

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Djillali Liabes de Sidi Belabbes**

**Faculté des sciences de l'Ingénieur**

**Département de Génie Civil**



# **THÈSE**

**Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat**

**Spécialité Génie Civil**

**Option Structures & Matériaux**

**Par : SAFA Abdelkader**

**Intitulée**

## **ANALYSE DE L'EFFET THERMIQUE SUR LES FREQUENCES DES STRUCTURES NON HOMOGENES EPAISSES**

Soutenue publiquement le .....2021 devant le jury composé de :

<b>TOUNSI Abdelouahed</b>	<b>Pr</b>	<b>Président</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>HADJI Lazreg</b>	<b>MCA</b>	<b>Directeur de thèse</b>	<b>UIK TIARET</b>
<b>BOURADA Mohamed</b>	<b>Pr</b>	<b>Co- Directeur de thèse</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>BENYOUCEF Samir</b>	<b>Pr</b>	<b>Examineur</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>AIT AMAR MEZIANE Mohamed</b>	<b>Pr</b>	<b>Examineur</b>	<b>UIK TIARET</b>
<b>SADOUN Mohamed</b>	<b>MCA</b>	<b>Examineur</b>	<b>U. DE Mascara</b>

Année universitaire 2021/2022

## RESUME

---

L'objectif de ce travail est d'effectuer une analyse de la vibration thermo-élastique des poutres simplement appuyées en matériau FGM en utilisant une théorie raffinée de déformation de cisaillement transverse d'ordre élevé. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Dans cette étude, les propriétés des matériaux de la poutre FGM dépendent de la température et changent progressivement dans la direction de l'épaisseur. Trois cas de distribution de température à travers l'épaisseur de la poutre sont considérés à savoir : uniforme, linéaire et non-linéarité. En se basant sur la présente théorie des poutres raffinées, les équations de mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. La solution analytique est obtenue en utilisant la méthode de Navier. Des résultats numériques sont présentés pour étudier les effets de distribution de la température, l'indice matérielle, les moments thermiques et les rapports d'élançement sur les fréquences propres de vibration de la poutre FGM. La précision des solutions présentes est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec les solutions existantes dans la littérature.

**Mots clés :** Vibration thermo-élastique; Matériaux FGM; Principe d'Hamilton; Solution Navier.

## Abstract

---

The objective of this work is to perform a thermo-elastic vibration analysis of simply supported beams of FGM material using a refined shear deformation theory. The theory takes into account the effects of transverse shear and parabolic distribution of shear stresses along the thickness of the beam and satisfy free surface conditions for the shear stress of the FGM beam without using the shear correction factor. The material properties of the FGM beam are assumed to be temperature dependent, and change gradually in the thickness direction. Three cases of temperature distribution in the form of uniformity, linearity, and nonlinearity are considered through the beam thickness. Based on the present refined beam theory, the equations of motion are derived from Hamilton's principle. The closed-form solutions of functionally graded beams are obtained using Navier solution. Numerical results are presented to investigate the effects of temperature distributions, material parameters, and thermal moment and slenderness ratios on the natural frequencies of FG beam. The accuracy of the present solutions is verified by comparing the obtained results with the existing solutions.

**Keywords:** Thermo-elastic vibration; functionally graded materials; Hamilton's principle; Navier solution.

# ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الاهتزازات اللدنة الحرارية لروافد مكونة من مادة ذات خصائص متغيرة باتجاه الارتفاع ,متنكة على مساند بسيطة باستخدام نظرية إجهاد القص العرضي عالي الدرجة. تأخذ هذه النظرية في الاعتبار تأثيرات القص العرضي والتوزيع المكافئ لاجهادات القص على سمك الرافدة وتحقق شروط انعدم إجهاد القص على الوجوه العلوية والسفلية للرافدة , بدون استخدام عوامل تصحيح اجهاد القص . في هذه الدراسة ، تعتمد خصائص المواد في الرافدة (ذات خصائص متغيرة باتجاه الارتفاع ) على درجة الحرارة وتتغير تدريجياً في اتجاه السمك. تم اعتماد ثلاث حالات لتوزيع درجة الحرارة عبر سماكة الرافدة وهي: توزيع منتظم وخطي وغير خطي. استناداً إلى النظريات المحسنة، تُشتق معادلات الحركة من مبدأ هاميلتون. تم الحصول على النتائج التحليلية باستخدام طريقة نافي . تم عرض النتائج العددية لدراسة تأثيرات توزيع درجة الحرارة ودليل المادة والعزوم الحرارية ونسب النحافة على الترددات الطبيعية للاهتزاز في الرافدة . يتم التحقق من دقة الحلول الحالية من خلال مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع الحلول الموجودة والمنشورة في دراسات سابقة

**الكلمات المفتاحية:** اهتزاز حراري مرن, مواد ذات خصائص متغيرة باتجاه الارتفاع ؛ مبدأ هاميلتون , حل نافيير

# Sommaire

---

<b>RESUME</b> .....	<b>i</b>
Abstract .....	ii
ملخص.....	iii
Sommaire .....	iv
Liste des figures .....	viii
Liste des tableaux .....	x
Liste des symboles .....	xi
Introduction générale.....	1
Chapitre I Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés FGM.....	5
I.1 Définition .....	6
I.2 Les composants élémentaires des matériaux composites.....	6
I.2.2 Les renforts .....	7
I.2.2.2 Influence de l'orientation des fibres sur le comportement .....	12
I.2.3 Les matrices .....	13
I.3 Classification des matériaux composites.....	14
I.3.1 Classification suivant la forme des constituants .....	14
I.3.1.1 Introduction .....	14
I.3.1.2 Les composites à fibres.....	14
I.3.1.3 Les composites à particules .....	15
I.3.2 Classification suivant la nature des constituants.....	15
I.3.3 Avantages et inconvénient des matériaux composites :.....	16
I.3.3.1 Avantages : .....	16
I.3.3.2 Inconvénients :.....	16
I.4 Matériaux à gradients de propriétés .....	16
I.4.1 Introduction.....	16
I.4.2 Historique.....	17
I.4.3 Définition .....	18
I.4.4 Elaboration des matériaux à gradient de propriétés .....	18
I.4.4.1 Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	19
I.4.4.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) .....	20
I.4.4.3 Compaction sèche des Poudres .....	20

I.4.4.4	Projection plasma .....	21
I.4.4.5	Frittage et Infiltration.....	21
I.4.4.6	Frittage Laser Différentiel .....	21
I.4.4.7	Dépôt par Electrophorèse .....	22
I.4.4.8	C. V. D. et P. V. D.....	22
I.4.4.9	Implantation Ionique (Sputtering) .....	22
I.4.4.10	Dépôt par Centrifugation .....	23
I.5	Domaines d’application des FGMs .....	23
I.5.2	Domaine aéronautique .....	25
I.5.3	Domaine des matières industrielles.....	25
I.5.4	Domaine Optoélectronique .....	25
I.5.5	Domaine Biomatériaux .....	26
I.5.6	D'autres domaines .....	26
I.6	Exemples des produits de FGM .....	26
I.6.1	Système spatial.....	26
I.6.2	Système de distribution et de transmission .....	27
I.6.3	Fibre optique .....	27
I.6.4	Industriel .....	27
I.6.5	Titanium.....	28
I.6.6	Crampons Baseball .....	28
I.6.7	Lames de rasoir .....	28
I.6.8	Autres applications.....	29
I.7	Propriétés physiques et mécaniques des FGM .....	29
I.7.1	Propriétés de l’Aluminium.....	29
I.7.1.1	Définition.....	29
I.7.1.2	Propriétés physiques .....	29
I.7.1.3	Propriétés mécaniques .....	29
I.7.1.4	Propriétés des alliages d’aluminium.....	30
I.7.1.5	Propriétés de la céramique.....	31
I.7.2	Définition .....	31
I.7.2.1	Propriétés physiques .....	31
I.7.2.2	Propriétés mécaniques .....	31
I.7.2.3	Propriétés des céramiques .....	31
I.8	Concept des matériaux a gradient de propriété FGM .....	32
I.9	Propriétés matérielles effectives des FGM.....	32

I.10	Les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM.....	33
I.10.1	Propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	33
I.10.2	Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	34
I.10.3	Propriétés matérielles de la poutre E-FGM .....	35
I.11	Conclusion.....	36
Chapitre II	Les théories des structures FGM.....	37
II.1	Introduction .....	38
II.2	Historique des théories des poutres .....	38
II.2.1	Comportement des poutres composites.....	40
II.2.2	Structures composites et élasticité bidimensionnelles .....	40
II.2.2.1	Approche monocouche équivalente .....	40
II.2.2.1.a	Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du.....	41
II.2.2.2	Approche par couche .....	46
II.3	Conclusion.....	51
Chapitre III	Travaux de recherche réalisés sur les structures FGM.....	52
III.1	Introduction .....	53
III.2	Etude des vibrations des poutres FGM .....	53
III.3	Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM.....	54
III.4	Etudes sur les problèmes thermo-élastiques statiques.....	55
III.5	Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique.....	56
III.6	Etudes sur les problèmes de stabilité des coques en (FGM).....	57
III.7	Autres structures en (FGM).....	59
III.8	Conclusion.....	59
Chapitre IV	Analyse de l'effet thermique sur les fréquences des poutres non homogènes épaisses.....	60
IV.1	Introduction .....	61
IV.2	Formulation du problème .....	62
IV.2.1	Propriétés des matériaux de la poutre FGM dépendant de la température .....	62
IV.2.2	Différents cas de distribution de température .....	64
IV.2.2.1	Distribution uniforme de température (UTD) .....	64
IV.2.2.2	Distribution de température non linéaire (NLTD).....	64
IV.2.2.3	Distribution de température non linéaire (LTD) .....	65
IV.2.3	Hypothèses de base .....	66

IV.2.4	Equations cinématique et constitutive .....	67
IV.2.5	Equations du mouvement.....	67
IV.3	Les solutions analytiques pour la poutre FGM .....	70
IV.4	Conclusion.....	71
Chapitre V	Validation et comparaison des résultats .....	72
V.1	Introduction .....	73
V.2	Caractéristiques des paramètres étudiés .....	73
V.2.1	Caractéristiques de la poutre considérée.....	73
V.2.2	Variations des paramètres étudiés.....	74
V.3	Analyse des résultats et discussions de l'effet des paramètres.....	74
V.3.1	Résultats de la vibration libre des poutres FGM sans effet de température.....	74
V.3.2	Résultats de la vibration libre des poutres FGM sans moments thermiques .....	75
V.3.3	Poutres FGM avec distribution uniforme de la température (UTD).....	76
V.3.4	Poutres FGM avec distribution de température linéaire (LTD) et non linéaire (NLTD) 79	
V.4	Conclusion.....	84
	Conclusion générale et perspectives.....	86
	References .....	88



## Liste des figures

---

<b>Figure I.1 :</b>	Matériau composite en général.....	7
<b>Figure I.2 :</b>	Figure I.2: les trois types de renforcement dans un système composite [Reynes, 1990]	8
<b>Figure I.3 :</b>	variation de la résistance mécanique d'un système composite en fonction du taux de renforcement [Reynes, 1990] .....	9
<b>Figure I.4 :</b>	Types de renfort.....	9
<b>Figure I.5 :</b>	Classification des fibres.....	12
<b>Figure I.6 :</b>	Orientation des fibres à 90°. Essai de traction-compression .....	13
<b>Figure I.7 :</b>	Les différentes familles de matrice.....	14
<b>Figure I.8 :</b>	Figure I.8 Principe de la méthode coulage en bande [BOCH, P, 1986] [BOCH, P,1987].....	19
<b>Figure I.9 :</b>	Disposition du procédé frittage laser différentiel. ....	22
<b>Figure I.10 :</b>	Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh 1997].....	23
<b>Figure I.11 :</b>	Les principaux domaines d'application des FGM [Houari, 2011] .....	24
<b>Figure I.12 :</b>	La distribution des composantes des matériaux .....	32
<b>Figure I.13 :</b>	Modèles analytiques pour une couche en FGM. ....	33
<b>Figure I.14 :</b>	Les dimensions de la poutre FGM.....	33
<b>Figure I.15 :</b>	La variation du module de Young dans une plaque P-FGM .....	34
<b>Figure I.16 :</b>	La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.....	35
<b>Figure I.17 :</b>	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM [B-O. Sallai, 2009]. 36	
<b>Figure II.1 :</b>	Cinématique de Reissner-Mindlin.....	41
<b>Figure II.2 :</b>	Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur. ....	42
<b>Figure II.3 :</b>	Cinématique de Love-Kirchhoff.....	43
<b>Figure II.4 :</b>	<b>Figure</b> Cinématique de la théorie d'ordre supérieur. ....	44
<b>Figure II.5 :</b>	Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Viet.Tung, 2004] .....	47
<b>Figure II.6 :</b>	Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Viet.Tung, 2004].....	47
<b>Figure II.7 :</b>	Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [Viet.Tung, 2004]. ....	48
<b>Figure II.8 :</b>	Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [Viet.Tung, 2004]. ....	49
<b>Figure IV.1 :</b>	Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM et distributions de température. ....	63
<b>Figure V.1 :</b>	Coordonnées d'une poutre FGM et distributions de température. ....	74
<b>Figure V.2 :</b>	Variation du paramètre de fréquence fondamentale des poutres FGM en Si3N4/SUS304 avec différentes températures ( $L/h = 20$ ). ....	78
<b>Figure V.3 :</b>	Les premières courbes de fréquence de température des poutres FGM en Si3N4/SUS304 ( $L/h = 20$ ). ....	79

**Figure V.4 :** Fréquence fondamentale des poutres FGM sous distributions LTD et NLTD avec différents valeurs du paramètre de matériau  $p$  ( $\Delta T = 100K$ ), ( $L/h = 20$ )..... 82

**Figure V.5 :** Fréquences fondamentales des poutres FGM sous distributions LTD et NLTD avec différents valeurs de changement de température  $\Delta T$  ( $L/h = 20$ )..... 83

**Figure V.6 :** Fréquences fondamentales des poutres FGM sous distributions LTD et NLTD avec différents valeurs de changement de température  $\Delta T$  ( $L/h = 20$ )..... 84

## Liste des tableaux

---

<b>Tableau I.1 :</b> propriétés des fibres de verre de type (E) et (S) .....	10
<b>Tableau I.2 :</b> propriétés des fibres de carbone .....	10
<b>Tableau I.3 :</b> propriétés des fibres d'aramide.....	11
<b>Tableau IV.1 :</b> Coefficient dépendant de la température des matériaux utilisés.....	64
<b>Tableau V.1 :</b> Fréquence fondamentale adimensionnel des poutres en Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> sous température ambiante ( $p = 0.3$ ). .....	75
<b>Tableau V.2 :</b> Fréquence fondamentale avec une élévation de température des poutres en Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /SUS304 sous distribution de température uniforme UTD ( $L / h = 30$ ). .....	76
<b>Tableau V.3 :</b> Cinq premières fréquences adimensionnelles en Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /SUS304 sous distribution uniforme de la température UTD. ....	77
<b>Tableau V.4 :</b> Fréquences propres adimensionnelles des poutres simplement appuyées en Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> /SUS304 sous UTD et LTD ( $L/h = 20$ ). .....	80
<b>Tableau V.5 :</b> Fréquence fondamentale des poutres simplement appuyées Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> /SUS304 sous LTD et NLTD ( $L / h = 20$ ). .....	81

## Liste des symboles

---

$E_c$	Module de Young de la céramique.
$E_m$	Module de Young de métal.
$E_1$	Module de Young de la face supérieure.
$E_2$	Module de Young de la face inférieure.
$E(z)$	Module de Young en fonction de $z$ .
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de $z$ .
$\rho_c, \rho_m$	Densités de masse de la céramique et du métal respectivement.
$V(z)$	Fraction volumique.
$V_c$	Fraction volumique de la céramique.
$V_m$	Fraction volumique du métal.
$k_c, k_m$	Conductivité thermique de la céramique et du métal respectivement.
$T_c, T_m$	Température de la céramique et du métal respectivement.
$p$	Indice de loi de puissance ou l'indice matérielle.
$L, b, h$	Dimensions de la poutre.
$T$	Température.
$T_0$	Température ambiante.
$T(z)$	Température en un point $z$ .
$\Delta T$	Elévation de la température.
$P_{-1}, P_1, P_2$ et $P_3$	Coefficients dépendant de la température.
$u, w$	Les déplacements suivant les directions $x$ et $z$ .
$w_\alpha$	Rotation due à la flexion (sans cisaillement).
$u_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre.
$\phi_x, \phi_z$	Les rotations autour des axes $x$ et $z$ .
$\psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$ .
$\sigma_x, \sigma_z$	Contraintes normales.
$\sigma_x^T$	Contrainte thermique.

$\alpha(z)$	Conductivité thermique suivant z.
$\tau_{xy}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement.
$\varepsilon_x$	Déformation dans les directions x.
$\gamma_{xz}$	Déformation de distorsion.
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion.
$w_s$	Composante de la flèche due au cisaillement.
N	Effort normal.
$M^b$	Moments de flexion pure.
$M^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse.
S	Effort de cisaillement pur.
m	Nombre de mode.
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la poutre.
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la poutre.
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque.
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
$Q_{ij}$	Coefficients de rigidité.
$\partial$	Dérivée partielle.
$d_{ij}, d_{ijl}$ et $d_{ijlm}$	Opérateurs différentiels.
$U_p$ et $U_T$	Les énergies de déformation due aux effets mécaniques et thermiques respectivement.
$U_m, W_{bm},$ et $W_{sm}$	Paramètres arbitraires.
K	Energie cinétique.
[K]	Matrice symétrique des valeurs propres.
{ $\Delta$ }	Vecteur des déplacements.
$\omega$	Fréquence de vibration.
$\Omega, \bar{\Omega}$	Fréquence sans dimension.

# Introduction générale

---

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont une nouvelle gamme des structures composites qui ont un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, soumise à des concentrations des contraintes et des contraintes thermiques et résiduelles élevées. Généralement, les FGMs sont des composites avancés, macroscopiquement et microscopiquement hétérogènes qui sont réalisés par exemple à partir d'un mélange de céramique et de métal avec une gradation continue de composition à travers l'épaisseur. Ceci est réalisé par une variation graduelle de la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion.

Suite à l'importance de ces matériaux ainsi que leur large application, des analyses statiques, vibratoires, thermomécaniques et de flambement des structures en FGM ont été exposé par de nombreux chercheurs. Shen [Shen, 2000] a présenté l'analyse de flexion non linéaire d'une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée et simplement appuyée soumise à une charge transversale uniforme ou sinusoïdale dans des environnements thermiques, basant sur la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé de Reddy. Reddy [Reddy, 2004] a présenté des solutions pour les plaques rectangulaires fonctionnellement graduées basée sur la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre. Lanhe [Lanhe, 2004] a étudié l'analyse de flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées modérément épaisses. Zenkour et Alghamdi [Zenkour et Alghamdi, 2010] ont examiné le problème de flexion des plaques sandwich fonctionnellement gradués sous l'effet des sollicitations mécaniques et thermiques sur la base de la théorie des plaque de déformation en cisaillement sinusoïdal. EL Meiche et al [EL Meiche et al, 2012] ont proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le comportement en flambement et en vibration des plaques FG sandwiches. Une théorie des poutres de déformation en cisaillement efficace basée sur la position de la surface neutre a été proposée par Ould Larbi et al [Ould Larbi et al, 2013] pour la flexion et la réponse des poutres FG en vibration libre. [Saidi et al, 2013] ont utilisé la

nouvelle théorie de déformation en cisaillement hyperbolique dans laquelle l'effet d'étirement (stretching) est incluse pour étudier la réponse en flexion thermomécanique des plaques FGM. [Draiche et al, 2014] ont examiné la vibration libre des plaques composites rectangulaires avec une masse de pièce en utilisant un modèle de plaque à quatre variables trigonométriques. [Ait Amar Meziane et al, 2014] ont développé une théorie de déformation en cisaillement raffinée simple et efficace pour l'analyse de flambement et de la vibration des plaques EGM sandwichs sur fondations élastiques en considérant divers types de conditions aux limites. [Ait Atmane et al, 2015] ont étudié l'effet d'étirement d'épaisseur et de la porosité sur la réponse mécanique des poutres FGM reposant sur fondation élastique.

Le but de ce travail est d'analyser la vibration thermo-élastique des poutres en matériau fonctionnellement gradués FGM.

Cependant, les recherches sur la vibration libre des poutres FGM sont tout à fait limitées, il y a peu de recherche sur la vibrations libre des poutres FGM utilisant la théorie des poutres raffinée.. Cette théorie qui ressemble à la théorie d'ordre élevé.

Pour cela nous nous sommes intéressés aux matériaux à gradient évalués ou nous étions amenés à analyser par des formulations analytiques et étudié le phénomène de la vibration libre des poutres en FGM en présence de la température en utilisant cette théorie raffinée de cisaillement déformable des poutres.

Le présent travail de thèse s'articule autour deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects :

- **Théorique**
- **Analytique**

**L'aspect théorique comprend** trois chapitres :

Dans le premier chapitre : des généralités sur les matériaux à gradients de propriétés tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Dans le premier chapitre, on a essayé de définir d'une manière générale les matériaux fonctionnellement gradués "**FGM**" tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Dans le deuxième chapitre, les différentes théories applicables aux structures **FGM** ont été étudiées et analysées.

Le troisième chapitre est consacré pour l'investigation sur les travaux de recherche réalisés sur les structures **FGM**.

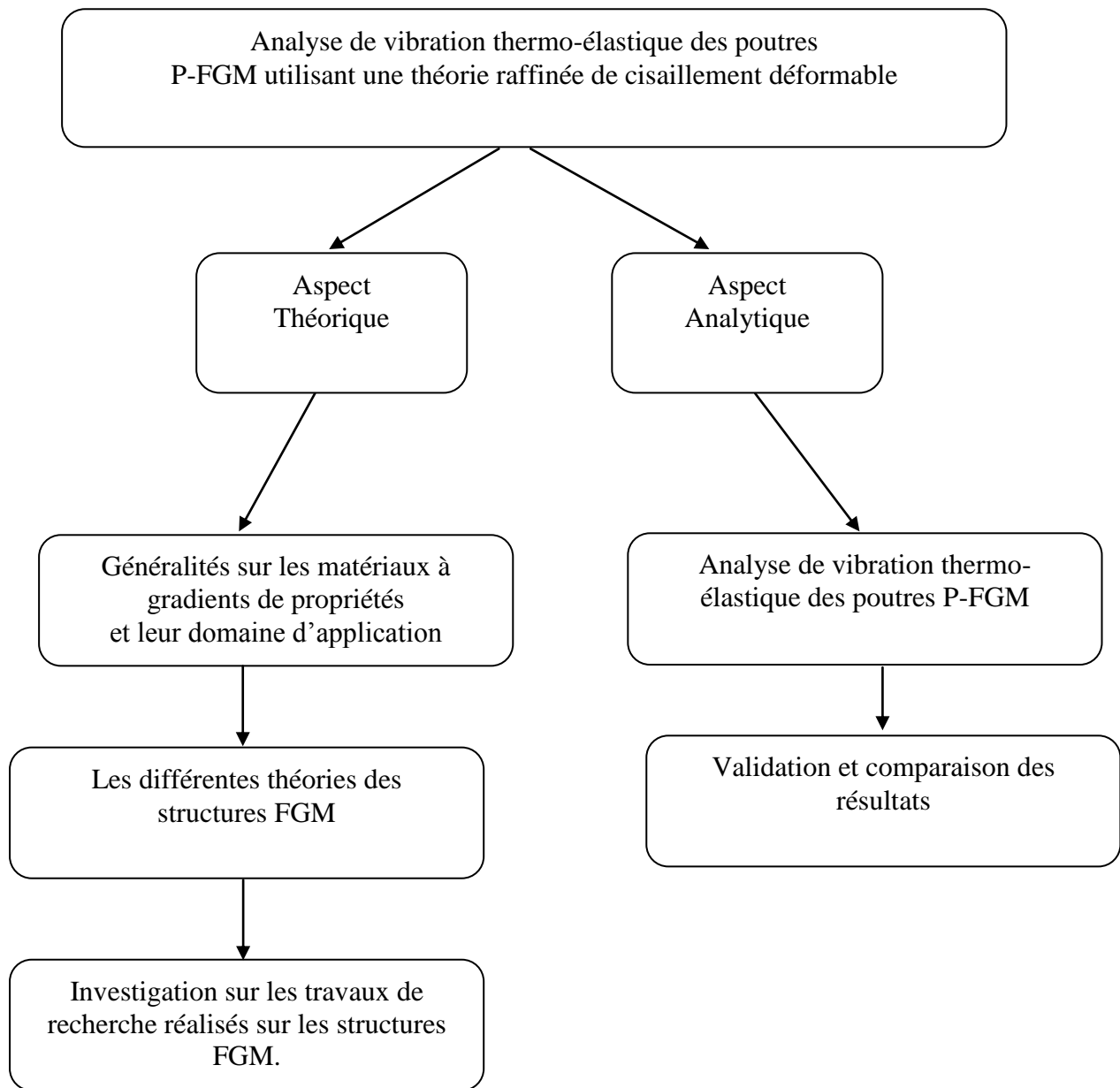
**L'aspect Analytique** en son rôle est scindé en deux chapitres :

Au quatrième chapitre, une analyse de la vibration libre en présence de la température des poutres fonctionnellement graduée simplement appuyées a été présentée en détail par une théorie des poutres raffinée. Cette fonction satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieure et inférieure de la poutre sans l'aide du facteur de correction de cisaillement. Trois types de distribution de température à travers l'épaisseur de la poutre ont été utilisés dans cette analyse. Les propriétés des matériaux de la poutre FGM dépendant de la température sont données sous des formes mathématiques.

Quant au cinquième chapitre : une procédure de résolution exacte pour l'analyse de la vibration thermique des poutres FGM est développée en détail. Une étude comparative est effectuée pour vérifier l'exactitude des résultats de la présente théorie de cisaillement proposé. Les effets des rapports d'épaisseur, l'élancement de la poutre, l'indice de la fraction volumique, le mode de vibration et le type de chargement thermique sur la variation de la fréquence naturelle des poutres FGM sont étudiés et discutés en détail.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution du comportement de vibration thermique des poutres en FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.





**Chapitre I Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés  
FGM**

## **I.1 Définition**

Les matériaux composites existent depuis toujours, ils ont été utilisés par l'homme comme le torchis et le bois qui sont des composites de la vie quotidienne. Ainsi ils ont été utilisés pour optimiser les performances de certaines armes, par exemple :

- **Les arcs mongols, dans lesquels les parties comprimées sont en corne, et les parties tendues sont en bois, soies collées et tendons de bœuf.**
- **Les épées damassées ou sabres japonais dont les lames sont en acier et en fer doux.**

Les matériaux composite sont constitués d'un mélange de deux matériaux de nature différente, qui se complètent et permettent d'aboutir à un matériau dont la nouvelle performance obtenue est supérieure à la celle des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibre. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc...). Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice permet de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures. Le mélange entre eux est réalisé par polymérisation (réaction chimique).

Les matériaux composites ont un comportement particulier, et ceci est dû essentiellement aux paramètres suivants ; Le premier résulte du comportement anisotrope du matériau utilisé dans la couche élémentaire : contrairement aux matériaux isotropes, les matériaux composites sont peu rigides en cisaillement. Le deuxième dérive de la stratification qui consiste en l'empilement de plusieurs couches, ce qui favorise l'effet de cisaillement, et particulièrement du cisaillement transversal.[Tafla 2007].

## **I.2 Les composants élémentaires des matériaux composites**

Les matériaux composites sont composés d'une matrice organique – polymère therm durcissable ou thermoplastique - et d'une structure de renfort pouvant se présenter sous forme de particules, de mats, de fibres courtes, longues ou continues.

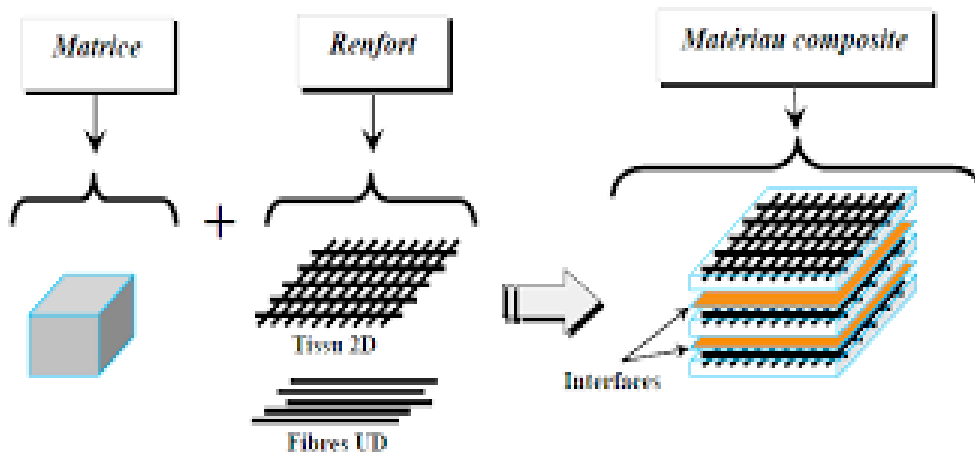
Les renforts les plus couramment utilisés sont les fibres, généralement de verre, de carbone ou d'aramide.

On distingue deux grandes familles selon les caractéristiques de la matrice et les renforts : les composites de grande diffusion, peu cher, qui occupent une large part du marché et les composites à hautes performances. Ces derniers, généralement renforcés de fibres

continues de carbone ou d'aramide, sont réservés à des secteurs de forte valeur ajoutée : aéronautique, médical, sports et loisirs.

Les polymères thermodurcissables sont mis en forme par chauffage lors d'une transformation irréversible. Les principales résines thermodurcissables sont les polyesters insaturés, très largement utilisés, les résines époxydes et les résines phénoliques. Les composites à matrice thermodurcissables représentent environ 70 % des composites transformés en Europe.

Les polymères thermoplastiques durcissent au cours du refroidissement. Le processus de transformation chimique qui les fabrique est réversible. Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont le polypropylène, les polyamides et le polyéther-éther-cétone.



**Figure I.1 :** Matériau composite en général.

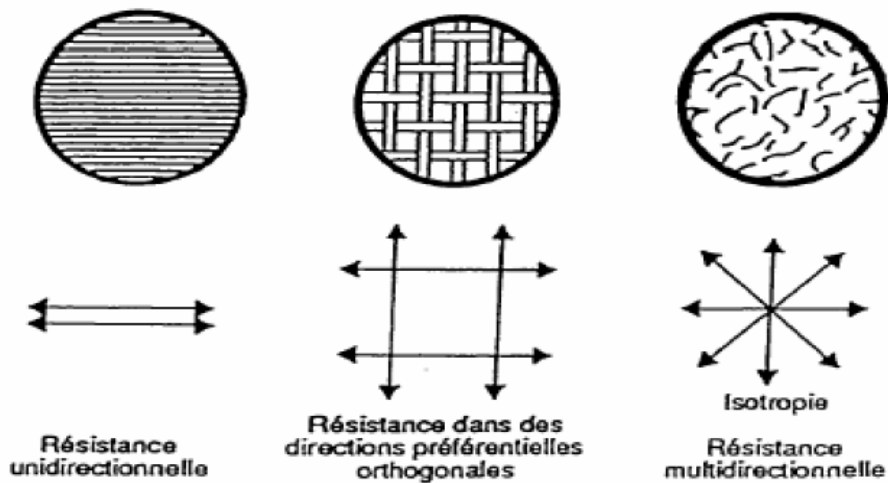
### **I.2.2 Les renforts**

Les composites artificiels sont souvent renforcés par des fibres, ou par des composants à base de fibres (torons, fibres tordues ensemble ; tissus ; mats, ou nappes). Chacune d'entre elles a une application particulière spécifique à ses propriétés et son coût.

Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

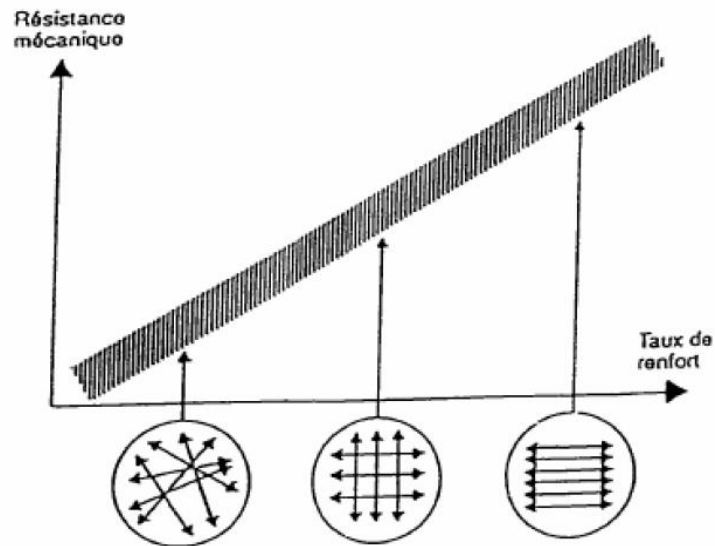
Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus).

Les renforts sont constitués de plusieurs milliers de filaments et apportent les propriétés mécaniques aux systèmes composites. Dans un système composite les fibres travaillent bien en traction mais moins bien en compression et très faiblement en cisaillement. D'où l'idée de les associer en forme pour obtenir une charpente résistante. En fonction des propriétés recherchées on distingue trois types de renforcement : unidirectionnel, bidirectionnel et multidirectionnel [Reynes, 1990], (figure I.2).



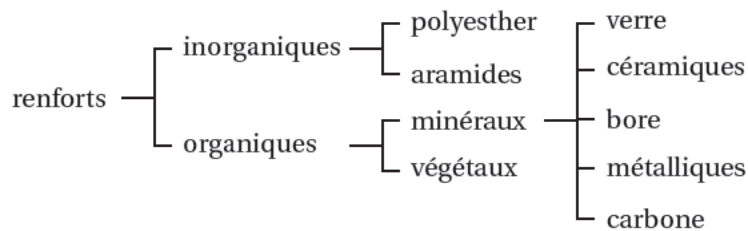
**Figure I.2 :** Figure I.2: les trois types de renforcement dans un système composite [Reynes, 1990]

Le taux de renfort, quant à lui, peut représenter de 20 à 80% de la masse totale de la structure composite. Ceci influence directement les propriétés mécaniques. En général, plus le taux de renfort est grand dans une direction plus sa résistance mécanique est grande [Reynes, 1990], comme le montre le graphique de la figure I.3.



**Figure I.3 :** variation de la résistance mécanique d'un système composite en fonction du taux de renforcement [Reynes, 1990]

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.4.



**Figure I.4 :** Types de renfort

Les fibres de verre sont les plus anciennes (1940) et les moins chères (environ 1euro/kg) des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage et sont le matériau le plus utilisé. Ceci s'explique par l'abondance des sources de la silice ( $\text{SiO}_2$ ) qui constitue le matériau de base. Elles sont fabriquées par extrusion du verre au travers d'une filière percée de trous de 1 à 2mm de diamètre, puis étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15mm, enduites et bobinées. Il existe différentes variétés selon la proportion de chaque composant ( $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{B}_2\text{O}_3$ ,  $\text{CaO}$ ,  $\text{MgO}$ ), les meilleures propriétés étant obtenues pour les plus fortes proportions de silice (verre S, 65%). On distingue plusieurs types de fibres de verre. Le tableau I.1 donne quelques propriétés de deux types de fibres, le type E et le type S, comme le suggère [Agrawal B.D, 1990].

**Tableau I.1 :** propriétés des fibres de verre de type (E) et (S)

Propriétés, unités	Verre type E	Verre type S
Densité (g/cm <sup>3</sup> )	2.45	2.49
Resistance en tension (MPa)	3448	4585
Module d'élasticité (GPa)	72.4	85.5
Diamètre possible (micro-m)	3-20	8-13
Coefficient de dilatation thermique (10 <sup>-6</sup> /C°)	5.0	2.9

Les fibres de carbone sont apparues depuis le dernier siècle. Elles étaient extraites d'éléments organiques naturels. [Dorlot J.M, 1986] rapportent que de nos jours, ces fibres sont d'origines inorganiques en carbonisant des fibres de polymères tressés appelés PAN. Elles doivent leurs propriétés à la très forte anisotropie des cristallites de graphite qui les composent. Leur prix décroît régulièrement, il est de l'ordre de 10 euros/kg. Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère (par exemple poly acrylonitrile) préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200\_C), puis pyrolyse (1500-2500\_C ).En fonction du pourcentage de carbone qu'elles contiennent, on distingue les fibres de carbone, 90 à 98 %, et les fibres de graphite, au-delà de 99%. Les deux types sont à très haute résistance à la traction et leur module d'élasticité est très élevé. Elles sont utilisées pour fabriquer des composites à haute performance. C'est pendant la cuisson qu'on peut contrôler la résistance et le module d'élasticité du produit final. Le tableau I.2 résume quelque propriété des fibres de carbone comme le suggèrent [Benyoucef S, 2006].

**Tableau I.2 :** propriétés des fibres de carbone

Propriétés, unités	Verre type E	Verre type S
Densité (g/cm <sup>3</sup> )	1.78	1.8
Resistance en tension (MPa)	2800	2200
Module d'élasticité (GPa)	200	400
Allongement a la rupture (%)	1.0	0.5

Les fibres aramides sont des fibres de polyamides aromatiques, connues sous la marque commerciale de "Kevlar". De prix élevé (20 euros/kg), elles ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisés. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides.

Les fibres d'aramide sont en général très résistantes et ont un module d'élasticité très élevé. Selon [Rigal J.P., 1989], on distingue deux types de fibres d'aramide : le Kevlar 29 et le Kevlar 49. Le type 29 est utilisé surtout pour la fabrication de FRP alors que le second sert à confectionner des câbles et des cordes. Le tableau I.3 montre quelques propriétés des fibres d'aramide telles que mentionnées par Agrawal B.D [Agrawal B.D, 1990].

**Tableau I.3 :** propriétés des fibres d'aramide

Propriétés, unités	Aramide type 29	Aramide type 49
Densité (g/cm <sup>3</sup> )	1.44	1.44
Resistance en tension (MPa)	2760	3620
Module d'élasticité (GPa)	62	124
Allongement a la rupture (%)	3-4	2-8

Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (de l'ordre de 1000 euros/kg). Les fibres de bore sont obtenues par réduction à 1100°C de chlorure de bore, qui se dépose sur un fil de tungstène de 10 à 15mm de diamètre. Le diamètre résultant est de 100 à 200µm pour la fibre. La même procédure expérimentale est utilisée pour produire des fibres de carbure de silicium (SiC). Les derniers développements concernent la production de trichites, ("whiskers") qui sont des monocristaux filamenteux obtenus par décomposition d'un sel métallique en ambiance réductrice. Leur longueur est de quelques millimètres, pour un diamètre d'environ 1µm. Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. ils sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

– **Fibres de Carbure de Silicium**



– **Fibres de Bore**

– **Fibres de Bore carbure de silicium**

Les microbilles pleines ou creuses peuvent être produites en verre, carbone ou polystyrène. Elles ont des diamètres compris entre 10 et 150mm ; le taux volumique de charge peut atteindre 50%. Le composite résultant a des propriétés mécaniques isotropes.

Les principaux renforts minéraux sont le mica et l’amiante. L’un et l’autre sont des composés naturels dont les propriétés ne permettent pas d’atteindre les résistances obtenues avec les fibres.

« L’amiante (mélange d’oxydes de magnésium, de silice et d’eau, comportant également du sodium, du fer,...) se présente sous forme de fibrilles de 20nm, dont il est possible de détacher des fibres de plusieurs centimètres. Son caractère cancérigène a maintenant conduit à un abandon complet ».

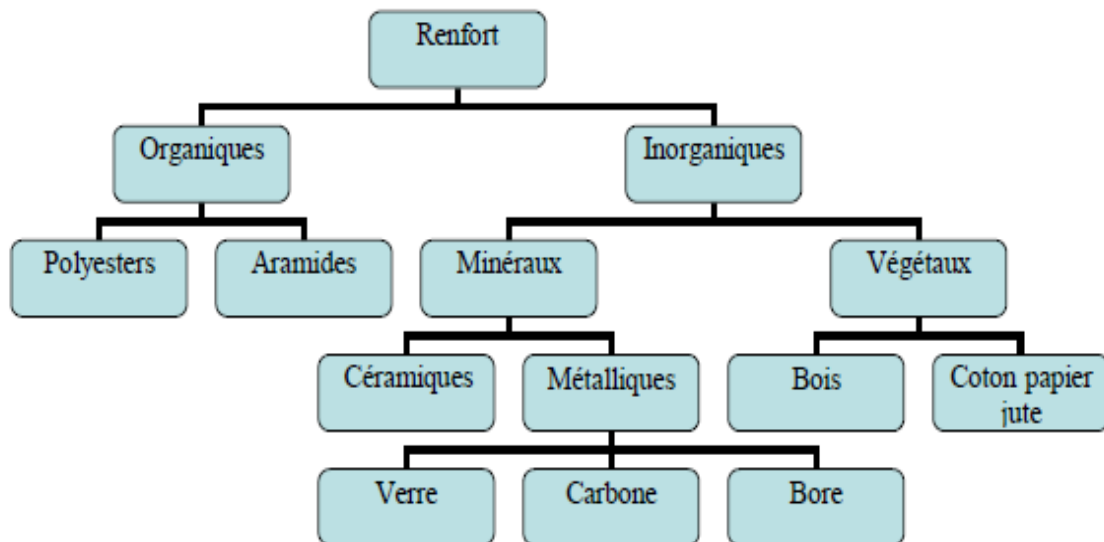


Figure I.5 : Classification des fibres

**I.2.2.2 Influence de l’orientation des fibres sur le comportement**

L’orientation des fibres est choisie de façon adaptable avec les directions d’efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu’elles résistent aux efforts de traction et de compression. Pour résister aussi à l’effet de cisaillement, on met deux fibres orthogonales de façon à ce que l’une d’elle supporte l’effet de compression ou traction et l’autre l’effet de cisaillement.

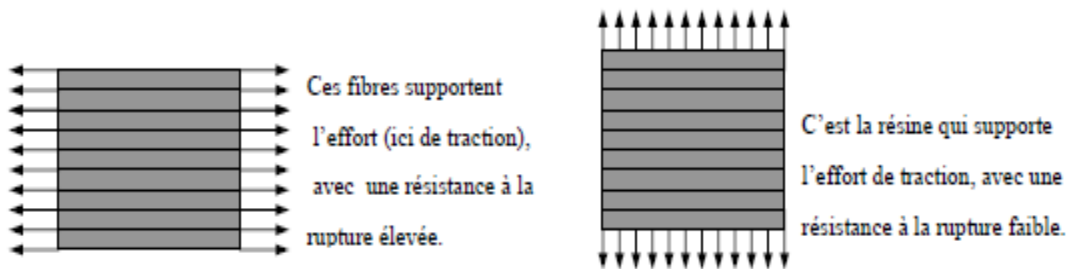


Figure I.6 : Orientation des fibres à 90°. Essai de traction-compression

### I.2.3 Les matrices

La matrice incorpore les éléments de renfort, qui doivent être solidaires pour assurer un transfert de charge optimal.

- *Les matrices organiques sont faites de matières plastiques. Il convient de distinguer la matrice thermoplastique, à chaîne linéaire, très répandues, et les polymères thermodurcissables, ou résines, aux propriétés mécaniques plus élevées. Dans cette dernière catégorie se rangent-les résines de polyester, les résines époxydes, qui peuvent être utilisées jusque vers 200\_C, les résines phénoliques ou les résines polyamides, qui supportent des températures de 400-C.*
- *Les matrices carbonées sont fabriquées par décomposition d'une matière organique à haute température. La matière peut être un liquide (imprégnation en phase liquide), ou un hydrocarbure gazeux (décomposition chimique en phase vapeur). Le second procédé est plus rapide que le premier, qui peut durer plusieurs mois pour obtention d'une densification suffisante, mais moins reproductible. Le carbone se dépose en grains sur les fibres, assurant leur bonne liaison. Il est possible par exemple d'obtenir un composite carbone-carbone dont la densité est égale à celle du carbone massif.*
- *Les matrices métalliques présentent plusieurs avantages, comme une bonne ductilité, une bonne résistance à certains solvants, une meilleure tenue en température que les résines, une meilleure usinabilité. A l'inverse, elles sont plus difficiles à mettre en œuvre, de densité plus élevée, et des problèmes peuvent apparaître aux interfaces fibres -matrice du fait de la réactivité des matériaux.*
- *Les matrices céramiques sont particulièrement intéressantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont utilisées dans des pièces qui doivent subir sans dommage de très hautes températures (tuiles de protection thermique, brûleurs). Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction, est partiellement masquée par l'insertion de fibres dans la*

matrice. Les techniques de fabrication les plus courantes sont l'imprégnation en phase liquide.

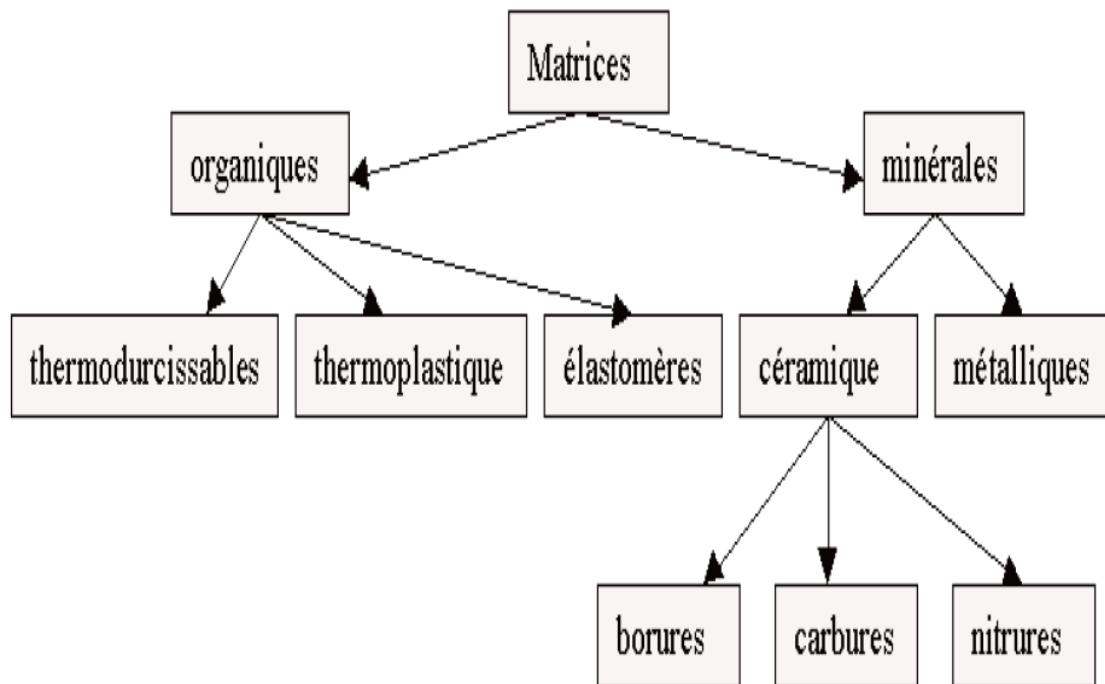


Figure I.7 : Les différentes familles de matrice

### I.3 Classification des matériaux composites

#### I.3.1 Classification suivant la forme des constituants

##### I.3.1.1 Introduction

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants. En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres [Mechab, 2009].

##### I.3.1.2 Les composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous une forme fibreuse. Les fibres utilisées se présentent, sous un aspect de fibres continues, sinon d'un aspect discontinu : ces fibres sont soit coupées, soit courtes. L'arrangement des fibres, et leurs orientations dans un plan, permet de moduler les propriétés mécaniques des matériaux

composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes.

### **I.3.1.3 Les composites à particules**

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de dimensions privilégiées. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc.

Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour diminuer le coût de revient du matériau, sans en diminuer les caractéristiques. Le choix de l'association matrice – particules dépend des propriétés souhaitées par exemple, des incursions de plomb dans des alliages de cuivre, ces particules facilitent l'usinage. Des particules de métaux tels que le tungstène, le chrome incorporé dans les métaux ductile, augmentera leurs propriétés à température élevée, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante.

### **I.3.2 Classification suivant la nature des constituants**

Les matériaux composites sont classés suivant les composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale. Divers renforts sont associés à ces matrices, seuls certains couples d'association ont actuellement un usage industriel:

- **Composites à matrice organique avec :**
  - **Fibres minérales : verre, carbone.**
  - **Fibres organiques : kevlar, polyamide.**
  - **Fibres métalliques : bore, aluminium.**
- **Composites à matrice métallique avec :**
  - **Fibres minérales : carbone.**
  - **Fibres métalliques : bore.**
  - **Fibres métallo-minérales. Fibres de bore revêtues de carbure de silicium.**
- **composites à matrice minérale avec :**
  - **Fibres métalliques.**
  - **Particules métalliques.**
  - **Particules minérales.**

### **I.3.3 Avantages et inconvénient des matériaux composites :**

Comme tous matériaux, les matériaux composites présentent certains avantages et inconvénients, qu'on peut les résumer en :

#### **I.3.3.1 Avantages :**

- **Gain de masse ;**
- **Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques) ;**
- **Grande résistance à la fatigue ;**
- **Faible vieillissement sous l'action d'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone) ;**
- **Insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole...etc.**

#### **I.3.3.2 Inconvénients :**

- **Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température,**
- **Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes;**
- **Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques,**
- **Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre),**
- **Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs.**

## **I.4 Matériaux à gradients de propriétés**

### **I.4.1 Introduction**

Les matériaux à gradients de propriétés (FGM) sont des matériaux composés de deux ou de plusieurs matériaux avec des fractions volumiques et microstructures qui sont conçus afin d'avoir une continuité spatiale des variables. Les (FGM) permettent l'adaptation des fractions de volume d'un matériau pour extraire l'avantage maximum de leur inhomogénéité, ils offrent un grand potentiel pour les composants dont le fonctionnement est soumis à de fortes charges mécaniques ou thermiques, tels que les boucliers thermiques des vaisseaux

spatiaux, les revêtements du plasma pour les réacteurs de fusion, les composantes du moteur pour les avions.

### **I.4.2 Historique**

Les structures fonctionnellement graduées se trouvent en abondance dans la nature sous différentes formes, à savoir ; le corps humain comme les os, le bio-tissu des plantes et des animaux etc..., les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous. Ces derniers sont dotés de plusieurs caractéristiques de qualité supérieure, ils sont légers, solides et élastiques, celles-ci sont dues à leurs nœuds qui créent une hiérarchie et donnent naissance à l'activité de structure. De même, une simple comparaison entre les plantes qui vivent sur une surface plane et celles poussant sur une pente. [BERRABAH H M, 2011].

Les FGMs ont connu une évolution importante dans le temps. D'abord, ils ont été proposés en 1984 par deux chercheurs dont l'un étudiait l'aéronautique et l'autre s'intéressait aux matériaux avancés. Ces deux là parlaient de leur rêve concernant un avion spatial exposé à un environnement à très haute température (1700° c).

Ils exposaient la problématique de la résistance à de grands écarts de température entre l'intérieur et l'extérieure, et ils se confrontent à la réalité suivante: Il n'existe pas de matériau unique supportant une telle situation. A partir de cette réflexion, ces deux chercheurs ont mis au point ce qu'on appelle les FGMs, ils les ont considérés comme des matériaux caractérisés par une résistance thermique améliorée et par des propriétés mécaniques spécifiques. Pour ce faire, ils ont opté pour l'utilisation de la céramique à la surface extérieure exposée à l'environnement à haute température.

En 1987, leur recherche a été acceptée par le ministère de l'éducation et des sciences qui a lancé un grand projet universitaire traitant les FGMs. A partir de cette mise en valeur du projet, plusieurs autres chercheurs et plusieurs laboratoires ont initié leurs recherches en discutant les méthodes de développement des FGMs, la conception des matériaux, leurs productions et leurs évolutions.

Enfin, une contrainte thermique relaxant matériau FGM a vu le jour lors d'une première conférence internationale qui s'est tenue à Sendai en 1990, ce ci a conduit à fonder toute une technologie, qui est devenue, même, de recueillir les attentions, non seulement au niveau des nations, mais aussi au niveau mondial.

### **I.4.3 Définition**

Un matériau à gradients de propriétés est un matériau composite qui est fabriqué en mélangeant les particules des phases de deux matières différentes, par exemple, en métal et en céramique. On assume que les phases matérielles constitutives sont parfaitement collées l'une sur l'autre. Le résultat est une structure multiphasée que nous considérons comme isotrope en nature. Souvent, les informations précises sur la taille, la forme et la distribution des particules ne peuvent pas être aisément disponibles, et les modules efficaces du composite évalué doivent être basés seulement sur les distributions de fraction de volume et la forme approximative de la phase dispersée. Une fois présentée avec une telle configuration, comme c'est le cas avec les matériaux à gradient de propriétés, il est nécessaire d'estimer les propriétés efficaces des matériaux afin de réaliser des simulations numériques de la conduction de chaleur, les problèmes thermoélastiques et l'équilibre de vibrations. Plusieurs modèles micromécaniques ont été développés au cours des dernières années pour estimer les propriétés efficaces de FGMs biphasés. Le plus simple, et peut-être le plus commun, est la loi classique linéaire de mélanges qui suppose que les propriétés efficaces sont la somme de chaque constituant de matériel et sa fraction de volume respective. Une autre méthode est la règle des mélanges modifiés, qui est une formule empirique qui incorpore les effets d'interaction aux valeurs des contraintes et déformations liées à chaque phase. [BERRABAH H M, 2011].

### **I.4.4 Elaboration des matériaux à gradient de propriétés**

La fabrication d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) peut habituellement être divisée en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être

choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation [KIEBACK B,2003].

Ces dernières années, les travaux menés aux laboratoires ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux.

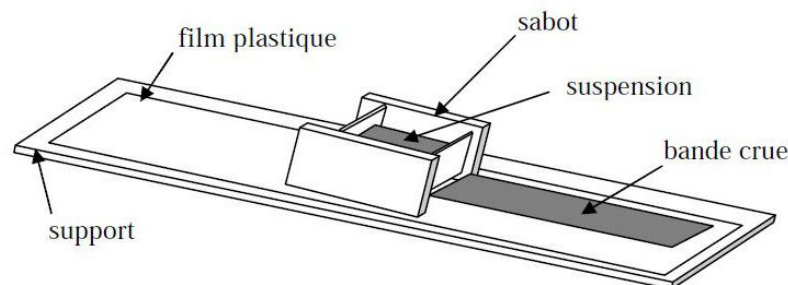
Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule (relation de Stokes). En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après:

#### I.4.4.1 Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.8), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [BOCH, P,1986] [BOCH, P,1987]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I.8 :** Figure I.8 Principe de la méthode coulage en bande [BOCH, P, 1986] [BOCH, P,1987].



Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler.R.E, 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [BOCH, P, 1987].

#### **I.4.4.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- **Formation du tesson ou "prise";**
- **Consolidation du tesson ou "raffermissement".**

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- **Pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) [Moya 1992];**
- **Une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).**

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

#### **I.4.4.3 Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Yang. J, 2003] .Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

#### **I.4.4.4 Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens H.D, 1990].

#### **I.4.4.5 Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi, M, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

#### **I.4.4.6 Frittage Laser Différentiel**

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un FGM de PSZ/Mo [Yuki, 1991]. La (figure I.9) montre schématiquement la disposition du procédé utilisé.

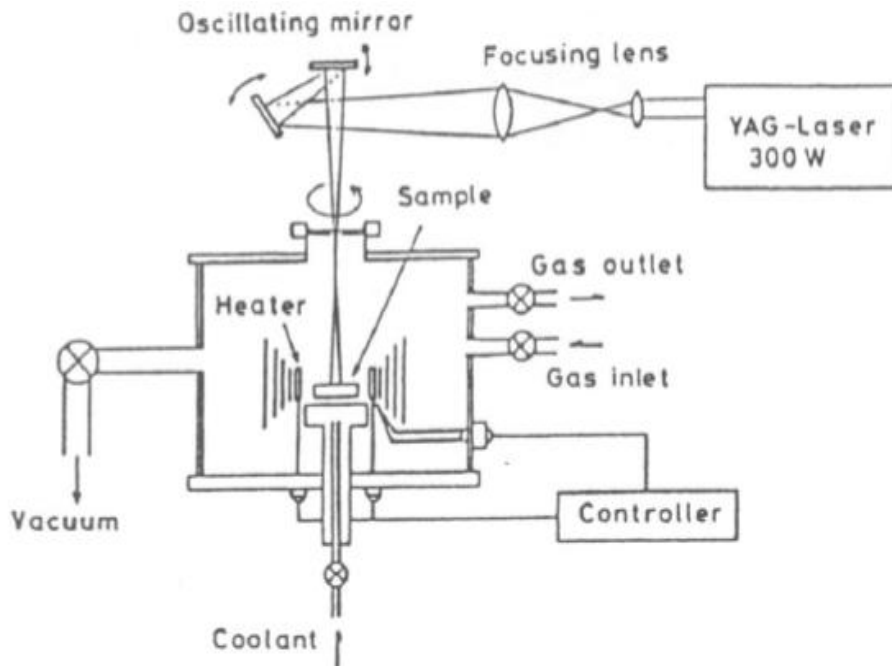


Figure I.9 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

#### I.4.4.7 Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique [Sark 1996]. L'élaboration des FGM peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [Hossein Abdizadeh 1997].

#### I.4.4.8 C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées [Kawa,C 1990].

#### I.4.4.9 Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs.

Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Hossein Abdizadeh, 1997].

#### I.4.4.10 Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches [Hossein Abdizadeh, 1997]. (Figure I.10).

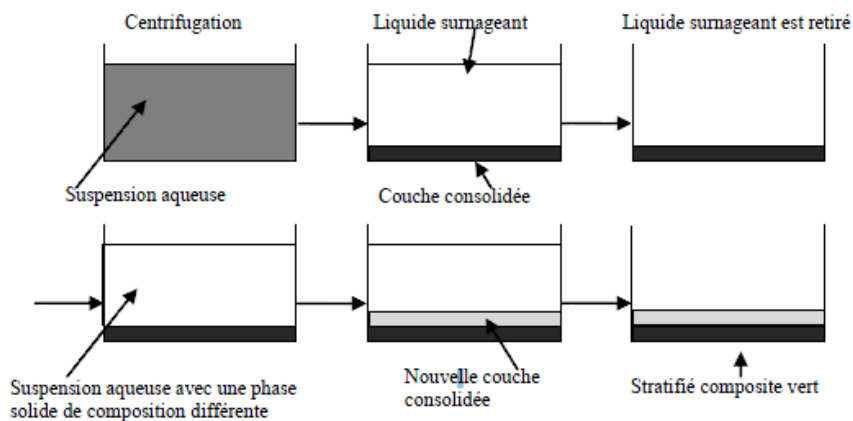


Figure I.10 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh 1997].

### I.5 Domaines d'application des FGMs

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

La figure I.11, résume la majorité des domaines d' application des FGMs, qui sera détaillés par la suite ;

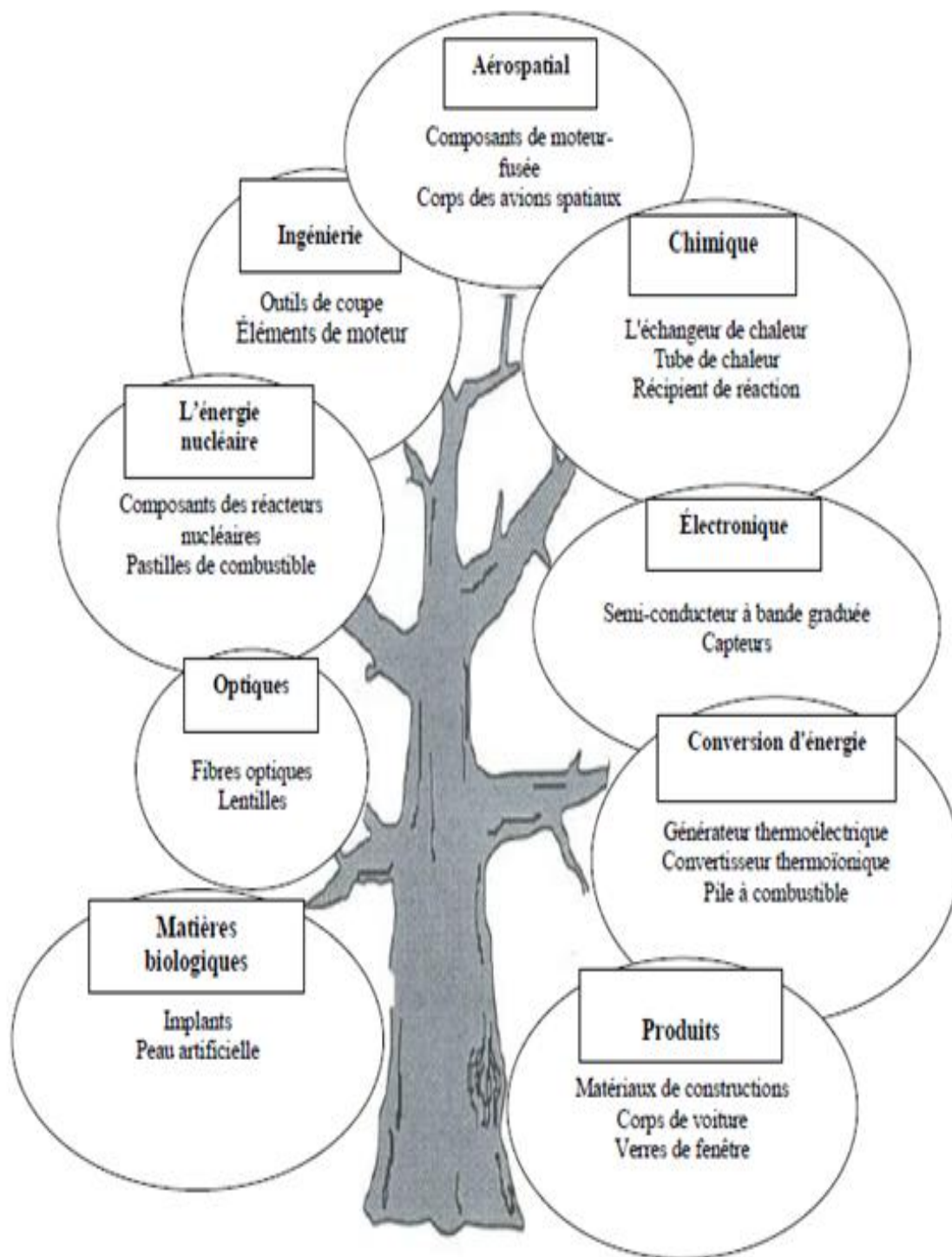


Figure I.11 : Les principaux domaines d'application des FGM [Houari, 2011]

### **I.5.2 Domaine aéronautique**

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Regardez deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau. À l'heure actuelle, il permet de produire le poids-léger, des matériaux solides et durables et est applicable à un large éventail de domaines tels que les matériaux de structure, le matériel de conversion d'énergie et d'autres. Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. FGMs sont également applicables à un mur externe d'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

### **I.5.3 Domaine des matières industrielles**

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Un exemple a la forme d'outils. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu. Une production à l'essai de l'outil industriel a été mené avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

### **I.5.4 Domaine Optoélectronique**

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, outils de communication utilisant les fibres optiques aux besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure. Application de FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

### **I.5.5 Domaine Biomatériaux**

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, un nouveau matériau qui peut remplacer des os et des articulations et à une longue vie a été souhaité. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion, de compatibilité, mais aussi biologiques et son innocuité sont souhaitées. Les FGM technologie est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents.

Technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer, aussi. L'un d'eux est, par exemple, une étude sur le renforcement de collagène structure en utilisant la technologie de classement.

### **I.5.6 D'autres domaines**

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. FGM technologie est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et efficace de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faite de polymères fluorés ont été développés. En outre, de nouvelles recherches mai également développer de nouveaux matériaux avec de nouvelles fonctions à l'aide de nanotechnologie de classification niveau.

## **I.6 Exemples des produits de FGM**

### **I.6.1 Système spatial**

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement

effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs énormes. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs.

### **I.6.2 Système de distribution et de transmission**

Les FGM technologie sont utilisées pour la commutation à isolation gazeuse (GIS). Le SIG est un appareillage complexe, constitué d'un disjoncteur, un sectionneur et un parafoudre.

Power and Industrial Systems Research and Development Center, Toshiba Corp construit un élément d'arrêt pour l'éclairage d'avoir une structure cristalline classés dans les entre l'extérieur et l'intérieur, résultant en une gestion du stress thermique et une amélioration considérable dans la capacité d'adsorption de l'énergie.

### **I.6.3 Fibre optique**

Asahi Glass Company a publié un Graded Index CYTOP TM de fibre optique, Lucina MC, depuis Juin 2000. Les fibres optiques plastiques (POF) peut facilement augmenter une fibre de taille dû à la propriété en plastique tout en maintenant leur flexibilité, ce qui entraîne la réduction du coût de l'installation grâce à un câblage facile. D'ailleurs, en ayant GI-type de distribution et l'utilisation de l'indice de réfraction CYTOP, qui est une matière claire et perfluorés, de données à haute vitesse de communication est devenu disponible. À présent, Lucina TM a réalisé la transmission à haute vitesse de grande taille de données allant jusqu'à 10 Gbit / s qui est équivalent à 200.000 lignes téléphoniques et a également atteint plusieurs centaines de mètres de distance de transmission. Dans le présent, de nombreuses constructions ont été réalisées principalement dans les hôpitaux et les écoles, et les demandes sont encore en croissance.

### **I.6.4 Industriel**

La substance se comportant à la fois résistance à l'usure supérieure et de la ténacité est nécessaire pour produire des outils idéaux industriels. Mitsubishi Material Corp a fabriqué un matériau revêtu CVD, UE6020. Il a une structure de surface classée, pour lesquelles le concept de la FGM a été appliqué. Un outil revêtu CVD a été préparé avec succès pour une



application pratique et les caractéristiques remarquablement améliorées, telles que de porter en soi et de rupture, qui est contradictoires entre eux, cependant.

En outre, Ltd applique la technique de la FGM au carbure outils. Autres différentes applications sont également possibles, par exemple, le carbure de composition classés / matériel en acier articulé est applicable aux instruments de plastique formant (coup de poing par exemple, de matrices et de moules), des outils pour le développement urbain (bit par exemple) et les pièces de machines (p.ex. garniture mécanique et manette des gaz tige de valve). En outre, des diamants dispersés carbure est applicable au centre des lames et des outils de roulement et résistant à l'usure des outils industriels tels que des centres de tournage.

### **I.6.5 Titanium**

Le titane est utilisé pour une caisse de voir car il est la lumière matérielle pondérée et non allergique, mais il a une faible dureté et est inférieur en résistance aux dégâts. Par conséquent, le durcissement de surface de titane, une nouvelle technique a évolué pour améliorer la qualité des eaux de surface par traitement

Thermique à basse pression et H<sub>2</sub>O atmosphère de gaz mixtes. Cette technique permettra surface dure de maintien surface de miroir sans couleur. Une nouvelle marque de montre avec le corps en titane traitée par le durcissement de surface.

### **I.6.6 Crampons Baseball**

La technique d'excision est utilisée pour tasseaux. Traitement thermique des aciers industriels utilisés doivent être utilisées avant. Toutefois, il n'était pas facile de résister à l'usure à partir d'argile et de sable, et des clous en l'habitude d'avoir de nombreux échecs. Par conséquent, une nouvelle chaussure de base-ball a été conçue pour avoir taquets de forme particulière avec des conseils en alliage de carbure de ciment et d'aciers au carbone constitué par la méthode de soudage par résistance. Ils n'avaient reçu aucune réclamation pour les défauts ou de fissures pour le moment.

### **I.6.7 Lames de rasoir**

Ltd commercialisées avec succès classés lames de rasoir dureté. Ils ont utilisé à haute résistance et la ténacité à-inox pour un substrat et des composés de haute dureté intermétalliques pour une couche de surface pour la fabrication d'une lame qui a une structure

à haute adhérence composition classée. En conséquence, l'une avec douceur ainsi que la forte et profonde à raser les résultats pourraient être obtenus.

### **I.6.8 Autres applications**

En plus de ce que nous venons de mentionner ci-dessus, beaucoup de produits FGM ont été élaborés tels que les outils industriels, fibres optiques, pièces et composants électroniques de précision. Nous pouvons voir de nombreuses applications du concept de la FGM dans diverses recherches et dans différents domaines industriels, on assiste à une propagation des FGM dans de nombreuses applications.

## **I.7 Propriétés physiques et mécaniques des FGM**

Comme exemple du matériau FGM, l'Aluminium-Céramique a été choisi.

### **I.7.1 Propriétés de l'Aluminium**

#### **I.7.1.1 Définition**

L'Aluminium est un élément chimique de numéro atomique 13, de symbole Al, appartient au groupe 13 du tableau périodique ainsi qu'à la famille des métaux, de couleur blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant. L'aluminium est un métal malléable, argenté, peu altérable à l'air et peu dense.

#### **I.7.1.2 Propriétés physiques**

L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660 °C. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut facilement le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport [Houari, 2011].

#### **I.7.1.3 Propriétés mécaniques**

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

**Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :**

- **Résistance à la traction.**
- **Résistance à la pénétration (dureté).**

**Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :**

- **La malléabilité (mises en feuilles).**
- **La ductilité (mise en fils).**

#### **I.7.1.4 Propriétés des alliages d'aluminium**

**L'Aluminium a pour propriétés une :**

- **Température de travail élevée.**
- **Très bonne résistance à la corrosion.**
- **Légèreté.**
- **Très bonnes solidités, dureté et rigidité.**
- **Bon rapport force/poids.**
- **Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.**
- **Bonne conductivité thermique.**
- **Conductivité électrique élevée.**
- **Bonnes caractéristiques de finition.**
- **Entièrement recyclable.**

Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme un revêtement extérieur de bâtiments.

Dans les milieux corrosifs et en l'absence de la couche d'oxyde les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqures de la corrosion sous

contrainte ou une corrosion généralisée peuvent se développer. Dans des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

### **I.7.1.5 Propriétés de la céramique**

#### **I.7.2 Définition**

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

#### **I.7.2.1 Propriétés physiques**

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de  $3800 \text{ kg/m}^3$ . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique, métallurgique, aéronautique, spatiale, médicale et dans les revêtements.

#### **I.7.2.2 Propriétés mécaniques**

**Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :**

- **Matières première employées.**
- **Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence**

#### **I.7.2.3 Propriétés des céramiques**

**Les propriétés de la céramique sont :**

- **Un module de Young élevé (Liaisons, covalente, ioniques).**
- **Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).**
- **Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).**

### I.8 Concept des matériaux a gradient de propriété FGM

Le matériau à gradient de propriété peut être fabriqué en faisant varier le pourcentage de deux ou plusieurs matériaux, ou en variant la microstructure d'un composant, de telles sortes, que le nouveau matériau possèdera les propriétés voulues suivant la direction désirée. C'est donc un composite, un hétérogène à caractéristiques inhomogènes à l'échelle macroscopique [Hossein Abdizadeh, 1997] et homogènes à l'échelle microscopique.

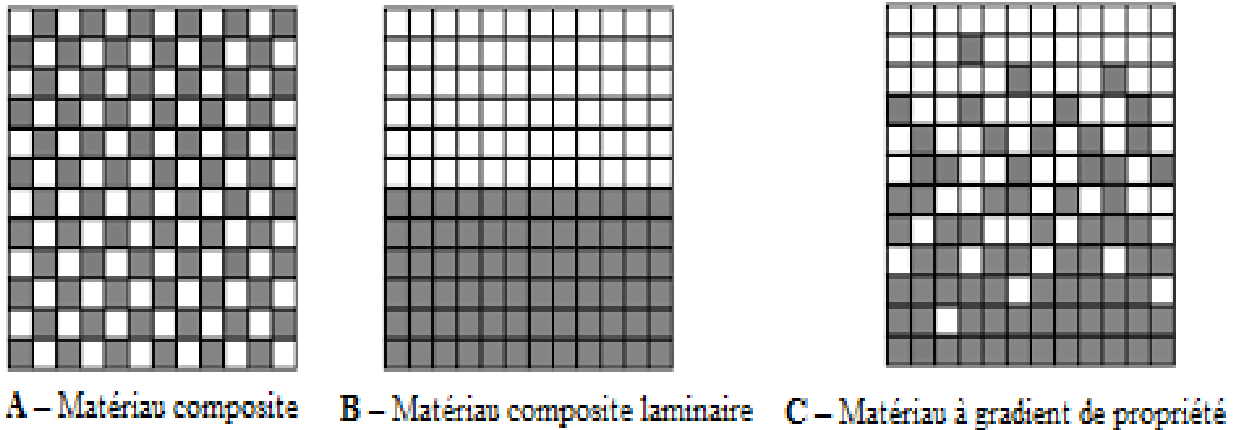
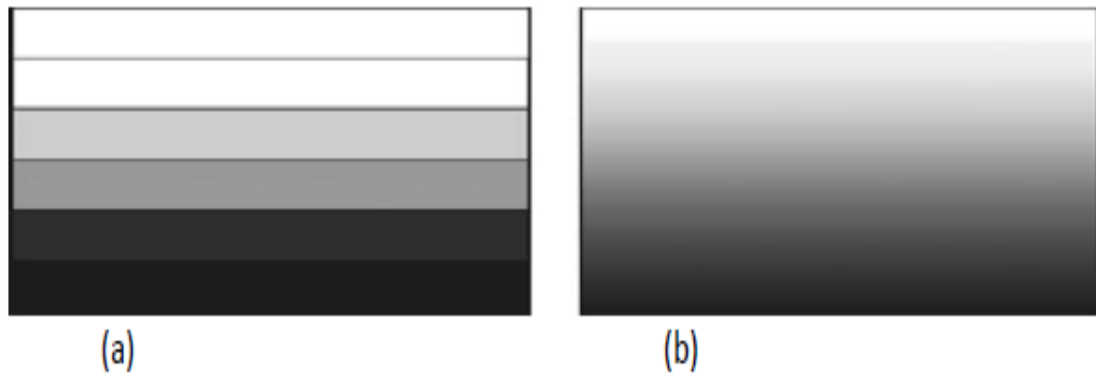


Figure I.12 : La distribution des composantes des matériaux

### I.9 Propriétés matérielles effectives des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM. Pour le premier choix, une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure.I.13). Pour la deuxième approche, une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) :



**Figure I.13 :** Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La fonction de loi de puissance est la plus employée par les chercheurs, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des poutres en FGM avec une variation de la fraction de volume qui suit une fonction de loi exponentielle.

### I.10 Les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM

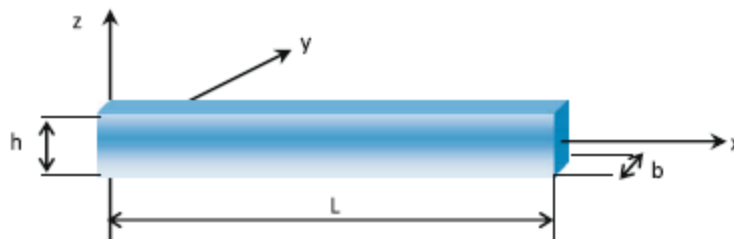
#### I.10.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^P \quad (\text{II-1})$$

Où  $p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local  $g(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z) \cdot E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad (\text{II-2})$$



**Figure I.14 :** Les dimensions de la poutre FGM

Où  $E_1$  et  $E_2$  et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z=h/2$ ) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure I.15, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p < 1$ . Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives  $E$  de la couche de FGM, comme le module de Young  $E$ , et la densité et le coefficient de poisson  $\nu$  peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{j=1} E_j g_j \quad (\text{II-3})$$

Là où le  $E_j$  et le  $g_j$  sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche  $j$  (Figure. I.15), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

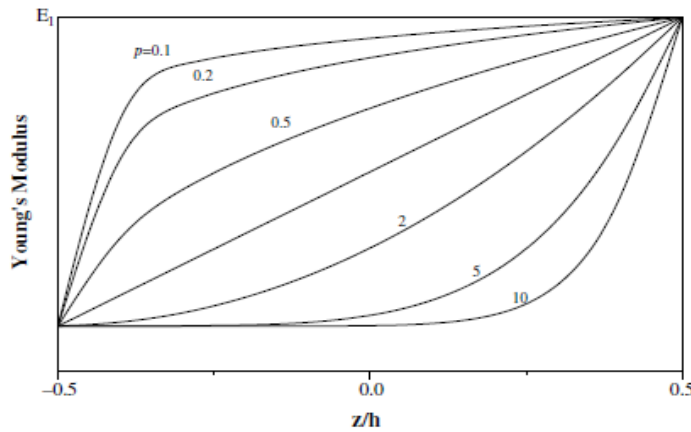


Figure I.15 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM

### I.10.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II-4})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = g_1(z).E_1 + [1 - g_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

$$E(z) = g_2(z).E_1 + [1 - g_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

La figure I.16 montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).

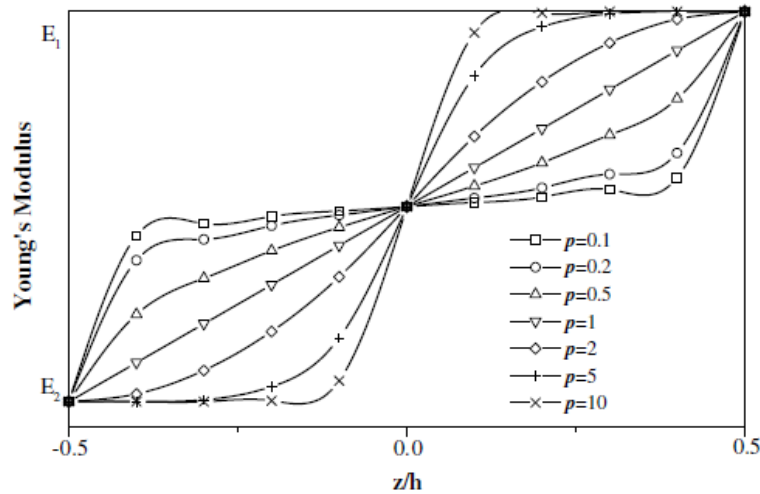


Figure I.16 : La variation du module de Young dans une poutre S-FGM

### I.10.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [F,Delale , 1983]:

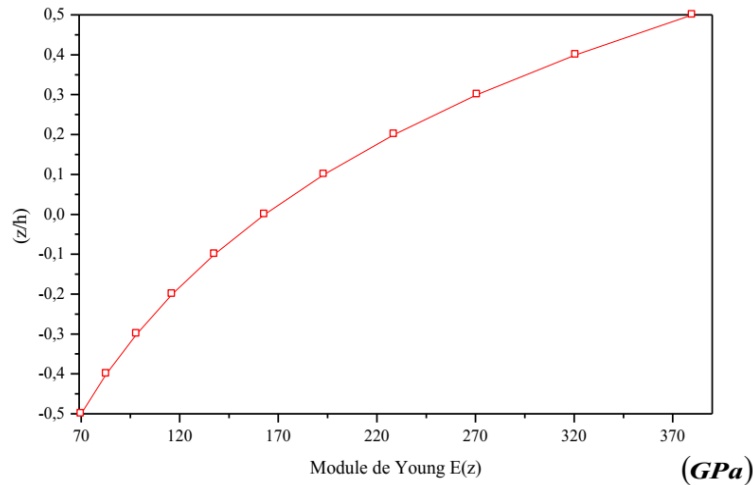
$$E(z) = E_2 e^{B.(z+h/2)} \quad (1.7.a)$$

avec

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \quad (1.7.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.17.





**Figure I.17 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM [B-O. Sallai, 2009].

### I.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé de présenter et de définir la notion des matériaux composites et matériaux FGM, ainsi on a présenté l’historique de la fabrication des FGM et les différentes méthodes d’usinage et les domaines d’application. Puis on a cité les propriétés matérielles effectives d’un matériau FGM.

À la fin nous avons terminés par les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) selon l’épaisseur, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou sigmoïde.

Le chapitre suivant va porter sur les théories régissant le comportement des structures en matériaux à gradient de propriétés.

## **Chapitre II Les théories des structures FGM**

## II.1 Introduction

Les structures en FGM peuvent être considérées comme des corps hétérogènes. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [A. K,1989], [R. K. Kapania,1989] ,[T. Kant,2000] ,[E. Carrera,2000] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque. L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [N.J. Pagano,1969], [N.J. Pagano,1970], [S. Srinivas,1970], [S. Srinivas,1973]. La encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- **Approche monocouche équivalente.**
- **Approche par couche.**
- **Approche développement asymptotique.**

## II.2 Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

Voici dans un ordre chronologique les principaux événements marquants l'évolution de la théorie des plaques.

En 1750, Leonhard Euler et Jacques Bernoulli ont été les premiers à donner une approche mathématique au comportement des poutres, en introduisant respectivement deux notions, l'indéformabilité axiale de la fibre neutre (elle se déforme en flexion sans se contracter ni se comprimer) et la faculté des sections droites à rester droites après déformation.

En 1764, par analogie aux poutres, Leonhard Euler est arrivé à définir une équation différentielle du second ordre décrivant la vibration libre de la peau des tambours assimilée à une membrane élastique [Chaouche A, 2013].

En 1787, Ernst Chladni, physicien allemand, connu pour être le fondateur de l'acoustique moderne, publia ses études expérimentales sur les vibrations des plaques, où il cherchait une méthode de mesure de la vitesse du son dans les corps solides. L'expérience de Ernst Chladni consistée à faire vibrer des plaques de taille, de forme et d'épaisseur différentes, saupoudrées de sable fin, et déposées horizontalement sur un support fixe à leurs centres, à l'aide d'un archet. La vibration des plaques fait migrer les grains de sable des zones de forte vibration aux zones de faible vibration, faisant apparaître des figures correspondants aux différents modes de vibration des plaques.

En 1811, l'Académie Française des sciences a lancé un concours pour la détermination d'une théorie mathématique expliquant les travaux du physicien Ernst Chladni, et c'est en 1816 que Sophie Germain mathématicienne et philosophe française obtient finalement l'équation de la déformée en ajoutant un terme à l'équation d'Euler tenant compte des rayons de courbure dans les deux directions perpendiculaires.

En 1821, Henri Navier présente un mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, ces derniers sont considérés comme le fondement de la théorie d'élasticité.

Les travaux de Henri Navier ont été suivi par d'autres travaux tels ceux d'Augustin Louis Cauchy, de Siméon Denis Poisson, de Gabriel Lamé et d'Émile Clapeyron.

Gustav Robert Kirchhoff l'un des plus grands physiciens du XIXe siècle, a réussi par ces travaux, à cerner le champ de validité de la solution de Navier, en calculant toutes les composantes du champ de déformation et de contrainte. Et il constata que la solution classique ne satisfaisait pas les conditions aux limites en déplacement pour une plaque d'étendue finie (appuyée ou encastrée), mais précisa que l'écart tend à s'annuler lorsque l'épaisseur relative de la plaque tend vers 0 et c'est en 1850 qu'il arriva à établir de façon correcte des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque.

En 1888, Augustus Edward Hough Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, pour fonder une théorie des plaques minces.

C'est ainsi que les trois principales théories feront leurs apparitions dans les années qui suivent.

### **II.2.1 Comportement des poutres composites**

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, Cela est du au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres [Elomari k, 2011].

### **II.2.2 Structures composites et élasticité bidimensionnelles**

Les structures composites peuvent être présentées sous différents modèles ;

#### **II.2.2.1 Approche monocouche équivalente**

Dans l'approche monocouche équivalente, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche. Le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche.

De nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés et ce on se basant sur le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin,. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

### II.2.2.1.a Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.II.1). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec,

$\phi_\alpha$  : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes  $x_\alpha$ ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$  : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

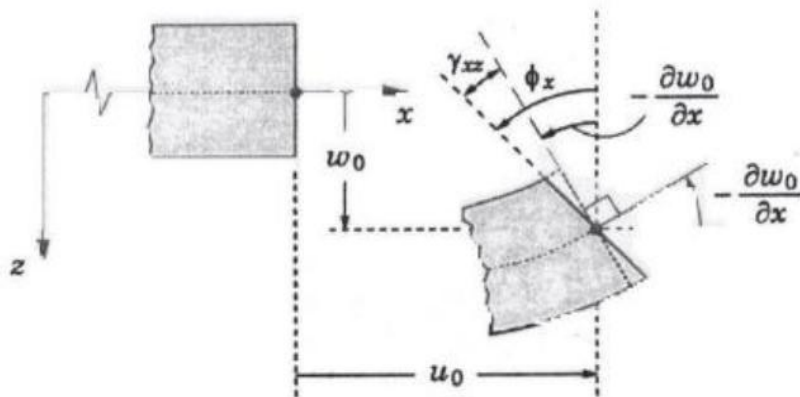
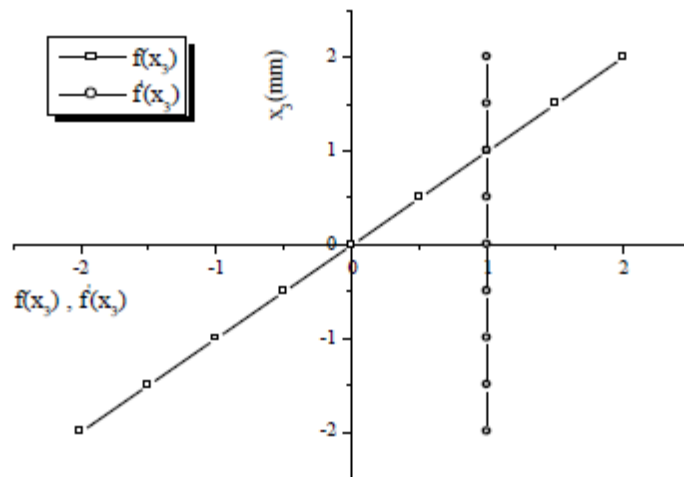


Figure II.1 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_\alpha^0$  sont constantes en  $z$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [J.M. Whitney, 1973]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

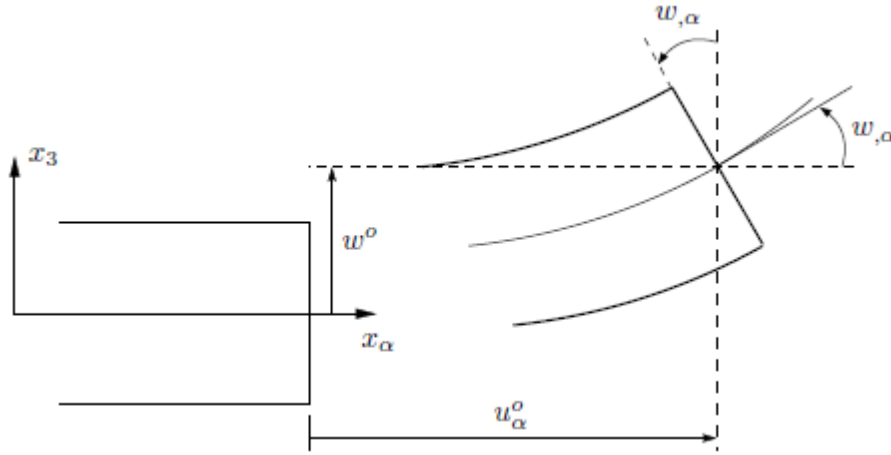
La Figure. II.2 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.



**Figure II.2 :** Variation de la fonction de gauchissement  $f(x_3) = x_3$  et  $f'(x_3)$  suivant l'épaisseur.

### II.2.2.1.b Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [Reissner E, 1961]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [G. Kirchhoff, 1850] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle ci après déformation (Figure. II.3).



**Figure II.3 :** Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad , \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.2})$$

Avec,

$u_{\alpha}^0$  : Le déplacement de membrane dans la direction  $\alpha$  ,

$w$  : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$  : La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

### II.2.2.1.c Les modèles d'ordre supérieur

Plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur et ce pour franchir les limites des théories du premier ordre. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4) [L.Liberscu, 1969],[J.M. Whitney,1973] -[M. Touratier,1991], [Viet.Tung, 2004]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z \phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2 \phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3 \phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4 \phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

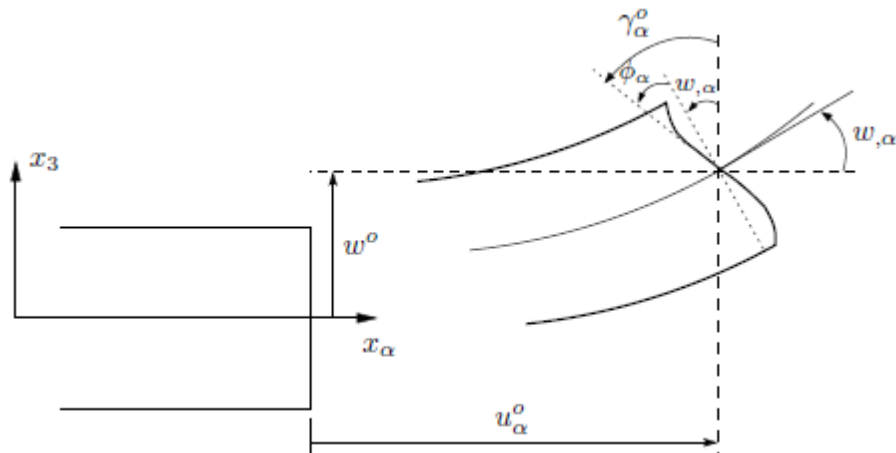
Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de



$\phi_j^{0(i)}$  détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_i^{0(j)} = 0$  pour  $j = 2,3,4$  et  $\phi_3^{0(1)} = 0$ .

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec  $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0$ ,  $\phi_i^{o(3)}$ ,  $\alpha = \{1,2\}$ . Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$



**Figure II.4 :** Figure Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

L'approche d'Ambartsumyan [S.A. Ambartsumyan, 1969] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'approche de Reissner [73]:

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

L'approche de Reddy [J.N. Reddy, 1987] avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de [J.N. Reddy, 1987], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [M. Touratier, 1991] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [J.N. Reddy, 1984].

Récemment, Afaq et al. [K.S. Afaq, 2003] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$  alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de Aydogdu [Metin Aydogdu, 2005] avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

$h$  : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

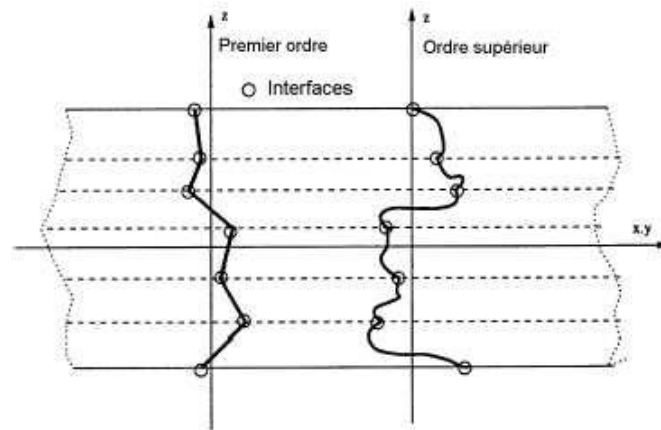
### II.2.2.2 Approche par couche

Ces approches ont été élaborés afin de mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La Figure. II.20.a et les Equations (II.3) et (II.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [78 A. Chabot,1997] ,[E. Carrera,2000] ,[K.S. Afaq,2003] ,[J.N. Reddy,1984] ,[M. Di Sciuva,1987]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

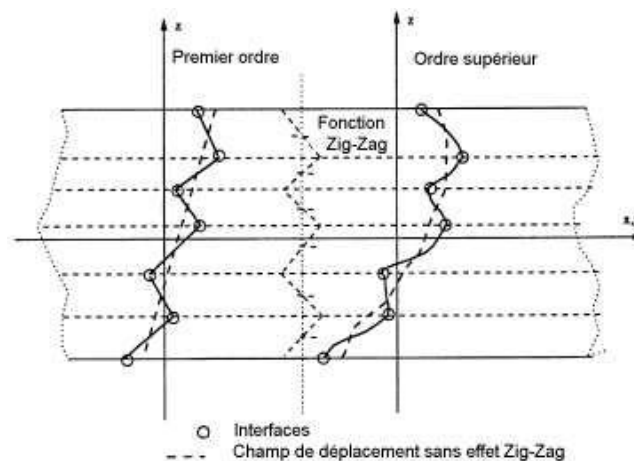
D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.

les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. II.5 et II.6).



**Figure II.5 :** Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [Viet.Tung, 2004]

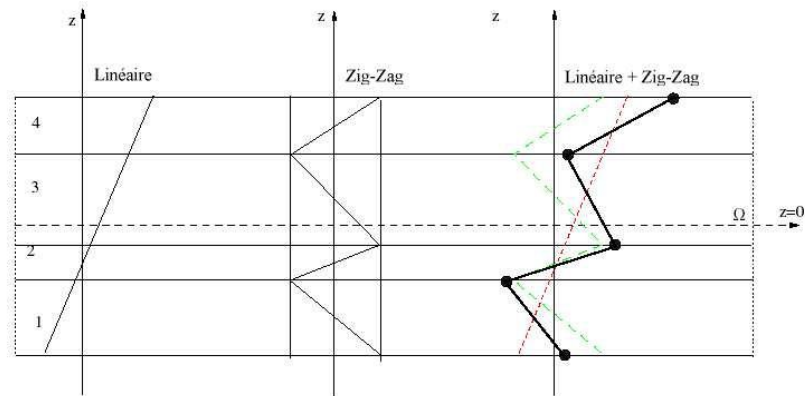


**Figure II.6 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [Viet.Tung, 2004]

### II.2.2.2.a Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [M. Di Sciuva, 1987]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside).

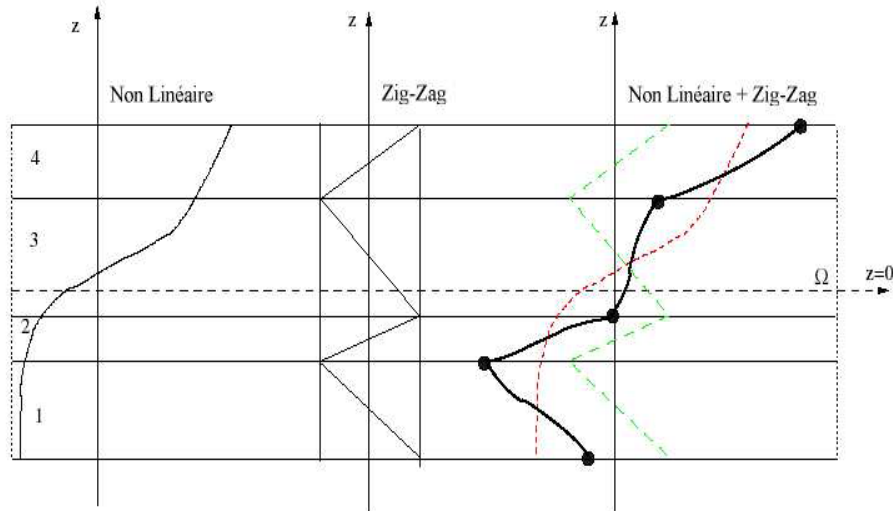
La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. II.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



**Figure II.7 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [Viet.Tung, 2004].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de [M. Di Sciuva, 1984], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [Viet.Tung, 2004]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.II.8). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figure II.8 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur.  
[Viet.Tung, 2004].

Dans les travaux de [M. Karama,1998] ,[C. Ossadzew, 2001], la fonction sinus de [M. Touratier,1991] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. [K.S. Afaq, 2003] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peut artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [U. Icardi, 2001]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C demandée qui complique leur implémentation numérique.

#### II.2.2.2.b Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. II.5). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de

continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [S. Srinivas,1973] ,[J.N. Reddy,1987] ,[M. Tahani,2003]], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [J.G. Ren,1986] ,[C. Kassapoglou,1987] ,[W.L. Yin,1994], utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [J.G. Ren, 1986] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [C. Kassapoglou,1987], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [W.L. Yin,1994], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particuliers. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [N.J Pagano, 1987]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à  $7n$  champs en  $(x; y)$ ,  $n$  étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC

dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [Viet.Tung, 2004].

### **II.3 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons exposé les différentes théories régissant les poutres à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous avons essayé de montrer les différentes théories des poutres telles que ; la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).dans le chapitre suivant nous allons procéder a une investigation sur les différents travaux de recherche sur les structures FGM.



## **Chapitre III Travaux de recherche réalisés sur les structures FGM**

### III.1 Introduction

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) sont un nouveau type de matériaux hétérogènes (Yamanouchi et al., 1990; Koizumi, 1993, 1997) où le gradient des propriétés macroscopiques change dans l'espace. Ainsi, les FGMs peuvent être confectionnés pour répondre à des performances matérielles aux différentes parties de la structure. Actuellement, les FGMs sont utilisés dans de diverses applications structurelles telles que la mécanique, le domaine spatial, nucléaire et l'ingénierie civile.

Récemment, plusieurs travaux scientifiques s'intéressant au comportement statique et dynamique des matériaux FGM ont vus le jour. Une revue intéressante de la littérature sur ces travaux peut être trouvée dans l'article de Birman and Byrd (2007).

Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cet axe de recherche.

### III.2 Etude des vibrations des poutres FGM

La poutre constituée de matériau à gradient fonctionnel a été relativement négligée en comparaison avec la plaque qui a bénéficié d'une attention particulière de la part des chercheurs. Pour cette raison, il existe relativement peu de travaux consacrés au comportement dynamique de la poutre FGM. En 2003, Chakraborty et al. [Chakraborty et al, 2003] présentèrent un nouvel élément poutre pour étudier le comportement thermoélastique des poutres en matériau à gradient fonctionnel. L'étude est basée sur une théorie de déformation du premier ordre. Les propriétés thermomécaniques sont considérées varier dans la direction de l'épaisseur de la poutre. Aydogdu et Taskin. [Aydogdu et Taskin, 2007] ont par la suite analysé les vibrations libres d'une poutre FGM en appuis simples. Différentes théories de déformation ont été utilisées (théories classique, du premier ordre et d'ordre supérieur). Le module de Young est considéré varier suivant des lois de distribution en puissance et exponentielle. Les fréquences naturelles ont été obtenues en utilisant des solutions de type Navier. Aucune prise en compte de la température n'a été faite dans cette étude. Ying et al. [Ying et al, 2008] ont obtenu des solutions exactes pour la flexion et la vibration libre d'une poutre FGM sur un support élastique Winkler-Pasternak, en utilisant une théorie bidimensionnelle de l'élasticité. Ils ont considéré la poutre orthotrope et les propriétés mécaniques sont supposées varier exponentiellement dans la direction de l'épaisseur. Le problème a été résolu en utilisant la SSP (State Space Procedure). En 2008, Xiang et Yang. [Xiang et Yang, 2007] étudièrent les vibrations libres et forcées d'une poutre FGM

multicouche d'épaisseur variable, sous des contraintes thermiques initiales. La poutre de Timoshenko étudiée a été prise sous les conditions aux limites : encastré-libre, encastré-encastré et sur appuis simples. Les inerties axiales et de rotation ont été prises en considération. Une théorie des poutres de déformation en cisaillement efficace basée sur la position de la surface neutre a été proposée par Ould Larbi et al [Ould Larbi et al, 2013] pour la flexion et la réponse des poutres FG en vibration libre. Saidi et al. [Saidi et al, 2013] ont utilisé la nouvelle théorie de déformation en cisaillement hyperbolique dans laquelle l'effet d'étirement (stretching) est incluse pour étudier la réponse en flexion thermomécanique des plaques FGM. Draiche et al. [Draiche et al, 2014] ont examiné la vibration libre des plaques composites rectangulaires avec une masse de pièce en utilisant un modèle de plaque à quatre variables trigonométriques. Nedri et al [Nedri et al, 2014] ont proposé une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique raffinée pour le comportement en vibration libre des plaques composites stratifiées reposant sur des fondations élastiques.

### **III.3 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM**

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques. Nous rappelons que le problème de vibration des poutres FGM est traité dans le cadre de cette thèse. En 1998, Praveen et Reddy [Praveen et Reddy, 1998] ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. Reddy. [Reddy, 2000] a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme. Reddy et Chen. [Reddy et Chen, 2003] ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matricielle. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique. En 2004, Huang et Shen. [Huang et Shen, 2004] ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations. Une

solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée par Vel et Batra. [Vel et Batra, 2004] pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. En 2006, les travaux de Ferreira et al. [Ferreira et al, 2006] ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites. Uymaz et Aydogdu. [Uymaz et Aydogdu, 2007] ont examiné l'influence de la géométrie ( $a/h$  et  $a/b$ ) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz. Ait Atmane et al. [Ait Atmane et al, 2010] ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier. Benachour et al. [Benachour et al, 2011] ont utilisé la même théorie développée par Hadji et al. [Hadji et al, 2011] pour l'étude de la vibration des plaques FGM présentant un gradient arbitraire. Klouche Djedid et al. [Klouche Djedid et al, 2014] ont présenté une théorie raffinée à quatre variables d'ordre «n» pour le comportement en flexion et en vibration libre des plaques FG. [Ait Amar Meziane et al, 2014] ont développé une théorie de déformation en cisaillement raffinée simple et efficace pour l'analyses de flambement et de la vibration des plaques EGM sandwichs sur fondations élastiques en considérant divers types de conditions aux limites.

#### **III.4 Etudes sur les problèmes thermo-élastiques statiques**

Un système FGM conçu pour une application donnée doit prouver sa capacité à supporter simultanément des charges thermiques et mécaniques. Reddy et al. [Reddy et al, 1999] ont étendu cette théorie des plaques FGM rectangulaires à une formulation du premier ordre de plaques annulaires et circulaires en flexion. Des solutions pour la déflection, les forces et moments résultants ont été présentées. La théorie originalement formulée par Praveen et Reddy. [Praveen et Reddy, 1998] a été par la suite étendue par Reddy. [Reddy, 2000] a également développé des modèles d'éléments finis en théorie de déformation du troisième ordre incluant les effets thermiques et non linéaires. Woo et Meguid. [Woo et Meguid, 2001] ont publié une formulation des grandes déformations des plaques et coques

minces en FGM sous des charges thermiques et mécaniques en utilisant la théorie classique des plaques. Vel et Batra. [Vel et Batra, 2002] étudièrent les petites déformations élastiques des plaques FGM avec des bords en appuis simples. Reddy et Cheng. [Reddy et Cheng, 2001] ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques.

Récemment, Tounsi et al. [Tounsi et al, 2013] ont présenté une théorie des plaques raffinées de déformation en cisaillement trigonométrique pour la flexion thermoélastique des plaques FGM sandwiches. Belabed et al. [Belabed et al, 2014] ont développé une théorie de déformation normale et de cisaillement simple et efficace d'ordre supérieur pour les plaques FG. Fekrar et al [Fekrar et al, 2014] ont proposé une nouvelle théorie raffinée de cinq inconnus basée sur la position de la surface neutre pour l'analyse de la flexion des plaques à graduation exponentielle.

### **III.5 Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique**

Le flambage des poutres, des plaques et des coques est un problème très important étudié par beaucoup de chercheurs. Ces éléments structuraux sont en général gradés de façon non symétrique par rapport au plan moyen. Il existe alors un couplage flexion-traction. Dû à ce fait, les charges critiques de flambage risquent d'être plus importantes que celles obtenues pour les mêmes membres structuraux en matériau homogène et symétrique. Le flambement des plaques FGM devient très dangereux lorsque celles-ci sont utilisées dans des systèmes de protection thermique.

L'une des premières études sur le flambement des structures FGM a été réalisée par Javaheri et Eslami. [Javaheri et Eslami, 2002a], Il s'est intéressé au flambement thermique des plaques FGM rectangulaires graduées dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance d'un mélange métal-céramique. Ils se sont basés sur la théorie classique des plaques. Les charges critiques de flambement sont influencées par les changements de température à travers l'épaisseur. Deux observations importantes ressortent de leur étude :

- La variation de la température critique de flambement d'une plaque FGM est inférieure à celle d'une plaque homogène.
- En augmentant l'indice  $k$  de la loi de distribution en puissance, la température critique de flambement est réduite.

Na et Kim. [Na et Kim, 2005] analysèrent le flambement des plaques FGM sous des charges thermiques et mécaniques combinées en utilisant la méthode des éléments finis. Le flambement thermique sous des changements de températures uniformes et non uniformes à travers l'épaisseur a été traité. Il ressort de cette étude que les caractéristiques du flambement thermique des plaques FGM sont très influencées par le champ de température, la distribution de la fraction volumique et les paramètres géométriques du système structural. En 2004, Wu. [Wu, 2004] a analysé le flambement thermique d'une plaque FGM d'épaisseur moyenne avec des bords en appuis simples. Il appliqua la théorie de déformation du premier ordre. Les équations d'équilibre et de flambement ont été résolues analytiquement. Des conclusions identiques à celles de Na et Kim ont été tirées. L'analyse de la post-flambement des plaques avec des propriétés dépendant de la température a été abordée par Shen. [Shen, 2007]. Les équations sont basées sur une théorie des plaques d'ordre supérieur incluant les effets thermiques. Les imperfections géométriques initiales sont prises en considération. Les résultats publiés concernent le post-flambage thermique du plan moyen des plaques FGM symétriques. Bodaghi et Saidi. [Bodaghi et Saidi, 2010] ont analysé le flambement d'une plaque FGM rectangulaire épaisse en se servant de la théorie d'ordre supérieur de Reddy et d'une méthode analytique. Les auteurs ont développé une procédure pour découpler les cinq équations différentielles et obtenir deux équations à résoudre. Pour les conditions imposées, deux côtés de la plaque sont en appuis simples et la plaque est soumise à différents types de chargements en plan. D'autres études intensives sur le flambement des plaques FGM ont été entreprises par ([Javaheri et Eslami, 2002b, 2002c], [Shariat, Javaheri et al, 2005, 2006, 2007]). Récemment, Khalfi et al. [Khalfi et al, 2014] ont utilisé une théorie de déformation en cisaillement simple et raffinée pour le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique. Zidi et al [Zidi et al, 2014] ont étudié le comportement hygro-thermomécanique des plaques FG supportées par des fondations élastiques en proposant une théorie des plaques simple et raffinée à quatre variables. Ait Amar Meziane et al. [Ait Amar Meziane et al, 2014] ont développé une théorie de déformation en cisaillement raffinée simple et efficace pour l'analyses de flambement et de la vibration des plaques EGM sandwiches sur fondations élastiques en considérant divers types de conditions aux limites.

### **III.6 Etudes sur les problèmes de stabilité des coques en (FGM)**

[Matsunaga, 2009] a présenté une théorie de la déformation d'ordre supérieur bidimensionnelle (2D) pour étudié de flambement des coques cylindriques circulaires en

FGM. Il été trouvé que les fréquences propres, la contrainte de flambement, la distribution du déplacement et les composantes de la contrainte des coques cylindriques circulaires FGM peuvent être anticipées avec précision par l'utilisation de la théorie de la déformation d'ordre supérieur 2D. [Sofiyev, 2009] a utilisé la méthode Galerkin pour obtenue la pression de flambement, les fréquences cycliques fondamentales, et le nombre d'ondes pertinentes des coques coniques FGM. [Deniz, 2013] a étudié l'effet des revêtements composites FGM sur la charge axiale critique qu'il est dépend de la fraction volumique ou des paramètres géométriques des coques FGM. [Sahmani, 2013] et ces collègues sont trouvés que la zone d'instabilité des microcoques FGM est inversement proportionnelle au paramètre d'échelle de longueur sans dimension et directement proportionnelle au facteur de charge statique. [Dung, 2014] est travaillé sur la stabilité des coques tronconiques FGM. Les résultats obtenues montrent que la charge critique de flambement et la stabilité augmentent lorsqu'une quantité de raidisseurs augmente sur une coque conique, et qu'elle est fortement affectée par les paramètres de fondation. [Shen, 2014] constate que la stabilité dynamique d'une coque FGM périodique transportant un fluide pour différentes portées de densité de fluide sans dimension peut être améliorée en augmentant la longueur d'une coque, et la structure principale de la coque devrait adopter la périodicité, alors que la stabilité dynamique varie inversement avec la densité d'une coque. [Anh, 2015] est fait une analyse de la stabilité des coques de FGM sur une fondation élastique. La pression externe et la fondation élastique jouent un rôle important dans la charge de flambement de bifurcation, la capacité de résistance à la température, et la charge mécanique des coques de FGM. [Huang, 2015] a étudié l'analyse du flambement élasto-plastique des coques cylindriques en FGM soumises à une pression externe. il se base sur la théorie de la déformation J2, il a été souligné que les zones de flambement élastique, élasto-plastique et plastique des coques cylindriques en FGM peuvent être différenciées. [Duc, 2016] montre que la capacité de chargement, le flambement et le post-flambement des coques cylindriques elliptiques ES-FGM sont énormément affectés par les paramètres géométriques, la fraction volumique, les raidisseurs et la fondation élastique. Sofiyev et Kuruoğlu [Sofiyev, 2016] ont effectué une analyse de la stabilité des coques coniques en FGM. Divers résultats ont été obtenus, montrant le comportement de la charge axiale critique, tant dimensionnelle que non dimensionnelle, sous l'impact de nombreux paramètres tels que la contrainte de cisaillement, l'indice de fraction volumique, la couche de FGM, l'épaisseur du noyau et l'angle du semi-vertex.

### III.7 Autres structures en (FGM)

Des études des comportements de flambement et de post-flambement des panneaux cylindriques en FGM sont présentés par [Duc, 2010] et [Tung, 2010], ils ont conclu que les matériaux et les paramètres géométriques peuvent tous deux affecter le comportement de post-flambement des panneaux cylindriques en FGM. Batani et Eslami [Batani, 2014] ont trouvé à travers les recherches que les arcs peu profonds en FGM peuvent suivre une trajectoire d'équilibre et devenir instables en fonction de la limite de charge critique des forces internes. Sedighi et ses collaborateurs [Sedighi, 2015] ont étudié l'analyse de la stabilité dynamique des FGM-NEMS asymétriques (structure nano électromécanique). Les résultats montrent que la tension de tirage des nanostructures varie proportionnellement à la contrainte de surface et inversement aux paramètres non locaux. La tension d'amorçage et l'amplitude des nanostructures ne peuvent pas être examinées sans la conductivité finie du FGM. Récemment, Barati et Shahverdi [Barati, 2017] ont étudié l'analyse de la stabilité des panneaux FGM supersoniques poreux. Il a été constaté que la stabilité des panneaux FGM dépend de la nature de la porosité et du taux d'humidité des panneaux FGM. Deng et des autres chercheurs [Deng, 2017] ont évalué la stabilité des tuyaux en FGM à plusieurs portées. La stabilité des tuyaux en FGM varie proportionnellement à l'exposant de fraction volumique, alors que les fréquences et vitesses naturelles varient proportionnellement à l'exposant de fraction volumique et varient inversement avec les paramètres non locaux. [Huang, 2017] Huang et ses collègues ont trouvé que la fraction volumique et le rayon par rapport à l'épaisseur jouent un rôle important dans la pression hydrostatique de flambement critique et le flambement élastoplastique des anneaux circulaires en FGM.

### III.8 Conclusion

Suite à cette recherche bibliographique, nous remarquons que les matériaux à gradient fonctionnel représentent un axe de recherche relativement nouveau, que depuis l'apparition du concept FGM, beaucoup de chercheurs s'y sont intéressés et d'innombrables travaux ont été publiés mais qu'il reste encore beaucoup à faire.

Le chapitre suivant va porter sur la conception des plaques FGM tous en définissant les différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.



**Chapitre IV**    **Analyse de l'effet thermique sur les fréquences des poutres non homogènes épaisses**

### IV.1 Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) présentent de nombreux avantages pour une utilisation dans l'ingénierie des composants structurels. Contrairement aux composites stratifiés fibres-matrice. Les FGM ne présentent pas des problèmes de décollement ou de délaminage qui résultent de la concentration des contraintes de cisaillement entre les couches de ces composites stratifiés.

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). Les FGM sont conçues de telle sorte que les propriétés matérielles varient de manière régulière et continue à travers l'épaisseur de la surface d'une céramique exposée à une température élevée à celle d'un métal sur l'autre surface. La composition du matériau change progressivement dans la direction de l'épaisseur. Les FGM sont largement utilisées dans le Génie Mécanique, Aérospatial, Nucléaire et le Génie Civil.

Actuellement, ils sont développés pour une utilisation plus générale en tant que composants structurels dans des environnements à haute température, et par conséquent, de nombreuses études sur les vibrations thermo-élastique des poutres FGM ont été élaborées [Sankar and Tzeng 2002, Wattanasakulpong *et al.* 2011, Giunta *et al.* 2013, Trinh *et al.* 2016].

Récemment, Bennai [Bennai 2018] ont développé l'étude de la dynamique et de la propagation des ondes des plaques FGM avec des porosités en utilisant une théorie des plaques à quatre variables. Ebrahimi [Ebrahimi 2018] analysent la vibration des poutres non homogènes non locales via une théorie de contrainte de couple modifiée intégrant des effets de surface. Hamdi [Hamdi 2018] ont développé le modèle d'éléments finis de poutre d'une pale de vent vibrante en grande déformation élastique. Rong [Rong 2018] ont utilisé une solution analytique pour la fréquence naturelle des tours d'éoliennes à monopile. Wu [Wu 2018] ont étudié la vibration libre des poutres FG-CNTRC post-bouclées thermo-électromécaniquement avec des imperfections géométriques. Chen [Chen 2018] ont étudié la vibration thermique des poutres FGM avec des conditions aux limites générales en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Attia [Attia 2018] ont utilisé la théorie des plaques raffinées à quatre variables pour l'analyse thermoélastique des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques variables. Karami [Karami 2018] ont étudié un modèle quasi-3D dépendant de la taille pour l'analyse de la dispersion des ondes des nanoplaques en FGM.

Dans ce chapitre, une théorie des poutres raffinée est proposée pour l'analyse de la vibration thermique des poutres en matériau fonctionnellement graduées FGM. En premier lieu, les propriétés des matériaux de la poutre FGM dépendant de la température sont données sous des formes mathématiques. Deuxièmement, des distributions de température uniformes, linéaires et non linéaires à travers l'épaisseur de la poutre sont introduites. Troisièmement, les résultats de la présente théorie des poutres raffinées sont présentés et comparés aux résultats des autres théories des poutres existants dans la littérature. En se basant sur la présente théorie des poutres, les équations de mouvement sont dérivées du principe d'énergie d'Hamilton. Une étude paramétrique a été menée afin d'étudier les effets de certains paramètres tel que les l'élévation de la température, le paramètre du matériau, les moments thermiques, et le rapport d'élanement sur les caractéristiques de la vibration libre des poutres fonctionnellement graduées FGM. Enfin, pour montrer la précision et l'efficacité de la présente théorie des poutres, les résultats obtenus par cette théorie sont comparés avec les résultats des autres solutions existantes dans la littérature.

## **IV.2 Formulation du problème**

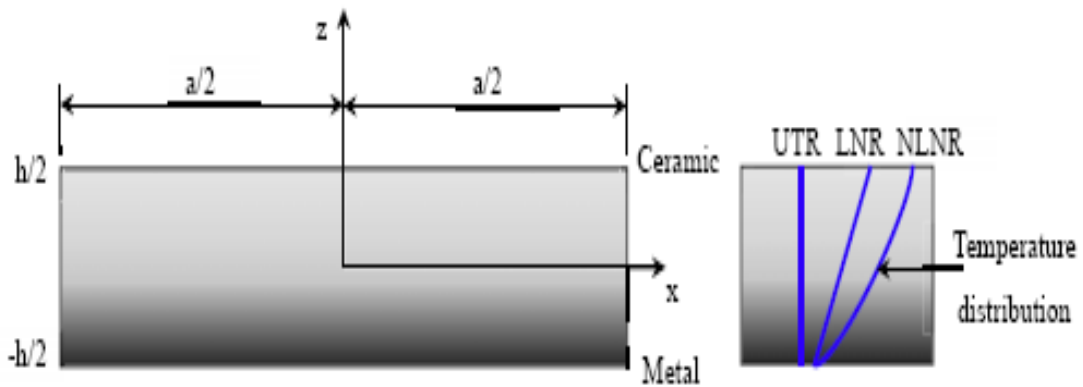
### **IV.2.1 Propriétés des matériaux de la poutre FGM dépendant de la température**

Considérons une poutre FGM, voir la Figure IV.1, de longueur  $L$  et d'épaisseur uniforme  $h$ . Les faces supérieure et inférieure de la poutre FGM sont à  $z = \pm h/2$ . La composition du matériau à la surface supérieure ( $z = h/2$ ) est supposée être riche en céramique et elle varie continuellement sans interruption dans la direction de l'épaisseur vers la surface riche en métal du côté opposé ( $z = -h/2$ ).

La distribution de loi de puissance P-FGM est utilisée pour la fraction volumique de la céramique et du métal comme :

$$V_c(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p, \quad V_m(z) = 1 - V_c(z) \quad (\text{IV.1})$$

Où  $k$  est l'indice de loi de puissance qui prend des valeurs supérieure ou égale à zéro.



**Figure IV.1 :** Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM et distributions de température.

Les propriétés du matériau thermo-élastique sont considérées en fonction de la température  $T$  et peuvent être calculées pour la céramique et le métal [Shen 2014] :

$$P(T) = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (IV.2)$$

Où  $P$  désigne le module de Young  $E$ , la densité de masse  $\rho$  et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , respectivement.  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  et  $P_3$  sont des coefficients dépendant de la température, qui sont donnés dans le tableau IV.1 pour différents matériaux. En se basant sur la loi de puissance avec la dépendance à la température décrite dans l'équation (IV.2), les propriétés matérielles  $P(z, T)$  de la poutre FGM à travers l'épaisseur sont décrites comme ;

$$P(z, T) = [P_c (T - P_m(T))] V_c(z) + P_m(T) \quad (IV.3)$$

Les propriétés matérielles sont calculées par Eq. (IV.2) pour la céramique et le métal à la température spécifique et suivi par Eq. (IV.3) pour obtenir les valeurs en  $z$ . Il est à noter que le coefficient de Poisson  $\nu$  est évalué comme la moyenne des valeurs de céramique et de métal à  $T_0 = 300K$ .

**Tableau IV.1 :** Coefficient dépendant de la température des matériaux utilisés.

Matériau	Propriétés	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$E(Pa)$	349.55e <sup>+9</sup>	0	-3.853e <sup>-4</sup>	4.027e <sup>-7</sup>	-1.673e <sup>-10</sup>
	$\alpha(1/K)$	6.8269e <sup>-6</sup>	0	1.838e <sup>-4</sup>	0	0
	$k(W/mK)$	-14.087	-1123.6	-6.227e <sup>-3</sup>	0	0
	$\nu$	0.26	0	0	0	0
	$\rho(kg/m^3)$	3800	0	0	0	0
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	$E(Pa)$	348.43e <sup>+9</sup>	0	-3.070e <sup>-4</sup>	2.160e <sup>-7</sup>	-87946e <sup>-11</sup>
	$\alpha(1/K)$	5.8723e <sup>-6</sup>	0	9.095e <sup>-4</sup>	0	0
	$k(W/mK)$	13.723	0	-1.032e <sup>-3</sup>	5.466e <sup>-7</sup>	-7.876e <sup>-11</sup>
	$\nu$	0.24	0	0	0	0
	$\rho(kg/m^3)$	2370	0	0	0	0
SUS304	$E(Pa)$	2.01e <sup>+11</sup>	0	3.08e <sup>-04</sup>	-6.534e <sup>-7</sup>	0
	$\alpha(1/K)$	1.233e <sup>-05</sup>	0	8.086e <sup>-4</sup>	0	0
	$k(W/mK)$	15.379	0	-1.264e <sup>-3</sup>	2.092e <sup>-6</sup>	-7.223e <sup>-10</sup>
	$\nu$	0.3262	0	-2.002e <sup>-4</sup>	3.797e <sup>-7</sup>	0
	$\rho(kg/m^3)$	8166	0	0	0	0

## IV.2.2 Différents cas de distribution de température

### IV.2.2.1 Distribution uniforme de température (UTD)

La température de l'ensemble de la poutre est supposée uniforme et augmentée de  $T_0 = 300K$  à la valeur actuelle. Cela signifie que la température en un point est  $T(z) = T_0 + \Delta T$ , où  $\Delta T$  est l'augmentation de température.  $T_0$  désigne la température ambiante, sous laquelle la poutre FGM est dans un état sans contrainte.

### IV.2.2.2 Distribution de température non linéaire (NLTD)

Supposons que la température sur les surfaces supérieures et inférieures de la poutre FGM reste constante et est donnée comme  $T_c$  et  $T_m$ . En utilisant la loi de conduction thermique, nous pouvons obtenir une équation d'état stationnaire comme suit:

$$-\frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0, \quad \begin{cases} T = T_m, z = -h/2 \\ T = T_c, z = h/2 \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

La fonction de température  $T(z)$  peut être obtenue avec les sept premiers termes de la série polynomiale [Shahrjerdi, 2011]:

$$T(z) = T_m + \frac{\Delta T}{C} \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) - \frac{k_{cm}}{(p+1)k_m} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{p+1} + \\ & \frac{k_{cm}^2}{(2p+1)k_m^2} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{2p+1} - \frac{k_{cm}^3}{(3p+1)k_m^3} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{3p+1} \\ & + \frac{k_{cm}^4}{(4p+1)k_m^4} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{4p+1} - \frac{k_{cm}^5}{(5p+1)k_m^5} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{5p+1} \end{aligned} \right] \quad (\text{IV.5})$$

Avec

$$C = 1 - \frac{k_{cm}}{(p+1)k_m} + \frac{k_{cm}^2}{(2p+1)k_m^2} - \frac{k_{cm}^3}{(3p+1)k_m^3} + \frac{k_{cm}^4}{(4p+1)k_m^4} - \frac{k_{cm}^5}{(5p+1)k_m^5} \quad (\text{IV.6})$$

Et

$$k_{cm} = k_c - k_m, \quad \Delta T = T_c - T_m \quad (\text{IV.7})$$

Ou  $k_c$  et  $k_m$  représentent la conductivité thermique de la céramique et du métal sous les températures de surface.

### IV.2.2.3 Distribution de température non linéaire (LTD)

La température dans les faces de céramique et du métal de la poutre FGM est supposée être  $T_c$  et  $T_m$ . Dans ce cas, la température sur la surface de métal est supposée être  $T_m = 305K$ , tandis que sur la surface de céramique, elle est augmentée à  $T_c = T_0 + \Delta T$ . Avec l'hypothèse d'une distribution linéaire, la température à travers l'épaisseur peut être déterminée comme:

$$T(z) = T_m + \Delta T \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) \quad (\text{IV.8})$$

### IV.2.3 Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie raffinée sont les suivantes:

- *L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface moyenne de la poutre FGM.*
- *Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la poutre et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.*
- *Le déplacement transverse  $w$  contient deux composantes de flexion  $w_b$  et de cisaillement  $w_s$ . Ces composantes sont en fonction des coordonnées  $x$  et du temps  $t$ .*

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{IV.9})$$

La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable devant la contrainte plane  $\sigma_x$ .

Le déplacement  $u$  dans la direction  $x$  est défini par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s,$$

$$(\text{IV.10})$$

La composante de flexion  $u_b$  est supposée le même déplacement donné par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour  $u_b$  peut être donné comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad (\text{IV.11})$$

À partir de la composante de déplacement  $u_s$  se dérive la composante de déformation  $\gamma_{xz}$ , qui varie suivant une forme parabolique à travers l'épaisseur de la poutre, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  aux surfaces inférieure et supérieure de la poutre. Par conséquent, l'expression pour  $u_s$  peut être donné comme :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (\text{IV.12})$$

Ou

$$f(z) = \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \quad (\text{IV.13})$$

#### IV.2.4 Equations cinématique et constitutive

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (IV.9) - (IV.13) tel que:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{IV.14a})$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{IV.14b})$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement est :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad (\text{IV.15a})$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \quad (\text{IV.15b})$$

Ou

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{IV.15c})$$

$$g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.15d})$$

L'état de contrainte dans la poutre FGM est donné par la loi de Hooke généralisée comme suit:

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (\text{IV.16a})$$

Ou

$$Q_{11}(z) = E(z, T) \text{ et } Q_{55}(z) = \frac{E(z, T)}{2(1+\nu(z, T))} \quad (\text{IV.16b})$$

#### IV.2.5 Equations du mouvement

L'énergie de déformation totale de la poutre FGM est donnée par :



$$U = U_p + U_T \quad (IV.17)$$

Ou  $U_p$  et  $U_T$  sont les énergies de déformation de la poutre FGM dues aux effets mécaniques et thermiques respectivement. Les énergies de déformation  $U_p$  et  $U_T$  sont données par [Shahrjerdi 2011, Li 2009]

$$U_p = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx \quad (IV.18a)$$

$$U_T = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x^T d_{11}) dz dx \quad (IV.18b)$$

Ou  $d_{ij}$  ( $i, j=1$ ) est la relation non linéaire déformation-déplacement [Shahrjerdi 2011], [Reddy 2004]. En remplaçant  $d_{ij}$  dans l'équation (IV.18bb) l'équation suivante est obtenue:

$$U_T = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dz dx \quad (IV.19a)$$

Avec

$$\sigma_x^T = -E(z, T) \alpha(z, T) \Delta T(z) \quad (IV.19b)$$

L'énergie cinétique de la poutre est donnée par

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, T) \left[ \dot{u} + \dot{w} \right]^2 dz dx \quad (IV.20)$$

Le principe de Hamilton pour un corps élastique peut être représenté par

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K) dt = 0 \quad (IV.21)$$

En remplaçant Eq. (IV.15) dans l'Eq. (IV.16) et en appliquant les équations. (IV.21) et (IV.14), on obtient les équations du mouvement de la poutre FGM comme suit:

$$\begin{aligned} & (A_{11} + A_{11}^T)d_{11}u_0 - (B_{11} + B_{11}^T)d_{111}w_b - (B_{11}^s + B_{11}^{sT})d_{111}w_s \\ & = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_b - J_1 d_1 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (IV.22a)$$

$$\begin{aligned} & (B_{11} + B_{11}^T)d_{111}u_0 - (D_{11} + D_{11}^T)d_{1111}w_b - (D_{11}^s + D_{11}^{sT})d_{1111}w_s + A_{11}^T(d_{11}w_b + d_{11}w_s) \\ & = I_0 \left( \ddot{w}_b + \ddot{w}_s \right) + I_1 d_1 \ddot{u}_0 - I_2 d_{11} \ddot{w}_b - J_2 d_{11} \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (IV.22b)$$

$$\begin{aligned} & (B_{11}^s + B_{11}^{sT})d_{111}u_0 - (D_{11}^s + D_{11}^{sT})d_{1111}w_b - (H_{11}^s + H_{11}^{sT})d_{1111}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{11}^T(d_{11}w_b + d_{11}w_s) \\ & = I_0 \left( \ddot{w}_b + \ddot{w}_s \right) + J_1 d_1 \ddot{u}_0 - J_2 d_{11} \ddot{w}_b - K_2 d_{11} \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (IV.22c)$$

Ou  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont des opérateurs différentiels donnés comme suit:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m=1) \quad (IV.23)$$

Et les composantes de rigidité sont données comme :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (IV.24a)$$

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55}[g(z)]^2 dz \quad (IV.24b)$$

$$(A_{11}^T, B_{11}^T, D_{11}^T, B_{11}^{sT}, D_{11}^{sT}, H_{11}^{sT}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^T(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (IV.24c)$$

Les inerties sont également définies comme :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f, z^2, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (IV.25)$$

### IV.3 Les solutions analytiques pour la poutre FGM

La méthode de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques pour une poutre FGM simplement appuyée. La solution est supposée être sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{bm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{sm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Où :  $U_m$ ,  $W_{bm}$ , and  $W_{sm}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associé à  $m$  ième mode propre, et  $\lambda = m\pi / L$ .

En substituant les expressions des déplacements  $u_0$ ,  $w_b$  et  $w_s$  des équations (IV.26) dans les équations du mouvement (IV.25), l'équation de fréquence suivante est obtenue :

$$\left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_m \\ W_{bm} \\ W_{sm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Pour lesquels :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11} + A_{11}^T)\lambda^2 \\ a_{12} &= (B_{11} + B_{11}^T)\lambda^3 \\ a_{13} &= (B_{11}^s + B_{11}^{sT})\lambda^3 \\ a_{22} &= -[(D_{11} + D_{11}^T)\lambda^4 + A_{11}^T\lambda^2] \\ a_{23} &= -[(D_{11}^s + D_{11}^{sT})\lambda^4 + A_{11}^T\lambda^2] \\ a_{33} &= -[(H_{11}^s + H_{11}^{sT})\lambda^4 + \lambda^2(A_{55}^s + A_{11}^T)] \end{aligned} \quad (\text{IV.28a})$$

Et

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1 \\ m_{12} &= I_1\lambda \\ m_{13} &= J_1\lambda \\ m_{22} &= -(I_0 + I_2\lambda^2) \\ m_{23} &= -(I_0 + J_2\lambda^2) \\ m_{33} &= (I_0 + K_2\lambda^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.28b})$$

#### **IV.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, une théorie des poutres raffinée a été proposée pour étudier et analyser la vibration thermo-élastique des poutres fonctionnellement graduées FGM, simplement appuyées sous chargement thermiques. La théorie présentée à une forte similitude avec la théorie classique des poutres dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les équations du mouvement pour la poutre FGM sont obtenues par le principe d'énergie d'Hamilton. Dans ce travail les propriétés des matériaux de la poutre FGM dépendant de la température sont données sous des formes mathématiques. Trois types de distributions de température à travers l'épaisseur de la poutre sont utilisés : uniforme, linéaires et non linéaires. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

## **Chapitre V Validation et comparaison des résultats**

## V.1 Introduction

Ce chapitre vise à mettre en évidence la théorie de déformation de cisaillement raffinée des poutres, développée dans le chapitre précédent. La théorie proposée contient trois inconnues et trois équations gouvernantes, par ailleurs elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, sans tenir compte du facteur de correction de cisaillement. Dans ce contexte, l'étude de la réponse mécanique sera réalisée pour l'analyse de l'effet de températures sur la vibration libre des poutres en matériaux fonctionnellement gradués FGM sous variation uniforme, linéaire et non-linéaire de température à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles de la poutre FGM sont supposées

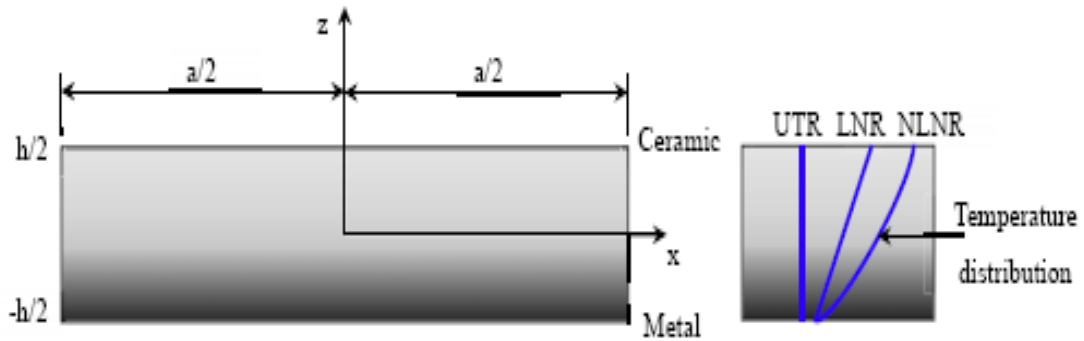
Les propriétés matérielles thermo-élastique de la poutre FGM sont considérées en fonction de la température  $T$  et variables à travers l'épaisseur selon une distribution simple en loi de puissance P-FGM. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de la fraction de volume et le type de distribution de la température sur les fréquences de vibration des poutres sont tous discutés. Les solutions obtenues sont vérifiées en les comparant avec ceux rapportés dans la littérature.

## V.2 Caractéristiques des paramètres étudiés

Afin de mettre en évidence l'exactitude de la théorie raffinée exposée dans le chapitre IV, pour l'analyse de la vibration des poutres en matériaux fonctionnellement gradués simplement appuyées sous différentes formes de distribution de températures, une poutre rectangulaire en FGM sera traitée.

### V.2.1 Caractéristiques de la poutre considérée

Considérons une poutre rectangulaire en matériaux fonctionnellement gradués, de longueur  $L$  et de section rectangulaire  $(bxh)$ , avec  $b$  et  $h$  représentant la largeur et la hauteur de la poutre respectivement comme montre la Figure V.1. La poutre est réalisée en matériau isotrope avec les propriétés matérielles en fonction de la température  $T$  et qui varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur.



**Figure V.1 :** Coordonnées d'une poutre FGM et distributions de température.

Les propriétés matérielles de la poutre FGM sont en fonction de la température et sont supposées variables suivant l'épaisseur de la poutre selon une simple loi de puissance P-FGM. La partie inférieure de la poutre FGM est riche en Métal (Aluminium, Al), tandis que la surface supérieure est riche en céramique (Alumine,  $Al_2O_3$ ). Le tableau V.1 montre les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude.

### V.2.2 Variations des paramètres étudiés

Les divers paramètres considérés dans cette étude sont :

1. Le rapport d'épaisseur  $L/h$ ,
2. L'indice de la fraction volumique  $p$ ,
3. La variation de la température  $\Delta T$ ,
4. Le type de distribution de la température,
5. Le mode de vibration.

## V.3 Analyse des résultats et discussions de l'effet des paramètres

### V.3.1 Résultats de la vibration libre des poutres FGM sans effet de température

Nous testons d'abord la précision des résultats de la présente théorie de cisaillement raffinée sans effet de températures ( $\Delta T = 0$ ) en comparant les résultats avec ceux prédits par d'autres théories de cisaillement d'ordre élevé telle que la théorie traditionnelle de déformation de cisaillement du premier ordre FSDBT développée par Sina [Sina. 2009], et les

différents résultats des théories de cisaillement d'ordre élevé de Simsek [Simsek. 2010]. Dans tous les exemples, aucun facteur de correction transversale de cisaillement n'est utilisé car une représentation correcte de la contrainte de cisaillement transversale est donnée. Sina [Sina. 2009] montrent que la théorie de cisaillement de premier ordre développée FSDT1 peut obtenir plus de précision que celle de la théorie traditionnelle du premier ordre FSDT2 afin de prédire les résultats de fréquence des poutres FGM. Dans ce tableau, les poutres FGM faite de matériau Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec la partie supérieur de la poutre est riche en Métal (Aluminium, Al), tandis que la surface inférieur est riche en céramique (Alumine, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), dont les propriétés des matériaux sont:

Métal (Aluminium, Al) :  $E_m = 70GPa$ ,  $\rho_m = 2700kg/m^3$ ,  $\nu_m = 0.23$ .

Céramique (Alumine, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) :  $E_c = 380GPa$ ,  $\rho_c = 3800kg/m^3$ ,  $\nu_c = 0.23$ .

Les résultats numériques sont présentés en termes de fréquences adimensionnel. Le paramètre de fréquence naturelle adimensionnel est défini comme :

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{I_0}{h^2 \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}}$$

A partir des résultats présentés dans le tableau V.1, on observe un bon accord entre les résultats de la présente théorie raffinée avec les résultats de fréquences des autres théories de cisaillement publiés pour différents rapports d'élancement L/h, en particulier en comparaison avec la théorie de cisaillement de premier ordre FSDT1 développée par Sina [Sina. 2009].

**Tableau V.1 :** Fréquence fondamentale adimensionnel des poutres en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sous température ambiante ( $p = 0.3$ ).

Source	$L/h = 10$	$L/h = 30$	$L/h = 100$
Présente	2.776	2.813	2.817
Wattanasakulpong et al. (2011)	2.803	2.845	2.85
FSDBT1 (Sina et al. 2009)	2.774	2.813	2.817
FSDBT2 (Sina et al. 2009)	2.695	2.737	2.742
PSDBT Simsek (2010)	2.702	2.738	2.742
ASDBT Simsek (2010)	2.702	2.738	2.742

### V.3.2 Résultats de la vibration libre des poutres FGM sans moments thermiques

À partir de la vaste revue de la littérature sur l'effet thermique, il est clair qu'il n'y a pas de résultats disponibles sur l'analyse de la vibration libre des poutres sous chargement



thermique sans moments thermiques (à l'exception des résultats de Trinh [Trinh. 2016]). Dans le cas où le moment thermique est nul, cela signifie que les composants de rigidité thermique  $(B_{11}^T, D_{11}^T, B_{11}^{sT}, D_{11}^s, H_{11}^s) = 0$ . Cet exemple vise également à vérifier l'effet thermique des propriétés des matériaux indépendants de la température (TID) et de la dépendance à la température (TD). Le tableau V.2 présente les fréquences fondamentale avec une élévation de température des poutres en  $Al_2O_3/SUS304$  sous distribution de température uniforme UTD sans moments thermiques avec un rapport  $L/h=30$ . À partir des résultats de ce tableau, on remarque que lorsque les propriétés des matériaux dépendent de la température (TD), les fréquences fondamentales sont nettement inférieures par rapport au TID (indépendants de la température), ce qui met en évidence l'importance de la dépendance à la température dans les poutres FGM. Pour cette raison, seule la solution TD est utilisée dans le reste des résultats de ce problème. En outre, la différence entre les résultats de la présente théorie des poutres raffinée utilisé et les résultats de Trinh [Trinh. 2016] est très claire dans ce tableau. Cette différence est due à la négligence de l'effet du moment thermique dans la poutre FGM.

**Tableau V.2 :** Fréquence fondamentale avec une élévation de température des poutres en  $Al_2O_3/SUS304$  sous distribution de température uniforme UTD ( $L / h = 30$ ).

Théories		$p = 0.2$			$p = 2$		
		$\Delta T = 0$	$\Delta T = 50$	$\Delta T = 100$	$\Delta T = 0$	$\Delta T = 50$	$\Delta T = 100$
TID	Trinh <i>et al.</i> (2016)	2.9506	1.8450	-	3.0129	1.1816	-
TD	Trinh <i>et al.</i> (2016)	2.9506	1.8220	-	3.0129	1.0868	-
	Présente	2.9454	1.8146	-	2.9892	1.0292	-

### V.3.3 Poutres FGM avec distribution uniforme de la température (UTD)

L'analyse de la vibration libre avec effet thermique des poutres en matériau FGM  $Al_2O_3/SUS304$  avec une distribution uniforme de la température (UTD) est présentée dans cette partie. Les propriétés matérielles dépendant de la température sont données dans le tableau IV.1 du chapitre précédent. Pour vérifier les résultats de la présente théorie avec les résultats donnés par Chen [Chen. 2018], les coefficients élastiques  $Q_{11} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}$  et  $Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$

sont utilisés dans cet exemple, et la contrainte thermique est exprimée par  $\sigma_x^T = -\frac{E(z)\alpha(z)\Delta T}{(1-\nu)}$ .

La fréquence propre adimensionnelle suivante est utilisée :

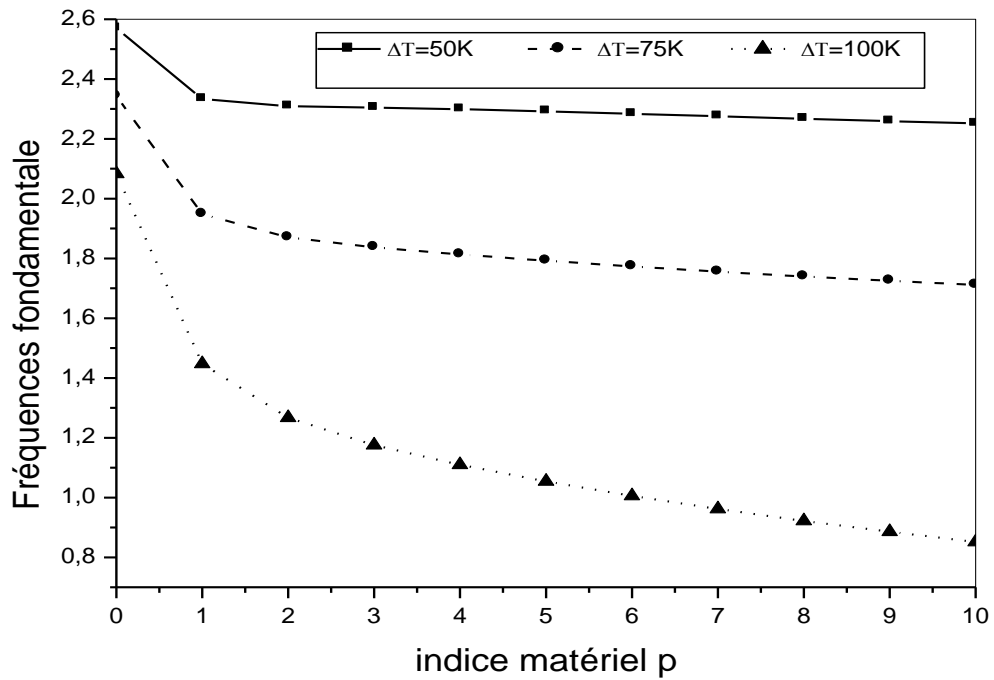
$$\Omega = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{I_0 / \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}$$

Les cinq premières fréquences adimensionnelles des poutres FGM simplement appuyées en Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/SUS304 avec deux valeurs de l'indice de la fraction de volume p = 0,2 et 2 sous élévation uniforme de température sont données dans le tableau V.3. À partir des résultats présentés dans le tableau V.3, on peut constater que les fréquences fondamentales de cette étude montrent un bon accord avec ceux obtenus par Chen [Chen. 2018]. De plus, les fréquences fondamentales sont diminuées avec l'augmentation de la température

**Tableau V.3 :** Cinq premières fréquences adimensionnelles en Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/SUS304 sous distribution uniforme de la température UTD.

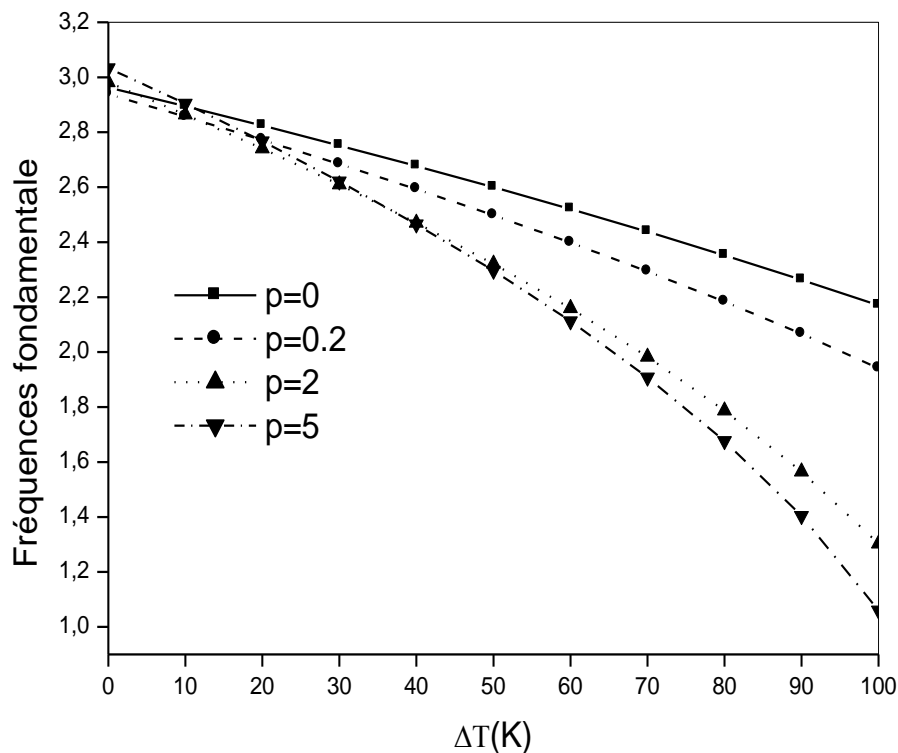
Modes	Théories	p = 0.2			p = 2		
		ΔT = 0	ΔT = 100	ΔT = 200	ΔT = 0	ΔT = 100	ΔT = 200
1	Chen <i>et al.</i> 2018	2.941	1.946	-	3.003	1.348	-
	Présente	2.938	1.942	1.178	2.982	1.303	2.496
2	Chen <i>et al.</i> 2018	11.601	10.731	9.719	11.766	10.473	8.830
	Présente	11.601	10.731	9.719	11.767	10.474	8.831
3	Chen <i>et al.</i> 2018	25.569	24.700	23.736	25.935	24.656	23.163
	Présente	25.566	24.697	23.733	25.916	24.636	23.141
4	Chen <i>et al.</i> 2018	44.225	43.340	42.367	44.760	43.462	41.975
	Présente	44.230	43.346	42.373	44.799	43.498	42.010
5	Chen <i>et al.</i> 2018	65.621	65.583	65.006	65.560	65.500	64.860
	Présente	66.911	66.001	65.003	67.710	66.373	64.854

L'effet du paramètre de matériau p sur les fréquences fondamentales des poutres FGM en Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>/SUS304 avec différentes valeurs de température ΔT sont illustrés dans la figure V.2. Le rapport L/h de la poutre est égal à 20. On peut remarquer que les fréquences propres de la poutre FGM diminuent avec l'augmentation du paramètre matériau p.



**Figure V.2 :** Variation du paramètre de fréquence fondamentale des poutres FGM en Si3N4/SUS304 avec différentes températures ( $L/h = 20$ ).

L'influence du changement de température uniforme sur les fréquences fondamentales des poutres FGM en Si3N4/SUS304 avec différentes valeurs de l'indice matérielle  $p$  est illustrée dans la figure V.3. Le rapport  $L/h$  est égal à 20. On peut voir que les fréquences fondamentales adimensionnelles des poutres FGM diminuent en augmentant la température. Aussi, la différence entre les fréquences de vibration augmente avec l'augmentation du changement de température  $\Delta T$ .



**Figure V.3 :** Les premières courbes de fréquence de température des poutres FGM en Si3N4/SUS304 ( $L/h = 20$ ).

### V.3.4 Poutres FGM avec distribution de température linéaire (LTD) et non linéaire (NLTD)

La comparaison entre les solutions UTD et LTD ainsi que les solutions LTD et NLTD pour les fréquences propres des poutres FGM sont données dans les tableaux V.4 et V.5. La fréquence propre adimensionnelle suivante est utilisée:

$$\bar{\Omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_c A}{E_c I}}$$

Dans lequel  $\rho_c$  et  $E_c$  sont la densité et le module de Young du céramique à température ambiante. Les solutions trouvées par Trinh [Trinh. 2016] pour le cas des poutres simplement appuyées utilisant la théorie des poutres TSDBT et les solutions d'Ebrahimi [Ebrahimi. 2015] et Chen [Chen. 2018] sont également utilisées pour comparaison avec les résultats de la présente théorie raffinée. Un bon accord entre les résultats de la présente théorie et les solutions trouvées dans la littérature pour diverses valeurs de l'indice matérielle  $p$ . Pour toutes

les valeurs du paramètre de matériau  $p$ , les résultats LTD sont significativement supérieurs à ceux de l'UTD.

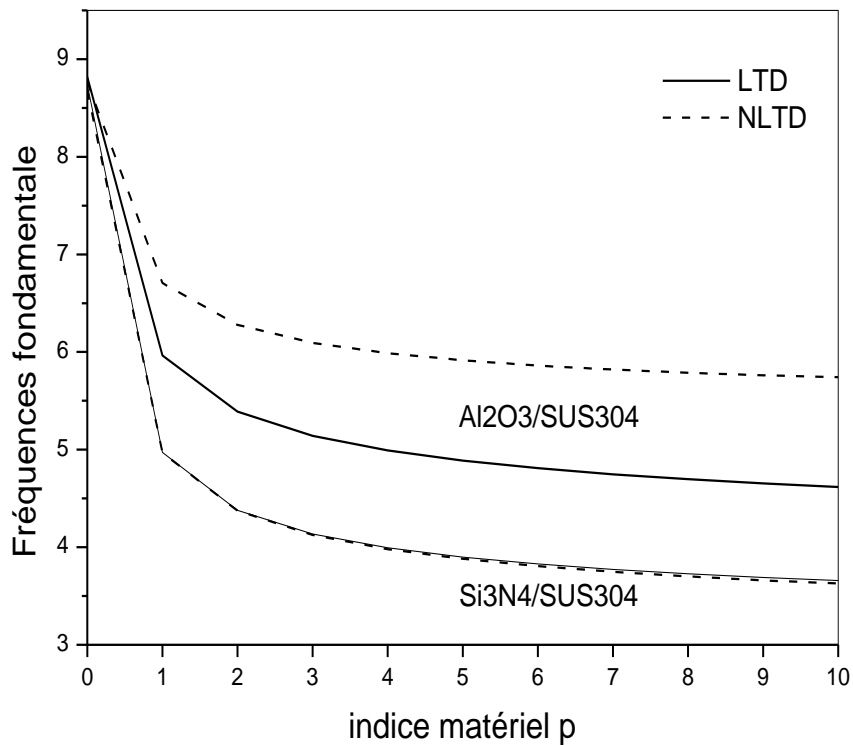
**Tableau V.4 :** Fréquences propres adimensionnelles des poutres simplement appuyées en Si3N4/SUS304 sous UTD et LTD ( $L/h = 20$ ).

$\Delta T$	Mode	Théories	UTD			LTD		
			$p = 0$	1	5	$p = 0$	1	5
10	1	Trinh <i>et al.</i> (2016)	2.8842	2,8450	2,9109	9.6843	5.8432	4.7454
		Présente	2.8831	2.8242	2.8966	9.6839	5.8043	4.7243
	2	Trinh <i>et al.</i> (2016)	11.5991	11,4678	11,8148	38.6698	23.2942	19.0058
		Present	11.5920	11.4640	11.8077	38.6686	23.2954	19.0055
	3	Trinh <i>et al.</i> (2016)	25.6350	25,4240	26,1669	85.4928	51.5782	42.0626
		Présente	25.6336	25.3889	26.1501	85.4903	51.5401	42.0407
30	1	Trinh <i>et al.</i> (2016)	2,7347	2,6157	2,6324	9.4864	5.6727	4.5792
		Présente	2.7332	2.5937	2.6156	9.4857	5.6332	4.5576
	2	Trinh <i>et al.</i> (2016)	11,4594	11.2543	11,5484	38.4431	23.1103	18.8315
		Présente	11.4458	11.2448	11.5415	38.4404	23.1103	18.8301
	3	Trinh <i>et al.</i> (2016)	25,4885	25,1915	25,9057	85.2146	51.3662	41.8680
		Présente	25.4855	25.1686	25.8801	85.2089	51.3264	41.8443
60	1	Trinh <i>et al.</i> (2016)	2,4845	2,2158	2,1295	9.1774	5.4030	4.3136
		Présente	2.4827	2.18907	2.1082	9.17601	5.3625	4.2911
	2	Trinh <i>et al.</i> (2016)	11,2261	10,9045	11,1378	38.0975	22.8282	18.5625
		Présente	11.2152	10.8959	11.1174	38.0926	22.8264	18.5594
	3	Trinh <i>et al.</i> (2016)	25,2608	24,8745	25.4947	84.7945	51.0434	41.5692
		Présente	25.2537	24.8222	25.4577	84.7839	51.0010	41.5425

**Tableau V.5 :** Fréquence fondamentale des poutres simplement appuyées  
Si3N4/SUS304 sous LTD et NLTD ( $L / h = 20$ ).

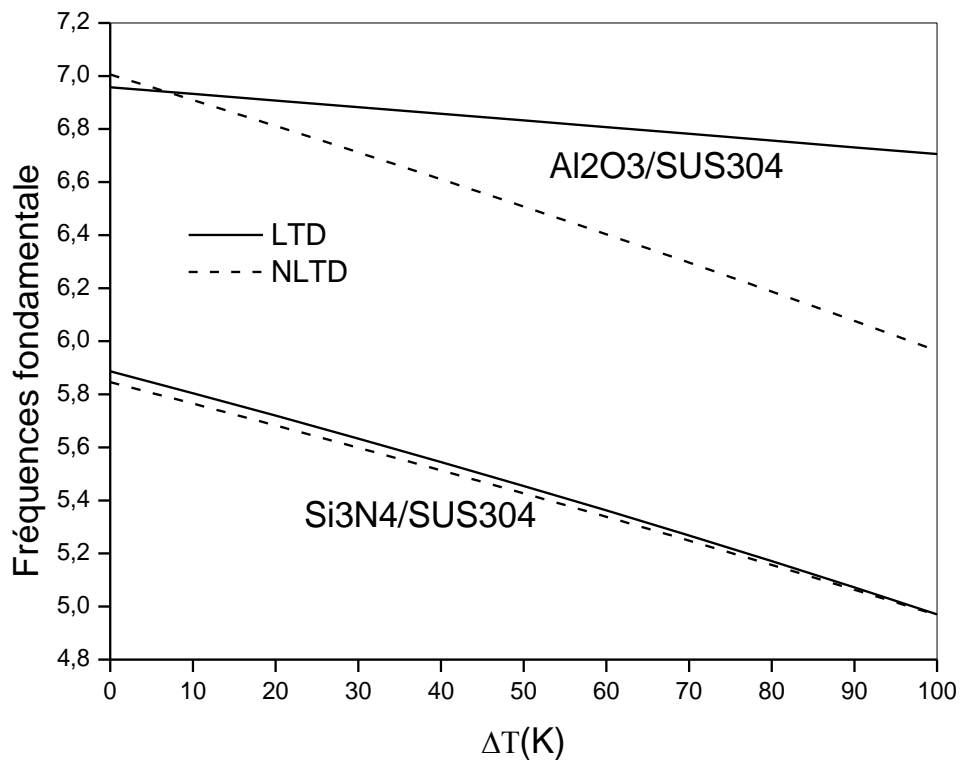
Distribution de température	$\Delta T(K) = 20$			40			80		
	p=0.1	0.5	1	p=0.1	0.5	1	p=0.1	0.5	1
LTD (Ebrahimi <i>et al.</i> 2015)	8.4634	6.5415	5.7114	8.2781	6.3717	5.5469	7.8795	6.0063	5.1927
Chen <i>et al.</i> 2018	8.4716	6.5742	5.7588	8.2802	6.3957	5.5847	7.8766	6.0166	5.2128
Présente	8.4685	6.5489	5.7196	8.2768	6.3702	5.5449	7.8727	5.9902	5.1713
NLTD (Ebrahimi <i>et al.</i> 2015)	8.4675	6.5437	5.7124	8.2911	6.3803	5.5527	7.9265	6.0402	5.2186
Chen <i>et al.</i> 2018	8.4730	6.5779	5.7632	8.2837	6.4055	5.5965	7.8861	6.0431	5.2448
Présente	8.4229	6.5098	5.6826	8.2319	6.3357	5.5137	7.8303	5.9691	5.1569

La variation de la fréquence fondamentale des poutres FGM simplement appuyées sous distributions de température linéaire LTD et non linéaire NLTD avec différents valeurs du paramètre de matériau  $p$  est représentée sur la figure V.4. Pour ce cas le rapport longueur sur hauteur  $L/h$  est égal à 20 et un changement de température  $\Delta T = 100K$  sont considérés. On voit que les fréquences fondamentales des poutres FGM diminuent lorsque les valeurs des paramètres du matériau  $p$  augmentent. Les différences des fréquences fondamentales entre les deux distributions de température sont limitées. Les fréquences fondamentales de la distribution de température non linéaire NLTD sont légèrement plus grandes que celles de la distribution linéaire LTD. Aussi, l'effet du matériau sur les fréquences de vibration est très clair sur cette figure. Les fréquences de NLTD et LTD sont presque identiques dans le cas du matériau FGM Si3N4/SUS304 et la différence entre les fréquences NLTD et LTD est très importante dans le cas du matériau FGM composé de Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/SUS304.



**Figure V.4 :** Fréquence fondamentale des poutres FGM sous distributions LTD et NLTD avec différents valeurs du paramètre de matériau  $p$  ( $\Delta T = 100K$ ), ( $L/h = 20$ ).

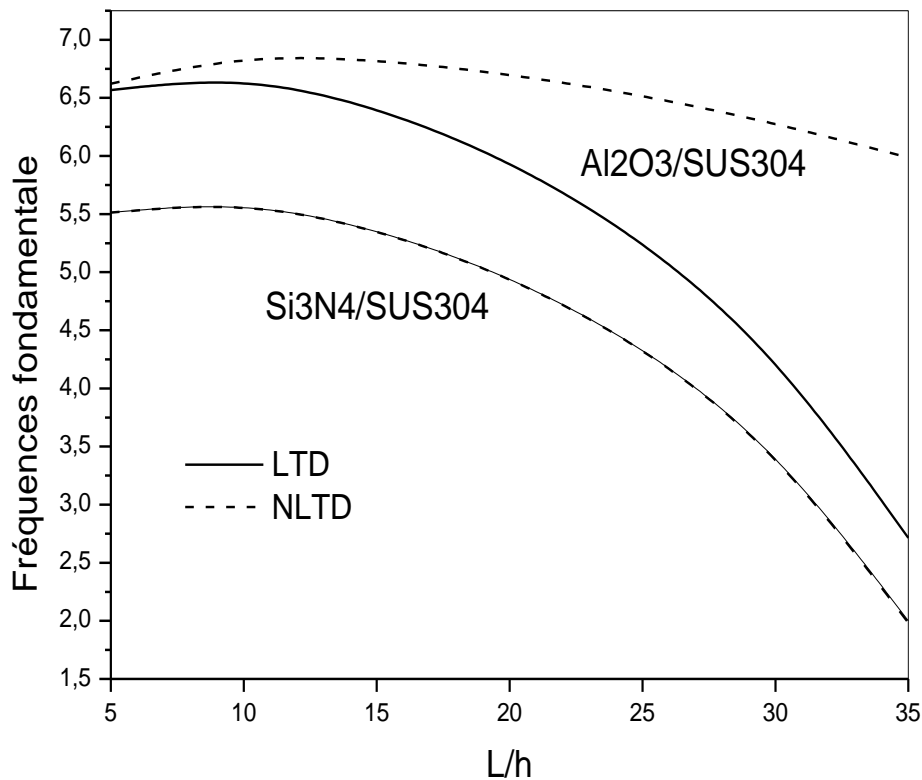
Les variations des fréquences fondamentales des poutres FGM simplement appuyées en fonction du changement de température  $\Delta T$  sont illustrées dans la figure V.5. Le rapport entre longueur et hauteur  $L/h=20$  et le paramètre de matériau  $p=1$  sont considérés dans ce cas. Comme le montre la figure, les fréquences fondamentales des poutres FGM diminuent avec l'augmentation du changement de température  $\Delta T$ . En outre, la différence entre les fréquences fondamentales pour les deux distributions de température augmente avec l'augmentation du changement de température. Cette différence de fréquence est très importante dans le cas du matériau FGM composé de  $Al_2O_3/SUS304$ .



**Figure V.5 :** Fréquences fondamentales des poutres FGM sous distributions LTD et NLTD avec différents valeurs de changement de température  $\Delta T$  ( $L/h = 20$ ).

La relation entre les fréquences fondamentales adimensionnelles et le rapport longueur-hauteur  $L/h$  est représentée sur la figure V.6. Sur cette figure, les poutres FGM simplement appuyées en  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{SUS304}$  et  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$  avec  $p = 1$  sont prises en compte. Deux types de distribution de température LTD et NLTD avec le même changement de température  $\Delta T = 100\text{K}$  sont considérés. On observe que les fréquences fondamentales adimensionnelles augmentent d'abord, puis diminuent avec l'augmentation du rapport longueur/hauteur. L'écart entre le LTD et le NLTD pour le cas de la poutre FGM en  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{SUS304}$  s'agrandit légèrement avec l'augmentation du rapport  $L/h$ .





**Figure V.6 :** Fréquences fondamentales des poutres FGM sous distributions LTD et NLTD avec différents valeurs de changement de température  $\Delta T$  ( $L/h = 20$ ).

#### V.4 Conclusion

La théorie de cisaillement de déformation raffinée des poutres est développée pour l'analyse de la vibration thermo-élastique des poutres FGM simplement appuyées sous des charges thermiques. La théorie proposée prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de traction sur les bords, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Dans ce travail, les propriétés des matériaux de la poutre FGM dépendant de la température sont données sous des formes mathématiques. Trois types de distribution de la température à travers l'épaisseur de la poutre FGM sont considérés : uniforme, linéaire et non linéaire. En se basant sur la présente théorie, les équations de mouvement sont dérivées du principe d'énergie d'Hamilton. La convergence et l'exactitude de la présente théorie sont démontrées par des comparaisons avec ceux disponibles dans la littérature. Les effets de l'élévation de température, le paramètre du matériau, les

moments thermiques et du rapport d'élanement sur les caractéristiques de vibration libre des poutres FGM sont étudiés en conséquence. Les effets de la distribution de la température à travers l'épaisseur sur les fréquences naturelles sont également étudiés. En conclusion, et à travers tous les études comparatives on peut dire que la présente théorie proposée s'avère appropriée et efficace pour l'analyse de la vibration des poutres FGM sous des charges thermiques.

## Conclusion générale et perspectives

---

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur la détermination des caractéristiques vibratoires des structures en matériaux à gradient de propriété (FGM), nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les fréquences de vibrations sous chargement thermique utilisant la théorie de cisaillement raffinée. Les solutions exactes pour les problèmes des poutres qui dépendent de la fonction de gauchissement sont très limitées ; ceci nous a conduits à évaluer un nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existant basé sur des approximations du champ de déplacements. Cette procédure de résolution exacte est basée sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement.

Des solutions de forme close pour l'analyse de la vibration libre des poutres fonctionnellement graduées sont développées sur la prétention que les déplacements transversaux de cisaillement varient comme fonction parabolique suivant l'épaisseur de la poutre. Pour les poutres en P-FGM, les équations d'équilibre et les conditions de frontières associées sont obtenus en utilisant le principe de Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour trouver les solutions analytiques de la poutre FGM avec des conditions aux frontières sous formes d'appuis simples. La comparaison des résultats de la présente théorie raffinée avec les résultats de la littérature, a permis de dégager plusieurs points :

- Dans le cas de la vibration libre des poutres FGM sans effet de température, on a constaté un bon accord entre les résultats de la présente théorie raffinée avec les résultats de fréquences des autres théories de cisaillement publiés, pour différent rapports d'élancement  $L/h$ , en particulier en comparaison avec la théorie de cisaillement de premier ordre FSDT1 développée par Sina.
- Dans le cas de la vibration libre des poutres FGM sans moments thermiques, lorsque les propriétés des matériaux dépendent de la température (TD), les fréquences fondamentales sont nettement inférieures par rapport au TID (indépendants de la température), ce qui met en évidence l'importance de la dépendance à la température dans les poutres FGM.
- Dans le cas des poutres FGM avec distribution uniforme de la température (UTD), les fréquences fondamentales diminuées avec l'augmentation de la température
- Les fréquences propres de la poutre FGM diminuent avec l'augmentation du paramètre matériau  $p$ .

- Dans le cas des poutres FGM avec distribution de température linéaire (LTD) et non linéaire (NLTD), un bon accord entre les résultats de la présente théorie et les solutions trouvées dans la littérature pour diverses valeurs de l'indice matérielle  $p$ .
- Pour toutes les valeurs du paramètre de matériau  $p$ , les résultats LTD sont significativement supérieurs à ceux de l'UTD.
- Les fréquences fondamentales des poutres FGM diminuent lorsque les valeurs des paramètres du matériau  $p$  augmentent.
- Les fréquences fondamentales de la distribution de température non linéaire NLTD sont légèrement plus grandes que celles de la distribution linéaire LTD.

En conclusion, on peut dire que la théorie des poutres raffinée proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de la vibration libre des poutres FGM sous chargement thermique.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'étudier le problème de gauchissement, et l'utilisation de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- Prise en compte de la distribution graduelle arbitraire du matériau FGM ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour résoudre les problèmes de flambement sous chargement thermique ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis ;
- Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués. La méthode des éléments permettra de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

Finalement, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution de notre laboratoire dans le domaine de recherches des matériaux composites en matériaux à gradient évalué (FGM), précisément leurs comportements vis à vis des conditions de chargements statiques et vibratoires.

## References

---

- [A. Chabot,1997] A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [A. K.,1989] A. K. Noor & W. S. Burton. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1,12, 1989.
- [A. TAFLA, 2007] A. TAFLA « Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches » Thèse de doctorat de l'université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.
- [Agrawal B.D, 1990] Agrawal B.D., Broutman L.J. Analysis and performance of fiber composite. 2nd edition, John Wiley and Sons, New York 1990, p449
- [Ait Amar et al, 2014] M. Ait Amar Meziane, A. HadjHenni, and A. Tounsi, An Efficient and Simple Refined Theory for Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates under Various Boundary Conditions, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293–318, 2014.
- [Ait Amar Meziane. 2014] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A., An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions, *J. Sandw. Struct.Mater.*, 16(3), 293-318, 2014.
- [Ait Atmane et al, 2010] H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*, 6(2), 113-121, 2010.
- [Ait Atmane. 2015] Ait Atmane, H. Tounsi, A. and Bernard, F. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *Int. J. Mech. Mater*, 1- 14, 2015.
- [Anh, 2015] Anh. V. T. T, Bich. D. H, and Duc. N. D, «Nonlinear stability analysis of thin FGM annular spherical shells on elastic foundations under external pressure and thermal loads», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 50, pp. 28–38, 2015.
- [Attia 2018] Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S., A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations, *Struct. Eng. Mech.*, 65(4). 453-464, 2018.
- [Aydogdu, 2007] Uymaz, B., and Aydogdu, M., Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions, *Composites of Reinforced Plastics and Composites*, 26, 1847-1863, 2007.
- [Barati, 2017] Barati. M. R and Shahverdi. H, «Aero-thermal stability analysis of higher-order refined supersonic FGM panels with even and uneven porosity distributions», *Journal of Fluids and Structures*, vol. 73, pp. 125–136, 2017.

- [Bateni, 2014] Bateni. M and Eslami. M. R, «Non-linear in-plane stability analysis of FGM circular shallow arches under central concentrated force», *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 60, pp. 58–69, 2014.
- [Belabed et al, 2014] Belabed, Z., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Mahmoud, S. R. and Anwar Bég, O., An Efficient and Simple Higher Order Shear and Normal Deformation Theory for Functionally Graded Material (FGM) Plates, *Composites: Part B*, vol. 60, pp. 274–283, 2014.
- [Benachouret al, 2011] Benachour, A., Hassaine Daouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S. A. (2011) A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Composites: Part B* 42, 1386–1394, 2011.
- [Bennai 2019] Bennai, R., Fourn, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A., and Bessaim, A., Dynamic and wave propagation investigation of FGM plates with porosities using a four variable plate theory, *Wind and Structures, An Int'l Journal*, 28(1), 49-62, 2019.
- [Benyoucef S, 2006] Benyoucef S, Tounsi A, Meftah S.A., Adda bedia E.A. "Approximate Analysis of the Interfacial Stress Concentrations in FRP – RC Hybrid Beams". *Composites Interface* 2006;13(7):561-571
- [Birman 2007] Birman, V., Byrd, L.W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Appl Mech Rev*, 60(5), 195–216, 2007.
- [B-O. Sallai, 2009] B-O. Sallai, A. Tounsi, I. Mechab, M. Bachir Bouiadjra, M. Meradjah, E.A. Adda Bedia “A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams” *Computational Materials Science* 44, 1344–1350, 2009.
- [BOCH, P,1986] BOCH, P., CHARTIER, T. & HUTTEPAIN, M., Tape Casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> Laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 69, N°. 8, p. C-191-C-192, (1986).
- [BOCH, P,1987] BOCH, P. Tape Casting of Layered Composites, in *Processing of Advanced Ceramics*. Edited by J. S. Moya and S. de Aza. Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain, p. 103-112, (1987)
- [Bodaghi et Saidi, 2010] Bodaghi, M. et Saidi, A.R., Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, 3659–3673, 2010.
- [C. Kassapoglou,1987] C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [C. Ossadzow, 2001] C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95, 2001.
- [Chaouche Abdellah, 2013] Chaouche Abdellah, *Analyse Vibratoire Des Plaques Minces Sous Dégérentes Conditions Aux Limites*, Master Professionnel, université KasdiMerbah Ouargla, 2013.

- [Chen 2018] Chen, Y., Jin, G., Zhang, C., Ye, T., Xue, Y., Thermal vibration of FGM beams with general boundary conditions using a higher-order shear deformation theory, *Composite Part B*, 153, 376-386, 2018.
- [Chen 2018] Chen, Y., Jin, G., Zhang, C., Ye, T., Xue, Y., Thermal vibration of FGM beams with general boundary conditions using a higher-order shear deformation theory, *Composite Part B*, 153, 376-386, 2018.
- [Deng, 2017] Deng. J, Liu. Y, Zhang. Z, and Liu. W, «Size-dependent vibration and stability of multi-span viscoelastic functionally graded material conveying fluid using a hybrid method», *Composite Structures*, vol. 179, pp. 590–600, 2017.
- [Deniz, 2013] Deniz. A, «Non-linear stability analysis of truncated conical shell with functionally graded composite coatings in the finite deflection», *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 318–326, 2013.
- [Dorlot J.M, 1986] Dorlot J.M, Baillon J.P, Masounave J. *Des matériaux 2ème édition*, Ecole polytechnique de Montréal, Montréal, Québec 1986 , p467.
- [Draiche 2014] Draiche, K., Tounsi, A., and Khalfi, Y., A Trigonometric Four Variable Plate Theory for Free Vibration of Rectangular Composite Plates with Patch Mass, *Steel and Composite Structures*, vol. 17, no. 1, pp. 69–81, 2014.
- [Duc, 2016] Duc. N. D, Tuan. N. D, Tran. P, Cong. P. H, and Nguyen. P. D, «Nonlinear stability of eccentrically stiffened S-FGM elliptical cylindrical shells in thermal environment», *Thin-Walled Structures*, vol. 108, pp. 280–290, 2016.
- [E. Carrera,2000] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [E. Reissner 1961] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [Ebrahimi 2018] Ebrahimi, F., Safarpour, H., Vibration analysis of inhomogeneous nonlocal beams via a modified couple stress theory incorporating surface effects, *Wind and Structures, An Int'l Journal*, 27(6), 431-438, 2018.
- [Ebrahimi 2018] Ebrahimi, F., Safarpour, H., Vibration analysis of inhomogeneous nonlocal beams via a modified couple stress theory incorporating surface effects, *Wind and Structures, An Int'l Journal*, 27(6), 431-438, 2018.
- [El Meiche et al, 2012] N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, and E. A. AddaBedia, A New Hyperbolic Shear Deformation Theory for Buckling and Vibration of Functionally Graded Sandwich Plate, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, no. 4, pp. 237–247, 2011.
- [ELOMARI Kawthar, 2011] ELOMARI Kawthar « Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable. » Thèse de Master de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.

- [F. Delale, 1983] F. Delale, F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609–614, 1983.
- [Fekrar et al, 2014] Fekrar, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., and Mahmoud, S. R., A New Five-Unknown Refined Theory Based on Neutral Surface Position for Bending Analysis of Exponential Graded Plates, *Meccanica*, vol. 49, pp. 795–810, 2014.
- [Ferreira 2006] Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge, R., Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method, *Composite Structures*, 75, 593–600, 2006.
- [G. Kirchhoff,1850] G. Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [Giunta 2013] Giunta, G., Crisafulli, D., Belouettar, S., Carrera, E., A thermo-mechanical analysis of functionally graded beams via hierarchical modeling, *Compos Struct*, 95, 676-90, 2013.
- [Hadji et al, 2011] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942, 2011.
- [Hamdi 2018] Hamdi, H., and Farah, K., Beam finite element model of a vibrate wind blade in large elastic deformation, *Wind and Structures, An Int'l Journal*, 26(1), 25-34, 2018.
- [Hossein Abdizadeh 1997] Hossein Abdizadeh, *Elaboration et Caractérisation de Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'alumine»*, Thèse de Doctorat, L'institut National des Sciences appliquées de Lyon, 1997.
- [Houari, M,2011] Houari Mohammed Sid Ahmed «Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Huang et Shen, 2004] Huang, X.-L., and Shen, H.S., Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments, *International Journal of Solids and Structures*, 41, 2403–2427, 2004.
- [Huang, 2015] Huang. H and Han. Q, «Stability of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells with inelastic material properties», *Thin-Walled Structures*, vol. 92, pp. 21–28, 2015.
- [Huang, 2017] Huang. H, Zhang. Y, and Han. Q, «Stability of hydrostatic-pressured FGM thick rings with material nonlinearity», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 45, pp. 55–64, 2017.
- [J.G. Ren,1986] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.



- [J.M. Whitney,1973] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [J.N. Reddy,1984] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Jornal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [J.N. Reddy,1987] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- [Javaheri et Eslami, 2002a] Javaheri, R., Eslami, M.R., Thermal buckling of functionally graded plates, *AIAA Journal*, 40, 162–9, 2002.
- [Javaheri et Eslami, 2002b] Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002b), —Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory, *J. Therm. Stress.*, 25(1), 603-625, 2002.
- [Javaheri et Eslami, 2002c] Javaheri. R and Eslami. M. R (2002c), —Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading, *ZAMM*, 82, No. 4, 277-283, 2002.
- [K.S. Afaq,2003] K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Karami 2018] Karami, B., Janghorban, M., Shahsavari, D., Tounsi, A., A size-dependent quasi-3D model for wave dispersion analysis of FG nanoplates, *Steel and Composite Structures*, 28(1), 99-110, 2018.
- [Kawa,C 1990] KAWAI, C., WAKAMATSU, S., SAKAGAMI, S., & IGARASHI, T., Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 1990, p. 77-82.
- [Khalfi et al, 2014] Khalfi, Y., Houari, M. S. A., and Tounsi, A., A Refined and Simple Shear Deformation Theory for Thermal Buckling of Solar Functionally Graded Plates on Elastic Foundation, *International Journal of Computational Methods*, vol. 11, No. 5, 2014.
- [KIEBACK B,2003] KIEBACK B., NEUBRAND A., Riedel H. «Processing techniques for functionally graded materials», *Materials Science and Engineering A362* (2003) 81–105
- [Klouche Djedid et al, 2014] Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., and Ameer, M. , A norder Four Variable Refined Theory for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Plates, *Steel and Composite Structures*, 17(1), 21–46, 2014.
- [L. Liberscu,1969] L. Liberscu. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [Lanhe, 2004] W. Lanhe, Thermal Buckling of a Simply Supported Moderately Thick Rectangular FGM Plate, *Composite Structures*, vol. 64, pp. 211–218, 2004.
- [Li 2009] Li, Q., Iu, V. and Kou, K., Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment, *J. Sound Vib.*, 324(3-5), 733-750, 2009.

- [Matsunaga, 2009] Matsunaga, H, «Free vibration and stability of functionally graded circular cylindrical shells according to a 2D higher-order deformation theory», *Composite Structures*, vol. 88, no. 4, pp. 519–531, 2009.
- [M. Di Sciuva,1984] M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279{295, 1984.
- [M. Di Sciuva,1987] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- [M. Karama,1998] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [M. Tahani,2003] M. Tahani & A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- [M. Touratier,1991] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.
- [Metin Aydogdu,2005] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 1740–1755.
- [Mistler.R.E, 1973] Mistler. R. E., High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, (1973).
- [Moya 1992] MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R, Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters*, 1992, Vol. 14, p.333-35.
- [N.J Pagano,1987] N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, page 385, 1978.
- [N.J. Pagano,1969] N.J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398-411, 1969.
- [N.J. Pagano,1970] N.J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.*, vol. 4, pages 20-35, 1970.
- [Na et Kim, 2005] Na, K.S. et Kim, J.H., (2005), Three-Dimensional Thermomechanical Buckling of Functionally Graded Materials, *AIAA Journal*, 47, 1605-1612, 2005.
- [Nedri 2014] Nedri, K., El Meiche, N., and Tounsi, A., Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundations by Using a Refined Hyperbolic Shear Deformation Theory, *Mechanics of Composite Materials*, vol. 49, no. 6, pp. 641–650, 2014.
- [Ould Larbi, 2013] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M. S. A., and Tounsi, A., An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free

Vibration of Functionally Graded Beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 41, pp. 421–433, 2013.

[Ould Larbi et al, 2013] L. OuldLarbi, A. Kaci, M. S. A. Houari, and A. Tounsi, An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 41, pp. 421– 433, 2013.

[Praveen et Reddy, 1998] Praveen, G.N., and Reddy, J.N., Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates, *International Journal of Solids and Structures*, 4457-4476, 1998.

[R. K. Kapania,1989] R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.

[Reddy, 1999] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.

[Reddy 2000] Reddy, J.N., Analysis of functionally graded plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 663–684, 2000.

[Reddy 2004] Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, CRC Press, 2004.

[Reddy et Chen, 2003] Reddy, J.N., et Chen, Z.Q., Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach, *Journal of Engineering Mechanics*, 129, 896–900, 2003.

[Reddy et Cheng, 2001] Reddy, J. N, Cheng, Z. Q, (2001), Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5):841–855, 2001.

[Reddy, 1999] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.

[Reddy, 2004] J. N. Reddy, Analysis of Functionally Graded Plate, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, pp. 663–684, 2000.

[Reynes M, 1990] Reynes M. *Technologie des composites*, édition Hermès, édition Hermès, Paris 1990, p198.

[Rigal J.P, 1989] Rigal J.P. *Matériaux composites*, teknea, Belma, France 1989, p 288.

[Rong 2018] Rong, X.N., Xu, R.Q., Wang, H.Y., Feng, S.Y., Analytical solution for natural frequency of monopile supported wind turbine towers, *Wind and Structures, An Int'l Journal*, 25(5), 459-474, 2018.

[Sahmani, 2013] Sahmani. S, Ansari. R, Gholami. R, and Darvizeh. A, «Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable based on the modified couple stress elasticity theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 44–53, 2013.

- [S. Srinivas,1970] S. Srinivas & A. K. Rao. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Structures*, vol. 6, pages 1463-1481, 1970.
- [S. Srinivas,1973] S. Srinivas & A.K. Rao. Flexure of thick plates. *ASME*, pages 298-299, 1973.
- [S.A. Ambartsumyan,1969] S.A. Ambartsumyan. *Theory of anisotropic plate*. Technomic Publishing Co,1969.
- [Saidi 2013] Saidi, H., Houari, M. S. A., Tounsi, A., and Adda Bedia, E. A., Thermomechanical Bending Response with Stretching Effect of Functionally Graded Sandwich Plates Using a Novel Shear Deformation Theory, *Steel Composite Structures*, vol. 15, pp. 221–245, 2013.
- [Saidi et al, 2013] H. Saidi, M. S. A. Houari, A. Tounsi, and E. A. AddaBedia, Thermomechanical Bending Response with Stretching Effect of Functionally Graded Sandwich Plates Using a Novel Shear Deformation Theory, *Steel Composite Structures*, vol. 15, pp. 221–245, 2013.
- [Sankar 2002] Sankar, B.V., Tzeng, J.T., Thermal stresses in functionally graded beams, *AIAA J*, 40(6), 1228-32, 2002.
- [Sark 1996] SARKAR, P. & NICHOLSON, P. S., Electrophoretic Deposition (EPD): Mechanisms, Kinetics, and Application to Ceramics, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1996, Vol. 79, N°. 8, p. 1987-2002.
- [Sedighi, 2015] Sedighi. H. M, Keivani. M, and Abadyan. M, «Modified continuum model for stability analysis of asymmetric FGM double-sided NEMS: corrections due to finite conductivity, surface energy and nonlocal effect», *Composites Part B: Engineering*, vol. 83, pp. 117–133, 2015.
- [Shahrjerdi 2011] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A., Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory, *J. Mech. Sci. Technol.*, 25(9), 2195-2209.
- [Shariat et al, 2005] Samsam Shariat. B. A, Javaheri. R, and M. R. Eslami (2005), —Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading, *Thin-Wall. Struct.*, 43, 1020- 1036, 2005.
- [Shariat et Eslami, 2006] Samsam Shariat. B. A and Eslami. M. R (2006), Thermal buckling of imperfect functionally graded plates, *Int. J. Solids Struct.*, 43, 4082-4096, 2006.
- [Shariat et Eslami, 2007] Samsam Shariat, B.A. et Eslami, M.R. (2007), Buckling of Thick Functionally Graded Plates Under Mechanical and Thermal Loads, *Composite Structures*, 78, 433-439, 2007.
- [Shen 2014] Shen H-S., Wang Z-X., Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments, *Int J Mech Sci*, 81, 195-206, 2014.

- [Shen, 2014] Shen. H, Païdoussis. M. P, Wen. J, Yu. D, and. Wen. X, «The beam-mode stability of periodic functionally-graded-material shells conveying fluid», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 10, pp. 2735–2749, 2014.
- [Shen, 2000] H.-S. Shen, *Nonlinear Bending Response of Functionally Graded Plates Subjected to Transverse Loads and in Thermal Environments*. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 561–584, 2000.
- [Shen, 2007] Shen, H.S., *Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties*, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 466- 478, 2007.
- [Simsek 2010] Simsek, M., *Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories*, *Nucl Eng Des*, 240, 697–705, 2010.
- [Sina 2009] Sina, S.A., Navazi, H.M., Haddadpour, H., *An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams*, *Mater Des*; 30(3), 741–747, 2009.
- [Sofiyev, 2016] Sofiyev. A. H and Kuruoğlu. N, «The stability of FGM truncated conical shells under combined axial and external mechanical loads in the framework of the shear deformation theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 92, pp. 463–476, 2016.
- [Sofiyev, 2009] Sofiyev. AH, «The vibration and stability behavior of freely supported FGM conical shells subjected to external pressure», *Composite Structures*, vol. 89, no. 3, pp. 356–366, 2009.
- [Steffens H.D, 1990] Steffens H.D., Dvorak. M., Wewel. M., *Plasma sprayed functionally gradient materials- processing and applications*, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, (1990).
- [T. Kant,2000] T. Kant & K. Swaminathan. *Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments*. *Composite structures*, vol. 49, pages 65,75, 2000.
- [Takahash, M, 1990] Takahash, M., Itoh. Y., Kashiwaya, K., *Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique*, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, (1990).
- [Tounsi et al, 2013] A. Tounsi M. S. A. Houari, S. Benyoucef, and E. A. Adda Bedia, *A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates*, *Aerospace Science and Technology*, vol. 24, no. 1, pp. 209–220, 2013, 2013.
- [Trinh 2016] Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T., T.K., Nguyen, T.K., *An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads*, *Composites Part B*, 100, 152-163, 2016.
- [Trinh 2016] Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T., T.K., Nguyen, T.K., *An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads*, *Composites Part B*, 100, 152-163, 2016.

- [Tung, 2010] Tung. H. V and Duc. N. D, «Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads», *Composite Structures*, vol. 92, no. 5, pp. 1184–1191, 2010.
- [U. Icardi,2001] U. Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites : Part B*, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [Uymaz et Aydogdu, 2007] Uymaz, B. and Aydogdu, M., Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions, *Composites of Reinforced Plastics and Composites*, 26, 1847-1863, 2007.
- [Vel et Batra 2004] Vel, S.S., and Batra, R.C., Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 703-730, 2004.
- [Vel et Batra, 2002] Vel, S.S. et Batra, R.C., Exact Solution for Thermo elastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates, *AIAA Journal*, 40, 1421-1433, 2002.
- [Viet.Tung, 2004] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [W.L. Yin,1994] W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- [Wattanasakulpong 2011] Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W., Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 734–743, 2011.
- [Wattanasakulpong 2011] Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W., Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 734–743, 2011.
- [Woo et Meguid, 2001] Woo, J. and Meguid, S.A., Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7409-7421, 2001.
- [Wu, 2004] Wu, L.,Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate, *Composite Structures*, 64, 211–218, 2004.
- [Yang. J, 2003] Yang. J., Shen, J., H.-S. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions, *Composites, Part B*; 34 (2) :103–115, (2003).
- [Yuki,1991] YUKI, M., MURAYAMA, T. & IRISAWA, T., Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan*, 1991, p. 203

[ZenkouretAlghamdi, 2010] A. M. Zenkour and N. A. Alghamdi, Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 17, pp. 419–432, 2010.

[Zidi et al, 2014] M. Zidi, A. Tounsi, M. S. A., Houari, E. A. Adda Bedia, and O. Anwar Bég, Bending Analysis of FGM Plates under Hygro-thermomechanical Loading Using a Four Variable Refined Plate Theory, *Aerospace Science and Technology*, vol. 34, pp. 24–34, 2014.