

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Science des matériaux**

Présentée par

REBAI BILLEL

Sujet de thèse

Contribution à l'analyse de la flexion thermoélastique des plaques sandwiches en FGM en utilisant un nouveau champ de déplacement

Soutenu le // 2021 devant le Jury composé de :

Mr. BENYOUCEF. S	Pr	UDL-SBA	Président
Mr. MERADJAH. M	Pr	UDL-SBA	Directeur de thèse
Mr. TOUNSI. A	Pr	UDL-SBA	Co- Directeur de thèse
Mr. ABDELBAKI. C	MC A	U.TIARET	Examineur
Mr. BELABED. Z	MC A	CU. NAAMA	Examineur
M^M. ATTIA. A	MC A	C.U AIN TEMOUCHENT	Examinatrice

Dédicaces

À tous ceux que j'aime

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, de l'Université l'université de Djillali Liabès Sidi Bel Abbes.

*Je tiens à exprimer toute ma sincère gratitude à mon encadreur le professeur **Mr. MERADJAH. M** pour m'avoir confié un sujet aussi intéressant et d'actualité, pour sa disponibilité et son soutien pendant toutes ces années de recherche. J'ai beaucoup appris de lui et j'en apprendrai encore.*

*Je remercie vivement mon co-encadreur, le Professeur **Mr. A. TOUNSI.***

*Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **S. BENYOUCEF** de m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de cette thèse.*

*J'adresse mes remerciements à Messieurs les Docteurs **Mr. ABDELBAKI. C, Mr. BELABED. Z** et **M^m. ATTIA. A** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés particulièrement **Dr BOURAADA F** et **Dr. MENASSRIA. A.***

*J'adresse mes sincères remerciements à **Dr A. BOUHADRA**, qui par ses paroles, ses écrits, ses conseils et ses critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.*

Table des Matières

Dédicaces	I
Remerciements	III
Table des Matières	1
Liste des Tableaux	6
Liste des Figures	8
Liste des Notations	11
Résumé	13
Introduction Générale	17
Chapitre - I- LES MATERIAUX COMPOSITES	21
I.1.Introduction	22
I.2.Définition d'un matériau composite	22
I.3.Historique des matériaux composites	23
I.4.Constituent des matériaux composites	24
I.4.1.Les renforts	24
I.4.1.1.Fibres de verre	24
I.4.1.2.Fibres de carbone	24
I.4.1.3.Fibres aramides	25
I.4.1.4.Fibres céramiques	25
I.4.1.5.Autres types de fibres	25
I.4.2.les Matrices	26
I.4.2.1.Les thermoplastiques	27
I.4.2.2.Les thermodurcissables	27
I.4.3.les interfaces	28
I.4.3.1.Charges – additifs	28
I.5.Propriétés mécaniques des composites	28
I.6.Les différents types de matériaux Composites	29
I.7.Classification des matériaux composites	29
I.7.1.Classification suivant la forme des constituants	29
I.7.2.Classification suivant la nature de la matrice	30
I.8.Champs d'utilisation	30
I.9.Applications des matériaux composites au génie civil	30

I.10. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites	31
I.10.1. les avantages	31
I.10.2. les inconvénients	31
I.11. Architecture des matériaux composites	32
I.11.1. Le matériau composite Monocouche	32
I.11.2. Le matériau composite stratifié	32
I.11.3. Le matériau composite Sandwichs	33
I.12. Conclusion	33
Chapitre - II-GENERALITES SUR LES MATERIAUX SANDWICHS	34
II.1. Introduction	35
II.2. Définition d'un matériau sandwich	35
II.3. Éléments constituant les matériaux sandwichs	36
II.3.1. la peau	36
II.3.2. l'Âme	37
II.3.2.1. Les âmes pleines	37
II.3.2.2. Les âmes creuses	37
II.3.3. Interface	37
II.4. Conception des structures sandwichs	38
II.5. Sélection des matériaux-âme	38
II.6. Techniques d'assemblages des matériaux sandwichs	38
II.6.1. Technique collage de peau sur l'âme	38
II.6.2. Technique de pliage	39
II.7. Intérêt des structures sandwichs	39
II.8. Domaines d'application des matériaux sandwichs	40
II.9. CONCLUSION	40
Chapitre - III-GENERALITES SUR LES MATERIAUX FGM	41
III.1. Introduction	42
III.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés	42
III.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés	45
III.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	46
III.4.1. Les classes des matériaux à gradient de propriétés	46
III.4.1.1. Groupe des FGM minces ou laminaires	46

III.4.1.2. Groupe des FGM épais ou en masse	46
III.4.2. Les processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés	46
III.4.2.1. Processus de fabrication des FGM laminaires	47
III.4.3. Processus de fabrication des FGM épais (en masse)	47
III.4.3.1. Le processus de gradation	47
III.4.3.2. Le processus de consolidation	47
III.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	48
III.6. Les avantages et les inconvénients des matériaux à gradient de propriétés	49
III.7. Les propriétés matérielles effectives des FGM	51
III.7.1. Le modèle de Voigt (la loi des mélanges)	51
III.7.1.1. La fraction volumique obéit à une fonction en loi de puissance (plaque P-FGM)	52
III.7.1.2. La fraction volumique obéit à une fonction sigmoïde (plaque S-FGM)	53
III.7.2. Modèle de la loi exponentielle (E-FGM)	53
III.7.3. Les propriétés matérielles de la plaque modèle de Mori-Tanaka	53
III.7.4. Modèle auto-cohérent de Hill	54
III.8. Les modèles analytiques des plaques FGM	55
III.8.1. Définition des plaques	55
III.8.2. Historique des plaques	55
III.8.3. la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) Lire phonétiquement	56
III.8.4. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	57
III.8.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	58
III.8.5.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	59
III.9. Etude bibliographique des Recherches sur les structures en matériaux FGM	61
III.9.1. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés	62
III.9.2. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés	65
III.9.3. Analyse des contraintes et des déformations des FGM sous différentes charges	65
III.10. Conclusion	70
Chapitre - IV-EQUATIONS GOUVERNANTES	70
	71

Table des Matières

IV.1. Introduction	72
IV.2. Géométrie du problème	72
IV.3. Propriétés des matériaux	73
IV.4. La théorie d'ordre élevé avec et sans l'inclusion de la déformation normale	74 75
IV.5. Cinématique et équations constitutives	76
IV.6 Les contraintes IV.4.4. Détermination des équations d'équilibre	77
IV.7. Détermination des coefficients de rigidité	78
IV.8. Formulation des équations différentielles	79
IV.9. Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée	80
IV.10. Conclusion	82
Chapitre- V-Résultats et discussions	83
V.1. Introduction	
V.2. Validation analytique du modèle proposé	84
V.3. Résultats numériques et discussions	84
V.4. Conclusion	84
Conclusion générale	100
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	103

Liste des tableaux

Liste des tableaux :

- Tableau I.1** Principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissable
- Tableau III.1** Classe des processus de fabrication des FGM
- Tableau III.2** Autres processus de fabrication des FGM
- Tableau IV.1** Différents types du Plaque sandwich en FGM
- Tableau V.1** Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque sandwichent en FGM
- Tableau V.2** La flèche adimensionnelle \bar{w} pour différentes configurations des plaques sandwiches en FGM ($\bar{T}_3 = 0, a/b = 1$)
- Tableau V.3** Effet de l'allongement a/b sur la flèche maximale \bar{w} des plaques sandwiches en FGM ($k = 3, \bar{T}_3 = 0$)
- Tableau V.4** Les contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ pour différents types des plaques sandwiches en FGM ($\bar{T}_3 = 0, a/b = 1$)
- Tableau V.5** Les contraintes de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ pour différents types des plaques sandwiches en FGM ($\bar{T}_2 = 100, \bar{T}_3 = -100, a/b = 1$)

Liste des figures

Liste des figures :

- Figure I.1** Schéma illustratif d'un matériau composite
- Figure I.2** Les constituants d'un matériau composite en différentes formes
- Figure I.3** Organigramme Différentes familles du renfort
- Figure I.4** Organigramme des Différentes familles de matrice
- Figure I.5** Composite monocouche
- Figure I.6** Schéma illustratif d'un matériau composite stratifié
- Figure I.7** Composite sandwichs
- Figure II.1** Schéma d'un sandwich
- Figure II.2** Matériaux sandwichs à âmes pleines
- Figure II.3** Matériaux sandwichs à âmes creuses
- Figure II.4** Panneaux réalisés par collage à partir de profils divers
- Figure II.5** Pliage de panneaux sandwichs
- Figure III.1** Séparation de l'interface Céramique-Métal due aux contraintes thermiques
- Figure III.2** Concept des matériaux à gradient de propriétés
- Figure III.3** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal
- Figure III.4** Protection thermique
- Figure III.5** La géométrie d'une plaque FGM
- Figure III.6** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM
- Figure III.7** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM
- Figure III.8** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM
- Figure III.9** Illustration de la plaque de Love Kirchhoff
- Figure III.10** Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin
- Figure III.11** Illustration de la plaque d'ordre élevé
- Figure III.12** Variation de la fraction volumique des matériaux constituants dans la direction de l'épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés
- Figure III.13** Une microstructure de squelette d'un matériau FGM
- Figure IV.1** Géométrie d'une plaque sandwich en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes
- Figure V.1** Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque (1-0-1)
- Figure V.2** Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque (1-2-1)
- Figure V.3** Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque (2-1-1)

Liste des figures

- Figure V.4** Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (1-0-1)
- Figure IV.5** Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (1-2-1)
- Figure IV.6** Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (2-2-1)
- Figure V.7** Effet du chargement thermique \bar{T}_3 sur la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich (1-2-1) ($k = 1.5$)
- Figure V.8** Effet du chargement thermique \bar{T}_3 sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque sandwich (1-2-1) ($k = 1.5$)
- Figure V.9** Effet de facteur de forme "b/a" sur la flèche \bar{w} pour différents types des plaques sandwich 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($T_3=-100$, $k=2$ et $a/h=10$)
- Figure V.10** Effet de facteur de forme "b/a" sur la flèche \bar{w} pour différents types des plaques sandwich 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($T_3=-100$, $k=\infty$ et $a/h=10$)
- Figure V.11** Effet de rapport "a/h" sur la flèche \bar{w} pour différents types des plaques sandwich 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($T_3=-100$, $k=\infty$)
- Figure V.12** Effet de rapport "a/h" sur la flèche \bar{w} pour différents types des plaques sandwich 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($T_3=-100$, $k=2$)
- Figure V.13** Effet de rapport "a/h" sur la flèche \bar{w} pour la plaques sandwich(1-1-1) avec ($T_3=-100$).

Liste des notations

Liste des notations :

Les caractéristiques des matériaux :

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$\alpha(z)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de « z »
$\alpha_c(z) \alpha_m(z)$	Coefficient de dilatation thermique de la céramique et du métal
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau

La géométrie de la plaque :

x, y, z	Axe de repère orthonormé
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque

La cinématique de la plaque avec le model utilisé :

$u_0 \ v_0 \ w_0 \ \partial\theta$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$u \ v \ w$	Les déplacements dans les directions x, y, z .
θ	Angle de déplacement transversal
$K_1 \ K_2$	Composante de flexion
$\varphi_x \ \varphi_y$	Les rotations autour des axes x, y (cisaillement transverse)
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

Liste des notations

$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement)
$\sigma_x \sigma_y \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz} \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz} \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\Psi'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u \delta v \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Travail virtuel intérieur
δV	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x \delta \varepsilon_y$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz} \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel

Les efforts et les moments résultants :

$N_x N_y N_z N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x M_y M_{xy}$	Moments de flexion
$M_x^b M_y^b M_{xy}^b$	Moments de flexion
$S_x S_y S_{xy}$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$M_x^s M_y^s M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_{yz}^s S_{xz}^s$	Effort de cisaillement

Symboles utilisés dans la solution :

A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage

Liste des notations

D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
U, V, W et X	Paramètres arbitraires
\bar{T}_1, \bar{T}_2 et \bar{T}_3	Paramètres arbitraires
N_x^T	Les résultantes en membrane dues aux chargements thermiques
N_y^T	Les résultantes en membrane dues aux chargements thermiques
M_x^{bT}	Les moments de flexion, dues aux chargements thermiques
M_y^{bT}	Les moments de flexion, dues aux chargements thermiques
M_x^{sT}	Le moment additionnel de cisaillements dus aux chargements thermiques
M_y^{sT}	Le moment additionnel de cisaillements dus aux chargements thermiques
$\{P\}$	Le vecteur de force généralisée

Résumé

ABSTRACT

In this work a novel integral higher shear deformation theory (HSDT) which introducing the transverse shear effect is developed for thermoelastic bending analysis of Titanium/Zirconia power-law functionally graded (P-FG) sandwich plates. This integral theory contains only four variable functions as against five in the case of other HSDTs. The proposed model has a reduced number of equations and satisfies automatically the free surface conditions (zero shear stresses) without using the shear correction factor. The P-FG sandwich plate is assumed composed of the isotropic core and FG skins. The governing equation of are derived and resolved via virtual work principle and Navier's model. The accuracy of the proposed analytical model is confirmed by comparing the results with those given by others model existing in the literature. Also, several parametric examples are presented to show the thermoelastic bending response of the various symmetric P-FG sandwich plates.

Keywords: P-FG sandwich plate; thermoelastic bending; virtual work; Navier

RESUME

Dans ce travail l'utilisation d'une nouvelle théorie d'intégral de déformation d'ordre élevé pour l'analyse le comportement de la flexion thermique dans les plaques sandwiches en (P-FG). La théorie proposée utilise quatre variables, ce qui est encore moins que les théories conventionnelles de déformation de cisaillement d'ordres élevés (HSDT) et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque sans recours au facteur de correction de cisaillement. Les plaques sont composées d'un corp central isotopique et une peau en FGM. Et les équations sont résolues via la solution de Navier et le principe des travaux virtuels.

Les résultats obtenus en utilisant la présente théorie et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont presque identiques. On peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermoélastique de la flexion des plaques FGM. Ainsi que plusieurs résultats paramétriques sont présentés pour discuter le comportement de la flexion thermoélastique des différents types des plaques sandwich P-FG.

Mots clés : plaques sandwiches P-FG, flexion thermoélastique, travaux virtuels, Navier.

في هذا العمل ، تم استخدام نظرية تكامل إجهاد عالية الرتبة جديدة لتحليل سلوك الانحناء الحراري في ألواح الساندويتش (P-FG). تستخدم النظرية المقترحة أربعة متغيرات وهي أقل من نظريات إجهاد القص التقليدية عالية الرتبة (HSDT) وتعطي وصفاً مكافئاً لإجهاد القص من خلال السماكة مع استيفاء حالة إجهاد القص الصفري على الحواف الحرة للوحة دون الرجوع إلى عامل تصحيح القص. تتكون الصفائح من جسم نظيري مركزي وجلد. ويتم حل المعادلات باستخدام حل Navier ومبدأ العمل الافتراضي. النتائج التي تم الحصول عليها باستخدام هذه النظرية وغيرها من نظريات إجهاد القص عالية الترتيب متطابقة تقريباً. يمكننا القول أن النظرية المقترحة دقيقة وبسيطة لحل سلوك المرونة الحرارية لانحناء ألواح. بالإضافة إلى العديد من النتائج البارامترية التي تم تقديمها لمناقشة سلوك الانحناء الحراري لأنواع مختلفة من ألواح الساندويتش P-FG.

الكلمات الرئيسية: لوحات الساندويتش P-FG ، الانحناء الحراري ، العمل الافتراضي ، Navier.

Introduction générale

Introduction générale

En raison des grands développements technologiques qui ont accompagné l'industrie, les scientifiques ont tenté à plusieurs reprises d'inventer de nouveaux matériaux composites présentant les avantages de la réduction des coûts, de la légèreté, de la résistance mécanique et de la corrosion, et grâce à leur comportements microscopiques ils permettent d'assurer la dureté dans le secteur d'application désiré.

Parmi ces matériaux composés, les structures multicouches classiques sont largement utilisées dans plusieurs secteurs (le génie civil, le transport terrestre, le transport aérien et ferroviaire). L'avantage de ces matériaux est d'améliorer les performances mécaniques, thermiques et acoustiques. Mais à l'autre côté, l'inconvénient majeur c'est les concentrations des contraintes engendrées entre les couches et interfaces de séparation entre plaques qui peuvent créer le délaminage, des fissures, à cause du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques.

Pour remédier ce problème ; une équipe des chercheurs japonais tentait au début des années 80 d'éliminer avec succès les changements déchainés des propriétés mécaniques et thermiques aux niveaux des inter-surfaces et de créer une structure avec un nouveau matériau dit matériau à gradient de propriétés « FGM : Functionally Graded Materials », avec une variation continue dans le sens de l'épaisseur de la structure des propriétés mécaniques et thermiques. L'utilisation de ces matériaux s'était progressivement développée jusqu'à ce qu'ils soient utilisés dans divers domaines .

Pour déterminer les champs de déplacements, de déformations, les contraintes normales et tangentielles dues aux charges thermiques et mécaniques, nous avons besoins des moyens de calcul qui jouent des rôles primordiaux pour décrire précisément l'influence des excitations mécaniques et thermiques.

Au fil des années, diverses théories des plaques ont été proposées pour étudier avec précision leurs réponses en flexion ou d'autres sollicitations, les théories principales des plaques ont été citées dans la littérature sont : [1]

- Théorie classique des plaques (CPT) qu'ignorant l'influence de la déformation du cisaillement transversal.
- Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) avec distribution linéaire des déplacements.

- Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) avec une distribution des déplacements non linéaires (ordre élevé) à travers l'épaisseur de la plaque comme la théorie des plaques de déformation par cisaillement du 3^{ième} ordre (TSDT), la théorie des plaques de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) et la théorie hyperbolique (HDT). Dans les théories HSDT et quasi-3D, les contraintes de cisaillement transverses sont affinées à travers l'épaisseur, et donc aucun coefficient de correction de cisaillement n'est nécessaire.

L'objectif de ce travail est de développer une nouvelle HSDT où les termes intégraux sont utilisés dans le calcul de la plaque, est d'étudier la flexion des plaques sandwiches en FGM, soumises à des chargements thermiques en validant les résultats obtenus avec des autres modèles d'ordre élevé proposés dans la littérature. L'utilisation du terme intégral conduit à une diminution du nombre d'inconnues et les équations du mouvement. Cette théorie est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Le mémoire est divisé en cinq chapitres comme suite :

Dans le premier chapitre nous avons parlé des matériaux composites : leurs définition, historique et ses constituant, ainsi leurs propriétés mécaniques, les différents types et classification, les champs d'utilisation, les avantages et les inconvénients des matériaux composites, et finalement l'architecture des matériaux composites.

Les structures sandwiches sont discutées dans le deuxième chapitre : leurs définitions ; leurs éléments constitutants ; ainsi leurs techniques d'élaboration ; leurs intérêts et finalement leurs domaines d'applications.

Dans le troisième chapitre, nous allons définir les matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs propriétés, leurs domaines d'application, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication et la variation spatiale des propriétés de ces matériaux et différentes lois qui décrivent la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la plaque. Ensuite, les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement thermomécanique des structures en « FGM » ainsi sont discutés.

Le quatrième chapitre détaille les équations gouvernantes et la mise en œuvre du modèle proposé de plaques épaisses basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à

Introduction générale

quatre variables pour l'analyse du comportement mécanique des plaques épaisses en FGM sous chargement thermique.

Enfin le dernier chapitre est consacré à la validation du modèle proposé à travers quelques tests standards connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement thermoélastique de la flexion des plaques sandwichs, et des applications numériques réalisées sur les plaques avec une variation arbitraire des propriétés matérielles (Module de Young et coefficient de dilatation thermique). Afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement thermoélastique de la flexion des plaques tout en étudiant l'évolution de la flèche, les contraintes normales et tangentielles en utilisant les divers modèles des plaques épaisses.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement et de porosité sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés.

Chapitre - I-

Matériaux composites

I.1.Introduction

Les nouveaux développements des matériaux sont soumis aux besoins d'utilisateurs ; ainsi que La plupart de ces besoins humains conduisent à des inventions. Au début, il n'a utilisé que les matériaux qui l'entouraient dans la nature. Le bois et la pierre sont utilisés comme outils et peaux d'animaux pour les vêtements. Puis il a appris à tisser des fibres naturelles, comme coton et soie pour faire du tissu. Plus tard, il a découvert l'utilisation du fer et du cuivre pour fabriquer différents instruments de chasse.

La compréhension scientifique de l'homme a considérablement augmenté au cours des deux derniers siècles, qui ont vu une révolution dans La technologie. Les scientifiques ont découvert comment fabriquer des matériaux synthétiques spéciaux ou matériaux composites. [02]

Toutefois face à des contraintes économiques et environnementales toujours plus exigeantes, l'utilisation de renforts naturels et végétales dans les composites à matrice organique apparaît aujourd'hui comme une alternative de choix. La recherche sur le sujet s'est ainsi fortement dynamisée au cours de ces dernières années et un certain nombre de produits commencent à apparaître sur le marché (balustrades, bardage, palettes, fenêtres...). De nouvelles applications et des composites plus performants sont déjà anticipés, mais les connaissances restent insuffisantes et des études doivent être menées afin de mieux comprendre certains mécanismes.

Une nouvelle classe de matériaux composites connus sous le nom de Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) ou matériaux à gradient fonctionnel, présente une attention considérable due à un changement continu de la composition, les propriétés mécaniques et physiques varient d'une manière graduelle et continue. Cette variation pourra être dans une direction, deux directions, ou trois directions. En plus, la combinaison matérielle de plus de deux matériaux est envisageable. [03]

I.2.Définition d'un matériau composite

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou Plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun Des matériaux constitutifs. On appelle de façon courante "matériaux composites" des Arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces [4].

Entre le renfort et la matrice, existe une zone de liaison appelée « interface ». Cette zone assure la compatibilité renfort- matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif.

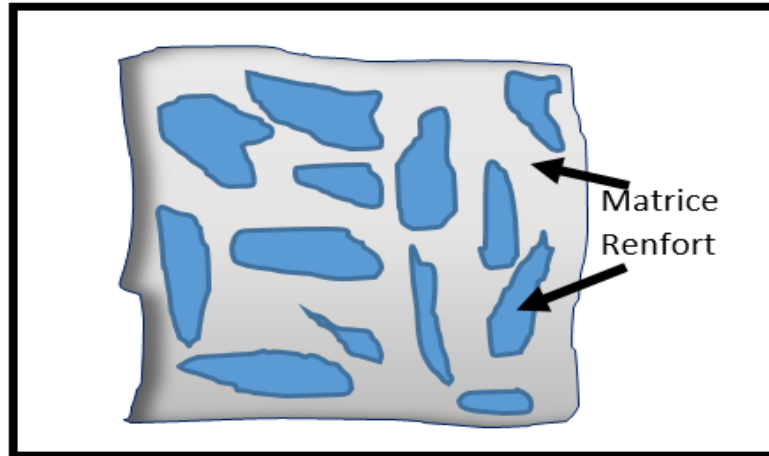


Figure. I.1 : schéma illustratif d'un matériau composite. [10]

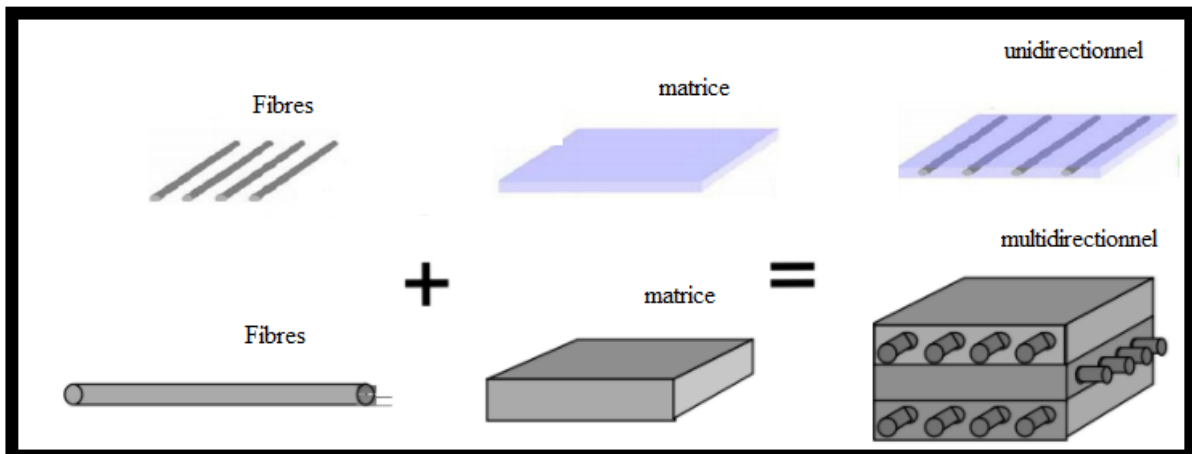


Figure. I.2 : les constituants d'un matériau composite en différentes formes [11]

I.3. Historique des matériaux composites

Le concept de renforcement fibreux est très ancien, comme indiqué dans les références bibliques à des briques d'argile de paille renforcées dans l'Égypte ancienne. Au 19^{ème} siècle des barres de fer ont été utilisées pour renforcer la maçonnerie, conduisant à l'élaboration de l'acier-béton (béton armé).

Au début du 20^{ème} siècle, La résine phénolique renforcée avec des fibres d'amiante a été introduite ; Le premier bateau en fibre de verre a été construit en 1942 ; des matières plastiques

Chapitre - I-Matériaux composites

renforcées ont également été utilisées dans les avions et les composants électriques à ce moment. L'enroulement filamentaire a été inventé en 1946 et incorporée dans des applications de missiles dans les années 1950. Les premières fibres de Bore et de Carbone haute résistance ont été introduites dans les années 1960, avec des applications de matériaux composites avancés à des composants d'avions en 1968.

Des composites à matrice métallique tels que le Bore/Aluminium ont été introduits en 1970. Dupont a développé le Kevlar (Aramide) en 1973.

A partir de la fin des années 1970, les applications des matériaux composites étaient largement développées pour envelopper les avions, l'automobile, et les industries biomédicales.

Les années 1980 ont été marquées par une augmentation significative de l'utilisation des fibres à modules élevés. Depuis les années 1990, l'accent est mis sur le développement des matériaux composites à matrice métallique et à matrice céramique ainsi que les composites carbone/carbone, pour des applications à haute température [6]

Les applications des composites comprennent les conduites souterraines et des conteneurs, bateaux, véhicules terrestres, des avions et des structures aérospatiales, composantes d'automobile, les produits biomédicaux et de nombreux autres produits conçus pour avoir des performances mécaniques élevées et/ou la stabilité de l'environnement couplé avec un faible poids [7]

I.4. Constituent des matériaux composites

I.4.1. Les renforts

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique à la traction et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques). [05]

I.4.1.1. Fibres de verre

La fibre de verre, utilisée pour fabriquer de nombreux matériaux composites armés, existe partout autour de nous ce sont des matériaux hautement résistants qui aident à réduire le poids des matériaux, tout en améliorant leur performance.

I.4.1.2. Fibres de carbone

Les fibres de carbone particulièrement fines (de 5 à 10µm de diamètre) ont un coefficient d'élasticité élevé de 200 à 800 GPa Presque composé d'atomes de carbone plus quelques atomes d'azote, d'oxygène et d'hydrogène. Il travaille à la promotion de certains matériaux composites.

Les fibres de carbone ont certains avantages :

- Elles conduisent bien l'électricité et la chaleur (avantages qui peuvent aussi devenir des inconvénients selon l'application).
- Elles sont rigides (leur module d'élasticité peut toutefois varier en fonction des paramètres de mise en œuvre).
- Elles résistent bien à la traction, tout comme à la compression. Elles s'avèrent, en ce sens, même aussi solides que l'acier.
- Elles sont près de 70 % plus légères que l'acier

I.4.1.3. Fibres aramides

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques de traction élevées telles que le carbone mais leur résistance à la compression est faible à leur coefficient d'élasticité de 70 à 200 Gpa et leur allongement est finalement de 1,5 à 5% selon la qualité. Les fibres d'aramide sont sensibles aux hautes températures, à l'humidité et au rayonnement « ultraviolet » et, par conséquent, ne sont pas largement utilisées dans les applications de génie civil. De plus, les fibres d'aramide ont des problèmes de relaxation et de corrosion, mais avec une bonne résistance aux chocs et à la fatigue.

Les polymères ou aramides sont une classe de matériaux résistants à la chaleur avec de bonnes propriétés mécaniques. Ils ne peuvent être utilisés que comme fibres, qui sont principalement utilisées pour fabriquer des matériaux composites, et améliorer les matrices.

I.4.1.4. Fibres céramiques

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions.

I.4.1.5. Autres types de fibres

Cette partie rassemble toutes les fibres qui ne se retrouvent pas dans les autres groupes. Généralement ces fibres sont utilisées pour des applications spécifiques (papiers spéciaux, pour une bonne conductivité électrique). Ces fibres possèdent des modules d'élasticité très faibles comparés aux autres fibres. Les fibres concernées sont :

- Les fibres origine végétale (cellulose, lin, chanvre... etc.).
- Les fibres origine minérale (amiante, silice).

Chapitre - I-Matériaux composites

- Les fibres synthétiques (tergal, dacron, etc.) issus des polyesters, de polypropylène ou de polyéthylène.
- Les fibres métalliques (acier, cuivre, aluminium) qui sont utilisées souvent avec des matrices métalliques.

Ces fibres sont appréciées pour diverses raisons par exemple :

- Leur prix de revient assez bas.
- Leur haute capacité isolation thermique.
- Leur bonne conductivité thermique et électrique.
- Leur propriété isolation acoustique.

Dans l'organigramme suivant les Différentes familles du renfort sont présentées :

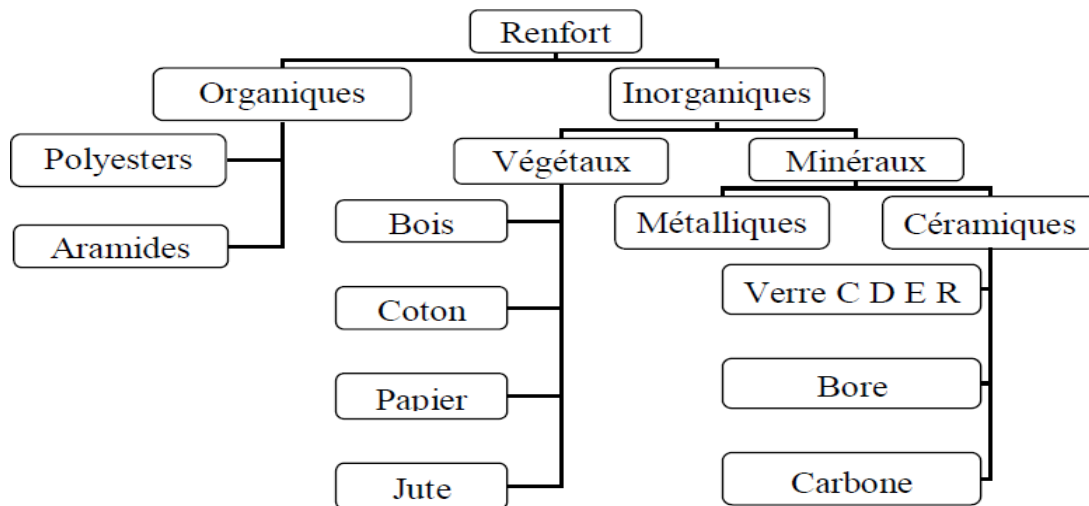


Figure I-3 : Organigramme Différentes familles du renfort [8]

I.4.2. Matrices

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de répartir les efforts (résistance à la compression ou à la flexion). La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres, et lie les fibres du renfort entre eux et assure la répartition de la contrainte c'est « l'emballage ». Les matrices doivent présenter une bonne compatibilité avec le renfort. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées, Les résines les plus utilisées dans les matériaux composites sont :

- Les résines thermodurcissables.
- Les résines thermoplastiques.

Chapitre - I-Matériaux composites

Ces deux types de polymères diffèrent en leur structure et leur comportement.

I.4.2.1. Les thermoplastiques

Les thermoplastiques sont des chaînes de polymères interconnectées qui sont recyclables. Le recyclage et la réversibilité thermique sont très importants. Il existe également des thermoplastiques spéciaux pouvant résister à des températures de 200 ° C ou plus. Les thermoplastiques sont la charge la plus importante en termes de production en raison de leur facilité de mise en œuvre et de leur faible coût.

I.4.2.2. Les thermodurcissables

Les thermodurcissables sont des polymères qui ne peuvent être mis en forme que seule fois mais possèdent des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées par rapport aux thermoplastiques. On retrouve dans cette famille les polyesters insaturés (vinyles ter, les dérivés allyliques, les polyesters condensés, etc.), les résines époxydes, les résines de condensation (les phénoliques, les aminoplastes, les franques,... etc.).

Dans l'organigramme suivant les Différentes familles des matrices sont présentées :

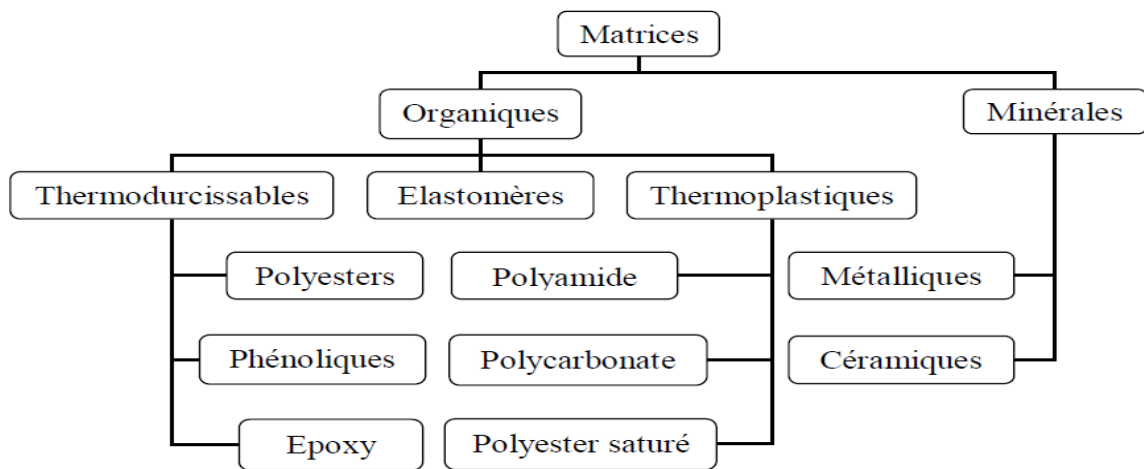


Figure I-4 : Organigramme des Différentes familles de matrice. [8]

Le tableau ci-après montre Principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissable.

Matrices	Thermoplastiques TP	Thermodurcissables TD
Etat de base liquide	solide prêt à l'emploi	visqueux à polymériser
Stockage	illimité	réduit
Mouillabilité renforts	difficile	aisée
Moulage	chauffage + refroidissement	chauffage continu
Cycle	court	long
Tenue au choc	assez bonne	limitée
Tenue thermique	réduite	bonne
Chutes et déchets	recyclables	perdus ou recyclés en charges
Conditions de travail	propreté	émanation pour "méthode humide"

Tableau : I.1 : Principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissable

I.4.3. Interfaces

Afin d'assurer une compatibilité entre le renfort et la matrice l'utilisation d'une couche d'interface est indispensable. Un apprêt spécifique comportant un agent collant est administré aux fibres destinées à la fabrication des composites reçoit il permet de coller les filaments pour en faire des fils et assure une fonction de lubrification afin de les protéger contre l'abrasion due au frottement entre fibres.

I.4.3.1. Charges – additifs

Dans le domaine des matériaux composites on appelle communément une charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui est ajoutée à un polymère de base qui permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques et d'améliorer l'aspect de surface ou bien simplement de réduire le prix de revient du matériau modifié. Au contraire des matériaux thermoplastiques, les matériaux thermodurcissables ont toujours renfermé des charges à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse. Le choix d'une charge pour un polymère donné est caractérisé en fonction des modifications recherchées pour l'objet terminé. Mais d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matériaux plastiques devront avant tout satisfaire un certain nombre d'exigences à savoir : la compatibilité avec la résine de base, la mouillabilité, l'uniformité de qualité et de granulométrie, la faible action abrasive et le bas prix de revient.

I.5. Propriétés mécaniques des composites

Les propriétés mécaniques des matériaux composites varient considérablement. Ces propriétés dépendent des fibres contenues dans le composite (type, quantité et direction), de la matrice

utilisée, et du rapport volume-fibre, c'est à dire le ratio du volume des fibres par rapport au volume total du composite. Elles sont aussi affectées par le volume ou la dimension du composite lui-même. En général, les composites de fibres de carbone sont plus solides et plus rigides que les composites de fibres de verre.

I.6. Les différents types de matériaux Composites

Il existe 3 grandes familles qui répertorient les matériaux composites en fonction de la matrice qui les compose :

- **Le CMO** (ou composite à matrice organique) qui est le plus utilisé aujourd'hui grâce à son coût plus bas permettant une production en série.
- **Le CMC** (ou composite à matrice céramique) qui est majoritairement utilisé pour des domaines très spécifiques à haute technicité et à température élevée : spatial, militaire ou encore nucléaire.
- **Le CMM** (ou composite à matrice métallique) qui est composé d'aluminium, zinc ou magnésium par exemple qui peut être utilisé pour diverses applications comme l'automobile, les loisirs ou encore l'électronique.

Pour chacune de ces familles, les renforts utilisés pour compléter la matrice sont différents. Dans la famille de composite la plus répandue aujourd'hui, le composite à matrice organique, on distingue deux catégories :

- Le composite à grande diffusion : est le moins coûteux à produire et est utilisé dans la fabrication de pièces de toutes sortes
- Le composite à haute performance : est plus cher à produire bien qu'il ait des qualités mécaniques supérieures. Il est ainsi utilisé dans les secteurs de l'aéronautique, le nautisme, le sport et les loisirs.

I.7. Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des constituants ou suivant la nature des composants

I.7.1. Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes :

- Composites à fibres : On appelle composite à fibre, si le renfort se trouve sous forme de fibre (soit fibres continues, soit fibres discontinues, coupées ou courtes)
- Composites à particules : On appelle composite à particule, lorsque le renfort se trouve

sous forme de particule. Au contraire à une fibre, la particule n'a pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion...etc. mais dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques. Ce type de composite recouvre un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse.

I.7.2. Classification suivant la nature de la matrice

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés :

- Composites à matrice organique (résine, charges) : peuvent être utilisés dans le domaine des températures ne dépassant pas 300°C.
- Composites à matrice métallique : (alliages légers et ultra légers d'aluminium, de magnésium, de titane) : domaine des températures jusqu'à 600°C.
- Composites à matrice minérale (céramique) : domaine des températures jusqu'à 1000°C. Ce type de composite (matrice) peut être associé à divers renforts

I.8. Champs d'utilisation

Les composites trouvent leurs principales applications dans :

- Secteur d'automobile
- Secteur ferroviaire
- Construction civile
- Construction industrielle
- Secteur médical
- Construction électrique
- Les équipements de sports et loisirs

I.9. Applications des matériaux composites au génie civil

En raison de leurs hautes propriétés mécaniques et de tous les avantages déjà existés, les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans le génie civil. Ces nouveaux matériaux de hautes performances, font aussi bien leur apparition dans la réhabilitation que dans la conception et la réalisation de nouvelles structures. Parmi les multiples applications des matériaux composites dans l'ingénierie civile, nous pouvons citer :

- Construction d'édifices et d'ouvrage d'art léger.
- Renforcement structurel d'édifices existants.
- Réalisation de formes complexes de grande portée

Chapitre - I-Matériaux composites

- Utilisation de produits dérivés du béton avec ajouts de fibre, béton armé avec renfort en fibre de verre ou de carbone
- Elaboration de matériaux hybrides avec des matériaux traditionnels
- Transmission et distribution d'électricité temporaire et durable, pylônes électriques modulables et déplaçables
- Structures destinées aux réservations d'eau
- Panneaux pour murs et planchets
- Produits dérivés du bois : bois aggloméré, lamellé collé, panneaux OSB, etc
- Géotextiles : pour les opérations de drainage, stabilisation de sol, construction de barrages.

I.10. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites

Les matériaux composites présentent des avantages et inconvénients.

I.10.1. les avantages

- Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit, l'avion consomme donc moins de carburant
- Ils sont bien sur insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides
- Il y a l'assurance d'en disposer beaucoup et pendant longtemps, ce qui n'est pas le cas des métaux dont le prix augmente vertigineusement.
- On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande.
- Ils offrent de grandes de maniement.
- Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale.
- Ils sont peu sensibles à l'humidité, la chaleur, la corrosion

I.10.2. les inconvénient

- Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts.
- Une petite faille peut engendrer de grosses déformations.
- La détection de ses problèmes est difficile ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.
- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe

I.11. Architecture des matériaux composites

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types :

- Les monocouches ;
- Les stratifiées ;
- Les sandwiches.

I.11.1. Le matériau composite Monocouches

Représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents Types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

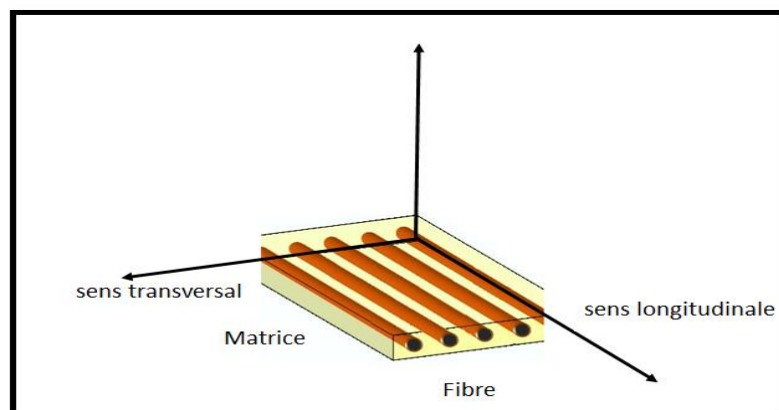


Figure I.5 : composite monocouche.

I.11.2. Le matériau composite stratifié

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

On pourra avoir des stratifiés de type :

- Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la Direction $+h/2$ que de couches orientées suivant la direction $-h/2$
- Symétrique : stratifié comportant des couches symétriques Par rapport à un plan moyen.
- Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

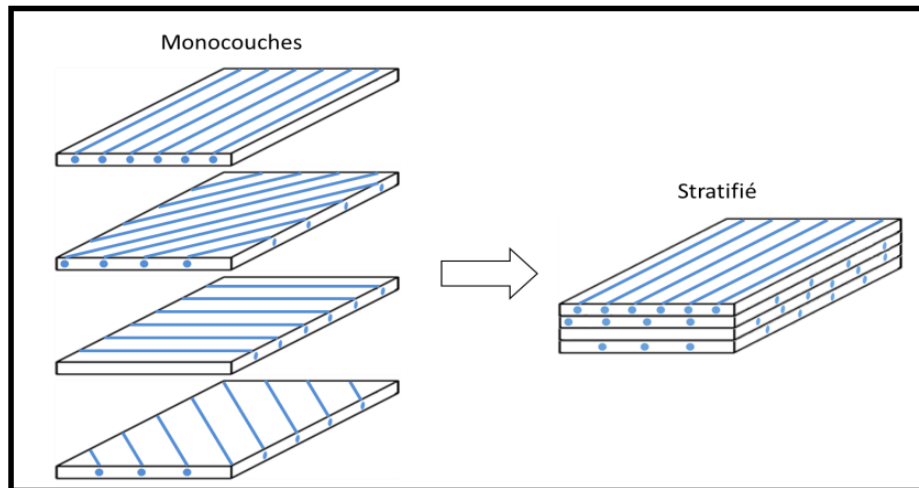


Figure I.6 : Schéma illustratif d'un matériau composite stratifié. [9]

I.11.3. Le matériau composite Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

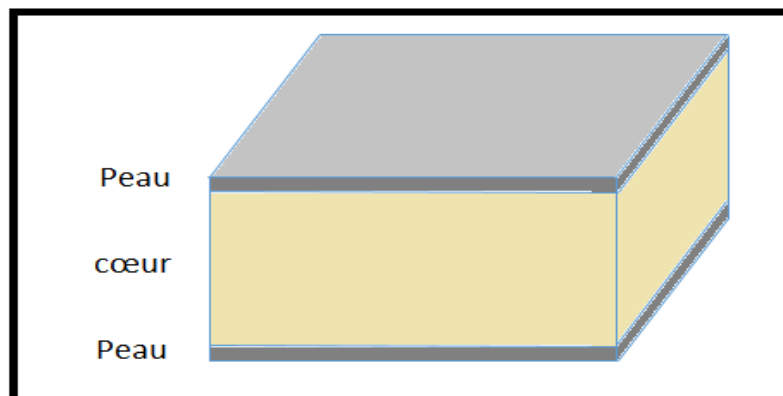


Fig.1.7 : Composite sandwichs.

I.12. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé les matériaux composites, en parlant de leurs différents constituants (matrice, fibre), ainsi que leurs différents types, leurs propriétés, et leurs domaines d'application. Leurs inconvénients leurs avantages. et finalement nous avons mis en point l'architecture des matériaux composites que nous conduisent dans le chapitre successeur les parler en détail l'architecture sandwich.

Chapitre - II-

GENERALITES SUR LES MATERIAUX

SANDWICHES

Chapitre - II- : généralités sur les matériaux sandwichs

II.1. Introduction

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique. De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc.).

Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwichs. Les structures sandwich occupent un large créneau dans la construction des pièces composites. Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes.

II.2. Définition d'un matériau sandwich

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Figure. II.1) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble [13]

Dans un sandwich, un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

En plus de leur bonne rigidité en flexion, de leur bonne résistance au flambement et de leur légèreté, les matériaux sandwichs possèdent également de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique. Ceci explique leur emploi de plus en plus fréquent comme cloison.

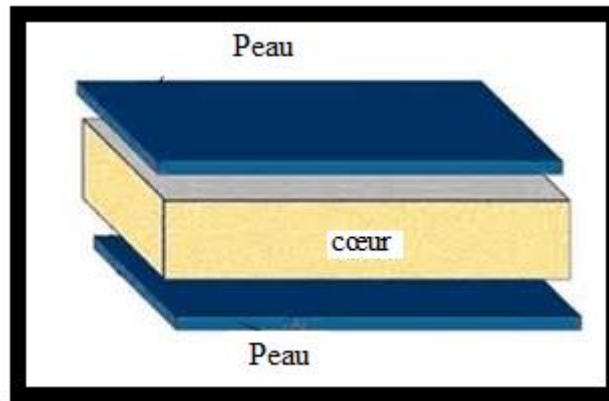


Figure (II.1) Schéma d'un sandwich

II .3. Éléments constituant les matériaux sandwichs

II .3.1. la peau

Généralement elles sont de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des contraintes normales (traction ou compression).

II .3.2. L'Âme

L'âme a en général une très faible résistance à la flexion. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre, elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- Mousses : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques.
- Balsa : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.
- Nid d'abeille : Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de ' Nid d'abeille ' par expansion.

Il existe deux types d'âmes :

Chapitre - II- : généralités sur les matériaux sandwichs

II .3.2.1. Les âmes pleines

Parmi laquelle on retrouve :

Le Balsa ou bois cellulaires (Figure II.2 a)

Diverses mousses cellulaires (Figure II.2 b)

Des résines chargées de microsphères creuses de verres appelés mousses syntactiques.

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope [14].

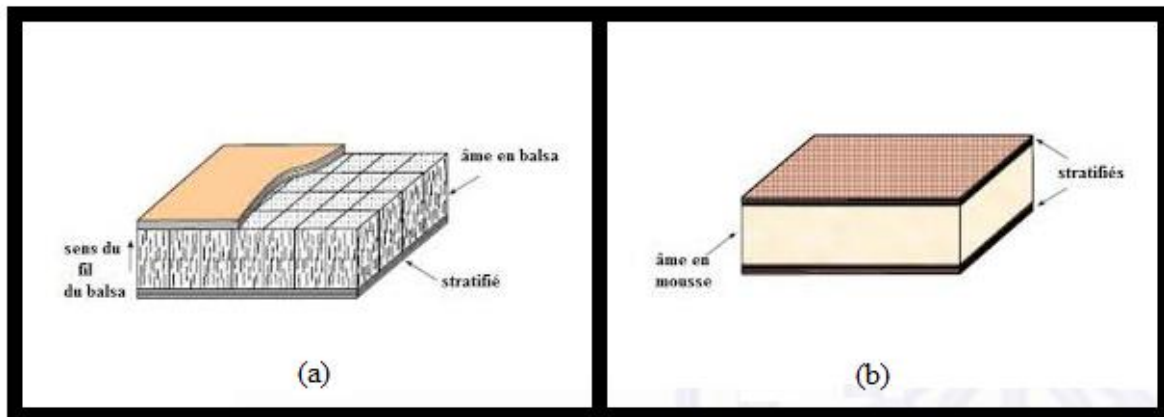


Figure (II.2) Matériaux sandwichs à âmes pleines

II .3.2.2. Les âmes creuses

De type nid d'abeilles (Figure II.3.a) ou de type d'âme ondulée (Figure II.3.b), elles sont des alliages métalliques légers ; Des papiers kraft ; Du papier polyamide, type papier Nomex.

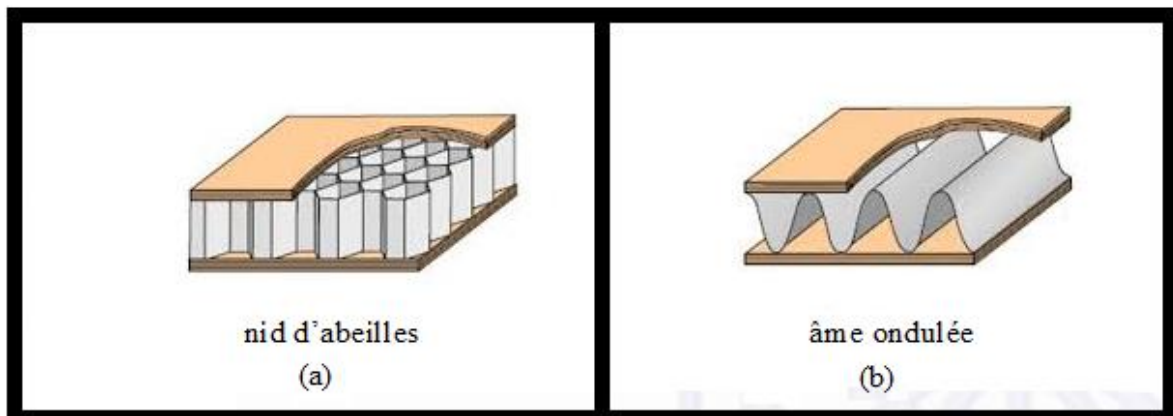


Figure (II.3) Matériaux sandwichs à âmes creuses : (a) nid d'abeilles ; (b) âme ondulée

II .3.3. Interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

Chapitre - II- : généralités sur les matériaux sandwichs

II .4. Conception des structures sandwichs

Les structures sandwichs sont conçues pour être soumises à des efforts en flexion, et aussi pour répondre à d'autres exigences, comme l'isolation thermique, acoustique, etc.

Le choix du type de sandwich dépend surtout de son application. Les principaux objectifs du concepteur d'un « sandwich » sont de choisir les matériaux appropriés constituant la structure ainsi que de déterminer les épaisseurs respectives des peaux et de l'âme de façon à résister aux moments fléchisseurs, au cisaillement et aux contraintes axiales induites par les forces appliquées sur elles.

Généralement, la conception est basée sur la théorie des sandwichs et la sélection de matériaux ayant les propriétés appropriées.

II .5. Sélection des matériaux-âme

D'un point de vue mécanique, le critère de sélection du matériau de l'âme est une résistance élevée au cisaillement. Son faible coût de production, sa fiabilité dans le temps, sa faible absorption d'eau ou humidité, son comportement face au feu et à la chaleur, ses capacités d'isolation acoustique et thermique peuvent aussi être des critères décisifs dans le choix du matériau. [15]

- Résistance en flexion
- Résistance aux chocs
- Résistance à la compression
- Résistance au décollement (pelage)
- Isolation
- Absorption d'eau

II .6. Techniques d'assemblages des matériaux sandwichs

II .6.1. Technique collage de peau sur l'âme

Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé selon la Figure (II.4) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

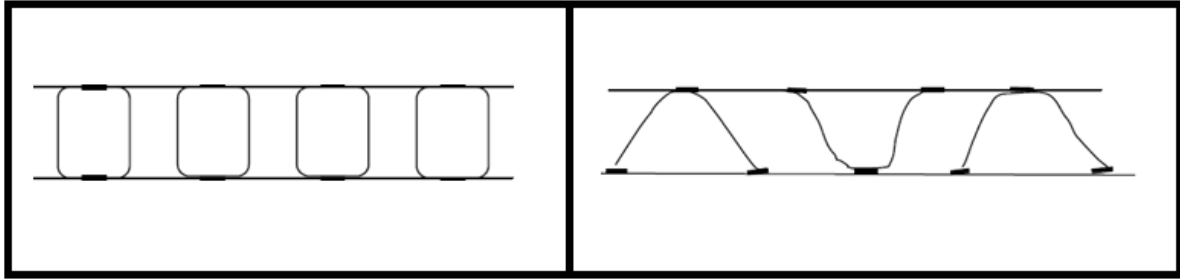


Figure (II.4) panneaux réalisés par collage à partir de profils divers

II .6.2. Technique de pliage

Après mise en œuvre les panneaux sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la Figure (II.5). On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.

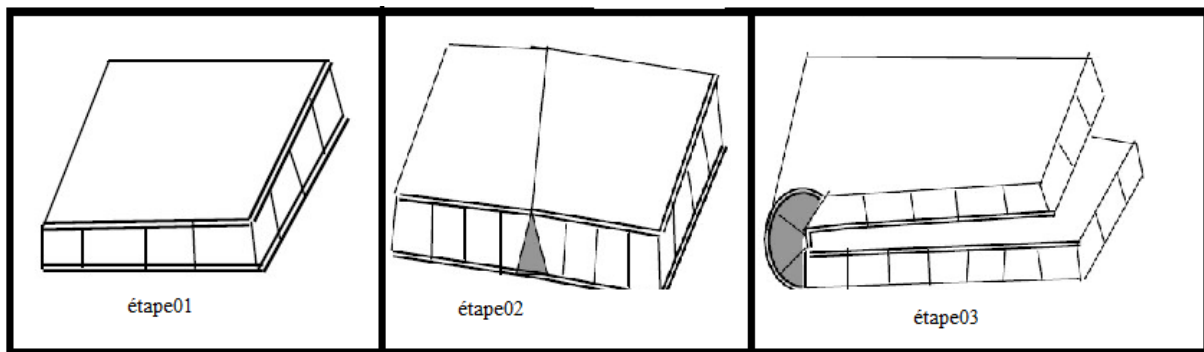


Figure (II.5) Pliage de panneaux sandwichs.

II .7. Intérêt des structures sandwichs

L'intérêt principal des structures sandwichs, par opposition aux composites traditionnels dits monolithique, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de 100 kg m^{-3} . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

Les matériaux composites sandwichs disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la

Chapitre - II- : généralités sur les matériaux sandwichs

durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

II .8. Domaines d'application des matériaux sandwichs

L'usage des structures sandwichs, continue à augmenter rapidement pour diverses applications qui vont des satellites, avions, bateaux, automobiles, voitures sur rail, éoliennes et construction de pont pour n'en mentionner, que quelques-unes. Les performances des structures sandwichs comme matériau, sont en constante évolution avec à chaque fois de nouvelles fonctionnalités comme l'amortissement des vibrations et des bruits, la haute résistance au feu et aux environnements agressifs. Il y a, aujourd'hui, de bonnes raisons de penser que dans la prochaine décennie, les ingénieurs et les constructeurs voudront construire des structures industrielles et des engins de transports encore plus grands et certainement plus légers. Avec la technologie actuelle, il est possible de remplacer de grandes parties des structures et superstructures, souvent en matériau conventionnel, avec un matériau sandwich. Ceci permettra à la structure d'être plus légère, plus stable et plus économiques grâce à une moindre consommation de fuel.

Le sandwich est aussi utilisé par une large gamme de constructions navales et maritimes et de nouveaux marchés sont encore à venir. Les conceptions de terres d'aujourd'hui permettent uniquement l'utilisation du béton, de l'acier et de quelques alliages d'aluminium. Dans le futur le concept du sandwich peut être introduit comme matériau de substitution pour différents modules composant ces structures, telles que les chambres de stockage et l'isolation en période hivernale [16].

II .9. CONCLUSION

Les structures sandwichs sont discutées dans ce chapitre : leurs définitions ; leurs éléments constitutants ; ainsi leurs techniques d'élaboration ; leur intérêt et finalement leurs domaines d'applications.

Chapitre - III-
Généralités sur les matériaux
A gradient de propriétés

III.1. Introduction :

le développement rapide de nouvelles industries et de ses processus de fabrication modernes, résultants en une nouvelle classe des matériaux composites appelés matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) ou des matériaux à gradient de propriétés . Le but était principalement de préparer une barrière thermique afin de l'utiliser dans le secteur aéronautique et aérospatial dont la majorité de ses composantes sont exposées à des températures très élevés.

L'invention de ce matériau était considérée comme un véritable essor dans plusieurs domaines de la science et de la mécanique des matériaux car cette nouvelle classe de matériaux composites possède une microstructure variant continûment, graduellement et sans interruption des fractions de volume dans la direction d'épaisseur de telle façon à remédier les problèmes généralement rencontrés dans les matériaux composites conventionnels.

L'élimination de la disparité de propriétés et atténuation des contraintes thermique de cette classe des matériaux composite, attire beaucoup d'attention en raison de ses avantages ; cela explique la grande polyvalence d'utilisation dans diverses applications technologique et maximiser l'intégrité dans nombreuses secteurs d'ingénierie [17] tels que l'aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales.

L'objectif de la production de FGM est l'élimination de l'interface macroscopique dans les matériaux dans laquelle les propriétés mécaniques, physiques et chimiques du matériau changent brusquement. Pour ne pas avoir de discontinuités dans le matériau. Ainsi, ces matériaux présentent des propriétés thermomécaniques mieux que les matériaux composites conventionnels et basiques [17].

III.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les FGM sont des matériaux composites avec lesquels, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes thermiques et mécaniques au niveau des interfaces (provoquant délaminage et décollement) par assemblage de plusieurs matériaux (Figure III.1) . Et pour cette raison que la face extérieure exposée à la température très élevée a une faible conductivité thermique ainsi qu'un faible coefficient d'expansion et aussi posséderait une bonne résistance à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure est bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

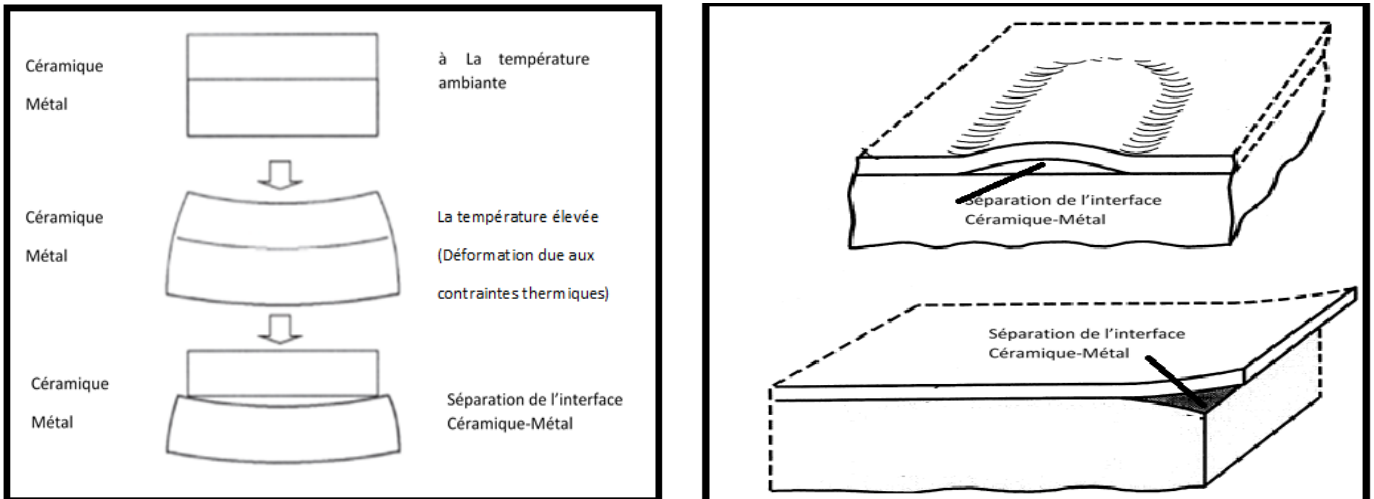


Figure III.1 : séparation de l'interface Céramique-Métal due aux contraintes thermiques [18].

Si on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, il présente immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes (Figure III.2). L'idée principale est alors de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

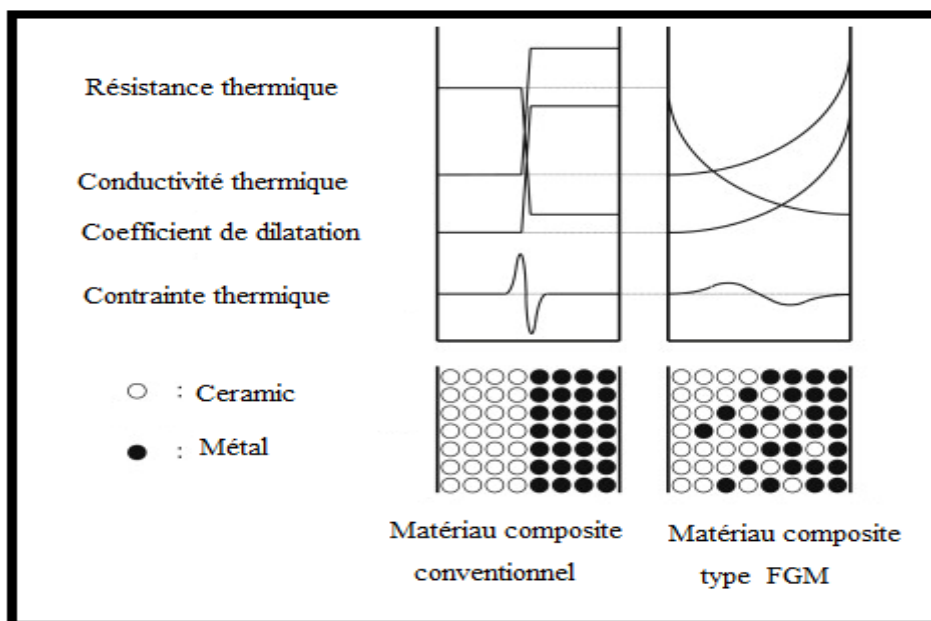


Figure III.2 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au Japon. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [19]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [20].

Dans la figure III.3 des propriétés mécaniques sont comparés d'un « FGM » constitué de céramique et de métal.

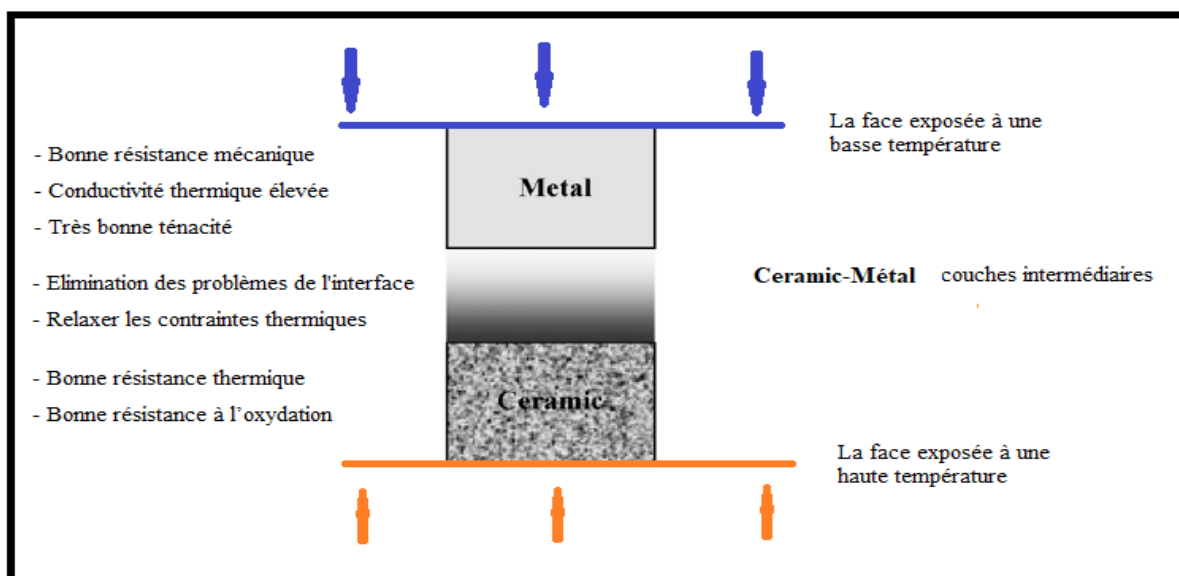


Figure III.3 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La figure III.4 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

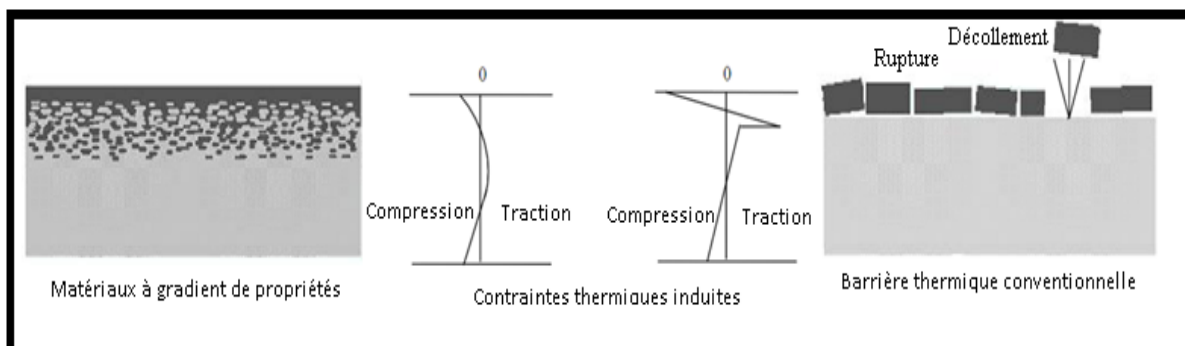


Figure III.4 : Protection thermique.

III.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

En 1984 dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon ; Niimi et ses collègues ont développé le concept de « matériau à gradient de propriété ». Pour l'utiliser comme une barrière thermique dans les navettes spatiales et les réacteurs nucléaires [21]. La structure particulière de ce nouveau matériau composite. Son gradient continu de composition et de porosité, influence directement sur la résistance mécanique et thermique [22], qui a permis d'élargir le domaine d'application aux enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [23].

Puis en 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux dont le gradient de température est d'ordre 1300°C. Dont 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [24]. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [21][22].

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique [24][25]. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique [24].

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

III.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

De 1991 à nos jours, de nombreuses nouvelles techniques ont été développées et utilisées, et Le choix de la technique de fabrication des FGM est principalement influencé à la fois par les propriétés de service souhaitées et par la classe des FGM à produire.

III.4.1. Les classes des matériaux à gradient de propriétés

En fonction de la géométrie et de la section transversale du matériau à produire, les FGM peuvent être classés en deux grands groupes, laminaires et épais.

III.4.1.1. Groupe des FGM minces ou laminaires

Ceux sont généralement des FGM sous forme de revêtement de surface et ont des sections transversales minces. Le choix de la méthode de dépôt en surface utilisée dans la fabrication de FGM laminaires est dicté par les exigences de service du matériau. Ce type de FGM ne convient généralement pas aux applications dans des conditions de service extrêmes.

III.4.1.2. Groupe des FGM épais ou en masse

Cette classe des FGM est caractérisée par des épaisseurs supérieures à 1 mm et dont les propriétés fonctionnelles varient en fonction du profil de gradient du matériau.

III.4.2. Les processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés .

Miyamoto et al [63] ont classifié les processus de fabrication en quatre catégories principales comme Le Tableau III.2 le montre, et on trouve une littérature riche en détail de ses processus de fabrication [26, 27, 28, 29.58].

Processus en masse (particulaire)	Empilage - poudre ; fibres ; tôles	Consolidation d'empilement - élimination des pores ; infiltration
Processus de couches	Dépôt moléculaire - vapeur ; électro	Dépôt mécanique - plastification ; pulvérisation
Processus de preformes	Diffusion - solide ; liquide ; vapeur	Champs gradients - thermique ; électrique ; autres
Processus de fusion	Décantation	Solidification

Tableau III.1 : classes des processus de fabrication des FGM

III.4.2.1 Processus de fabrication des FGM laminaires (minces).

Le FGM étalé ou laminaire est généralement produit par divers processus de déposition et de suspension et le choix du dépôt dépend du service requis du matériau, on distingue :

- Le dépôt en phase vapeur.
- Le dépôt de couche atomique.
- Le dépôt par pulvérisation.
- L'électrodéposition.
- Le dépôt laser.

III.4.3. Processus de fabrication des FGM épais (en masse).

Le processus de fabrication de FGM épais est généralement regroupé en deux ; Le processus de gradation et Le processus de consolidation.

III.4.3.1. Le processus de gradation

Ce processus comprend les processus de :

- Constitution : Le processus constitutif est basé sur une accumulation en couches de FGM à partir de sa forme en poudre. Ce processus est devenu au fil du temps économiquement et technologiquement viable en raison de l'innovation enregistrée dans l'industrie de l'automatisation
- D'homogénéisation : Le processus d'homogénéisation élimine l'interface nette qui existe dans les FGM épais en la convertissant en une forme de gradient par le transport de matériaux.
- de ségrégation : Le processus de ségrégation utilise la gravitation externe ou des champs électriques pour convertir un matériau d'une forme homogène à une forme graduée [30, 31].

III.4.3.2. Le processus de consolidation :

Le processus de consolidation des FGM épais suit le processus de gradation. Ce processus implique le frittage et la solidification du matériau en poudre. Les conditions de traitement du matériau sont choisies de manière à ce que leur structure de gradient ne soit pas altérée tandis qu'un retrait inégal est également atténué [31].

Les processus de fabrication des FGM épais comprennent les :

- Métallurgie des poudres (MP)

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

- Coulée de métal (CM) : Moulage à la barbotine, Moulage par centrifugation, Moulage par agitation

Dans la littérature d'autres types de procédés de fabrication sont énumérés dans Tableau III.2.

Techniques de fabrication	Références
Moulage Séquentiel	[30 31,55]
Technique infiltration	[30 ,33,56]
Forme libre des solides	[26,63,30,36,37]
Moulage par agitation frictionnel	[59,60]
Dépôt électro-phorétique	[61,62]

Tableau III.2 : autres processus de fabrication des FGM

III.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Les FGM ont été essentiellement développées pour les structures aérospatiales soumises à des fluctuations de température élevées. Mais ils ont élargi à des applications potentielles dans différents domaines en raison de leur flexibilité pour fabriquer un matériau composite particulier selon les besoins [58]. Les applications importantes des FGM sont :

Aérospatial : Composants de moteur-fusée, Corps des avions spatiaux.

Chimique : L'échangeur de chaleur, Tube de chaleur.

Électronique : Récipient de réaction.

Ingénierie : Semi-conducteur à bande graduée Capteurs.

L'énergie nucléaire : Outils de coupe Éléments de moteur.

Optiques : Composants des réacteurs nucléaires Pastilles de combustible.

Matières biologiques : Fibres optiques Lentilles Implants Peau artificielle.

Conversion d'énergie : Générateur thermoélectrique Convertisseur thermoïonique Pile à combustible.

Produits : Matériaux de constructions Corps de voiture Verres de fenêtre.

III.6. Avantages et inconvénients des matériaux à gradient de propriétés

III.6.1. Avantages des matériaux à gradient de propriétés

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Et beaucoup chercheurs soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que [57] :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique
- Suppression de délaminage
- Augmentation de la ténacité à la rupture
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

III.6.2. Inconvénients des matériaux à gradient de propriétés

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

indésirables, etc. Les matériaux sont fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [57].

III.7. Les propriétés matérielles effectives des FGM

Un FGM typique représente un composite des particules avec une distribution prescrite des fractions de volume des phases constitutives. Les propriétés des matériaux sont généralement supposées suivre une gradation à travers l'épaisseur d'une manière continue (Figure III.5).

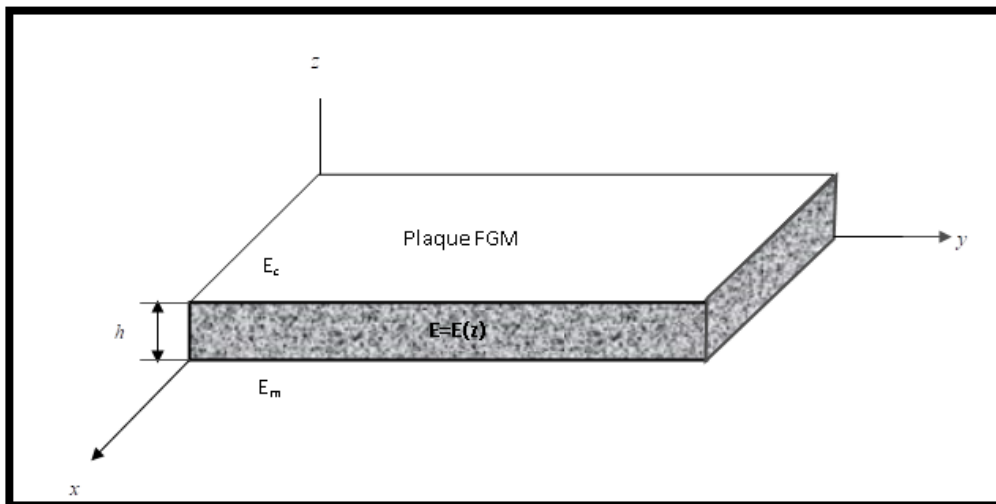


Figure III.5 : la géométrie d'une plaque FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

La température joue un rôle primordial pour la prédiction de la réponse mécanique dans les matériaux à gradient de propriétés. Ainsi, leur propriétés mécaniques $P(z)$ (module de Young $P(z) = E(z)$, le Coefficient de Poisson $P(z) = \nu(z)$, coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique...etc. qu'ils sont supposés dépendre de la température et peuvent être exprimés sous forme non linéaires suivante [65] :

$$P = P_0(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (\text{III.1})$$

Où P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients de température T correspondants aux matériaux constitutifs. La valeur chaque coefficient pour un FGM en céramiques et métaux sont listés dans littérature [66]. Et l'évaluation des $P(z)$ est basée la distribution de la fraction volumique et la forme approximative de la phase dispersée dans le matériau.

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

Plusieurs modèles micromécanique ont été développées au cours des années afin de déduire les propriétés effectives des matériaux composites macroscopiquement homogènes.

III.7.1. Le modèle de Voigt (la loi des mélanges)

Le schéma de Voigt (la loi des mélanges) est le modèle le plus populaire et le plus couramment utilisé pour estimer les propriétés mécaniques dépendant de l'épaisseur des FGM

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V(z) \quad (\text{III.2})$$

$V(z)$: est la fraction volumique

III.7.1.1. La fraction volumique obéit à une fonction en loi de puissance (plaque P-FGM)

$$V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k \quad 0 \leq k \leq +\infty \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.3})$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque.

La figure III.6 montre la variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM., il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

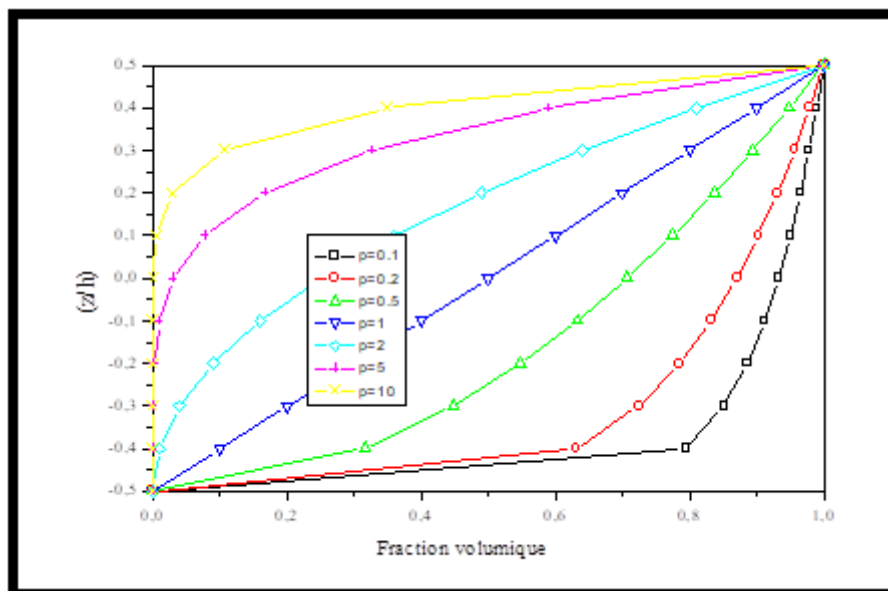


Figure III.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

III.7.1.2. La fraction volumique obéit à une fonction sigmoïde (plaque S-FGM)

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [39]. Par conséquent, Chung et chi [40] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{III.4})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{h} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.5})$$

La figure III.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (III.4) et (III.5) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

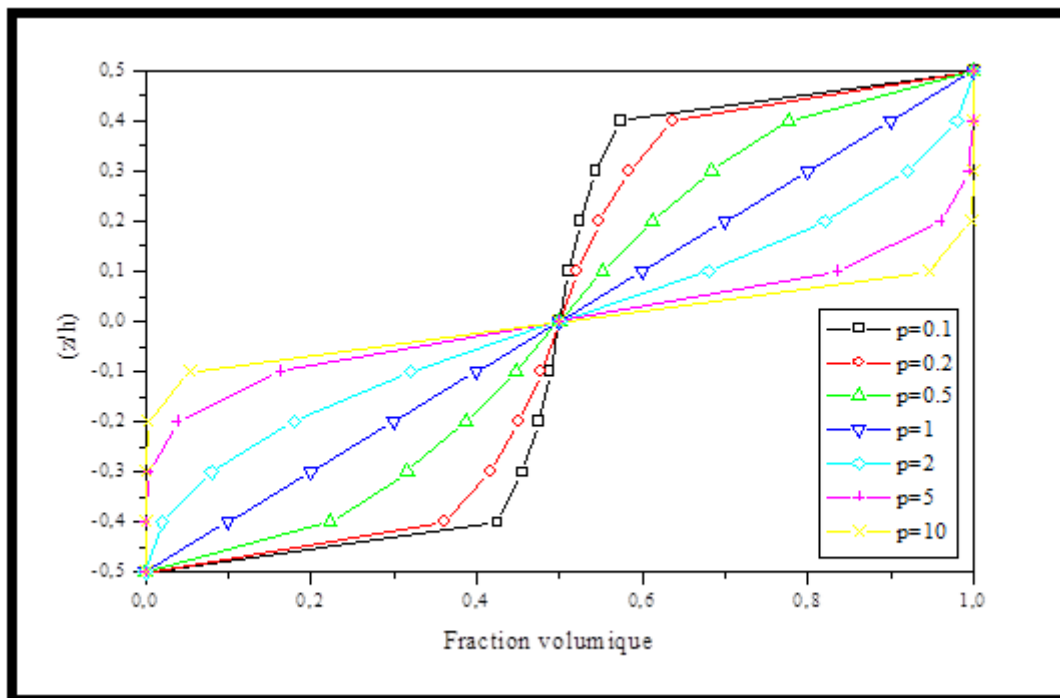


Figure III.7: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

On peut définir aussi la loi antisémitique de la fonction sigmoïde comme suite :

$$\begin{aligned} V_1(z) &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \\ V_2(z) &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

III.7.2. Modèle de la loi exponentielle (E-FGM)

Ce modèle est très répandu dans les études de mécanique de la rupture [41]. Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [42] :

$$P(z) = P_m e^{\left[\log\left(\frac{P_c}{P_m}\right) V(z) \right]} \quad (\text{III.7})$$

$V(z)$: est la fraction volumique.

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure III.8.

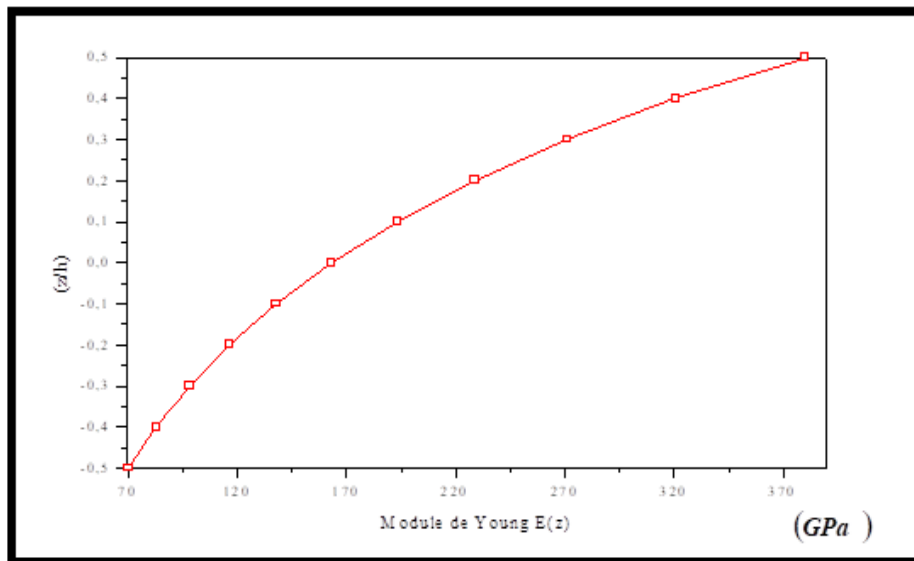


Figure III.8 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

III.7.3. Les propriétés matérielles de la plaque modèle de Mori-Tanaka

Le schéma de Mori-Tanaka est un modèle d'homogénéisation bien connu et généralement utilisé pour prédire les propriétés élastiques efficaces pour les différents types de FGM.

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

Cette méthode repose sur l'hypothèse qu'il s'agit d'un matériau composite diphasique constitué d'une matrice (continue) renforcée par des particules sphériques (discontinue), réparties aléatoirement dans la plaque. Selon le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka

Le module de Young et le coefficient de Poisson sont alors donnés par :

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)} \quad (\text{III.8})$$

Il est clairement que le coefficient de cisaillement effectif (G) et les modules de compressibilité (K) sont apparait dans la formule et ils sont donnés par [38] :

$$\frac{k-k_m}{k_c-k_m} = \frac{V_c}{1 + \frac{3V_m(k_c-k_m)}{(3k_m+4G_m)}} \quad \frac{G-G_m}{G_c-G_m} = \frac{V_c}{1 + \frac{V_m(G_c-G_m)}{(G_m+f_1)}}$$

$$f_1 = \frac{G_m(9k_m-8G_m)}{6(k_m+2G_m)}$$

III.7.4. Modèle auto-cohérent de Hill (III.9)

Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite.

Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement ; impliquant que le même module global est estimé dans un autre composite où les rôles des deux phases sont permutés. Ceci permet l'estimation du module effectif dans les régions dont le squelette de la microstructure a une forme continue [75].

le module de Young et le coefficient de Poisson sont les mêmes que ceux de Mori-Tanaka :

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \quad \nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)} \quad (\text{III.10})$$

L'expression du module de compressibilité est obtenue par :

$$k = \frac{1}{\frac{V_m}{[k_m+(4/3)G]} + \frac{V_c}{[k_c+(4/3)G]}} - (4/3)G \quad (\text{III.11})$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_m k_m}{[k_m+(4/3)G]} + \frac{V_c k_c}{[k_c+(4/3)G]} \right] + 5 \left[\frac{V_m G_c}{G-G_c} + \frac{V_c G_m}{G-G_m} \right] + 2 = 0 \quad (\text{III.12})$$

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

III.8. Les modèles analytiques des plaques FGM

III.8.1. Définition des plaques

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés, définies par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur, notée $h(x, y)$, petite par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur, suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince ou épais aux plaques et coques.

Différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel, d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique régnant le comportement [68] :

a) Les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée ;

b) Les plaques minces avec de grandes flèches (Karman) ;

c) les plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

III.8.2. Historique des plaques

Du point de vue historique, c'est Love qui utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff en 1888, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les théories des poutres, pour fonder une théorie des plaques minces, appelée théorie classique CPT ou théorie de Love-Kirchhoff (Love A. E. H., 1888) [69].

La théorie des plaques modérées ou semi-épaisses, théorie des déformations du premier ordre, a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de (Rayleigh 1877), (Timoshenko S., 1921) [70], (Reissner E., 1945) [71] et (Uflyand Y.S., 1948) [72] (Mindlin R. D., 1951) [73], cette théorie utilise un coefficient de correction pour obtenir des résultats plus exactes, $K=\sqrt{5/6}$.

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante.

Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque [74].

III.8.3. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h). [67]

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure III.9), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. [43], [44], [45]

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, & \text{(III.13.a)} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, & \text{(III.13.b)} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y), & \text{(III.13.c)} \end{cases}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

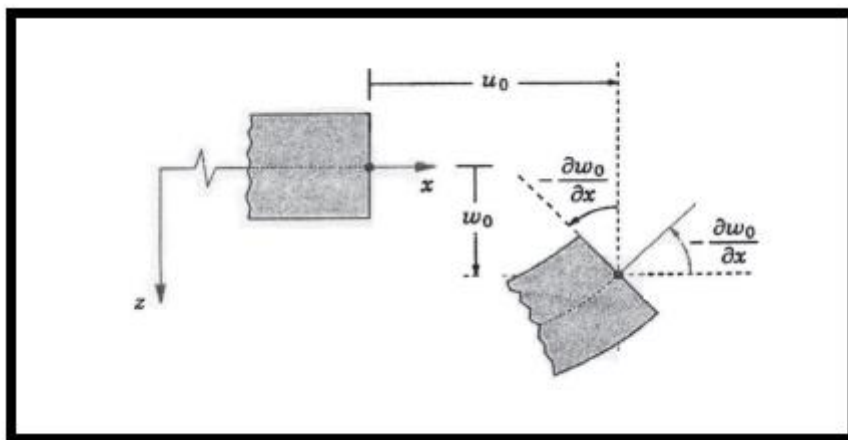


Figure III.9 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [44].

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

III.8.4. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction. [43] [44] [45] [46] [47].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), & \text{(III.14.a)} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), & \text{(III.14.b)} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y), & \text{(III.14.c)} \end{cases}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement. Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

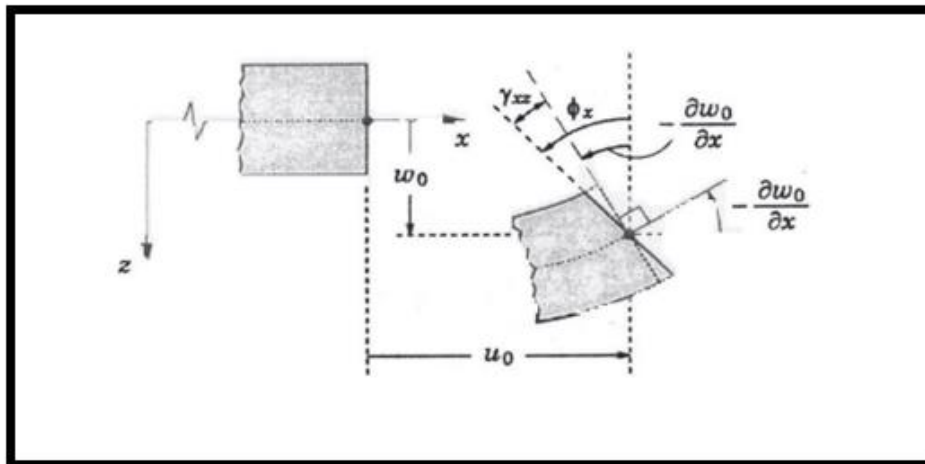


Figure III.10 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [44].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

III.8.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. [48] [49] [50] [51] [52].

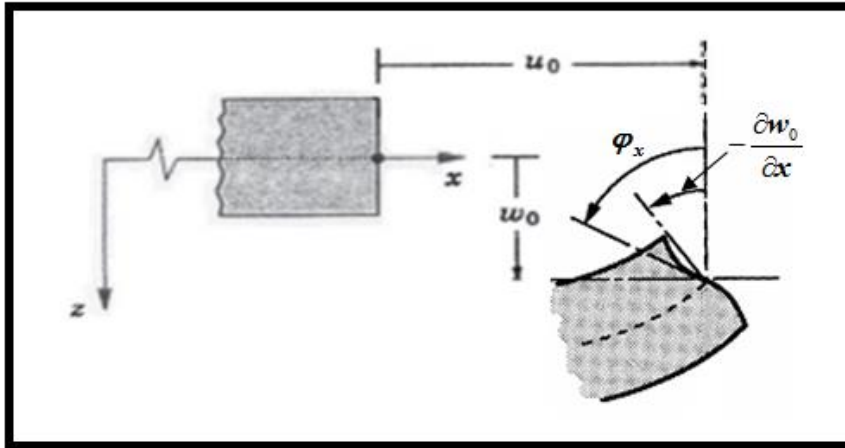


Figure III.11 : Illustration de la plaque d'ordre élevé [44].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y), & \text{(III.15.a)} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y), & \text{(III.15.b)} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y), & \text{(III.15.c)} \end{cases}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$.

$\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transversale caractérisant les théories correspondantes.

III.8.5.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $\Psi(z)$ [76].

Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale. Nous citons en particulier :

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

Les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre de Reddy (TSDT) sont obtenus par [44.45] :

$$\Psi(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2}z^2\right) \quad (\text{III.16})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [53] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.17})$$

La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [54] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \phi_z = 0 \quad (\text{III.18})$$

III.9. Etude bibliographique des Recherches sur les structures en matériaux à gradient de propriétés

Divers espaces pour les différents aspects des FGM sont discutés dans les paragraphes qui suivent. Ils comprennent.

- L'homogénéisation des particules FGM,
- Les problèmes de transfert de chaleur,
- Analyse des contraintes, de la stabilité et l'analyse dynamique des structures en FGM.

Un certain nombre de revues traitant les divers aspects des FGM ont été publiés ces dernières années ([39], [40], [60], [62]). Les colloques internationaux sur les FGM ont également mis en lumière les recherches les plus récentes sur ces matériaux, leur fabrication, la compréhension de leur comportement mécanique, leurs propriétés thermiques, et leurs applications [63].

Actuellement, les FGM sont généralement associées à des particules composites où la fraction volumique des particules varie dans une ou plusieurs directions de l'espace. L'un des avantages de la variation continue de la fraction volumique des phases constitutives est l'élimination de la discontinuité des contraintes qui est souvent rencontrées dans les composites stratifiés et sandwichs, et en conséquence, éviter les problèmes liés aux délaminages et à la rupture.

Les FGM peuvent être développés en utilisant des couches renforcées de fibres avec une fraction volumique de fibres qui varie à travers l'épaisseur de la structure, on obtient une optimisation des propriétés de l'ensemble ou une optimisation de la réponse de la structure vis-à-vis des types des chargements appliqués ([35], [64]). Si les particules de matériaux composites peuvent être localement isotropes, ils sont hétérogènes à cause de la variation spatiale des fractions de volume des phases constitutives. Un exemple de ce matériau est illustré dans la Figure III.12 [65] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope.

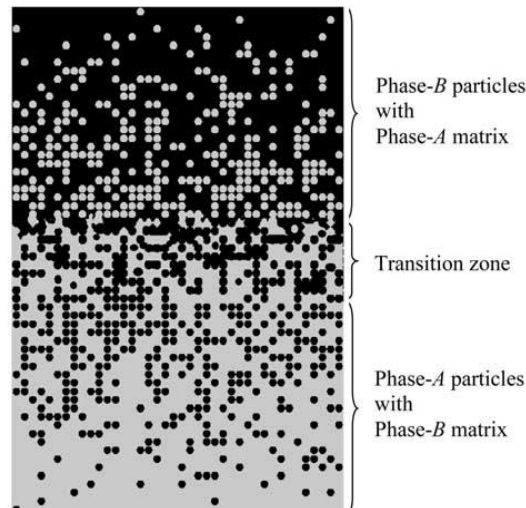


Figure III.12 : Variation de la fraction volumique des matériaux constitutifs dans la direction de l'épaisseur dans un matériau à gradient de propriétés [65].

Une FGM peut également avoir une microstructure de squelette comme le montre Figure III.13 [66].

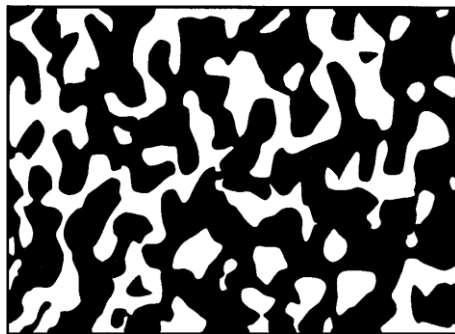


Figure III.13 : Une microstructure de squelette d'un matériau FGM [66].

Un matériau FGM peut avoir des architectures différentes qui se traduisent par un comportement orthotrope. Un FGM peut comprendre plus de deux phases constitutives. Nemat-Alla a analysé un matériau FGM constitué de deux phases différentes (céramique et métallique) dont la fraction volumique varie dans le sens de l'épaisseur selon une loi de puissance [67].

III.9.1. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés :

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le volume). Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure. Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique de la structure. L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à la l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques les plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes.

Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker [68] a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent et les modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations fraction volumique.

Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finie des FGM a été également présentée dans les références [69]. Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme).

Récemment, Cho et ha [70] ont comparé la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de Wakashima-Tsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal [71] ne se rapporte pas aux matériaux à gradient de propriétés, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogène mais globalement hétérogènes. Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible.

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant en compte l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publié [65]. Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégrées entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique effective des propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations.

Pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al [65] et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%.

En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérées exactes. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.

III.9.2. Transfert de chaleur dans les matériaux à gradient de propriétés

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique de post-traitement dues au déséquilibre thermique entre les matériaux constitutifs. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macro mécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Jin [72] a présenté une solution analytique du problème de transfert de chaleur transitoire dans une bande en FGM avec les propriétés matérielles variables dans l'épaisseur dont les surfaces sont soudainement refroidies à des températures différentes. La solution asymptotique a été obtenue en subdivisant la bande en un certain nombre de couches homogènes. Le transfert de chaleur transitoire dans un FGM épais soumis à une source non uniforme de la chaleur volumétrique a été étudié par Ootao et Tanigawa [73] où les deux la distribution de la température et les contraintes ont été trouvés. Le problème a été résolu par Sladek et al [74] en utilisant la méthode de Galerkin des éléments en frontière pour un certain nombre de configurations comme un cube FGM en 3D soumis à un régime de flux de chaleur prescrits et un cylindre avec une température constante appliquée sur la sa surface.

III.9.3. Analyse des contraintes et des déformations des structures en FGM sous différents types de chargement

Sankar et Tzeng [75] ont obtenu les solutions exactes pour la distribution des contraintes thermiques dans une poutre en FGM avec une variation exponentielle des propriétés matérielles à travers l'épaisseur. Sankar [76] a également étudié une poutre en FGM soumise à une charge transversale sinusoïdale appliquée sur l'une de ces surfaces. Les solutions exactes d'élasticité pour les contraintes et les déformations ont été comparées avec les résultats obtenus par la théorie classique des poutres (Euler-Bernouli). Les résultats montrent que la théorie classique de poutre donne des résultats acceptables si la poutre élancée. Les concentrations de contraintes dans les poutres courtes ne peuvent pas être traitées par théorie classique de poutre. Les contraintes dépendront de la manière de l'application de la charge. Les concentrations de contraintes qui se produit sur la surface de chargement est plus élevée dans une poutre en FGM par rapport une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface la plus dure, et vice versa, elles sont plus petites par rapport à une poutre homogène si la charge est appliquée à la surface souple de la poutre. Cela reflète le fait que la gradation des propriétés peut être bénéfique ou nuisible tout dépend des conceptions spécifiques.

Les problèmes de la vibration libre, la propagation d'onde, et le comportement mécanique dans les poutres en FGM en utilisant le modèle de premier ordre de déformation de cisaillement ont été résolus en utilisant la méthode des éléments finis développée pour la loi de puissance et d'autres variantes alternatives de propriétés élastiques et thermiques dans la direction de l'épaisseur [77]. Le problème thermoélastique pour une poutre en FGM avec la variation exponentielle des propriétés matérielles dans l'épaisseur et soumise à une distribution non-uniforme de chaleur par convection a été examinée par Chin et Yen [78] en utilisant un maillage local par la méthode de Petrov-Galerkin.

La réponse statique d'une plaque épaisse rectangulaire en FGM a été étudiée par Reddy [34] en utilisant la théorie du troisième ordre de cisaillement déformation. Reddy et Cheng [79] ont utilisé l'approche asymptotique du problème de conduction de la chaleur pour résoudre les problèmes thermoélastiques en 3D d'une plaque FGM simplement appuyée soumise à des charges mécaniques ou thermiques. La solution exacte du problème tridimensionnel pour l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion d'une plaque en FGM rectangulaire simplement appuyée a été présentée par Vel et Batra [66] où les propriétés matérielles à travers l'épaisseur étaient supposées suivre une loi de puissance pour des fractions de volume de

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

matériau. Les approches d'homogénéisations utilisées dans l'article ont inclus le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent. La plaque a été modélisée par les théories de premier ordre et troisième ordre de déformation de cisaillement. La solution d'élasticité 3D de la flexion pour les contraintes dans une plaque simplement appuyée en FGM avec une variation exponentielle de module d'élasticité à travers l'épaisseur et un coefficient de Poisson constant a été présentée par Kashtalyan [80] qui a employé la méthode de Plevako développée en 1971 pour analyser les milieux isotropes non homogènes.

Chi et Chang [28,29] ont publié les solutions analytiques de la flexion pour une plaque FGM mince rectangulaire simplement appuyée soumise à une charge transversale en supposant que le coefficient de Poisson est constant, tandis que le module d'élasticité change sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs suivant des fonctions de loi de puissance (P-FGM), exponentielles (E-FGM), et sigmoïdes (S-FGM).

Zenkour [81,82] a étudié les problèmes de la flexion, flambement et la vibration libre des plaques sandwiches en FGM (céramique/métal). Les résultats ont été obtenus par la théorie classique des plaques, la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement, et la version « sinusoïdale » de la théorie de déformation de cisaillement. Analyse des déformations suivant une non linéarité géométrique des plaques et des coques en FGM soumises à des chargements transversaux a été présentée par Woo et Megiud [83].

Tarn [84] a étudié l'évolution des déplacements, des contraintes et de la température dans un cylindre anisotrope soumis à des diverses combinaisons de chargement, thermique, mécanique ou thermomécanique. La solution exacte a été obtenue pour le cas où les propriétés du matériau varient dans l'épaisseur selon une loi de puissance en considérant el cas où le chargement thermique ou le flux de chaleur sont appliqués sur la surface du cylindre. L'analyse de l'instabilité au flambement des plaques FGM sous chargement mécanique ou thermique a été étudiée par Javaheri et Eslami [85]. Na et Kim [86] ont utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le problème de l'instabilité au flambement en 3D sous une charge thermique, ils ont montré que la distribution sinusoïdale et linéaire de la température à travers l'épaisseur ne reflète pas la répartition réelle de la température dans une plaque FGM.

Le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été résolu par Yang et al. [87] qui ont considéré que les propriétés des matériaux des phases constitutives et les paramètres de la fondation sont des variables aléatoires indépendantes. L'analyse de la non-linéarité géométrique plaques épaisses soumises à des

Chapitre - III-Généralités sur les matériaux FGM

charges thermiques et / ou mécanique utilisant la version non-linéaire de la théorie d'ordre supérieur de Reddy a été étudiée par Shen et al [88].

La théorie globale à deux dimensions de déformations d'ordre supérieur a été employée par Matsunaga [89] pour le flambement des plaques FGM sous un chargement thermique. Zhao et al. [90] ont présenté l'analyse mécanique et thermique de flambement des plaques FGM (céramique/métal) en utilisant la théorie des plaques de premier ordre, en utilisant la méthode de Ritz. En outre, Fuchiyama et Noda [91] ont étudié le flambement d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) sous un chargement thermique.

Zenkour et Sobhy [92] ont utilisé la version sinusoïdale de déformation de cisaillement pour étudier le flambement des plaques sandwichs en FGM.

Une étude récente publiée par Park et Kim [93] contient une analyse par éléments finis du de l'instabilité thermique au flambement et la vibration libre des plaques FGM en utilisant la non-linéarité géométrique.

Finalement ; Les progrès récents dans la caractérisation, la modélisation et l'analyse des structures en FGM ont été présentés.

1. Dans le domaine de l'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés, il est souvent possible d'employer des techniques disponibles pour les composites traditionnels. Toutefois, dans le cas où le matériau a une gradation importante (changement rapide des propriétés d'une surface à l'autre), le modèle (VER) peut être utilisé, reflétant les variations des propriétés à l'échelle micromécanique. Peu importe l'approche d'homogénéisation adoptée, l'interaction entre les particules ne doit pas être négligée.

2. L'approche de problème de transfert de chaleur dans les FGM devrait tenir compte de l'effet de la température sur les propriétés du matériau qui à son tour affecter la solution du problème de conduction de la chaleur.

3. L'effet de chargement thermique important sur les contraintes, la stabilité au flambement et la vibration des structures en FGM devrait être étudiées en tenant compte les changements dans les propriétés du matériau dû à la température. Ces derniers changements sont particulièrement importants car les FGM sont des matériaux hétérogènes. Par conséquent, si l'une des phases de la matière constitutive est plus affectée par la température que l'autre phase, un certain degré de changement de propriété sera non uniforme dans tout le matériau, même si elle est soumise à une température uniforme.

III.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs propriétés, leurs domaines d'application, l'histoire de leur développement. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être utilisées dans de nombreux domaines d'application. Enfin nous avons terminé par la présentation des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la plaque. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles ou même loi de puissance.

Chapitre - IV-

Equations gouvernantes

IV.1. Introduction

IV.2. Géométrie du problème

Considérons une plaque sandwich en matériau à gradient de propriétés composée de trois couches hétérogènes ayant les dimensions représentées dans la figure IV.1.

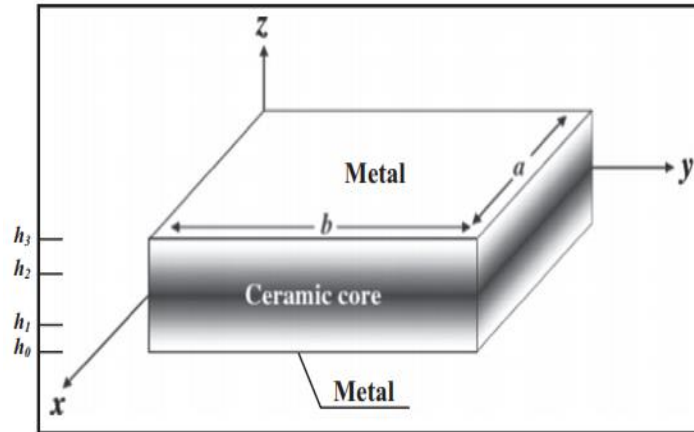


Figure IV.1 : Géométrie d'une plaque sandwich en FGM dans le système de coordonnées cartésiennes.

- Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à $z = \pm h/2$
- Les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y .
- La plaque est composée de trois couches de la partie basse à la partie haute , «**couche 1**» , «**couche 2** » et «**couche 3** »
- Les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sont respectivement, $z = h_0, z = h_1, z = h_2, z = h_3$.
- Le rapport d'épaisseur de chaque couche de bas en haut est désigné par la combinaison de trois chiffres : (1-0-1), (1-1-1), (1-2-1), (2-1-2), (2-2-1) comme le tableau IV.1 le montre.

Chapitre - IV- Equations gouvernantes

Type de plaque	Définition
Plaque sandwich en FGM (1-0-1)	Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique est constituée de seulement deux couches en FGM d'épaisseur égale . C.-à-d, la couche isotrope centrale en céramique est absente. Ainsi, $h_1 = h_2 = 0$.
Plaque sandwich en FGM (1-1-1)	Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et composée de trois couches d'épaisseur égale . Dans ce cas, nous avons: $h_1 = -h/6$, $h_2 = h/6$.
Plaque sandwich en FGM (1-2-1)	la plaque est symétrique, dans laquelle l'épaisseur de la couche centrale égale à la somme des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure. Donc, Ainsi, $h_1 = -h/4$, $h_2 = h/4$.
Plaque sandwich en FGM (2-1-2)	Dans ce type de sandwich la plaque est également symétrique, l'épaisseur de la couche centrale égale la moitié de l'épaisseur des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure. Ainsi, $h_1 = -h/10$, $h_2 = h/10$
Plaque sandwich en FGM (2-2-1)	Dans ce cas, la plaque n'est pas symétrique et l'épaisseur de la couche centrale est le même que celui couche inférieure, alors qu'il est double de la couche supérieure .Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h/10$, $h_2 = 3h/10$

Tableau IV.1 : différents types du Plaque sandwich en FGM

IV.3. Propriétés des matériaux

Les propriétés matérielles de la plaque sandwich varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur (z) seulement, selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$ des matériaux constituants.

Delale et Erdogan [101] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Alors, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque sandwich est constant dans tous points de la plaque.

Les propriétés mécaniques et thermiques de la plaque sandwich en FGM sont déterminées à partir de la fraction volumique des matériaux constituants $V^{(n)}$. Cependant, le module d'élasticité $E(z)$ et le coefficient dilatation thermique $\alpha(z)$ à tout point de la plaque sont donnés par la loi de mélange [94,95,96,97] :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m) V^{(n)} \quad \text{IV.1}$$

P_m et P_c sont respectivement les propriétés correspondantes au métal et au céramique de la plaque sandwich.

$P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n de la plaque sandwich en FGM.

Chapitre - IV- Equations gouvernantes

P_c et P_m sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche n° : 1, et vice versa pour la couche n° :3 selon la fraction volumique $V^{(n)}$ ($n = 1,2,3$).

La fraction volumique $V^{(n)}$ à travers l'épaisseur des couches de la plaque sandwich suit une simple fonction de loi de puissance, tandis qu'elle égale l'unité dans la couche centrale de la plaque. Elle est définie par :[98]

$$\begin{cases} V^{(1)} = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^k & z \in [h_0, h_1] \\ V^{(2)} = 1 & z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)} = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^k & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad \text{IV.2}$$

Où k est un paramètre de matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La couche centrale de la plaque est indépendante de la valeur k puisque cette couche est entièrement en céramique. Cependant, lorsque la valeur k prend la valeur de zéro, on obtient une plaque entièrement en céramique. La plaque sandwich de type symétrique par rapport au plan moyen. ($z = 0$).

IV.4. La théorie d'ordre élevé sans l'inclusion de la déformation normale ϕ_z

En se basant sur la théorie des plaques d'ordre élevé sans prise en compte de la déformation normale ϕ_z . Le champ de déplacement en un point quelconque de coordonnées (x, y, z) dans la plaque s'écrit :

$$\begin{cases} u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x \\ v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y \\ w = w_0(x, y) \end{cases} \quad \text{IV.3}$$

Où, u, v et w sont les déplacements dans les directions x, y, z . Les déplacements u_0, v_0 et w_0 sont ceux d'un point du plan moyen ($x, y, z = 0$).

$\phi_x = k_1 \int \theta(x, y) dx, \phi_y = k_2 \int \theta(x, y) dy$ sont les rotations due à la flexion des plans yz, xz

$f(z)$: la fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque.

Chapitre - IV- Equations gouvernantes

Ainsi le choix de la fonction $f(z)$ est basé sur les résultats de l'élasticité tridimensionnelle ou toute autre information sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse.

Dans le cas de la théorie hyperbolique d'ordre élevé avec prise en compte de la déformation normale, la fonction de gauchissement est donnée par :

$$f(z) = \left[\ln\left(\pi \exp\left(\frac{1}{20}\right)\right) - (0,1407)^{\left(\frac{5}{6}\right)} \cosh(\pi z) \right] z \quad \text{IV.4}$$

IV.5. Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. IV.3 :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad \text{IV.5}$$

avec: $k_1 = \alpha^2; k_2 = \beta^2; \alpha = \frac{\pi}{a}; \beta = \frac{\pi}{b}$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation. (IV.5) , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{array} \right\} + f(z) \left\{ \begin{array}{l} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{array} \right\} \quad \text{(IV.6.1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} = g(z) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{array} \right\} \quad \text{(IV.6.2)} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} \quad \text{(IV.6.3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{array} \right\} \quad \text{(IV.6.4)} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad \text{(IV.6.5)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} k_1 \int \theta dy \\ k_2 \int \theta dx \end{array} \right\} \quad \text{(IV.6.6)} \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \end{array} \right.$$

IV.6. Les contraintes

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un FGM isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{IV.7}$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. les coefficients de rigidité, sont exprimées par

$$C_{11}^{(n)} = C_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-(\nu^{(n)})^2}, C_{12}^{(n)} = \nu^{(n)} C_{11}^{(n)}, C_{44}^{(n)} = C_{55}^{(n)} = C_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu^{(n)})}, \quad \text{IV.8}$$

La variation du champ de température $T(x, y, z)$ à travers l'épaisseur de la plaque est supposée sous la forme suivante :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\Psi(z)}{h} T_3(x, y) \quad \text{IV.9}$$

où T_1, T_2 et T_3 sont les chargements thermiques. Dans le cadre de la présente théorie d'ordre élevé à deux variable, $\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$.

Généralement, la forme de la variation du champ de température dans l'épaisseur de la plaque est le résultat de la solution d'un problème de conduction thermique. Cette température calculée se révèle être un polynôme non linéaire de variable (z) , souvent d'une forme transcendante (Tungikar and Rao [99]). Dans le cas d'une structure multicouche épaisse, la variation du champ de température est besoin d'une description layerwise (approche par couche) (Carrera [100]), avec une forme du champ de déplacement à ordre élevé (ou layerwise), afin de saisir le profil de température obtenue avec la solution d'un problème de transfert de chaleur par conduction.

IV.7. Détermination des équations d'équilibre

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites, le principe des travaux virtuels est appliqué, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante [102-107]:

$$\delta U + \delta V = 0$$

δU le travail des efforts internes

δV le travail des efforts externes sur la surface extérieures A .

$$\delta U = \int_V \left[\sigma_x^{(n)} \delta \varepsilon_x + \sigma_y^{(n)} \delta \varepsilon_y + \tau_{xy}^{(n)} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz}^{(n)} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(n)} \delta \gamma_{xz} \right] dV = 0$$

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left[\sigma_x^{(n)} \delta \varepsilon_x + \sigma_y^{(n)} \delta \varepsilon_y + \tau_{xy}^{(n)} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz}^{(n)} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(n)} \delta \gamma_{xz} \right] dA dz = 0 \quad \text{IV.10}$$

Par définition Les efforts et les moments résultants N , M et S sont [108]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} N_x, \quad N_y, \quad N_{xy} \\ M_x^b, \quad M_y^b, \quad M_{xy}^b \\ M_x^s, \quad M_y^s, \quad M_{xy}^s \end{array} \right) \\ \left(S_{xz}^s, S_{yz}^s \right) \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ f(z) \end{array} \right\} dz, \quad \text{IV.11}$$

$$\left(S_{xz}^s, S_{yz}^s \right) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz.$$

On remplace l'ensemble des équations IV.7 et IV.10 dans l'équation IV.11 on obtient :

$$\delta U = \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 \right] dA = 0 \quad \text{(IV.12)}$$

$$\delta U = \int_0^b \int_0^a \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 \right] dx dy$$

En remplaçant les déformations virtuelles par leurs expressions, ensuite, en introduisant les efforts globaux et en faisant l'intégration par partie, on en déduit les équations d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u_0 \mapsto \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 \mapsto \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_0 \mapsto \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \\ \delta \theta \mapsto -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (IV.13)$$

IV.8. Détermination des coefficients de rigidité

En reportant les équations IV.7 IV.11 dans IV.13, on obtient les expressions suivantes des résultantes en membrane

$$\mathbf{N} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t : \text{ en flexion pure}$$

$$\mathbf{M}^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t : \text{ en flexion supplémentaire dû au cisaillement}$$

$$\mathbf{M}^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t : \text{ en cisaillement pur}$$

$$\mathbf{S} = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccccc} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \\ 0 \\ M_x^{sT} \\ M_y^{sT} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (IV.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{array} \right\}$$

Où : $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s, A_{ij}^s$ sont les coefficients de rigidité de la plaque sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}[g(z)]^2 dz, \quad (i, j = 4, 5) \end{array} \right. \quad (IV.15)$$

Chapitre - IV- Equations gouvernantes

Les résultantes en membrane, $N_x^T = N_y^T$, du moment de flexion $M_x^{bT} = M_y^{bT}$, et de moment additionnel de cisaillement $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ dues aux chargements thermiques sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{IV.16})$$

IV.9. Formulation des équations différentielles

Substituant les équations IV.6 dans les équations IV.14, nous obtenons le système d'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 \\ + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}\theta + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)d_1\theta = P1 \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

$$\begin{aligned} A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 \\ + (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}\theta + (B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1)d_2\theta = P2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 \\ - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2)d_{11}\theta \\ + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}\theta + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}\theta = P3 \\ - (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)d_1u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{122}u_0 - (B_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{112}v_0 \\ - (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2)d_2v_0 \\ + (D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2)d_{11}w_0 + 2(D_{66}^s(k_1A' + k_2B'))d_{1122}w_0 + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2)d_{22}w_0 \\ - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta \\ - 2H_{12}^s k_1 k_2 \theta - ((k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s)d_{1122}\theta + A_{44}^s (k_2B')^2 d_{22}\theta + A_{55}^s (k_1A')^2 d_{11}\theta \\ = P4 \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{IV.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta \, dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \, dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta \, dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta \, dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.19})$$

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2$$

$\{P\} = \{P1, P2, P3, P4\}^t$ est un vecteur de force généralisée dont les composantes sont :

$$\begin{pmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_x^T}{\partial x} \\ \frac{\partial N_y^T}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2 M_x^{bT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{bT}}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 M_x^{sT}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^{sT}}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (IV.20)$$

IV.10. Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée

La recherche de solutions analytiques des problèmes des structures composites multicouches sous diverses conditions aux limites fait appel à la résolution d'équations aux dérivées partielles classiques et linéaires à coefficients constants.

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appuis utilisé. Dans cette partie nous sommes concernés par la solution exacte des équations. IV.17 pour une plaque simplement appuyée en FGM. Pour le cas d'une plaque simplement appuyée sur les quatre côtés, les conditions aux limites pour la présente théorie s'écrivent :

$$v_0 = w_0 = 0 = \frac{\partial w}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ à } x = 0, a \quad (IV.21)$$

$$u_0 = w_0 = w = \frac{\partial w}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ à } y = 0, b \quad (IV.22)$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement thermo-élastique de la flexion des plaques sandwichs en FGM. Elle peut alors être recherchée en écrivant les déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) ainsi que les chargements thermique T_1, T_2 et T_3 sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions de chargement thermique et les conditions aux limites [109].

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (IV.23)$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{pmatrix} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (IV.24)$$

Chapitre - IV- Equations gouvernantes

$(U, V, W, X, \bar{T}_1, \bar{T}_2$ et $\bar{T}_3)$ sont des paramètres arbitraires représentent l'amplitude de chacun des termes dans les séries pour la solution de Navier déterminés sous la condition que la solution de l'équation IV.23 et IV.24 doit vérifier l'équation IV.17.

α et β sont des constantes définis comme suit : $\alpha = \pi/a$ et $\beta = \pi/b$.

la solution exacte peut être obtenue par la résolution de :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

Avec:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) \\ S_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ S_{13} &= \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2) \\ S_{14} &= \alpha(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\beta^2) \quad (\text{IV.26}) \\ S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) \\ S_{23} &= \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2) \\ S_{24} &= \beta(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\alpha^2) \\ S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) \\ S_{34} &= -k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\alpha^2\beta^2 - k_2(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2) \\ S_{44} &= -k_1(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) \\ &\quad - (k_1A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2B')^2 A_{44}^s \beta^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha(A^T T_1 + B^T T_2 + {}^a B^T T_3) \\ P_2 &= \beta(A^T T_1 + B^T T_2 + {}^a B^T T_3) \\ P_3 &= -h(\alpha^2 + \beta^2)(B^T T_1 + D^T T_2 + {}^a D^T T_3) \\ P_4 &= -h(\alpha^2 + \beta^2)({}^s B^T T_1 + {}^s D^T T_2 + {}^s F^T T_3) \quad (\text{IV.27}) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 (A^T, B^T, D^T) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (v^{(n)})^2} (1 + v^{(n)}) \alpha^{(n)}(z) (1, \bar{z}, \bar{z}^2) dz \\
 ({}^a B^T, {}^a D^T) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (v^{(n)})^2} (1 + v^{(n)}) \alpha^{(n)}(z) \bar{\psi}(z) (1, \bar{z}) dz \\
 ({}^s B^T, {}^s D^T, {}^s F^T) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (v^{(n)})^2} (1 + v^{(n)}) \alpha^{(n)}(z) \bar{f}(z) (1, \bar{z}, \bar{\psi}(z)) dz \\
 (L^T, {}^a L^T, R^T) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (v^{(n)})^2} (1 + v^{(n)}) \alpha^{(n)}(z) \bar{g}'(z) (1, \bar{z}, \bar{\psi}(z)) dz \quad (IV.28)
 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{cases}
 \bar{z} = \frac{z}{h} \\
 \bar{f}(z) = \frac{f(z)}{h} \\
 \bar{\psi}(z) = \frac{\psi(z)}{h} \\
 \bar{g}(z) = \frac{g(z)}{h}
 \end{cases} \quad (IV.29)$$

IV.11. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement thermoélastique de la flexion des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre inconnus., tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement. La théorie présentée à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Chapitre - V -

Résultats et discussions

V.1. Introduction

Le comportement thermoélastique de la flexion des plaques sandwich en FGM en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables est présenté dans ce chapitre via l'analyse des résultats numériques. La théorie présentée est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords.

On suppose que les propriétés matérielles le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de la plaque sandwich varie continument dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs types de plaques sandwichs sont utilisés en tenant compte ou non de la symétrie de la plaque et l'épaisseur de chaque couche.

V.2. Validation analytique du modèle proposé

La validation de modèle proposé consiste de le comparer avec quelques tests standards connus de la littérature. Il s'agit essentiellement d'évaluer ses performances en précision sur les déplacements transversales \bar{w} ; contrainte axiale normale $\bar{\sigma}_x$ et contrainte tangentiel $\bar{\tau}_{xz}$. Afin de valider notre modèle, un exemple de flexion thermoélastique sera étudié. L'exemple traite la flexion d'une plaque isotrope simplement appuyé soumise à un chargement thermique variant à travers l'épaisseur.

V. 3. Résultats numériques et discussions

L'analyse thermo-élastique de la flexion est conduite pour des combinaisons de métal et de céramique. Les matériaux choisis sont : pour le métal, un alliage de titane (*Ti-6Al-4V*) et pour la céramique : un oxyde zirconium (ZrO_2). Pour la simplicité, on suppose que le coefficient de poisson est constant en tout point de la plaque. Les modules de Young et les coefficients de dilatation thermique de la céramique et du métal sont donnés dans le tableau V.1 [110] :

Propriétés	Métal : Ti-6Al-4V	Céramique : ZrO ₂
E_m (GPa)	66.2	117.0
ν	1/3	1/3
$\alpha_m(10^{-6}/K)$	10.3	7.11

Tableau V. 1 : Les propriétés matérielles utilisées dans la plaque sandwich en FGM

Chapitre - V- Résultats et discussions

Une variété des problèmes est considérée Pour illustrer le comportement thermique et microstructure de la plaque ;

➤ Pour excitation thermique

- Une variation linéaire (à travers l'épaisseur) de la distribution de la température $T = \bar{z}T_2$
- Une combinaison de tous les deux (linéaire et non linéaire) $T = \bar{z}T_2 + \overline{\Psi(z)}T_3$ sont considérés.

➤ Pour le changement de la microstructure k est donné : $k = 0, 1, 2, 3, 4$, et 5.

Le déplacement transversal et des contraintes normales et tangentiels à déterminer sont :

$$\begin{cases} \bar{w} = \frac{h}{\alpha_0 \bar{T}_2 a^2} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \\ \bar{\sigma}_x = \frac{h^2}{\alpha_0 \bar{T}_2 E_0 a^2} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \\ \bar{\tau}_{xz} = \frac{10h}{\alpha_0 \bar{T}_2 E_0 a} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) \end{cases}$$

Où les valeurs de référence sont prises comme suit : $E_0 = 1 \text{ GPa}$ et $\alpha_0 = 10^{-6}/\text{K}$.

Les résultats numériques sont présentés dans les tableaux V.2 – V6 en utilisant la présente théorie et les différentes théories de plaque [(SSDPT) (ESDPT), (RHSDPT) de Bouchafa et al. [110]. Sans prise en compte de la déformation normale ($\phi_z = 0$). Le facteur de correction de cisaillement pour la théorie FSDPT est pris $k_s = 5/6$.

Chapitre - V- Résultats et discussions

Le tableau IV.2 contient les valeurs de la flèche maximale adimensionnelle \bar{w} au centre de la plaque $\bar{w} = \frac{h}{\alpha_0 \bar{T}_2 a^2} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$ pour les différentes configurations des plaques sandwiches en FGM soumises à un champ de température variant linéairement à travers l'épaisseur ($\bar{T}_3 = 0$).

Les flèches sont considérées pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$, et 5 .

k	Theory	\bar{w}				
		1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1
0	Present	0.4802624103	0.4802624103	0.4802624103	0.4802624103	0.4802624103
	RHSDPT ^{(a)*}	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102
	SSDPT ^(b)	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102
	ESDPT ^(b)	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102
	FSDPT ^(b)	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102	0,4802624102
1	Present	0.6368596176	0.6062105542	0.5822504970	0.6210277627	0.5925232843
	RHSDPT ^(a)	0,6368913262	0,6062561495	0,5823018576	0,6210669479	0,5925682404
	SSDPT ^(b)	0,6369163694	0,6062923043	0,5823425647	0,6210979535	0,5926037400
	ESDPT ^(b)	0,6369414052	0,6063285913	0,5823832496	0,6211290262	0,5926390742
	FSDPT ^(b)	0,6366671314	0,6059360027	0,5819321936	0,6207916196	0,5922391382
2	Present	0.6714636165	0.6392799341	0.6097720307	0.6560817283	0.6214970017
	RHSDPT ^(a)	0,6714858174	0,6393248874	0,6098293922	0,6561154815	0,6215438592
	SSDPT ^(b)	0,6715034090	0,6393606439	0,6098750470	0,6561422528	0,6215809264
	ESDPT ^(b)	0,6715211425	0,6393968398	0,6099210670	0,6561692997	0,6216180116
	FSDPT ^(b)	0,6713392117	0,6390276350	0,6094377060	0,6558929929	0,6212148977
3	Present	0.6835456045	0.6535967823	0.6223624101	0.6702249850	0.6340933179
	RHSDPT ^(a)	0,6835604161	0,6536381567	0,6224203294	0,6702526802	0,6341386760
	SSDPT ^(b)	0,6835722007	0,6536711126	0,6224665084	0,6702746869	0,6341745670
	ESDPT ^(b)	0,6835841674	0,6537046290	0,6225132536	0,6702970392	0,6342105448
	FSDPT ^(b)	0,6834673554	0,6533737951	0,6220352754	0,6700774890	0,6338263885
4	Present	0.6887849357	0.6612222798	0.6294297365	0.6772797114	0.6408616200
	RHSDPT ^(a)	0,6887950624	0,6612604942	0,6294872146	0,6773029321	0,6409054051
	SSDPT ^(b)	0,6888031547	0,6612909572	0,6295330002	0,6773214139	0,6409400177
	ESDPT ^(b)	0,6888114260	0,6613220299	0,6295794618	0,6773402624	0,6409747420
	FSDPT ^(b)	0,6887337861	0,6610216386	0,6291117804	0,6771602164	0,6406073812
5	Present	0.6914075952	0.6658334699	0.6338958402	0.6813072624	0.6450018049
	RHSDPT ^(a)	0,6914147346	0,6658691382	0,6339575524	0,6813272417	0,6450361194
	SSDPT ^(b)	0,6914204743	0,6658976406	0,6340027691	0,6813431982	0,6450696862
	ESDPT ^(b)	0,6914263743	0,6659267720	0,6340487255	0,6813595221	0,6451033721
	FSDPT ^(b)	0,6913726822	0,6656490845	0,6335907572	0,6812067429	0,6447488688

Tableau V.2: La flèche adimensionnelle \bar{w} pour différentes configurations des plaques carrées sandwiches en FGM ($\bar{T}_3 = 0, a/b = 1$).

Remarque : ^(a): valeurs prises de Ref. [110]; ^(b): valeurs prises Ref. [111] pour tous les tableaux .

Chapitre - V- Résultats et discussions

Le tableau V.2 montre que :

- La flèche maximale \bar{w} augmente par l'augmentation de valeur du paramètre de matériau k .
- La différence entre les théories de déformation de cisaillement est non significative pour les plaques entièrement en céramique ($k = 0$).
- On observe que les résultats obtenus par la présente théorie d'ordre élevé sont identiques à ceux des autres théories.
- Les flèches les plus grandes sont celles de la plaque sandwich (1-0-1), les flèches les plus petites sont celles de la plaque sandwich (1-2-1).
- La flèche maximale \bar{w} diminue avec l'augmentation l'épaisseur la couche centrale (couche entièrement en céramique).

Chapitre - V- Résultats et discussions

Le tableau V.3 présente l'effet de l'allongement a/b sur la flèche maximale \bar{w} aux au centre de la plaque de différentes configurations des plaques sandwiches en FGM pour $k = 3$.

Scheme	Theory	\bar{w}				
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$a/b = 4$	$a/b = 5$
1-0-1	Present	0.6835456045	0.2734651394	0.1367715824	0.08048591537	0.05265224931
	RHSDPT ^(a)	0,6835507403	0,2734702662	0,1367766934	0,08049100480	0,05265731134
	SSDPT ^(b)	0,6835722007	0,2734916748	0,1367980164	0,08051220862	0,05267836270
	ESDPT ^(b)	0,6835841674	0,2735036028	0,1368098802	0,08052398306	0,05269002373
	FSDPT ^(b)	0,6834673554	0,2733869420	0,1366934709	0,08040792405	0,05257441194
1-1-1	Present	0.6535967823	0.2615723671	0.1308973784	0.07708980403	0.05048141054
	RHSDPT ^(a)	0,6536111265	0,2615866858	0,1309116553	0,07710402281	0,05049555491
	SSDPT ^(b)	0,6536711126	0,2616465325	0,1309712706	0,07716331532	0,05055443573
	ESDPT ^(b)	0,6537046290	0,2616799433	0,1310045062	0,07719630764	0,05058711818
	FSDPT ^(b)	0,6533737951	0,2613495179	0,1306747589	0,07686750522	0,05025952271
1-2-1	Present	0.6223624101	0.2491410422	0.1247336503	0.07350674527	0.04817438915
	RHSDPT ^(a)	0,6223824709	0,2491610666	0,1247536140	0,07352662427	0,04819415962
	SSDPT ^(b)	0,6224665084	0,2492449004	0,1248371096	0,07360964929	0,04827658433
	ESDPT ^(b)	0,6225132536	0,2492914914	0,1248834449	0,07365562907	0,04832211149
	FSDPT ^(b)	0,6220352754	0,2488141101	0,1244070550	0,07318062062	0,04784886733
2-1-2	Present	0.6702249850	0.2681783997	0.13416274892	0.07897968319	0.05169118593
	RHSDPT ^(a)	0,6702345950	0,2681879937	0,1341723150	0,07898921053	0,05170066414
	SSDPT ^(b)	0,6702746869	0,2682279928	0,1342121614	0,07902884445	0,05174002622
	ESDPT ^(b)	0,6702970392	0,2682502760	0,1342343297	0,07905085315	0,05176183188
	FSDPT ^(b)	0,6700774890	0,2680309957	0,1340154977	0,07883264575	0,05154442227
2-2-1	Present	0.6340933179	0.2537973197	0.1270317671	0.07483391627	0.04902149040
	RHSDPT ^(a)	0,6341090637	0,2538130370	0,1270474362	0,07484951752	0,04903700521
	SSDPT ^(b)	0,6341745670	0,2538783787	0,1271125106	0,07491422011	0,04910123314
	ESDPT ^(b)	0,6342105448	0,2539142358	0,1271481680	0,07494960009	0,04913625980
	FSDPT ^(b)	0,6338263885	0,2535305552	0,1267652777	0,07456781021	0,04875587597

Tableau V.3 : Effet de l'allongement a/b sur la flèche maximale \bar{w} des plaques sandwiches en FGM ($k = 3, \bar{T}_3 = 0$)

Les flèches maximales adimensionnelles \bar{w} diminuent avec l'augmentation du rapport d'allongement (a/b) et ceci indépendamment de la configuration de la plaque sandwich à cause de la flexibilité de la plaque.

D'après les Tableau V.2 et Tableau V. on peut conclure que la théorie de notre travail donne presque les mêmes résultats que ceux de l'ESDPT, du SSDPT et du RHSDPT

Chapitre - V- Résultats et discussions

Le tableau V.4 présente les valeurs des contraintes axiales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4,$ et 5 et pour les différentes configurations des plaques sandwiches en FGM. la plaque est soumise à un champ de température qui varie d'une façon linéaire à travers l'épaisseur.

k	Theory	$\bar{\sigma}_x$				
		<i>1-0-1</i>	<i>1-1-1</i>	<i>1-2-1</i>	<i>2-1-2</i>	<i>2-2-1</i>
0	Present	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000
	RHSDPT ^(a)	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000
	SSDPT ^(b)	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000
	ESDPT ^(b)	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000
	FSDPT ^(b)	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000	-2,079675000
1	Present	-1,993962994	-2,144483622	-2,262070783	-2,071720141	-2,276270538
	RHSDPT ^(a)	-1,993949024	-2,144463137	-2,262047306	-2,071702695	-2,276249844
	SSDPT ^(b)	-1,993884786	-2,144368665	-2,261939156	-2,071622328	-2,276154795
	ESDPT ^(b)	-1,993845490	-2,144310614	-2,261873016	-2,071573038	-2,276096911
	FSDPT ^(b)	-1,994116421	-2,144706898	-2,262331770	-2,071910534	-2,276503415
2	Present	-1,824116942	-1,982344548	-2,127270768	-1,899754144	-2,152936214
	RHSDPT ^(a)	-1,824107609	-1,982324788	-2,127244698	-1,899739614	-2,152914653
	SSDPT ^(b)	-1,824064523	-1,982233209	-2,127123963	-1,899672432	-2,152815257
	ESDPT ^(b)	-1,824037920	-1,982176362	-2,127049363	-1,899630827	-2,152754300
	FSDPT ^(b)	-1,824214263	-1,982549342	-2,127547647	-1,899904728	-2,153169938
3	Present	-1,764722947	-1,912070024	-2,065545648	-1,830280890	-2,099358095
	RHSDPT ^(a)	-1,764716957	-1,912052225	-2,065519569	-1,830269330	-2,099337320
	SSDPT ^(b)	-1,764689178	-1,911969550	-2,065398481	-1,830215732	-2,099241393
	ESDPT ^(b)	-1,764671900	-1,911917944	-2,065323270	-1,830182347	-2,099182378
	FSDPT ^(b)	-1,764783222	-1,912249450	-2,065816299	-1,830397030	-2,099579373
4	Present	-1,738937316	-1,874612809	-2,030877217	-1,795596649	-2,070483460
	RHSDPT ^(a)	-1,738933325	-1,874596642	-2,030851542	-1,795587171	-2,070463527
	SSDPT ^(b)	-1,738914769	-1,874521431	-2,030732364	-1,795543156	-2,070371300
	ESDPT ^(b)	-1,738903150	-1,874474330	-2,030658117	-1,795515624	-2,070314469
	FSDPT ^(b)	-1,738976349	-1,874773038	-2,031139594	-1,795689836	-2,070694054
5	Present	-1,726018586	-1,851951252	-2,008943548	-1,775782946	-2,052753400
	RHSDPT ^(a)	-1,726015831	-1,851936073	-2,008911087	-1,775774941	-2,052760285
	SSDPT ^(b)	-1,726002920	-1,851866541	-2,008794079	-1,775737554	-2,052671042
	ESDPT ^(b)	-1,725994791	-1,851822901	-2,008721038	-1,775714098	-2,052616010
	FSDPT ^(b)	-1,726045075	-1,852097357	-2,009191452	-1,775860809	-2,052982076

Tableau V.4 : Les contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ pour différents types des plaques carrées sandwiches en FGM ($\bar{T}_3 = 0, a/b = 1$).

Chapitre - V- Résultats et discussions

Toutes les théories (Présente théorie, l'ESDPT, du SSDPT et du RHDPT, et FSDPT) donnent la même contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ pour la plaque entièrement en céramique ($k = 0$).

En général, la contrainte axiale diminue (valeur absolue) avec l'augmentation de la valeur du paramètre de matériau k .

Les valeurs les plus petites en valeurs absolues des contraintes $\bar{\sigma}_x$ sont celles de la plaque (1-0-1) et les plus grandes sont celles de la plaque (2-2-1).

Les plaques entièrement en céramique donnent les plus petites valeurs de contraintes $\bar{\sigma}_x$.

Chapitre - V- Résultats et discussions

Le tableau V.5 contient les résultats des contraintes de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ pour une plaque sandwich en FGM soumise à une combinaison linéairement et non-linéaire de champ de température ($\bar{T}_2 = 100, \bar{T}_3 = -100$).

k	Theory	$\bar{\tau}_{xz}$				
		<i>1-0-1</i>	<i>1-1-1</i>	<i>1-2-1</i>	<i>2-1-2</i>	<i>2-2-1</i>
0	Present	0.4146850492	0.4146850448	0.4146850391	0.4146850437	0.4146850439
	RHSDPT ^(a)	0,3875715824	0,3875715824	0,3875715824	0,3875715824	0,3875715824
	SSDPT ^(b)	0,5740631176	0,5740631176	0,5740631176	0,5740631176	0,5740631176
	ESDPT ^(b)	0,6962208109	0,6962208324	0,6962208104	0,6962208280	0,6962208236
1	Present	0.5088666494	0.5057769569	0.5120235930	0.5028076163	0.5078946003
	RHSDPT ^(a)	0,4670021493	0,4617811853	0,4664858752	0,4600158773	0,4634957554
	SSDPT ^(b)	0.6967738614	0.6948170803	0.7052694992	0.6890771075	0.6979014024
	ESDPT ^(b)	0.8478429561	0.8493472298	0.8642891414	0.8402733375	0.8533361303
2	Present	0.5103204312	0.5033093833	0.5165886526	0.4976909215	0.5100386919
	RHSDPT ^(a)	0,4702713211	0,4598648679	0,4701346983	0,4563344392	0,4653381807
	SSDPT ^(b)	0.6960436985	0.6896201730	0.7112661898	0.6791942164	0.6995711498
	ESDPT ^(b)	0,8433472288	0,8415995173	0,8720815362	0,8254402890	0,8547138864
3	Present	0.5124273786	0.4984252500	0.5164397590	0.4918790322	0.5087478735
	RHSDPT ^(a)	0,4737529709	0,4560245642	0,4701572347	0,4520107054	0,4645262663
	SSDPT ^(b)	0.6976345415	0.6815157927	0.7106268240	0.6692561998	0.6968497094
	ESDPT ^(b)	0,8429437758	0,8302322625	0,8709425017	0,8110896408	0,8504454017
4	Present	0.5163946524	0.4941918802	0.5151799179	0.4877912697	0.5073267560
	RHSDPT ^(a)	0,4784793386	0,4526303727	0,4693704507	0,4489858559	0,4635472624
	SSDPT ^(b)	0.7026165109	0.6746640867	0.7087816096	0.6622911958	0.6942257194
	ESDPT ^(b)	0,8476509530	0,8207453411	0,8682981840	0,8010142924	0,8465038762
5	Present	0.5212843911	0.4908722755	0.5036863726	0.4852538506	0.5661515630
	RHSDPT ^(a)	0,4837367333	0,4499549506	0,4684276059	0,4471214799	0,4627809680
	SSDPT ^(b)	0.7093154867	0.6693258637	0.7068213417	0.6577478799	0.6922203248
	ESDPT ^(b)	0,8550478520	0,8133777300	0,8655727331	0,7943293272	0,8435042530

Tableau V.5: Les contraintes de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ pour différents types des plaques carrée sandwiches en FGM ($\bar{T}_2 = 100, \bar{T}_3 = -100, a/b = 1$).

La différence relative entre (la présente théorie de plaque d'ordre élevé à quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement peut être stable pour différentes valeurs de k et ceci indépendamment du type de la plaque. En général.

Chapitre - V- Résultats et discussions

Les plaques entièrement en céramique donnent les plus petites valeurs de contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$.

Les plaques sandwich en FGM (2-1-2) donne les plus petites valeurs des contraintes de cisaillement transversal.

La variation des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes configurations des plaques sandwiches en FGM est illustrée sur les figures V.1–V.3.

Les contraintes sont des contraintes de traction au-dessous du plan médium et des contraintes de compression au-dessus du plan médium.

On remarque que les contraintes axiales sont continuées à toute l'épaisseur de la plaque.

Les résultats montrent une variation non-linéaire de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de plaque pour $k = 2$, et variation purement linéaire pour le cas de céramique et métal.

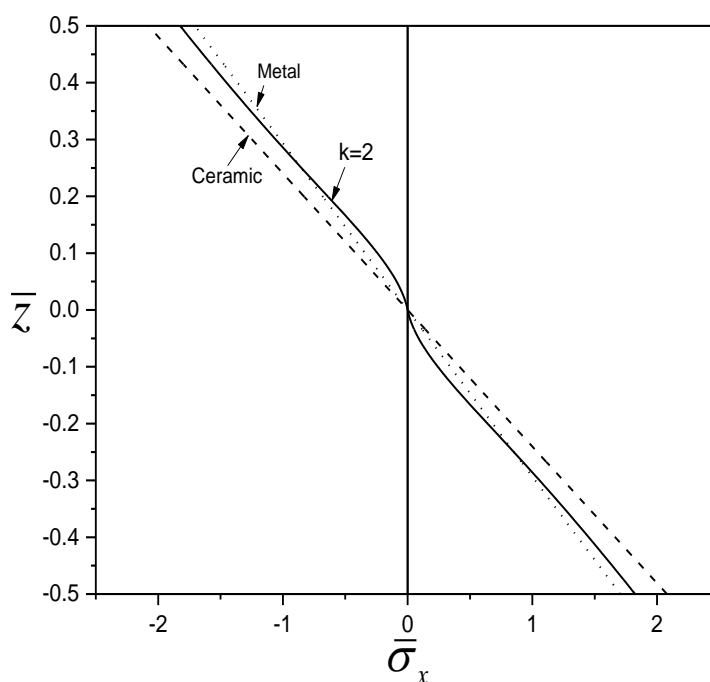


Figure V.1 : Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (1-0-1).

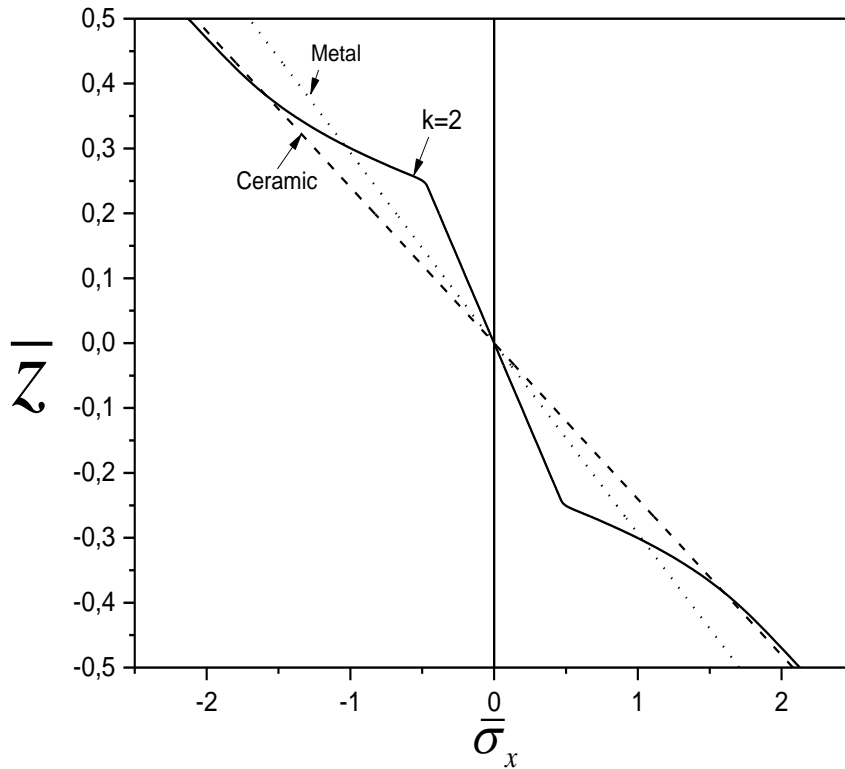


Figure V.2 : Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (1-2-1)

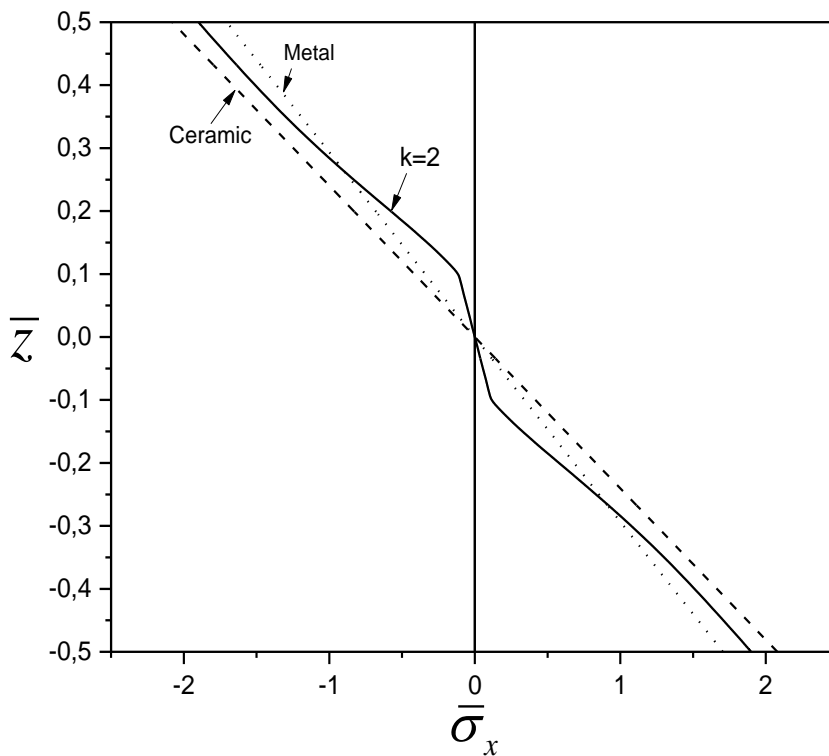


Figure V.3 : Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (2-1-2).

Les figures V.4–V.6 représentent la distribution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ suivant l'épaisseur de la plaque sandwich en FGM.

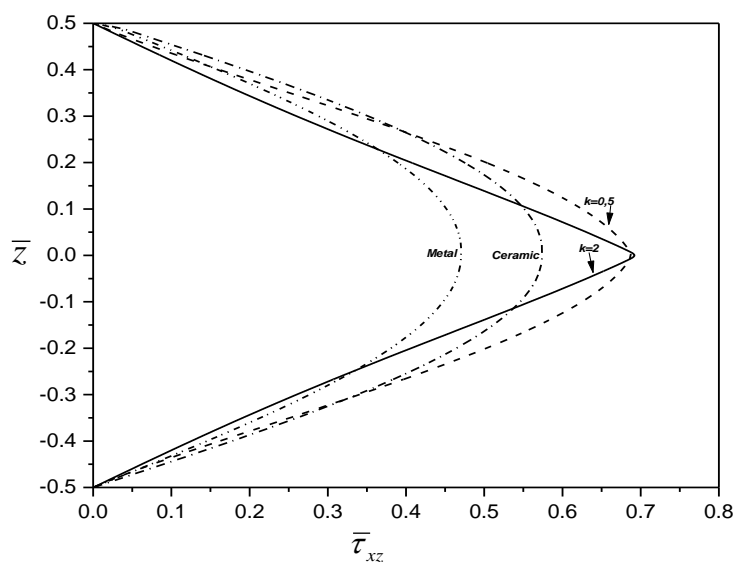


Figure V.4 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (1-0-1).

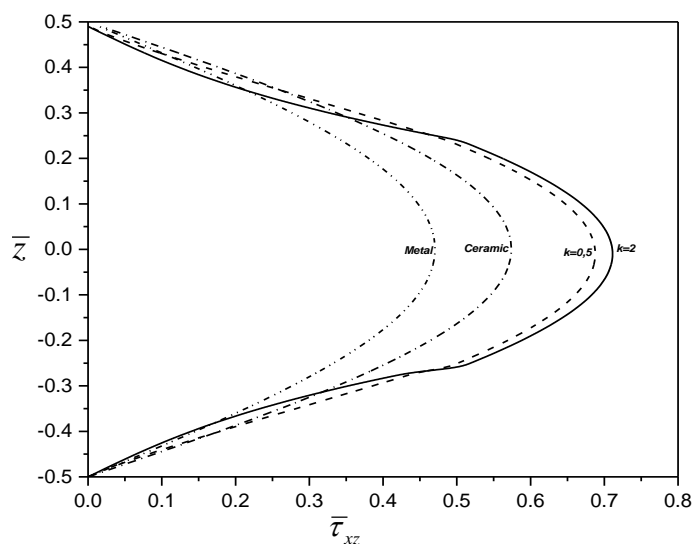


Figure IV.5 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (1-2-1) .

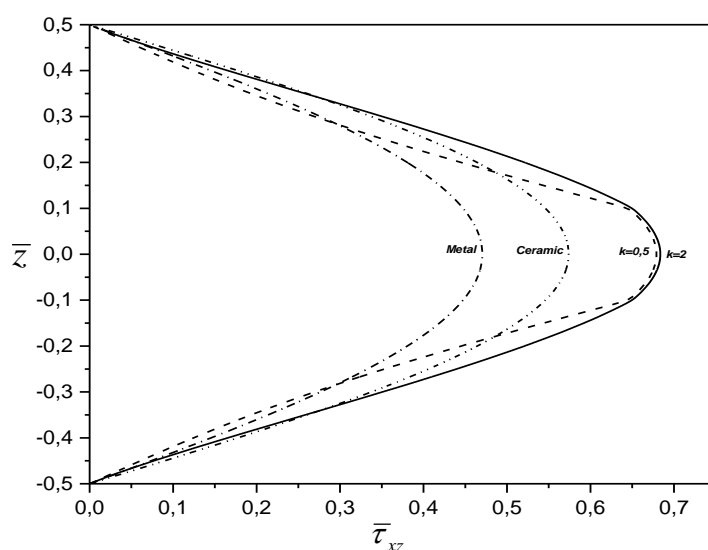


Figure IV.6 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich (2-1-2) .

D'après Figure IV.4 , Figure IV.5 et Figure IV.6 La variation des contraintes de cisaillement est symétrique à travers l'épaisseur , .et les valeurs maximales des contraintes de cisaillement est enregistrée pour le cas de $k=2$,valable pour tous les configuration de la plaque.

Dans les figures V.7 et V.8, nous avons tracé les distributions des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ et de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM (1-2-1) et (1-1-1) pour (1.5).

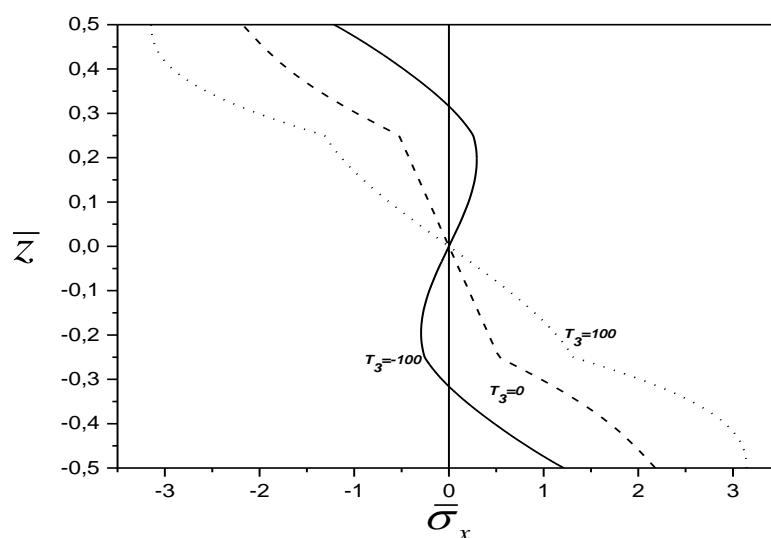


Figure V.7 : Effet du chargement thermique \bar{T}_3 sur la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich (1-2-1) ($k = 1.5$).

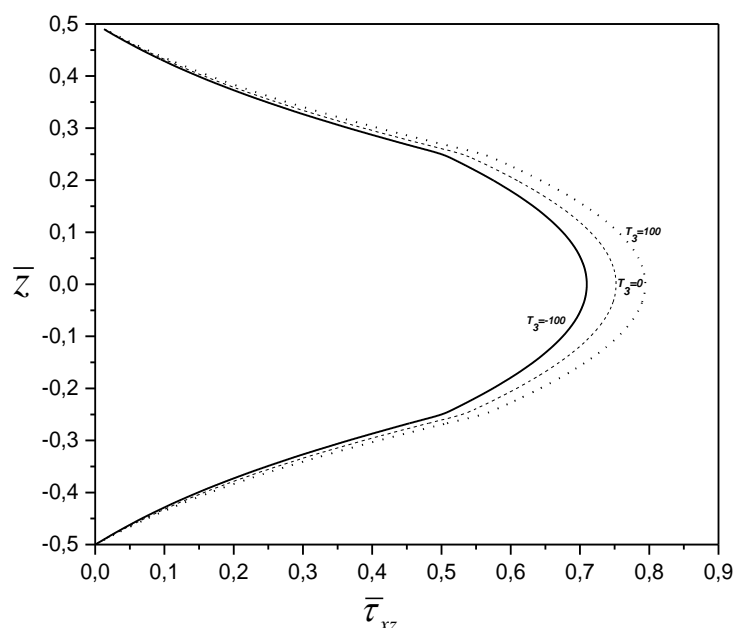


Figure V.8 : Effet du chargement thermique \bar{T}_3 sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque sandwich (1-1-1) ($k = 1.5$).

On remarque que la variation des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ et de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ est très influée par le chargement thermique \bar{T}_3 .

Pour $\bar{T}_3 = 100$, la valeur de contrainte axiale et la contrainte de cisaillement transverse es maximale.

La variation de la contrainte de cisaillement transverse est parabolique et dans le cas de plaque type (1-1-1) est symétrique.

Les figures (V .9- V .10) illustrent l'effet du rapport d'aspect " b/a " sur la flèche pour différents types de plaques sandwich FGM: 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($k = \infty$ et $k = 2$), on remarque que, pour toutes les types de plaques sandwich, la flèche augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect " b / a ". et la valeur minimale de la flèche pour le (1-2-1) en raison de sa grande rigidité par rapport les plaques types 1-0-1 et 2-1-2 .

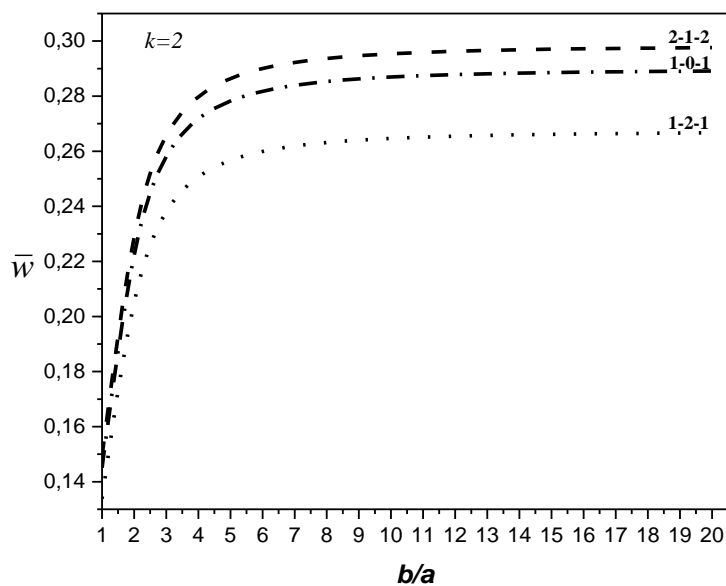


Figure V.9: Effet de facteur de forme “ b/a ” sur la flèche \bar{w} pour différents type des plaques sandwich 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($T_3=-100$, $k=2$ et $a/h=10$).

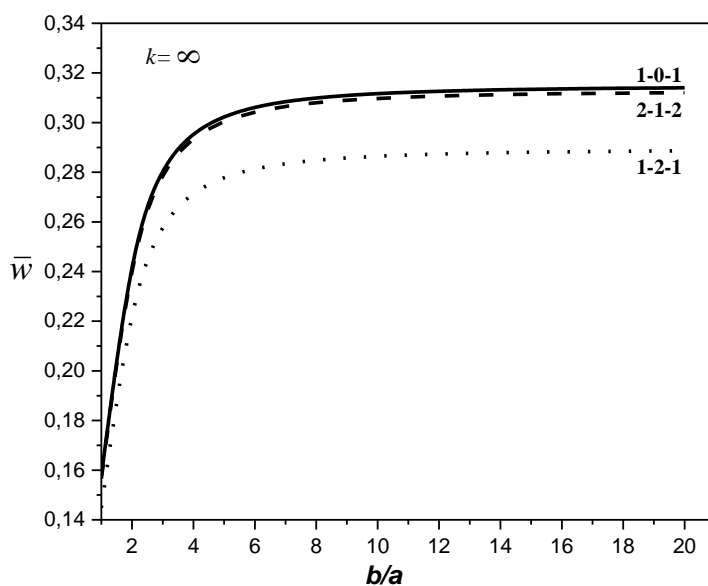


Figure V.10 : Effet de facteur de forme “ b/a ” sur la flèche \bar{w} pour différents type des plaques sandwich 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($T_3=-100$, $k=\infty$ et $a/h=10$).

Sur les figures (V.11, V.12, V.13), la variation de la flèche de la plaque carrée FGM en fonction du rapport [côté / épaisseur " a/h "] est représentée. On observe que flèche diminue de façon monotone lorsque le rapport [côté / épaisseur " a/h "] augmente à cause de la flexibilité de la plaque. et pour cette raison que la plaque (1-0-1) possède la plus grande valeur de flèche. Et que la plaque entièrement céramique possède les valeurs minimales de la flèche à cause de module d Young élevé.

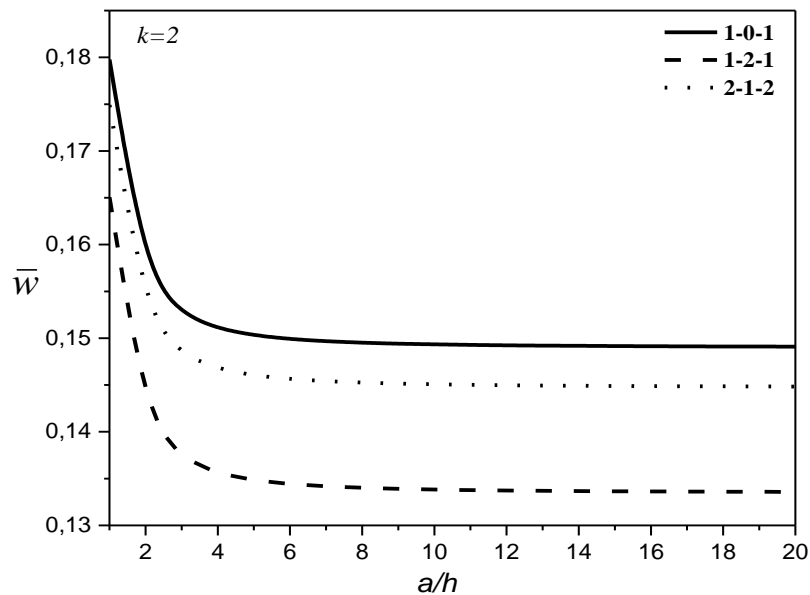


Figure V.11 : Effet de rapport " a/h " sur la flèche \bar{w} pour différents type des plaques sandwich 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($T_3=-100, k=\infty$).

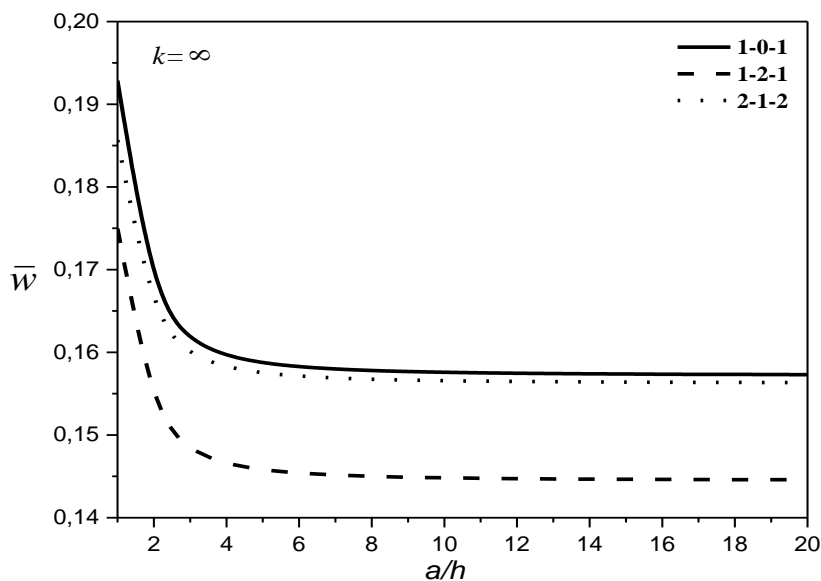


Figure V.12 : Effet de rapport " a/h " sur la flèche \bar{w} pour différents type des plaques sandwich 1-0-1, 1-2-1 et 2-1-2, avec ($T_3=-100, k=2$).

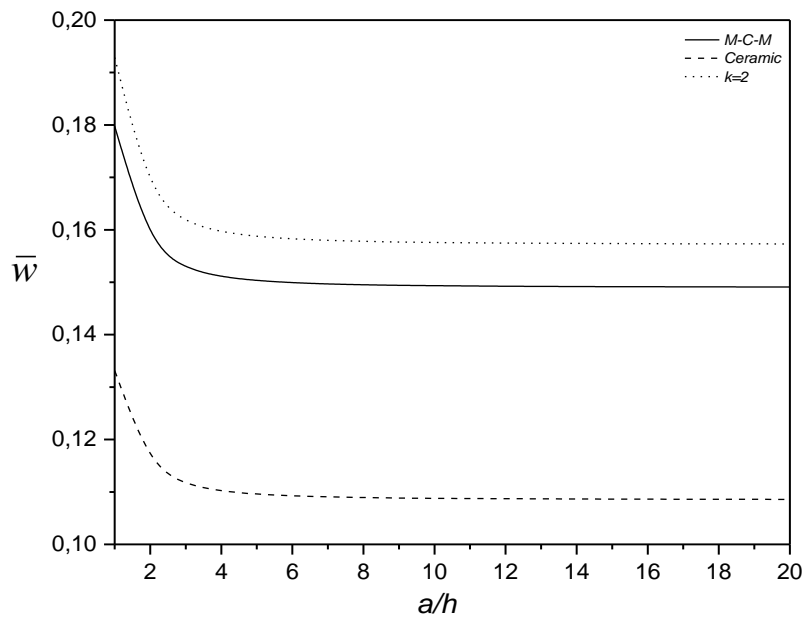


Figure V.13 : Effet de rapport “ a/h ” sur la flèche \bar{w} pour la plaques sandwich(1-1-1) avec (T3=-100).

V.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement thermoélastique de la flexion des plaques sandwiches en FGM en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre inconnus.

Toutes les études comparatives montrent que les flèches et les contraintes dues au chargement thermique obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermoélastique de la flexion des plaques FGM

Conclusion générale

Conclusion générale

L'élaboration des matériaux à gradient de propriétés a besoin des recherches d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles. Par la modification de leur composition et leur architecture.

La finité de ce travail a été d'étudier le comportement thermoélastique de la flexion des plaques épaisses sandwichs en FGM sous une excitation thermique, en étudions l'évolution de la flèche, les contraintes normales et tangentielles.

Le modèle analytique proposé est basé sur la théorie d'ordre élevé à quatre variables. Il n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Afin de valider ce modèle, nous avons comparé ce modèle à des autres modèles cités dans la littérature. Toutes les études comparatives ont démontré que les flèches et les contraintes dues au chargement thermique obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermoélastique de la flexion des plaques FGM.

Nous avons étudié le comportement thermoélastique de la flexion des plaques épaisses sandwichs en FGM en utilisant le nouveau modèle hyperbolique de plaque de déformation en cisaillement avec la prise en compte de la déformation normale et, en supposant une variation arbitraire des propriétés matérielles (Module de Young et coefficient de dilatation thermique).

Des exemples illustratifs sont donnés pour montrer les effets de changer des paramètres du matériau de façon arbitraire sur la distribution des contraintes thermoplastiques. Les résultats obtenus indiquent que les contraintes thermoélastiques peuvent être relaxées pour quelques paramètres de matériau donnés.

L'intérêt de ce travail révèle pour faire être sûres lorsque l'intégrité structurale des plaques en matériaux à gradient de propriétés une fois soumise à champ de température élevé.

Conclusion générale

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul le comportement thermoélastique de flexion dans le cas bidirectionnel de la distribution des propriétés thermomécaniques.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient de propriétés et précisément leurs comportements vis-à-vis des chargements de température.

Bibliographie

- [1] Suresh, S, and Mortensen, A., Fundamentals of Functionally Graded Materials, IOM Communications, London,1998.
- [2] M.K.S.Sai ,Review of Composite Materials and Applications Department of Mechanical Engineering VBIT, Hyderabad, Telangana, India,,2016
- [3] Nasser-Eddine Bouida , modélisation numérique des plaques en FGM fissurées thèse de doctorat . université Djillali Liabes de sidi bel abbes . 2019
- [4] Gornet, L. Généralité sur les matériaux composites. Engineering school, HAL.. 2008
- [5] Gendre, L. Matériaux composites et structures composites. ENS Cachan- Université Paris- Saclay.2011.
- [6] Isaac M. Daniel and Ori Ishai.. Engineering Mechanics of Composite Materials , Oxford university press.1994
- [7] Sehoul, M.. "Etude Du Comportement Mécanique Des Plaques Composite En Utilisant Des Théories De Déformations De Cisaillement Non-Polynomiales, ". Thèse de doctorat. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes.2017
- [8] Elmeiche, Abbas, Abdelkader Megueni, . "Free Vibration Analysis Of Functionally Graded Nanobeams Based On Different Order Beam Theories Using Ritz Method". Periodica Polytechnica Mechanical Engineering 60 (4): 209-219 2016.
- [9] BENAHMED Abdelkrim. Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre réduit de variable. Thèse de doctorat . Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes.2017
- [10] Berthelot, J. Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures, 4ème Edition. Editions TEC et DOC. 2005.
- [11] M.K.S.Sai , Review of Composite Materials and Applications Department of Mechanical Engineering VBIT, Hyderabad, Telangana, India
- [12] Kaw, A.K., MECHANICS OF Composite Materials. 2nd. ed. 2006.
- [13] Zenkert, D. The Handbook of Sandwich Construction, Engineering Materials Advisory Service Ltd, London. 1997
- [14] Berthelot, J. M. Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures. &, 245, 172.1999.
- [15] BOUAMAMA Mohamed Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM . Thèse de doctorat. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes. 2018-2019
- [16] BARKA Merbouha . Détermination des températures critiques des plaques FGM. Thèse de doctorat. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes. 2016-2017
- [17] Advances in Functionally Graded Materials and Structures Edited by Farzad Ebrahimi 2016
- [18] Functionally Graded Materials Yoshikazu Shinohara Eco-energy Group, National Institute for Materials Science, 1-2-1 Sengen, Tsukuba, Ibaraki 305-0047, Japan
- [19] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 31-36, 1990
- [20] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191-192,1986.

- [21] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992
- [22] M. Koizumi, FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4. 1997
- [23] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [24] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [25] . M. Koizum. Progress of FGM research in Japan [FGM activities in Japan and Functionally Graded Materials in the 21st Century: A Workshop on Trends and forecast , Kiyoshi Ichikawa 2013
- [26] W. S. Ebhota, A. S. Karun, F. L. Inambao, Principles and Baseline Knowledge of Functionally Graded Aluminium Matrix Materials (FGAMMs): Fabrication Techniques and Applications, *International Journal of Engineering Research in Africa*, Vol 26, pp. 47-67, 2016.
- [27] A. Bouzekova-Penkova A. Miteva, Aluminium-Based Functionally Graded Materials, *Space Research and International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 Volume 13*,
- [28] Number 23 (2018) pp. 16141-16151 © Research India Publications. <http://www.ripublication.com> 16150
Technology Institute, Bulgarian Academy of Sciences, 2014
- [29] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, R. G. Ford, *Functionally graded materials: design, processing and applications vol. 5: Springer Science & Business Media*, 2013.
- [30] N. Oxman, S. Keating, E. Tsai, Functionally Graded Rapid Prototyping, in *Innovative Developments in Virtual and Physical Prototyping*, CRC Press,. Proc. 5th Internat. Conf. on Advanced Research in Virtual and Rapid Prototyping (VRAP), Leiria, Portugal, pp. 483-489, Sept. 28–Oct. 1, 2011
- [31] B. Kieback, A. Neubrand, H. Riedel, *Processing Techniques For Functionally Graded Materials*, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 362, pp. 81-106, 2003.
- [32] S. K. Bohidar, R. Sharma, P. R. Mishra, *Functionally Graded Materials: a Critical Review*, *International Journal of Research*, vol. 1, pp. 289-301, 2014.
- [33] A. S. Karun, S. Hari, W. S. Ebhota, T. Rajan, U. Pillai, B. Pai, *Design and Processing of Bimetallic Aluminum Alloys by Sequential Casting Technique*, *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 48, pp. 279-293, 2017.
- [34] Tlidji Youcef. « contribution à l'étude de la stabilite des plaques sandwichs en materiux a gradient de propriete type FGM ». Thèse de doctorat . universite Djillali Liabes de sidi bel abbes . 2016
- [35] Reuß, A., Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*9: p. 49-58., 1929.
- [36] Gasik, M.M., Micromechanical modelling of functionally graded materials. *Computational Materials Science*. 13(1-3): p. 42-55., 1998
- [37] Gasik, M.M. and B. Zhang. Optimization sintering of zirconia/alumina functionally graded material. in *Materials Science Forum*. 2003. Aedermannsdorf, Switzerland: Trans Tech Publications, 1984
- [38] Ju, J. and T.M. Chen, Micromechanics and effective moduli of elastic composites containing randomly dispersed ellipsoidal inhomogeneities. *Acta Mechanica*., 103(1-4): p. 103-12.1994

- [39] Mori, T. and K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, 21(5): p. 571-574, 1973
- [40] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [41] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [42] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [43] S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959
- [44] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [45] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [46] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*;12 (2): 69-77, 1945.
- [47] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.
- [48] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.
- [49] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380 1957.
- [50] E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502, 1975.
- [51] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, 1984.
- [52] T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.
- [53] M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916, 1991
- [54] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [55] Voigt, W., Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Annalen der physik*,. 274(12): p. 573-587.1889
- [56] Duc, N.D., Tung, H.V, “Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations”, *Composite Structures*, 93, 2874–2881. (2011)
- [57] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi ,*Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions* ;John Wiley & Sons;page 110, 4 août 2011
- [58] *International Journal of Applied Engineering Research* ISSN 0973-4562 Volume 13, pp. 16141-16151 © Research India Publications. <http://www.ripublication.com> 16141 A Review of Functionally Graded Materials: Fabrication Processes and Applications Adefemi O. Owoputi .Number 23 (2018)

- [59] H. Sun, S. Yang, D. Jin, Improvement of Microstructure, Mechanical Properties and Corrosion Resistance of Cast Al–12Si Alloy by Friction Stir Processing, Transactions of the Indian Institute of Metals, Vol 71, pp. 1-7, 2018
- [60] A. Tajiri, Y. Uematsu, T. Kakiuchi, Y. Tozaki, Y. Suzuki, A. Afrinaldi, Effect of Friction Stir Processing Conditions on Fatigue Behavior and Texture Development in A356-T6 Cast Aluminum Alloy, International Journal of Fatigue, vol. 80, pp. 192-202, 2015.
- [61] L. Besra M. Liu, A Review on Fundamentals and Applications of Electrophoretic Deposition (EPD), Progress in Materials Science, vol. 52, pp. 1-61, 2007.
- [62] E. Askari, M. Mehrali, I. H. S. C. Metselaar, N. A. Kadri, M. M. Rahman, Fabrication and Mechanical Properties of Al₂O₃/SiC/ZrO₂ Functionally Graded Material by Electrophoretic Deposition, Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, vol. 12, pp. 144-150, 2012.
- [63] R. M. Mahamood, E. T. Akinlabi, M. Shukla, S. Pityana, Functionally graded Material: an Overview, Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III, WCE, July 4-6, London, UK, 2012.
- [64] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, and R. Ford, Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications.: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [65] Touloukiane 1967 Touloukian Y.S. Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials,McMillan, New York..1967
- [66] Reddy J.N. and Chin C.DThermoelastical analysis of functionally graded cylinders and plates, Journal of Thermal Stresses, 21, 593–626.. 1998.
- [67] Houari Mohammed "Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances". Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès. 2011.
- [68] Benadouda Mourad. Etude du comportement mécanique des structures épaisses en tenant compte de l'effet de la microstructure fonctionnellement gradué. Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès. 2019.
- [69] Love A. E. H.. "On the small free vibrations and deformations of elastic shells". Philosophical trans. of the Royal Society. London, 1888, Vol. A, (17), pp. 491–549.(1888)
- [70] Timoshenko S. "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars". Philosophical Magazine. 1921, Vol. 41, (46), pp. 744-746.(1921)
- [71] Reissner E.. "On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation". Int. J. Solids Structures. 1975, Vol. 25, (5), pp. 495-502.(1975)
- [72] Uflyand Y.S. "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates". 1948, Vol. 12, pp. 287-300.(1948)
- [73] Mindlin R. D.. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". Journal of Applied Mechanics. 1951, Vol. 18, pp. 31–38.(1951)
- [74] Bachir Bouiadjra "Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaises en Composite sur Fondations Elastiques". Thèse de Doctorat Université Djilali Liabes. 2015.
- [75] Younsi Abderahman .Proposition d'une théorie de déformation de cisaillement 2D et 3D pour l'étude du comportement mécanique des plaques Année universitaire . Thèse de doctorat . universite Djillali Liabes de sidi bel abbes . 2019

- [76] Driz Hafida. Etude de l'influence des paramètres géométriques et matériels sur le comportement vibratoire des plaques épaisses. Thèse de doctorat . universite Djillali Liabes de sidi bel abbes . 2019
- [77] Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy J.N, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *Int. J. Mech. Sci*; 45 (3) : 519–539,2003.
- [78] Chan S.H., Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.(2001)
- [79] Chan S.H., Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.(2001)
- [80] Kashtalyan M, Three dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates,” *Eur. J. Mech. A/Solids*; 23 (5): 853–864, 2004.
- [81] Zenkour, A.M. et Alghamdi, N.A., "Analyse de flexion de plaques sandwich classées fonctionnellement sous l'effet de charges mécaniques et thermiques", *Mech. The Advanced Mater. and Struct.*, 17 (6), 419-432.(2010)
- [82] Zenkour AM., "Une analyse complète des plaques sandwich à gradient fonctionnel: Part1- déviation et contraintes". *Int. Jour. de Sol. et struc.*, , 42; 5224-42.(2005)
- [83] Woo J., S.A. Meguid, Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *Int. J. Solids Struct*; 38 (42-43): 7409–7421, 2001.
- [84] Tarn J-Q, 2001, exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *Int. J. Solids Struct*; 38 (46-47): 8189–8206, 2001.
- [85] Javaheri R, Eslami MR., "Bouclage de plaques fonctionnellement classées sous chargement compressif dans le plan". *ZAMM*, , 82, 277-83.(2002)
- [86] Na K.S., J.-H. Kim, 2004, Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials, *Composites, Part B*, 35 (5): 429–437, 2004.
- [87] Yang J, K.M.Liew, S. Kitipornchai. Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading. *Int. J. Mech. Sci.* 47 1519-1541.(2005)
- [88] Shen, H.-S., "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group. (2009)
- [89] Matsunaga, H., , "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, 499–512.(2008)
- [90] Zhao X, Lee YY., Liew KM., "Analyse mécanique et thermique du flambement des plaques à gradient fonctionnel". *Compos. struct.*, , 90 (2), 161-71.2009
- [91] Fuchiyama T. and Noda N. Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, *JSAE Review*, 16, 263–268.. (1995),
- [92] Zenkour AM., M. Sobhy, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, *Compos Struct*; 93 (1):102–93, 2010.
- [93] Park J.S., J.-H. Kim, Thermal postbuckling and vibration analysis of functionally graded plates, *J. Sound Vib*; 289 (25-28): 77–93, 2005.
- [94] Swaminathan K, Sangeetha DM (2017) Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods. *Compos. Struct.*, 160:43–60.

- [95] Mantari JL, Ramos IA, Carrera E, Petrolo M (2016) Static analysis of functionally graded plates using new non-polynomial displacement fields via Carrera Unified Formulation. *Composites Part B: Engineering* 89:127–142.
- [96] Akavci SS, Tanrikulu AH (2015) Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories. *Composites Part B: Engineering* 83:203–215. doi:10.1016/j.compositesb.2015.08.043
- [97] Attia MA (2017) On the mechanics of functionally graded nanobeams with the account of surface elasticity. *International Journal of Engineering Science* 115:73-101.
- [98] Hadji L, Avcar M (2021) Free Vibration Analysis of FG Porous Sandwich Plates under Various Boundary Conditions. *J of Appand Comput Mech* 7(2):505-519.
- [99] Tungikar.V, Rao, K. M., Three dimensional exact solution of thermal stresses in rectangular composite laminates, *Compos. Struct*; 27 (4): 419–427, 1994.
- [100] Carrera .E, Temperature profile influence on layered plates response considering classical and advanced theories, *AIAA J*; 40: 419–427, 2002.
- [101] Delale F, F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [102] Civalek Ö, Demir C (2016) A simple mathematical model of microtubules surrounded by an elastic matrix by nonlocal finite element method. *Applied Mathematics and Computation* 289:335–352. doi:10.1016/j.amc.2016.05.034
- [103] Ahmed RA, Fenjan RM, Faleh NM (2019) Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections. *Geomechanics and Engineering* 17(2):175-180.
- [104] Merzoug M, Bourada M, Sekkal M, Ali Chaibdra A, Belmokhtar C, Benyoucef S, Benachour A (2020) 2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models. *Geomechanics and Engineering* 22(4):361-374.
- [105]
- [106] Rachedi MA, Benyoucef S, Bouhadra A, Sekkal M, Bachir Bouiadjra R, Benachour A (2020) Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation. *Geomechanics and Engineering* 22(1):065-80. DOI:
- [107] Hadji L (2020) Influence of the distribution shape of porosity on the bending of FGM beam using a new higher order shear deformation model. *Smart Structures and Systems* 26(2):253-262.
- [108] Ramirez D, Cuba L, Mantari JL, Arciniega RA (2019) Bending and free vibration analysis of functionally graded plates via optimized non-polynomial higher order theories. *J of App and Comput Mech* 5(2):281-298.
- [109] Nebab M, Ait Atmane H, Bennai R, Tahar B (2019) Effect of nonlinear elastic foundations on dynamic behavior of FG plates using four-unknown plate theory. *Earthquakes and Structures* 17(5):447-462.
- [110] Bouchafa A, Bachir Bouiadjra M, Houari MSA, Tounsi A (2015) Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory. *Steel Compos. Struct., Int. J.* 18(6):1493-1515.
- [111] Zenkour AM, Alghamdi NA (2008) Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *Journal of Materials Science*, 43(8), 2574–2589.