrations libres de coques composites stratifiées épaisses à double courbure et panneaux. Une solution analytique pour le problème statique thermoélastique des plaques composites stratifiées simplement supportées sous une charge thermique bi-sinusoidale a été présentée par Ramos *et al.* [118], en utilisant un champ de déplacement non polynomial modifié basé sur la formulation unifiée de Carrera. Abed et Majeed [4] ont analysé l'effet des conditions aux limites sur la réponse harmonique des plaques stratifiées.

4.4 Formulation théoriques et équations de base

Une théorie généralisée raffinée de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT) pour les plaques et coques stratifiées composites et sandwichs est développée. La théorie prend en compte une distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque / coque, et satisfait exactement les conditions de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque / coque sans nécessité de facteur de correction de cisaillement. De plus, le modèle proposé est facile à mettre en œuvre car il contient un plus petit nombre d'inconnues et d'équations de mouvement que les autres théories d'ordre supérieur. L'idée principale de la présente théorie découle des modèles HSDT conventionnels développés par plusieurs auteurs pour les plaques à l'analyse de flexion et de vibration libre des coques. La version originale du HSDT antérieur suppose le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}\bar{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \left(1 + \frac{\xi_3}{R_1}\right)u - \xi_3 \frac{\partial w}{\alpha_1 \partial \xi_1} + f(\xi_3)\phi_1, \\ \bar{v}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \left(1 + \frac{\xi_3}{R_2}\right)v - \xi_3 \frac{\partial w}{\alpha_2 \partial \xi_2} + f(\xi_3)\phi_2, \\ \bar{w}(\xi_1, \xi_2, t) &= w,\end{aligned}\tag{4-1}$$

Où $u(\xi_1, \xi_2, t)$, $v(\xi_1, \xi_2, t)$, $w(\xi_1, \xi_2, t)$, $\phi_1(\xi_1, \xi_2, t)$ et $\phi_2(\xi_1, \xi_2, t)$ sont le déplacement bien connu composants de la surface médiane de la plaque, tandis que $f(\xi_3)$ représente la fonction de forme identifiant la répartition des déformations et contraintes de cisaillement transversales sur l'épaisseur de la plaque / coque. Le modèle de déplacement généralisé en discussion est une théorie à quatre variables indépendantes définie comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \left(1 + \frac{\xi_2}{R_1}\right)u - \xi_3 \frac{\partial w}{a_1 \partial \xi_1} + k_1 f(\xi_3) \int \theta d\xi_1, \\ \bar{v}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \left(1 + \frac{\xi_2}{R_2}\right)v - \xi_3 \frac{\partial w}{a_2 \partial \xi_2} + k_2 f(\xi_3) \int \theta d\xi_2, \\ \bar{w}(\xi_1, \xi_2, t) &= w\end{aligned}\quad (4-2)$$

Où \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} sont les composantes de déplacement de tout point du domaine stratifié dans les directions ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 , respectivement. Dans cette étude, la fonction de forme est choisie sur la base de la fonction hyperbolique proposée par Soldatos [141] comme suit :

$$f(\xi_3) = h \sinh\left(\frac{\xi_3}{h}\right) - \xi_3 \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (4-3)$$

Dans la dérivation des équations nécessaires, de petites déformations élastiques sont supposées, (c'est-à-dire que les déplacements et les rotations sont petits et respectent la loi de Hooke), et la structure de la coque est composée d'un certain nombre de couches orthotropes, qui sont supposées être parfaitement liés ensemble.

4.4.1 Géométrie de la plaque

La base de la présente théorie de la coque stratifiée est la théorie de l'élasticité 3D, exprimée en coordonnées parallèles de surface curvilignes générales (de référence), alors que la coordonnée d'épaisseur est normale par rapport à la surface de référence comme indiqué sur la figure 4.1

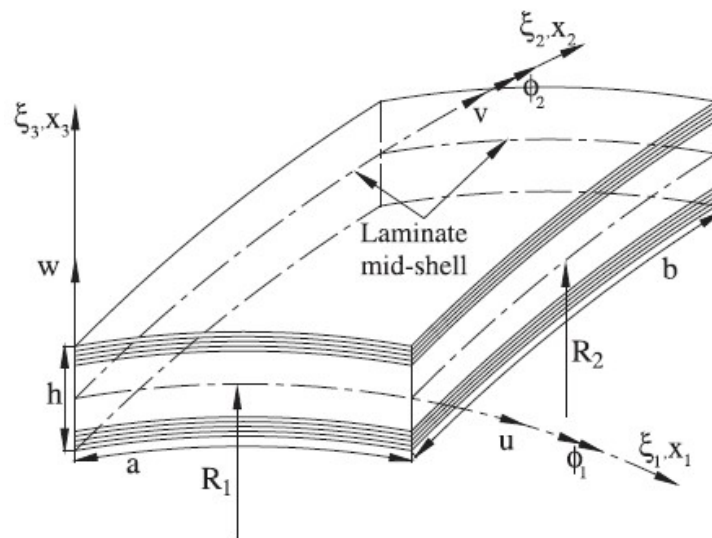


Figure 4.1 : Géométrie et notations pour coques stratifiées génériques avec ensemble positif d'axes de référence couche / stratifiés, composants de déplacement et orientation des fibres.

4.4.2 Equations cinématiques et constitutives

Les relations déformation-déplacement dans le repère curviligne Reddy [121] sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi_2} \bar{v} + \frac{a_1}{R_1} \bar{w} \right), \\
 \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi_2} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial \xi_1} \bar{u} + \frac{a_2}{R_2} \bar{w} \right), \\
 \varepsilon_4 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_2} + A_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{\bar{v}}{A_2} \right), \\
 \varepsilon_5 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_1} + A_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{\bar{u}}{A_1} \right), \\
 \varepsilon_6 &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\bar{v}}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\bar{u}}{A_1} \right),
 \end{aligned} \tag{4-4}$$

Dans laquelle $A_1 = a_1 \left(1 + \frac{\xi_3}{R_1} \right)$, $A_2 = a_2 \left(1 + \frac{\xi_3}{R_2} \right)$ et ε_i ($i = 1, \dots, 6$) désignent les composantes de la déformation, tandis que a_1 et a_2 sont des valeurs scalaires associées au type de coques. Substituer les expressions de déplacements considérés par l'équation (4-2) dans les relations données dans l'équation (4-4) d'une coque modérément peu profonde et profonde fournit les équations déformation-déplacement ci-après, valables pour un point arbitraire d'une plaque ou un panneau à double courbure à l'étude.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_6^1 \end{Bmatrix} + f(\xi_3) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2^2 \\ \varepsilon_6^2 \end{Bmatrix}, \\
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} &= g(\xi_3) \begin{Bmatrix} \varepsilon_4^3 \\ \varepsilon_5^3 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

Où

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{w}{R_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{w}{R_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_6^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{Bmatrix}, \\
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2^2 \\ \varepsilon_6^2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \int \theta dx_1 + k_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \int \theta dx_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-6a}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_4^3 \\ \varepsilon_5^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dx_2 \\ k_1 \int \theta dx_1 \end{Bmatrix} \quad (4-6b)$$

Et

$$g(\xi_3) = \frac{df(\xi_2)}{d\xi_2} \quad (4-6c)$$

Les intégrales adoptées dans les relations précédentes doivent être résolues par une solution de Navier et peuvent être écrites comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \int \theta dx_1 &= A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2}, & \frac{\partial}{\partial x_1} \int \theta dx_2 &= B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \int \theta dx_1 &= A' \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, & \int \theta dx_2 &= B' \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad (4-7)$$

Où A' et B' sont déterminés selon le type de solution employée, dans ce cas via la procédure de Navier. Donc, les coefficients A' , B' , k_1 et k_2 sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (4-8)$$

Où $\alpha = r\pi / a$; $\beta = s\pi / b$ et x_i désignent les coordonnées cartésien ($dx_1 = a_i d\xi_i$, $i = 1,2$). En supposant un comportement linéaire élastique, les relations de contrainte-déformation constitutives dans le système de coordonnées local orthotrope peuvent être résumées sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (4-9)$$

Où $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6, \sigma_4, \sigma_5)$ sont les contraintes normales et de cisaillement et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ sont les composants de déformation normale et de cisaillement dans le système de coordonnées local orthotrope. Les coefficients de rigidité Q_{ij} sont calculés de manière conventionnelle à partir des termes de constantes d'ingénieur donnés comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12}, & Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (4-10)$$

Où E_{11} , E_{22} , ν_{12} , ν_{21} , G_{12} , G_{23} et G_{13} sont les propriétés matérielles de la couche. En effectuant la règle de transformation de contrainte-déformation entre le système des coordonnées de la couche et le système des coordonnées globales de la plaque / coque stratifiée, les relations de contrainte-déformation dans le système de coordonnées global (ξ_1, ξ_2, ξ_3) peuvent être obtenu comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (4-11)$$

Où \bar{Q}_{ij}^k sont les coefficients élastiques transformés donnés par Reddy [121], qui sont calculés en fonction d'orientation d'angle des fibres de chaque couche par rapport au système global de coordonnées.

4.4.3 Equations de mouvement

Les équations du mouvement et les conditions aux limites associées de la présente théorie généralisée de déformation en cisaillement sont dérivées, en utilisant la version dynamique du principe des travaux virtuels énoncé par la forme analytique suivante : (Abdelmalek *et al.* [3], Ebrahimi et Barati [42, 43], Eltaher *et al.* [47,49], Fenjan *et al.* [53], Safa *et al.* [126], Zouatnia et Hadji [156], Rachedi *et al.* [115], Hamed *et al.* [63]).

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} (\sigma_1 \delta \varepsilon_1^{(k)} + \sigma_2 \delta \varepsilon_2^{(k)} + \sigma_6 \delta \varepsilon_6^{(k)} + \sigma_4 \delta \varepsilon_4^{(k)} + \sigma_5 \delta \varepsilon_5^{(k)}) dx_1 dx_2 d\xi_3 \right] dt \\ & \quad - \int_0^t \int_{\Omega} q \delta w dx_1 dx_2 dt \\ & \quad - \int_0^t \delta \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} \rho [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dx_1 dx_2 d\xi_3 \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (4-12)$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \left\{ \int_{\Omega} \left(N_1 \delta \varepsilon_1^0 + N_2 \delta \varepsilon_2^0 + N_6 \delta \varepsilon_6^0 + M_1 \delta \varepsilon_1^1 + M_2 \delta \varepsilon_2^1 + M_6 \delta \varepsilon_6^1 + P_1 \delta \varepsilon_1^2 + P_2 \delta \varepsilon_2^2 + P_6 \delta \varepsilon_6^2 \right. \right. \\
 \left. \left. + Q_4 \delta \varepsilon_4^3 + Q_5 \delta \varepsilon_5^3 - q \delta w \right. \right. \\
 \left. + \left(\left(I_1 + \frac{2I_2}{R_1} \right) \ddot{u} - \left(I_2 + \frac{I_3}{R_1} \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial x_1} + k_1 A' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_1} \right) \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x_1} \right) \delta u \right. \\
 \left. + \left(\left(I_1 + \frac{2I_2}{R_2} \right) \dot{v} - \left(I_2 + \frac{I_3}{R_2} \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial x_2} + k_2 B' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_2} \right) \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x_2} \right) \delta v \right. \\
 \left. + \left(\left(I_2 + \frac{I_3}{R_1} \right) \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x_1} + \left(I_2 + \frac{I_3}{R_2} \right) \frac{\partial \dot{v}}{\partial x_2} - I_3 \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x_2^2} \right) + I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x_1^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x_2^2} \right) + I_1 w \right) \delta w \right. \\
 \left. + \left(k_1 A' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_1} \right) \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x_1} + k_2 B' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_2} \right) \frac{\partial \dot{v}}{\partial x_2} - I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x_1^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + I_6 \left(k_1^2 A'^2 \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x_1^2} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial^2 \dot{\theta}}{\partial x_2^2} \right) \right) \delta \theta \right) dx_1 dx_2 \Big\} dt = 0
 \end{aligned} \tag{4-13}$$

Où δ désigne l'opérateur variationnel, q est le charge transversale, ρ est la densité de la plaque ou de la coque sous considération, N_i , M_i , P_i et Q_i sont les contraintes résultantes peuvent être déterminées sous la forme habituelle comme :

$$\begin{aligned}
 (N_i, M_i, P_i) &= \sum_{k=1}^n \int_{\xi_3^{(k-1)}}^{\xi_3^{(k)}} \sigma_i^{(k)} (1, \xi_3, f(\xi_3)) d\xi_3 \quad i = 1, 2, 6, \\
 Q_i &= \sum_{k=1}^n \int_{\xi_3^{(k-1)}}^{\xi_3^{(k)}} \sigma_i^{(k)} g(\xi_3) d\xi_3 \quad i = 4, 5
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

Et les coefficients I_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) sont définis par les équations suivantes :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \sum_{k=1}^n \int_{\xi_3^{(k-1)}}^{\xi_3^{(k)}} P^{(k)} Q_{ij}^{(k)} (1, \xi_3, \xi_3^2, f(\xi_3), \xi_3 f(\xi_3), [f(\xi_3)]^2) d\xi_3 \tag{4-15}$$

Les équations de mouvement généralisées sont dérivées de l'équation (4-13), en intégrant le déplacement par parties et on mettre les coefficients de δu , δv , δw et $\delta \theta$ égaux à zéro, individuellement. Les équations généralisées obtenues sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \delta u: \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} &= \left(I_1 + \frac{2I_2}{R_1}\right) \ddot{u} - \left(I_2 + \frac{I_3}{R_1}\right) \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x_1} + k_1 A' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_1}\right) \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x_1} \\
 \delta v: \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial N_6}{\partial x_1} &= \left(I_1 + \frac{2I_2}{R_2}\right) \ddot{v} - \left(I_2 + \frac{I_3}{R_2}\right) \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x_2} + k_2 B' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_2}\right) \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x_2} \\
 \delta w: -\frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + q &= I_1 w + \left(I_2 + \frac{I_3}{R_1}\right) \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x_1} + \left(I_2 + \frac{I_3}{R_2}\right) \frac{\partial \ddot{v}}{\partial x_2} \\
 &\quad - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x_2^2}\right) + I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x_1^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x_2^2}\right) \\
 \delta \theta: -k_1 P_1 - k_2 P_2 - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 P_6}{\partial x_1 \partial x_2} + k_1 A' \frac{\partial Q_4}{\partial x_1} + k_2 B' \frac{\partial Q_5}{\partial x_2} &= \\
 -k_1 A' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_1}\right) \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x_1} - k_2 B' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_2}\right) \frac{\partial \ddot{v}}{\partial x_2} + I_5 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x_1^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x_2^2}\right) & \\
 -I_6 \left(k_1^2 A'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x_1^2} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x_2^2}\right) &
 \end{aligned} \tag{4-16}$$

En substituant l'équation (4-5) dans l'équation (4-11) et la suite se traduit par l'équation (4-14), les contraintes résultantes du modèle analytique proposé peuvent être exprimées en termes de déformations, en utilisant les équations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= A_{11} \varepsilon_1^0 + A_{12} \varepsilon_2^0 + B_{11} \varepsilon_1^1 + B_{12} \varepsilon_2^1 + E_{11} \varepsilon_1^2 + E_{12} \varepsilon_2^2 \\
 N_2 &= A_{12} \varepsilon_1^0 + A_{22} \varepsilon_2^0 + B_{12} \varepsilon_1^1 + B_{22} \varepsilon_2^1 + E_{12} \varepsilon_1^2 + E_{22} \varepsilon_2^2 \\
 N_6 &= A_{66} \varepsilon_6^0 + B_{66} \varepsilon_6^1 + E_{66} \varepsilon_6^2
 \end{aligned} \tag{4-17a}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 &= B_{11} \varepsilon_1^0 + B_{12} \varepsilon_2^0 + D_{11} \varepsilon_1^1 + D_{12} \varepsilon_2^1 + F_{11} \varepsilon_1^2 + F_{12} \varepsilon_2^2 \\
 M_2 &= B_{12} \varepsilon_1^0 + B_{22} \varepsilon_2^0 + D_{12} \varepsilon_1^1 + D_{22} \varepsilon_2^1 + F_{12} \varepsilon_1^2 + F_{22} \varepsilon_2^2 \\
 M_6 &= B_{66} \varepsilon_6^0 + D_{66} \varepsilon_6^1 + F_{66} \varepsilon_6^2
 \end{aligned} \tag{4-17b}$$

$$\begin{aligned}
 P_1 &= E_{11} \varepsilon_1^0 + E_{12} \varepsilon_2^0 + F_{11} \varepsilon_1^1 + F_{12} \varepsilon_2^1 + H_{11} \varepsilon_1^2 + H_{12} \varepsilon_2^2 \\
 P_2 &= E_{12} \varepsilon_1^0 + E_{22} \varepsilon_2^0 + F_{12} \varepsilon_1^1 + F_{22} \varepsilon_2^1 + H_{12} \varepsilon_1^2 + H_{22} \varepsilon_2^2 \\
 P_6 &= E_{66} \varepsilon_6^0 + F_{66} \varepsilon_6^1 + H_{66} \varepsilon_6^2
 \end{aligned} \tag{4-17c}$$

$$Q_4 = A_{44}^s \varepsilon_4^3, \quad Q_5 = A_{55}^s \varepsilon_5^3 \tag{4-17d}$$

Dans lequel les composants des raideurs sont définis par :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} = \sum_{k=1}^n \int_{\xi_3^{(k-1)}}^{\xi_3^{(k)}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, \xi_3, \xi_3^2, f(\xi_3), \xi_3 f(\xi_3), [f(\xi_3)]^2) d\xi_3 \tag{4-18a}$$

$i, j = 1, 2, 6$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^n \int_{\xi_3^{(k-1)}}^{\xi_3^{(k)}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} [g(\xi_3)]^2 d\xi_3 \quad i = 4,5 \quad (4-18b)$$

Les conditions aux limites suivantes, en appui simple, sont supposées aux quatre bords des plaques/coques composites stratifiées et sandwichs

$$\begin{aligned} u(x_1, 0) = u(x_1, b) = v(0, x_2) = v(a, x_2) = 0 \\ w(x_1, 0) = w(x_1, b) = w(0, x_2) = w(a, x_2) = 0 \\ N_2(x_1, 0) = N_2(x_1, b) = N_1(0, x_2) = N_1(a, x_2) = 0 \\ M_2(x_1, 0) = M_2(x_1, b) = M_1(0, x_2) = M_1(a, x_2) = 0 \\ P_2(x_1, 0) = P_2(x_1, b) = P_1(0, x_2) = P_1(a, x_2) = 0 \\ \theta(x_1, 0) = \theta(x_1, b) = \theta(0, x_2) = \theta(a, x_2) = 0 \end{aligned} \quad (4-19)$$

4.5 Procédure de solution de Navier

Les équations différentielles du mouvement données dans l'équation (4-16) pour l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques stratifiées et coques composites et sandwichs peuvent être résolues par l'utilisation de la procédure de résolution de Navier sous forme de doubles séries trigonométriques. Dans le cas des plaques et coques stratifiées à couches croisées antisymétriques, il convient de noter que les composantes de rigidité suivantes sont identiques à zéro

$$\begin{aligned} A_{i6} = B_{i6} = D_{i6} = E_{i6} = F_{i6} = H_{i6} = 0; \quad i = 1,2 \\ B_{12} = E_{12} = B_{66} = E_{66} = A_{45}^s = A_{54}^s = 0 \end{aligned} \quad (4-20)$$

La procédure de solution de Navier est appliquée pour déterminer les solutions analytiques d'une plaque/coque stratifiée et sandwich simplement appuyées. La solution est supposée être de la forme (Zouatnia et Hadji [157]) :

$$\begin{Bmatrix} u(x_1, x_2, t) \\ v(x_1, x_2, t) \\ w(x_1, x_2, t) \\ \theta(x_1, x_2, t) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{rs} \cos(\alpha x_1) \sin(\beta x_2) e^{i\omega t} \\ V_{rs} \sin(\alpha x_1) \cos(\beta x_2) e^{i\omega t} \\ W_{rs} \sin(\alpha x_1) \sin(\beta x_2) e^{i\omega t} \\ \theta_{rs} \sin(\alpha x_1) \sin(\beta x_2) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (4-21)$$

Où U_{rs} , V_{rs} , W_{rs} et θ_{rs} sont les coefficients inconnus, tandis que ω est la fréquence naturelle du système. En substituant les équations (4-17) et (4-21) dans l'équation (4-16), les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{rs} \\ \dot{V}_{rs} \\ \dot{W}_{rs} \\ \dot{\theta}_{rs} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{rs} \\ V_{rs} \\ W_{rs} \\ \theta_{rs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{rs} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-22)$$

La charge répartie transversale q est également choisie comme la forme suivante :

$$q(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} Q_{rs} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (4-23)$$

Où les coefficients Q_{rs} sont donnés ci-dessous pour certaines charges typiques :

$$Q_{rs} = \begin{cases} q_0 & \text{charges sinusoidales} \\ \frac{16q_0}{rs\pi^2} & \text{charges uniformes} \\ \frac{4P}{ab} \sin\left(\frac{r\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{s\pi y_0}{b}\right) & \text{charges ponctuelles} \end{cases} \quad (4-24)$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[K_{ij}]$ et de la matrice de masse $[M_{ij}]$ impliqués dans l'équation (4-22) se présentent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} K_{11} &= -(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}), K_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), K_{13} = \alpha \left(\frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} + \alpha^2 B_{11} \right), \\ K_{14} &= \alpha k_1 E_{11}, K_{22} = -(\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}), \\ K_{23} &= \beta \left(\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{A_{22}}{R_2} + \beta^2 B_{22} \right), K_{24} = \beta k_2 E_{22}, \\ K_{33} &= -\frac{1}{R_2} \left(\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{A_{22}}{R_2} + 2\beta^2 B_{22} \right) - 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) \\ &\quad - \frac{1}{R_1} \left(\frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} + 2\alpha^2 B_{11} \right) - (\alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22}), \\ K_{34} &= -\left(k_1 \frac{E_{11}}{R_1} + k_2 \frac{E_{22}}{R_2} \right) - (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) F_{12} \\ &\quad + 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') F_{66} - k_1 \alpha^2 F_{11} - k_2 \beta^2 F_{22}, \\ K_{44} &= -k_1^2 H_{11} - k_2^2 H_{22} - 2k_1 k_2 H_{12} \\ &\quad - (k_1 A' + k_2 B') (k_2 B' \alpha^2 \beta^2 H_{66} + k_1 A' \alpha^2 \beta^2 H_{66}) \\ &\quad - k_2^2 B'^2 \beta^2 A_{44}^s - k_1^2 A'^2 \alpha^2 A_{55}^s \end{aligned} \quad (4-25)$$

Et

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= -\left(I_1 + \frac{2I_2}{R_1}\right), M_{12} = 0, M_{13} = \left(I_2 + \frac{I_3}{R_1}\right) \alpha, \\
 M_{14} &= -k_1 A' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_1}\right) \alpha, M_{22} = -\left(I_1 + \frac{2I_2}{R_2}\right), \\
 M_{23} &= \left(I_2 + \frac{I_3}{R_2}\right) \beta, M_{24} = -k_2 B' \left(I_4 + \frac{I_5}{R_2}\right) \beta, \\
 M_{33} &= -I_1 - I_3(\alpha^2 + \beta^2), \\
 M_{34} &= I_5(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \\
 M_{44} &= -I_6(k_1^2 A' \alpha^2 + k_2^2 B' \beta^2)
 \end{aligned} \tag{4-26}$$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a développé un modèle de déplacement généralisé sur la base d'une composante intégrale indéterminée et d'une fonction de forme hyperbolique pour inclure les effets des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque / coque sans nécessiter le facteur de correction de cisaillement. Les équations du mouvement et ses conditions aux limites sont dérivées en appliquant la version dynamique du principe des travaux virtuels et les solutions analytiques des déplacements, des contraintes et des fréquences naturelles fondamentales ont été obtenues en utilisant la procédure de résolution de Navier.

CHAPITRE 5 : DISCUSSION ET VALIDATION DES RÉSULTATS

5.1 Introduction

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux et d'un matériau d'âme. L'insertion de cette dernière permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble.

Récemment, de nombreux chercheurs ont travaillé sur le développement de la théorie des plaques et coques orthotropes stratifiés (Swain *et al.* [143], Sayyad et Ghugal [130], Yarasca *et al.* [154], Thakur *et al.* [146], Biswal *et al.* [26], Hirwani *et al.* [66], Benhenni *et al.* [21], Katariya et Panda [74], Monge *et al.* [102], Cuba *et al.* [36], Bakhshi et Taheri-Behrooz [16], Sayyad et Ghugal [131], Chikh *et al.* [32], Draoui *et al.* [40], Mahmoud *et al.* [96], Sehouli *et al.* [135]). L'objectif principal du présent chapitre est d'étudier le comportement en flexion et en vibration libre des plaques composites stratifiées et des coques et sandwichs, en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur généralisée et simple (RHSDT), qui tient compte des effets des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur. Plusieurs exemples numériques sont présentés et comparés avec d'autres théories de déformation en cisaillement pour vérifier la validité et l'applicabilité de la présente théorie.

5.2 Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- $\bar{w}(\xi_1, \xi_2, t) = w$
- La contrainte normale transversale $\bar{\sigma}_z$ est négligeable devant les autres contraintes planes $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\sigma}_y$.
- Les déplacements \bar{u} dans la direction ξ_1 et \bar{v} dans la direction ξ_2 sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

5.3 Propriétés des matériaux

Les propriétés des matériaux utilisées dans les études numériques sont les suivantes :

Matériau 1 (Reddy 1984)

$$\begin{aligned} E_1/E_2 = 25, E_3/E_2 = 1, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \\ G_{23}/E_2 = 0.2, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, \rho = 1 \end{aligned} \quad (5-1)$$

Matériau 2 (Srinivas 1973)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{core} = 0.999781, \bar{Q}_{12}^{core} = \bar{Q}_{21}^{core} = 0.231192, \\ \bar{Q}_{22}^{core} = 0.524886, \bar{Q}_{44}^{core} = 0.266810, \\ \bar{Q}_{55}^{core} = 0.159914, \bar{Q}_{66}^{core} = 0.262931 \text{ (pour le noyau)} \\ \bar{Q}_{ij}^{skins} = R\bar{Q}_{ij}^{core} = 0.262931 \text{ (pour les peaux)} \end{aligned} \quad (5-2)$$

Matériau 3 (Noor 1973)

$$\begin{aligned} E_1/E_2 = open, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6, \\ G_{23}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25, \rho = 1 \end{aligned} \quad (5-3)$$

Pour la simplicité, les résultats obtenus pour les déplacements, les contraintes et les fréquences fondamentales sont présentées suivant des formes non adimensionnelles :

Plaques et coques laminées stratifiées

$$\begin{aligned}
 \bar{w} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) &= \frac{100h^3 E_2}{q_0 a^4} W, \quad \bar{\sigma}_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xx}, \\
 \bar{\sigma}_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{6} \right) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{yy}, \quad \bar{\tau}_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) = \frac{h^2}{q_0 a^2} \tau_{xy}, \\
 \bar{\tau}_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}, \quad \bar{\tau}_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz}, \\
 \bar{\omega} &= \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}
 \end{aligned} \tag{5-4}$$

Plaques sandwiches

$$\begin{aligned}
 \bar{w} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) &= \frac{\bar{Q}_{11}^{core}}{hq_0} W, \quad \bar{\sigma}_x^1 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) = \frac{1}{q_0} \sigma_{xx}, \\
 \bar{\sigma}_x^2 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{2h}{5} \right) &= \frac{1}{q_0} \sigma_{xx}, \quad \bar{\sigma}_y^1 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) = \frac{1}{q_0} \sigma_{yy}, \\
 \bar{\sigma}_y^2 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{2h}{5} \right) &= \frac{1}{q_0} \sigma_{yy}, \quad \bar{\tau}_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) = \frac{1}{q_0} \tau_{xz}, \\
 \bar{\omega} &= \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}
 \end{aligned} \tag{5-5}$$

5.4 Résultats numériques et discussion

Afin de confirmer la précision et l'efficacité de la théorie raffinée de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur (RHSDT) avec quatre variables inconnues, un certain nombre d'exemples numériques sont étudiés pour l'analyse de la flexion statique et des vibrations libres des plaques et coques en composites stratifiées et sandwiches simplement appuyées. A cet effet, les résultats sont comparés à ceux obtenus par les théories existantes dans la littérature pour démontrer la validité du modèle proposé. Les problèmes suivants sont considérés pour l'étude numérique détaillée :

1. Analyse de la flexion des plaques composites stratifiées à plis croisés antisymétriques ;
2. Analyse de la flexion des plaques sandwiches symétriques à trois couches ($0^\circ/\text{Noyau}/0^\circ$) ;
3. Analyse de la flexion des coques sphériques stratifiées à deux couches antisymétriques à plis croisés ;
4. Analyse des vibrations libres des plaques stratifiées antisymétriques à plis croisés $(0^\circ/90^\circ)_n$;

5. Analyse de la vibration libre des coques cylindriques et sphériques stratifiées à plis croisés.

Les résultats numériques de ces problèmes sont illustrés dans les tableaux 5.1 à 5.10 et représentés graphiquement sur les figures 5.1 à 5.6 suivis de discussions approfondies.

5.4.1 Analyse de la flexion des plaques composites stratifiées à plis croisés antisymétriques

Le premier problème concerne une plaque carrée composite multicouche $(0^\circ/90^\circ)_n$ antisymétrique à plis croisés en appui simple sous une charge sinusoïdale. Le nombre de couches varie de 2 à 8 avec la même épaisseur et composé du matériau 1 défini par l'équation (5-1). Les résultats numériques des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour différentes valeurs du rapport côté / épaisseur ($a/h = 4, 10, 20, 100$) sont présentés dans les tableaux 5.1 à 5.3, respectivement. Ces résultats sont comparés aux résultats correspondants à des solutions d'élasticité trois dimensions fournies par Zenkour [155], CPT de Kirchhoff, FSDT de Mindlin [101] avec un facteur de correction $k = 5/6$ et HSDT de Reddy [97]. L'examen des tableaux 5.1 à 5.3 montre que les résultats numériques des déplacements et des contraintes adimensionnelles obtenues par l'utilisation des présentes formulations sont en excellent accord avec ceux calculés selon la théorie de Reddy alors que le déplacement maximal transversal et la contrainte de cisaillement dans le plan peuvent être identiques à ceux de la solution exacte 3D dans le cas de plaques stratifiées modérément épaisses. On peut voir que les déplacements dans le plan et transversaux diminuent avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a/h) pour tous les schémas de stratification $((0^\circ/90^\circ), (0^\circ/90^\circ)_2, (0^\circ/90^\circ)_4)$; cela signifie que l'effet de la déformation de cisaillement transversal est plus prononcé dans une plaque stratifiée épaisse que dans une plaque stratifiée mince. On observe également que les résultats pour les contraintes normales dans le plan et la contrainte de cisaillement dans le plan diminuent avec l'augmentation de la valeur du rapport d'épaisseur (a/h). De plus, CPT et FSDT sous-estiment ces contraintes par rapport à celles obtenues par la présente

théorie généralisée et HSDT de Reddy pour tous les rapports d'épaisseur. Cependant, toutes les théories s'accordent bien entre elles pour les plaques stratifiées minces.

Tableau 5. 1 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale, ($b = a$, Matériau 1).

a/h	Théorie	$\bar{u}(-h/2)$	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	$\bar{\sigma}_y(-h/2)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{yz}(0)$
4	Exact 3D ^(a)	-	2,0670	0,8410	0,1090	0,0591	0,1200	0,1350
	Reddy (1984)	0,0113	1,9985	0,9060	0,0891	0,0577	0,1251	0,1251
	Mindlin (1951)	0,0088	2,1492	0,7157	0,0843	0,0525	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0088	1,0636	0,7157	0,0843	0,0525	-	-
	Présent	0,0112	2,0003	0,9052	0,0891	0,0577	0,1249	0,1249
10	Exact 3D ^(a)	-	1,2250	0,7302	0,0886	0,0535	0,1210	0,1250
	Reddy (1984)	0,0092	1,2161	0,7468	0,0851	0,0533	0,1276	0,1276
	Mindlin (1951)	0,0088	1,2373	0,7157	0,0843	0,0525	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0088	1,0636	0,7157	0,0843	0,0525	-	-
	Présent	0,0092	1,2163	0,7466	0,0851	0,0533	0,1273	0,1273
20	Reddy (1984)	0,0089	1,1018	0,7235	0,0845	0,0527	0,1280	0,1280
	Mindlin (1951)	0,0088	1,1070	0,7157	0,0843	0,0525	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0088	1,0636	0,7157	0,0843	0,0525	-	-
	Présent	0,0089	1,1019	0,7235	0,0845	0,0527	0,1277	0,1277
100	Reddy (1984)	0,0088	1,0651	0,7161	0,0843	0,0525	0,1281	0,1281
	Mindlin (1951)	0,0088	1,0653	0,7157	0,0843	0,0525	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0088	1,0636	0,7157	0,0843	0,0525	-	-
	Présent	0,0088	1,0651	0,7161	0,0843	0,0525	0,1280	0,1280

^(a) Résultats tirés de la référence de Zenkour [155].

Tableau 5. 2 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque stratifiée à quatre couches ($0^\circ/90^\circ$)₂ à plis croisés sous une charge sinusoïdale, ($b = a$, Matériau 1).

a/h	Théorie	$\bar{u}(-h/2)$	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/2)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{yz}(0)$
4	Exact 3D ^(a)	0,0087	1,9581	-	0,7444	0,0457	0,2325	0,2410
	Reddy (1984)	0,0087	1,6093	0,0495	0,6970	0,0350	0,1358	0,1358
	Mindlin (1951)	0,0061	1,5921	0,0357	0,4868	0,0250	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0061	0,5065	0,0357	0,4868	0,0250	-	-
	Présent	0,0087	1,6092	0,0494	0,6959	0,0349	0,1355	0,1355

10	Exact 3D ^(a)	0,0066	0,7624	-	0,5308	0,0292	0,2713	0,2712
	Reddy (1984)	0,0065	0,6865	0,0380	0,5211	0,0266	0,1386	0,1386
	Mindlin (1951)	0,0061	0,6802	0,0357	0,4868	0,0250	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0061	0,5065	0,0357	0,4868	0,0250	-	-
	Présent	0,0065	0,6865	0,0380	0,5209	0,0266	0,1382	0,1382
20	Exact 3D ^(a)	0,0062	0,5717	-	0,4979	0,0260	0,2781	0,2781
	Reddy (1984)	0,0062	0,5517	0,0363	0,4954	0,0254	0,1390	0,1390
	Mindlin (1951)	0,0061	0,5500	0,0357	0,4868	0,0250	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0061	0,5065	0,0357	0,4868	0,0250	-	-
	Présent	0,0062	0,5516	0,0363	0,4954	0,0254	0,1386	0,1386
100	Exact 3D ^(a)	0,0061	0,5091	-	0,4872	0,0250	0,2803	0,2803
	Reddy (1984)	0,0061	0,5083	0,0358	0,4872	0,0250	0,1391	0,1391
	Mindlin (1951)	0,0061	0,5083	0,0357	0,4868	0,0250	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0061	0,5065	0,0357	0,4868	0,0250	-	-
	Présent	0,0061	0,5083	0,0358	0,4872	0,0250	0,1387	0,1387

^(a) Résultats tirés de la référence de Zenkour [155].

Tableau 5.3 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour une plaque stratifiée à huit couches $(0^\circ/90^\circ)_4$ à plis croisés sous une charge sinusoïdale, ($b = a$, Matériau 1).

a/h	Théorie	$\bar{u}(-h/2)$	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/2)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{yz}(0)$
4	Exact 3D ^(a)	0,0081	1,7903	-	0,6867	0,0347	0,2220	0,2266
	Reddy (1984)	0,0088	1,5168	0,0417	0,6996	0,0311	0,1335	0,1335
	Mindlin (1951)	0,0062	1,5335	0,0296	0,4950	0,0221	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0062	0,4479	0,0296	0,4950	0,0221	-	-
	Présent	0,0088	1,5173	0,0417	0,6986	0,0311	0,1332	0,1332
10	Exact 3D ^(a)	0,0066	0,6698	-	0,5247	0,0244	0,2430	0,2433
	Reddy (1984)	0,0066	0,6229	0,0316	0,5285	0,0236	0,1366	0,1366
	Mindlin (1951)	0,0062	0,6216	0,0296	0,4950	0,0221	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0062	0,4479	0,0296	0,4950	0,0221	-	-
	Présent	0,0066	0,6229	0,0316	0,5283	0,0236	0,1362	0,1362
20	Exact 3D ^(a)	0,0063	0,5037	-	0,5024	0,0227	0,2467	0,2467
	Reddy (1984)	0,0063	0,4918	0,0301	0,5034	0,0225	0,1371	0,1371
	Mindlin (1951)	0,0062	0,4913	0,0296	0,4950	0,0221	0,1091	0,1091
	Kirchhoff (1850)	0,0062	0,4479	0,0296	0,4950	0,0221	-	-
	Présent	0,0063	0,4918	0,0301	0,5033	0,0225	0,1367	0,1367
100	Exact 3D ^(a)	0,0062	0,4504	-	0,4956	0,0214	0,2481	0,2481
	Reddy (1984)	0,0062	0,4496	0,0297	0,4953	0,0221	0,1372	0,1372
	Mindlin (1951)	0,0062	0,4496	0,0296	0,4950	0,0221	0,1091	0,1091
	Kirchhoff	0,0062	0,4479	0,0296	0,4950	0,0221	-	-

(1850)								
Présent	0,0062	0,4496	0,0297	0,4953	0,0221	0,1368	0,1368	

^(a) Résultats tirés de la référence de Zenkour [155].

Figures 5.1 et 5.2 montrent l'effet du rapport côté / épaisseur (a/h) sur le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} d'une plaque carrée stratifiée croisée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) sous charges sinusoïdales et uniformes, respectivement. On peut voir un excellent accord entre la théorie actuelle et HSDT de Reddy pour les deux cas de chargement. Il est également souligné de figures 5.1 et 5.2 que l'augmentation du rapport d'épaisseur a un effet significatif sur la diminution de déplacement transversal. Les résultats graphiques obtenus en utilisant la présente théorie et la théorie de Reddy, qui correspond à la variations de déplacement dans le plan \bar{u} , contraintes dans le plan $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$ et la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge sinusoïdale sont également tracées dans les figures 5.3 à 5.6. Dont on observe que les résultats obtenus par le modèle proposé ont une bonne précision avec la théorie de Reddy.

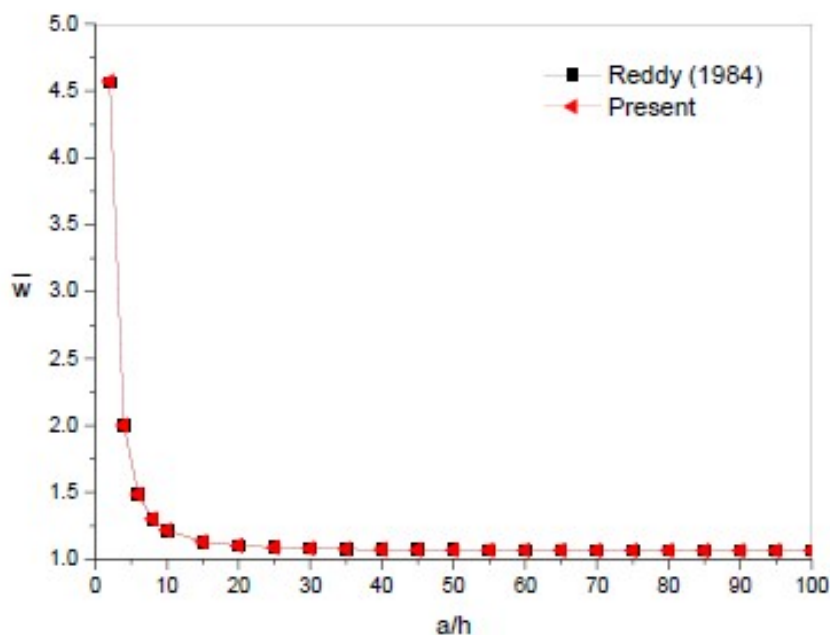


Figure 5. 1 : Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur le déplacement transversal adimensionnel d'une plaque carrée stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale.

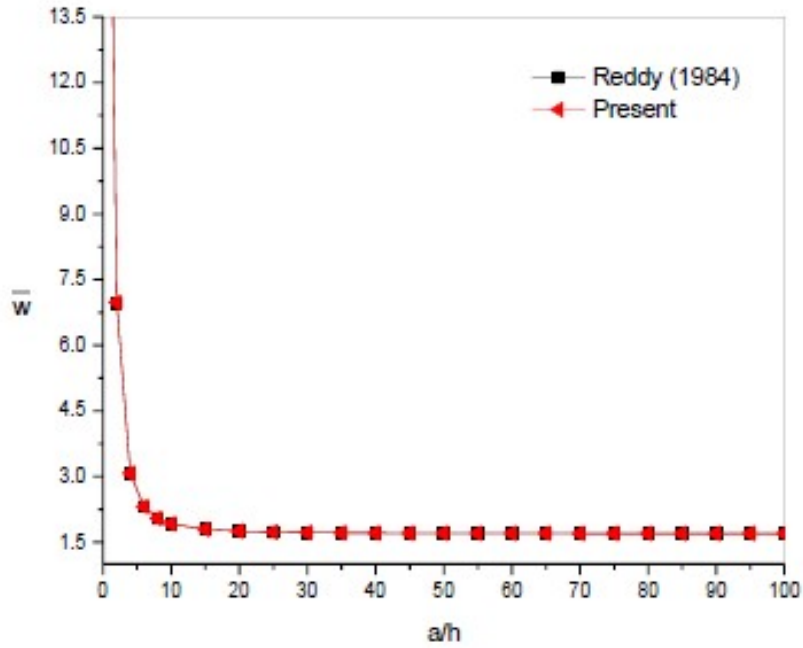


Figure 5.3 : Effet du rapport côté/épaisseur (a/h) sur le déplacement transversal adimensionnel d'une plaque carrée stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge uniforme.

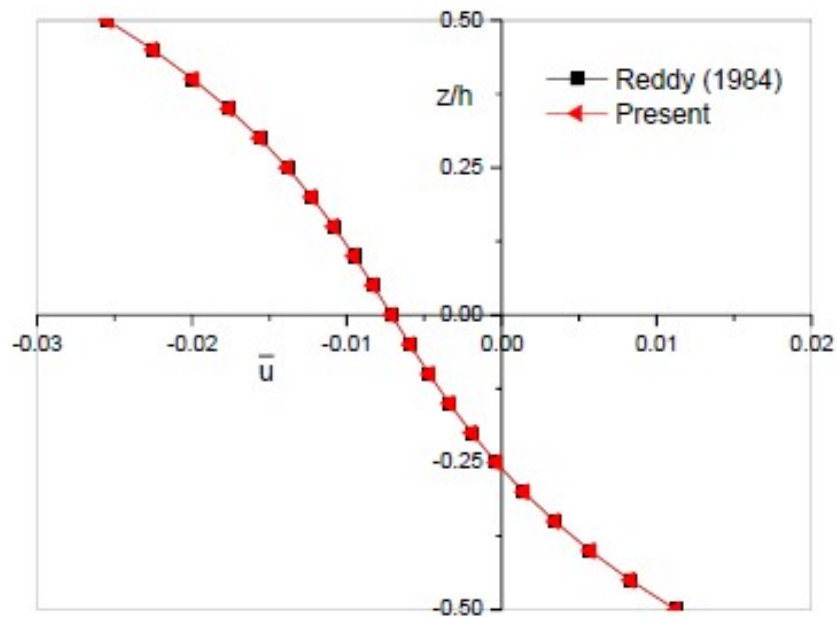


Figure 5.2 : Variation du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale ($a/h = 4$).

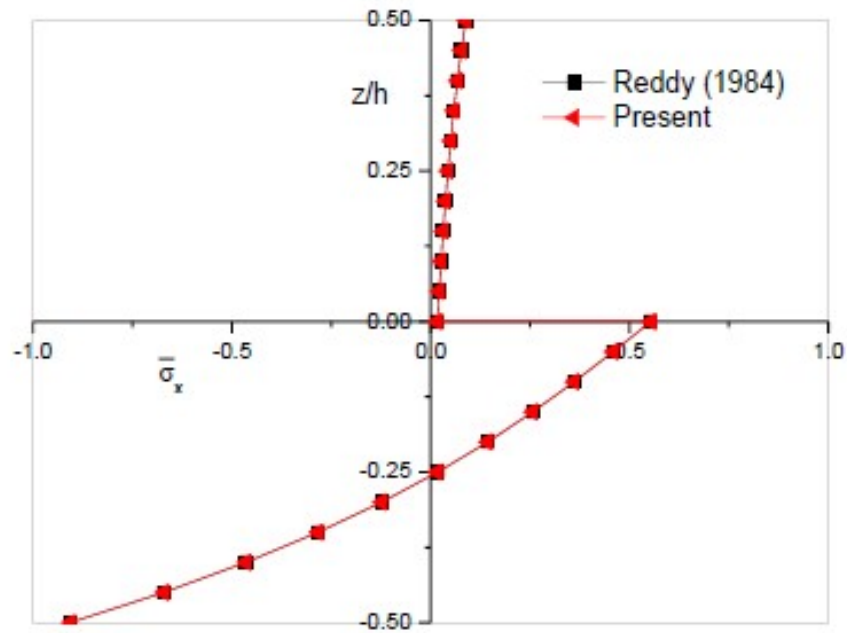


Figure 5. 4 : Variation de la contrainte normale dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches croisées ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge sinusoïdale ($a/h = 4$).

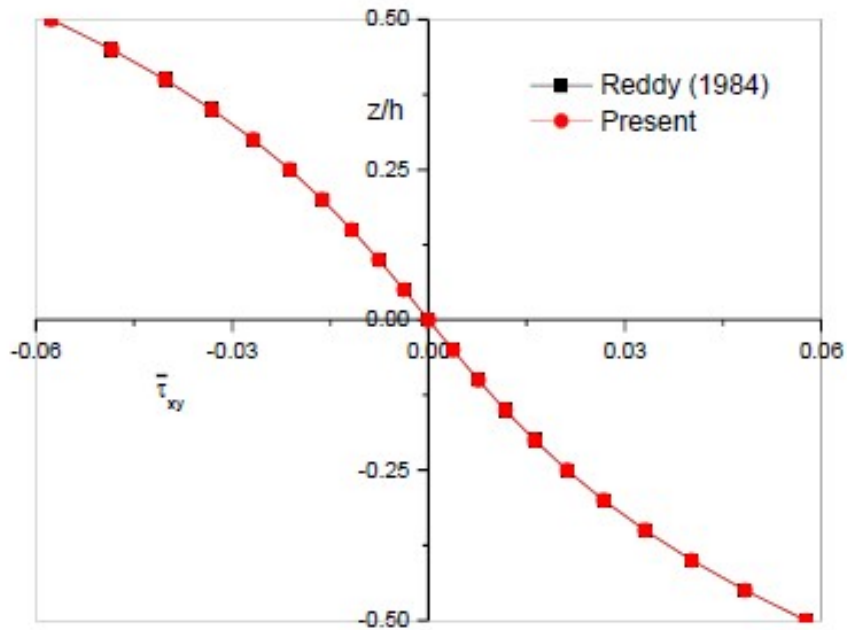


Figure 5. 5 : Variation de la contrainte de cisaillement dans le plan à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale ($a/h = 4$).

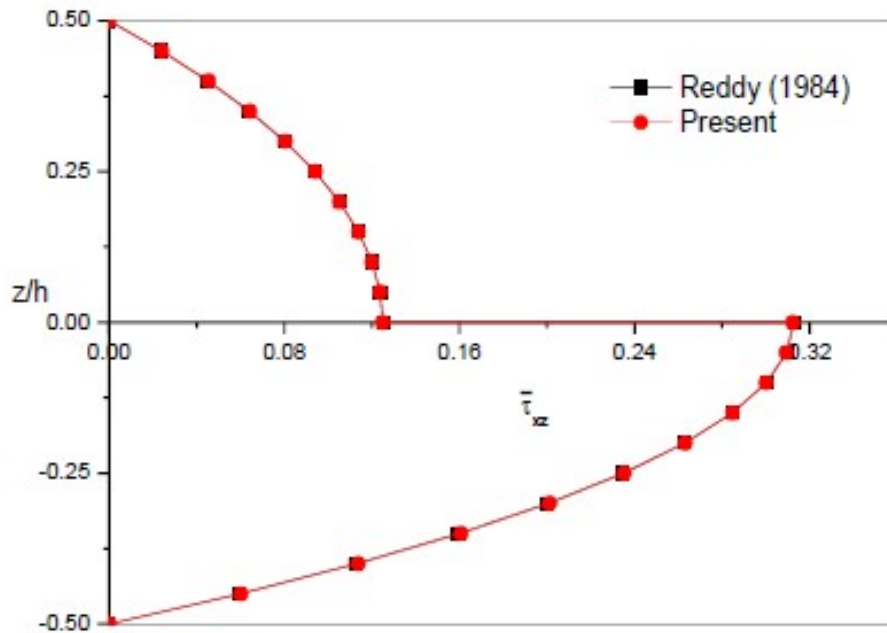


Figure 5. 6 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur d'une plaque carrée composite stratifiée à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) à plis croisés sous une charge sinusoïdale ($a/h = 4$).

5.4.2 Analyse de la flexion des plaques sandwichs symétriques à trois couches ($0^\circ/\text{Noyau}/0^\circ$)

Pour ce problème, l'efficacité de la théorie proposée est vérifiée pour la réponse en flexion d'une plaque sandwich carrée moyennement épaisse ($a/h=10$), simplement appuyée sous une charge uniforme. Dans cette analyse, la plaque sandwich symétrique est constituée par les propriétés orthotropes données par les relations (5-2) et est composée de deux couches extérieures (peaux) d'épaisseur $h_1 = h_3 = 0,1h$ et une couche intermédiaire (noyau) d'épaisseur $h_2 = 0,8h$. Ainsi, les propriétés orthotropes de la peau sont supposées être égales à ' R^* ' multiplié par les propriétés... orthotropes du noyau, c'est-à-dire que R^* est un facteur qui définit le degré d'anisotropie dans un stratifié sandwich. Les résultats numériques des déplacements et des contraintes adimensionnelles pour trois valeurs de facteur ($R^* = 5, 10, 15$) sont présentés dans le tableau 5.4 et comparés aux théories suivantes : solution d'élasticité exacte 3D de Srinivas [142], évaluations par éléments finis de Pandya et Kant [73] qui ont été déterminées sur la base d'un modèle de déplacement d'ordre supérieur, solution HSDT

avec méthode multiquadrique rapportée par Ferreira *et al.* [54]. La présente théorie est également comparée aux différentes théories de déformation en cisaillement utilisées par Xiang *et al.* [153], nouveau HSDT développé par Mantari *et al.* [97] et CPT. D'après le tableau 5.4, on constate à nouveau que les calculs actuels sont en bonne concordance avec les résultats analytiques rapportés par Xiang *et al.* [153]. Dans cette analyse, CPT et FSDT sont reflétés par un pourcentage d'erreur élevé dans les résultats d'un sandwich carré moyennement épais. D'autre part, on peut souligner que l'augmentation des valeurs de R^* peut réduire le déplacement transversal maximal de la plaque sandwich symétrique.

Tableau 5.4 : Comparaison du déplacement maximal transversal et des contraintes adimensionnelles d'une plaque carrée sandwich symétrique sous une charge uniforme ($a/h = 10$, Matériau 2).

R^*	Théorie	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x^1(-h/2)$	$\bar{\sigma}_x^2(-2h/5)$	$\bar{\sigma}_y^1(-h/2)$	$\bar{\sigma}_y^2(-2h/5)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$
5	Exact 3D ^(b)	258,970	60,353	46,623	38,491	30,097	4,364
	Pandya and Kant HSDT (1988)	258,740	62,380	46,910	38,930	30,330	3,089
	Pandya and Kant FSDT (1988)	236,100	61,870	49,500	36,650	29,320	3,313
	Kirchhoff CPT (1850)	216,940	61,141	48,623	36,622	29,297	4,590
	Ferreira <i>et al.</i> HSDT (2003)	257,110	60,366	47,003	38,456	30,242	4,548
	Xiang <i>et al.</i> (Levinson) (2009)	253,724	59,950	46,655	38,191	30,018	3,637
	Xiang <i>et al.</i> (Touratier) (2009)	253,989	60,123	47,097	38,249	30,187	3,707
	Xiang <i>et al.</i> (Karama) (2009)	253,638	60,124	46,703	38,242	30,020	3,764
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	256,706	60,525	46,969	38,493	30,207	5,135
	Présent	250,856	61,861	48,660	37,113	29,124	3,486
10	Exact 3D ^(b)	159,380	65,332	48,857	43,566	33,413	4,096
	Pandya and Kant HSDT (1988)	152,330	64,650	51,310	42,830	33,970	3,147
	Pandya and Kant FSDT (1988)	131,095	67,800	54,240	40,100	32,080	3,152
	Kirchhoff CPT (1850)	118,870	65,332	48,857	40,099	32,079	4,367
	Ferreira <i>et al.</i> HSDT (2003)	154,658	65,381	49,973	43,240	33,637	3,528
	Xiang <i>et al.</i> (Levinson) (2009)	152,664	65,008	49,684	42,945	33,394	3,450

	Xiang <i>et al.</i> (Touratier) (2009)	153,139	65,050	50,206	43,015	33,653	3,641
	Xiang <i>et al.</i> (Karama) (2009)	153,357	65,100	49,499	43,059	33,379	3,843
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	155,498	65,542	49,708	43,385	33,591	4,814
	Présent	149,146	68,074	52,951	40,869	31,665	3,162
15	Exact 3D ^(b)	121,720	66,787	48,299	46,424	34,955	3,964
	Pandya and Kant HSDT (1988)	110,430	66,620	51,970	44,920	35,410	3,035
	Pandya and Kant FSDT (1988)	90,850	70,040	56,030	41,390	33,110	3,091
	Kirchhoff CPT (1850)	81,768	69,135	55,308	41,410	33,128	4,283
	Ferreira <i>et al.</i> HSDT (2003)	114,644	66,920	50,323	45,623	35,170	3,021
	Xiang <i>et al.</i> (Levinson) (2009)	113,088	66,539	50,043	45,293	34,903	3,254
	Xiang <i>et al.</i> (Touratier) (2009)	113,964	66,544	50,679	45,431	35,278	3,472
	Xiang <i>et al.</i> (Karama) (2009)	114,585	66,621	49,663	45,546	34,919	3,706
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	116,609	67,043	49,741	45,953	35,149	4,581
Présent	109,669	70,605	54,392	42,414	32,503	2,916	

(b) Résultats tirés de la référence de Srinivas [142].

5.4.3 Analyse de la flexion des coques sphériques stratifiées à deux couches antisymétriques à plis croisés

Dans ce problème, la théorie proposée est appliquée pour l'analyse de flexion de coques sphériques stratifiées à deux couches croisées antisymétriques sous des charges sinusoïdales, uniformes et ponctuelles, respectivement. Pour cette section, les deux couches ont la même épaisseur et sont constituées des mêmes propriétés de matériau définies par l'équation (5-1). Les tableaux 5.5 à 5.7 montrent la comparaison des déplacements transversaux adimensionnels pour différentes valeurs de rapports de courbure ($R/a = 5, 10, 20, 50, 100$). Les résultats obtenus sont comparés à ceux prédits par le FSDT et HSDT établis par Reddy et Liu [122] et les nouveaux modèles de coque HSDT développés par Mantari *et al.* [97] basé sur un nouveau champ de déplacement avec cinq fonctions inconnues. On peut observer que les déplacements transversaux obtenus par la présente théorie raffinée (RHSDT) et la théorie de Reddy (HSDT) sont en bon accord les uns avec les autres pour tous les rapports de courbure

(R/a). De plus, il ressort des tableaux 5.5 à 5.7 que les déplacements transversaux des coques sphériques stratifiées croisées diminuent avec l'augmentation des valeurs de rapport d'épaisseur (a/h) et la diminution des rapports de courbure (R/a) pour les différents cas de chargement. Cependant, la différence entre la solution prédite par FSDT et HSDT est plus prononcée, en particulier dans le cas de la charge ponctuelle au centre, comme indiqué par Reddy et Liu [122].

Tableau 5. 5 : Comparaison du déplacement transversal adimensionnel de coques sphériques stratifiées à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge sinusoïdale, ($b = a$, $R_1 = R_2 = R$, Matériau 1).

R/a	Théorie	$\frac{a}{h} = 10$	$\frac{a}{h} = 100$
5	Reddy and Liu FSDT (1985)	11,4290	1,1948
	Reddy and Liu HSDT (1985)	11,1660	1,1937
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	11,1080	1,1940
	Présent	11,1542	1,1935
10	Reddy and Liu FSDT (1985)	12,1230	3,5760
	Reddy and Liu HSDT (1985)	11,8960	3,5733
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	11,8296	3,5751
	Présent	11,8945	3,5729
20	Reddy and Liu FSDT (1985)	12,3090	7,1270
	Reddy and Liu HSDT (1985)	12,0940	7,1236
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	12,0249	7,1295
	Présent	12,0952	7,1232
50	Reddy and Liu FSDT (1985)	12,3620	9,8717
	Reddy and Liu HSDT (1985)	12,1500	9,8692
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	12,0807	9,8800
	Présent	12,1526	9,8690
100	Reddy and Liu FSDT (1985)	12,3700	10,4460
	Reddy and Liu HSDT (1985)	12,1580	10,4440
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	12,0887	10,4562
	Présent	12,1609	10,4442
plate	Reddy and Liu FSDT (1985)	12,3730	10,6530
	Reddy and Liu HSDT (1985)	12,1610	10,6510
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	12,0914	10,6635
	Présent	12,1636	10,6511

Tableau 5. 6 : Comparaison du déplacement transversal adimensionnel de coques sphériques stratifiées à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge uniforme, ($b = a$, $R_1 = R_2 = R$, Matériau 1).

R/a	Théorie	$\frac{a}{h} = 10$	$\frac{a}{h} = 100$
5	Reddy and Liu FSDT (1985)	19,9440	1,7535
	Reddy and Liu HSDT (1985)	17,5660	1,7519
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	17,4886	1,7523
	Présent	17,5557	1,7517
10	Reddy and Liu FSDT (1985)	19,0650	5,5428
	Reddy and Liu HSDT (1985)	18,7440	5,5388
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	18,6543	5,5414
	Présent	18,7511	5,5383
20	Reddy and Liu FSDT (1985)	19,3650	11,2730
	Reddy and Liu HSDT (1985)	19,0640	11,2680
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	18,9699	11,2775
	Présent	19,0752	11,2676
50	Reddy and Liu FSDT (1985)	19,4520	15,7140
	Reddy and Liu HSDT (1985)	19,1550	15,7110
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	19,0601	15,7281
	Présent	19,1681	15,7108
100	Reddy and Liu FSDT (1985)	19,4640	16,6450
	Reddy and Liu HSDT (1985)	19,1680	16,6420
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	19,0731	16,6611
	Présent	19,1813	16,6419
Plate	Reddy and Liu FSDT (1985)	19,4690	16,9800
	Reddy and Liu HSDT (1985)	19,1720	16,9770
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	19,0774	16,9968
	Présent	19,1858	16,9769

Tableau 5. 7 : Comparaison du déplacement transversal adimensionnel de coques sphériques stratifiées à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) sous une charge ponctuelle, ($b = a$, $R_1 = R_2 = R$, Matériau 1).

R/a	Théorie	$\frac{a}{h} = 10$	$\frac{a}{h} = 100$
5	Reddy and Liu FSDT (1985)	7.1015	-
	Reddy and Liu HSDT (1985)	5.8953	-
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	5.7174	-
	Présent	5.8890	0.8219
10	Reddy and Liu FSDT (1985)	7.3836	-
	Reddy and Liu HSDT (1985)	6.1913	-
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	6.0098	-
	Présent	6.1894	1.8358
20	Reddy and Liu FSDT (1985)	7.4692	-
	Reddy and Liu HSDT (1985)	6.2714	-
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	6.0888	-
	Présent	6.2708	3.2779

50	Reddy and Liu FSDT (1985)	7.4909	-
	Reddy and Liu HSDT (1985)	6.2943	-
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	6.1115	-
	Présent	6.2941	4.3831
100	Reddy and Liu FSDT (1985)	7.4940	-
	Reddy and Liu HSDT (1985)	6.2976	-
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	6.1147	-
	Présent	6.2974	4.6142
Plate	Reddy and Liu FSDT (1985)	7.4853	-
	Reddy and Liu HSDT (1985)	6.2987	-
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	6.1158	-
	Présent	6.2984	4.6973

5.4.4 Analyse des vibrations libres des plaques stratifiées antisymétriques à plis croisés $(0^\circ/90^\circ)_n$

Afin d'illustrer l'exactitude de la présente théorie, les fréquences naturelles fondamentales des plaques carrées stratifiées multicouches antisymétriques à empilement croisés $(0^\circ/90^\circ)_n$ avec des conditions aux limites simplement appuyées sont également calculées en utilisant la formulation généralisée du modèle proposé. On considère que le nombre de couches varie de 2 à 10 avec la même épaisseur et constituée du matériau 3 défini par l'équation (5-3). Le tableau 5.8 montre les résultats numériques des fréquences propres fondamentales adimensionnelles pour diverses valeurs de rapports de rigidité ($E_1/E_2 = 3, 10, 20, 30, 40$) et sont obtenus pour le mode de flexion fondamental ($m = n = 1$).

Les résultats de ce problème sont comparés à ceux obtenus par la solution d'élasticité exacte donnée par Noor et Burton [105], la théorie de la déformation en cisaillement trigonométrique à quatre variables développée par Sayyad et Ghugal [130], la théorie des plaques raffinées à deux variables (RPT) présentée par Thai et Kim [145], HSDT de Reddy [120], FSDT et CPT. On peut voir que le modèle actuel montre la meilleure précision et correspond bien à ceux rapportés par Reddy [120] sur la base de la théorie HSDT et à ceux cités par Thai et Kim [145] en utilisant une théorie des plaques raffinées à deux variables. Cependant, CPT surestime les fréquences naturelles par rapport aux résultats des autres théories en raison de la négligence des déformations transversales de cisaillement. Il apparaît également que les fréquences naturelles augmentent avec l'augmentation du nombre de couches (voir tableau 5.8 ci-dessous).

Tableau 5. 8 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques carrées composites stratifiées antisymétriques à plis croisés $(0^\circ/90^\circ)_n$, ($a/h = 5$, Matériau 3).

E_1/E_2	Théorie	$(0/90)_1$	$(0/90)_2$	$(0/90)_3$	$(0/90)_5$
3	Exact 3D ^(c)	6,2578	6,5455	6,6100	6,6458
	Sayyad and Ghugal (2017)	6,2190	6,5012	6,5567	6,5854
	Thai and Kim (RPT1) (2010)	6,2169	6,5008	6,5558	6,5842
	Thai and Kim (RPT2) (2010)	6,2167	6,5008	6,5558	6,5842
	Reddy (1984)	6,2169	6,5008	6,5558	6,5842
	Mindlin (1951)	6,2085	6,5043	6,5569	6,5837
	Kirchhoff (1850)	6,7705	7,1690	7,2415	7,2415
	Présent	6,2168	6,5008	6,5558	6,5842
10	Exact 3D ^(c)	6,9845	8,1445	8,4143	8,5625
	Sayyad and Ghugal (2017)	6,9967	8,1929	8,4065	8,5156
	Thai and Kim (RPT1) (2010)	6,9887	8,1954	8,4052	8,5126
	Thai and Kim (RPT2) (2010)	6,9836	8,1949	8,4052	8,5126
	Reddy (1984)	6,9887	8,1954	8,4052	8,5126
	Mindlin (1951)	6,9392	8,2246	8,4183	8,5132
	Kirchhoff (1850)	7,7420	9,7192	10,0530	10,0530
	Présent	6,9881	8,1958	8,4053	8,5126
20	Exact 3D ^(c)	7,6745	9,4055	9,8398	10,0843
	Sayyad and Ghugal (2017)	7,8385	9,6205	9,9210	10,0740
	Thai and Kim (RPT1) (2010)	7,8210	9,6265	9,9181	10,0674
	Thai and Kim (RPT2) (2010)	7,8011	9,6252	9,9181	10,0671
	Reddy (1984)	7,8210	9,6265	9,9181	10,0614
	Mindlin (1951)	7,7060	9,6885	9,9427	10,0638
	Kirchhoff (1850)	8,8555	12,476	13,0580	13,0585
	Présent	7,8197	9,6272	9,9181	10,0671
30	Exact 3D ^(c)	8,1763	10,1650	10,6958	11,0027
	Sayyad and Ghugal (2017)	8,5320	10,5268	10,8603	11,0309
	Thai and Kim (RPT1) (2010)	8,5050	10,5348	10,8547	11,0197
	Thai and Kim (RPT2) (2010)	8,4646	10,5334	10,8547	11,0186
	Reddy (1984)	8,5050	10,5348	10,8547	11,0197
	Mindlin (1951)	8,3211	10,6198	10,8828	11,0058
	Kirchhoff (1850)	9,8337	14,7250	15,4907	15,4907
	Présent	8,5028	10,5358	10,8546	11,0191
40	Exact 3D ^(c)	8,5625	10,6789	11,2728	11,6245
	Sayyad and Ghugal (2017)	9,1246	11,1628	11,5100	11,6893
	Thai and Kim (RPT1) (2010)	9,0871	11,1716	11,5012	11,6730
	Thai and Kim (RPT2) (2010)	9,0227	11,1705	11,5009	11,6705

	Reddy (1984)	9,0871	11,1716	11,5012	11,673
	Mindlin (1951)	8,8383	11,2708	11,5264	11,6444
	Kirchhoff (1850)	10,7210	16,6725	17,5897	17,5897
	Présent	9,0841	11,1728	11,5010	11,6721

^(c) Résultats tirés de la référence de Noor et Burton [105].

5.4.5 Analyse de la vibration libre des coques cylindriques et sphériques stratifiées à plis croisés

Le dernier problème est effectué pour l'analyse des vibrations libres de coques cylindriques et sphériques stratifiées à deux couches ($0^\circ/90^\circ$) antisymétriques croisées, afin de vérifier la précision et l'applicabilité de la présente théorie. Pour cette section, les propriétés des matériaux de chaque couche sont données par l'équation (5-1). Les résultats numériques des fréquences propres fondamentales adimensionnelles par rapport aux différentes valeurs des rapports de courbure ($R/a = 5, 10, 20, 50, 100$) sont énumérées dans les tableaux 5.9 et 5.10. On peut voir à nouveau que la présente méthode analytique donne des résultats plus précis dans la prédiction des fréquences naturelles pour les coques cylindriques et sphériques stratifiées croisées par rapport aux résultats fournis par la théorie HSDT de Reddy et Liu [122] et Mantari *et al.* [97]. De plus, les fréquences fondamentales suivent une tendance décroissante pour la diminution des valeurs du rapport d'épaisseur (a/h) et l'augmentation des rapports de courbure (R/a). Cependant, dans les deux cas traités dans cet exemple pour l'analyse des vibrations libres des coques stratifiées croisées, il faut clairement souligner que le FSDT sous-estime la fréquence naturelle par rapport aux résultats des autres HSDT.

Tableau 5. 9 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des coques cylindriques à plis croisés, Matériau 1.

R/a	Théorie	$\frac{a}{h} = 10$	$\frac{a}{h} = 100$
5	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,9082	16,6680
	Reddy and Liu HSDT (1985)	9,0230	16,6900
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,1254	16,7030
	Présent	9,0957	16,7037
10	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,8879	11,8310
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9790	11,8400
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0453	11,8440
	Présent	9,0144	11,8440

20	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,8900	10,2650
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9720	10,2700
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0207	10,2707
	Présent	8,9895	10,2705
50	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,8951	9,7816
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9730	9,7830
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0109	9,7843
	Présent	8,9797	9,7840
100	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,8974	9,7108
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9750	9,7120
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0085	9,7127
	Présent	8,9773	9,7123
Plate	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,8998	9,6873
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9760	9,6880
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0065	9,6886
	Présent	8,9753	9,6882

Tableau 5. 10 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des coques sphériques à plis croisés, Matériau 1.

R/a	Théorie	$\frac{a}{h} = 10$	$\frac{a}{h} = 100$
5	Reddy and Liu FSDT (1985)	9,2309	28,8250
	Reddy and Liu HSDT (1985)	9,3370	28,8400
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,3654	28,8391
	Présent	9,3408	28,8412
10	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,9841	16,7060
	Reddy and Liu HSDT (1985)	9,0680	16,7100
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0980	16,7121
	Présent	9,0685	16,7128
20	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,9212	11,8410
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9990	11,8400
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0295	11,8442
	Présent	8,9987	11,8442
50	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,9034	10,0630
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9800	10,0600
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0101	10,0647
	Présent	8,9790	10,0644
100	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,9009	9,7826
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9770	9,7840
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0074	9,7840
	Présent	8,9762	9,7836
Plate	Reddy and Liu FSDT (1985)	8,8998	9,6873
	Reddy and Liu HSDT (1985)	8,9760	9,6880
	Mantari <i>et al.</i> HSDT (2011)	9,0065	9,6886
	Présent	8,9753	9,6882

5.5 Conclusion

Dans cette étude, l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques et coques en composites stratifiés et sandwiches simplement appuyées est présentée en utilisant une théorie généralisée simple et raffinée de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur généralisée et simple avec quatre variables inconnues. L'effet de certains paramètres tels que le rapport côté/épaisseur et les rapports de courbure est discuté en présentant plusieurs problèmes et en les comparant aux résultats publiés précédemment. De cette étude, il est constaté que le modèle actuel est en excellent accord tout en prédisant l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques et coques stratifiées composites et sandwiches. Par conséquent, il est conclu que la méthode de calcul proposée peut être appliquée pour l'analyse de flexion des plaques et coques stratifiées épaisses avec d'autres conditions aux limites et pour différentes orientations de fibre.

CONCLUSION GENERALE

Les solutions exactes pour les problèmes des plaques qui dépendent de la fonction de gauchissement sont très limitées ; ceci nous a conduits à évaluer un nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existants basés sur des approximations du champ de déplacements. Cette procédure de résolution exacte est basée sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement.

Dans cette étude, l'analyse de flexion et de vibration libre de plaques et coques composites stratifiées et sandwiches simplement appuyées est présentée en utilisant une théorie raffinée de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur à quatre variables inconnues. Le présent modèle de déplacement généralisé a été développé sur la base d'une composante intégrale indéterminé et d'une fonction de forme hyperbolique pour inclure les effets des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque / coque sans nécessiter le facteur de correction de cisaillement. Les équations de mouvement et ses conditions aux limites sont dérivées en appliquant la version dynamique du principe des travaux virtuels et les solutions analytiques des déplacements, des contraintes et des fréquences naturelles fondamentales ont été obtenues en utilisant la procédure de résolution de Navier. L'effet de certains paramètres tels que le rapport cote/épaisseur et les rapports de courbure est discuté en présentant plusieurs problèmes dans cette étude numérique détaillée et en les comparant aux résultats publiés précédemment.

- Analyse de flexion des plaques composites stratifiées antisymétriques à plis croisés ;
- Analyse de flexion des plaques sandwiches symétriques à trois couches (0° /noyau/ 0°) ;

- Analyse de flexion des coques sphériques stratifiées à deux couches antisymétriques ;
- Analyse de vibration libre des plaques composites stratifiées croisées antisymétriques ($0^\circ/90^\circ$) n ;
- Analyse de vibration libre des coques cylindriques et sphériques stratifiées croisées.

De cette étude, il est constaté que le modèle actuel est en excellent accord tout en prédisant l'analyse de flexion et de vibration libre des plaques et coques stratifiées composites et sandwichs. Par conséquent, il est conclu que la méthode de calcul proposée peut être appliquée pour l'analyse de flexion de plaques et coques stratifiées épaisses avec d'autres conditions aux limites et pour différentes orientations de fibre. Une amélioration de la formulation actuelle sera envisagée dans les travaux futurs pour envisager d'autres types de matériaux (Sofiyev *et al.* [140], Setoodeh *et al.* [137], Sedighi et Shirazi [132, 134], Iurlaro *et al.* [67, 68], Sedighi *et al.* [133], Avcar [11], Cerracchio *et al.* [31], Benferhat *et al.* [20], Daouadji [37], Lal *et al.* [82], Ebrahimi et Barati [44], Ayat *et al.* [15], Belmahi, *et al.* [19], Ebrahimi et Barati [45], Dihaj *et al.* [39], Avcar et Mohammed [13], Hamidi *et al.* [64], Lal et Markad [81], Faleh *et al.* [51], Panjehpour *et al.* [112], Bensattalah *et al.* [22, 23], Abrishambaf *et al.* [5], Rajabi et Mohammadimehr [116], Avcar [12], Fadoun [50], Selmi [136], Tabrizi *et al.* [144], Madenci [94, 95], Barati *et al.* [17], Al-Maliki *et al.* [7], Belmahi *et al.* [18], Eltaher *et al.* [46, 48], Fládr *et al.* [55], Hadji *et al.* [62], Kossakowski et Uzarska [78], López-Chavarría *et al.* [86], Nikkhoo *et al.* [103], Sahouane *et al.* [127], Shokrieh et Kondori [138], Singh et Kumari [139], Faleh *et al.* [52], Ghannadpour et Mehrparvar [59], Al-Maliki *et al.* [8], Ghadimi [58], Forsat *et al.* [56]).

En perspective à ce travail, nous proposerons d'étudier le problème de gauchissement, et d'utiliser de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la vibration ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour résoudre les problèmes de flambement ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis.
- Utilisation de la théorie raffinée pour différentes orientations des fibres.

Références bibliographiques

- [1] **A. CHABOT.** Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. Thèse de doctorat, ENPC, 1997.
- [2] **A.K. NOOR and W. S. BURTON.** «Assesment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates». *Appl Mech Rev*, Volume 42, pages: 1-12, 1989.
- [3] **ABDELMALEK, A., BOUAZZA, M., ZIDOUR, M. and BENSEDDIQ, N.** (2019), “Hygrothermal effects on the free vibration behavior of composite plate using nth-order shear deformation theory: A micromechanical approach”, *Iran. J. Sci. Technol. Tran. Mech. Eng.*, 43, 61-73.
- [4] **ABED, Z.A.K. and MAJEED, W.I.** (2020), “Effect of boundary conditions on harmonic response of laminated plates”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(2), 125-140.
- [5] **ABRISHAMBAF, A., PIMENTEL, M. and NUNES, S.** (2019), “A meso-mechanical model to simulate the tensile behaviour of ultra-high performance fibre-reinforced cementitious composites”, *Compos. Struct.*, 222, 110931.
- [6] **ACHRAF TAFLA,** « éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches »(2007) p 17.
- [7] **AL-MALIki, A.F., FALEH, N.M. and ALASADI, A.A.** (2019), “Finite element formulation and vibration of nonlocal refined metal foam beams with symmetric and non-symmetric porosities”, *Struct. Monit. Maintain.*, 6(2), 147-159.
- [8] **AL-MALIki, A.F.H., AHMED, R.A., MOUSTAFA, N.M. and FALEH, N.M.** (2020), “Finite element based modeling and thermal dynamic analysis of functionally graded graphene reinforced beams”, *Adv. Comput. Des.*, 5(2), 177-193.
- [9] **AMBARTSUMYAN S.A.** "Theory of anisotropic plate". *Technomic Publishing Co*, 1969.130.
- [10] **AURICCHIO and SACCO.** "A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates". *Meth.Engng.* 44, 1481-1504 (1999).
- [11] **AVCAR, M.** (2014), “Free vibration analysis of beams considering different geometric characteristics and boundary conditions”, *Int. J. Mech. Appl.*, 4(3), 94-100.
- [12] **AVCAR, M.** (2019), “Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct.*, 30(6), 603-615.
- [13] **AVCAR, M. and MOHAMMED, W.K.M.** (2018), “Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation”, *Arab. J. Geosci.*, 11(10), 232.
- [14] **AYAD R.** " Elément finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement ". Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne,France, 1993.

- [15] **AYAT, H., KELLOUCHE, Y., GHRICI, M. and BOUKHATEM, B.** (2018), "Compressive strength prediction of limestone filler concrete using artificial neural networks", *Adv. Comput. Des.*, 3(3), 289-302.
- [16] **BAKSHI, N. and TAHERI-BEHROOZ, F.** (2019), "Length effect on the stress concentration factor of a perforated orthotropic composite plate under in-plane loading", *Compos. Mater. Eng.*, 1(1), 71-90.
- [17] **BARATI, M.R. and SHAHVERDI, H.** (2019), "Finite element forced vibration analysis of refined shear deformable nanocomposite graphene platelet-reinforced beams", *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 42(1), 33.
- [18] **BELMAHI, S., ZIDOUR, M. and MERADJAH, M.** (2019), "Small-scale effect on the forced vibration of a nano beam embedded an elastic medium using nonlocal elasticity theory", *Ad. Aircraft Spacecraft Sci.*, 6(1), 1-18.
- [19] **BELMAHI, S., ZIDOUR, M., MERADJAH, M., BENSATTALAH, T. and DIHAJ, A.** (2018), "Analysis of boundary conditions effects on vibration of nanobeam in a polymeric matrix", *Struct. Eng. Mech.*, 67(5), 517-525.
- [20] **BENFERHAT, R., HASSAINE DAOUADJI, T., HADJI, L. and SAID MANSOUR, M.** (2016), "Static analysis of the FGM plate with porosities", *Steel Compos. Struct.*, 21(1), 123-136.
- [21] **BENHENNI, M., HASSAINE DAOUADJI, T., ABBES, B., LI, Y.M. and ABBES, F.** (2018), "Analytical and numerical results for free vibration of laminated composites plates", *Int. J. Chem. Molecul. Eng.*, 12(6), 300-304.
- [22] **BENSATTALAH, T., BOUAKKAZ, K., ZIDOUR, M. and DAOUADJI, T.H.** (2018), "Critical buckling loads of carbon nanotube embedded in Kerr's medium", *Adv. Nano Res.*, 6(4), 339-356.
- [23] **BENSATTALAH, T., ZIDOUR, M., HASSAINE DAOUADJI, T. and BOUAKKAZ, K.** (2019), "Theoretical analysis of chirality and scale effects on critical buckling load of zigzag triple walled carbon nanotubes under axial compression embedded in polymeric matrix", *Struct. Eng. Mech.*, 70(3), 269-277.
- [24] **BENSELAMA, K.** Détermination des charges critiques de flambement des plaques composites. 2015. Thèse de doctorat.
- [25] **BERTHELOT J.-M.**, (1999). Composite Materials. Mechanical Behaviour and Structural Analysis, *SPRINGER-VERLAG*, New York, Paris.
- [26] **BISWAL, D.K., JOSEPH, S.V. and MOHANTY, S.C.** (2017), "Free vibration and buckling study of doubly curved laminated shell panels using higher order shear deformation theory based on Sander's approximation", *J. Mech. Eng. Sci.*, 232(20), 3612-3628.
- [27] **BOUABDALLAH M.S.** " Modélisation de coques cylindriques raidies, isotropes et composites, Thèse de Doctorat ". UTC, 1992.
- [28] **BUI, V. Q., MARECHAL, E., et NGUYEN-DANG, H.** Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites: interlaminar stresses and strain-energy release rates. *Composites Science and Technology*, 2000, vol. 60, no 1, p. 131-143.

- [29] **C. OSSADZOW and M. TOURATIER.** An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95, 2001.
- [30] **C.A.R.M.A.,** Centre d'Animation Régional en Matériaux Avancés, Glossaire des matériaux composites, Actualisation décembre 2004.
- [31] **CERRACCHIO, P., GHERLONE, M. and TESSLER, A.** (2015), "Real-time displacement monitoring of a composite stiffened panel subjected to mechanical and thermal loads", *Meccanica*, 50, 2487-2496.
- [32] **CHIKH, A., TOUNSI, A., HEBALI, H., et al.** Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT. *Smart Structures and Systems*, 2017, vol. 19, no 3, p. 289-297.
- [33] **CHOA, Kimb.** "A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element". *Composites: Part B* 31 (2000) 65–74.
- [34] **CHRISTOPHE B.**, (2003) Thèse de doctorat en «mécanique du solide», université AIX-MARSEILLE II. France.
- [35] **COHEN G.A.** "transverse shear stiffness of laminated anisotropic shells" *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol 13, pp 205-220, 1978.
- [36] **CUBA, L.M., ARCINIEGA, R.A. and MANTARI, J.L.** (2019), "Generalized 2-unknown's HSDT to study isotropic and orthotropic composite plates", *J. Appl. Comput. Mech.*, 5(1), 141-149.
- [37] **DAOUADJI, T.H.** (2017), "Analytical and numerical modeling of interfacial stresses in beams bonded with a thin plate", *Adv. Comput. Des.*, 2(1), 57-69.
- [38] **DHATT G.,** " Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchoff hypothesis". Proc. ASCE Symp. On Application of FEM in civil engineering, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., P. 255-278 (1969).
- [39] **DIHAJ, A., ZIDOUR, M., MERADJAH, M., RAKRAK, K., HEIRECHE, H. and CHEMI, A.** (2018), "Free vibration analysis of chiral double-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium using non-local elasticity theory and Euler Bernoulli beam model", *Struct. Eng. Mech.*, 65(3), 335-342.
- [40] **DRAOUI, A., ZIDOUR, M., TOUNSI, A., et al.** Static and dynamic behavior of nanotubes-reinforced sandwich plates using (FSDT). In : *Journal of Nano Research*. Trans Tech Publications Ltd, 2019. p. 117-135.
- [41] **E. CARRERA.** An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [42] **EBRAHIMI, F. and BARATI, M.R.** (2017a), "Vibration analysis of nonlocal strain gradient embedded single-layer graphene sheets under nonuniform in-plane loads", *J. Vib. Control.*, 107754631773408.
- [43] **EBRAHIMI, F. and BARATI, M.R.** (2017b), "Buckling analysis of nonlocal strain gradient axially functionally graded nanobeams resting on variable elastic medium", *Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Sci.*, 232(11), 2067-2078.

- [44] **EBRAHIMI, F. and BARATI, M.R.** (2017c), “Scale-dependent effects on wave propagation in magnetically affected single/double-layered compositionally graded nanosize beams”, *Wave. Rand. Complex Media*, 28(2), 326-342.
- [45] **EBRAHIMI, F. and BARATI, M.R.** (2018), “Hygro-thermal vibration analysis of bilayer graphene sheet system via nonlocal strain gradient plate theory”, *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 40(9), 428.
- [46] **ELTAHER, M. A., WAGIH, A., MELAIBARI, A., FATHY, A. and LUBINEAU, G.** (2019a), “Effect of Al₂O₃ particles on mechanical and tribological properties of Al-Mg dual-matrix nanocomposites”, *Ceram. Int.*, 46(5), 5779-5787.
- [47] **ELTAHER, M.A., AGWA, M. and KABEEL, A** (2018), “Vibration analysis of material size-dependent CNTs using energy equivalent model”, *J. Appl. Comput. Mech.*, 4(2), 75-86.
- [48] **ELTAHER, M.A., ALMALKI, T.A., ALMITANI, K.H., AHMED, K.I.E. and ABDRABOH, A.M.** (2019b), “Modal participation of fixed-fixed single-walled carbon nanotube with vacancies”, *Int. J. Adv. Struct. Eng.*, 11, 151-163.
- [49] **ELTAHER, M.A., MOHAMED, S.A. and MELAIBARI, A.** (2020), “Static stability of a unified composite beams under varying axial loads”, *Thin Wall. Struct.*, 147, 106488.
- [50] **FADOUN, O.O.** (2019), “Analysis of axisymmetric fractional vibration of an isotropic thin disc in finite deformation”, *Comput. Concrete*, 23(5), 303-309.
- [51] **FALEH, N.M., AHMED, R.A. and FENJAN, R.M.** (2018), “On vibrations of porous FG nanoshells”, *Int. J. Eng. Sci.*, 133, 1-14.
- [52] **FALEH, N.M., FENJAN, R.M. and AHMED, R.A.** (2020), “Forced vibrations of multi-phase crystalline porous shells based on strain gradient elasticity and pulse load effects”, *J. Vib. Eng. Technol.*, 1-9.
- [53] **FENJAN, R.M., AHMED, R.A. and FALEH, N.M.** (2019), “Investigating dynamic stability of metal foam nanoplates under periodic in-plane loads via a three-unknown plate theory”, *Adv. Aircraft Spacecraft Sci.*, 6(4), 297-314.
- [54] **FERREIRA, A.J.M., ROQUE, C.M.C. and MARTINS, P.A.L.S.** (2003), “Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method”, *Compos.: Part B*, 34, 627-636.
- [55] **FLÁDR, J., BÍLÝ, P. and BROUKALOVÁ, I.** (2019), “Evaluation of steel fiber distribution in concrete by computer aided image analysis”, *Compos. Mater. Eng.*, 1(1), 49-70.
- [56] **FORSAT, M., BADNAVA, S., MIRJAVADI, S.S., BARATI, M.R. and HAMOUDA, A.M.S.** (2020), “Small scale effects on transient vibrations of porous FG cylindrical nanoshells based on nonlocal strain gradient theory”, *Eur. Phys. J. Plus*, 135(1), 81.

- [57] **GANAPATHI, M. et TOURATIER, M.** A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-flexible finite element. *Finite elements in Analysis and Design*, 1997, vol. 28, no 2, p. 115-135.
- [58] **GHADIMI, M.G.** (2020), "Buckling of non-sway Euler composite frame with semi-rigid connection", *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 13-24.
- [59] **GHANNADPOUR, S.A.M. and MEHRPARVAR, M.** (2020), "Modeling and evaluation of rectangular hole effect on nonlinear behavior of imperfect composite plates by an effective simulation technique", *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 25-41.
- [60] **GIOCOSA A.**, Les composites dans l'industrie automobile. Techniques de l'ingénieur, traité Plastiques et Composites, AM 5600, 1999.
- [61] **GOYAL.** "Dynamic Stability of Uncertain Laminated Beams Subjected to general lamination configuration". *AIAA J.*, vol. 31, pages 1299-1306, 1993.
- [62] **HADJI, L., ZOUATNIA, N. and BERNARD, F.** (2019), "An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities: Effect of the micromechanical models", *Struct. Eng. Mech.*, 69(2), 231-241.
- [63] **HAMED, M.A., MOHAMED, S.A. and ELTAHER, M.A.** (2020), "Buckling analysis of sandwich beam rested on elastic foundation and subjected to varying axial in-plane loads", *Steel Compos. Struct.*, 34(1), 75-89.
- [64] **HAMIDI, A., ZIDOUR, M., BOUAKKAZ, K. and BENSATTALAH, T.** (2018), "Thermal and small-scale effects on vibration of embedded armchair single-walled carbon nanotubes", *J. Nano Res.*, 51, 24-38.
- [65] **HILL, P.S.**, (2000), Introduction to Fibre Reinforced Polymer Composites for Strengthening, Carbon Fibre Composites for Structural Upgrade and Life Extension-Validation and Design Guidance, DML Composites.
- [66] **HIRWANI, C.K., PANDA, S.K. and MAHAPATRA, T.R.** (2018), "Thermomechanical deflection and stress responses of delaminated shallow shell structure using higher-order theories", *Compos. Struct.*, 184, 135-145.
- [67] **IURLARO, L., GHERLONE, M., DI SCIUVA, M. and TESSLER, A.** (2013), "Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories", *Compos. Struct.*, 106, 777-792.
- [68] **IURLARO, L., GHERLONE, M., DI SCIUVA, M. and TESSLER, A.** (2015), "Refined Zigzag Theory for laminated composite and sandwich plates derived from Reissner's Mixed Variational Theorem", *Compos. Struct.*, 133, 809-817.
- [69] **J.M. WHITNEY.** « Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates under Static Loads ». *J.Applied Mechanics*, Volume 40, pages: 302-304, 1973.
- [70] **JONES. R. M.**, Mechanics of composite Materials. Taylor and Francis, 2ème édition, 1999.
- [71] **K.S. AFAQ.** «Développement d'un Nouveau Modèle pour les Structures Composites Multicouches et Sandwiches avec Prise en compte du Cisaillement Transverse et des Effets de Bord»,2003.

- [72] **KACZKOWSKI S.A.** "Płoty obliczenia statyczne. Arkady". 2 edition, 1980.
- [73] **KANT, T.** (1981), "Thermoelasticity of thick, laminated orthotropic shells", *Transactions of the International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol. M, Methods for Structural Analysis, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- [74] **KATARIYA, P.V. and PANDA, S.K.** (2019), "Frequency and deflection responses of shear deformable Skew sandwich curved shell panel: A finite element approach", *AJSE J.*, 44(2), 1631-1648.
- [75] **KHARE, R.K., KANT, T. and GARG, A.K.** (2003), "Closed-form thermo-mechanical solutions of higher-order theories of cross-ply laminated shallow shells", *Compos. Struct.*, 59(3), 313-340.
- [76] **KHARE, Rakesh Kumar, KANT, Tarun, et GARG, Ajay Kumar.** Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, 2004, vol. 65, no 3-4, p. 405-418.
- [77] **KIRCHHOFF, G.R.** (1850), "Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen Scheibe", *Journal Für die Reine und Angewandte Mathematik, Crelle's J.*, 40, 51-88.
- [78] **KOSSAKOWSKI, P.G. and UZARSKA, I.** (2019), "Numerical modeling of an orthotropic RC slab band system using the Barcelona model", *Adv. Comput. Des.*, 4(3), 211-221.
- [79] **KUMAR, A., CHAKRABARTI, A. and KETKAR, M.** (2013), "Analysis of laminated composite skew shells using higher-order shear deformation theory", *Lat. Am. J. Solid. Struct.*, 10, 891-919.
- [80] **L. LIBERSCU.** On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [81] **LAL, A. and MARKAD, K.** (2018), "Deflection and stress behaviour of multi-walled carbon nanotube reinforced laminated composite beams", *Comput. Concrete*, 22(6), 501-514.
- [82] **LAL, A., JAGTAP, K.R. and SINGH, B.N.** (2017), "Thermo-mechanically induced finite element based nonlinear static response of elastically supported functionally graded plate with random system properties", *Adv. Comput. Des.*, 2(3), 165-194.
- [83] **LARDEUR, Pascal.** Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal. 1990. Thèse de doctorat. Compiègne.
- [84] **LEISSA, A.W. and CHANG, J.D.** (1996), "Elastic deformation of thick, laminated composite shells", *Compos. Struct.*, 35(2), 153-170.
- [85] **LIBOVE, CHARLES ET BATDORF, S.B.,** "A general small-deflection theory for flatsandwich plates" RN NACA-TN-1526; 1948.
- [86] **LÓPEZ-CHAVARRÍA, S., LUÉVANOS-ROJAS, A., MEDINA-ELIZONDO, M., SANDOVAL-RIVAS, R. and VELÁZQUEZ-SANTILLÁN, F.** (2019), "Optimal

- design for the reinforced concrete circular isolated footings”, *Adv. Comput. Des.*, 4(3), 273-294.
- [87] **LOVE, A.E.H.** (1888), “The small vibration and deformations of a thin elastic shell”, *Philos. Tran., Roy. Soc., Ser. A*, 179, 491-549.
- [88] **M. DI SCIUVA.** An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596), 1987).
- [89] **M. KARAMA, B. ABOU HARB, S. MISTOU and S. CAPERAA.** Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998. C.
- [90] **M. LEVINSON.** «An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates». *Mechanics Research Communication*, Volume 7, pages:343-350, 1980.
- [91] **M. TOURATIER.** « An Efficient Standard Plate Theory ». *Engng Sci*, Volume 29, pages : 901-916, 1991.
- [92] **M.V.V. MURTHY.** «An Improved Transverse Shear Deformation Theory for Laminated Anisotropic Plate». Rapport technique, NASA, 1981.
- [93] **MADABHUSI P. and J.F.DAVALOS.** "Static shear correction factor for laminate", 1996.
- [94] **MADENCI, E.** (2019), “A refined functional and mixed formulation to static analyses of fgm beams”, *Struct. Eng. Mech.*, 69(4), 427-437.
- [95] **MADENCI, E. and ÖZÜTOK, A.** (2020), “Variational approximate for high order bending analysis of laminated composite plates”, *Struct. Eng. Mech.*, 73(1), 97-108.
- [96] **MAHMOUD, S. R. and TOUNSI, A.,** on the stability of isotropic and composite thick plates. *Steel and Composite Structures*, 2019, vol. 33, no 4, p. 551-568.
- [97] **MANTARI, J.L., OKTEM, A.S. and GUEDES SOARES, C.** (2011), “Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory”, *Compos. Struct.*, 94(1), 37-49.
- [98] **MEETING Aydogdu,** «Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method», *International Journal of Mechanical Sciences* 47, pages: 1740-1755, 2005.
- [99] **MEIER U.,** “Strengthening of structures using carbon fiber-epoxy composites”. *Construction and Buildig Materiels*, Vol 9 (6), 341-351, 1995.
- [100] **MENAIL Y.,** (2009) Analyse de l’effet du vieillissement à l’air, dans l’eau douce et dans l’eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre, thèse de doctorat UBMAAnaba.
- [101] **MINDLIN, Raymond D.** Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *Journal of applied physics*, 1951, vol. 22, no 3, p. 316-323.
- [102] **MONGE, J.C., MANTARI, J.L. YARASCA, J. and ARCINIEGA, R.A.** (2019), “On bending response of doubly curved laminated composite shells using hybrid refined models”, *J. Appl. Comput. Mech.*, 5(5) 875-899.

- [103] **NIKKHOO, A., ASILI, S., SADIGH, S., HAJIRASOULIHA, I. and KAREGAR, H.** (2019), "A low computational cost method for vibration analysis of rectangular plates subjected to moving sprung masses", *Adv. Comput. Des.*, 4(3), 307-326.
- [104] **NOOR, A.K.** (1973), "Free vibrations of multilayered composite plates", *AIAA J.*, 11(7), 1038-1039.
- [105] **NOOR, AK. and BURTON WS.** (1990), "Three-dimensional solutions for anti-symmetrically laminated anisotropic plates", *ASME J Appl Mech*, 57(1), 182-188.
- [106] **NOOR, AK. and BURTON, WS.** (1992), "Computational models for high-temperature multilayered composite plates and shells", *Appl. Mech. Rev.*, 45(10), 419-446.
- [107] **P.C. YANG, C.H. NORRIS and Y. STRAVINSKY:** «Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plate». *Int. J. Sol. Struct.*, Volume 2, pages: 665-684, 1966.
- [108] **P.TOPDAR, A .H. SHEIKH and N.DHANG.** "Finite element Analysis of composite an Sandwich Plates Using a Continuous Inter-Laminar Shear Stress Model". , *J. Sandwich Structures And Materials*, Vol. 5_July 2003.
- [109] **PANC V.** "Theories of elastic plates". Noordho, Leyden, Netherlands, 1975.
- [110] **PANDA, S.K. and SINGH, B.N.** (2009), "Thermal post-buckling behaviour of laminated composite cylindrical/hyperboloid shallow shell panel using nonlinear finite element method", *Compo. Struct.*, 91(3), 366-374.
- [111] **PANDYA, B.N. and KANT, T.** (1988), "Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations", *Int. J. Solid. Struct.*, 24(12), 1267-1286.
- [112] **PANJEHPOUR, M., LOH, E.W.K. and DEEPAK, T.J.** (2018), "Structural insulated panels: State-of-the-art", *Trend. Civil Eng. Arch.*, 3(1), 336-340.
- [113] **POLIT, Olivier et TOURATIER, Maurice.** A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses. *Composite Structures*, 2002, vol. 58, no 1, p. 121-128.
- [114] **R. K. KAPANIA and S. RACITI.** «Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates», *Part I: Shear effects and buckling*, Volume 27, pages: 923-934, 1989.
- [115] **RACHEDI, M.A., BENYOUCEF, S., BOUHADRA, A., BACHIR BOUIADJRA, R., SEKKAL, M. and BENACHOUR, A.** (2020), "Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation", *Geomech. Eng.*, 22(1), 65-80.
- [116] **RAJABI, J. and MOHAMMADIMEHR, M.** (2019), "Bending analysis of a micro sandwich skew plate using extended Kantorovich method based on Eshelby-Mori-Tanaka approach", *Comput. Concrete*, 23(5), 361-376.
- [117] **RAJU, I. S. et CREWS JR, John H.** Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Computers & Structures*, 1981, vol. 14, no 1-2, p. 21-28.

- [118] **RAMOS, I.A., MANTARI, J.L. and ZENKOUR, A.M.** (2016), “Laminated composite plates subject to thermal load using trigonometrical theory based on Carrera Unified Formulation”, *Compos. Struct.*, 143, 324-335.
- [119] **RAYLEIGH, M. A., et al.** On progressive waves. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1877, vol. 1, no 1, p. 21-26.
- [120] **REDDY J.N.** (1984), “A simple higher order theory for laminated composite plates”, *ASME J. Appl. Mech.*, 51, 745-752.
- [121] **REDDY, J.N.** (2004), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition, CRC Press.
- [122] **REDDY, J.N. and LIU, C.F.** (1985), “A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells”, *Int. J. Eng. Sci.*, 23(3), 319-330.
- [123] **REISSNER, E.** (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,” *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77.
- [124] **REISSNER, E. et STAVSKY, YI.** Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates. 1961.
- [125] **REN, J. G.** Bending theory of laminated plate. *Composites science and technology*, 1986, vol. 27, no 3, p. 225-248.
- [126] **SAFA, A., HADJI, L., BOURADA, M. and ZOUATNIA, N.** (2019), “Thermal vibration analysis of FGM beams using an efficient shear deformation beam theory”, *Earthq. Struct.*, 17(3), 329-336.
- [127] **SAHOUANE, A., HADJI, L. and BOURADA, M.** (2019), “Numerical analysis for free vibration of functionally graded beams using an original HSDBT”, *Earthq. Struct.*, 17(1), 31-37.
- [128] **SARANGAN, S. and SINGH, B.N.** (2016), “Higher order closed form solution for the analysis of laminated composite and sandwich plates based on new shear deformation theories”, *Compos. Struct.*, 138, 391-403.
- [129] **SAYYAD, A.S. and GHUGAL, Y.M.** (2015), “On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results”, *Compos. Struct.*, 29, 177-201.
- [130] **SAYYAD, A.S. and GHUGAL, Y.M.** (2017), “On the free vibration of angle-ply laminated composite and soft core sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 19(6), 679-711.
- [131] **SAYYAD, A.S. and GHUGAL, Y.M.** (2020), “Stress analysis of laminated composite and sandwich cylindrical shells using a generalized shell theory”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(2), 103-124.
- [132] **SEDIGHI, H.M. and SHIRAZI, K.H.** (2012), “A new approach to analytical solution of cantilever beam vibration with nonlinear boundary condition”, *J. Comput. Nonlin. Dyn.*, 7(3), 034502.
- [133] **SEDIGHI, H.M., SHIRAZI, K.H. and ATTARZADEH, M.A.** (2013), “A study on the quintic nonlinear beam vibrations using asymptotic approximate approaches”, *Acta Astronautica*, 91, 245-250.

- [134] **SEDIGHI, H.M., SHIRAZI, K.H., REZA, A. and ZARE, J.** (2012), "Accurate modeling of preload discontinuity in the analytical approach of the nonlinear free vibration of beams", *Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Sci.*, 226(10), 2474-2484.
- [135] **SEHOUL, M., BENGUEDIAB, M., BAKORA, A., et al.** Free vibrations of laminated composite plates using a novel four variable refined plate theory. *Steel and Composite Structures*, 2017, vol. 24, no 5, p. 603-613.
- [136] **SELMİ, A.** (2019), "Effectiveness of SWNT in reducing the crack effect on the dynamic behavior of aluminium alloy", *Adv. Nano Res.*, 7(5), 365-377.
- [137] **SETOODEH, A.R., TAHANI, M. and SELAHI, E.** (2011), "Hybrid layerwise-differential quadrature transient dynamic analysis of functionally graded axisymmetric cylindrical shells subjected to dynamic pressure", *Compos. Struct.*, 93(11), 2882-2894.
- [138] **SHOKRIEH, M.M. and KONDORI, M.S.** (2020), "Effects of adding graphene nanoparticles in decreasing of residual stresses of carbon/epoxy laminated composites", *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 53-64.
- [139] **SINGH, A. and KUMARI, P.** (2020), "Analytical free vibration solution for angle-ply piezolaminated plate under cylindrical bending: A piezo-elasticity approach", *Adv. Comput. Des.*, 5(1), 55-89.
- [140] **SOFIYEV, A., AKSOGAN, O., SCHNACK, E. and AVCAR, M.** (2008), "The stability of a three-layered composite conical shell containing a FGM layer subjected to external pressure", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 15(6-7), 461-466.
- [141] **SOLDATOS, K.P.** (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", *Acta Mech.*, 94(3), 195-220.
- [142] **SRINIVAS, S.** (1973), "A refined analysis of composite laminates", *J. Sound Vib.*, 30, 495-507.
- [143] **SWAIN, P., ADHIKARI, B. and DASH, P.** (2017), "A higher-order polynomial shear deformation theory for geometrically nonlinear free vibration response of laminated composite plate", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 26(2), 129-138.
- [144] **TABRIZI, I.E., KEFAL, A., ZANJANI, J.S.M., AKALIN, C. and YILDIZ, M.** (2019), "Experimental and numerical investigation on fracture behavior of glass/carbon fiber hybrid composites using acoustic emission method and refined zigzag theory", *Compos. Struct.*, 223, 110971.
- [145] **THAI, H.T. and KIM, S.E.** (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *Int. J. Mech. Sci.*, 52, 626-633.
- [146] **THAKUR, S.N., RAY, C. and CHAKRABORTY, S.** (2017), "A new efficient higher-order shear deformation theory for a doubly curved laminated composite shell", *Acta Mechanica*, 228(1), 69-87.
- [147] **TIMOSHENKO, Stephen P. LXVI.** On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. The London, *Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1921, vol. 41, no 245, p. 744-746.

- [148] **TORNABENE, F.** (2016), “General higher order layer-wise theory for free vibrations of doubly-curved laminated composite shells and panels”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(9), 1046-1067.
- [149] **U. ICARDI and A.M. BERTETTO.** An evaluation of the influence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 57, no. 4, pages 555,571, 1995.
- [150] **VIET.TUNG. Nguyen.** « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [151] **VIOLA, E., TORNABENE, F. and FANTUZZI, N.** (2013), “General higher-order shear deformation theories for free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels”, *Compos. Struct.*, 95(1), 639-666.
- [152] **WHITNEY J.M.** "the effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates". *J.Compos.Mater.* Vol.3, p.534-547, 1969.
- [153] **XIANG, S., WANG, K., AI Y., SHA, Y. and SHI, H.** (2009), “Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories”, *Compos. Struct.*, 91(1), 31-37.
- [154] **YARASCA, J., MANTARI, J.L., PETROLO, M. and CARRERA, E.** (2017), “Best theory for cross-ply composite plates using polynomial, trigonometric and exponential thickness expansions”, *Compos. Struct.*, 161, 362-383.
- [155] **ZENKOUR, A.M.** (2007), “Three-dimensional elasticity solution for uniformly loaded cross-ply laminates and sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 9(3), 213-238.
- [156] **ZOUATNIA, N. and HADJI, L.** (2019a), “Static and free vibration behavior of functionally graded sandwich plates using a simple higher order shear deformation theory”, *Adv. Mater. Res.*, 8(4), 313-335.
- [157] **ZOUATNIA, N. and HADJI, L.** (2019b), “Effect of the micromechanical models on the bending of FGM beam using a new hyperbolic shear deformation theory”, *Earthq. Struct.*, 16(2), 177-183.