

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABESSIDI BEL ABBES



FACULTE DES TECHNOLOGIES  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL  
& TRAVAUX PUBLICS

**THESE**

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : GENIE CIVIL

Option : STRUCTURES ET MATERIAUX

Soutenu par  
Mr DAMANI Bakhti

Sujet de thèse :

---

---

Analyse de la vibration libre des plaques épaisses avec l'effet  
de la micro structure

---

---

Soutenu le : 04/11/2021, Devant le Jury composé de :

Mr BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	MCA	UDL SBA	Président
Mr FEKRAR Abdelkader	Professeur	UDL SBA	Directeur de la thèse
Mr TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL SBA	Co-directeur de la thèse
Mr CHIKH Abdelbaki	MCA	U. Tiaret	Examineur
Mr ATTIA Amina	MCA	U. Ain Temouchent	Examineur
Mr ZINE Abdallah	MCA	U. De Relizane	Examineur

Année universitaire : 2021-2022

## REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à mes directeurs de thèse Messieurs les Professeur **FEKRAR Abdelkader** et **TOUNSI Abdelouahed** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordé tout au long de ce travail, leurs aides et leurs sens de la motivation, leurs conseils éclairés, leur grande disponibilité, ainsi que pour leur profonde humanité et leurs encouragements qui m'ont été très utiles pour mener à terme de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur **Mr BOUSAHLA Abdelmoumen Anis**, Maître de conférences (A) à l'université Djillali Liabès de Sidi Bel-Abbès pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse en tant que Président.

Je remercie Mr **CHIKH Abdelbaki** Maître de conférences (A) à l'université de Tiaret, Mm **ATTIA Amina**, Maître de conférences (A) au Centre Universitaire de Ain-Temouchent et Monsieur **ZINE Abdallah** Maître de conférences (A) à l'université de Relizane, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Que tous ceux qui ont contribué à la réalisation de cette thèse, trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille et à mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

---

## Résumé

---

Dans ce travail, la théorie de la déformation de cisaillement quasi tridimensionnelle (quasi-3D) est présentée afin d'établir une analyse à la flexion ainsi qu'une analyse dynamique des plaques fonctionnellement gradués (FG). L'effet de la variation des propriétés du matériau et de la fraction volumique du constituant sur le comportement dynamique et en flexion de la plaque FG est discuté. L'avantage de ce modèle par rapport aux autres contributions est qu'un certain nombre de variables est diminué. Le modèle développé prend en considération les déplacements non linéaires dans l'épaisseur et garantit les conditions aux limites libres sur les faces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Les équations de base qui tiennent compte des effets des contraintes transversales et normales de cisaillement sont dérivées du principe de Hamilton. Les solutions analytiques sont déterminées selon la procédure de Navier. La précision de la formulation proposée est prouvée par des comparaisons avec les différentes solutions en 2D, 3D et quasi-3D trouvées dans la littérature.

**Mots-clés : plaque fonctionnellement gradués ; HSDT ; Quasi 3D ; Flexion ; Vibration**

---

## Abstract

---

In this work, quasi three-dimensional (quasi-3D) shear deformation theory is presented for bending and dynamic analysis of functionally graded (FG) plates. The effect of varying material properties and volume fraction of the constituent on dynamic and bending behavior of the FG plate is discussed. The benefit of this model over other contributions is that a number of variables is diminished. The developed model considers nonlinear displacements through the thickness and ensures the free boundary conditions at top and bottom faces of the plate without using any shear correction factors. The basic equations that account for the effects of transverse and normal shear stresses are derived from Hamilton's principle. The analytical solutions are determined via the Navier procedure. The accuracy of the proposed formulation is proved by comparisons with the different 2D, 3D and quasi-3D solutions found in the literature.

**Keywords:** Functionally graded plate; Quasi 3D HSDT; Bending; Vibration

في هذا العمل، تم تقديم نظرية تشوه القص شبه ثلاثية الأبعاد (شبه ثلاثية الأبعاد) من أجل الانحناء والتحليل الديناميكي للصفائح المتدرجة وظيفيًا (FG). تمت مناقشة تأثير خصائص المواد المختلفة وجزء الحجم للمكون على السلوك الديناميكي والانحناء للصفحة FG. فائدة هذا النموذج على المساهمات الأخرى هو أن عددًا من المتغيرات يتضاءل. يأخذ النموذج المطور في الاعتبار عمليات الإزاحة غير الخطية من خلال السماكة ويضمن شروط الحدود الحرة في الوجوه العلوية والسفلية للوحة دون استخدام أي عوامل تصحيح القص. المعادلات الأساسية التي تفسر تأثيرات ضغوط القص المستعرضة والعادية مشتقة من مبدأ هاملتون. يتم تحديد الحلول التحليلية عبر إجراء طريقة نافير تم إثبات دقة الصيغة المقترحة من خلال مقارنات مع الحلول المختلفة ثنائية وثلاثية الأبعاد وشبه ثلاثية الأبعاد الموجودة في الأدبيات.

**الكلمات الرئيسية:** صفحة متدرجة وظيفيًا، شبه ثلاثية الأبعاد، الانحناء اهتزاز، HSDT.

## Table des matières

REMERCIEMENTS .....	ii
Résumé .....	iii
Abstract.....	iv
ملخص.....	v
Table des matières .....	vi
Liste des tableaux .....	ix
Liste des figures.....	xi
Liste des Notations .....	xiii
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1

### Chapitre I

#### *Généralités Sur Les Matériaux à Gradient de Propriétés*

I.1. Introduction .....	6
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	7
I.3. L’historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués.....	9
I.4. Méthodes d’élaboration des matériaux à gradient de propriétés .....	10
I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) .....	10
I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	11
I.4.3. Compaction sèche des Poudres .....	12
I.4.4. Projection plasma.....	12
I.4.5. Frittage et Infiltration.....	12
I.5. Domaines d’applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM).....	12
I.5.1. L’aérospatiale.....	13
I.5.2. La médecine .....	13
I.5.3. Matières industrielles .....	13
I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM .....	13
I.6.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM).....	14
I.6.3. Loi de mélange sigmoïde (S-FGM) .....	15
I.6.4. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM : .....	16
I.6.5. Modèle de Mori-Tanaka .....	17
I.6.6. Modèle auto-cohérent de Hill .....	18
I.7. Conclusion.....	20

### Chapitre II

#### *Les Structures En Matériaux A Gradient De Propriétés*

II.1. Introduction :.....	22
II.2. Les différents modelés des structures composites dans l’élasticité bidimensionnelle:.....	22
II.2.1. Approche monocouche équivalente : .....	22
II.2.1.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	22
II.2.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	24
II.2.1.3. Théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé (HSDT) .....	26
II.2.1.4. La théorie de déformation des plaques quasi-3D .....	28
II.2.2. Approche par couche:.....	29

II.2.2.1. Les modèles zig-zag: .....	30
II.2.2.2. Les modèles couches discrètes : .....	32
II.2.3. Approche développement asymptotique .....	33
II.3. Modèles éléments finis des structures composites .....	34
II.3.1. Modèles éléments finis 2D .....	34
II.3.2. Modèles éléments finis 3D .....	36
II.4. Conclusion .....	39

### ***Chapitre III***

#### ***Généralité sur les Nanotechnologie***

III.1. Introduction .....	41
III.2. Définition des nanomatériaux : .....	41
III.3. Définition du périmètre nanométrique: .....	41
III.4. Les familles de produits par nano-objets: .....	42
III.4.1. Les nano-charges et les matériaux nano-renforcés ou nano chargés: .....	42
III.4.2. Les matériaux nanostructures en surface; .....	42
III.4.3. Les matériaux nanostructures en volume: .....	43
III.5. Les procédés de fabrication des nanomatériaux .....	43
III.5.1. La voie physique: .....	44
III.5.2. La voie chimique: .....	44
III.5.3. Les méthodes mécaniques .....	45
III.6. Les moyens de voir les nanomatériaux : .....	46
III.6.1. La microscopie électronique à balayage : .....	47
III.6.2. La Sonde ionique focalisée : .....	48
III.6.3. Le microscope à effet tunnel : .....	48
III.6.4. Le microscope à force atomique : .....	49
III.7. Utilisation des Nanomatériaux .....	50
III.7.1. Les Nanotechnologies Dans Le Domaine De Génie Civil. ....	50
III.7.2. Application De La Nanotechnologie En Matériaux De Construction: .....	51
III.7.3. Nanotechnologie et Le Béton: .....	51
III.7.4. Nanotechnologie et de l'acier: .....	54
III.7.5. Nanotechnologie et Bois: .....	55
III.7.6. Nanotechnologie En Matériaux De Construction D'étanchéité: .....	56
III.7.7. La Nanotechnologie et Béton Auto-Réparateur : .....	56
III.7.8. Peintures et Revêtements : .....	57
III.7.9. Verre .....	57
III.8. Conclusion .....	57

### ***Chapitre IV***

#### ***Étude de l'effet de la composition du matériau sur la flexion et les propriétés dynamiques des plaques FG à l'aide de HSDT quasi 3D***

IV.1. Introduction .....	60
IV.2. Formulation théorique .....	60
IV.2.2. Hypothèses de base .....	62
IV.3. Cinématique et équations constitutives .....	64
IV.3.1. Champ des déplacements .....	64

IV.3.2. Champ des déformations.....	64
IV.3.3. Équations constitutives: .....	65
IV.4. Équations d'équilibres.....	66
IV.5. Solution analytique pour plaques FG simplement appuyée. ....	69
IV.6. Résultats numériques.....	71
IV.6.1. Analyse statique .....	71
IV.6.1.1. Plaques graduées fonctionnellement .....	71
IV.6.1.2. Plaques exponentiellement graduées (Plaque E-FGM) .....	77
IV.6.2. Vibration libre .....	82
IV.7. Conclusion.....	88

## *Chapitre V*

### *Etude de la réponse dynamique des microplaques en FGM*

V.1. Introduction .....	90
V.2. Représentation de la micro plaque utilisée .....	90
V.3. Revue sur la théorie d'élasticité non locale .....	91
V.4. La théorie de déformation hyperbolique pour les plaques: .....	92
V.4.1. Cinématique de déplacement et de déformation : .....	93
V.4.2. Les relations contraintes déformations.....	94
V.5. Équations d'équilibre des micros plaques .....	95
V.6. La solution exacte pour les microplaques fonctionnellement graduées simplement appuyées: .....	96
V.7. Effet des dimensions de la nano- plaque sur le mode fondamental :.....	98
V.8. Conclusion .....	102
CONCLUSION GÉNÉRALE .....	103
Références bibliographiques .....	105



## Liste des tableaux

Titres des tableaux	P.
<b>Chapitre I</b>	
<b>Tableau I-1</b> : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	<b>6</b>
<b>Chapitre IV</b>	
<b>Tableau IV-1</b> : les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM	<b>71</b>
<b>Tableau IV-2</b> : Effet de la déformation normale sur les contraintes et le déplacement non-dimensionnel pour une plaque carrée en FG type Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> soumise à une charge uniformément répartie (a/h =10)	<b>73</b>
<b>Tableau IV-3</b> : Effet de la déformation normale sur le déplacement et la contrainte non-dimensionnelle pour une plaque carrée Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> FG soumise à une charge sinusoïdale	<b>74</b>
<b>Tableau IV-4</b> : La flèche maximale non-dimensionnelle pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale (a/h=2)	$\bar{w}(0) = \frac{10h^3 E_0}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$ <b>78</b>
<b>Tableau IV-5</b> : La contrainte axiale non-dimensionnelle pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale (a/h=10)	$\bar{\sigma}_x\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{a^2 q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ <b>79</b>
<b>Tableau IV-6</b> : La contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale (a/h=10)	$\bar{\tau}_{xz}(0) = \frac{h}{a q_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$ <b>80</b>
<b>Tableau IV-7</b> : La flèche maximale non-dimensionnelle $\bar{w}(0) = G(h)w/h q_0$ et la contrainte axiale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x(0) = \sigma_x(0)/q_0$ pour des plaques en EGM soumise à une charge uniformément répartie	<b>81</b>
<b>Tableau IV-8</b> : Comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$ d'une plaque isotrope carrée (a/h=10)	<b>82</b>
<b>Tableau IV-9</b> : Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_C/E_C}$ d'une plaque FGM carrée en Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	<b>83</b>
<b>Tableau IV-10</b> : Comparaison des trois premières fréquences naturelles $\bar{\omega} = \omega a^2/h \sqrt{\rho_C/G_C}$ d'une plaque FGM carrée en Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (a/h=10)	<b>84</b>
<b>Tableau IV-11</b> : Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_M/E_M}$ d'une plaque FGM carrée en Al/ ZrO <sub>2</sub> (Schéma de Mori-Tanaka)	<b>85</b>

<b>Chapitre V</b>		
<b>Tableau V-1</b> : Comparaison des fréquences fondamentales $\left(\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}}\right)$ des microplaques ( $a = 10, E = 30 \times 10^6, \rho = 1, \nu = 0.3$ )	<b>99</b>	
<b>Tableau V-2</b> : Comparaison des fréquences naturelles des microplaques fonctionnellement graduées ( $a=10, n=5$ )	100	

## Liste des figures

Titres des figures	P.
<b>Chapitre I</b>	
<b>Figure I-1</b> : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1996).	<b>8</b>
<b>Figure I-2</b> : Protection thermique	<b>8</b>
<b>Figure I-3</b> : Principe de la méthode coulage en bande (Lostec, 1997)	<b>11</b>
<b>Figure I-4</b> : Géométrie d'une plaque en FGM	<b>14</b>
<b>Figure I-5</b> : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	<b>15</b>
<b>Figure I-6</b> : <b>Variation</b> de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	<b>16</b>
<b>Figure I-7</b> : <b>Variation</b> du module de Young dans une plaque E-FGM	<b>17</b>
<b>Figure I-8</b> : <b>Matériau</b> FGM à deux phases avec microstructure particulaire (Mori, 1973)	<b>18</b>
<b>Figure I-9</b> : <b>Matériau</b> FGM à deux phases avec microstructure squelettique (Hill, 1995)	<b>19</b>
<b>Chapitre II</b>	
<b>Figure II-1</b> cinématique de Love-Kirchhoff (Afaq 2003)	<b>24</b>
<b>Figure II-2</b> cinématique de Reissner-Mindlin (Afaq 2003)	<b>24</b>
<b>Figure II-3</b> : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.	<b>25</b>
<b>Figure II-4</b> : cinématique de la théorie d'ordre élevé (Afaq 2003)	<b>26</b>
<b>Figures II-5</b> : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. (Nguyen, 2004)	<b>30</b>
<b>Figures II-6</b> : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. (Nguyen, 2004)	<b>30</b>
<b>Figures II-7</b> Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen, 2004)	<b>31</b>
<b>Figures II-8</b> Champ de déplacement des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Nguyen, 2004)	<b>31</b>
<b>Figure II-9</b> : Elément « sinus » triangulaire 6 noeuds de (Polit 2002)	<b>35</b>
<b>Figure II-10</b> Elément quadrilatère de type Lagrange a 9 noeuds (Nguyen 2004)	<b>35</b>
<b>Figure II-11</b> : Elément quadrilatère de type Lagrange a 16 noeuds (Nguyen 2004)	<b>36</b>
<b>Figure II-12</b> : Eléments finis 3D à 20 noeuds pour déterminer les contraintes suivant Z (Nguyen ,2004)	<b>36</b>
<b>Figure II-13</b> : Element brique a 20 noeuds	<b>37</b>
<b>Figure II-14</b> : Elément singulier _a 15 nœuds (Icardi 95)	<b>37</b>
<b>Figure II-15</b> : Etudes du problème de bord libre par EF 3D (Icardi 95)	<b>38</b>
<b>Figure II-16</b> : Elément brique mixte à 18 nœuds (Ramtekkar 02)	<b>38</b>

<b>Chapitre III</b>	
<b>Figure III-1</b> : Premier microscope électronique à balayage par Manfred Von Ardenne	<b>47</b>
<b>Figure III-2</b> : Microscope électronique à balayage JEOL JSM-6340F	<b>48</b>
<b>Figure III-3</b> : Photographie d'un microscope à effet tunnel	<b>49</b>
<b>Figure III-4</b> : Le premier microscope à force atomique du monde, au musée de la Science de Londres	<b>49</b>
<b>Chapitre IV</b>	
<b>Figure IV-1</b> : Plaque rectangulaire typique FGM	<b>62</b>
<b>Figure IV-2</b> : Variation de la flèche non dimensionnelle $\bar{w}$ pour les plaques de métal, de céramique et de FGM par rapport au rapport géométrique (a/b) avec tous les profils de composition	<b>75</b>
<b>Figure IV-3</b> : Variation de la flèche non dimensionnelle $\bar{w}$ pour les plaques de métal, de céramique et de FGM par rapport au rapport géométrique (a/h) avec tous les profils de composition	<b>75</b>
<b>Figure IV-4</b> : L'effet de l'anisotropie du matériau sur la flèche maximale non dimensionnelle d'une plaque FGM avec différents profils de composition	<b>76</b>
<b>Figure IV-5</b> : Variation du fréquences fondamental adimensionnel $\bar{\omega}$ pour les plaques métalliques, céramiques et FGM par rapport au rapport géométrique (a/b) avec tous les profils de composition	<b>86</b>
<b>Figure IV-6</b> : Variation du fréquences fondamental adimensionnel $\bar{\omega}$ pour les plaques métalliques, céramiques et FGM par rapport au rapport géométrique (a/h) avec tous les profils de composition	<b>86</b>
<b>Figure IV-7</b> : L'effet de l'anisotropie du matériau sur la base non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque FGM avec différents profils de composition	<b>87</b>
<b>Chapitre V</b>	
<b>Figure V-1</b> : présentation schématique d'une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée	<b>90</b>
<b>Figure V-2</b> : Effet de l'indice matériel (n) et du paramètre non local ( $\mu$ ) sur le rapport des fréquences d'une plaque carrée fonctionnellement graduée simplement appuyée (a/h=10)(a) premier mode; (b) deuxième mode)	<b>101</b>

### Liste des Notations

$E_m$	Module d'Young métal
$E_c$	Module d'Young céramique
$e_0 a$	Facteur de taille (non local)
$A' \quad B'$	constant
$P$	Paramètre du matériau
$K_1, K_2$	constant
$u_0 \quad v_0 \quad w_0$	composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$f(z)$	Fonction de forme (gauchissement)
$E(z)$	Module d'Young en fonction de $z$
$\{ \quad \}$	Vecteur colonne
$[ \quad ]$	Matrice
$E(z)$	Module de Young en fonction de « $z$ »
$u \quad v \quad w$	Les déplacements dans les directions $x, y$ et $z$
$u_0 \quad v_0 \quad w_0$	composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\varphi_z$	La rotation autour les directions $z$
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « $z$ »
$V(z)$	Fraction volumique
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z$	Contraintes normales

$\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\delta u \quad \delta v \quad \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta \gamma_x \quad \delta \gamma_y$	Champ de déformation transversal virtuel
$\delta w_{\text{int}} \quad \delta w_{\text{ext}}$	Travail virtuel intérieur et Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$N_x \quad N_y \quad N_z \quad N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x^b \quad M_y^b \quad M_{xy}^b$	Moments de flexion
$M_x^s \quad M_y^s \quad M_{xy}^s$	Moments supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_x \quad S_y \quad S_{xy}$	Moments supplémentaire du au cisaillement transverse
$Q_{xz} \quad Q_{yz}$	Effort de Cisaillement
$S_{xy}^s \quad S_{yz}^s$	Effort de Cisaillement
$A_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de flexion
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$ij$	Nombres naturels

$\partial$	Dérivée partielle
$\nabla$	Laplacien
$C_{ij}$	Coefficient de rigidité
$C-C$	Longueur de liaison
$\mu$	Paramètre non local
CPT	La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchoff
HPT	La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre
SSDT	La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé

# ***INTRODUCTION GÉNÉRALE***



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux avancés sont largement utilisés dans les applications industrielles à haute performance depuis de nombreuses années. Parmi les matériaux composites classiques, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont attiré une attention considérable vue leurs caractéristiques supérieures telles que la haute résistance mécanique et thermique.

Les plaques stratifiées conventionnelles souffrent de la discontinuité dans les propriétés des matériaux aux interfaces des couches et des constituants du composite. A cet effet, les contraintes sont à l'origine de problèmes d'interface, notamment à haute température et à des sollicitations mécaniques importantes. Ces problèmes peuvent être atténués par la fraction volumique progressivement variable du constituant et du matériau sur mesure pour les applications souhaitées. À ce point, la graduation des matériaux céramique-métal peut varier d'un matériau à un autre et la résistance thermique d'un composant est donc augmentée du fait de la "faible conductivité thermique de la céramique". Il est très intéressant de surmonter le problème de la "faible ténacité" d'un matériau céramique en incorporant un matériau métallique dans le constituant.

De nombreux chercheurs ont rapporté un large éventail de résultats sur l'analyse linéaire des plaques FG (à gradation fonctionnelle) avec diverses théories (Jin et Paulino 2001, Yung et Munz 1996, Jin et Batra 1996, Batou et al.2019, Hamed et al.2019 et 2020, Ghandourah et Abdraboh 2020, Asiri et al.2020, Hadji et Safa 2020, AlSaid-Alwan et Avcar 2020, Gafour et al.2020, Hadji et Avcar 2021ab). Dans ces études, de différents modèles de plaques, tels que la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ou la théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé (HSDT), ont été utilisées. Matsunaga (2009) a développé un HSDT 2D pour la prédiction des contraintes et des déplacements dans les plaques FG sous chargements mécaniques et thermiques. Le modèle peut prendre en compte les influences du cisaillement transversal et des contraintes normales. Zhao et al. (2009) ont présenté une étude dynamique des plaques FG qui utilise la procédure élément-libre- kp-Ritz. Filippi et al. (2015) ont utilisé la « Formulation unifiée Carrera » 1D pour étudier les réponses en flexion des structures FG. Hosseini-Hashemi et al. (2011) ont proposé une nouvelle méthode analytique exacte pour établir l'analyse dynamique des plaques épaisses FG à l'aide du modèle de plaque de déformation par cisaillement du troisième ordre de Reddy.

Mantari et Soares (2014) ont présenté le comportement en flexion des plaques FG en utilisant HSDT. Mohammadimehr et al. (2016A) ont étudié la réponse vibratoire libre du panneau cylindrique FG CNT-RC en utilisant la première théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT). Aldousari (2017) a étudié la réponse statique de la poutre FG en utilisant différents HSDT. Salah et al. (2019) ont proposé une théorie des plaques raffinée à quatre variables simple et efficace pour l'étude de la stabilité thermique des plaques sandwich FG. Kar et Panda (2015) ont étudié la réponse en flexion par déformation non linéaire de la coque sphérique FG à l'aide de la méthode MEF. En utilisant le modèle d'Euler-Bernoulli, les relations non linéaires déformation-déplacement de Von-Karman et FEM (méthode des éléments finis), Mohammadimehr et Alimirzaei (2016) ont analysé les réponses statiques et dynamiques d'une poutre composite imparfaite renforcée par des FG-SWCNTs -nanotubes de carbone à paroi). De plus, Mohammadimehr et Alimirzaei (2017) ont étudié la stabilité et le comportement dynamique d'une micro poutre en composite renforcée par des nanotubes de carbone FG-CNTRC (FG-CNTRC) soumise à un champ magnétique en utilisant la théorie du gradient de contrainte modifiée, le principe de Hamilton, la méthode des éléments finis (MEF) et Les formulations de Reddy. Karami et al. (2018) ont discuté de la propagation des ondes dans les nano-plaques FG sous champ magnétique en plan en se basant sur la "théorie du gradient de contrainte non locale" et sur la "théorie des plaques raffinées à quatre variables". Kolahchi et al. (2017) ont étudié la propagation des ondes de « plaques sandwich renforcées FG-CNT » viscoélastiques intégrées avec capteur et actionneur à l'aide d'une « théorie de zigzag raffinée ». Sur la base de la méthode étendue de Kantorovich (EKM) et de la CPT (théorie classique des plaques), Rajabi et Mohammadimehr (2019) ont étudié le comportement en flexion d'une plaque oblique micro sandwich renforcée par des CNT (nanotube de carbone).

L'effet de l'élongation de l'épaisseur est ignoré dans la plupart des HSDTs en considérant que le déplacement transversal est constant. Cette hypothèse est imprécise, en particulier pour les plaques FG épaisses. Pour surmonter ce problème, des théories quasi-3D sont développées par plusieurs auteurs. Zenkour (2007) a examiné le problème de la flexion de charge transversale agissant sur une plaque rectangulaire isotrope non homogène en utilisant à la fois des solutions trigonométriques 2D et 3D d'élasticité. Matsunaga (2008) a analysé les fréquences propres et les contraintes de flambement dans les plaques FG en tenant compte des influences du cisaillement transversal et des déformations normales ainsi que de l'inertie de rotation. Carrera et al. (2011) ont étudié l'influence de l'élongation de l'épaisseur dans les structures plaque/coque FG. Neves et al. (2012a) ont présenté une nouvelle application pour la

formulation unifiée de Carrera (CUF) pour étudier les plaques FG. Neves et al.(2012b) ont proposé une théorie originale de la déformation de cisaillement du sinus hyperbolique qui prend en compte les déformations dans l'épaisseur pour l'analyse de la flexion et des vibrations des plaques FG. Zenkour (2013) a développé une théorie trigonométrique avancée des plaques d'ordre élevé, qui prend en compte les influences des déformations de cisaillement transversal ainsi que des déformations normales transversales pour l'analyse à flexion des plaques FGM. Jha et al.(2013) ont présenté une réponse dynamique des plaques FG élastiques et rectangulaires en utilisant les théories des déformations de cisaillement/cisaillement normal. Sheikholeslami et Saidi (2013) ont étudié la dynamique des plaques FG reposant sur une fondation élastique en utilisant le cisaillement d'ordre élevé et la théorie des plaques déformables normales de Batra et Vidoli par une formulation analytique. Mantari et Soares (2013) ont fourni des solutions analytiques à l'analyse statique des plaques FG en utilisant un nouveau HSDT trigonométrique d'ordre élevé et hybride quasi-3D. Alijani et Amabili (2014) ont étudié les vibrations forcées non linéaires des plaques FG modérément épaisses en utilisant des HSDT qui prennent en compte l'effet de la déformation de l'épaisseur. Mantari et Soares (2015) ont proposé un modèle de déformation de cisaillement trigonométrique quasi-3D pour l'analyse statique des plaques FG. Akavci et Tanrikulu (2015) ont fourni un nouveau HSDT quasi-3D et 2D pour l'analyse statique et dynamique des plaques FG. Recently, Youcef et al. (2020) ont également utilisé un nouveau HSDT 2D et quasi-3D pour l'analyse des plaques FG à flexion.

Dans ce travail, un nouveau modèle de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D est présenté pour l'étude de la flexion et des vibrations libres des plaques FG. Le présent modèle offre une bonne précision et considère une fonction de forme de déformation non linéaire du cisaillement transversal et respecte les conditions aux limites du cisaillement transversal des faces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser des facteurs de correction de cisaillement. De plus, la théorie considère l'effet d'allongement en utilisant la même fonction hyperbolique. Les propriétés des matériaux de la plaque FG sont supposées variées de manière continue dans l'épaisseur de la plaque en considérant des différentes fonctions de la loi de puissance. Les équations du mouvement sont obtenues à partir du principe de Hamilton. La solution Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour les plaques FG simplement appuyées. Les résultats calculés sont validés par une comparaison avec celles obtenues de la littérature.

*Chapitre I*

***GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES***

## I.1. Introduction

Le défi de concevoir une structure aussi légère que possible sans sacrifier la résistance est un enjeu industriel important de nos jours. Plusieurs de méthodes ont été proposées dans la littérature pour la production de nouveaux matériaux. Parmi celles qui a attiré une attention particulière, il y a la réalisation des matériaux à gradient de fonction FGM (Functionally Graded Materials).

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continuellement avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure.

En effet, les FGM sont une classe de composites particuliers caractérisée par une Composition et une structure qui varient d'une manière graduelle dans le matériau, conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés (Nabil Ferguen et al, 2011).

Ce type de matériau à récemment suscité un grand intérêt en raison des avantages qu'il offre, par la diminution de disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques (Z. Zhong et al, 2007).

Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil, ils trouvent également des applications biomédicales (C. Baron et al, 2008).

La plupart des « FGM » sont constitués d'un mélange de céramique et de métal. Cette Composition est variée d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal avec une variation désirée des fractions volumiques de ces deux matériaux entre les deux surfaces (J.N. Reddy, 2000).

Les propriétés mécaniques de ces deux composants sont illustrées dans le tableau I-1

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance thermique.</li> <li>- Bonne résistance à l'oxydation.</li> <li>- Faible conductivité thermique.</li> </ul>
Continuité du matériau d'un point à l'autre "couches intermédiaires"	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elimination des problèmes de l'interface.</li> <li>- Relaxer les contraintes thermiques</li> </ul>
La face à basse température	metal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance mécanique.</li> <li>- Conductivité thermique élevée.</li> <li>- Très bonne ténacité</li> </ul>

**Tableau I-1** : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

## I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique (Koizumi, 1992).

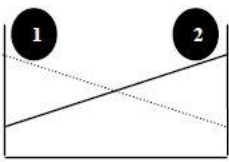
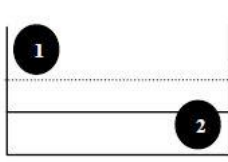
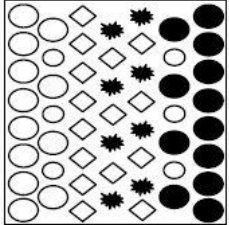
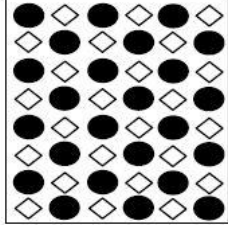
La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

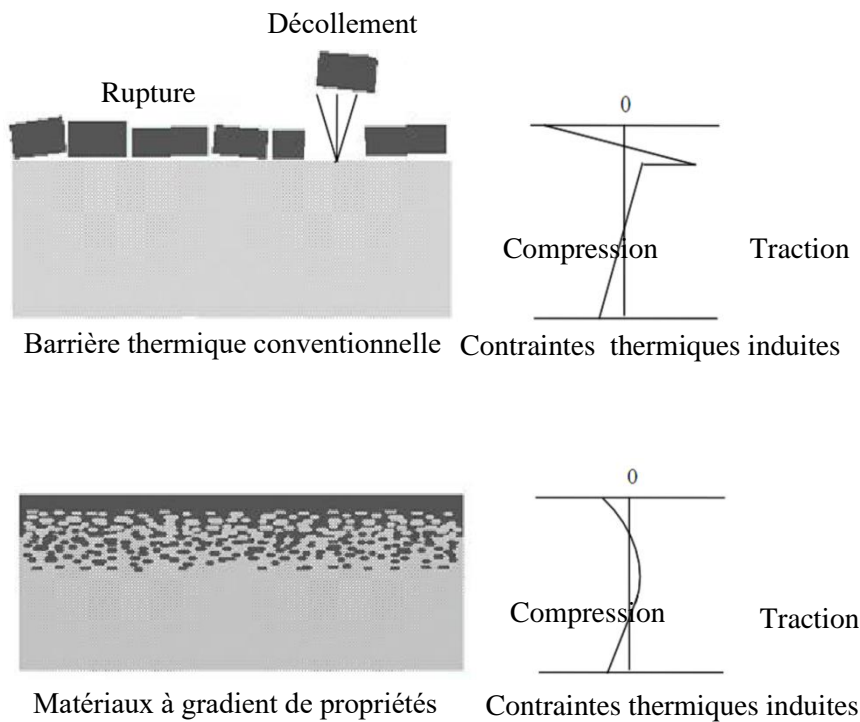
Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (Kokini, 1990). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau (FGM) est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des (FGM). Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch, 1986).

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibres ◇</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Figure I-1 :** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1996).

La figure I-2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.



**Figure I-2 :** Protection thermique.

### I.3. L'historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des "Matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai sur l'île de Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi, 1992). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique (Koizumi, 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet (Koizumi, 1997).

Trois caractéristiques étaient prises en compte pour la conception d'un matériau pour résister à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :



- Le système SiC/C par Le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapor deposition C.V.D)
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
- Le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques...etc. (Okamura, 1997).

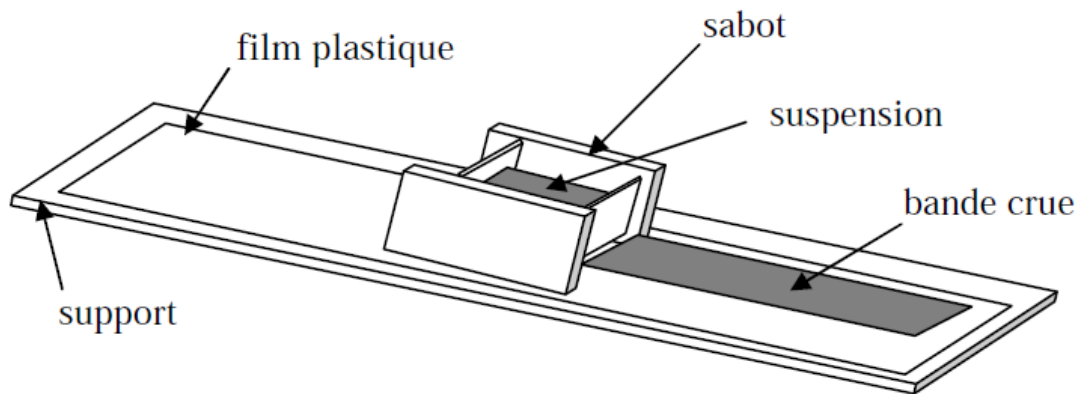
Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A partir de cet an un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

#### **I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés**

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

##### **I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)**

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.3), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande (L. Lostec, 1997). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I-3 :** Principe de la méthode coulage en bande (Lostec, 1997).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler (R. E. Mistler, 1973) ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (P. Boch., 1986).

#### **I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou "prise";
- Consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique (J.S. Moya et al, 1992);
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### **I.4.3. Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi,

généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale (A Bishop. Et al, 1993).

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

### **I.4.4. Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (H.D. Steffens et al,1990).

### **I.4.5. Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (M. Takahashi et al ,1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

## **I.5. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)**

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Grâce à leurs propriétés mécaniques et thermique ces matériaux sont utilisés dans des différentes domaines tel que :

### **I.5.1. L'aérospatiale**

Les FGM sont très prometteurs et peuvent être utilisées dans des domaines plus larges de l'aérospatiale car les FGM peuvent résister à des gradients thermiques très élevés, ceci les rend adéquat pour l'usage dans les structures et le corps des navettes spatiales ainsi pour les composants de moteur des fusées (L. Marin, 2005).

### **I.5.2. La médecine**

La technologie FGM est applicable aux os, des articulations et des dents. car ces tissus vivants, sont caractérisés comme des matériaux fonctionnellement gradués de la nature (S. Matsuo, 2001)

### **I.5.3. Matières industrielles**

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels.

Les FGM trouvent leurs utilités dans l'électronique tel que les fibres optiques utilisées pour la transmission à haute vitesse d'onde ,

Les FGM sont aussi employés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés en tant qu'enduit protecteur sur des lames de turbine dans les turbomoteurs (M. Niino et al, 2005).

Les parois internes des réacteurs nucléaires sont faites avec des FGM (céramique / métal) ;

Les cylindres de moteur de voiture sont faits avec de FGM.

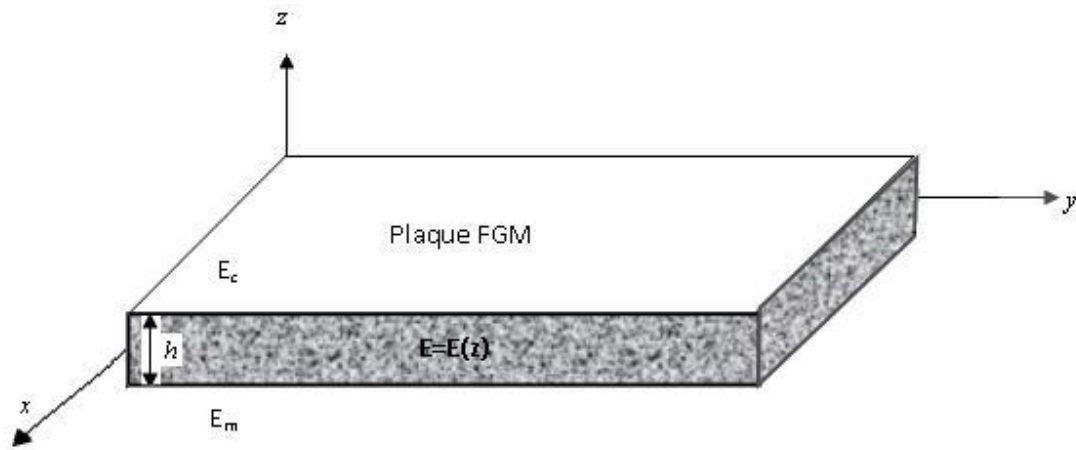
## **I.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM**

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'épaisseur. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

Pour voir les contextes des plaques FGM, on va considérer une plaque en FGM conçue en céramique et de métal.



**Figure I-4 :** Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E=E(z)$   $\nu=\nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.6.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

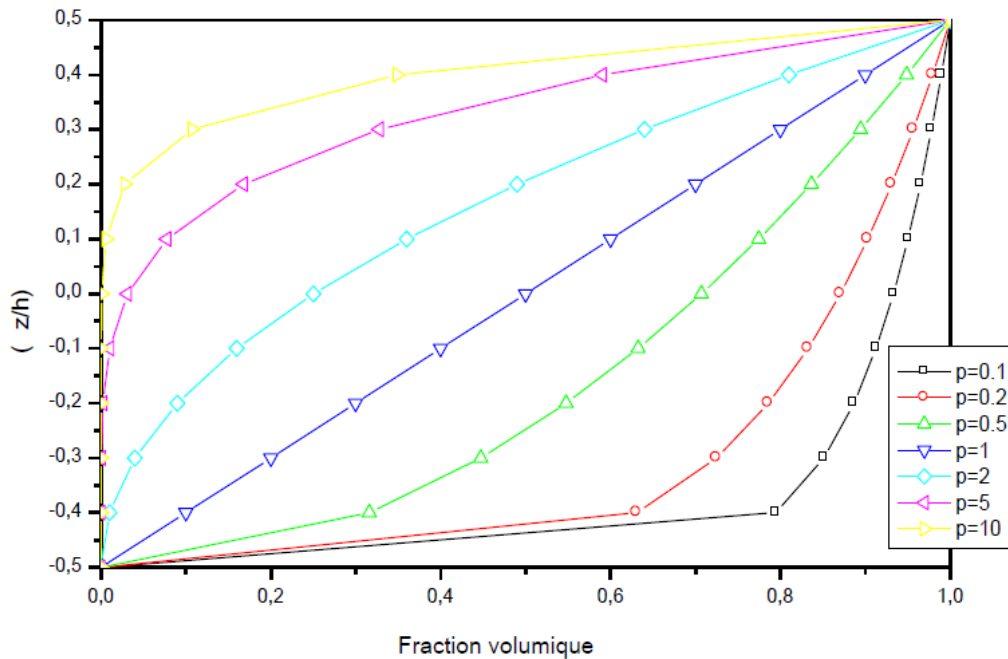
$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad \text{I.1}$$

Où  $k$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (G. Bao et al, 1995):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z)$$

I.2

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure II.8. On voit bien que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .



**Figure I-5** : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

### I.6.3. Loi de mélange sigmoïde (S-FGM)

Dans le cas où on ajoute une plaque P-FGM avec une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao, 1995). Par conséquent, (Chung et chi 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.3.a}$$

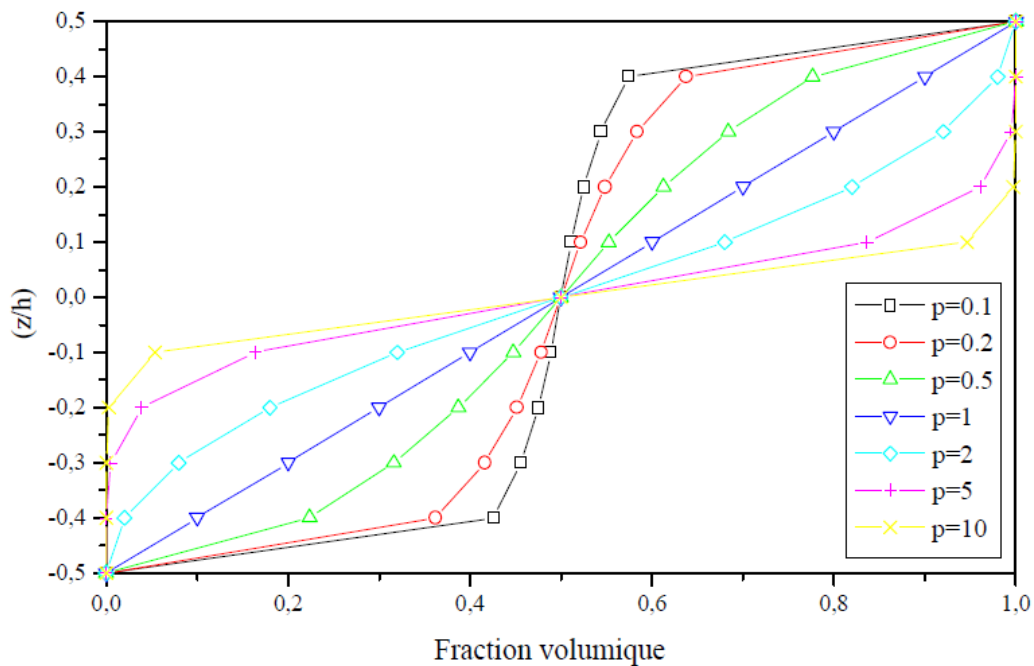
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.3.b}$$

En utilisant la loi de mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.4.a}$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.4.b}$$

La figure I.6 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes.



**Figure I-6 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

#### I.6.4. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

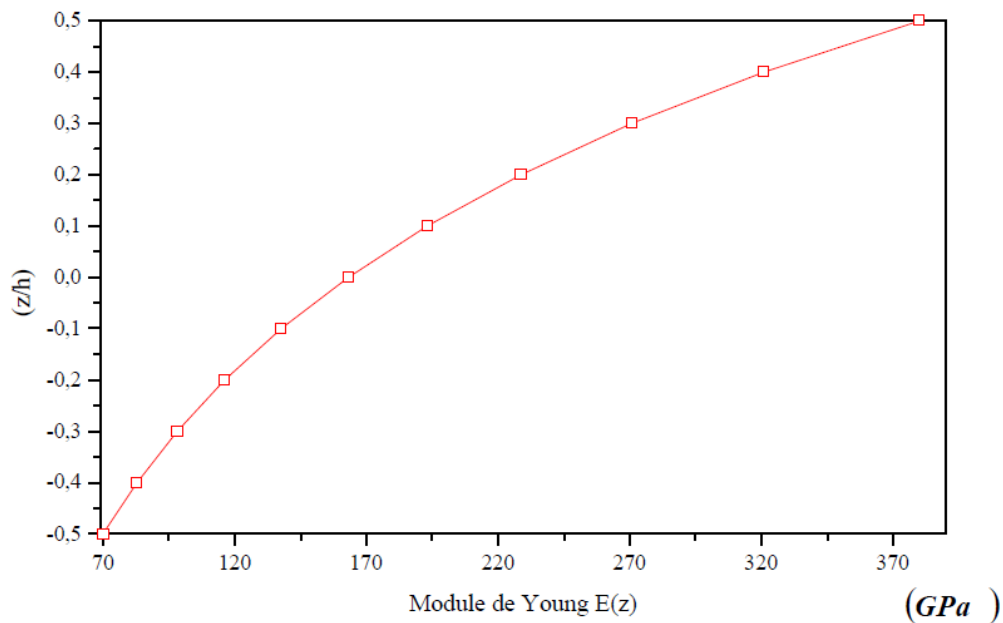
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Naghdi, 1957) :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad \text{I.5.a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_c}{E_m} \right) \quad \text{I.5.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.7.

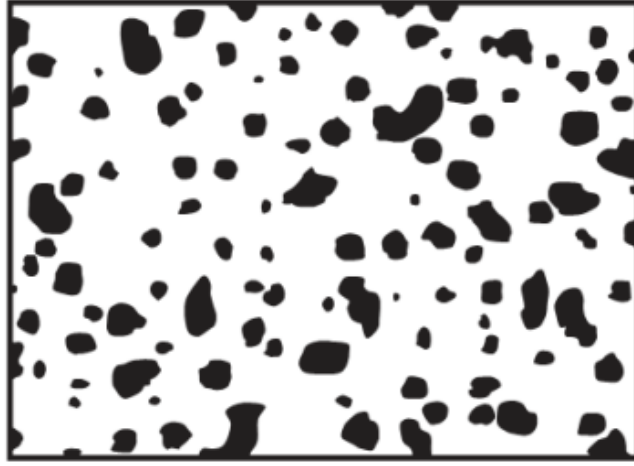


**Figure I-7 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

### I.6.5. Modèle de Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur le schéma de Mori et Tanaka (1973) qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues Figure I.11. Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulière dénotée par l'indice 2.





**Figure I-8 :** Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire (Mori, 1973).

Si on note par  $K$  le module de compressibilité, par  $G$  le module de cisaillement, par  $V$  la fraction volumique et par  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka (1973), pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par (Vel et Batra (2004), Shen (2009)) :

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + 4/3G_1)} \quad \text{I.6}$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)/(G_1 + f_1)} \quad \text{I.7}$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad \text{I.8}$$

#### I.6.6. Modèle auto-cohérent de Hill

Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite. Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement ; impliquant que le même module global est estimé dans un autre composite où les rôles des deux phases sont permutés. Ceci permet l'estimation du module effectif dans les régions dont le squelette de la microstructure a une forme continue telle que montrée sur la figure I.12.



**Figure I-9** : Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique (Hill, 1995).

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{(K - K_2)} + \frac{V_2}{(K - K_1)} \quad \text{I.9}$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{(G - G_2)} + \frac{V_2}{(G - G_1)} \quad \text{I.10}$$

Où  $g$  et  $\eta$  sont définis par :

$$g = \frac{K}{K_1 + (4/3)G} \quad \text{I.11}$$

$$\eta = 1/5(3 - g) \quad \text{I.12}$$

A partir des équations (II.9) et (II.10), l'expression du module de compressibilité est obtenue :

$$K = \frac{1}{V_1/(K_1 + (4/3)G) + V_2/(K_2 + (4/3)G)} - 4/3G \quad \text{I.13}$$

Le module  $G$  est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[ \frac{V_1 K_1}{(K_1 + (4/3)G)} + \frac{V_2 K_2}{(K_2 + (4/3)G)} \right] + 5 \left[ \frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad \text{I.14}$$

Pour les deux modèles précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par :

$$E = \frac{9KG}{(3K + G)} \quad \text{I.15}$$

$$\nu = \frac{(3K - 2G)}{2(3K + G)} \quad \text{I.16}$$

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

## **I.7. Conclusion**

Dans ce qui précède nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application et les différentes lois de mélange,

Les FGM ayant été conçus principalement pour résister à des environnements thermiques sévères et grâce à leur fonctionnalité ces matériaux permettent de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

## *Chapitre II*

# *Les structures en matériaux à gradient de propriétés*

## **II.1. Introduction :**

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses.

## **II.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle:**

### **II.2.1. Approche monocouche équivalente :**

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles

#### **II.2.1.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)**

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff.

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ). Elle suppose les hypothèses ci-après:

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen.
- Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal  $w$  des points du plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan moyen, restent planes et normales à celui-ci (Figure), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse ( $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).
- L'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ( $\sigma_z = 0$ ).

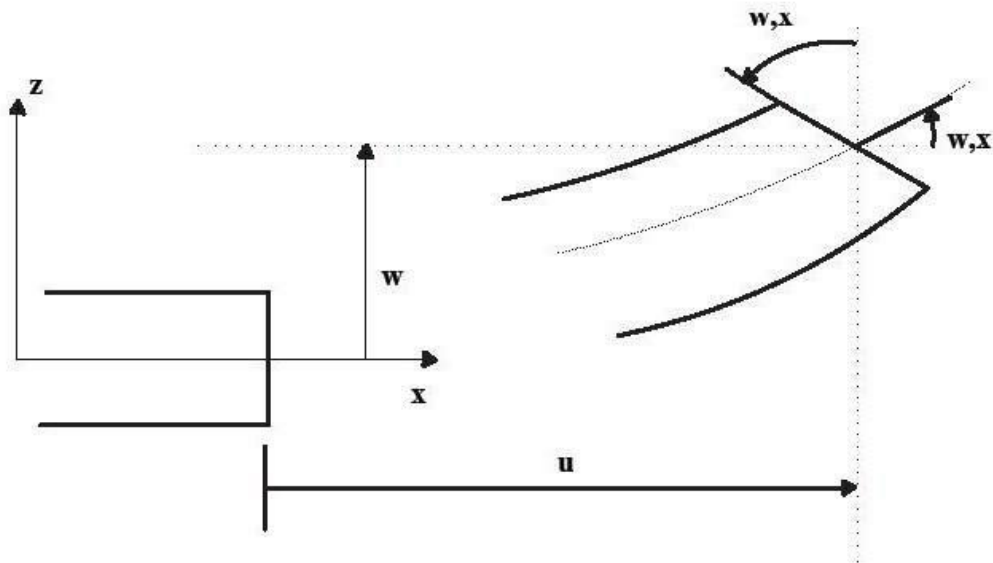
A partir des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \text{II.1.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad \text{II.1.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad \text{II.1.c}$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



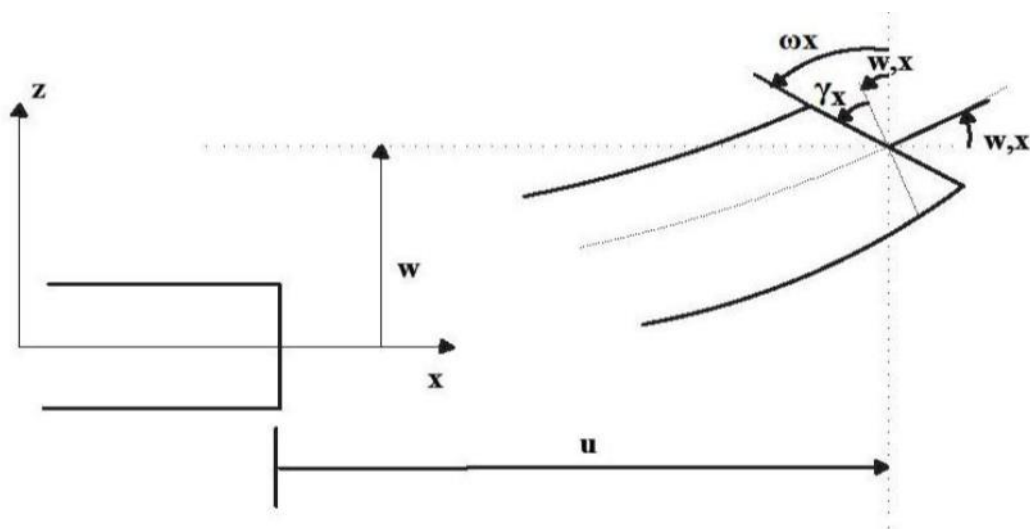
**Figure II-1** cinématique de Love-Kirchhoff (Afaq 2003)

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, ceci conduit à des résultats imprécis pour des plaques épaisses.

### II.2.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) se base sur les hypothèses de (Reissner, 1945 - Mindlin, 1951) d'où :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;
- La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes ;
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée. La Figure I.



**Figure II-2** cinématique de Reissner-Mindlin (Afaq 2003)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. La Figure. Montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu. (FSDT) peuvent être référées dans (Reissner, 1945 et Mindlin, 1951) qui a mené au modèle de plaque de (Reissner-Mindlin, ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959 ; Reddy, 1997 et 1999). Le champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad \text{II.2.a}$$

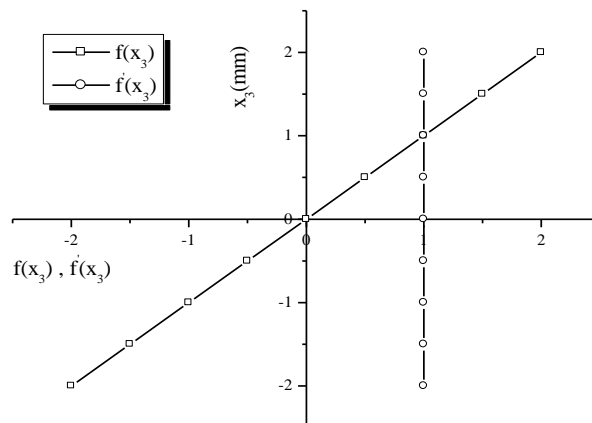
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad \text{II.2.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad \text{II.2.c}$$

Avec :

$(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements en membrane et  $(\phi_x, \phi_y)$  les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ ,

respectivement données par :  $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$  ,  $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$  .



**Figure II-3** : Variation de la fonction de gauchissement  $f(x_3) = x_3$  et  $f'(x_3)$  suivant l'épaisseur.

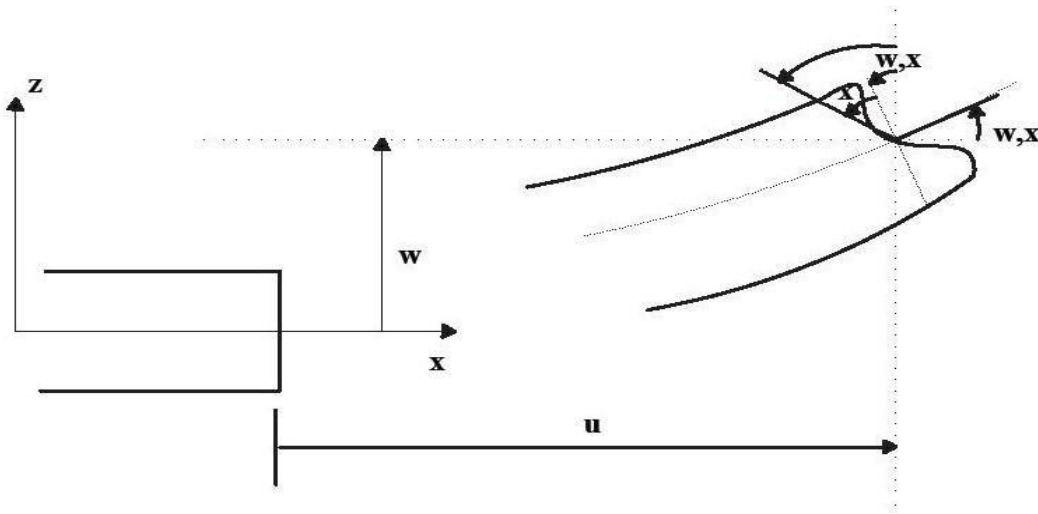


D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

### II.2.1.3. Théorie de déformation en cisaillement à ordre élevé (HSDT)

Plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur, pour franchir les limites des théories du premier ordre,

À la différence des théories du premier ordre avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement a travers l'épaisseur, la théorie à ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur (figure II-3). Par conséquent, Ces modèles permettent de représenter les effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al 1949 ; Naghdi ,1957 ;Reissner ,1951 ; Reddy, 1984 ; Nguyen., 2004). Nous avons présenté ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.



**Figure II-4** : cinématique de la théorie d'ordre élevé (Afaq 2003)

Le champ de déplacements s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y), \quad \text{II.3.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y), \quad \text{II.3.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad \text{II.3.c}$$

où  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements en membrane et  $(\phi_x, \phi_y)$  les rotations autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement ;

$$\text{On pose aussi } \varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$$

$f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. On remarque que les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) peut être obtenue en prenant  $f(z) = 0$ , tandis que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue par une fonction  $f(z) = z$ .

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy (TSDT) (Reddy, 1997) sont obtenus par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \quad \text{II.4}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. (Touratier, 1991) propose le modèle sinus (SSDT), il utilise une fonction trigonométrique sinusoïdale qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur qui utilise des fonctions polynomiales pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{II.5}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. Ce modèle est considéré plus précis par rapport à la théorie de Reddy. Une version exponentielle de la théorie de déformation de

cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDT) a été développée par (Karama et al. 2003) en prenant la fonction suivante :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad \text{II.6}$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) a été développée par Ait Atmane et al (2010) est obtenue en prenant (Ait Atmane H., 2010) :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad \text{II.7}$$

Les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

#### II.2.1.4. La théorie de déformation des plaques quasi-3D

En divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et en prenant en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque. toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non-linéaire de la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

(Thai et Kim (2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. (Hebali et al. 2014), (Thai .2014), ( Belabed et al. 2014) et ( Bennoun et al. 2016) ont proposée à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D, En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que (Zenkour,2007) a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FGM, ( Mantari et Guedes Soares .2015) ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement gradués en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Cette théorie est donnée par le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x}, \quad \text{III.8.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y}, \quad \text{III.8.b}$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y) \quad \text{III.8.c}$$

où  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$  sont les déplacements dans les directions  $x$  et  $y$  d'un point situé sur le plan médian de la plaque

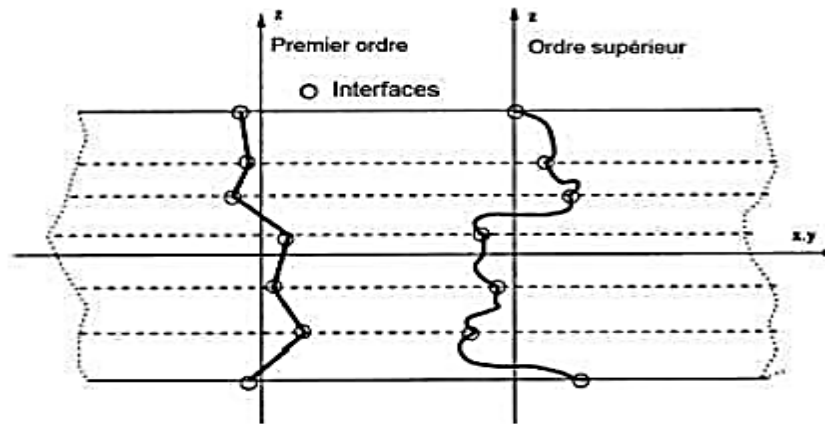
$(w_b, w_s)$  sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal,  $\varphi$  est un déplacement supplémentaire  $\varphi$  qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et  $f(z)$  est la fonction de cisaillement transverse.

### II.2.2. Approche par couche:

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les (**Figures I.2 et I.3**) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par (Chabot, 1997), (Carrera, 2000), (Afaq et al, 2003), (Reddy, 1984), (Di Sciuva, 1987).

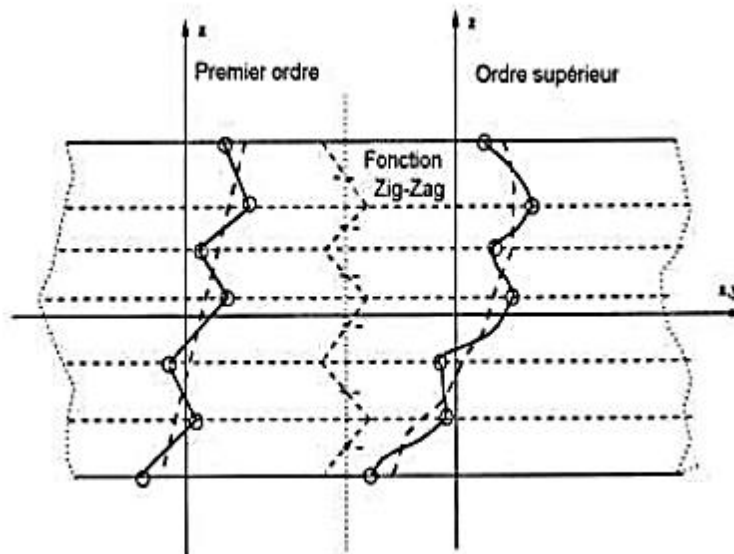
Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

Généralement, l'approche par couche donne des modèles peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (**Figures : II.5 et II.6**).



**Figures II-5 :** Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.

(Nguyen, 2004)

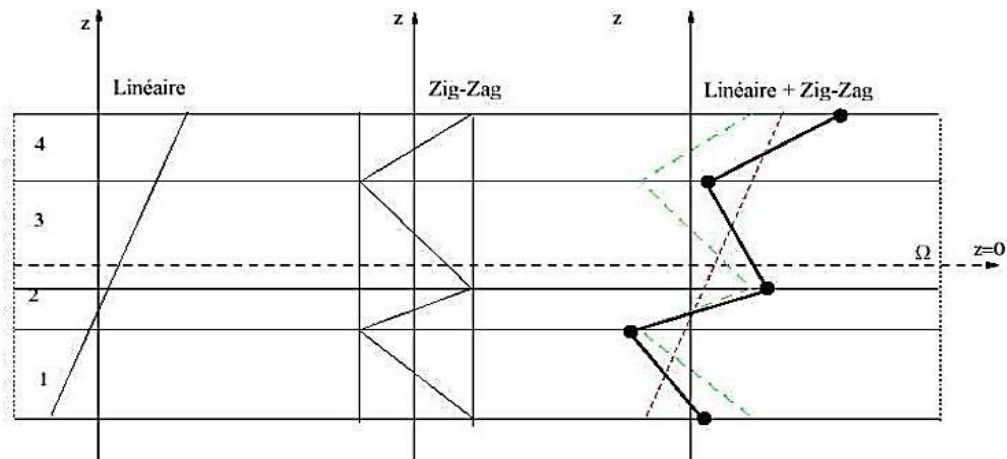


**Figures II-6 :** Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. (Nguyen, 2004)

### II.2.2.1. Les modèles zig-zag:

Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre (Di Sciuva, 1987) pour réduire le nombre de paramètres inconnus, Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'heaviside).

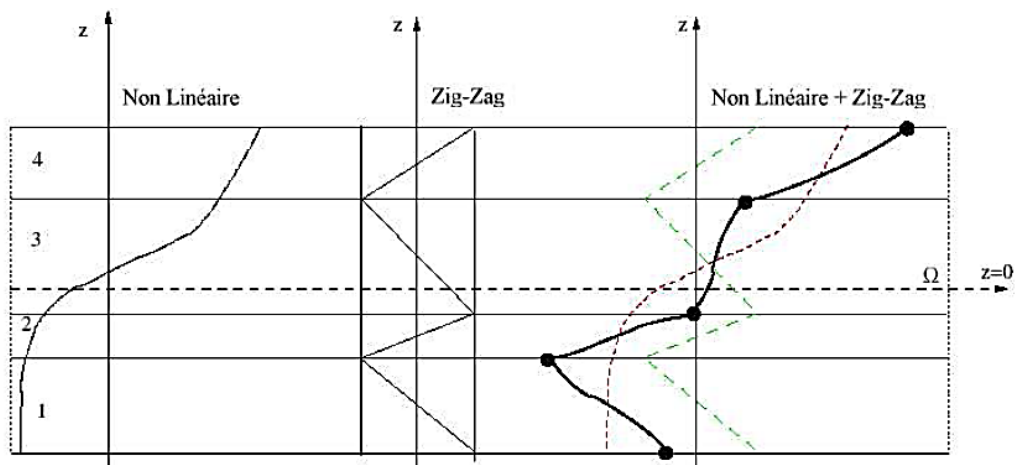
La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface voir (**Figure. II.7**). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



**Figures II-7** Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen, 2004)

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le En se basant sur le concept de, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Nguyen 2004).

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) voir (**Figure.II.8**). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figures II-8** Champ de déplacement des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Nguyen, 2004)

Dans les travaux de (Karama et al, 1998), (Ossadzow et Touratier, 2001), la fonction sinus de (Touratier, 1991) est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, (Afaq, 2003) a combiné le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'éclatement diminue (Icardi et Bertetto, 1995). Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type « C1 » demandée qui complique leur implémentation numérique.

### II.2.2.2. Les modèles couches discrètes :

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale voir (**Figure. II.7**). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de (Srinivas, 1973), (Reddy, 1987), (Tahani et Nosier, 2003), on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de (Ren, 1986), (Kassapoglou et Lagace, 1987), (Yin, 1994) Utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi (Ren, 1986) utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans (Kassapoglou et Lagace, 1987), le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans (Yin, 1994), les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomial dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans (Pagano, 1978). Le modèle local a été construit à partir de la formulation

variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle de Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à  $7n$  champs en  $(x; y)$ , «  $n$  » étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité (Nguyen, 2004).

### **II.2.3. Approche développement asymptotique**

Le développement asymptotique est appliqué à des structures a priori peu épaisses ou le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières. Ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Un deuxième type d'intégrale, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite) est également construit (Fredrichs 1961), (Johnson 1971), (Allix 1989). Le travail le plus complet et intéressant semble celui de (Ladeveze 1988), (Allix 1989). Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (contrainte et déplacements correcteurs). Ce problème est décomposé en problèmes bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte déplacement résolue par exemple, par des développements en série de Fourier.



L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces est pris en compte.

### **II.3. Modèles éléments finis des structures composites**

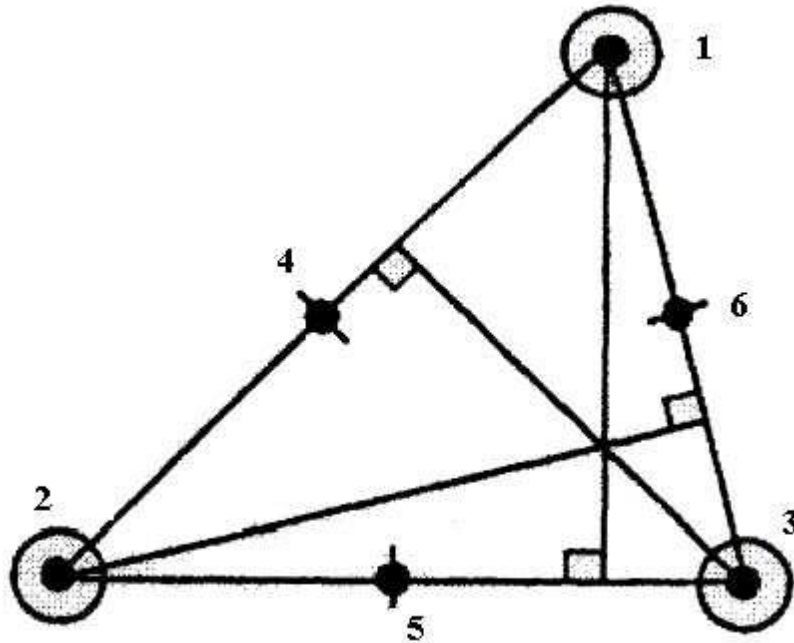
Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'aux méthodes des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacements, contraintes, mixtes, hybrides). Ci-dessous, nous passons en revue différentes contributions éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

#### **II.3.1. Modèles éléments finis 2D**

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles Reissner-Mindlin avec facteurs de correction (Reddy 1980, Ganapathi 1997). Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par noeud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité  $C_0$ , les degrés de liberté et les conditions limites physiquement facile à interpréter, convergence rapide...) et leurs précisions en estimant des champs globaux, les éléments finis Reissner-Mindlin restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeur de ce type d'élément réside dans l'estimation des facteurs de correction. On trouve dans (Nguyen 2004) une procédure en deux phases pour l'estimation correcte de ces facteurs correctifs. Les contraintes de cisaillement transverse calculées par les équations constitutives sont moins précises et discontinues aux interfaces. On intègre donc l'équation d'équilibre 3D pour mieux les estimer (Nguyen 2004).

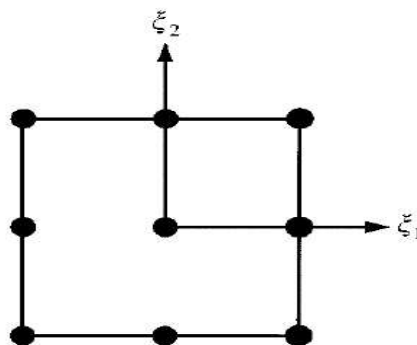
Un large volume consacré au développement des éléments finis multicouches concerne des éléments finis d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les théories d'ordre supérieur impliquent souvent la dérivée seconde des déplacements transversaux. Cela demande une continuité pour des fonctions de déplacement des éléments finis correspondants. Non seulement les déplacements transversaux  $w$  mais encore leurs dérivées normales doivent être continus à travers des frontières inter éléments (Reddy 1999). Dans (Ren 1986), un élément de continuité  $C_1$  basé sur le modèle cubique de (Reddy 1984) est proposé. Cet élément contient 7 degrés de liberté par noeud. Les contraintes de cisaillement transverse sont paraboliques dans l'épaisseur et l'élément est libre du blocage de cisaillement transverse. En se basant sur le

modèle "sinus" de (Touratier 1991), différents éléments finis quadrilatère et triangulaire de continuité  $C1$  sont développés (Nguyen 2004, Polit 2002). L'élément triangulaire développé par Polit et al. est capable d'étudier divers problèmes linéaires et non linéaires. L'élément possède 6 noeuds. La continuité des champs aux interfaces et les conditions limites aux surfaces supérieures et inférieures sont assurés. La géométrie de l'élément est présentée sur la Fig. II.9

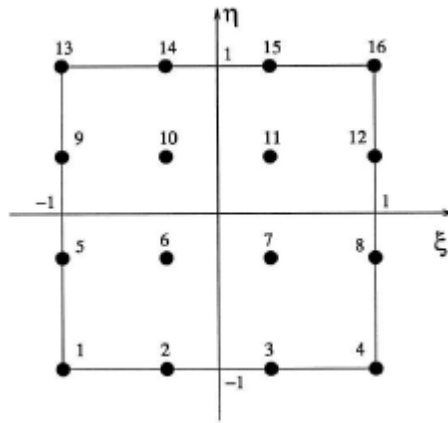


**Figure II-9** : Élément « sinus » triangulaire 6 noeuds de (Polit 2002).

Les travaux de Khare (Khare 2004), ont pour objectif de développer une famille d'éléments d'ordre supérieur. Plusieurs éléments quadrilatères de type Lagrange à 9 et 16 noeuds sont proposés (Figures. II.12 et II.13). Ils diffèrent par l'ordre du développement en série de Taylor adopté pour le champ de déplacement:



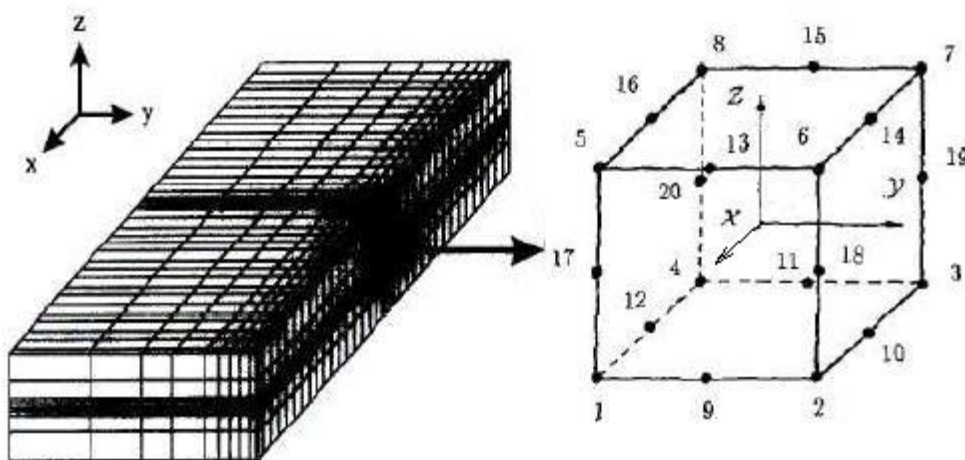
**Figure II-10** Élément quadrilatère de type Lagrange à 9 noeuds (Nguyen 2004).



**Figure II-11** : Élément quadrilatère de type Lagrange a 16 noeuds (Nguyen 2004).

### II.3.2. Modèles éléments finis 3D

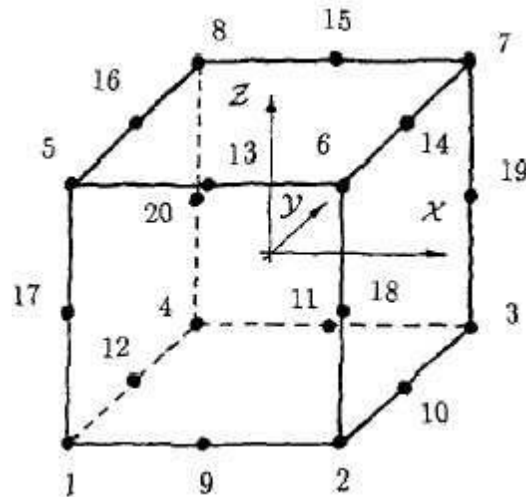
Les analyses 3D conduisent à un large système d'équations. Cela nécessite donc un grand espace de stockage qui réserve la modélisation 3D pour l'étude locale des champs dans les zones critiques. Les éléments briques iso paramétrique 20 noeuds de Raju (Raju 1981) sont couramment utilisés pour étudier les champs près des bords libres. Un maillage typique pour l'analyse des contraintes d'interface est présenté sur la Figure. II.12.



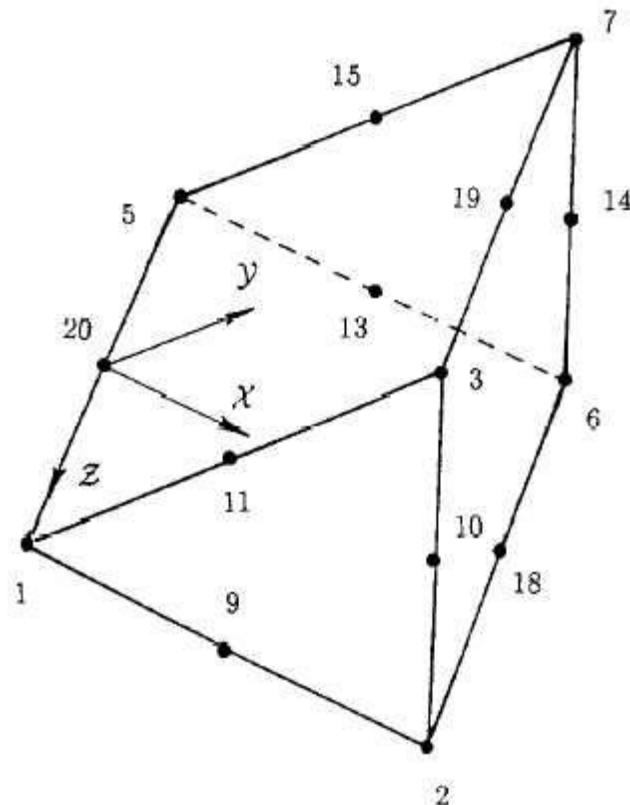
**Figure II-12** : Éléments finis 3D à 20 noeuds pour déterminer les contraintes suivant Z (Nguyen ,2004)

Icardi et al. (Icardi 1995) étudient la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément brique 20 noeuds (Figure. II.13) et un élément singulier 15 noeuds (Figure. II.14) généré à partir d'un élément de brique 20 noeuds. Une procédure de calcul à deux phases "prédicteur-correcteur" est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces. Le maillage utilisé est présenté sur la Figure. II.15.

Cho et al. (Cho 2000) développe un élément fini brique zig-zag à 8 noeuds. Suivant l'épaisseur, chaque couche est modélisée par un élément qui adopte une cinématique de type zig-zag du premier ordre. Dans (Desai 2003) un élément mixte à 18 noeuds est proposé (Figure. II.16). Les variables nodales sont les 3 déplacements et les trois contraintes hors plan. Chaque élément est à l'épaisseur d'une couche et les contraintes déterminées aux noeuds sont les contraintes inter laminaires.



**Figure II-13** : Element brique a 20 noeuds.



**Figure II-14** : Elément singulier \_a 15 noeuds (Icardi 95).

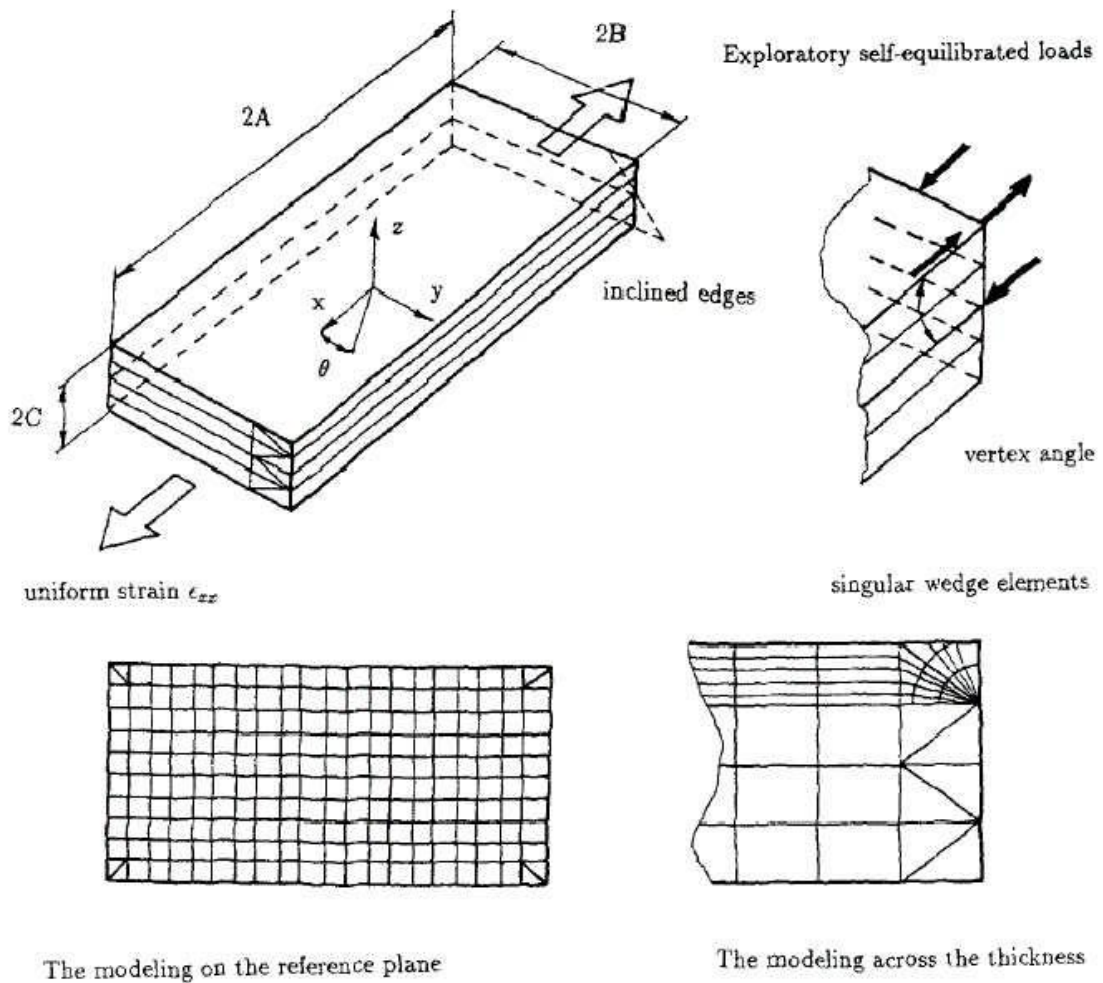


Figure II-15 : Etudes du problème de bord libre par EF 3D (Icardi 95).

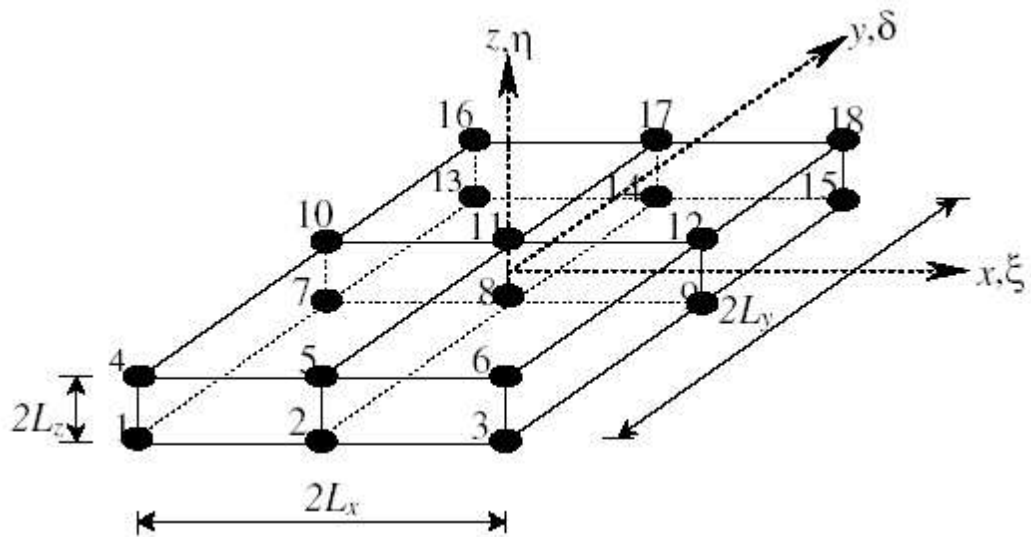


Figure II-16 : Élément brique mixte à 18 nœuds (Ramtekkar 02).

**II.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

## *Chapitre III*

# ***GENERALITE SUR LES NANOTECHNOLOGIE***

### **III.1. Introduction**

Les nanotechnologies constituent un champ de recherche et de développement multidisciplinaire qui reposent sur la connaissance et la maîtrise de l'infiniment petit. Elles regroupent, plus précisément, l'ensemble des techniques qui permettent de fabriquer, de manipuler et de caractériser la matière à l'échelle nanométrique.

Les nanotechnologies sont la formalisation des concepts et des procédés issus des nanosciences c'est à dire des sciences qui visent à étudier et à comprendre les propriétés de la matière à l'échelle de l'atome et de la molécule.

### **III.2. Définition des nanomatériaux :**

On retient la définition suivante: un nanomatériau est un matériau dont au moins une dimension externe est à l'échelle nanométrique, ou qui possède une structure interne ou une structure de surface à l'échelle nanométrique selon le Comité technique 229 « Nanotechnologies » de l'ISO TS 80004-1

Un nanomatériau est composé ou constitué de nano-objets (dont la taille est comprise entre 1 et 100 nm) qui présentent des propriétés spécifiques de l'échelle nanométrique.

Les nano-objets, qui sont des « matériaux dont une, deux ou trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique » Selon la norme ISO TS 80004-2. Parmi les nano-objets, trois catégories sont discernées:

- Les nanoparticules, qui désignent des « nano-objets dont les trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique »
- Les nano-fibres, nanotubes, nano-filaments, nano-tiges ou nano-bâtonnets, qui se rapportent à des « nano-objets dont deux dimensions externes similaires sont à l'échelle nanométrique et dont la troisième dimension est significativement supérieure ».
- Les nano-feuillets, nano-plats ou nano-plaquettes, qui définissent des « nano-objets dont une dimension externe se situe à l'échelle nanométrique et dont les deux autres dimensions sont significativement plus grandes »

### **III.3. Définition du périmètre nanométrique:**

L'échelle nanométrique est une « gamme de dimensions comprise approximativement entre 1 nanomètre et 100 nanomètres » Selon la norme ISO TS 80004-1



Un nanomètre est une unité de mesure qui équivaut à un milliardième de mètre ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 0,000\,000\,001 \text{ m}$ ). Un nanomètre correspond environ à la taille de 4 atomes de silicium mis côte à côte, à 1/100 de la largeur d'une molécule d'ADN, à 1/50 000 de l'épaisseur d'un cheveu humain ou encore à 1/500 000 de l'épaisseur du trait d'un stylo à bille.

#### **III.4. Les familles de produits par nano-objets:**

Les nano-objets peuvent se présenter sous la forme de particules, fibres ou tubes (on parle de charges ou renforts), de couches minces ou de constituants structurels.

Ils sont utilisés soit en tant que tels soient en vue d'élaborer des matériaux.

Ces matériaux peuvent être regroupés selon 3 familles de produits :

- Les matériaux nano-chargés ou nano-renforcés.
- Les matériaux nanostructures en surface.
- Les matériaux nanostructures en volume.

##### **III.4.1. Les nano-charges et les matériaux nano-renforcés ou nano chargés:**

Les nano-objets sont incorporés ou produits dans une matrice pour apporter une nouvelle fonctionnalité ou modifier des propriétés mécaniques, optiques, magnétiques ou thermiques (dans des produits cosmétiques, dans des vernis, peintures, béton, encre d'imprimerie, etc.). Les composites chargés en nano-tubes de carbone en sont un bon exemple.

Ces nano-objets sont déjà utilisés dans de nombreuses applications industrielles. Par exemple :

- Les fumées de silice dans le béton, pour améliorer sa fluidité et ses propriétés mécaniques,
- Le noir de carbone utilisé dans les encres d'imprimante et les pneumatiques,
- Les pigments colorés organiques et minéraux pour les peintures et vernis,
- Les nano-particules de dioxyde de titane comme protection au rayonnement ultraviolet dans les crèmes solaires.

##### **III.4.2. Les matériaux nanostructures en surface;**

Les nano-objets constituent les éléments de revêtements de surface, Ils sont recouverts à partir une ou plusieurs couches de nanoparticules ce qui permet de former un revêtement bien défini, qui permet de doter la surface de propriétés comme:

- D'aspect,
- De dureté,
- D'adhérence (tribologie),
- De résistance à la corrosion,
- De propriétés optiques et/ou électroniques.

#### **III.4.3. Les matériaux nanostructures en volume:**

Les nano-objets peuvent également être les éléments de matériaux massifs qui, par leur structure intrinsèque nanométrique (porosité, microstructure, réseau nanocristallin) bénéficient de propriétés physiques particulières.

Le raffinement de la microstructure, jusqu'à obtenir une nanostructure, peut être obtenu par forte déformation du matériau. Les deux principaux verrous technologiques qui peuvent limiter aujourd'hui leur développement et leur usage sont la stabilité de la nanostructure à haute température et les procédés de fabrication.

#### **III.5. Les procédés de fabrication des nanomatériaux**

Depuis un demi-siècle environ, sont apparues des techniques nouvelles de refroidissement rapide, de chimie dite douce, techniques sol-gel par exemple, qui permettent d'accéder à des tailles de grain beaucoup plus faibles.

D'autres méthodes de production sous arc électrique, laser, plasma ou micro-ondes ont permis d'accéder à des matériaux particuliers de très petite taille.

Il a été ainsi possible d'obtenir des tailles de grain de dimensions de l'ordre des tailles caractéristiques des défauts qui gouvernent certaines propriétés comme :

- Les dislocations (propriétés mécaniques),
- Les parois de Bloch (propriétés ferromagnétiques),
- Les phénomènes qui n'interviennent qu'à l'échelle du nanomètre ou en dessous (effet tunnel, effets de « confinement » lorsque la taille des particules est inférieure la longueur d'onde des particules – électrons, photons – qui interviennent dans le phénomène étudié). Ces dimensions, selon les cas, varient entre quelques nanomètres et 100 nanomètres.

En parallèle de cette démarche de miniaturisation, dite "top-down", se développe une autre démarche, dite "bottom-up", qui consiste à construire de façon contrôlée à partir d'atomes

et de molécules de nouveaux édifices et structures. Les procédés d'élaboration de ces matériaux constituent un champ d'investigation nouveau qui reste à développer. Les procédés actuels permettant l'élaboration de nano-objets sont classés en 3 grandes catégories :

- Élaboration par voie physique,
- Élaboration par voie chimique,
- Élaboration par méthode mécanique.

Compte tenu de la complexité des applications et de l'évolution rapide des techniques, il paraît difficile de donner une liste exhaustive des procédés utilisés ou en développement. Quelques exemples parmi les procédés les plus couramment utilisés pour la fabrication de nano-objets sont présentés ci-après.

### **III.5.1. La voie physique:**

**a-L** 'élaboration de nanoparticules (amas) :peut être réalisée par:

- Une phase vapeur extraite d'un matériau source par chauffage (fusion en creuset ou sans creuset, pyrolyse laser) ou par bombardement.
- La vapeur du solide que l'on souhaite former est refroidie par collisions avec un gaz neutre et devient donc fortement sursaturante.
- Le matériau est collecté le plus rapidement possible sur une paroi froide.

On peut utiliser l'action de micro-ondes sur des poudres de taille millimétrique. Cette technique a comme avantages d'être non polluante et adaptée à une production en continu de poudres de toute nature.

**b-L** 'ablation laser, la décharge plasma ou la décomposition catalytique sont des techniques plus spécifiquement utilisées dans la fabrication de nanotubes de carbone.

**c-** On peut réalisées par PVD (Physical Vapor, Deposition), des couches minces d'épaisseur nanométrique.

### **III.5.2. La voie chimique:**

Les techniques de fabrication par voie chimique les plus couramment utilisées sont :

**a- les réactions en phase vapeur :**

- Réaction des matériaux précurseurs vaporisés dans un réacteur CVD (Chemical Vapor Deposition).
- -les molécules de précurseurs sont adsorbées à la surface d'un substrat maintenu à une température adaptée.
- -Les molécules adsorbées sont soit décomposées thermiquement.  
ou réagissent avec d'autres gaz ou vapeurs pour former un film solide sur le substrat .

**b- les réactions en milieu liquide:**

La synthèse en milieu liquide est le plus souvent effectuée à partir d'une solution aqueuse ou organique contenant les réactants. La précipitation des nanoparticules est obtenue par une modification des conditions de l'équilibre physico-chimique. Sont distinguées :

- La co-précipitation chimique, technique facile à mettre en œuvre et la plus utilisée.
- L'hydrolyse permettant de produire des particules fines, sphériques avec une pureté chimique améliorée, une meilleure homogénéité chimique et un contrôle de la taille des particules.

**c- les techniques sol-gel:**

Les techniques sol-gel sont basées sur des réactions de polymérisation inorganiques. Elles permettent de produire des nanomatériaux à partir de solutions d'alkoxydes ou de solutions colloïdales.

Le procédé de sol-gel est divisé en 3 branches :

- Procédé de sol-gel à base de silice,
- Procédé d'alkoxyde de métal,
- Procédé de type Pechini.

Applications : céramiques inorganiques et matériaux en verre, matériaux amorphes et nanostructurés, oxydes multicomposés.

**III.5.3. Les méthodes mécaniques**

Les techniques mécaniques d'élaboration des nanomatériaux sont :

**a-la mécano-synthèse:**

La technique de broyage des poudres micrométriques (1 à 30  $\mu\text{m}$ ) de plusieurs alliages pour les incorporer. qui permet en particulier l'obtention de nano-précipités ou nano-objets dispersés de façon homogène au sein de la matrice.

**b-Consolidation et densification:**

le processus qui permet de convertir un matériau pulvérulent en une pièce massive comporte deux étapes : une opération de compactage mécanique et une opération de frittage.

- Compactage à froid : Opération qui peut s'effectuer soit par pressage à sec, soit, dans les cas difficiles, par addition d'un lubrifiant ou par pressage humide. Le compactage humide est bien adapté aux céramiques et surtout aux oxydes.
- Frittage : opération qui permet, par diffusion atomique à chaud, d'établir des ponts de matière entre les grains et ensuite de réduire la porosité.

Par Compression Isostatique à Chaud (CIC): on réalise ainsi les deux opérations ci-dessus en une seule étape.

- Les techniques de forte déformation (torsion, extrusion...) développées pour l'obtention de nanocristaux et nano-structures.

**III.6. Les moyens de voir les nanomatériaux :**

Pas évident d'observer un nanotube, près de 100 000 fois plus fin qu'un cheveu. Les microscopes optiques traditionnels, qui permettent de voir des poussières ou les bactéries, n'y suffisent pas. En effet, la longueur d'onde de la lumière, de 400 à 800 nanomètres, est trop grande pour observer un objet de moins de dix nanomètres de largeur. Heureusement, de nouvelles techniques d'imagerie ont fait leur apparition depuis une vingtaine d'années. Il s'agit notamment du microscope électronique à balayage, dans lequel un faisceau d'électrons interagit avec les atomes des molécules que l'on observe, ce qui permet de récupérer des informations sur ces molécules. Cette technique ne permet pas de distinguer les atomes un à un, mais elle est très efficace pour reconnaître les nanotubes. On voit en effet distinctement les rebords de ces filaments, ou leur section. On peut même compter le nombre de feuillets de

Chaque nanotube. Il faut en revanche un microscope bien plus élaboré pour repérer l'hélicité des nanotubes : un seul appareil en France dispose de la résolution suffisante. Une autre technique, appelée microscope à effet tunnel, offre des images de la surface des nanotubes, et permet de distinguer les atomes du feuillet extérieur du nanotube. La microscopie

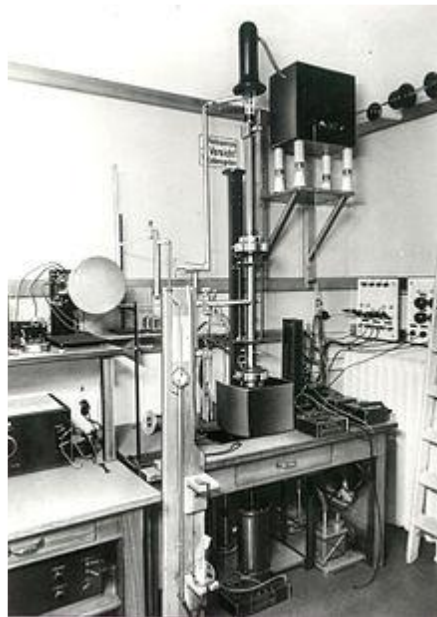
électronique a permis d'identifier les nanotubes et continue à jouer un rôle important pour mieux les étudier.

### III.6.1. La microscopie électronique à balayage :

La microscopie électronique à balayage (MEB ou SEM Scanning Electron Microscopy en anglais) est une technique de microscopie électronique capable de produire des images en haute résolution de la surface d'un échantillon en utilisant le principe des interactions électrons-matière.

S'appuyant sur les travaux de Max Knoll et Manfred Von Ardenne dans les années 1930, la MEB consiste en un faisceau d'électrons balayant la surface de l'échantillon à analyser qui, en réponse, réémet certaines particules. Ces particules sont analysées par différents détecteurs qui permettent de reconstruire une image en trois dimensions de la surface.

Les travaux menés dans les années 1960 dans le laboratoire de Charles Oatley à l'université de Cambridge ont grandement contribué au développement de la MEB, et ont conduit en 1965 à la commercialisation par Cambridge Instrument Co. des premiers microscopes à balayage. Aujourd'hui, la microscopie électronique à balayage est utilisée dans des domaines allant de la biologie à la science des matériaux, et un grand nombre de constructeurs proposent des appareils de série équipés de détecteurs d'électrons secondaires et dont la résolution se situe entre 0,4 nanomètre et 20 nanomètres.



**Figure III-1** : Premier microscope électronique à balayage par Manfred Von Ardenne



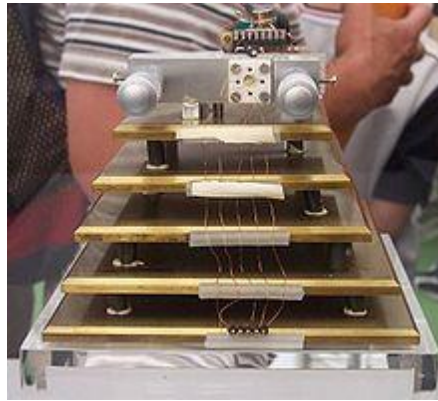
**Figure III-2 :** Microscope électronique à balayage JEOL JSM-6340F

### **III.6.2. La Sonde ionique focalisée :**

La Sonde ionique focalisée, plus connue sous le nom du sigle anglais FIB (Focused ion beam), est un instrument scientifique qui ressemble au microscope électronique à balayage (MEB). Mais là où le MEB utilise un faisceau d'électrons focalisés pour faire l'image d'un échantillon, la "FIB" utilise un faisceau d'ions focalisés, généralement du gallium. Il est en effet facile de construire une source à métal liquide (LMIS, de l'anglais liquid metal ion source). Contrairement aux MEB, les FIB sont destructives. Par conséquent, leur domaine d'applications est plus la microfabrication que la microscopie. Les principaux domaines d'applications sont la science des matériaux et en particulier le domaine des semiconducteurs et des circuits intégrés.

### **III.6.3. Le microscope à effet tunnel :**

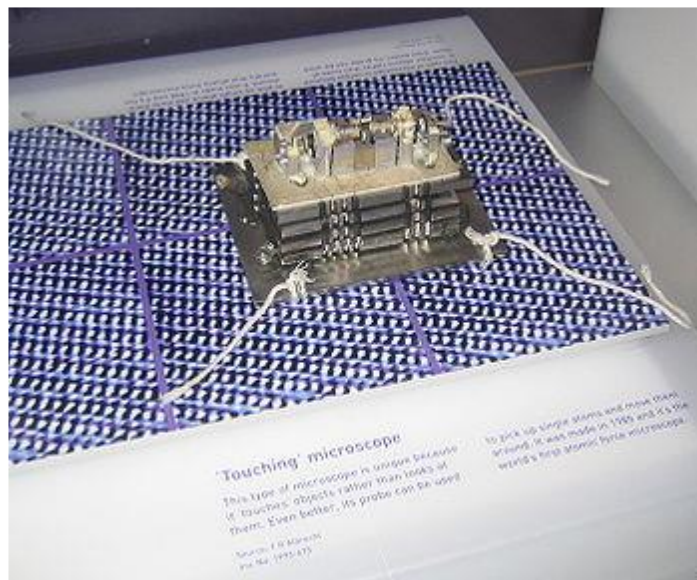
Le microscope à effet tunnel (en anglais, scanning tunneling microscope, STM) fut inventé en 1981 par des chercheurs d'IBM, Gerd Binnig et Heinrich Rohrer, qui reçurent le prix Nobel de physique pour cette invention en 1986. C'est un microscope en champ proche qui utilise un phénomène quantique, l'effet tunnel, pour déterminer la morphologie et la densité d'états électroniques de surfaces conductrices ou semi-conductrices avec une résolution spatiale pouvant être égale ou inférieure à la taille des atomes.



**Figure III-3** : Photographie d'un microscope à effet tunnel

#### III.6.4. Le microscope à force atomique :

Le microscope à force atomique (AFM pour atomic force microscope) est un type de microscope à sonde locale permettant de visualiser la topographie de la surface d'un échantillon. Inventé en 1985, par G. Binnig, F. Quate et C. Gerber, ce type de microscopie est essentiellement basé sur l'analyse d'un objet point par point au moyen d'un balayage via une sonde locale, assimilable à une pointe effilée. Ce mode d'observation permet alors, de réaliser la cartographie locale des grandeurs physiques caractéristiques de l'objet sondé (force, capacité, intensité de rayonnement, courant...), mais également de travailler dans des environnements particuliers tels que les milieux sous vide, liquides ou ambiants.



**Figure III-4** : Le premier microscope à force atomique du monde, au musée de la Science de Londres.



### **III.7. Utilisation des Nanomatériaux**

Voici quelque uns des domaines d'utilisation actuelle des nanomatériaux: Dans l'automobile et l'aéronautique, l'électronique et la communication, la chimie et les matériaux, la pharmacie, le secteur biomédical et la biotechnologie, les cosmétiques, la santé, l'énergie, l'environnement, l'écologie ou encore le domaine militaire.

#### **III.7.1. Les Nanotechnologies Dans Le Domaine De Génie Civil.**

La nanotechnologie est l'utilisation de très petites particules de matière, soit par elles-mêmes ou par leur manipulation pour créer de nouveaux matériaux à grande échelle. La nanotechnologie n'est pas une nouvelle science et ce n'est pas une nouvelle technologie, c'est plutôt une extension des sciences et des technologies qui ont déjà été en développement pendant de nombreuses années.

La nanotechnologie est la réingénierie des matériaux par le contrôle de la matière à l'échelle atomique. La clé dans la nanotechnologie est la taille des particules, car les propriétés des matériaux sont considérablement affectées sous une échelle nanométrique [10-9 mètre].

En outre, comme les particules deviennent de taille nanométrique, la proportion d'atomes à la surface augmente par rapport à ceux de l'intérieur, ce qui conduit à des nouvelles propriétés. Le béton est plus fort, plus durable et plus facile à la mise en œuvre, l'acier plus dur et le verre devient auto nettoyant. La résistance et la durabilité accrue sont également une partie de l'envie de réduire l'empreinte écologique de l'environnement construit par l'utilisation efficace des ressources.

Ceci est réalisé à la fois avant le processus de construction avec une réduction de la pollution lors de la production de matériaux (ciment, par exemple) et aussi en service, grâce à une utilisation efficace de l'énergie à cause des progrès en matière d'isolation. Deux particules de taille nanométrique qui se démarquent dans leur application aux matériaux de construction sont le dioxyde de titane ( $\text{TiO}_2$ ) et des nanotubes de carbone (CNT).

Le premier est utilisé pour sa capacité à décomposer la saleté et la pollution sur tous les matériaux, du béton ou verre, qui seront ensuite lavé par l'eau de pluie. Le second est utilisé pour renforcer et surveiller le béton.

En raison de nombreuses caractéristiques uniques des produits issus de la nanotechnologie, des produits récemment mis au point à base de la nanotechnologie peuvent réduire considérablement les problèmes actuels de génie civil. Fondamentalement, la construction serait traitée avec des matériaux et des procédés de haute technologie qui sont

utilisés dans cette dernière. Par conséquent, il y a d'énormes possibilités pour appliquer la nanotechnologie dans les matériaux de construction, ce qui peut présenter, probablement, des plus importants impacts sociétaux.

### **III.7.2. Application De La Nanotechnologie En Matériaux De Construction:**

De nombreuses disciplines du génie civil, y compris les processus de conception et de construction peuvent bénéficier de la nanotechnologie. Par exemple, les nouveaux matériaux de construction aux propriétés uniques, les matériaux composites légers et plus résistants, isolant d'incendie, absorbeur de son, revêtement à faible entretien, hydrofuges, des polymères nano-argile remplis, les surfaces auto désinfectant, protecteur de la lumière de l'ONU, purificateurs d'air, des capteurs de nano taille, plaquettes conductrices ultra minces, cellules solaires, etc. pour n'en nommer que quelques-uns. On va présenter, en bref, les domaines d'application des nanotechnologies dans le génie civil et la science et la technologie résultant en performance améliorée. En outre, les défis actuels que les scientifiques et les technologues rencontrent dans l'exploitation du potentiel de la nanotechnologie sont également mis en évidence.

### **III.7.3. Nanotechnologie et Le Béton:**

Le béton est un macro matériau fortement influencé par ses nano propriétés et la compréhension de ce matériau à ce nouveau niveau donne des nouvelles pistes d'amélioration de la résistance, la durabilité et le suivi. Une grande partie de l'analyse du béton se fait à l'échelle nanométrique pour comprendre sa structure en utilisant les différentes techniques développées telles que la microscopie à force atomique (AFM), microscopie électronique à balayage (MEB) et faisceau d'ions focalisé (FIB).

La silice ( $\text{SiO}_2$ ) est présente en béton traditionnel dans le cadre de la répartition normale.

Cependant, l'un des progrès réalisés par l'étude du béton à l'échelle nanométrique, c'est que la particule d'emballage en béton peut être améliorée en utilisant la nano-silice qui conduit à une densification de la micro et nanostructures produisant des propriétés mécaniques améliorées. L'ajout de la nano-silice aux matériaux à base de ciment peut également contrôler la dégradation de la réaction fondamentale de la CSH (calcium silicate hydrate) du béton causée par le lessivage de calcium dans l'eau ainsi que la pénétration de l'eau et donc conduire à des améliorations dans la durabilité. L'amélioration de tassement des particules, broyage à haute énergie de ciment Portland ordinaire (OPC) de clinker et de sable normalisé, produit une plus grande diminution de taille de particule par rapport aux OPC classiques et, par conséquent, la

résistance à la compression de la matière raffinée est également de 4 à 6 fois plus élevée (aux différents âges). Un autre type de nanoparticules ajoutées au béton afin d'améliorer ses propriétés est le dioxyde de titane ( $\text{TiO}_2$ ).  $\text{TiO}_2$  est un pigment blanc et peut être utilisé comme un excellent revêtement réfléchissant. Il est incorporé, sous forme de nano particule et il est ajouté à des peintures, des ciments et les fenêtres grâce à ses propriétés de stérilisation puisque le  $\text{TiO}_2$  décompose les polluants organiques, composés organiques volatils et les membranes bactériennes par des réactions catalytiques puissantes.

Il peut donc réduire les polluants atmosphériques lorsqu'il est appliqué sur les surfaces extérieures. En outre, il est hydrophile et donne donc des propriétés autonettoyantes aux surfaces sur lesquelles il est appliqué. Le processus par lequel cela se produit est que l'eau de pluie est attirée par la surface et forme des feuilles qui captent les polluants et les particules de saleté précédemment décomposés et les laves. Le béton obtenu, déjà utilisé dans des projets à travers le monde, a une couleur blanche qui conserve sa blancheur très efficace contrairement aux bâtiments entaché construit de matériaux traditionnel. Un autre type de nanoparticules, qui possède des propriétés remarquables, est le nanotube en carbone (CNT), des recherches sont actuellement effectuées pour étudier les avantages de l'ajouter au béton. Les nanotubes en carbone sont sous forme de cylindre qui ont été découvert en Russie, mais ils sont entré en usage à la fin des années quatre-vingt-dix au Japon.

Ils sont de forme cylindrique, et leur nom provient de leur diamètre nanométrique. Ils peuvent être de plusieurs millimètres de longueur et peuvent avoir une «couche» ou paroi (nanotube monoparoi) ou plus d'une paroi (nanotubes multiparois). Ils ont 5 fois le module d'Young et 8 fois (théoriquement 100 fois) la résistance de l'acier tout en étant 1/6e en densité. L'addition de faibles quantités (1% en poids) de CNT peut améliorer les propriétés mécaniques des échantillons constitués de la phase principale du ciment Portland et de l'eau. Nanotubes à parois multiples oxydé (MWNT) affichent les meilleures améliorations que ce soit pour la résistance à la compression (+ 25 N/mm<sup>2</sup>) ou la résistance à la flexion (+ 8 N / mm<sup>2</sup>) par rapport aux échantillons ordinaires. Théoriquement la forte concentration des défauts sur la surface des MWNT oxydés pourrait conduire à des meilleurs liens entre les nanostructures et le liant améliorant ainsi les propriétés mécaniques du matériau composite de façon plutôt semblable aux déformations sur les barres d'armature.

En effet, même quelques règles de structure en béton sont en réalité empiriquement issues de comportements observés en nanotechnologie. L'étude des composantes fondamentales du béton peut ouvrir la voie à une réelle compréhension de la construction en béton et la durée de vie basée sur un matériau conçu avec des propriétés prédéterminée. Ceci est fortement lié à

l'étude de la durée de vie grâce à la modélisation multi-échelle (couvrant de multiples échelles dimensionnelles du nm au m).

A titre d'exemple de ce genre d'ajouts qui ont été faits au béton, la recherche a montré que le microorganisme anaérobie (qui ne nécessite pas d'oxygène) intégré à l'eau de mélange du béton résulte en une augmentation de 25% de la résistance à 28 jours. Le micro-organisme *Shewanella* a été utilisé à une concentration de 105 cellules / ml. Des observations nanométriques révèlent qu'il y avait un dépôt d'une matrice ciment sable sur sa surface. Ceci a conduit à la croissance de la matière de remplissage à l'intérieur des pores de la matrice de ciment sable et conduit à une résistance accrue. Béton auto-compactant (SCC) est celui qui n'a pas besoin de vibration afin de niveler et réaliser la consolidation. Cela représente une avancée significative dans la réduction de l'énergie nécessaire pour construire des structures en béton.

Il est donc un enjeu de développement durable. En outre SCC peut offrir des avantages allant jusqu'à 50% du coût de la main-d'oeuvre, du fait qu'il est versé jusqu'à 80% plus rapidement et ayant une usure réduite sur les coffrages. Le matériau se comporte comme un fluide épais et il est rendu possible par l'utilisation de polycarboxylates (un matériau similaire au plastique développé en utilisant la nanotechnologie). SCC mélanges qui contiennent une teneur élevée en particules fines, ont besoin d'un système de dispersion très efficace afin d'être fluide et maniable à faible rapport eau /ciment (rapport élevés W / C conduirait à un risque de ségrégation) et seulement poly carboxylates peuvent satisfaire à ces exigences.

En outre, alors que les résistances à long terme du béton super plastifié classique sont très élevées, les premières forces de résistance, surtout en hiver, ne sont pas suffisamment élevées pour permettre d'enlever rapidement et en toute sécurité le coffrage et de la vapeur de durcissement est donc utilisée pour accélérer l'hydratation du ciment. Cela peut être éliminé dans l'industrie du préfabriqué grâce à l'utilisation des dernières générations de poly carboxylates permettant des économies en temps et en énergie.

Enfin, l'emballage du béton par les fibres est assez fréquent aujourd'hui pour augmenter la résistance des éléments structuraux en béton pré-existants.

Les progrès réalisés en cette procédure impliquent l'utilisation d'une feuille de fibres (matrice) contenant des particules de nano-silice et de durcisseurs. Ces nanoparticules pénètrent et ferment les petites fissures sur la surface de béton, et, pour le renforcement de la résistance, les matrices forment une forte liaison entre la surface du béton et de l'armature de fibre. Dans le procédé de renforcement des câbles de carbone préoccupé (fibres) et des feuilles imprégnées avec la matrice est placée sur la surface de béton préparé et collées en utilisant des rouleaux à

gorges. La capacité des échantillons à soutenir la charge après fissuration est grandement améliorée par les cordes de carbone et à la fois la matrice et l'interface sont durables sous les conditions de mouillage, de séchage et de mise à l'échelle (grattage).

En outre, il n'y a pas de diminution de la capacité de charge maximale après des cycles répétés de mouillage et de séchage ou de mise à l'échelle.

#### **III.7.4. Nanotechnologie et de l'acier:**

L'acier a été largement disponible depuis la deuxième révolution industrielle à la fin du 19e siècle et début du 20e siècle et il a joué un rôle majeur dans l'industrie de construction depuis ce temps. La fatigue est un problème important qui peut conduire à la défaillance structurale de l'acier soumis à des charges cycliques, tels que des ponts ou des tours. Ceci peut arriver à des forces bien en dessous de la force de défaillance du matériau et cause un raccourcissement significatif du temps de service utile de la structure.

La philosophie de conception actuel implique une ou plusieurs des trois mesures limitant suivantes: une conception basée sur une réduction spectaculaire de la contrainte admissible, une durée de vie admissible raccourcie ou la nécessité d'un régime d'inspections régulières.

Les conditions de surface accroissent les contraintes qui sont responsables de l'initiation des fissures qui sont la cause essentielle de ruptures par fatigue et la recherche a montré que l'ajout de nanoparticules de cuivre réduit les inégalités de surface de l'acier qui limite alors le nombre des zones d'accroissement de contrainte et donc la fissuration par fatigue. Les progrès réalisés dans cette technologie devraient conduire à une sécurité accrue, moins besoin de suivi et de matériaux plus efficaces utilisés dans la construction sujettes aux problèmes de fatigue.

Les soudures et la zone affectée thermiquement (ZAT) adjacente aux soudures peuvent être fragiles et échouent sans avertissement lorsqu'elles sont soumises à des brusques chargements dynamique, et la ténacité de la soudure est une question importante en particulier dans les zones à forte activité sismique.

Les échecs des soudures et ZAT ont conduit à la réévaluation des joints structurels soudés à la suite du tremblement de terre du Northridge en 1994 dans la région de Los Angeles et les philosophies de conception actuelles incluent l'affaiblissement sélectif des structures pour produire une déformation contrôlée distante des joints soudés cassants ou le surdimensionnement exprès des structures pour maintenir toutes les faibles contraintes.

Ce pendant la recherche actuellement en cours, a montré que l'ajout de nano particules de magnésium et de calcium rend les grains des ZAT plus fins (environ 1/5 la taille du matériel

conventionnel) dans les tôles d'acier, ce qui conduit à une augmentation de la ténacité de la soudure. Ceci constitue une issue de durabilité et de sécurité, puisqu'une augmentation de la ténacité au niveau des joints soudés se traduirait par un besoin en ressources plus petit parce que moins de matériel est nécessaire pour maintenir les contraintes dans les limites permises.

Deux produits relativement nouveaux qui sont disponibles aujourd'hui sont l'acier SandvikNanoflex et l'acier MMFX2. Ils sont résistants à la corrosion, mais ils ont des propriétés mécaniques différentes et ils sont le résultat de différentes applications de la nanotechnologie.

Traditionnellement, le compromis entre la résistance de l'acier et la ductilité est une question importante pour l'acier, les forces dans la construction moderne exigent une grande résistance, alors que la sécurité (en particulier dans les zones sismiques) et la redistribution des contraintes nécessite une grande ductilité. Cela a conduit à l'utilisation de matériel ductile à faible résistance dans les grandes tailles que ce ne serait pas possible avec un matériau fragile à haute résistance et par conséquent, il s'agit d'une question de durabilité et d'utilisation efficace des ressources. SandvikNanoflex possède à la fois les qualités souhaitables d'un module d'Young élevé et de haute résistance et il est également résistant à la corrosion due à la présence de très dures particules de taille nanométrique dans la matrice de l'acier.

Effectivement il associe une haute résistance avec une formabilité exceptionnelle et actuellement il est utilisé dans la production de pièces aussi diverses que les instruments médicaux et les composants de vélo, cependant, ses applications sont de plus en plus diverses.

L'utilisation de l'armature d'acier inoxydable dans les structures en béton a été normalement limitée à des environnements à hauts risques à cause de son coût prohibitif. Cependant, l'acier MMFX2, tout en ayant les propriétés mécaniques de l'acier classique, présente une nano-structure modifiée qui le rend résistant à la corrosion et il est une alternative à l'acier inoxydable classique, mais à un moindre coût.

### **III.7.5. Nanotechnologie et Bois:**

Les nanotubes en carbone sont une nouvelle découverte, alors que le bois est un matériau ancien qui a été utilisé depuis l'aube de la civilisation. Cependant, peut-être pas surprenant étant donné le processus évolutif de la nature, le bois est aussi composée de nanotubes ou «nano fibrilles», à savoir les lignocellulosiques (tissus ligneux) éléments qui sont deux fois plus forts que nano fibrilles mèneraient à un nouveau paradigme dans la construction durable puisque à la fois la production et l'utilisation serait partie d'un cycle renouvelable.

Certains développeurs ont spéculé que la fonctionnalité de la construction sur des surfaces lignocellulosiques à l'échelle nanométrique pourrait ouvrir de nouvelles opportunités pour des aspects telles que des surfaces auto-stérilisants, auto-réparation interne et les appareils électroniques lignocellulosiques. En raison de ses origines naturelles, le bois mène la recherche interdisciplinaire et les techniques de modélisation. Tout d'abord, BASF a développé un revêtement hydrofuge fortement basée sur les actions de la feuille de lotus à la suite de l'incorporation de la silice et des nanoparticules d'alumine et de polymères hydrophobes. Et, d'autre part, des études mécaniques des os ont été adaptées pour le modèle en bois, par exemple dans le processus de séchage.

### **III.7.6. Nanotechnologie En Matériaux De Construction D'étanchéité:**

L'imperméabilisation des matériaux de construction a été un problème depuis les 1000 dernières années. Le problème n'a pas été étudié complètement en raison d'un manque de compréhension au niveau nanométrique des matériaux de construction.

Le nouveau développement de la science et de la technologie a permis à l'aide de la nano technologie moderne de produire des éco-produits organo-silicium pour imperméabiliser pratiquement tous les différents types de matériaux de construction. La nanotechnologie garantit que la durée de vie de cette approche mènera à des cycles de vie au-delà de 20 à 30 ans à un coût très économique. Les matériaux de construction sont connus pour avoir des infiltrations d'eau, l'eau s'écoulant en cas de porosité inhérente et micro fissures. Imperméabilisation est un traitement qui devrait rendre le matériau imperméable à l'eau. Beaucoup de technologie et de développement de produits ont eu lieu dans divers produits d'étanchéité pendant les 50 dernières années, en particulier en utilisant les produits à base de polymère et divers autres matériaux. Un autre problème sérieux que traite l'étanchéité est d'empêcher la perte de résistance structurale des matériaux de construction en béton, en particulier en raison de l'ASR (réaction alcali silice), des pluies acides, de l'attaque du sulfate. Elle empêche également la pénétration des chlorures qui peuvent entraîner une corrosion des barres en acier renforcé.

### **III.7.7. La Nanotechnologie et Béton Auto-Réparateur :**

L'expérimentation est également en cours sur le béton auto-réparateur. Quand le béton auto-réparateur se fissure, des microcapsules embarquées rompent et libèrent un agent de réparation dans la région endommagée par capillarité. Les agents de réparation rentrent en contact avec un catalyseur embarqué et leur polymérisation ferme la face de la fissure. Dans

les tests de rupture, les composites auto-cicatrisés ont récupérés autant que 75 % pour cent de leur résistance initiale. Ils pourraient augmenter la durée de vie des composants structurels de deux ou trois fois. Lorsque des fissures se forment dans ce béton auto-réparateur, elles font rompre des microcapsules libérant un agent de cicatrisation qui prend alors contact avec un catalyseur, déclenchant ainsi une polymérisation qui ferment les fissures.

### **III.7.8. Peintures et Revêtements :**

Le marché des peintures et revêtements a adopté le nano assez vite. Cet ensemble d'applications restera leur principal créneau en valeur dans les 10 ans prochains. La première application est la peinture résistante à la rayure. Une couche nanomatériau unique est aussi efficace que trois couches de coating classique. Les perspectives des nanomatériaux sont intéressantes dans le domaine des surfaces fonctionnelles comme les surfaces autonettoyantes, à effet lotus. On retrouvera dans les nanomatériaux pour l'amélioration de la qualité et du confort perçus, dans des revêtements avec des fonctions sensorielles, antistatiques, isothermes, hydrophiles, hydrophobes, antibactériennes, dans des revêtements iridescents, des vitrages électrochromes ou thermo chromes, des pare-brise antireflets etc.applications à grande échelle sont envisagées.

### **III.7.9. Verre**

Le verre en est un bon exemple puisque dès le XVIème siècle les verriers de Murano ont donné une couleur rubis à leurs produits en ajoutant un peu d'or. Les connaissances scientifiques récentes ont démontré que les atomes d'or par un traitement thermique approprié forment des agrégats nanométriques qui donnent cette fameuse couleur rubis.

La plupart des produits verriers actuels - tels que les verres optiques photochromes devenant plus sombres au soleil -sont conçus sur le même principe - par intégration d'agrégats nanométriques de sel d'argent à l'origine de la coloration foncée.

### **III.8. Conclusion**

Les nanotechnologies sont un domaine très prometteur, de nombreuses applications sont possibles dans de vastes domaines. En effet, qu'il s'agisse du nanotube de carbone ou encore d'une nanoparticule à cœur magnétique les nano-objets ouvrent une nouvelle branche de la recherche.

Grâce à l'invention de machines de plus en plus performantes et de microscopes de plus en plus précis, il a un jour été possible de fabriquer de la technologie nanométrique.



Les scientifiques se sont réjouis de cette avancée, cependant ils se sont rapidement rendus compte des effets néfastes que pouvaient avoir les nanotechnologies sur l'environnement et sur la santé humaine.

## ***Chapitre IV***

***ÉTUDE DE L'EFFET DE LA COMPOSITION DU MATERIAU SUR LA FLEXION ET LES  
PROPRIETES DYNAMIQUES DES PLAQUES FG A L'AIDE DE HSDT QUASI 3D***

## IV.1. Introduction

Après avoir établi, au chapitre précédent, le bilan des recherches sur quelques théories des plaques FGM, nous allons présenter dans ce chapitre l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM, pour cela nous avons proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D, cette théorie prend en considération l'effet d'étirement (Stretching effect) de l'épaisseur de la plaque FGM. Les termes d'intégrale indéfini sont introduits dans le champ de déplacement proposé, et contrairement aux théories conventionnelles HSDT, la présente théorie ne contient que cinq inconnus.

Et présenter les résultats numériques de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D

## IV.2. Formulation théorique

Considérons une plaque FG rectangulaire ( $a \times b$ ) d'épaisseur uniforme  $h$  (voir Fig. 1). La plaque FG proposée est réalisée à partir d'un mélange de métal et de céramique. La composition du matériau varie progressivement dans le sens de l'épaisseur uniquement.

### IV.2.1. Propriétés matérielles des plaques FGM

Dans ce travail, les compositions et les fractions volumiques des constituants dans les FGM sont supposées changer graduellement à travers l'épaisseur selon: (a) La variation de loi de puissance, (b) La distribution exponentielle, (c) Le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka. L'influence du coefficient de Poisson  $\nu$  sur la réponse des plaques FG étant très faible. Par conséquent, par souci de simplicité, il est supposé constant à travers l'épaisseur de la plaque le module d'élasticité  $E$  peut être exprimé par

$$E(z) = E_c V_c + E_m V_m, \quad z \in \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \quad \text{IV.1}$$

où  $E_c$  et  $E_m$  sont les modules de Young de la céramique et du métal, et leurs fractions volumiques sont données par

$$V_c + V_m = 1 \quad \text{IV.2}$$

#### a) Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la plaque P-FGM est considérée comme évoluant continuellement dans l'épaisseur de la plaque en fonction de la variation de la loi de puissance comme suit :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad \text{IV.4}$$

### b) Loi de mélange exponentielle (E-FGM)

On considère que la fraction volumique de la plaque E-FGM varie continuellement dans l'épaisseur de la plaque en fonction de la variation exponentielle comme suit:

$$P(z) = Ae^{p(z+h/2)}, \quad A = P_m, \quad p = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{P_c}{P_m} \right) \quad \text{IV.5}$$

### c) Modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka

Pour le schéma de Mori-Tanaka, la fraction volumique de la plaque de FGM est donnée par:

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \frac{V_c}{1 + V_m \left( \frac{P_c}{P_m} - 1 \right) \frac{1+\nu}{3-3\nu}} \quad \text{IV.6}$$

avec

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k, \quad V_m + V_c = 1 \quad \text{IV.7}$$

où  $P(z)$  présente la propriété matérielle effective comme le module de Young  $E$ ,  $P_m$  et  $P_m$  dénote la propriété des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement,  $k$  est l'indice de loi de puissance et  $p$  est l'exposant de la fraction volumique.

Les équations ci-dessus donnent un moyen efficace et adimensionnel module de Young sous une forme appropriée

$$\bar{E}(z) = \left( \frac{E_c}{E_m} - 1 \right) V_c(z) + 1 \quad \text{IV.8}$$

où  $\bar{E}(z) = E(z) / E_m$ . Ici, nous supposons que  $V_c$  est selon les différentes lois de puissance simples suivantes (Pitakthapanaphong and Busso 2002, Sofiyev et al. 2006):

$$V_c = \begin{cases} \frac{z}{h} + \frac{1}{2}, & \text{linear,} \\ \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^2, & \text{quadratic,} \\ 3\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^3, & \text{cubic,} \\ 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^2, & \text{inverse quadratic.} \end{cases} \quad \text{IV.9}$$

### IV.2.2. Hypothèses de base

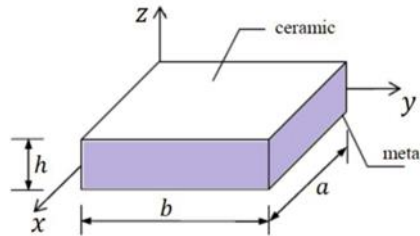


Figure IV-1 : Plaque rectangulaire typique FGM

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes:

- (i) Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur  $h$  de la plaque, par conséquent, les déformations sont infinitésimales.
- (ii) Les déplacements  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$  se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements  $u$  et  $v$  dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + u_b(x, y) + u_s(x, y, z) \quad \text{IV.10}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + v_b(x, y) + v_s(x, y, z) \quad \text{IV.11}$$

Les premières composantes  $u_0$  et  $v_0$  représentent les déplacements en membrane.

Les deuxièmes composante  $u_b$  et  $v_b$ , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacement donnés par la théorie classique des plaques. Les expressions des composantes  $u_b$  et  $v_b$  sont donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad v_b = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{IV.12}$$

Les troisièmes composantes sont les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$ , elles donnent lieu, une variation hyperboliques des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ , et donc à une variation parabolique des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  sont nulles aux facettes (supérieure et inférieure) de la plaque.

Les expressions des composantes  $u_s$  et  $v_s$  dépendent du terme intégrale qui réduit ainsi le nombre de variables à 5 par rapport aux théories d'ordre élevé conventionnelles, et elles sont donnée comme suit :

$$u_s = k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad v_s = k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad \text{IV.13}$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque.

Dans cette étude la nouvelle fonction de forme  $f(z)$  est présentée sous la forme suivante:

$$f(z) = 3.7 z (1.27 \operatorname{sech}^{0.65}(z/h) - 1) \quad \text{IV.14}$$

Cette fonction satisfait la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque .

(iii) La composante du déplacement transversal  $w(x, y, z)$  peut être dissociée en deux termes :

Le premier  $w_0(x, y)$  représente une partie de la flèche pure de la plaque, tel que le dérivé de cette composante égale numériquement à la rotation de la section transversale.

Le deuxième terme  $\varphi_z(x, y)$  considère la flèche due à l'effet d'étirement (effet de la déformation normale) de l'épaisseur de la plaque en incluant la fonction  $g(z)$  qui est donnée par l'équation (IV.10). Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées  $x, y$  seulement et s'écrivent comme suit :

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad \text{IV.15}$$

avec

$$g(z) = \frac{df}{dz} \quad \text{IV.16}$$

### IV.3. Cinématique et équations constitutives

#### IV.3.1. Champ des déplacements

Sur la base du modèle de plaque épaisse et compte tenu de l'effet d'étirement en épaisseur, le champ de déplacement suivant de la plaque peut être obtenu en utilisant les équations (IV.10) - (IV.16):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad \text{IV.17.a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad \text{IV.17.b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z)\varphi(x, y, t) \quad \text{IV.17.c}$$

Ou'  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$  et  $\varphi_z$  sont les 5 fonctions de déplacement inconnues de la surface médiane de la structure. Notez que les intégrales n'ont pas de limites. Les constantes et dépendent de la géométrie. Dans cette étude, la fonction de forme de déformation de cisaillement est (Akavci and Tanrikulu 2015):

$$f(z) = 3.7 z (1.27 \operatorname{sech}^{0.65}(z/h) - 1) \text{ et } g(z) = \frac{df}{dz} \quad \text{IV.18}$$

#### IV.3.2. Champ des déformations

Les déformations linéaires associées au champ des déplacements sont écrits sur la base des hypothèses de l'équation (12), et dans le cadre de l'application de la théorie linéaire de l'élasticité pour les petites déformations, les relations générales déformation-déplacement sont exprimées en

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad \text{IV.19}$$

Ou'

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \text{IV.20.a}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad \text{IV.20.b}$$

et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad \text{IV.20.c}$$

On peut observer à partir de l'équation (7) que les déformations de cisaillement transverse ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) deviennent nulles aux faces supérieure ( $z = h/2$ ) et inférieure ( $z = -h/2$ ) de la structure. Un coefficient de correction de cisaillement n'est donc pas nécessaire.

Les intégrales employées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{IV.21}$$

où les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont considérés selon le type de solution utilisée, dans ce cas par la méthode Navier. Par conséquent,  $A'$ ,  $B'$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont donnés par:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad \text{IV.22}$$

Ou'  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis dans l'expression (28).

### IV.3.3. Équations constitutives:

La relation de comportement élastique linéaire d'une plaque FG peut s'écrire sous la forme :



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.23}$$

Les constantes élastiques ( $C_{ij}$ ) dépendent de la déformation normale  $\varepsilon_z$ .

- Si  $\varepsilon_z \neq 0$  alors  $C_{ij}$  sont:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \text{IV.24.a}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \text{IV.24.b}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad \text{IV.24.c}$$

- Si  $\varepsilon_z = 0$  et  $\sigma_z = 0$  alors  $C_{ij}$  sont:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad \text{IV.25.a}$$

$$C_{12} = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad \text{IV.25.b}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad \text{IV.25.c}$$

#### IV.4. Équations d'équilibres

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour déterminer les équations de mouvement appropriées et les équations constitutives. Le principe peut être énoncé sous forme analytique sous la forme (Mohammadimehr et al. 2016b, Akbaş 2018, Faleh et al. 2018, Avcar 2019, Hadji 2020, Hadji and Bernard 2020):

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V_p - \delta K) dt \quad \text{IV.26}$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation ;  $\delta V_p$  est l'énergie potentielle de la charge transversale répartie appliquée et  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique de la plaque FG.

Les équations du mouvement peuvent être obtenues à partir de la relation (14) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \theta$  et  $\delta \varphi_z$  zéro séparément :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + q &= I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\phi} + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla \ddot{w}_0 + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\
\delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 (k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}) \\
&\quad + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}) - K_2 ((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\
\delta \varphi_z : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z &= J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\phi}_z
\end{aligned} \tag{IV.27}$$

Les résultantes des contraintes et des moments apparaissant dans l'équation (22) sont données par

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \tag{IV.28.a}
\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{IV.28.b}$$

où les composantes de rigidité et les inerties sont données par :

$$\left( A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left( 1, g^2(z), z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) dz \quad \text{IV.29.a}$$

$$\left( X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij} \right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1, z, f(z), g'(z) \right) g'(z) Q_{ij} dz \quad \text{IV.29.b}$$

$$\left( I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_0, K_0, K_2 \right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1, z, z^2, f, zf, g, g^2, f^2 \right) \rho(z) dz \quad \text{IV.29.c}$$

et  $\rho(z)$  est la masse volumique.

En substituant l'Éq. (23) dans l'Éq. (22), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements  $(u_0, v_0, w_0, \theta, \varphi)$  et les équations appropriées prennent la forme:

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_2 B') d_{122} \theta + B_{11}^s k_1 A' d_{111} \theta + X_{13} d_{11} \varphi = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_1 \ddot{\theta}, \quad \text{IV.30.a}$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_1 A') d_{112} \theta + B_{22}^s k_2 B' d_{222} \theta + X_{23} d_{22} \varphi = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_2 \ddot{\theta}, \quad \text{IV.30.b}$$

$$\left( X_{13} d_{11} u_0 + X_{23} d_{22} v_0 \right) - L^s \left( Y_{13} w_0 + Y_{23} w_0 \right) - \left( Y_{13}^s + A_{44}^s \right) d_{11} \theta - \left( Y_{23}^s + A_{55}^s \right) d_{22} \theta - A_{44}^s d_{11} \varphi_z - A_{55}^s d_{22} \varphi_z + Z_{33} \varphi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z \quad \text{IV.30.c}$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} \theta + \left( (D_{12}^s + 2D_{66}^s) (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{1122} \theta + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} \theta + (Y_{13} d_{11} \varphi_z + Y_{23} d_{22} \varphi_z) + q_{mn} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) + J_0 \ddot{\varphi}_z \quad \text{IV.30.d}$$

$$-k_1 A' B_{11}^s d_{111} u_0 - (B_{12}^s k_2 B' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} u_0 - (B_{22}^s k_1 A' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} v_0 - B_{22}^s k_2 B' d_{222} v_0 + D_{11}^s k_1 A' d_{1111} w_0 + \left( (D_{12}^s + 2D_{66}^s) (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{1122} w_0 + D_{22}^s k_2 B' d_{2222} w_0 - H_{11}^s (k_1 A')^2 d_{1111} \theta - H_{22}^s (k_2 B')^2 d_{2222} \theta - \left( 2H_{12}^s k_1 k_2 A' B' + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \right) d_{1122} \theta + A_{44}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta + A_{55}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + (Y_{13}^s d_{11} \varphi_z + Y_{23}^s d_{22} \varphi_z) = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 \left( (k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta} \right) + J_0 \ddot{\varphi}_z \quad \text{IV.30.e}$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  and  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad \text{IV.31}$$

#### IV.5. Solution analytique pour plaques FG simplement appuyée.

La procédure de résolution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques pour lesquelles les fonctions de déplacement sont exprimées sous forme de produit de coefficients indéterminés et de fonctions trigonométriques connues satisfaisant les conditions

$$\text{aux limites données dans l'équation } \begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Y_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \quad \text{IV.32}$$

avec

$$\alpha = m\pi / a \text{ and } \beta = n\pi / b \quad \text{IV.33}$$

$\omega$  est la fréquence de vibration libre de la plaque,  $i^2 = -1$  l'unité imaginaire. La charge transversale  $q$  est également développée en double série de Fourier comme suite:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad \text{IV.34}$$

Les coefficients  $q_{mn}$  sont donnés ci-dessous pour certaines charges générales:

- Dans le cas d'une charge uniformément répartie, nous avons

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{mn\pi^2}, & m, n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m, n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad \text{IV.35}$$

- Dans le cas d'une charge sinusoïdale distribué, nous avons

$$q_{mn} = q_0 \quad \text{IV.36}$$

où  $q_0$  représente l'intensité de la charge sur la plaque.

En substituant l'équation. (32) dans l'équation. (30), les solutions analytiques peuvent être obtenues par la relation suivante :

$$\left( \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.37}$$

avec:

$$S_{11} = -(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66})$$

$$S_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66})$$

$$S_{13} = +\alpha^3 B_{11} + \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66})$$

$$S_{14} = +\alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) - \alpha\beta^2 B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')$$

$$S_{15} = \alpha X_{13}$$

$$S_{22} = -(\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22})$$

$$S_{23} = +\alpha^2 \beta (B_{12} + 2B_{66}) + \beta^3 B_{22}$$

$$S_{24} = +\beta(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) + \alpha^2 \beta (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s$$

$$S_{25} = \beta X_{23}$$

$$S_{33} = -(\alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}))$$

$$S_{34} = -(\alpha^2 k_1 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + \beta^2 k_2 D_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s)$$

$$S_{35} = -(\alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23})$$

$$S_{44} = (-k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s + \alpha^2 (k_1 A')^2 A_{55}^s + \beta^2 (k_2 B')^2 A_{44}^s)$$

$$S_{45} = -(k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s + \alpha^2 k_1 A' A_{55}^s + \beta^2 k_2 B' A_{44}^s)$$

$$S_{55} = -(\alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s + Z_{33})$$

et

$$m_{11} = -I_0$$

$$m_{12} = 0,$$

$$m_{13} = \alpha I_1$$

$$m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha$$

$$m_{15} = 0,$$

$$m_{22} = -I_0$$

$$m_{23} = \beta I_1$$

$$m_{24} = -k_2 B' \beta J_1$$

$$m_{25} = 0,$$

IV.37

$$m_{33} = -(I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2))$$

$$m_{34} = J_2(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2),$$

$$m_{35} = -J_0,$$

$$m_{44} = K_2((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2),$$

$$m_{55} = -K_0,$$

## IV.6. Résultats numériques

Afin de vérifier l'exactitude de la présente formulation pour l'étude des réponses en flexion et dynamiques de plaques FG simplement appuyées, différents exemples sont examinés et comparés aux résultats de différentes théories de déformation de cisaillement HSDT 3D, quasi-3D et 2D.

### IV.6.1. Analyse statique

#### IV.6.1.1. Plaques graduées fonctionnellement

Dans cette section, les contraintes et déplacements calculés des plaques FG sont comparés aux résultats de différents HSDT. Les propriétés des matériaux des plaques FGM sont données dans le tableau 1. Les composantes de déplacement et de contrainte non-dimensionnel pour cette section sont données par:

$$\bar{w} = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_x(z) = \frac{h}{aq_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_y(z) = \frac{h}{aq_0} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\tau}_{xy}(z) = \frac{h}{aq_0} \tau_{xy}(0, 0, z),$$

$$\bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\tau}_{yz}(z) = \frac{h}{aq_0} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right).$$

Material	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio	mass density (kg/m <sup>3</sup> )
Aluminum (Al)	70	0.3	2702
Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	380	0.3	3800
Zirconia (ZrO <sub>2</sub> )	200	0.3	5700

**Tableau IV-1** : les propriétés matérielles utilisées pour la plaque FGM.

Dans les tableaux 2 et 3, le déplacement non-dimensionnel et les contraintes d'une plaque carrée FG en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous des forces distribuées uniformément et sinusoïdales sont donnés pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance.

Le tableau 2 montre les résultats calculés des composants de déplacement et de contrainte non-dimensionnel de la plaque FG carrée soumise à une force uniformément répartie par rapport à ceux d'un HSDT 2D par Zenkour (2006) et Akavci et Tanrikulu (2015) et HSDT 3D par Akavci et Tanrikulu (2015). On peut observer à partir du tableau que les résultats HSDT 2D présentes sont en bon accord avec les résultats de la théorie 2D de Zenkour (2006) et Akavci et Tanrikulu (2015).

**Tableau IV-2 :** Effet de la déformation normale sur les contraintes et le déplacement non-dimensionnel pour une plaque carrée en FG type Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> soumise à une charge uniformément répartie (a/h =10).

$k$	Theory	$\varepsilon_z$	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/3)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{yz}(h/6)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$
0	Ref <sup>(a)</sup>	0	0.4665	2.8932	1.9103	0.5114	0.4429	1.2850
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.4665	2.8909	1.9103	0.4988	0.4363	1.2857
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.4635	2.9981	1.8925	0.4782	0.4315	1.2578
	Présente	≠0	0.46348	2.99809	1.89247	0.47816	0.43146	1.25780
	Présente	0	0.46656	2.89093	1.91031	0.49884	0.43625	1.28568
1	Ref <sup>(a)</sup>	0	0.9287	4.4745	2.1692	0.5114	0.5446	1.1143
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.9288	4.4705	2.1693	0.4988	0.5364	1.1141
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.8977	4.6110	2.0822	0.4782	0.5119	1.0211
	Présente	≠0	0.89770	4.61100	2.08215	0.47816	0.51199	1.02211
	Présente	0	0.92876	4.47074	2.16933	0.49884	0.53643	1.11413
2	Ref <sup>(a)</sup>	0	1.1940	5.2296	2.0338	0.4700	0.5734	0.9907
	Ref <sup>(b)</sup>	0	1.1940	5.2248	2.0342	0.4581	0.5643	0.9909
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	1.1376	5.3825	1.9257	0.4524	0.5081	0.8921
	Présente	≠0	1.13757	5.38247	1.92571	0.45240	0.50808	0.89209
	Présente	0	1.19401	5.22482	2.03414	0.45805	0.56428	0.99092
4	Ref <sup>(a)</sup>	0	1.3890	5.8915	1.7197	0.4204	0.5346	1.0298
	Ref <sup>(b)</sup>	0	1.3888	5.8855	1.7205	0.4090	0.5253	1.0305
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	1.3259	6.0382	1.6062	0.4358	0.4804	0.9274
	Présente	≠0	1.32594	6.03820	1.60615	0.43579	0.48039	0.92736
	Présente	0	1.38879	5.88548	1.72048	0.40903	0.52525	1.03054
10	Ref <sup>(a)</sup>	0	1.5876	7.3689	1.2820	0.4552	0.4227	1.0694
	Ref <sup>(b)</sup>	0	1.5875	7.3617	1.2828	0.4436	0.4159	1.0705
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	1.5453	7.5123	1.2016	0.4332	0.4561	0.9860
	Présente	≠0	1.54533	7.51234	1.20161	0.43316	0.45606	0.98603
	Présente	0	1.58747	7.36174	1.28276	0.44363	0.41596	1.07049

<sup>(a)</sup> Zenkour (2006)

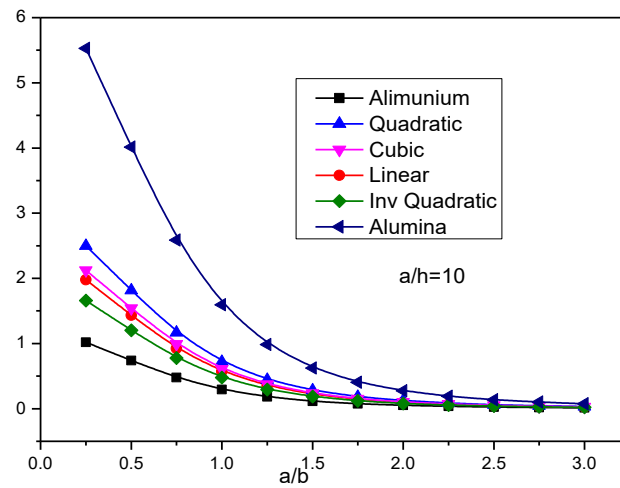
<sup>(b)</sup> Akavci and Tanrikulu (2015)



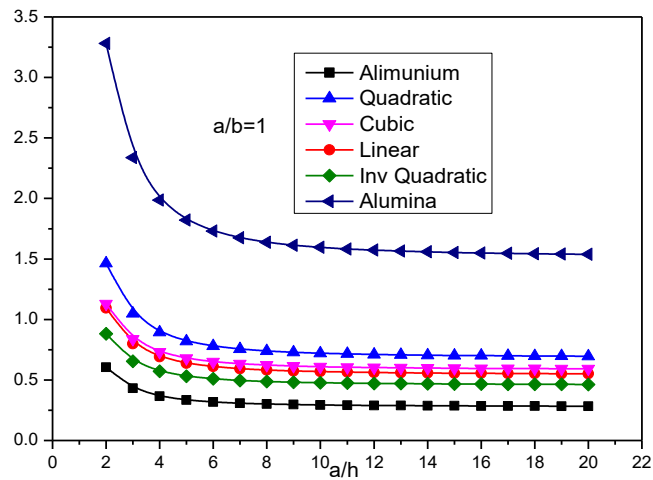
**Tableau IV-3 :** Effet de la déformation normale sur le déplacement et la contrainte non-dimensionnelle pour une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> FG soumise à une charge sinusoïdale.

$k$	Theory	$\varepsilon_z$	$\bar{\sigma}_x(h/3)$			$\bar{w}(0)$		
			$a/h=4$	$a/h=10$	$a/h=100$	$a/h=4$	$a/h=10$	$a/h=100$
1	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	0.6221	1.5064	14.969	0.7171	0.5875	0.5625
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	0.5925	1.4945	14.969	0.6997	0.5845	0.5624
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	0.5910	1.4917	14.944	0.7020	0.5868	0.5648
	Ref <sup>(d)</sup>	$\neq 0$	0.5944	1.4962	14.552	0.6828	0.5592	0.5624
	Ref <sup>(e)</sup>	$\neq 0$	0.5754	1.4322	14.306	0.6908	0.5691	0.5457
	Ref <sup>(e)</sup>	0	0.5806	1.4895	14.967	0.7282	0.5889	0.5625
	Présente	$\neq 0$	0.57538	1.43221	14.3062	0.69078	0.56906	0.54567
	Présente	0	0.58071	1.48958	14.9675	0.72680	0.58870	0.56254
4	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	0.4877	1.1971	11.923	1.1585	0.8821	0.8286
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	0.4404	1.1783	11.932	1.1178	0.8750	0.8286
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	0.4340	1.1593	11.738	1.1095	0.8698	0.8241
	Ref <sup>(d)</sup>	$\neq 0$	0.4321	1.1410	11.388	1.1001	0.8404	0.7933
	Ref <sup>(e)</sup>	$\neq 0$	0.4431	1.1779	11.920	1.1613	0.8818	0.8287
	Ref <sup>(e)</sup>	0	0.4247	1.1017	11.088	1.0983	0.8417	0.7925
	Présente	$\neq 0$	0.4246	1.1017	11.0884	1.0983	0.8417	0.7925
	Présente	0	0.4434	1.1787	11.9208	1.1584	0.8812	0.8286
10	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	0.3965	0.8965	8.9077	1.3745	1.0072	0.9361
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	0.3227	1.1783	11.932	1.3490	0.8750	0.8286
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	0.3108	0.8467	8.6013	1.3327	0.9886	0.9228
	Ref <sup>(d)</sup>	$\neq 0$	0.3154	0.8530	8.5853	1.3391	0.9806	0.9140
	Ref <sup>(e)</sup>	$\neq 0$	0.3325	0.8889	8.9977	1.3333	0.9791	0.9114
	Ref <sup>(e)</sup>	0	0.3095	0.8229	8.3185	1.3352	0.9818	0.9141
	Présente	$\neq 0$	0.3094	0.8229	8.3185	1.3351	0.9818	0.9140
	Présente	0	0.3245	0.8779	8.9059	1.3876	1.0082	0.9361

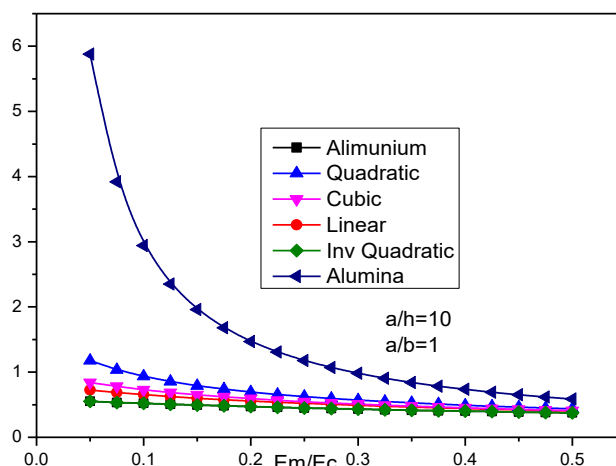
<sup>(a)</sup> Carrera *et al.* (2011)<sup>(b)</sup> Neves *et al.* (2012a)<sup>(c)</sup> Neves *et al.* (2012b)<sup>(d)</sup> Zenkour (2013)<sup>(e)</sup> Akavci and Tanrikulu (2015)



**Figure IV-2 :** Variation de la flèche non dimensionnelle  $\bar{w}$  pour les plaques de métal, de céramique et de FGM par rapport au rapport géométrique ( $a/b$ ) avec tous les profils de composition.



**Figure IV-3 :** Variation de la flèche non dimensionnelle  $\bar{w}$  pour les plaques de métal, de céramique et de FGM par rapport au rapport géométrique ( $a/h$ ) avec tous les profils de composition.



**Figure IV-4 :** L'effet de l'anisotropie du matériau sur la flèche maximale non dimensionnelle d'une plaque FGM avec différents profils de composition.

De plus, les résultats présentes de la HSDT 3D sont en excellent accord avec les résultats de la théorie 3D d'Akavci et Tanrikulu (2015). De plus, la théorie quasi-3D proposée donne des résultats plus précis que ceux obtenus par les autres théories 2D.

Ce tableau montre également que la flèche  $\bar{w}$  et les contraintes axiale  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  augmentent et les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{xy}$  diminuent avec l'augmentation la valeur de l'indice de gradient  $k$ .

Le tableau 3 montre la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  non-dimensionnelle et la flèche maximale  $\bar{w}$  non-dimensionnelle d'une plaque carrée FG pour différentes valeurs de rapports  $a/h$ . Les résultats calculés sont comparés aux différents théories HSDT quasi-3D de (Carrera et al. 2011), Neves et al. (2012ab), Zenkour (2013) et Akavci et Tanrikulu (2015) qui prennent en compte à la fois le cisaillement transversal et la déformation normale.

Les variations de la flèche centrale  $\bar{w}$  des plaques FG en aluminium-alumine sous charge sinusoïdale pour différents paramètres géométriques et la fraction volumique  $V_c$  suivant des lois de puissance simples sont présentées dans les Figs. 2 et 3. Les deux cas de l'alumine isotrope et de l'aluminium correspondent respectivement à la plaque entièrement céramique et à la plaque entièrement métallique. Cependant, les autres cas de plaques FG présentent linear, quadratic, cubic, et inverse quadratic distributions dans les Figs. 2 and 3, il est évident que la variation de  $\bar{w}$  des plaques FG est supérieure à celle de la plaque entièrement en céramique ( $Al_2O_3$ ) mais inférieur à celui de la plaque entièrement métallique (Al). la variation de  $\bar{w}$  déterminé à partir

du profil de composition quadratique est supérieur aux cas linéaires, cubiques et quadratiques inverses. Cependant, les courbes coïncident pour la plus grande valeur de  $a/b$  et pour tous les profils de composition des plaques FGM. Dans tous les cas importants, la variation de  $\bar{w}$  diminue lorsque les rapports géométriques  $a/b$  et  $a/h$  augmentent. L'effet des rapports de modules  $E_m / E_c$  sur la variation de  $\bar{w}$  est présenté sur Fig 4 ( $a/h = 10$ ). Il est clair qu'avec l'augmentation de 0,05 à 0,5, les déflexions diminuent régulièrement.

#### IV.6.1.2. Plaques exponentiellement graduées (Plaque E-FGM)

Dans cette section, la fonction exponentielle employée pour définir les propriétés matériau de la plaque est donnée d'après les travaux de Delale et Erdogan (1983). La contrainte non-dimensionnelle et les déplacements de la plaque sont comparés aux résultats de différentes théorie HSDT pour différents chargements.

Les déplacements et contraintes calculés non-dimensionnels sont donnés dans les tableaux 4 à 6 pour différentes valeurs de rapport géométrique  $b/a$ , du rapport d'épaisseur  $a/h$  et de la valeur exponentielle  $p$ .

Le tableau 4 montre la flèche maximale non-dimensionnelle  $\bar{w}$  des plaques EFGM très épaisses. Les résultats calculés sont comparés avec les modèles sinusoïdale quasi-3D et les solutions de l'élasticité 3D de Zenkour (2007), les modèles trigonométriques 2D et quasi-3D de Mantari et Soares (2013), le modèle hyperbolique quasi-3D de Thai et Choi (2014) et modèles 2D et 3D d'Akavci et Tanrikulu (2015). Étant donné que les modèles présentés et d'autres modèles quasi-3D introduisant l'influence de l'épaisseur, les résultats sont proches les uns des autres. Pendant ce temps, les modèles 2D qui ne prennent pas en compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur surestiment les résultats.

Dans les tableaux 5 et 6, les contraintes non-dimensionnelles calculées sont données et comparées avec le modèle sinusoïdal quasi-3D de Thai et Kim (2013), les modèles trigonométriques 2D et quasi-3D de Mantari et Soares (2013) et les modèles 2D et 3D d'Akavci et Tanrikulu (2015). L'examen des tableaux montre clairement que les résultats actuels sont en parfait accord avec les solutions quasi-3D de (Thai et Kim 2013, Mantari et Soares 2013, Akavci et Tanrikulu 2015).

**Tableau IV-4 :** La flèche maximale non-dimensionnelle  $\bar{w}(0) = \frac{10h^3 E_0}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$  pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale ( $a/h=2$ ).

$b/a$	Theory	$\varepsilon_z$	$p$					
			0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5
1	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3726	0.2890
	Ref <sup>(a)</sup>	0	0.5730	0.5180	0.4678	0.4221	0.3611	0.2771
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	0.5778	0.5224	0.4717	0.4256	0.3648	0.2793
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.6362	0.5751	0.5194	0.4687	0.4017	0.3079
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	0.5777	0.5222	0.4716	0.4255	0.3640	0.2793
	Ref <sup>(d)</sup>	0	0.6351	0.5741	0.5185	0.4679	0.4004	0.3075
	Ref <sup>(d)</sup>	$\neq 0$	0.5750	0.5198	0.4694	0.4236	0.3624	0.2780
	Présente	0	0.63505	0.57410	0.51854	0.46793	0.40044	0.30749
	Présente	$\neq 0$	0.57499	0.51978	0.46943	0.42356	0.36237	0.27804
2	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	1.1944	1.0859	0.9864	0.8952	0.7726	0.6017
	Ref <sup>(a)</sup>	0	1.1879	1.0739	0.9700	0.8754	0.7493	0.5757
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	1.1940	1.0794	0.9750	0.8799	0.7537	0.5786
	Ref <sup>(b)</sup>	0	1.2776	1.1553	1.0441	0.9430	0.8092	0.6237
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	1.1939	1.0793	0.9749	0.8798	0.7530	0.5785
	Ref <sup>(d)</sup>	0	1.2763	1.1541	1.0431	0.9422	0.8079	0.6234
	Ref <sup>(d)</sup>	$\neq 0$	1.1907	1.0765	0.9723	0.8775	0.7511	0.5771
	Présente	0	1.27625	1.15413	1.04310	0.94219	0.80794	0.62341
	Présente	$\neq 0$	1.19073	1.07647	0.97233	0.87749	0.75108	0.57708
3	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	1.4429	1.3116	1.1912	1.0811	0.9333	0.7275
	Ref <sup>(a)</sup>	0	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9056	0.6961
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	1.4421	1.3037	1.1776	1.0627	0.9104	0.6992
	Ref <sup>(b)</sup>	0	1.5340	1.3873	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	1.4419	1.3035	1.1774	1.0626	0.9096	0.6991
	Ref <sup>(d)</sup>	0	1.5327	1.3861	1.2530	1.1320	0.9712	0.7503
	Ref <sup>(d)</sup>	$\neq 0$	1.4386	1.3005	1.1748	1.0602	0.9076	0.6976
	Présente	0	1.53265	1.38611	1.25295	1.13201	0.97119	0.75026
	Présente	$\neq 0$	1.43855	1.30054	1.17476	1.06024	0.90762	0.69762

<sup>(a)</sup> Zenkour (2007)

<sup>(b)</sup> Mantari and Soares (2013)

<sup>(c)</sup> Thai and Choi (2014)

<sup>(d)</sup> Akavci and Tanrikulu (2015)

**Tableau IV-5** : La contrainte axiale non-dimensionnelle  $\bar{\sigma}_x\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{a^2 q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$  pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale ( $a/h=10$ ).

$b/a$	Theory	$\varepsilon_z$	$P$								
			0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	Ref <sup>(a)</sup>	≠0	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460			
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2944	0.3460	0.4065	0.4775	0.5603
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.2062	0.2204	0.2355	0.2515	0.2774	0.3264	0.3835	0.4502	0.5278
	Ref <sup>(c)</sup>	0	0.2063	0.2205	0.2356	0.2516	0.2776	0.3266	0.3838	0.4504	0.5281
	Ref <sup>(c)</sup>	≠0	0.2142	0.2285	0.2438	0.2601	0.2866	0.3370	0.3964	0.4664	0.5485
	Présente	0	0.20630	0.22049	0.23558	0.25161	0.27758	0.32657	0.38375	0.45045	0.52805
	Présente	≠0	0.21415	0.22850	0.24379	0.26008	0.28658	0.33697	0.39640	0.46639	0.54852
2	Ref <sup>(a)</sup>	≠0	0.4552	0.4867	0.5201	0.5555	0.6126	0.7201			
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.4552	0.4867	0.5200	0.5554	0.6126	0.7201	0.8449	0.9898	1.1580
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.4350	0.4649	0.4966	0.5303	0.5850	0.6881	0.8085	0.9490	1.1125
	Ref <sup>(c)</sup>	0	0.4351	0.4650	0.4968	0.5305	0.5852	0.6884	0.8088	0.9493	1.1129
	Ref <sup>(c)</sup>	≠0	0.4466	0.4773	0.5098	0.5443	0.6002	0.7058	0.8289	0.9725	1.1397
	Présente	0	0.43510	0.46499	0.49675	0.53051	0.58519	0.68836	0.80880	0.94933	1.11292
	Présente	≠0	0.44662	0.47725	0.50977	0.54432	0.60027	0.70576	0.82887	0.97249	1.13971
3	Ref <sup>(a)</sup>	≠0	0.5514	0.5897	0.6302	0.6733	0.7427	0.8730			
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.5514	0.5896	0.6302	0.6733	0.7427	0.8730	1.0240	1.1990	1.4017
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.5288	0.5651	0.6037	0.6447	0.7112	0.8365	0.9828	1.1536	1.3523
	Ref <sup>(c)</sup>	0	0.5290	0.5653	0.6039	0.6449	0.7114	0.8368	0.9832	1.1540	1.3528
	Ref <sup>(c)</sup>	≠0	0.5418	0.5791	0.6187	0.6608	0.7289	0.8570	1.0061	1.1797	1.3813
	Présente	0	0.52897	0.56530	0.60390	0.64492	0.71137	0.83676	0.98316	1.15397	1.35283
	Présente	≠0	0.54175	0.57910	0.61874	0.66083	0.72890	0.85700	1.00611	1.17964	1.38128

<sup>(a)</sup> Thai and Kim (2013)

<sup>(b)</sup> Mantari and Soares (2013)

<sup>(c)</sup> Akavci and Tanrikulu (2015)

**Tableau IV-6** : La contrainte de cisaillement transversale non-dimensionnelle

$$\bar{\tau}_{xz}(0) = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right) \text{ pour une plaque en EGM soumise à une charge sinusoïdale } (a/h=10).$$

$b/a$	Theory	$\varepsilon_z$	$P$								
			0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	0.2454	0.2450	0.2442	0.2430	0.2405	0.2344			
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	0.2454	0.2450	0.2442	0.2430	0.2405	0.2344	0.2263	0.2162	0.2045
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.2380	0.2376	0.2368	0.2356	0.2330	0.2268	0.2185	0.2094	0.1985
	Ref <sup>(c)</sup>	0	0.2434	0.2430	0.2422	0.2410	0.2385	0.2324	0.2242	0.2140	0.2023
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	0.2367	0.2364	0.2359	0.2353	0.2338	0.2300	0.2249	0.2182	0.2102
	Présente	0	0.24342	0.24302	0.24221	0.24101	0.23848	0.23240	0.22415	0.21400	0.20225
	Présente	$\neq 0$	0.23668	0.23644	0.23597	0.23526	0.23375	0.23004	0.22487	0.21824	0.21023
2	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	0.3927	0.3920	0.3908	0.3889	0.3849	0.3752			
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	0.3927	0.3921	0.3908	0.3889	0.3849	0.3752	0.3621	0.3460	0.3273
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.3810	0.3803	0.3790	0.3770	0.3730	0.3630	0.3497	0.3344	0.3165
	Ref <sup>(c)</sup>	0	0.3896	0.3889	0.3877	0.3857	0.3817	0.3719	0.3588	0.3425	0.3237
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	0.3790	0.3787	0.3779	0.3768	0.3744	0.3684	0.3602	0.3496	0.3368
	Présente	0	0.38959	0.38895	0.38766	0.38574	0.38169	0.37196	0.35876	0.34252	0.32374
	Présente	$\neq 0$	0.37903	0.37866	0.37790	0.37676	0.37435	0.36844	0.36018	0.34960	0.33680
3	Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	0.4418	0.4411	0.4396	0.4375	0.4330	0.4222			
	Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	0.4418	0.4411	0.4396	0.4375	0.4330	0.4221	0.4074	0.3893	0.3683
	Ref <sup>(b)</sup>	0	0.4286	0.4279	0.4264	0.4242	0.4196	0.4084	0.3934	0.3761	0.3558
	Ref <sup>(c)</sup>	0	0.4383	0.4376	0.4361	0.4340	0.4294	0.4185	0.4036	0.3854	0.3642
	Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	0.4265	0.4261	0.4252	0.4239	0.4212	0.4146	0.4053	0.3934	0.3789
	Présente	0	0.43831	0.43759	0.43614	0.43398	0.42943	0.41848	0.40363	0.38537	0.36423
	Présente	$\neq 0$	0.42649	0.42606	0.42521	0.42393	0.42122	0.41457	0.40528	0.39339	0.37898

(a) Thai and Kim (2013)

(b) Mantari and Soares (2013)

(c) Akavci and Tanrikulu (2015)

**Tableau IV-7 :** La flèche maximale non-dimensionnelle  $\bar{w}(0) = G(h)w/hq_0$  et la contrainte axiale non-dimensionnelle  $\bar{\sigma}_x(0) = \sigma_x(0)/q_0$  pour des plaques en EGM soumise à une charge uniformément répartie.

$h/a$	Theory		$E_0/E_h$				
			0.1	0.5	1	2	10
0.2	$\bar{w}$	BEM <sup>(a)</sup>	4.0916	8.9751	12.599	17.664	39.060
		FEM <sup>(b)</sup>	4.1215	9.0047	12.613	17.711	39.155
		Ref <sup>(c)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	3.8333	8.8724	12.597	17.744	38.333
		Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	3.8333	8.8724	12.597	17.744	38.333
	$\bar{\sigma}_x$	BEM <sup>(a)</sup>	-15.356	-9.2902	-7.4462	-5.9410	-3.4665
		FEM <sup>(b)</sup>	-15.403	-9.2995	-7.4588	-5.9591	-3.4805
		Ref <sup>(c)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	-16.322	-9.6545	-7.6944	-6.1109	-3.4530
		Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	-16.322	-9.6545	-7.69439	-6.1109	-3.4530
0.3	$\bar{w}$	BEM <sup>(a)</sup>	0.9707	2.1378	2.9853	4.1208	8.7134
		FEM <sup>(b)</sup>	0.9732	2.1407	2.9792	4.1333	8.7293
		Ref <sup>(d)</sup>	0.9735	2.1405	2.9795	4.1332	8.7343
		Ref <sup>(c)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.8923	2.0834	2.9602	4.1669	8.9229
		Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.89229	2.0834	2.9602	4.16688	8.9229
	$\bar{\sigma}_x$	BEM <sup>(a)</sup>	-7.2230	-4.3084	-3.4496	-2.7499	-1.6449
		FEM <sup>(b)</sup>	-7.2639	-4.3378	-3.4681	-2.7673	-1.6499
		Ref <sup>(d)</sup>	-7.1493	-4.3227	-3.4710	-2.7853	-1.6759
		Ref <sup>(c)</sup> ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	-7.6576	-4.5062	-3.5748	-2.8235	-1.5731
		Présente ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	-7.6576	-4.50618	-3.5748	-2.8235	-1.5731

<sup>(a)</sup> Vaghefi et al. (2010)

<sup>(b)</sup> Vaghefi et al. (2010)

<sup>(c)</sup> Akavci and Tanrikulu (2015)

<sup>(d)</sup> Zhang et al. (2014)



Les tableaux 4 à 6 présentent également que la flèche et la contrainte de cisaillement transversale  $\tau_{xz}$  diminuent et que la contrainte axiale  $\sigma_x$  augmente avec l'augmentation des valeurs exponentielle  $p$ .

Le tableau 7 montre les déformations et contraintes non-dimensionnelles des plaques EGM pour différents rapports de valeurs. Les résultats calculés sont comparés avec avec la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments limites (BEM) de Vaghefi et al. (2010), modèle d'élasticité 3D exact de Zhang et al. (2014) et le modèle quasi-3D d'Akavci et Tanrikulu (2015) et ils s'adaptent très bien.

#### IV.6.2. Vibration libre

Dans cette section, des exemples numériques sont considérés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie dans la prédiction des réponses dynamiques des plaques FG simplement appuyées. Dans le premier exemple, des plaques carrées isotropes simplement appuyées sont examinées pour étudier l'efficacité de la théorie présente.

**Tableau IV-8 :** Comparaison des fréquences naturelles  $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$  d'une plaque isotrope carrée ( $a/h=10$ ).

Theory	$\varepsilon_z$	Mode ( $m,n$ )							
		(1.1)	(1.2)	(2.2)	(1.3)	(2.3)	(3.3)	(2.4)	(1.5)
Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.4172	0.5240	0.6892	0.7515	0.9275
Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.4171	0.5239	0.6889	0.7511	0.9268
Ref <sup>(c)</sup>	0	0.0930	0.2220	0.3406	0.4149	0.5206	0.6834	0.7447	0.9174
Ref <sup>(d)</sup>	0	0.0930	0.2219	0.3407	0.4151	0.5209	0.6841	0.7455	0.9189
Ref <sup>(d)</sup>	$\neq 0$	0.0932	0.2227	0.3424	0.4176	0.5247	0.6902	0.7526	0.9290
Présente	0	0.09303	0.22196	0.34066	0.41511	0.52088	0.68410	0.74553	0.91898
Présente	$\neq 0$	0.09321	0.22279	0.34244	0.41764	0.52466	0.69016	0.75256	0.92899

<sup>(a)</sup> Jha et al. (2013)

<sup>(b)</sup> Srinivas et al. (1970)

<sup>(c)</sup> Whitney and Pagano (1970)

<sup>(d)</sup> Akavci and Tanrikulu (2015)

**Tableau IV-9** : Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c} \text{ d'une plaque FGM carrée en Al/Al}_2\text{O}_3.$$

$a/h$	Theory	$\varepsilon_z$	$k$				
			0	0.5	1	4	10
2	Ref <sup>(a)</sup>	0	0.9265	0.8060	0.7331	0.6112	0.5640
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.9400	0.8232	0.7477	0.5997	0.5460
	Ref <sup>(c)</sup>	≠0	0.9400	0.8223	0.7475	0.5995	0.5461
	Ref <sup>(d)</sup>	0	0.9303	0.8115	0.7360	0.5921	0.5413
	Ref <sup>(d)</sup>	≠0	0.9440	0.8269	0.7536	0.6063	0.5506
	Présente	≠0	0.9440	0.8269	0.75356	0.6063	0.55058
	Présente	0	0.9303	0.81146	0.73603	0.5921	0.54128
5	Ref <sup>(a)</sup>	0	0.2111	0.1804	0.1629	0.1395	0.1323
	Ref <sup>(e)</sup>	0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Ref <sup>(c)</sup>	≠0	0.2121	0.1818	0.1640	0.1382	0.1306
	Ref <sup>(d)</sup>	0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
	Ref <sup>(d)</sup>	≠0	0.2124	0.1827	0.1661	0.1410	0.1319
	Présente	≠0	0.2123	0.18267	0.16609	0.14099	0.13186
	Présente	0	0.21127	0.18073	0.16313	0.13777	0.13002
10	Ref <sup>(a)</sup>	0	0.0576	0.0489	0.0441	0.0381	0.0365
	Ref <sup>(e)</sup>	0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.0577	0.0491	0.0442	0.0381	0.0364
	Ref <sup>(c)</sup>	≠0	0.0577	0.0491	0.0442	0.0381	0.0364
	Ref <sup>(d)</sup>	=0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0380	0.0363
	Ref <sup>(d)</sup>	≠0	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	Présente	≠0	0.05780	0.04941	0.04490	0.03893	0.0368
	Présente	0	0.05769	0.04901	0.04419	0.03806	0.03636
20	Ref <sup>(e)</sup>	0	0.0113	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Ref <sup>(b)</sup>	≠0	0.0113	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Ref <sup>(d)</sup>	0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Ref <sup>(d)</sup>	≠0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
	Présente	≠0	0.01481	0.01263	0.01148	0.01002	0.00952
	Présente	0	0.01479	0.01254	0.01130	0.00980	0.00940

<sup>(a)</sup> Zhu and Liew (2011)<sup>(b)</sup> Matsunaga (2008)<sup>(c)</sup> Sheikholeslami and Saidi (2013)<sup>(d)</sup> Akavci and Tanrikulu (2015) <sup>(e)</sup> Taken from Hosseini-Hashemi et al. (2011)

Dans le tableau 8, les huit premières fréquences naturelles non-dimensionnelles sont comparées aux résultats donnés par les modèles quasi-3D de Jha et al. (2013) et la solution exacte 3D de Srinivas et al. (1970), FSDT de Whitney et Pagano (1970) et modèles 2D et 3D d'Akavci et Tanrikulu (2015). Le tableau 8 démontre que les résultats calculés sur la base des modèles présentes sont en bon accord avec ceux obtenus par les autres théories quasi-3D de Jha et al. (2013) et Akavci et Tanrikulu (2015) pour tous les modes de vibration.

Les deux exemples suivants sont réalisés pour des plaques FGM carrées en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> épaisses.

Dans le tableau 9, les fréquences fondamentales non dimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée sont calculées pour différents indices de gradient et différents rapports a/b et comparées aux FSDT de Zhu et Liew (2011) et aux HSDT quasi-3D de Hosseini-Hashemi et al. (2011), Matsunaga (2008), Sheikholeslami et Saidi (2013) et Akavci et Tanrikulu (2015). Là encore, les résultats calculés sont en bon accord avec ceux des autres solutions quasi-3D. Le tableau montre que les fréquences fondamentales augmentent avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et diminuent avec l'augmentation de l'indice de gradient.

**Tableau IV-10** : Comparaison des trois premières fréquences naturelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / G_c}$  d'une plaque FGM carrée en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $a/h=10$ ).

Mode ( <i>m, n</i> )	Theory	$\varepsilon_z$	<i>k</i>				
			0	0.5	1	4	10
(1,1)	Ref <sup>(a)</sup>	≠ 0	5.7777	4.9170	4.4270	3.8110	3.6420
	Ref <sup>(b)</sup>	0	5.7695	4.9015	4.4193	3.8064	3.6365
	Ref <sup>(b)</sup>	≠ 0	5.7807	4.9410	4.4907	3.8934	3.6827
	Présente	0	5.76952	4.90153	4.41929	3.80646	3.63652
	Présente	≠ 0	5.78076	4.94100	4.4907	3.89339	3.68268
(1,2)	Ref <sup>(a)</sup>	≠ 0	13.810	11.800	10.630	9.0450	8.5880
	Ref <sup>(b)</sup>	0	13.765	11.739	10.590	9.0224	8.5613
	Ref <sup>(b)</sup>	≠ 0	13.817	11.851	10.773	9.2314	8.6768
	Présente	0	13.7656	11.7392	10.590	9.02245	8.56135
	Présente	≠ 0	13.8170	11.8513	10.773	9.23142	8.67684
(2,2)	Ref <sup>(a)</sup>	≠ 0	21.210	18.190	16.400	13.830	13.060
	Ref <sup>(b)</sup>	0	21.127	18.073	16.313	13.777	13.002
	Ref <sup>(b)</sup>	≠ 0	21.237	18.268	16.609	14.099	13.186
	Présente	0	21.1270	18.0732	16.313	13.7771	13.0026
	Présente	≠ 0	21.2373	18.2685	16.609	14.0995	13.1860

<sup>(a)</sup> Matsunaga (2008)

<sup>(b)</sup> Akavci and Tanrikulu (2015)

**Tableau IV-11** : Comparaison des fréquences fondamentales non-dimensionnelles
$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_M / E_M}$$
 d'une plaque FGM carrée en Al/ ZrO<sub>2</sub> (Schéma de Mori-Tanaka).

Theory	$\varepsilon_z$	$k=0$		$k=1$			$a/h=5$		
		$a/h=\sqrt{10}$	$a/h=10$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$k=2$	$k=3$	$k=5$
Ref <sup>(a)</sup>	$\neq 0$	4.6582	5.7769	5.712 3	6.1932	6.3390	5.659 9	5.675 7	5.702 0
Ref <sup>(b)</sup>	$\neq 0$			5.482 5	5.9600	6.1200	5.495 0	5.530 0	5.562 5
Ref <sup>(c)</sup>	$\neq 0$	4.6606	5.7769	5.479 6	5.9578	6.1040	5.491 9	5.527 9	5.563 3
Ref <sup>(d)</sup>	$\neq 0$	4.6582	5.7769	5.480 6	5.9609	6.1076	5.492 3	5.528 5	5.563 2
Ref <sup>(e)</sup>	0	4.6236	5.7695	5.421 6	5.9136	6.0647	5.443 1	5.479 8	5.513 8
Ref <sup>(e)</sup>	$\neq 0$	4.6672	5.7807	5.482 9	5.9676	6.1160	5.506 4	5.538 8	5.564 4
Présent e	0	4.6236	5.7695	5.423 3	5.9174	6.0693	5.444 1	5.481 1	5.515 9
Présent e	$\neq 0$	4.6672	5.7807	5.485 4	5.9724	6.1215	5.506 9	5.539 4	5.565 9

(a) Matsunaga (2008)

(b) Neves et al. (2012a)

(c) Alijani and Amabili (2014)

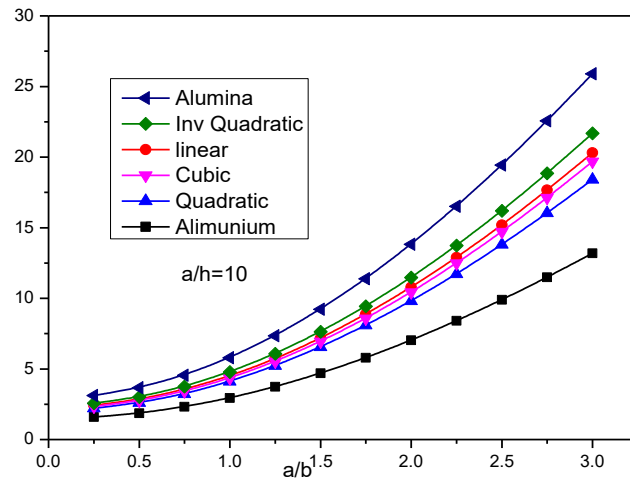
(d) Vel and Batra (2004)

(e) Akavci and Tanrikulu (2015)

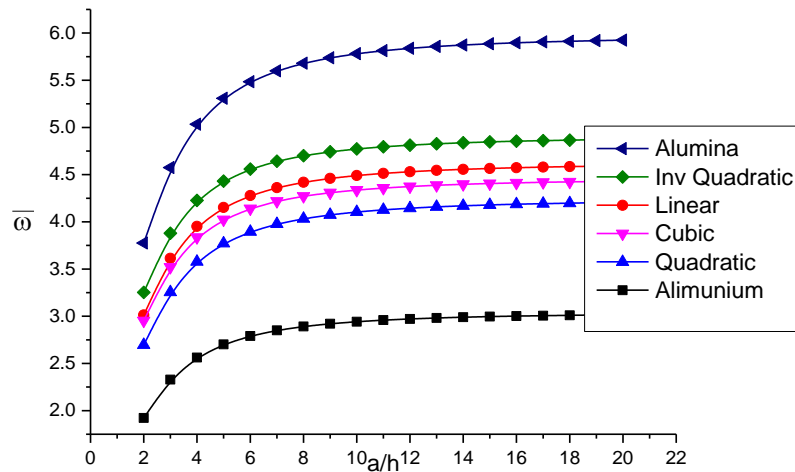
Dans le tableau 10, pour vérifier les "modes d'ordre élevée" pour les plaques FG, les trois premières fréquences des plaques carrées FG du Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sont calculées et comparées aux théories de déformation de cisaillement quasi-3D de Matsunaga (2008) et d'Akavci et Tanrikulu (2015). Comme il est observé à partir du tableau, les modèles présentes sont en bon accord avec ceux donnés par les autres modèles quasi-3D de Matsunaga (2008) et Akavci et Tanrikulu (2015), en particulier aux « modes de vibration les plus élevés ». Il est observé à partir des tableaux que lorsque les effets de l'étirement en épaisseur sont négligés, les fréquences naturelles des plaques FG se trouvent réduites.

Le tableau 11 montre les fréquences fondamentales non-dimensionnelles des plaques carrées FG Al/ZrO<sub>2</sub>. Afin de comparer les résultats, nous utilisons le schéma de Mori-Tanaka pour décrire les caractéristiques matérielles de la plaque FG qui est donnée par Mori et Tanaka (1973), Benveniste (1987). Les résultats du modèle présent sont comparés aux résultats des

HSDT quasi-3D de Matsunaga (2008), Neves et al. (2012a), Alijani and Amabili (2014), Solution exacte 3D de Vel et Batra (2004) et et HSDT 3D d'Akavci et Tanrikulu (2015). On peut observer à partir du tableau 11 que les résultats calculés de sont en bon accord avec les résultats d'autres modèles quasi-3D. La petite différence entre les résultats HSDT 2D et quasi-3D présentes est due à la négligence de l'influence de l'étirement de l'épaisseur.

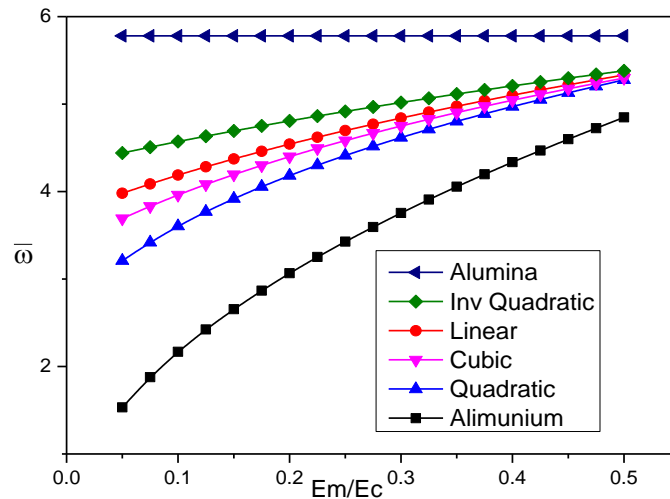


**Figure IV-5 :** Variation du fréquences fondamental adimensionnel  $\bar{\omega}$  pour les plaques métalliques, céramiques et FGM par rapport au rapport géométrique ( $a/b$ ) avec tous les profils de composition.



**Figure IV-6 :** Variation du fréquences fondamental adimensionnel  $\bar{\omega}$  pour les plaques métalliques, céramiques et FGM par rapport au rapport géométrique ( $a/h$ ) avec tous les profils de composition

Les variations de fréquence fondamentale  $\bar{\omega}$  de plaques FG en aluminium-alumine pour différents paramètres géométriques et la fraction volumique  $V_c$  sont présentés dans les Fig. 5 et 6. Dans les Fig. 2 et 3, il est évident que la variation de  $\bar{\omega}$  des plaques FG est inférieure à celle de la plaque entièrement céramique (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) mais supérieure à celle de la plaque entièrement métallique (Al). La variation de  $\bar{\omega}$  déterminé à partir du profil de composition quadratique est inférieur aux cas linéaires, cubiques et quadratiques inverses. Dans tous les cas importants, la variation de  $\bar{\omega}$  augmente lorsque les rapports géométriques  $a/b$  et  $a/h$  augmentent. L'effet des rapports de modules  $E_m / E_c$  sur la variation de  $\bar{\omega}$  est présenté sur la figure 7 ( $a/h = 10$ ). Il est clair qu'avec l'augmentation  $E_m / E_c$  de 0,05 à 0,5, les fréquences  $\bar{\omega}$  augmentent régulièrement.



**Figure IV-7 :** L'effet de l'anisotropie du matériau sur la base non dimensionnelle  $\bar{\omega}$  d'une plaque FGM avec différents profils de composition.

#### **IV.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale du comportement mécanique de la flexion et de la vibration libre des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D.

Le nombre d'inconnus dans la présente théorie est seulement cinq par rapport à plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement à ordre élevé (HSDT).

La théorie considère la déformation du cisaillement et les effets d'étirement de l'épaisseur de la plaque sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre sont obtenues par l'application de principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant la méthode de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

Les résultats numériques de l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevée quasi-3D

*Chapitre V*

***ETUDE DE LA REPONSE DYNAMIQUE DES MICROPLAQUES EN FGM***



## V.1. Introduction

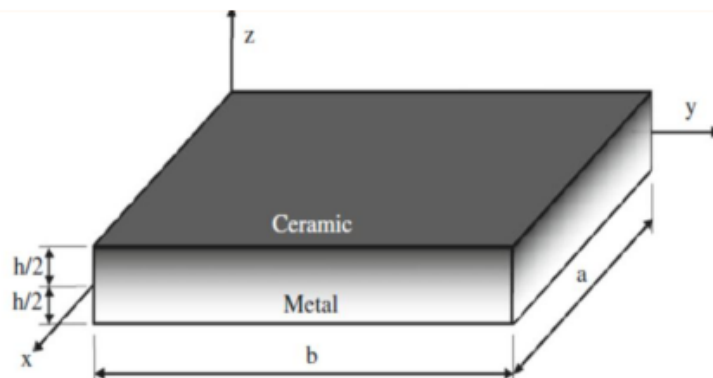
La vibration des micros structures à une grande importance dans le domaine de la nanotechnologie. Comprendre le comportement de vibration de micros structures est l'étape clé pour de nombreux problèmes. Dans cette partie, la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées (FGM) à l'échelle micros métrique est étudiée en utilisant une nouvelle théorie basée sur l'intégration. La partition du déplacement transverse en flexion et en cisaillement mène à réduire le nombre des inconnues ce qui rend la nouvelle théorie simple à utiliser. L'effet d'échelle est pris en considération en utilisant les relations constitutives d'Eringen.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement vibratoire libre des microplaques en matériaux à gradient de propriétés FGM. Le modèle ainsi choisit est basé sur le modèle en intégrale de déformation en cisaillement avec la prise en compte de l'effet d'échelle. Les effets du paramètre non local, le rapport des dimensions sur la réponse en vibration libre des microplaques fonctionnellement graduées sont discutés. Quelques exemples illustratifs sont ainsi présentés pour vérifier la présente formulation et ses solutions.

## V.2. Représentation de la micro plaque utilisée

La figure. V.1 montre une micro plaque fonctionnellement graduée de longueur  $a$ , largeur  $b$ , et d'une épaisseur  $h$ .

Le matériau supposé à la surface supérieure de la plaque ( $z = +h / 2$ ) est constituer céramique pur, qui varie graduellement en métal à la surface inférieure de la plaque ( $z = -h / 2$ ) selon une loi de distribution puissance.



**Figure V-1** : présentation schématique d'une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée.

En appliquant l'homogénéisation de Mori-Tanaka, le module effectif d'ampleur ( $K$ ) et le module effectif de cisaillement ( $G$ ) sont donnés par (Belabed et al, 2014; Valizadeh et al, 2013; Cheng and Batra, 2009; Qian et al, 2004):

$$\frac{K - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{3(K_c - K_m)}{3K_m + 4G_m}} \quad \text{V.1.a}$$

$$\frac{G - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{(G_c - G_m)}{G_m + f_1}} \quad \text{V.1.b}$$

$$\text{Avec : } f_1 = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \quad \text{V.1.c}$$

$V_i$  ( $i = c, m$ ) est la fraction volumique de la phase matérielle. Les indices  $c$  et  $m$  réfèrent respectivement à la phase céramique et métal. Les fractions volumiques des phases céramique et métal sont reliées par :  $V_c + V_m = 1$  est  $V_c$  exprimé par :

$$V_c(z) = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^n \quad \text{V.2}$$

Tel que  $n$  dans l'équation (V.2) représente l'indice matériel.

Le module de Young effectif  $E$  et le coefficient de poisson  $\nu$  peuvent être calculés à partir des expressions :

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad \text{V.3}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad \text{V.4}$$

La densité effective  $\rho$  est donnée par la loi de mélange par (Natarajan et al., 2011 ; Benachour et al., 2011; Bessaim et al., 2013; Yaghoobi et al., 2013; Tounsi et al., 2013d; Ould Larbi et al, 2013; Bouremana et al, 2013; Hebali et al, 2014):

$$\rho = \rho_c V_c + \rho_m V_m \quad \text{V.5}$$

### V.3. Revue sur la théorie d'élasticité non locale

Selon Eringen (1972, 1983), le champ des contraintes en un point  $x$  dans un milieu élastique continu ne dépend pas uniquement du champ de déformation à ce point, mais aussi de la déformation dans tous les autres points du milieu continu. Eringen a appliqué cette hypothèse dans la théorie atomique dynamique et expérimentale de la dispersion des phonons. En effet, les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma$  en un point  $x$  sont exprimées par :

$$\sigma = \int \alpha(|x^i - x|, \tau)(x^i) dx^i \quad \mathbf{V.6}$$

$t(x)$  représente les composantes du tenseur classique macroscopique à un point  $x$ , et la fonction du noyau  $\alpha(|x^i - x|, \tau)$  représente le module non local,  $|x^i - x|$  est la distance selon la norme Euclidienne) et  $\tau$  est la constante matérielle, elle dépend de la caractéristique de la longueur interne et externe. Eringen (1972, 1983) a déterminé numériquement la forme fonctionnelle du noyau. A travers un choix approprié de la fonction noyau, Eringen (1983) a montré que l'équation constitutive non locale donnée sous la forme intégrale (voir équation (V.6)) peut être représentée sous une forme différentielle équivalente par :

$$(1 - \tau^2 L^2 \nabla^2) \sigma = t \quad \mathbf{V.7.a}$$

$$\tau^2 = \frac{\mu}{L^2} = \left( \frac{e_0 \bar{a}}{L} \right)^2 \quad \mathbf{V.7.b}$$

$\mu = e_0 \bar{a}$ ,  $e_0$  est une constante matérielle,  $\bar{a}$  et  $L$  sont respectivement la caractéristique de la longueur interne et externe.

#### **V.4. La théorie de déformation hyperbolique pour les plaques:**

L'effet non local est ignoré dans la plupart des travaux des recherches en génie civil, car étant donné que les structures sont en général macroscopiques. Cette hypothèse est non imprécise, en particulier pour les utilisations microstructure dans les renforcements des ouvrages. Dans qu'il va suivre on palliera les thèmes de recherche développées par plusieurs auteurs. Mohammadimehr et Alimirzaei (2016) ont analysé les réponses statiques et dynamiques de poutres composites imparfaites renforcées par des FG-SWCNT (nanotubes de carbone mono parois à grades fonctionnels). De plus, Mohammadimehr et Alimirzaei (2017) ont étudié la stabilité et le comportement dynamique d'un microfaisceau en composite renforcé par des nanotubes de carbone FG-CNTRC (FG-CNTRC) soumis à un champ magnétique en utilisant la théorie du gradient de contrainte modifiée. Les formulations de Reddy. Karami et al. (2018) ont discuté de la propagation des ondes dans les nano-plaques en FGM sous champ magnétique dans le plan en se basant sur la "théorie du gradient de contrainte non locale" et de la "théorie des plaques raffinées à quatre variables". Kolahchi et al. (2017) ont étudié la propagation des ondes de « plaques sandwich renforcées FG-CNT » viscoélastiques intégrées avec capteur et actionneur à l'aide d'une « théorie de zigzag raffinée ». Sur la base de la méthode étendue de Kantorovich (EKM) et de la CPT (théorie des plaques classique), Rajabi et

Mohammadimehr (2019) ont étudié le comportement en flexion d'une plaque oblique micro sandwich renforcée par des CNT (nanotube de carbone).

Dans cette partie, un nouveau modèle de déformation de cisaillement hyperbolique est présenté pour l'étude des vibrations libres des plaques FGM sous l'effet non local. Le présent est présenté dans le chapitre (VI). Les propriétés des matériaux de la plaque FG sont supposées varier continuellement dans l'épaisseur de la plaque en considérant une fonction de loi de puissance.

#### V.4.1. Cinématique de déplacement et de déformation :

Sur la base du modèle de plaque épaisse présenté dans le chapitre IV. en particulier les relation (IV.10) - (IV.16) , le champ de déplacement suivant pour les plaque :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad \text{V.8.a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad \text{V.8.b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z) \varphi(x, y, t) \quad \text{V.8.c}$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  et  $\theta$  sont les quatre variables de déplacement inconnues de la surface médiane de la plaque. Les constantes  $k_1$  et  $k_2$  dépendent de la géométrie.

Dans cette étude, la fonction de forme de déformation de cisaillement est (Akavci et Tanrikulu 2015) :

$$f(z) = 3.7 z (1.27 \operatorname{sech}^{0.65}(z/h) - 1) \quad \text{V.8.d}$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement cité dans le système d'équation (8) est exprimé par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad \text{V.9.a}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{V.9.b}$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad \text{V.9.c}$$

Tel que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{V.10.a}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{V.10.b}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad \text{V.10.c}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{V.10.d}$$

$$\varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad \text{V.10.e}$$

Et :

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad \text{V.10.f}$$

#### V.4.2. Les relations contraintes déformations

L'équation constitutive bidimensionnelle des micros et nano plaques élastiques fonctionnellement graduées peuvent être exprimées par la relation (V.7) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{V.11}$$

En introduisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (V.4), les coefficients de rigidité

C<sub>ij</sub>, sont exprimés comme suit :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \text{V.11.a}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \text{V.11.b}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad \text{V.11.c}$$

### V.5. Équations d'équilibre des micros plaques

Le principe de Hamilton est utilisé afin d'extraire les équations du mouvement. La forme analytique de ce principe est donnée par (Reddy, 2007) :

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta K) dt \quad \text{V.12}$$

$\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation,  $\delta V_p$  est la variation de l'énergie cinétique.

Les équations du mouvement peuvent être obtenues à partir de la relation (V.12) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \theta$  :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + q &= I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\phi} + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla \ddot{w}_0 + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 (k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}) \\ &\quad + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}) - K_2 ((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\ \delta \varphi_z : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z &= J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\phi}_z \end{aligned} \quad \text{V.13}$$

Les résultantes des contraintes et des moments apparaissant dans l'équation (V.14) sont données par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \quad \text{V.14.a}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{V.14.b}$$

Où les composantes de rigidité et les inerties sont données par :

$$(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, g^2(z), z, z^2, f(z), z, f(z), f^2(z)) dz \quad \text{V.15.a}$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) Q_{ij} dz \quad \text{V.15.b}$$

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_0, K_0, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g, g^2, f^2) \rho(z) dz \quad \text{V.15.c}$$

## V.6. La solution exacte pour les microplaques fonctionnellement graduées simplement appuyées:

Les plaques rectangulaires sont généralement classifiées selon leur type d'appui utilisé. Ici, on est concerné par les solutions exactes des équations (V.13) pour une microplaque simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées sur quatre cotés:

$$v_0 = w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{pour } x = 0, a \quad \text{V.16.a}$$

$$u_0 = w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{pour } y = 0, b \quad \text{V.16.b}$$

La solution de Navier définie ci-dessous satisfait les conditions aux limites des équations (V.16) :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Y_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad \text{V.17}$$

$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$  et  $Y_{mn}$  sont les amplitudes,  $\omega$  est la fréquence associée avec (m,n) éme mode.

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b$$

Substituant les équations (V.17) dans les équations (V.13), les solutions analytiques sont obtenues sous la forme suivante :

$$\left( \left( 1 - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{V.18}$$

Avec:

$$S_{11} = -(\alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66})$$

$$S_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66})$$

$$S_{13} = +\alpha^3 B_{11} + \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66})$$

$$S_{14} = +\alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) - \alpha\beta^2 B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')$$

$$S_{15} = \alpha X_{13}$$

$$S_{22} = -(\alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22})$$

$$S_{23} = +\alpha^2 \beta (B_{12} + 2B_{66}) + \beta^3 B_{22} \quad \text{V.19}$$

$$S_{24} = +\beta(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) + \alpha^2 \beta (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s$$

$$S_{25} = \beta X_{23}$$

$$S_{33} = -(\alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}))$$

$$S_{34} = -(\alpha^2 k_1 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + \beta^2 k_2 D_{22}^s - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s)$$



$$S_{35} = -(\alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23})$$

$$S_{44} = (-k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s + \alpha^2 (k_1 A')^2 A_{55}^s + \beta^2 (k_2 B')^2 A_{44}^s)$$

$$S_{45} = -(k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s + \alpha^2 k_1 A' A_{55}^s + \beta^2 k_2 B' A_{44}^s)$$

$$S_{55} = -(\alpha^2 A_{55}^s + \beta^2 A_{44}^s + Z_{33})$$

Et

$$m_{11} = -I_0, \quad m_{12} = 0, \quad m_{13} = \alpha I_1, \quad m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha, \quad m_{15} = 0,$$

$$m_{22} = -I_0, \quad m_{23} = \beta I_1, \quad m_{24} = -k_2 B' \beta J_1, \quad m_{25} = 0,$$

$$m_{33} = -(I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)), \quad m_{34} = J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \quad m_{35} = -J_0,$$

$$m_{44} = K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2), \quad m_{55} = -K_0,$$

V.20

### V.7. Effet des dimensions de la nano- plaque sur le mode fondamental :

L'analyse de la vibration libre est effectuée en considérant que la surface supérieure de la plaque est purement céramique ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ ) et sa surface inférieure est purement métal (SUS304). La densité  $\rho$  et le module de Young  $E$  sont:  $\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_c = 348.43 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  pour  $\text{Si}_3\text{N}_4$  et  $\rho_m = 8166 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_m = 201.04 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  pour SUS304. Le coefficient de poisson  $\nu$  est considéré constant, est pris égal à 0.3.

Dans tous les cas, on présente la fréquence non dimensionnelle définie par :

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}}$$

V.21

$\bar{\omega}$  est la fréquence naturelle,  $\rho_c$  et  $G_c$  sont respectivement la densité et le module de cisaillement de la phase en céramique.

Dans l'ordre de valider le présent modèle, quelques exemples numériques sont présentés pour prouver sa performance dans l'analyse de la vibration libre. Dans ce but, on commence en premier lieu par étudier les plaques simplement appuyées pour des différentes valeurs du paramètre non local, de l'épaisseur de la plaque et du rapport des dimensions de la plaque.

**Tableau V-1** : Comparaison des fréquences fondamentales  $\left(\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}}\right)$  des microplaques  
 $(a = 10, E = 30 \times 10^6, \rho = 1, \nu = 0.3)$

$a/b$	$a/h$	$\mu$	présent	TSDT	FSTD	CPT
1	10	0	0.0930	0.0935	0.0930	0.0963
		1	0.0850	0.0854	0.0850	0.0880
		2	0.0788	0.0791	0.0788	0.0816
		3	0.0737	0.0741	0.0737	0.0763
		4	0.0695	0.0699	0.0696	0.0720
	5	0.0660	0.0663	0.0660	0.0683	
	20	0	0.0239	0.0239	0.0239	0.0241
		1	0.0218	0.0218	0.0218	0.0220
		2	0.0202	0.0202	0.0202	0.0204
		3	0.0189	0.0189	0.0189	0.0191
4		0.0178	0.0179	0.0178	0.0180	
5	0.0169	0.0170	0.0169	0.0171		
2	10	0	0.0589	0.0591	0.0589	0.0602
		1	0.0556	0.0557	0.0556	0.0568
		2	0.0527	0.0529	0.0527	0.0539
		3	0.0503	0.0505	0.0503	0.0514
		4	0.0482	0.0483	0.0482	0.0493
	5	0.0463	0.0464	0.0463	0.0473	
	20	0	0.0150	0.0150	0.0150	0.0150
		1	0.0141	0.0141	0.0141	0.0142
		2	0.0134	0.0134	0.0134	0.0135
		3	0.0128	0.0128	0.0128	0.0129
4		0.0122	0.0123	0.0123	0.0123	
5	0.0118	0.0118	0.0118	0.0118		

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau V.1 et sont comparés avec ceux obtenus à partir de la théorie du troisième ordre (TSDT), la théorie du premier ordre (FSTD) et la théorie classique des plaques (CPT) développée par Aghababaei and Reddy (2009). Les résultats numériques de la présente théorie ont une bonne concordance avec les résultats des autres théories citées précédemment. Il est à préciser que le présent modèle à uniquement quatre variables, tandis que le nombre des inconnues dans la FSTD (Thai et al, 2012) et la TSDT (Aghababaei and Reddy, 2009) est cinq.

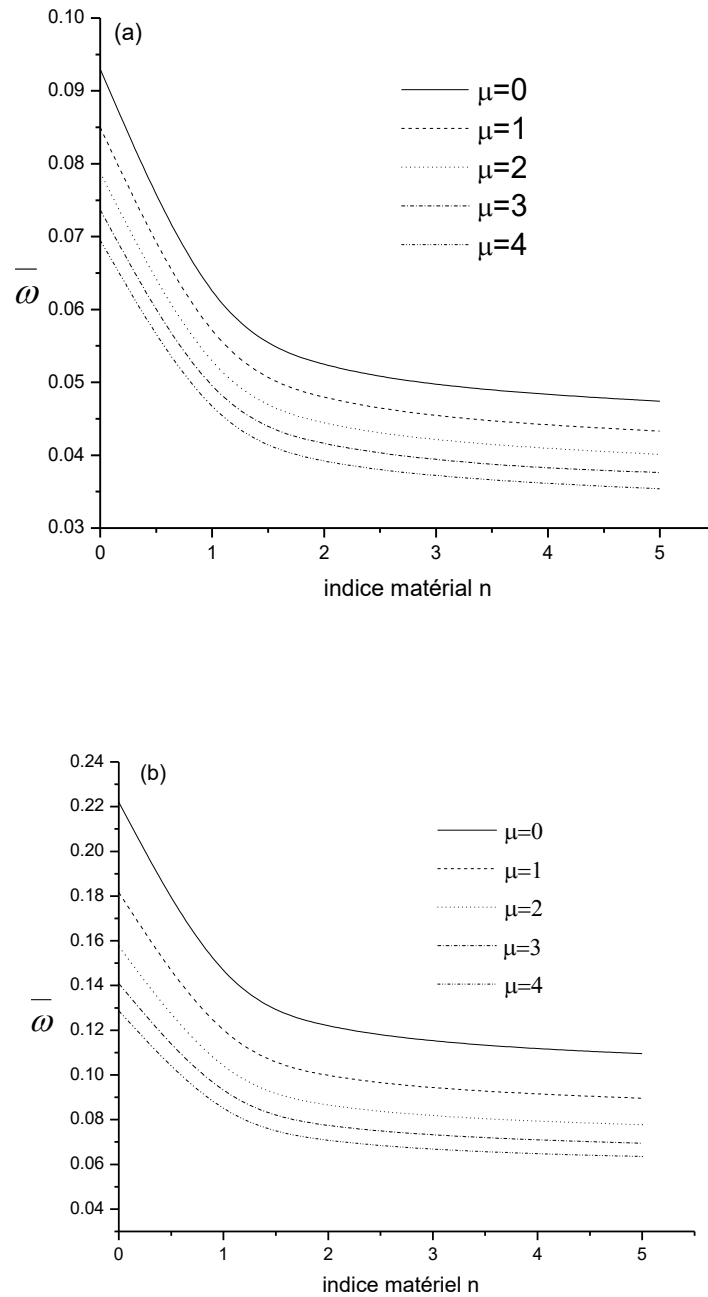
Ainsi, la présente théorie n'utilise pas des facteurs de correction du cisaillement comme le cas de la FSTD. On peut aussi conclure que la théorie locale d'élasticité surestime la fréquence naturelle par rapport à la théorie non locale d'élasticité.

**Tableau V-2 :** Comparaison des fréquences naturelles des microplaques fonctionnellement graduées ( $a=10, n=5$ ) :

$a/b$	$a/h$	$\mu$	Mode 1		Mode 2		Mode 3	
			présent	Natarajan et al. (2012)	présent	Natarajan et al. (2012)	présent	Natarajan et al. (2012)
1	10	0	0.0474	0.0441	0.1041	0.1051	0.1940	0.1051
		1	0.0433	0.0403	0.0852	0.0860	0.1376	0.0860
		2	0.0401	0.0374	0.0738	0.0745	0.1125	0.0746
		4	0.0354	0.0330	0.0604	0.0609	0.0872	0.0610
	20	0	0.0110	0.0113	0.0277	0.0278	0.0542	0.0279
		1	0.0102	0.0103	0.0227	0.0228	0.0385	0.0228
		2	0.0095	0.0096	0.0197	0.0197	0.0314	0.0198
		4	0.0085	0.0085	0.0161	0.0161	0.0244	0.0162
2	10	0	0.1056	0.1055	0.1594	0.0278	0.2431	0.0279
		1	0.0866	0.0863	0.1192	0.0228	0.1609	0.1637
		2	0.0747	0.0748	0.0993	0.0197	0.1287	0.1310
		4	0.0615	0.0612	0.0782	0.0161	0.0982	0.0999
	20	0	0.0278	0.0279	0.0437	0.0440	0.0696	0.0701
		1	0.0229	0.0229	0.0327	0.0329	0.0461	0.0464
		2	0.0196	0.0198	0.0272	0.0274	0.0368	0.0371
		4	0.0161	0.0162	0.0215	0.0216	0.0281	0.0283

La deuxième comparaison est faite sur des plaques fonctionnellement graduées ( $n=5$ ) avec différentes valeurs du paramètre non local, de l'épaisseur de la plaque et du rapport des dimensions de la plaque. Les fréquences naturelles obtenues en appliquant la présente théorie sont comparées avec celles obtenues par Natarajan et al (2012) dans le tableau V.2.

Des résultats presque identiques sont aussi remarqués pour toutes les formulations. La seule différence est dans le cas des fréquences du mode (1,3) qui ne coïncident pas avec celles du mode (1,2) des plaques rectangulaires.



**Figure V-2 :** Effet de l'indice matériel ( $n$ ) et du paramètre non local ( $\mu$ ) sur le rapport des fréquences d'une plaque carrée fonctionnellement graduée simplement appuyée ( $a/h=10$ )(a) premier mode; (b) deuxième mode)

La figure (V.2) montre l'effet de l'indice matériel  $n$  sur les deux premiers modes de la fréquence d'une microplaque fonctionnellement graduée pour différentes valeurs du paramètre

d'échelle avec  $a/h = 10$ . On observe que le rapport des fréquences décroît lorsque l'indice matériel  $n$  augmente, ceci est dû au fait que l'accroissement de cet indice produit un décroissement de la rigidité de la plaque fonctionnellement graduée. Les réponses varient brusquement lorsque  $0 < n < 2$  mais lorsque de  $n > 2$  toutes les courbes deviennent stables.

## V.8. Conclusion

Dans ce chapitre, la vibration libre des nano plaques fonctionnellement graduées est étudiée en employant un nouveau modèle des microplaques à la base des relations constitutives différentielles non locales d'Eringen. En décomposant le déplacement vertical en flexion et en termes d'intégrale de cisaillement, le nombre des inconnues et les équations du présent modèle est réduit à quatre au lieu de cinq. L'influence du paramètre d'échelle, du rapport des dimensions, et de la composition matérielle sur la réponse à la vibration des microplaques fonctionnellement graduées sont discutées. Les résultats numériques prouvent que l'effet d'échelle joue un rôle considérable sur la vibration des nano plaques fonctionnellement graduées. Le nouveau modèle non local des plaques sous-estime les fréquences par rapport au modèle local (classique) des plaques. Par conséquent, l'effet non local doit être considéré dans l'analyse et la modélisation du comportement dynamique des nanostructures. Ainsi, on a prouvé que l'indice matériel a une grande influence sur le comportement des nano plaques fonctionnellement graduées, et les réponses sont contrôlées en utilisant des valeurs propres de l'indice matériel.

## ***CONCLUSION GÉNÉRALE***

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D est présentée pour analyser l'influence de la composition du matériau sur la flexion et la réponse dynamique des plaques FG. Le modèle actuel prend en compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur et ne contient que cinq variables inconnues. La présente théorie a une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales sans introduire le facteur de correction de cisaillement. La progression des propriétés des matériaux au niveau de l'épaisseur est considérée comme étant de divers types de fonctions de loi de puissance (linéaire, quadratique, cubique et quadratique inverse) et des comparaisons sont effectuées avec des plaques homogènes en métal et en céramique. On remarque que le comportement de base des plaques FG qui correspondent à des propriétés intermédiaires à celles du métal et de la céramique, se situe nécessairement entre celui de la céramique et du métal. En conclusion, on peut observer que les gradients de propriétés des matériaux jouent un rôle considérable dans la détermination de la réponse des plaques FG, et le HSDT quasi-3D proposé est précis et simple pour résoudre les réponses dynamiques et la flexion et des plaques FG. Une amélioration de la formulation actuelle sera envisagée dans les futurs travaux pour considérer d'autres types de matériaux (Ghorbanpour Arani et al. 2011, Fadoun et al. 2017, Daouadji 2017, Mohammadimehr et Mehrabi 2017, Panjehpour et al. 2018, Hussain et Naeem 2019, Kiani et Mirzaei 2019, Selmi 2019, Akbaş 2019 et 2020, Civalek et Avcar 2020, She 2020 Rabia et al. 2020, Bensattalah et al. 2019ab et 2020).

On a pu comparer le nouveau modèle de déformation en cisaillement d'une micro plaque simplement appuyée sur ses quatre cotés avec d'autres modèles validés. On peut conclure qu'avec la prise en compte de l'effet d'échelle, cette théorie est non seulement précise, mais fournit aussi une approche facilement réalisable pour la simulation du comportement vibratoire des structures en matériaux à gradient de propriété (FGM), en plus elle améliore le calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en microplaques, en raison de la réduction du nombre d'inconnues.

## ***RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES***



## Références bibliographiques

- (A. Bishop et al, 1993) A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- (Ait Atmane H., 2010) Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A, “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121(2010).
- (Akavci, Tanrikulu, 2015) Akavci, S.S, Tanrikulu, A.H., “Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories”, *Composites Part B*, 83, 203-215.<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.08.043>.
- (Akbaş, 2018) Akbaş, Ş. D., “Forced vibration analysis of cracked functionally graded microbeams”, *Advances in Nano Research*, 6 (1), 39-55. <https://doi.org/10.12989/anr.2018.6.1.039>.
- (Akbaş, 2019) Akbaş, Ş. D., “Nonlinear behavior of fiber reinforced cracked composite beams”, *Steel and Composite Structures*, 30(4), 327–336. <https://doi.org/10.12989/SCS.2019.30.4.327> .
- (Akbaş, 2020) Akbaş, Ş. D., “Dynamic responses of laminated beams under a moving load in thermal environment”, *Steel and Composite Structures*, 35(6), 729–737. <https://doi.org/10.12989/SCS.2020.35.6.729> .
- (Aldousari, 2017) Aldousari, S.M., "Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam", *Appl. Phys.A*, 123, 296.DOI: 10.1007/s00339-017-0854-0.
- (Alijani, Amabili, 2014) Alijani, F, Amabili, M., "Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates", *Compos Struct*, 113, 89-107.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.03.006>.
- (Allix 1989). O. Allix. Modélisation du comportement des composites stratifiés: application à L'analyse du délaminage. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- (AlSaid-Alwan, Avcar, 2020) AlSaid-Alwan, H. H. S., & Avcar, M., “Analytical solution of free vibration of FG beam utilizing different types of beam theories: A comparative study”, *Computers and Concrete*, 26(3), 285-292. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/cac.2020.26.3.285> .
- (Asiri, Akbaş, Eltaher, 2020) Asiri, S. A., Akbaş, Ş. D., & Eltaher, M. A., “Damped dynamic responses of a layered functionally graded thick beam under a pulse load”, *Structural Engineering and Mechanics*, 75 (6), 713–722. <https://doi.org/10.12989/SEM.2020.75.6.713> .

- (Avcar, 2019) Avcar, M., "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603-615. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.6.603>.
- (Batou, et al. (2019) Batou, B., Nebab, M., Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bouremana, M., "Wave dispersion properties in imperfect sigmoid plates using various HSDTs", *Steel and Composite Structures*. 33(5), 699-716. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.33.5.699> .
- (Belabed et al. 2014) Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O., "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos.: Part B*, 60, 274-283(2014).
- (Bennoun et al. 2016) Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A., "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431(2016).
- (Bensattalah, et al. 2010), Bensattalah, T., Hamidi, A., Bouakkaz, K., Zidour, M., & Daouadji, T. H. (2020), "Critical Buckling Load of Triple-Walled Carbon Nanotube Based on Nonlocal Elasticity Theory", *Journal of Nano Research.*, 62, 108-119. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/JNanoR.62.108> .
- (Bensattalah, et al. 2019), Bensattalah, T., Zidour, M., Daouadji, T. H., & Bouakaz, K., "Theoretical analysis of chirality and scale effects on critical buckling load of zigzag triple walled carbon nanotubes under axial compression embedded in polymeric matrix", *Structural Engineering and Mechanics*, 70(3), 269-277. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2019.70.3.269> .
- (Bensattalah, et al. 2019a), Bensattalah, T., Bouakkaz, K., Zidour, M., & Daouadji, T. H. "Critical buckling loads of carbon nanotube embedded in Kerr's medium", *Advances in Nano Research*, 6(4), 339. DOI: <https://doi.org/10.12989/anr.2018.6.4.339> .
- (Benveniste, 1987) Benveniste, Y., "A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials", *Mech Mater*, 6(2), 147-157. [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(87\)90005-6](https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90005-6).
- (Boch et al, 1986) P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 ( 8):191-192,1986.
- (C. Baron et S. Naili, 2008) C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- (Carrera, 2000) Carrera E.. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- (Carrera, et al. 2011) Carrera, E, Brischetto, S, Cinefra, M, Soave, M., "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells", *Compos Part B*, 42(2), 123-133. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2010.10.005>.

- (Chabot, 1997) Chabot A, . Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhDthesis, ENPC, 1997.
- (Chi . Shyang-ho et Chung Yen-Ling, 2003) Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- (Cho 2000) Y.B. Cho & R.C. Averill. First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels. *Composite Structures*, vol. 50, pages 1,15, 2000.
- (Civalek, Avcar, 2020) Civalek, Ö., & Avcar, M., “Free vibration and buckling analyses of CNT reinforced laminated non-rectangular plates by discrete singular convolution method”, *Engineering with Computers*, 1-33. <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01168-8> .
- (Daouadji, 2017) Daouadji, T.H., “Analytical and numerical modeling of interfacial stresses in beams bonded with a thin plate”, *Advances in Computational Design*, 2(1), 57-69. <https://doi.org/10.12989/acd.2017.2.1.057>.
- (Delale, Erdogan, 1983) Delale, F, Erdogan, F., "The crack problem for a nonhomogeneous plane", *ASME J ApplMech*, 50, 609-614. <https://doi.org/10.1115/1.3167098>.
- (Desai 2003) Y.M. Desai, G.S. Ramtekkar & A.H. Shah. Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model. *Composite Structures*, vol. 59, pages 237,249, 2003.
- (Di Sciuva, 1987). Di Sciuva M, An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- (E. Reissner, 1945) Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 1945; 12(2):69-72.
- (F.B. Hildebrand. et E. Reissner., 1949) F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.
- (Fadoun, et al. 2017) Fadoun, O.O., Borokinni, A. S., Layeni, O. P., Akinola, A.P., “Dynamics analysis of a transversely isotropic non-classical thin plate”, *Wind and Structure*, 25(1), 25-38. <https://doi.org/10.12989/was.2017.25.1.025>.
- (Faleh, Ahmed, Fenjan, 2018) Faleh, N.M., Ahmed, R.A., Fenjan, R.M., "On vibrations of porous FG nanoshells", *International Journal of Engineering Science*, 133, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.08.007>.
- (Filippi, Carrera, Zenkour, 2015) Filippi, M, Carrera, E, Zenkour, AM., "Static analyses of FGM beams by various theories and finite elements", *Compos Part B*, 72, 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.12.004>.
- (Fredrichs 1961) K.O. Fredrichs & R.F. Dressler. A boundary layer theory for elastic plates. *Comm. on Pure Applied Mathematics*, vol. 14, pages 1-33, 1961.

- (G. Bao et al, 1995) G. Bao, L. Wang, *International Journal of Solids and Structure* 32 (1995), 2853–2871.
- (Gafour, et al. 2020) Gafour, Y., Hamidi, A., Benahmed, A., Zidour, M., & Bensattalah, T.**, “Porosity-dependent free vibration analysis of FG nanobeam using non-local shear deformation and energy principle”, *Advances in nano research*, 8(1), 37-47. DOI: <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.1.037> .
- (Ganapathi 1997)M. Ganapathi & M. Touratier.** A study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-exible finite element. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 28, pages 115,135, 1997.
- (Ghandourah, Abdraboh, 2020) Ghandourah, E.E. and Abdraboh, A.M.**, “Dynamic analysis of functionally graded nonlocal nanobeam with different porosity models”, *Steel and Composite Structures.*, 36(3), 293-305. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2020.36.3.293> .
- (Ghorbanpour et al. 2011) Ghorbanpour Arani, A., Hashemian, M., Loghman, A. and Mohammadimehr, M.**, “Study of dynamic stability of the double-walled carbon nanotube under axial loading embedded in an elastic medium by the energy method”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 52(5), 815–824. doi:10.1134/s0021894411050178 .
- (H. Okamura, 1991) H. Okamura**, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- (H.D. Steffens et al, 1990) H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel**, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- (Hadji, 2020) Hadji, L.,,** “Vibration analysis of FGM beam: Effect of the micromechanical models”, *Coupled Systems Mechanics*, 9(3), 265-280. <https://doi.org/10.12989/csm.2020.9.3.265> .
- (Hadji, Avcar, 2021a) (Hadji, L., & Avcar, M.**, “Free Vibration Analysis of FG Porous Sandwich Plates under Various Boundary Conditions”, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 7(2), 505-519. DOI: 10.22055/JACM.2020.35328.2628 .
- (Hadji, Avcar, 2021b) (Hadji, L., & Avcar, M.,** “Nonlocal free vibration analysis of porous FG nanobeams using hyperbolic shear deformation beam theory”, *Advances in Nano Research*, 10(3), 281-293. DOI: 10.12989/anr.2021.10.3.281.
- (Hadji, Bernard, 2020) Hadji, L., and Bernard, F.,** “Bending and free vibration analysis of functionally graded beams on elastic foundations with analytical validation”, *Advances in Materials Research, An Int'l Journal*, 9(1), 63-98. <https://doi.org/10.12989/amr.2020.9.1.063> .

- (Hadji, Safa, 2020) Hadji, L., and Safa, A.,** “Bending analysis of softcore and hardcore functionally graded sandwich beams”, *Earthquakes and Structures, An Int'l Journal*, 18(4), 481-492. <https://doi.org/10.12989/eas.2020.18.4.481> .
- (Hamed, et.al. 2020) Hamed, M. A., Abo-bakr R. M., Mohamed, S. A. and Eltaher, M. A.,** “Influence of axial load function and optimization on static stability of sandwich functionally graded beams with porous core”, *Engineering with Computers.*, doi:10.1007/s00366-020-01023-w .
- (Hamed, Sadoun, Eltaher, 2019) Hamed, M. A., Sadoun, A. M. and Eltaher, M. A.,** “Effects of porosity models on static behavior of size dependent functionally graded beam”, *Structural Engineering and Mechanics.*, 71(1), 89–98. <https://doi.org/10.12989/SEM.2019.71.1.089> .
- (Hebali et al. 2014) Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A.,** “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *J. Eng. Mech., ASCE*, 140(2), 374- 383(2014).
- (Hosseini-Hashemi, Fadaee, Atashipour, 2011) Hosseini-Hashemi, SH, Fadaee, M, Atashipour, SR.,** "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed form procedure", *Compos Struct*, 93(2), 722-735.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.08.007>.
- (Hussain, Naeem, 2019) (Hussain, M., Naeem, M.N.,** "Rotating response on the vibrations of functionally graded zigzag and chiral single walled carbon nanotubes", *Applied Mathematical Modelling*, 75, 506-520.<https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.05.039>.
- (Icardi et Bertetto, 1995) Icardi U & A.M. Bertetto.** An evaluation of the influence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. 57, no. 4, pages 555,571, 1995.
- (J. Reddy, 2000) Reddy, J.N.,** "Analysis of functionally graded plates", *Int J Numer Method Eng*, (2000), 47(41–43):663–684.
- (J.N. Reddy 1984) Reddy JN** “A simple higher-order theory for laminated composite plates”. *J Appl Mech*; 51:745–52. 1984.
- (J.N. Reddy, 1997) J.N. Reddy,** *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis.* CRC Press, Boca Raton, 1997.
- (J.N. Reddy, 1999) Reddy J.N,** *Theory and Analysis of Elastic plates.* Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- (J.S. Moya et al, 1992) J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO,** Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- (Jha, Kant, Singh,2013) (Jha, DK, Kant, T, Singh, RK.,** "Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects", *Compos Struct*, 96, 799-823.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.034>.

- (Jin, Paulino, 2001) Jin, Z.-H., Paulino, G.H., "Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material", *International Journal of Fracture*, 107, 73–98. <https://doi.org/10.1023/A:1026583903046>.
- (Jin,, Batra, 1996) (Jin, Z.-H., Batra, R.C., "Stresses intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock", *Journal of Thermal Stresses*, 19, 317–339.DOI:10.1080/01495739608946178.
- (Johnson 1971) M.W. Johnson & O.E. Widera. An asymptotic theory for the vibration of non-homogeneous plates. *Acta. Mech.*, vol. 12, no. 1, pages 131-142, 1971.
- (Kar, Panda, 2015) Kar, V.R. and Panda, S.K. (, "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Structural Engineering and Mechanics*, 53(4), 661-679.<https://doi.org/10.12989/sem.2015.53.4.661>.
- (Karama et al, 1998) Karama M, B. AbouHarb, S. Mistou& S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- (Karami, Shahsavari, Janghorban, 2018) Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., "Wave propagation analysis in functionally graded (FG) nanoplates under in-plane magnetic field based on nonlocal strain gradient theory and four variable refined plate theory", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 25(12), 1047-1057.<https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1323143>.
- (Kassapoglou et Lagace, 1987) Kassapoglou C & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress  $\sigma_{xz}$  in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- (Khare 2004)R.K. Khare, T. Kant & A.K. Garg. Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element. *Composite Structures*, vol. 65, pages 405,418, 2004.
- (Kiani, Mirzaei, 2019) Kiani, Y., & Mirzaei, M., "Isogeometric thermal postbuckling of FG-GPLRC laminated plates", *Steel and Composite Structures*., 32(6), 821–832. <https://doi.org/10.12989/SCS.2019.32.6.821> .
- (Koizumi, 1992) M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, (1992).
- (Koizumi, 1996) Koizumi. M, FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan.
- (Koizumi, 1997). M. Koizumi, FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2): 1– 4. (1997).
- (Kokini, 1990). K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, (1990).
- (Kolahchi, Zarei, Hajmohammad, Nouri, 2017) Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H., Nouri, A., "Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and

- actuator based on refined zigzag theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 130, 534–545. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.06.039>.
- (L. Lostec, 1997) L. Lostec**, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges, 1997.
- (L. Marin, 2005) L. Marin**, "Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials," *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351.
- (Ladeveze 1988) P. Ladeveze**. Les modèles classiques et leurs extension pour le calcul des plaques, volume 2 of *Calcul de Structures et Intelligence Artificielle*. Pluralis, 1988.
- (M. Karama et al, 2003) M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou**, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- (M. Niino et al, 2005) M. Niino, K. Kisara and M. Mori** , "Feasibility study of FGM technology in space solar power systems (SPSS)," *Mater Sci Forum*, vol. 492, pp. 163–168, (2005).
- (M. Touratier, 1991) M. Touratier**, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916, 1991.
- (Mantari et Guedes Soares. 2015) Mantari JL, Soares CG** "A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates". *Acta Mech* 625–642 (2015).
- (Mantari, Soares, 2013) Mantari, JL, Soares, CG.**, "A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates", *Compos Part B*, 45(1), 268-281. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.05.036>.
- (Mantari, Soares, 2014) Mantari, JL, Soares, CG.**, "Static response of advanced composite plates by a new non-polynomial higher-order shear deformation theory", *Int J MechSci*, 78, 60-71. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.10.020>.
- (Mantari, Soares, 2015) Mantari, JL, Soares, CG.**, "A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates", *ActaMech*, 226(3), 625-642. <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1192-3>.
- (Matsunaga, 2008) Matsunaga, H.**, "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Compos Struct*, 82, 499-512. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.01.030>.
- (Matsunaga, 2009) Matsunaga, H.**, "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings", *Compos Struct*, 87, 344-357. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.02.002>.

- (Mindlin, R.D., 1951) Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", ASME J Appl Mech, (1951), 31-38.
- (Mohammadimehr, Alimirzaei, 2016) Mohammadimehr, M. and Alimirzaei, S., "Nonlinear static and vibration analysis of Euler-Bernoulli composite beam model reinforced by FG-SWCNT with initial geometrical imperfection using FEM", Structural Engineering and Mechanics, 59(3), 431-454. <https://doi.org/10.12989/SEM.2016.59.3.431>.
- (Mohammadimehr, Alimirzaei, 2017) Mohammadimehr, M. and Alimirzaei, S., "Buckling and free vibration analysis of tapered FG- CNTRC micro Reddy beam under longitudinal magnetic field using FEM", Smart Structures and Systems, 19(3), 309-322. <https://doi.org/10.12989/SSS.2017.19.3.309>.
- (Mohammadimehr, Mehrabi, 2017) Mohammadimehr, M. and Mehrabi, M., "Stability and free vibration analyses of double-bonded micro composite sandwich cylindrical shells conveying fluid flow", Applied Mathematical Modelling, 47, 685-709. doi:10.1016/j.apm.2017.03.054 .
- (Mohammadimehr, Navi, Arani, 2016b) Mohammadimehr, M., Navi, B. R. and Arani, A. G., "Dynamic stability of modified strain gradient theory sinusoidal viscoelastic piezoelectric polymeric functionally graded single-walled carbon nanotubes reinforced nanocomposite plate considering surface stress and agglomeration effects under hydro-thermo-electro-magneto-mechanical loadings", Mechanics of Advanced Materials and Structures, 24(16), 1325-1342. doi:10.1080/15376494.2016.1227507 .
- (Mohammadimehr, Okhravi, Akhavan Alavi, 2016a) Mohammadimehr, M., Okhravi, S. and Akhavan Alavi, S., "Free vibration analysis of magneto-electro-elastic cylindrical composite panel reinforced by various distributions of CNTs with considering open and closed circuits boundary conditions based on FSDT", Journal of Vibration and Control, 24(8), 1551-1569. doi:10.1177/1077546316664022 .
- (Mori, Tanaka, 1973) (Mori, T, Tanaka, K., "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", ActaMetall, 21(5), 571-574. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3).
- (Nabil Ferguen et al, 2011) Nabil Ferguen, Emmanuel Bellenger, Mohamed Guessasma, Claudia Cogné Christine Pelegris, Christian Courtois, Olivier Rigo, « Matériaux composites alumine/aluminium à 83 gradient de fonction : modélisation numérique pour le calcul de la conductivité thermique effective », 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre ,(2011).
- (Naghdi, 1957) P.M. Naghdi, "On the theory of thin elastic shells". Quarterly Appl. Math, 14: 369-380. (1957).



- (Neves, et al. 2012a) (Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Roque, CMC, Cinefra, M, Jorge, RMN, et al., "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", Compos Part B, 43, 711-725. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.08.009>.
- (Neves, et al. 2012b) (Neves, AMA, Ferreira, AJM, Carrera, E, Cinefra, M, Roque, CMC, Jorge, RMN, et al., "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", Compos Struct, 94(5), 1814-1825. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.12.005>.
- (Nguyen., 2004) Nguyen., Viet.Tung. "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques". Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées. ParisTech, France, 2004.
- (Ossadzow et Touratier, 2001), C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. Composite Structures, vol. 52, pages 85, 95, 2001.
- (Pagano, 1978) Pagano NJ. Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures, vol. 14, page 385, 1978.
- (Panjehpour, Loh, Deepak, 2018) ehpour, M., Loh, E.W.K., Deepak, TJ., "Structural Insulated Panels: State-of-the-Art", Trends in civil Engineering and its architecture, 3(1), 336-340. DOI: 10.32474/TCEIA.2018.03.000151.
- (Pitakthapanaphong, Busso, 2002) Pitakthapanaphong, S., Busso, E.P., "Self-consistent elasto-plastic stress solutions for functionally graded material systems subjected to thermal transients", Journal of Mechanics and Physics of Solids, 50, 695–716. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00105-3](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00105-3).
- (Polit 2002) O. Polit & M. Touratier. A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses. Composite Structures, vol. 58, pages 121,128, 2002.
- (R. E. Mistler, 1973) R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull; 52 (11): 850-854, 1973.
- (Rabia, Hassaine Daouadji Rabahi 2020) Rabia B., Hassaine Daouadji T. and Rabahi A., "Predictions of the maximum plate end stresses of imperfect FRP strengthened RC beams: study and analysis", Advances in Materials Research, 9(4), 265-287. <http://dx.doi.org/10.12989/amr.2020.9.4.265> .
- (Rajabi, Mohammadimehr, 2019) Rajabi, J. and Mohammadimehr, M, "Bending analysis of a micro sandwich skew plate using extended Kantorovich method based on Eshelby-Mori-Tanaka approach", Computers and Concrete, 23(5), 361–376. <https://doi.org/10.12989/CAC.2019.23.5.361>.
- (Raju 1981) I.S. Raju & J.H. Crews. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. Comput. Struct., vol. 14, page 21, 1981.

- (Reddy 1980)**J.N. Reddy. A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pages 1187,1206, 1980.
- (Reddy, 1987)**J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- (Ren, 1986)**Ren J.G. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.
- (S. Matsuo, 2001)** S. Matsuo, F. Watari, and N. Ohata,(2001) "Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root," *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274.
- (S.P. Timoshenko et S.Woinowsky-Krieger, 1959)** S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- (Salah, et al. 2019)** Salah, F., Boucham, B., Bourada, F., Benzair, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., "Investigation of thermal buckling properties of ceramic-metal FGM sandwich plates using 2D integral plate model", *Steel and Composite Structures*, 33(6), 805-822. DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2019.33.6.805>.
- (Selmi, 2019)** Selmi, A., "Effectiveness of SWNT in reducing the crack effect on the dynamic behavior of aluminium alloy", *Advances in Nano Research*, 7(5), 365-377.<https://doi.org/10.12989/anr.2019.7.5.365>.
- (She, 2020)** She, G.L., "Wave propagation of FG polymer composite nanoplates reinforced with GNPs", *Steel and Composite Structures*, 37(1), 27-35. <https://doi.org/10.12989/scs.2020.37.1.027> .
- (Sheikholeslami, Saidi, 2013)** Sheikholeslami, SA, Saidi, AR., "Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory", *Comp Struct*, 106, 350-361.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.016>.
- (Sofiyev, Deniz, Akçay, Yusufoglu, 2006)** Sofiyev, A.H., Deniz, A., Akçay, I.H., Yusufoglu, E., "The vibration and stability of a three-layered conical shell containing an FGM layer subjected to axial compressive load", *ActaMechanica*, 183, 129–144.<https://doi.org/10.1007/s00707-006-0328-5>.
- (Srinivas, 1973)**, Srinivas S. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 30, no. 4, pages 495,507, 1973.
- (Srinivas, JogaRao, Rao, 1970)** Srinivas, S, JogaRao, CV, Rao, AK., "An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates", *J Sound Vib*, 12(2), 187-199.[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(70\)90089-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(70)90089-1).

- (**Tahani et Nosier, 2003**) **Tahani M & A. Nosier.** Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- (**Thai .2014**), **Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK.** “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates”. *Acta Mech*; 225(3):951–64(2014).
- (**Thai et Kim (2013)**) **Thai H.T, S.E. Kim.** A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates, *Compos. Struct.* 99 (2013) 172-180.
- (**Thai, Choi, 2014**) **Thai, HT, Choi, DH.,** "Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates", *Compos Part B*, 56, 705-716.<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.09.008>.
- (**Thai, Kim, 2013**) **Thai, HT, Kim, SE.,** "A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Compos Struct*, 99, 172-180.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.030>.
- (**Vaghefi, Baradaran, Koohkan, 2010**) **Vaghefi, R, Baradaran, GH, Koohkan, H.,** "Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates by using meshless local Petrove-Galerkin (MLPG) method", *Eng Anal Bound Elem*,34, 564-573.DOI: 10.1016/j.enganabound.2010.01.005.
- (**Vel, Batra, 2004**) **Vel, SS, Batra, RC.,** "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J Sound Vib*, 272, 703-730.[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00412-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00412-7).
- (**Whitney, Pagano, 1970**) **Whitney, JM, Pagano, NJ.,** "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", *J ApplMech*, 37(4), 1031-1036.<https://doi.org/10.1115/1.3408654>.
- (**Yin, 1994**) **Yin W.L.** Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- (**Youcef, et al. 2020**) **Youcef, A., Bourada, M., Draiche, K., Boucham, B., Bourada, F., & Addou, F. Y.,** “Bending behaviour of FGM plates via a simple quasi-3D and 2D shear deformation theories”, *Coupled Systems Mechanics.*, 9(3), 237–264. <https://doi.org/10.12989/CSM.2020.9.3.237>.
- (**Yung, Munz, 1996**) **Yung, Y.Y., Munz, D.,** "Stress analysis in a two materials joint with a functionally graded material", *Functional graded materials, Proceedings of the 4th International Symposium on Functionally Graded Materials*, Tsukuba, Japan, 41–46.<https://doi.org/10.1016/B978-044482548-3/50008-1>.
- (**Z. Zhong et T. Yu, 2007**) **Z. Zhong., T. Yu,** Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.

- (Zenkour, 2006) Zenkour, A.M.**, "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates", *Appl Math Modell*, 30, 67-84. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.009>.
- (Zenkour, 2007) Zenkour, AM**, "Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate", *Arch Appl Mech*, 77(4), 197 – 214. (2007).
- (Zenkour, 2007) Zenkour, AM.**, "Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate", *Arch ApplMech*, 77(4), 197-214.<https://doi.org/10.1007/s00419-006-0084-y>.
- (Zenkour, 2013) Zenkour, AM.**, "A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates", *Appl Math Modell*, 37, 9041-9051.<https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.022>.
- (Zhang, Jiang, Zhang, 2014) Zhang, H, Jiang, J-K, Zhang, Z-C.**, "Three-dimensional elasticity solutions for bending of generally supported thick functionally graded plates", *Appl Math Mech*, 35(11), 1467-1478.<https://doi.org/10.1007/s10483-014-1871-7>.
- (Zhao, Lee, Liew, 2009) Zhao, X, Lee, YY, Liew, KM.**, "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", *J Sound Vib*, 319, 918-939.<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.025>.
- (Zhu, Liew, 2011) Zhu, P, Liew, KM.**, "Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Krigingmeshless method", *Compos Struct*, 93(11), 2925-2944.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.05.011>.