République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali LIABÈS
Faculté des Sciences Exactes
- SIDI BEL-ABBÈS -

THÈSE
DE DOCTORAT

Préparée par

ABDELAZIZ MEBARKI

Spécialité : Mathématiques

Option : Équations Différentielles et Applications

Intitulée

Solutions Faibles d'Équations et d'Inclusions Intégro-Différentielles d'Évolution à Retard Dépendant de l'État

Soutenue le 13/07/2021, devant le Jury composé de

Président :
Prof. Mouffak BENCHOHRA, *Université Djillali LIABÈS, Sidi Bel-Abbès*

Examinateurs :
- ***Prof. Sidi Mohammed BOUGUIMA,*** *Université Abou Bakr BELKAÏD, Tlemcen*
- ***Prof. Abdelghani OUAHAB,*** *Université Djillali LIABÈS, Sidi Bel-Abbès*

Promotrice :
Prof. Selma BAGHLI-BENDIMERAD, *Université Djillali LIABÈS, Sidi Bel-Abbès*

Dédicaces

Remerciements et louanges à Dieu Le Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail.

Prière et Salut soient sur Notre Cher Maître & Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons.

Je dédie ce modeste travail à :

• Ma douce mère, source inépuisable de tendresse, de patience et de sacrifice, ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie. Quoique je puisse écrire, je ne pourrais exprimer ma grande affection et ma profonde reconnaisssance. J'espère ne jamais te décevoir, ni trahir ta confiance et tes sacrifices. Puisse Dieu Le Tout Puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

• Mon formidable père et guide Abdelkader qui m'a ouvert les yeux sur la science et l'histoire et m'a poussé dans le domaine de recherches et du travail et qui n'a pas cessé de m'encourager tout au long de mon parcours.

• J'adresse mon grand amour à mes chères mes frères Djamel, Belkacem, Mohammed et Chikh Othmane ainsi que ma chère sœur Ghizlaine. C'est grâce à leurs amours et leurs sacrifices que cette thèse a été mené à bout enfin. Mon plus grand souhait dans cette vie, c'est de les voir toujours à côté de moi, en bonne santé, heureux et que la paix soit avec eux.

• Je tiens également à mentionner et à témoigner ma reconnaissance à tous mes amis de ma promotion Abdelkader , Mohammed et Imane pour leurs encouragements et leur gentillesse envers moi.

• Mes vifs remerciements vont également à tous mes amis intimes pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné et les encouragements qu'ils m'ont offert.

Abdelaziz

Remerciements

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier et à adresser ma reconnaissance à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près afin de réaliser ce travail.

J'exprime ici ma profonde reconnaissance à l'égard de ma promotrice *Prof. Selma BAGHLI-BENDIMERAD*. Elle a su orienter mon travail sur l'immense champ d'actualité de recherche. Les conseils et encouragements qu'elle n'a jamais cessé de prodiguer sont inestimables. Sa patience et sa compréhension m'ont permi d'avancer et de terminer ce travail.

Que le *Prof. Mouffak BENCHOHRA* trouve ici l'expression de mes remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses conseils et intérêts durant toute ma formation. Je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie le *Prof. Sidi Mohammed BOUGUIMA* pour avoir accepté d'être membre de ce jury et d'avoir accepter d'expertiser ma thèse.

J'adresse mes vives remerciements au *Prof. Abdelghani OUAHAB* pour avoir accepter de juger mes résultats et de faire partie du jury de ma thèse.

God created in man the ability to think ...

Man's ability to think may try to obtain

the desired information by combining

the universals with each other,

with the result that the mind obtains

a universal picture that conforms

to details outside. " ...

Ibn Khaldûn The Muqqaddimah.

The Science of Logic.

Abstract

In this work, we give a contribution to the study of various classes of partial functional and neutral functional integrodifferential *evolution* equations and inclusions perturbed and nonperturbed with finite and infinite state-dependent delay on the positive real semiinfinite interval.

To get the existence of mild solutions ; sufficient conditions are considered in the study of different classes of partial functional and neutral functional integrodifferential *evolution* problems in this work. Uniqueness results are also given for some classes of these problems.

The method used is to transform the existence of these mild solutions to the search for the existence of fixed points of appropriate operators by applying different nonlinear alternatives in Fréchet spaces to entire the existence of fixed points of the above operator which are mild solutions of our problems. This method is based on famous and recent fixed point theorems and is combined with the semigroup theory.

Controllability of mild solutions is investigated for some classes of first order of partial functional and neutral functional integrodifferential *evolution* equations in this work as applications.

Key words and phrases :

Partial functional integrodifferential evolution equations and inclusions with delay - neutral problems - perturbed problems - mild solution - state dependent delay - existence of solutions - uniqueness - fixed point - nonlinear alternative - semigroup - Fréchet spaces.

AMS Subject Classification :

34G20 - 34G25 - 34K26 - 34K40 - 37L05 - 74H20 - 93B05.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques classes d'équations et inclusions intégro-différentielles d'évolution partielles et celles de type neutre perturbed and nonperturbed, avec retard fini et infini dépendant de l'état dans la demi-droite réelle positive.

Pour obtenir l'existence des solutions faibles ; des conditions suffisantes seront considérées dans l'étude des différentes classes de problèmes intégro-différentiels d'*évolution* de cette thèse. Des résultats d'unicité sont également donnés pour quelques classes de ces problèmes.

La méthode utilisée est de transformer la recherche de l'existence des solutions faibles à la recherche de l'existence des points fixes d'opérateurs appropriés en appliquant différentes alternatives non linéaires dans les espaces de Fréchet pour entirer l'existence des points fixes de cet opérateur qui sont les solutions faibles de nos problèmes. Cette méthode est basée sur des célèbres et récents théorèmes du point fixe et est combinée avec la théorie des semi-groupes.

La contrôlabilité des solutions faibles est donnée dans ce travail pour quelques classes d'équations intégro-différentielles d'*évolution* et celles de type neutre à titre d'applications.

Mots et Phrases Clefs :

Équations et inclusions intégro-différentielles d'évolution à retard - problèmes de type neutre - problèmes perturbés - solution faible - retard dépendant de l'état - existence des solutions - point fixe - alternative non linéaire - semi-groupes - espaces de Fréchet.

Classification AMS des sujets :

34G20 - 34G25 - 34K26 - 34K40 - 37L05 - 74H20 - 93B05.

Publications

1. **Abdelaziz Mebarki**, Selma Baghli-Bendimerad and Mouffak Benchohra,
Mild solutions for perturbed integro-differential evolution equations with infinite state-dependent delay, soumis.

2. **Abdelaziz Mebarki**, Selma Baghli-Bendimerad and Mouffak Benchohra,
Controllability of mild solutions for integro-differential evolution equations with infinite state-dependent delay, en préparation.

3. **Abdelaziz Mebarki** and Selma Baghli-Bendimerad,
Partial integro-differential evolution inclusions with infinite delay depending on the state, soumis.

4. **Abdelaziz Mebarki** and Selma Baghli-Bendimerad,
Neutral multi-valued integro-differential evolution equations with infinite state-dependent delay, *Turkish Journal of Mathematics* **44** (6) (2020), 2312-2329.
https ://journals.tubitak.gov.tr/math/issues/mat-20-44-6/mat-44-6-26-2007-66.pdf

Table des matières

Introduction

Une grande classe de problèmes scientifiques et d'ingénierie est modélisée par des équations intégro-differentielles, qui peuvent être décrites comme des équations d'évolution intégro-differentielles semi-linéaire dans les espaces de Banach utilisant les semi-groupes. Le problème de la preuve de l'existence des solutions faibles pour les équations et les inclusions intégro-différentielless dans les espaces abstraits ont été étudiées par plusieurs auteurs : Balachandran *et al.* dans [11]-[13] et Benchohra *et al.* dans [23]-[24] et [26]-[29].

Les équations différentielles fonctionnelles de type neutre sont étudiées dans les livres de Hale *et al.* [46], Kolmanovskii et Myshkis [60], Hernandez dans [49] a prouvé l'existence de solutions faibles, fortes et périodiques et Fu *et al.* dans [42] ont étudié l'existence et la contrôlabilité des solutions sur un intervalle borné d'un problème de type neutre.

Des équations différentielles fonctionnelles à retard ont été utilisées dans la modélisation des phénomènes scientifiques depuis de nombreuses années. Souvent, on a supposé que le retard était soit une constante fixée ou est donné comme une intégrale, c'est le cas de retard distribué ; voir par exemple les livres de Benchohra et ses collaborateurs [25], Hale *et al.* [47], Hino *et al.* [55], Lakshmikantham *et al.* [34, 61] et Wu dans [73].

Lorsque le retard est infini, la notion de l'espace des phases $\mathcal{B}$ joue un rôle important dans l'étude de la théorie à la fois qualitative et quantitative des équations différentielles fonctionnelles. Un choix habituel est un espace semi-normé satisfaisant les axiomes appropriés, qui a été introduit par Hale et Kato (voir [47]). Pour d'autres applications, voir par exemple les livres de Hale [48], Hino [56, 57], Lakshmikantham et collaborateurs dans [34, 61].

Cependant, les situations compliquées dans lesquelles le retard dépend des fonctions inconnues ont proposé en modélisation ces dernières années (voir par exemple Rezounenko et Wu [70], Willé et Baker [72] et les références qui y figurent). Ces équations sont fréquemment appelées équations avec retard dépendant de l'état. Les résultats d'existence, entre autres, ont été dérivés récemment pour diverses classes d'équations différentielles fonctionnelles lorsque le retard dépend de la solution. Nous renvoyons le lecteur aux articles de Ait Dads et Ezzinbi [5], Gyri et Hartung [44], Hartung [50]-[52] et Hernandez *et al.* [9, 49, 53]. Au moyen du principe de contraction de Banach et de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, Abada et ses collaborateurs présentent des résultats d'existence et d'unicité pour chacun de nos problèmes sur un domaine borné dans [1] ainsi Li *et al.* dans [67, 68].

Baghli *et al.* ont considéré l'existence, l'unicité et la contrôlabilité des solutions faibles pour les classes de premier ordre des équations et inclusions d'évolution semi-linéaire différentielles fonctionnelle et celles de type neutre et intégro-différentielles et perturbées avec retard fini et infini dans [2], [15] - [21]. Ensuite, elle examine le cas où le délai dépend de la solution pour les équations d'évolution dans [6]-[8] et [22] et elle donne une solution faible globale pour les inclusions d'évolution avec retard dépendant de l'état dans [14].

Dans cette thèse, on étend les résultats précédents pour les problèmes intégro-différentiels dans des espaces de Fréchet en donnant l'existence, l'unicité et la contrôlabilité des solutions faibles sur la droite réelle positive pour différentes classes du premier ordre des équations et inclusions intégro-différentielles d'évolution et celles de type neutre, perturbées et non perturbées avec retard fini et infini dépendant de l'état dans des espaces de Fréchet. Nos résultats sont basés sur des théorèmes de points fixes combinés avec la théorie des semi-groupes.

Le thèse contient six chapitres et est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre contient les notations, les définitions, des exemples d'espaces de phase, des propriétés des fonctions multivoques, les propriétes du retard dépendant de l'état et trois théorèmes de point fixe utilisés dans cette thèse.

Le deuxième chapitre est consacré à donner notre principal résultat, en utilisant l'alternative non linéaire de type Leary Schauder donnée par Frigon et Granas pour les contractions dans les espaces de Fréchet [41], combinée avec la théorie des semi-groupes. L'existence la solution faible unique est démontrée dans la Section 2.2 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s,y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J := [0,+\infty[\\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in H := [-r,0], \end{cases} \tag{1}$$

où $r > 0$, $f : J \times C(H;E) \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times C(H;E) \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(H;E)$ sont des fonctions données et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés (non nécessairement bornés) de E en E qui génère un système d'évolution d'opérateurs $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in J\times J}$ pour $s \leq t$.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 2.3 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t,y_{\rho(t,y_t)})] &= A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s,y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{2}$$

où $A(\cdot)$, f, $\mathcal{I}$ et φ sont définies dans le problème (1) et $g : J \times C(H;E) \to E$ est une fonction donnée.

L'existence de la solution faible unique est démontrée dans la Section 2.4 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s,y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y_0 &= \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{3}$$

où $\mathcal{B}$ est un espace de phase abstrait à spécifier ultérieurement, $f : J \times \mathcal{B} \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ sont des fonctions données et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est déjà définie.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 2.5 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] &= A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{4}$$

où $A(\cdot)$, f, $\mathcal{I}$ et ϕ sont définies dans le problème (3) et $g : J \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction donnée.

Dans le troisième chapitre, on utilise notre principal outil qui est l'alternative non linéaire d'Avramescu due à Burton et Kirk pour la somme d'un opérateur continu compact et d'une contraction sur les espaces de Fréchet [10]. L'existence des solutions faibles est démontrée dans la Section 3.2 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles perturbées d'évolution avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + h(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{5}$$

où f, $h : J \times C(H;E) \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times C(H;E) \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(H;E)$ sont des fonctions données et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est déjà définie.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 3.3 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles perturbées d'évolution de type neutre avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] &= A(t)y(t) + h(t, y_{\rho(t,y_t)}) \\ &+ \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \qquad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{6}$$

où $A(\cdot)$, f, h, $\mathcal{I}$ et φ sont définies dans le problème (5) et $g : J \times C(H;E) \to E$ est une fonction donnée.

L'existence des solutions faibles est démontrée dans la Section 3.4 citée dans [62] pour la classe suivante des équations intégro-différentielles perturbées d'évolution avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + h(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y_0 &= \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{7}$$

où $f,\ h : J \times \mathcal{B} \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ sont des fonctions données, $\mathcal{B}$ et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ sont déjà définies.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 3.5 citée dans [62] pour la classe suivante des équations intégro-différentielles perturbées d'évolution de type neutre avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] & = & A(t)y(t) + h(t, y_{\rho(t,y_t)}) \\ & & + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{8}$$

où $A(\cdot)$, f, h, $\mathcal{I}$ et ϕ sont définies dans le problème (7) et $g : J \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction donnée.

Quant au quatrième chapitre, nous avons considéré l'alternative non linéaire d'Avramescu sur les espaces de Fréchet [10], pour obtenir la contrôlabilité des solutions faibles démontrée dans la Section 4.2 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) & = & A(t)y(t) + Cu(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y(t) & = & \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{9}$$

où $f : J \times C(H;E) \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times C(H;E) \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(H;E)$ sont des fonctions données, C est un opérateur linéaire borné de E dans E et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille définie précédemment.

Une extension de ce problème de contrôle pour le type neutre est donnée dans la Section 4.3 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] & = & A(t)y(t) + Cu(t) \\ & & + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{10}$$

où $A(\cdot)$, f, C, $\mathcal{I}$ et φ sont définies dans le problème (9) and $g : J \times C(H;E) \to E$ est une fonction donnée.

La contrôlabilité des solutions faibles est démontrée dans la Section 4.4 citée dans [63] pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) & = & A(t)y(t) + Cu(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y_0 & = & \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{11}$$

où $f : J \times \mathcal{B} \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ sont des fonctions données, C est un opérateur linéaire borné de E dans E et $\mathcal{B}$ et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ sont déjà définis.

Une extension de ce problème de contrôle pour le type neutre est donnée dans la Section 4.5 citée dans [63] pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard infini dépendant de l'état

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] & = & A(t)y(t) + Cu(t) \\ & + & \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ & & \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, & & \end{array}\right. \tag{12}$$

où $A(\cdot)$, f, C, $\mathcal{I}$ et ϕ sont définies dans le problème (11) et $g : J \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction donnée.

Le cinquième chapitre expose notre principal résultat en utilisant l'alternative non linéaire de Frigon pour les contractions multivoques dans les espaces de Fréchet [38, 39, 40]. L'existence des solutions faibles est démontrée dans la Section 5.2 pour la classe suivante des inclusions intégro-différentielles d'évolution avec retard fini dépendant de l'état

$$\left\{\begin{array}{lll} y'(t) & \in & A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)F(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ & & \\ y(t) & = & \varphi(t), \quad t \in H, \end{array}\right. \tag{13}$$

où $F : J \times C(H; E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est une application multivoque à valeurs compactes non vides, $\mathcal{P}(E)$ est la famille des sous-ensembles de E, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times C(H; E) \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(H; E)$ sont des fonctions données et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille déjà définie.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 5.3 pour la classe suivante des inclusions intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard fini dépendant de l'état

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] \in A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)F(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{array}\right. \tag{14}$$

où $A(\cdot)$, F, $\mathcal{I}$ et φ sont données dans le problème (13) et $g : J \times C(H; E) \to E$ est une fonction donnée.

Dans le sixième chapitre, on développe en utilisant l'alternative non linéaire d'Avramescu sur les espaces Fréchet [10] l'existence des solutions faibles dans la Section 6.2 citée dans [64] pour la classe suivante des inclusions intégro-différentielles d'évolution avec retard infini dépendant de l'état

$$\left\{\begin{array}{lll} y'(t) & \in & A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)F(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ & & \\ y_0 & = & \phi \in \mathcal{B}, \end{array}\right. \tag{15}$$

où $F : J \times C(H;E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est une application multivoque à valeurs compactes non vides, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ sont des fonctions données et $\mathcal{B}$ et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ sont déjà définis.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 6.3 citée dans [65] pour la classe suivante des inclusions intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] \in A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)F(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{16}$$

où $A(\cdot)$, F, $\mathcal{I}$ et ϕ sont définies dans le problème (15) et $g : J \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction donnée.

Chaque Section se termine par un exemple d'application. Enfin, est donnée à la fin de cette thèse, la liste des ouvrages utilisés au cours de ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations, définitions et théorèmes qui seront employées dans cette thèse.

1.1 Notations et Définitions

Considérons $J := [0, +\infty[$ et $H := [-r, 0]$ pour $r > 0$ deux intervalles réels. Soit E l'espace de Banach des réels muni de la norme $|\cdot|$.

Soient $C(H, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues de H vers E muni de la norme

$$\|y\| = \sup \{|y(t)| : t \in H\}.$$

et $B(E)$ l'espace de tout les opérateurs linéaires bornés de E dans E muni de la norme

$$\|N\|_{B(E)} = \sup \{|N(y)| : |y| = 1\}.$$

Une fonction mesurable $y : J \to E$ est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si $|y|$ est intégrable au sens de Lebesgue. Pour plus de détails sur les propriétés de l'intégrabilité au sens de Bochner, voir Yosida [74].

Soit $L^1(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \to E$ qui sont intégrables au sens de Bochner, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} |y(t)| dt.$$

Pour toute fonction continue y définie sur $[-r, +\infty[$ et pour tout $t \in J$, notons par : y_t l'élément de $\mathcal{C}(H; E)$ défini par :

$$y_t(\theta) = y(t + \theta) \quad \text{pour } \theta \in H.$$

Ici $y_t(\cdot)$ représente l'historique de l'état à partir du temps $t - r$ jusqu'au temps présent t.

Définition 1.1.1. *La fonction $f : J \times E \to E$ est dite L^1-Carathéodory si elle satisfait les conditions suivantes :*

(i) Pour tout $t \in J$, la fonction $f(t,\cdot) : E \to E$ est continue.
(ii) Pour tout $y \in E$, la fonction $f(\cdot, y) : J \to E$ est mesurable.
(iii) Pour toute constante positive $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $h_k \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telles que pour tout $|y| \leq k$ et pour $t \in J$ presque partout, on a :

$$|f(t,y)| \leq h_k(t),$$

1.2 Propriétés dans les Espaces de Fréchet

Soit X un espace de Fréchet muni de la famille de semi-normes $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que la famille de semi-normes $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq \cdots \forall\, x \in X \tag{1.1}$$

Soit $Y \subset X$, on dit que Y est borné si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\overline{M}_n > 0$ tel que :

$$\|y\|_n \leq \overline{M}_n \quad \forall\, y \in Y.$$

Associons à X une suite d'espaces de Banach $\{(X^n, \|.\|_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons sur X la relation d'équivalence $\sim_n$ définie par :

$$x \sim_n y \Leftrightarrow \|x-y\|_n = 0 \qquad \forall x, y \in X.$$

Notons par : $X^n = (X/\sim_n, \|.\|_n)$ l'espace quotient et posons $(X^n, \|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le complété de X par rapport à $\|.\|_n$. Cela étant, à tout sous-ensemble $Y \subset X$, associons une suite $\{Y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles $Y^n \subset X^n$ de la façon suivante : Pour $x \in X$, désignons par $[x]_n$ la classe d'équivalence de x dans X^n et posons $Y^n = \{[x]_n : x \in Y\}$.

Notons $\overline{Y}^n$, $int_n(Y^n)$ et $\partial_n Y^n$, respectivement, la fermeture, l'intérieur et la frontière de Y^n par rapport à $\|.\|_n$ dans X^n.

Définition 1.2.1. *[41] La fonction $f : X \to X$ est dite une contraction si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k_n \in [0,1[$ tel que :*

$$\|f(x) - f(y)\|_n \leq k_n \|x-y\|_n \quad \forall\, x, y \in X. \tag{1.2}$$

1.3 Système Générateur d'Évolution

Dans ce qui suit, nous supposons que la famille $\{A(t)\}_{t\in J}$ d'opérateurs linéaires fermés non bornés à domaines denses dans l'espace de Banach E vérifie les hypothèses suivantes (voir [3], p. 158) :

(P1) Le domaine $D(A(t))$ est indépendant de t et est dense dans E i,e. $\overline{D(A(t))} = E$.

(P2) Pour $t \geq 0$, la résolvante $R(\lambda, A(t)) = (\lambda I - A(t))^{-1}$ existe pour tout λ tel que : $Re(\lambda) \leq 0$ et il existe une constante M indépendante de λ et t telle que :

$$\|R(t, A(t)\| \leq M(1+|\lambda|)^{-1} \qquad \textit{pour } Re(\lambda) \leq 0.$$

(P3) Il existe $L > 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ tels que :

$$\|(A(t) - A(\theta))A^{-1}(\tau)\| \leq L|t - \tau|^{\alpha} \quad t, \theta, \tau \in J.$$

(P4) La résolvante $R(\lambda, A(t))$ est compacte pour $t \in J$.

Lemme 1.3.1. *([3], p. 159) Sous les hypothèses (P1)-(P3), le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) - A(t)y(t) = 0, & t \in J, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

admet un unique système d'évolution $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ *où* $\Delta := \{(t,s) \in J \times J : s \leq t\}$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. $U(t,t) = I$ *avec* I *c'est l'opérateur d'identité dans* E.
2. $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$ *pour* $\tau \leq s \leq t$.
3. $U(t,s) \in B(E)$ *l'espace des opérateurs linéaires bornés dans* E, *où pour tout* $(t,s) \in \Delta$ *et pour tout* $y \in E$, *l'application* $(t,s) \longmapsto U(t,s)y$ *est continue.*
4. $U(t,s)$ *est un opérateur compact pour* $(t,s) \in \Delta$.

Pour plus de détails sur les systèmes d'évolution et leurs propriétés, voir les livres d'Ahmed [3, 4], Engel et Nagel [36], Freidman [37] et Pazy [69].

1.4 Définition d'une Solution Faible

Définition 1.4.1. *La fonction* $y(\cdot) : H \cup J \to E$ *est dite solution faible du problème d'évolution à retard suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t, y_t), & p.p. \;\; t \in J \\ \\ y(t) = \varphi(t), & t \in H, \end{cases} \tag{1.4}$$

si $y(t) = \Phi(t)$ *pour tout* $t \in H$ *et* y *satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = U(t,0)\ \varphi(0) + \int_0^t U(t,s)\ f(s, y_s)\ ds, \quad \textit{pour tout } t \in J. \tag{1.5}$$

1.5 Contrôlabilité des Solutions Faibles

La contrôlabilité des équations différentielles est à l'origine de l'étude des inclusions différentielles. Cette contrôlabilité peut être considérée ici comme exemple sur un intervalle semi-infini pour un retard fini.

Considérons le problème d'évolution à retard suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + Cu(t) + f(t, y_t), & \text{p. p. } \; t \in J \\ \\ y(t) = \varphi(t), \in H, \end{cases} \tag{1.6}$$

où $f : J \times C(H; E) \to E$ et $\varphi \in C(H; E)$ sont deux fonctions données ; $\{A(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés (non nécessairement bornés) de E en E qui génère un système d'évolution d'opérateurs $\{U(t,s)\}_{(t,s) \in J \times J}$ pour $s \leq t$; $u(\cdot)$ est un contrôle donné dans $L^2(J; E)$ l'espace de Banach des fonctions de contrôle admissible avec E un espace de Banach réel séparable muni de la norme $|\cdot|$ et C est un opérateur linéaire borné de E dans E.

Définition 1.5.1. *Le problème d'évolution* (1.6) *est dit contrôlable si pour toute fonction initiale $\varphi \in C(H, E)$ et pour $\widehat{y} \in E$, il y a pour un certain $n > 0$, un certain contrôle $u \in L^2([0,n]; E)$ tels que la solution faible $y(\cdot)$ de ce problème satisfait à la condition finale $y(n) = \widehat{y}$.*

1.6 Espaces de Phase $\mathcal{B}$

Pour toute fonction continue y et pour tout $t \in J$, notons par : y_t l'élément de $\mathcal{B}$ défini par :

$$y_t(\theta) = y(t + \theta) \quad \text{pour } \theta \leq 0.$$

Ici $y_t(\cdot)$ représente l'historique de l'état à partir du temps $t \leq 0$ jusqu'au temps présent t.

Supposons que les histoires y_t prolongent un certain espace abstrait dit *espace de phase* $\mathcal{B}$, qui sera spécifié par la suite.

Dans cette thèse, on utilisera les définitions axiomatiques de l'espace de phase $\mathcal{B}$ introduites par Hale et Kato dans [47] et on suivra la terminologie utilisée par Hino-Murakami-Naito dans [57]. Ainsi, l'espace $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ sera un espace linéaire semi-normé des fonctions définies sur $]-\infty, 0]$ dans E qui vérifie les axiomes suivants :

(A_1) Si $y :]-\infty, b[\to E$, $b > 0$ est une fonction continue sur $[0,b]$ et $y_0 \in \mathcal{B}$, alors pour tout $t \in [0, b[$ les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $y_t \in \mathcal{B}$.
- (ii) Il existe $H > 0$ tel que : $|y(t)| \leq H \|y_t\|_{\mathcal{B}}$.
- (iii) Il existe deux fonctions $K(\cdot)$, $M(\cdot) : J \to \mathbb{R}^+$ indépendantes de $y(t)$ avec K continue et M localement bornées telles que :

$$\|y_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t) \sup \{|y(s)| : 0 \leq s \leq t\} + M(t) \|y_0\|_{\mathcal{B}}. \tag{1.7}$$

(A_2) Pour une fonction y satisfaisante (A_1), $y_t \in \mathcal{B}$ est une fonction continue sur $[0,b]$.

(A_3) L'espace $\mathcal{B}$ est complet.

Posons

$$K_b = \sup \{K(t) : t \in [0,b]\}$$

et

$$M_b = \sup\{M(t) : t \in [0,b]\}.$$

Remarque 1.6.1. *1. (ii) est équivalente à $|\phi(0)| \leq H \|\phi\|_{\mathcal{B}}$ pour tout $\phi \in \mathcal{B}$.*

2. Puisque $\|.\|_{\mathcal{B}}$ est une semi-norme, donc deux fonctions $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ vérifiant $\|\phi - \psi\| = 0$ sans avoir nécessairement $\phi(\theta) = \psi(\theta)$ $\forall \theta \leq 0$.

3. De la première remarque, on a pour toutes fonctions $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ telles que : $\|\phi - \psi\| = 0$, ceci implique nécessairement que : $\phi(0) = \psi(0)$.

Voici quelques exemples d'espaces de phase donnés dans le livre de Hino *et al.* [57].

Exemple 1.6.1. *Soient les espaces* BC, BUC, C^∞ *et* C^0 *tels que :*
BC *est l'espace des fonctions continues bornées définies sur* $\mathbb{R}^-$ *dans* E *;*
BUC *est l'espace des fonctions uniformément continues bornées de* $\mathbb{R}^-$ *dans* E *;*
$C^\infty = \{\phi \in BC \ \lim_{\theta\to-\infty} \phi(\theta)$ *existe dans* $E\}$ *;*
$C^0 = \{\phi \in BC \ \lim_{\theta\to-\infty} \phi(\theta) = 0\}$, *muni de la norme uniforme*

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| \ : \ \theta \leq 0\}.$$

Donc les espaces BUC, C^∞ *et* C^0 *vérifient les conditions* $(A_1)-(A_3)$. *Cependant,* BC *satisfait* (A_2) *et* (A_3) *mais ne satisfait pas* (A_1).

Remarque 1.6.2. $C^0 \subset C^\infty$.

Exemple 1.6.2. *Considérons les espaces* C_g, UC_g, C_g^∞ *et* C_g^0 *définis pour une fonction continue positive* g *sur* $\mathbb{R}^-$ *comme suit :*

$$C_g := \left\{\phi \in C(\mathbb{R}^-, E) : \frac{\phi(\theta)}{g(\theta)} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^-\right\};$$

$$C_g^0 := \left\{\phi \in C_g : \lim_{\theta\to-\infty} \frac{\phi(\theta)}{g(\theta)} = 0\right\}, \text{ muni de la norme uniforme}$$

$$\|\phi\| = \sup\left\{\frac{|\phi(\theta)|}{g(\theta)} : \ \theta \leq 0\right\}.$$

Alors les espaces C_g *et* C_g^0 *satisfont la condition* $(A3)$.

Considérons la condition suivante sur g *:*

$$(g1) \qquad \forall\ a > 0; \sup_{0\leq t\leq a} \sup\left\{\frac{g(t+\theta)}{g(\theta)} : -\infty < \theta \leq -t\right\} < +\infty.$$

Alors, les espaces C_g *et* C_g^0 *vérifient* $(A1)$ *et* $(A2)$ *s'obtiennent si* $(g1)$ *est satisfaite.*

Remarque 1.6.3. *Pour* $\mathbf{g} \equiv \mathbf{1}$, *on a :* $C_{\mathbf{1}} = BC$ *et* $C_{\mathbf{1}}^0 = C^0$.

Exemple 1.6.3. *Pour toute constante réelle* γ, *définissons l'espace fonctionnel* C_γ *par :*

$$C_\gamma = \left\{\phi \in C(\mathbb{R}^-, E) : \lim_{\theta\to-\infty} \ e^{\gamma\theta}\phi(\theta) \quad \text{existe dans } E\right\} \text{ muni de la norme}$$

$$\|\phi\| = \sup\{e^{\gamma\theta}|\phi(\theta)| : \theta \leq 0\},$$

Alors, les axiomes $(A1)-(A3)$ *sont satisfaits dans* C_γ.

Pour les espaces de phases, redonnons la définition d'une fonction L^1-Carathéodory comme suit :

Définition 1.6.1. *La fonction* $f : J \times \mathcal{B} \to E$ *est dite* L^1-*Carathéodory si elle satisfait les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout* $t \in J$, *la fonction* $f(t,\cdot) : \mathcal{B} \to E$ *est continue.*
(ii) *Pour tout* $y \in \mathcal{B}$, *la fonction* $f(\cdot, y) : J \to E$ *est mesurable.*
(iii) *Pour toute constante positive* $k \in \mathbb{N}$, *il existe une fonction* $h_k \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ *telles que pour tout* $\|y\|_{\mathcal{B}} \leq k$ *et pour* $t \in J$ *presque partout, on a :*

$$|f(t, y)| \leq h_k(t).$$

1.7 Propriétés du Retard Dépendant de la Solution

1. Lorsque le retard est fini : Supposons que : $\rho : J \times C(H;E) \to [-r, +\infty[$ est une fonction continue et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\varphi) : (s,\varphi) \in J \times C(H;E),\ \rho(s,\varphi) \leq 0\}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H_φ) La fonction $t \to \varphi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ dans $C(H;E)$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0, +\infty[$ telle que :

$$\|\varphi_t\| \leq \mathcal{L}^\varphi(t)\|\varphi\| \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-). \tag{1.8}$$

Lemme 1.7.1. *([54], Lemme 2.4) Si $y : [-r, b] \to E$ est une fonction telle que : $y_0 = \varphi$ pour $b > 0$, alors :*

$$\|y_s\| \leq \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\| + \sup\{|y(\theta)|; \theta \in [0, max\{0,s\}]\},\ s \in \mathcal{R}(\rho^-) \cup J, \tag{1.9}$$

où $\mathcal{L}^\varphi = \sup\limits_{t \in \mathcal{R}(\rho^-)} \mathcal{L}^\varphi(t)$.

Proposition 1.7.1. *D'après (H_φ) et le Lemme 1.7.1, on aura pour tout $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$:*

$$\|y_{\rho(t,y_t)}\| \leq |y(t)| + \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|. \tag{1.10}$$

2. Lorsque le retard est infini : Supposons que : $\rho : J \times \mathcal{B} \to [-r, +\infty[$ est une fonction continue et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\phi) : (s,\phi) \in J \times \mathcal{B},\ \rho(s,\phi) \leq 0\}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H_ϕ) La fonction $t \to \phi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ dans $\mathcal{B}$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\phi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0, +\infty[$ telle que :

$$\|\phi_t\| \leq \mathcal{L}^\phi(t)\|\varphi\| \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-). \tag{1.11}$$

Lemme 1.7.2. *([54], Lemme 2.4) Si $y :]-\infty, b] \to E$ est une fonction telle que : $y_0 = \phi$ pour $b > 0$, alors :*

$$\|y_s\| \leq \left(\mathcal{L}^\phi\|\phi\| + M_b\right) + K_b \sup\{|y(\theta)|; \theta \in [0, max\{0,s\}]\},\ s \in \mathcal{R}(\rho^-) \cup J, \tag{1.12}$$

où $\mathcal{L}^\phi = \sup\limits_{t \in \mathcal{R}(\rho^-)} \mathcal{L}^\phi(t)$.

Proposition 1.7.2. *D'après (H_ϕ), le Lemme 1.7.2 et la propriété (A_1) dans la définition de l'espace de phase (voir la Section 1.4), on aura pour tout $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$:*

$$\|y_{\rho(t,y_t)}\| \leq K_n|y(t)| + (M_n + \mathcal{L}^\varphi)\,\|y_0\|_{\mathcal{B}}. \tag{1.13}$$

Remarque 1.7.1. *Les conditions (H_φ) et (H_ϕ) sont vérifiées fréquemment par les fonctions continues et bornées. Pour plus de détails, voir Proposition 7.1.1 dans [57].*

1.8 Propriétés des Fonctions Multivoques

Soit (X, d) un espace métrique. Utilisons les notations suivantes :

$$\mathcal{P}_f(X) = \{Y \subset \mathcal{P}(X) \ : \ Y \text{ fermé}\},$$
$$\mathcal{P}_b(X) = \{Y \subset \mathcal{P}(X) \ : \ Y \text{ borné}\},$$
$$\mathcal{P}_{cv}(X) = \{Y \subset \mathcal{P}(X) \ : \ Y \text{ convexe}\},$$
$$\mathcal{P}_{cp}(X) = \{Y \subset \mathcal{P}(X) \ : \ Y \text{ compact}\}.$$

Définissons $H_d : P(X) \times P(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ par :

$$H_d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\left\{\sup_{a\in\mathcal{A}} d(a, \mathcal{B}) \quad , \sup_{b\in\mathcal{B}} d(\mathcal{A}, b)\right\}, \tag{1.14}$$

où : $d(\mathcal{A}, b) = \inf_{a\in\mathcal{A}} d(a, b)$, $d(a, \mathcal{B}) = \inf_{b\in\mathcal{B}} d(a, b)$.

Alors $(\mathcal{P}_f(X), H_d)$ est un espace métrique généralisé (complet) (voir [59]).

Lemme 1.8.1. *Si A et B sont compacts, alors il existe*
ou bien un $a \in A$ avec $d(a, B) = H_d(A, B)$
ou bien un $b \in B$ avec $d(A, b) = H_d(A, B)$.

Proposition 1.8.1. *L'application multivoque $G : J \to \mathcal{P}_f(X)$ est dite mesurable si pour tout $x \in X$, la fonction $Y : J \to X$ définie par :*

$$Y(t) = d(x, G(t)) = \inf\{|x - z| : z \in G(t)\},$$

est mesurable avec d c'est la métrique donnée par la norme de l'espace de Banach X.

Définition 1.8.1. *L'application multivoque $F : J \times \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$ est dite L^1_{loc}-Carathéodory si elle satisfait*
(i) $y \longmapsto F(t, y)$ est continue (par rapport à la métrique (H_d) pour tout $t \in J$).
(ii) $t \longmapsto F(t, y)$ est mesurable pour tout $y \in \mathcal{B}$.
(iii) Pour toute constante positive k, il existe une fonction $h_k \in L^1_{loc}(J; \mathbb{R}^+)$ telles que pour tout $|y| \leq k$ et pour $t \in J$ presque partout, on a :

$$\|F(t, y)\| \leq h_k(t).$$

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Une application multivoque $G : X \to \mathcal{P}(X)$ est à *valeurs convexes (fermées)* si $G(x)$ est convexe (fermée) pour tout $x \in X$. On dit que : G est *bornée* si $G(B)$ est borné dans X pour chaque ensemble borné B de X, i.e.,

$$\sup_{x\in B}\{\sup\{\ \|y\| \ : \ y \in G(x)\}\} < \infty.$$

Finalement, on dit que : G a un *point fixe* si il existe $x \in X$ tel que : $x \in G(x)$.

Pour $y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; E)$, considérons l'ensemble $S_{F,y}$ connu par *l'ensemble des sélections* de F défini par :

$$S_{F,y} = \{v \in L^1(J; E) : v(t) \in F(t, y_t)\ ,\ p.p.\ t \in J\}. \tag{1.15}$$

Pour plus de détails sur les applications multivoques, se référer aux livres de Deimling [35], Górniewicz [43], Hu et Papageorgiou [58] et Tolstonogov [71].

Définition 1.8.2. *Une application multivoque $F : X \to \mathcal{P}(X)$ est dite une* contraction admissible *de constante $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $k_n \in]0,1[$ tel que :*

i) $H_d(F(x), F(y)) \leq k_n \|x-y\|_n$ pour tout $x, y \in X$.

ii) Pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon \in]0,\infty[^n$, il existe $y \in F(x)$ tel que :

$$\|x-y\|_n \leq \|x-F(x)\|_n + \epsilon_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.9 Théorèmes du Point Fixe

Nos résultats vont être basés sur la théorie du point fixe donnée par les alternatives non linéaires suivantes :

Théorème 1.9.1. *(Alternative non linéaire de Frigon-Granas [41]).*
Soient X un espace de Fréchet, Y un fermé de X et $N : Y \to X$ une contraction telle que : $N(Y)$ soit bornée, alors l'une des deux propositions suivantes est satisfaite :

$(FG1)$ *N admet un point fixe unique.*

$(FG2)$ *Il existe $\lambda \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \partial_n Y^n$ tels que : $\|x - \lambda N(x)\|_n = 0$.*

Cette alternative non linéaire est de type Leray-Schauder [45] et est due à Frigon-Granas [41].

Théorème 1.9.2. *(Alternative non linéaire d' Avramescu [10]).*
Soit X un espace de Fréchet et soient $A, B : X \to X$ deux opérateurs tels que :

(1) *A est un opérateur compact.*

(2) *B est une contraction.*
Alors l'une des deux propositions suivantes est vérifiée :

$(Av1)$ *L'opérateur $A+B$ admet un point fixe.*

$(Av2)$ *L'ensemble $\left\{x \in X, x = \lambda A(x) + \lambda B\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\}$ est non borné pour $\lambda \in]0,1[$.*

Cette alternative non linéaire est de type Burton-Kirk [30, 31] et est due à Avramescu [10].

Pour les problèmes multivoques, notre résultat est basé sur ce théorème qui est l'alternative non linéaire de Frigon pour les contractions multivoques dans les espaces de Fréchet due à Frigon et Granas dans le cas univoque.

Théorème 1.9.3. *(Alternative non linéaire de Frigon, [38, 39, 40]).*
Soient X un espace de Fréchet, U un voisinage de l'origine ouvert dans X et l'opérateur $N : \overline{U} \to \mathcal{P}(X)$ une contraction multivoque admissible. Supposons que : N est borné, alors l'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :

$(Fr1)$ *N admet un point fixe.*

$(Fr2)$ *Il existe $\lambda \in]0,1[$ et $x \in \partial U$ tel que : $x \in \lambda N(x)$.*

Chapitre 2

Équations Intégro-différentielles d'Évolution à Retard Dépendant de l'État

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions faibles sur la demi-droite réelle positive de quatre classes d'équations intégro-différentielles d'évolution partielle et celle de type neutre à retard fini et infini dépendant de l'état.

La méthode utilisée est de transformer la recherche de l'existence des uniques solutions faibles à la recherche de l'existence des uniques points fixes d'opérateurs appropriés associés à ces problèmes en appliquant l'alternatives non linéaire de type Leary Schauder donnée par Frigon et Granas pour les contractions dans les espaces de Fréchet [41], combinée avec la théorie des semi-groupes pour entirer l'existence des uniques points fixes de ces opérateurs qui sont les solutions faibles de nos problèmes.

L'existence la solution faible unique est démontrée dans la Section 2.2 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J := [0, +\infty[\\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H := [-r, 0], \end{cases} \tag{2.1}$$

où $r > 0$, $f : J \times C(H; E) \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times C(H; E) \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(H; E)$ sont des fonctions données et $\{A(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés (non nécessairement bornés) de E en E qui génère un système d'évolution d'opérateurs $\{U(t, s)\}_{(t,s) \in J \times J}$ pour $s \leq t$.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 2.3 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] &= A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $A(\cdot)$, f, $\mathcal{I}$ et φ sont définies dans le problème (2.1) et $g : J \times C(H; E) \to E$ est une fonction donnée.

L'existence de la solution faible unique est démontrée dans la Section 2.4 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y_0 &= \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\mathcal{B}$ est un espace de phase abstrait à spécifier ultérieurement, $f : J \times \mathcal{B} \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ sont des fonctions données et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est déjà définie.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 2.5 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] &= A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $A(\cdot)$, f, $\mathcal{I}$ et ϕ sont définies dans le problème (2.3) et $g : J \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction donnée.

Enfin, quatre exemples seront donnés à la fin de chaque Section pour illustrer les résultats obtenus.

2.2 Problème à Retard Fini

2.2.1 Solution faible et hypothèses

Rappelons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (2.1) :

Définition 2.2.1. *La fonction $y(\cdot) : [-r, +\infty[\to E$ est dite solution faible du problème (2.1) si $y(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in H$ et y vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = U(t,0)\ \varphi(0) + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})\ d\tau ds \quad \textit{pour tout} \quad t \in J. \tag{2.5}$$

Supposons que : $\rho : J \times C(H;E) \to [-r, +\infty[$ est une fonction continue et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\varphi) : (s,\varphi) \in J \times C(H;E),\ \rho(s,\varphi) \leq 0\}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H_φ) La fonction $t \to \varphi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ dans $C(H;E)$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0, +\infty[$ telle que :

$$\|\varphi_t\| \leq \mathcal{L}^\varphi(t)\|\varphi\| \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-). \tag{2.6}$$

Pour la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

$(H1)$ Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ telle que :

$$\|U(t,s)\|_{B(E)} \leq \widehat{M} \quad \text{pour tout} \quad (t,s) \in \Delta.$$

$(H2)$ Il existe une fonction $\psi : J \to]0, +\infty[$ continue et croissante et il existe une fonction $p \in L^1_{loc}(J; \mathbb{R}_+)$ telles que :

$$|f(t,u)| \leq p(t)\ \psi(\|u\|) \qquad \text{p. p.} \ \ t \in J,\ \forall u \in C(H;E).$$

$(H3)$ Pour tout $R > 0$, il existe une fonction $l_R \in L^1_{loc}(J; \mathbb{R}_+)$ tel que :

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq l_R(t)\ \|u - v\|$$

$\forall u, v \in C(H;E)$ avec $\|u\| \leq R$ et $\|v\| \leq R$.

$(H4)$ Pour tout $t \in J$, I(t,s) est mesurable sur $[0,t]$ et

$$\mathcal{I}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |\mathcal{I}(t,s)|$$

est bornée sur $[0,n]$; soit

$$S_n = ess \sup_{t \in [0,n]} \mathcal{I}(t).$$

Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans $C([-r, +\infty[; E)$ la famille de semi-norme par :

$$\|y\|_n = \sup \{\ e^{-\tau\ L_n^*(t)}\ |y(t)| : t \in [0,n]\ \}$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)\ ds$, $\bar{l}_n(t) = \widehat{M} n S_n l_n(t)$ et l_n est la fonction dans $(H3)$.

Alors $C([-r, +\infty[; E)$ est un espace de Fréchet muni de la famille des semi-normes $\|\cdot\|_{n \in \mathbb{N}}$. Dans ce qui suit, nous allons choisir $\tau > 1$.

2.2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 2.2.1. *Supposons que les hypothèses (H_φ), $(H1) - (H4)$ sont satisfaites. Si en plus*

$$\int_{c_1}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} > \widehat{M} n S_n \int_0^n p(s)\ ds, \quad \textit{pour tout } n > 0 \tag{2.7}$$

avec $c_1 = \widehat{M}\|\varphi\|$. Alors le problème (2.1) admet une solution faible unique.

Preuve. Transformons le problème (2.1) en un problème de point fixe. Considérons pour cela l'opérateur $N_1 : C([-r,+\infty[;E) \to C([-r,+\infty[;E)$ défini par :

$$N_1(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in H\,; \\ U(t,0)\ \varphi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})\ d\tau ds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

Les points fixes de l'opérateur N_1 sont les solutions faibles du problème (2.1).

Soit y une solution faible possible du problème (2.1). Etant donné $n \in \mathbb{N}$ et $t \leq n$, alors d'après $(H1)$, $(H2)$ et $(H4)$, on a :

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |U(t,0)|\ |\varphi(0)| + \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \left| \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau) f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})\ d\tau \right| ds, \\ &\leq \widehat{M}|\varphi(0)| + \widehat{M} \int_0^t \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)|\ |f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})|\ d\tau\ ds, \\ &\leq \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M} \int_0^t \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)|\ p(\tau)\ \psi\left(\|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\|\right)\ d\tau\ ds, \\ &\leq \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^t p(s)\ \psi\left(\|y_{\rho(s,y_s)}\|\right)\ ds. \end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) := \sup\ \{\ |y(s)|\ :\ 0 \leq s \leq t\ \}, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Soit $t^\star \in [-r,t]$ tel que :

$$\mu(t^\star) = |y(t^\star)|.$$

Si $t^\star \in [0,n]$, d'après l'inégalité précédente, on aura :

$$\mu(t) \leq \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^t p(s)\ \psi(\mu(s))\ ds \quad t \in [0,n].$$

Si $t^\star \in [-r,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Prenons le second membre de cette inégalité comme étant $v(t)$. Ainsi nous aurons :

$$\mu(t) \leq v(t) \ \ \textit{pour tout}\ t \in [0,n].$$

De la définition de v, nous obtenons :

$$c_1 := v(0) = \widehat{M}\|\varphi\| \quad \text{et} \quad v'(t) = \widehat{M}\ n\ S_n\ p(t)\ \psi(\mu(t)) \quad \text{p. p. } t \in [0,n].$$

Utilisons la croissance de ψ pour avoir :

$$v'(t) \leq \widehat{M}\ n\ S_n\ p(t)\ \psi(v(t)) \ \ \text{p. p.} \ \ t \in [0,n].$$

Utilisons la condition (2.7) pour avoir :

$$\begin{aligned} \int_{c_1}^{v(t)} \frac{ds}{\psi(s)} &\leq \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^t p(s)\ ds \\ &\leq \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^n p(s)\ ds \\ &< \int_{c_1}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, n]$.

Pour chaque : $t \in [0, n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ ainsi $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|y\|_n \leq \mu(t)$, nous aurons donc : $\|y\|_n \leq \max\{\|\varphi\|, \Lambda_n\} := \Delta_n$.

Considérons l'ensemble

$$Y = \{\ y \in C([-r, +\infty[; E)\ \ :\ \ \sup\{|y(t)| : 0 \leq t \leq n\} \leq \Delta_n + 1, \quad \forall\ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Il est clair que : Y est un sous-ensemble fermé de $C([-r, +\infty[; E)$.

Montrons maintenant que l'opérateur $N_1 : Y \to C([-r, +\infty[; E)$ est une contraction. Considérons pour cela $y, \overline{y} \in C([-r, +\infty[; E)$. D'après $(H1)$ et $(H3)$ et $(H4)$, nous aurons pour tout $t \in [0, n]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|N_1(y)(t) - N_1(\overline{y})(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)||f(r, y_{\rho(\tau,y_\tau)}) - f(\tau, \overline{y}_{\rho(\tau,y_\tau)})|\ d\tau ds, \\
&\leq \int_0^t \widehat{M}\ ess \sup_{t\in[0,n]} \mathcal{I}(t) \int_0^s |f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)}) - f(\tau, \overline{y}_{\rho(\tau,y_\tau)})|\ d\tau ds, \\
&\leq \int_0^t \widehat{M}\ n\ S_n\ l_n(s)\ \|y_s - \overline{y}_s\|\ ds, \\
&\leq \int_0^t [\bar{l}_n(s)\ e^{\tau\ L_n^*(s)}]\ [e^{-\tau\ L_n^*(s)}\ \|y_s - \overline{y}_s\|]\ ds, \\
&\leq \int_0^t \left[\frac{e^{\tau\ L_n^*(s)}}{\tau}\right]'\ ds,\ \|y - \overline{y}\|_n \\
&\leq \frac{1}{\tau}\ e^{\tau\ L_n^*(t)}\ \|y - \overline{y}\|_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|N_1(y) - N_1(\overline{y})\|_n \leq \frac{1}{\tau}\ \|y - \overline{y}\|_n.$$

Donc, pour $\tau > 1$, l'opérateur N_1 est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$. Du choix de Y, il n'existe aucun $y \in \partial Y^n$ tel que : $y = \lambda\ N_1(y),\ \ \lambda \in]0, 1[$. Alors l'alternative $(FG2)$ dans le Théorème 1.9.1 n'est pas satisfaite. Donc l'alternative non linéaire de Frigon-Granas montre que : $(FG1)$ est satisfaite. Alors, nous en déduisons que l'opérateur N_1 admet un seul point fixe $y^\star$ dans $\overline{Y}$ qui est la solution faible unique du problème (2.1).

2.2.3 Exemple

Pour illustrer le résultat précédent, considérons dans cette section l'exemple suivant :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(t,x)\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \displaystyle\int_{-r}^t \eta(t,s)F(s, u(s-r,x))ds,\ \ t \geq 0,\ \ x \in [0,\pi], \\
u(t,0) = \ u(t,\pi)\ = 0, \qquad\qquad t \geq 0, \\
u(t,x) = \ \Phi(t,x), \qquad\qquad x \in [-r,0],\ x \in [0,\pi].
\end{cases} \tag{2.8}$$

où $r > 0$; $a(t,x)$ est une fonction continue et uniformement Hölderienne par rapport à t ; $\eta : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi : [-r,0] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Pour étudier ce système, nous considérons l'espace $E = L^2([0,\pi],\mathbb{R})$ et l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ donné par :

$$A(t)w = a(t,x)w''$$

avec

$$D(A) := \{\ w \in E\ : w, w'\ \textit{sont absolument continues}, w'' \in E,\ w(0) = w(\pi) = 0\ \}$$

Il est bien connu que A génère un système d'évolution $U(t,s)$ satisfaisant l'hypothèse $(H1)$.

Pour $x \in [0,\pi]$, on aura :

$$y(t)(x) = u(t,x) \quad t \geq 0,$$

$$\mathcal{I}(t,s) = \eta(t,s) \quad t,s \geq 0,$$

$$f(t,y_t)(x) = F(t,u(t-r,x)) \quad t \geq 0,$$

et

$$\varphi(t)(x) = \Phi(t,x) \quad t \in [-r,0].$$

Ainsi, avec les définitions ci-dessus de $\mathcal{I}$, f et $A(.)$, le système (2.8) peut être représenté par la forme abstraite du problème intégro-différentiel d'évolution (2.1). En outre, plus de conditions appropriées sur F et η assurent l'existence de l'unique solution faible pour (2.8) par le Théorème 2.2.1.

2.3 Problème de Type Neutre à Retard Fini

2.3.1 Solution faible et hypothèses

Donnons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (2.2).

Définition 2.3.1. *La fonction $y : [-r,+\infty[\to E$ est dite solution faible du problème* (2.2) *si $y(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in H$ et y vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})\, ds \\ &+ \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau) f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})\, d\tau ds \quad \textit{pour tout}\ \ t \in J. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Considérons maintenant pour le cas neutre les hypothèses précédentes (H_φ), $(H1) - (H4)$ et ajoutons les hypothèses suivantes :

$(G1)$ Il existe une constante $\overline{M}_0 > 0$ telle que :

$$\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \leq \overline{M}_0 \ \ \forall t \in J.$$

$(G2)$ Il existe une constante $0 < L < \overline{M}_0^{-1}$ telle que :

$$|A(t)g(t,\varphi)| \leq L(\|\varphi\| + 1) \quad \forall t \in J \ et \ \forall \varphi \in C(H;E).$$

$(G3)$ Il existe une constante $L_* > 0$ telle que :

$$|A(s)g(s,\varphi) - A(\overline{s})g(\overline{s},\overline{\varphi})| \leq L_*(|s-\overline{s}| + \|\varphi - \overline{\varphi}\|) \quad \forall s, \overline{s} \in J \ et \ \forall \varphi, \overline{\varphi} \in C(H;E).$$

Considérons maintenant que : $\bar{l}_n(t) = \widehat{M}(L_* + nS_n l_n(t))$ et choisissons $\tau > [1 - \overline{M}_0 L_*]^{-1}$.

2.3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1. *Supposons que les hypothèses (H_φ), $(H1) - (H4)$ et $(G1) - (G3)$ sont satisfaites. Si en plus*

$$\int_{c_{2,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)} > \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L} \int_0^n \max(L; nS_n p(s)) \, ds, \quad pour \ tout \ n > 0 \tag{2.10}$$

avec

$$c_{2,n} = \frac{\widehat{M}\|\varphi\|(1 + \overline{M}_0 L) + \overline{M}_0 L(\widehat{M} + 1) + \widehat{M} L n}{1 - \overline{M}_0 L}.$$

Alors le problème (2.2) admet une solution faible unique sur $[-r, +\infty[$.

Preuve. Transformons le problème (2.2) en un problème de point fixe.Considérons pour cela l'opérateur $N_2 : C([-r,+\infty[;E) \to C([-r,+\infty[;E)$ défini par :

$$N_2(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in [-r, 0]\,; \\ U(t,0)[\,\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)}) \, ds & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau) \ f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)}) \, d\tau ds, & \text{si } t \in [0, +\infty[\,. \end{cases}$$

Les points fixes de l'opérateur N_2 sont les solutions faibles du problème (2.2).

Soit y une solution faible possible du problème (2.2). Etant donné $n \in \mathbb{N}$ et $t \leq n$, alors d'après $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$, $(G1)$ et $(G2)$, on a :

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |U(t,0)|\ |\varphi(0)-g(0,\varphi)| + |g(t,y_{\rho(t,y_t)})| + \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)}|A(s)g(s,y_{\rho(s,y_s)})|ds \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \left|\int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)f(\tau,y_{\rho(\tau,y_\tau)})\ d\tau ds\right|, \\
&\leq \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\|A^{-1}(0)\|\|A(0)g(0,\varphi)\| + \|A^{-1}(t)\|\|A(t)g(t,y_{\rho(t,y_t)})\| \\
&+ \widehat{M}\int_0^t \|A(s)g(s,y_{\rho(s,y_s)})\|ds + \widehat{M}\int_0^t \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)|\ |f(\tau,y_{\rho(\tau,y_\tau)})|\ d\tau\ ds, \\
&\leq \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\overline{M}_0L(\|\varphi\|+1) + \overline{M}_0L(\|y_{\rho(t,y_t)}\|+1) \\
&+ \widehat{M}L\int_0^t (\|y_{\rho(s,y_s)}\|+1)ds + \widehat{M}\int_0^t \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)|\ p(\tau)\psi(\|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\|)\ d\tau\ ds, \\
&\leq \widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln \\
&+ \overline{M}_0L\|y_{\rho(t,y_t)}\| + \widehat{M}L\int_0^t \|y_{\rho(s,y_s)}\|ds + \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^t p(s)\ \psi\left(\|y_{\rho(s,y_s)}\|\right)\ ds.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) := \sup\ \{\ |y(s)|\ :\ 0 \leq s \leq t\ \}, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Soit $t^\star \in [-r,t]$ tel que :

$$\mu(t^\star) = |y(t^\star)|.$$

Si $t^\star \in [0,n]$, d'après l'inégalité précédente, on aura :

$$\begin{aligned}
\mu(t) &\leq \widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln \\
&+ \overline{M}_0L\mu(t) + \widehat{M}L\int_0^t \mu(s)ds + \widehat{M}\ n\ S_n\int_0^t p(s)\ \psi(\mu(s))\ ds.
\end{aligned}$$

Si $t^\star \in [-r,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Alors

$$\begin{aligned}
(1-\overline{M}_0L)\mu(t) &\leq \widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln \\
&+ \widehat{M}L\int_0^t \mu(s)ds + \widehat{M}\ n\ S_n\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mu(t) &\leq \frac{1}{1-\overline{M}_0L}[\widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln] \\
&+ \frac{\widehat{M}L}{1-\overline{M}_0L}\int_0^t \mu(s)ds + \frac{\widehat{M}\ n\ S_n}{1-\overline{M}_0L}\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds, \\
&\leq c_{2,n} + \frac{\widehat{M}}{1-\overline{M}_0L}\left[\int_0^t L\mu(s)ds + \int_0^t\ n\ S_n\ p(s)\psi(\mu(s))ds\right]
\end{aligned}$$

avec $c_{2,n} := \dfrac{\widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln}{1-\overline{M}_0L}$.

Prenons le second membre de cette inégalité comme étant $v(t)$. Ainsi nous aurons :

$$\mu(t) \leq v(t) \ \ \textit{pour tout } t \in [0, n].$$

Si $t^\star \in [-r, 0]$,alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

De la définition de v, nous obtenons :

$$c := v(0) = c_{2,n} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L}[L\mu(t) + n\ S_n\ p(t)\ \psi(\mu(t))] \quad \text{p. p. } t \in [0, n].$$

Utilisons la croissance de ψ pour avoir :

$$v'(t) \leq \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}}[Lv(t) + \ n\ S_n\ p(t)\ \psi(v(t))].$$

Utilisons la condition (2.10) pour avoir :

$$\begin{aligned}
\int_{c_{2,n}}^{v(t)} \frac{ds}{s + \psi(s)} \quad &\leq \quad \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L} \int_0^t \max(L, n\ S_n\ p(s))\ ds, \\
&\leq \quad \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L} \int_0^n \max(L, n\ S_n\ p(s))\ ds \\
&< \quad \int_{c_{2,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)}.
\end{aligned}$$

Pour chaque $t \in [0, n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ ainsi $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|y\|_n \leq \mu(t)$, nous aurons donc : $\|y\|_n \leq \max\{\|\varphi\|, \Lambda_n\} := \Delta_n$.

Considérons l'ensemble

$$Y = \{\ y \in C([- * r, +\infty[; E)\ \ :\ \ \|y\|_\infty \leq \Delta_n + 1, \quad \forall \ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Il est clair que : Y est un sous-ensemble fermé de $C([-r, +\infty[; E)$.

Montrons maintenant que : l'opérateur $N_2 : Y \to C([-r, +\infty[; E)$ est une contraction. Considérons pour cela $y, \overline{y} \in Y$. D'après $(H1)$, $(H3)$, $(H4)$, $(G1)$ et $(G3)$, nous aurons pour tout $t \in [0, n]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|N_2(y)(t) - N_2(\overline{y})(t)| &\leq |g(t, y_{\rho(t,y_t)}) - g(t, \overline{y}_{\rho(t,y_t)})| \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \; |A(s)[g(s, y_{\rho(s,y_s)}) - g(s, \overline{y}_{\rho(s,y_s)})]| ds \\
&+ \left|\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)[f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)}) - f(\tau, \overline{y}_{\rho(\tau,y_\tau)})] \; d\tau ds\right| \\
&\leq \|A^{-1}(t)\| \; \|A(t)g(t, y_{\rho(t,y_t)}) - A(t)g(t, \overline{y}_{\rho(t,y_t)})\| \\
&+ \widehat{M} \int_0^t \|A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)}) - A(s)g(s, \overline{y}_{\rho(s,y_s)})\| \; ds \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)||f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)}) - f(\tau, \overline{y}_{\rho(\tau,y_\tau)})| d\tau ds, \\
&\leq \widehat{M}_0 L_* \|y_{\rho(t,y_t)} - \overline{y}_{\rho(t,y_t)}\| + \int_0^t \widehat{M} L_* \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\| ds \\
&+ \int_0^t \widehat{M} n S_n l_n(s) \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\|, \\
&\leq \widehat{M}_0 L_* \|y_{\rho(t,y_t)} - \overline{y}_{\rho(t,y_t)}\| \\
&+ \int_0^t [\widehat{M} L_* + \widehat{M} n S_n l_n(s)] \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\| \; ds, \\
&\leq \overline{M}_0 L_* e^{\tau L_n^*(t)} [e^{-\tau L_n^*(t)} \|y_{\rho(t,y_t)} - \overline{y}_{\rho(t,y_t)}\|] \\
&+ \int_0^t \overline{l}_n(s) e^{\tau L_n^*(s)} [e^{-\tau L_n^*(s)} \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\|] \; ds, \\
&\leq \overline{M}_0 L_* e^{\tau L_n^*(t)} \|y - \overline{y}\|_n + \int_0^t \left[\frac{e^{\tau L_n^*(s)}}{\tau}\right]' \; ds \|y - \overline{y}\|_n, \\
&\leq \overline{M}_0 L_* e^{\tau L_n^*(t)} \|y - \overline{y}\|_n + \frac{1}{\tau} e^{\tau L_n^*(t)} \|y - \overline{y}\|_n, \\
&\leq [\overline{M}_0 L_* + \frac{1}{\tau}] e^{\tau L_n^*(t)} \|y - \overline{y}\|_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|N_2(y) - N_2(\overline{y})\|_n \leq \left[\overline{M}_0 L_* + \frac{1}{\tau}\right] \|y - \overline{y}\|_n.$$

Donc, pour un choix approprié de L_* et τ tels que :

$$\overline{M}_0 L_* + \frac{1}{\tau} < 1,$$

l'opérateur N_2 est une contraction pour tout $n \in N$. D'après le choix de Y, il n'existe aucun $y \in \partial Y^n$ tel que : $y = \lambda \, N_2(y), \; \lambda \in]0,1[$. Alors l'alternative $(FG2)$ dans le Théorème 2.3.1 n'est pas satisfaite. Donc l'alternative non linéaire de Frigon-Granas montre que : $(FG1)$ est satisfaite. Alors, nous en déduisons que l'opérateur N_2 admet un seul point fixe qui est la solution faible unique du problème (2.2).

2.3.3 Exemple

Pour illustrer le résultat précédent, considérons dans cette section l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}[z(t,x) - \displaystyle\int_{-r}^{t}\int_{0}^{\pi} b(s-t,u,x)\ z(s,u)\ du\ ds] = a(t,x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) \\ +\displaystyle\int_0^t \alpha(t,s)Q(s,z(s-r,x),\dfrac{\partial z}{\partial x}(s-r,x))ds, \quad t\geq 0, \quad x\in[0,\pi], \\ z(t,0) = \ z(t,\pi)\ = 0, \qquad\qquad t\geq 0, \\ z(t,x) = \ \Phi(t,x), \qquad\qquad t\in[-r,0],\ x\in[0,\pi]. \end{cases} \tag{2.11}$$

où $r > 0$; $a(t,x)$ est une fonction continue et uniformement Hölderienne par rapport à t ; $\alpha : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi : [-r,0] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Pour étudier ce système, nous considérons l'espace $E = L^2([0,\pi],\mathbb{R})$ et l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ donné par :

$$A(t)w = a(t,x)w''$$

avec

$$D(A) := \{\ w\in E\ \ : w, w'\ \textit{sont absolument continues}, w''\in E,\ w(0) = w(\pi) = 0\ \}$$

Il est bien connu que A génère un système d'évolution $U(t,s)$ satisfaisant les hypothèses $(H1)$ et $(G1)$.
Pour $x \in [0,\pi]$, on aura :

$$y(t)(x) = z(t,x) \quad t\geq 0,$$

$$\mathcal{I}(t,s) = \alpha(t,s) \quad t,s\geq 0,$$

$$f(t,y_t)(x) = Q(t,z(t-r,x) \quad t\geq 0,$$

$$g(t,y_t)(x) = \int_{-r}^{t}\int_0^{\pi} b(s-t,u,x)z(s,u)duds, \quad x\in[0,\pi]$$

et

$$\varphi(t)(x) = \phi(t,x) \quad t\in[-r,0].$$

Considérons $\varphi : [-r,0] \to E$ tel que : φ est Lebesgue mesurable et $h\|\varphi\|^2$ est Lebesgue intégrable sur $[-r,0]$ où $h : [-r,0] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable positive. Ici la norme définie par :

$$\|\varphi\| = \|\Phi(0)\| + \left(\int_{-r}^{0} h(s)\|\varphi\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(i) la fonction b est mesurable et

$$\int_0^{\pi}\int_{-r}^{t}\int_0^{\pi} \frac{b^2(s,u,x)}{h(s)} ds\ du\ dx < \infty$$

(ii) les fonctions $\dfrac{\partial b}{\partial x}(s,u,x)$ et $\dfrac{\partial^2 b}{\partial^2 x}(s,u,x)$ sont mesurables, $b(s,u,0) = b(s,u,\pi) = 0$ et $\sup\limits_{t\in[0,b]} N(t) < \infty$, où

$$N(t) = \int_0^\pi \int_{-r}^t \int_0^\pi \frac{1}{h(s)} \left(a(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(s,u,x) \right)^2 ds\ du\ dx.$$

Ainsi, avec les définitions ci-dessus de f, g, $\mathcal{I}$ et A, le système (2.11) peut être représenté par la forme abstraite du problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (2.2). En outre, plus de conditions appropriées sur Q et η assurent l'existence de l'unique solution faible pour (2.11) par le Théorème 2.3.1.

2.4 Problème à Retard Infini

2.4.1 Solution faible et hypothèses

Rappelons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (2.3) :

Définition 2.4.1. *On dit que la fonction $y(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible de* (2.3) *si $y(t) = \phi(t)$ pour tout $t \leq 0$ et y satisfaient l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = U(t,0)\phi(0) + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, y_{\rho(r,y_r)}) dr ds \quad \textit{for each } t \geq 0. \tag{2.12}$$

Soit

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\phi) : (s,\phi) \in J \times \mathcal{B}, \rho(s,\phi) \leq 0\}.$$

On assure toujours que : $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ is continue. De plus, nous présentons les hypothèses suivants

(H_ϕ) La fonction $t \to \phi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ à $\mathcal{B}$ et il existe une fonction continue et borné $\mathcal{L}^\phi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0,\infty[$ telle que :

$$\|\phi_t\|_\mathcal{B} \leq \mathcal{L}^\phi(t)\|\phi\|_\mathcal{B} \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-).$$

Nous aurons besoin d'introduire les hypothèses suivantes qui sont supposées après

$(H1)$ Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ telle que :

$$\|U(t,s)\|_{B(E)} \leq \widehat{M} \quad \text{pour tout } (t,s) \in \Delta.$$

$(H2)$ Il existe une fonction $p \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ et il existe une fonction continue et croissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to]0,\infty[$ telle que :

$$|f(t,u)| \leq p(t)\ \psi(\|u\|_\mathcal{B}) \text{ pour tout } t \in J \text{ et chaque } u \in \mathcal{B}.$$

$(H3)$ Pour tout $R > 0$, il existe $l_R \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ tel que :

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq l_R(t)\ \|u - v\|_\mathcal{B}$$

pour tout $u, v \in \mathcal{B}$ avec $\|u\|_\mathcal{B} \leq R$ et $\|v\|_\mathcal{B} \leq R$.

$(H4)$ Pour tout $t \in J$, I(t,s) est mesurable sur $[0,t]$ et

$$\mathcal{I}(t) = \sup_{0\leq s\leq t} |\mathcal{I}(t,s)|$$

est bornée sur $[0,n]$; soit

$$S_n = ess \sup_{t\in[0,n]} \mathcal{I}(t).$$

Considérons l'espace suivant

$$B_{+\infty} = \left\{y : \mathbb{R} \to E : y|_{[0,T]} \text{ continue pour } T > 0 \text{ et } y_0 \in \mathcal{B}\right\},$$

où $y|_{[0,T]}$ est la restriction de y à the l'intervale réel compact $[0,T]$.

Fixons $\tau > 1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $B_{+\infty}$ la semi-norme par :

$$\|y\|_n := \sup \{\ e^{-\tau\ L_n^*(t)}\ |y(t)| : t \in [0,n]\ \},$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)\ ds$, $\bar{l}_n(t) = K_n\widehat{M}l_n(t)$ et l_n est la fonction de $(H3)$.

Alors $B_{+\infty}$ est un espace de Fréchet avec cette famille de semi-normes $\|\cdot\|_{n\in\mathbb{N}}$.

2.4.2 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 2.4.1. *Supposons que les hypothèses (H_ϕ), $(H1)-(H4)$ sont satisfaites et en plus*

$$\int_{c_{3,n}}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} > K_nMnS_n \int_0^n p(s)ds \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{2.13}$$

avec $c_{3,n} = (M_n + L^\phi + K_nMH)\|\phi\|_{\mathcal{B}}$. Alors, le problème d'évolution intégro-différentiel (2.3) *admet une unique solution faible.*

Preuve. Considérons l'espace suivant

$$B_{+\infty} = \left\{y : \mathbb{R} \to E : y|_{[0,T]} \text{ continue pour } T > 0 \text{ et } y_0 \in \mathcal{B}\right\},$$

où $y|_{[0,T]}$ est la restriction de y vers l'intervalle réel compact $[0,T]$.

On fixe $\tau > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On définit dans $B_{+\infty}$ la semi-norme par :

$$\|y\|_n = \sup_{t\in[0,n]} \{e^{-\tau L_n^\star(t)}|y(t)|\}$$

où $L_n^\star(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)ds$, $\bar{l}_n(t) = K_nMnS_nl_n(t)$ et l_n est la fonction de $(H3)$. Alors $B_{+\infty}$ est un espace de Fréchet avec cettes familles de semi-normes $\|\cdot\|_{n\in\mathbb{N}}$.

Transformons le problème (2.3) en problème de point fixe dans l'espace de Fréchet précédent. Considérons l'opérateur $N_3 : B_{+\infty} \to B_{+\infty}$ défini par :

$$N_3(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \leq 0\,; \\ U(t,0)\phi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(r,y_r)})drds, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Il est clair que : le point fixe de N_3 est la solution faible du problème (2.3).

Pour $\phi \in \mathcal{B}$, On vas definir la fonction $x(.) : \mathbb{R} \to E$ by $x(t) = \phi(t)$ pour $t \leq 0$ et $x(t) = U(t,0)\ \phi(0)$ pour $t \in J$. Alors $x_0 = \phi$. Pour chaque $z \in B_{+\infty}$ avec $z(0) = 0$, nous dénotons par : $\overline{z}$ la fonction définie par : $\overline{z}(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\overline{z}(t) = z(t)$ pour $t \in J$.

Si $y(\cdot)$ satisfaite (2.12), On peut la décomposer $y(t) = z(t)+x(t)$, $t \geq 0$, ce qui implique $y_t = z_t + x_t$, pour chaquen $t \in J$ et la fonction $z(\cdot)$ satisfaite pour $t \in J$

$$z(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, z_{\rho(r,z_r+x_r)} + x_{\rho(r,z_r+x_r)}) drds \quad \text{pour } t \in J.$$

Soit $B^0_{+\infty} = \{z \in B_{+\infty} : z_0 = 0 \in \mathcal{B}\}$. Pour tout $z \in B^0_{+\infty}$, on a :

$$\|z\|_{+\infty} = \|z_0\|_{\mathcal{B}} + \sup_{0 \leq s < +\infty} |z(s)| = \sup_{0 \leq s < +\infty} |z(s)|.$$

Ainsi $(B^0_{+\infty}, \|\cdot\|_{+\infty})$ est un espace de Banach. On définit l'opérateur $F : B^0_{+\infty} \to B^0_{+\infty}$ par :

$$F(z)(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, z_{\rho(r,z_r+x_r)} + x_{\rho(r,z_r+x_r)}) drds \quad \text{pour } t \in J.$$

Il est clair quen l'opérateur N_3 admet un point fixe est équivalent à F en a un, Alors il faut prouver quennn F admet un point fixe.

Soit $z \in B^0_{+\infty}$ tel quenn $z = \lambda F(z)$ pour quenlquen $\lambda \in [0,1[$. Par les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, (H_φ) et Lemme 1.7.1, on a pour tout $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned}
|z(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \left| f(z_{\rho(r,z_r+x_r)} + x_{\rho(r,z_r+x_r)}) \right| drds \\
&\leq Mn \sup_{t\in[0,n]} \mathcal{I}(t) \int_0^t p(s)\psi(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}) drds \\
&\leq MnS_n \int_0^t p(s)\psi(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}) ds.
\end{aligned}$$

De (H_ϕ), Lemme 1.7.1, (ii) de supposition (A_1) et Remarque 1.7.1, on a pour tout $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned}
\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}} &\leq K_n|z(s)| + K_n|x(s)| + (M_n + \mathcal{L}^\phi)\|x_0\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq K_n|z(s)| + K_n\|U(s,0)\|_{B(E)}|\phi(0)| + (M_n + \mathcal{L}^\phi)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq K_n|z(s)| + K_nM|\phi(0)| + (M_n + \mathcal{L}^\phi)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq K_n|z(s)| + K_nMH\|\phi\|_{\mathcal{B}} + (M_n + \mathcal{L}^\phi)\|\phi\|_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Soit $c_{3,n} = (M_n + \mathcal{L}^\phi + K_nMH)\|\phi\|_{\mathcal{B}}$. Ensuite nous avons

$$\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}} \leq K_n|z(s)| + c_{3,n}. \tag{2.14}$$

En utilisant la croissante de ψ, on obtient pour tout $t \in [0,n]$

$$|z(t)| \leq MnS_n \int_0^t p(s)\psi(K_n|z(s)| + c_{3,n}) ds.$$

Ensuite, on a :

$$K_n|z(t)| + c_{3,n} \quad \leq \quad c_{3,n} + K_nMnS_n \int_0^t p(s)\psi(K_n|z(s)| + c_{3,n})ds.$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \sup_{t\in J}\{K_n|z(s)| + c_{3,n} : 0 \leq s \leq t\}.$$

Soit $t^\star \in [-r, t]$ tel que

$$\mu(t) = K_n|z(t^\star)| + c_{3,n}.$$

Si $t^\star \in [-r, 0]$, ensuite $\mu(t) = \|\phi\|_{\mathcal{B}}$ et si $t^\star \in [0, n]$, l'inégalité précédente devient

$$\mu(t) \leq c_{3,n} + K_nMnS_n \int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds, \quad t \in [0, n].$$

Prenons le côté droit de l'inégalité ci-dessus comme $v(t)$. Ensuite pour tout $t \in [0, n]$ on a :

$$v(0) = c_{3,n} \text{ et } v'(t) = K_nMnS_np(t)\psi(\mu(t)).$$

En utilisant la croissante de ψ, on a :

$$v'(t) \leq K_nMnS_np(t)\psi(v(t)), \quad t \in [0, n].$$

La condition (2.13) impliquen quen pour tout $t \in [0, n]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{c_{3,n}}^{v(t)} \frac{ds}{\psi(s)} &\leq K_nMnS_n \int_0^t p(s)ds \\ &\leq K_nMnS_n \int_0^n p(s)ds \\ &< \int_{c_{3,n}}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, n]$, il existe une constante Λ_n telle quen $v(t) \leq \Lambda_n$ et par conséquennt $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Comme $\|z\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|z\|_n \leq \Lambda_n$.

Soit $Z = \{z \in B^0_{+\infty} : \sup\limits_{0\leq t\leq n} |z(t)| \leq \Lambda_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Il est clair quen, Z est un sous-ensemble fermé de $B^0_{+\infty}$.

Il faut montrer quennn $F : Z \to B^0_{+\infty}$ est un opérateur de contraction. En effet, considérons $z, \overline{z} \in Z$, donc en utilisant $(H1)$, $(H3)$ et (2.14), on obtient pour tout $t \in [0, n]$

et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|F(z)(t) - F(\overline{z})(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \; \big| f(r, z_{\rho(r,z_r+x_r)} + x_{\rho(r,z_r+x_r)}) \\
&\qquad\qquad - f(r, \overline{z}_{\rho(r,\overline{z}_r+x_r)} + x_{\rho(r,\overline{z}_r+x_r)}) \big| \; dr\; ds \\
&\leq Mn \; ess \sup_{t\in[0,n]} \; \mathcal{I}(t) \int_0^t l_n(s) \left\| z_{\rho(s,z_s+x_s)} - \overline{z}_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)} \right\|_{\mathcal{B}} ds \\
&\leq MnS_n \int_0^t l_n(s) K_n \, |z(s) - \overline{z}(s)| \, ds \\
&\leq \int_0^t \left[\overline{l}_n(s) \; e^{\tau \; L_n^\star(s)} \right] \left[e^{-\tau \; L_n^\star(s)} \; |z(s) - \overline{z}(s)| \right] \; ds \\
&\leq \int_0^t \left[\frac{e^{\tau \; L_n^\star(s)}}{\tau} \right]' \; ds \; \|z - \overline{z}\|_n \\
&\leq \frac{1}{\tau} \; e^{\tau \; L_n^\star(t)} \; \|z - \overline{z}\|_n.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|F(z) - F(\overline{z})\|_n \leq \frac{1}{\tau} \; \|z - \overline{z}\|_n.$$

Alors, l'opération F est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$. Du choix de Z il n'existe pas $z \in \partial Z^n$ tel que $z = \lambda \; F(z), \; \lambda \in]0,1[$. Ensuite, seulement $(FG1)$ du Théorème 1.9.1 Cela signifie quennn l'opérateur F a un point fixe uniquen $z^\star$. Alors $y^\star(t) = z^\star(t) + x(t)$, $t \; in \; BbbR$ est un point fixe de l'opérateur N_3, qui est la solution faible uniquenn du problème $z^\star$. Alors $y^\star(t) = z^\star(t) + x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ est un point fixe d'opérateur N_3, qui est la solution faible uniquenn du problème (2.3).

2.4.3 Exemple

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \dfrac{\partial^2 u(t,\xi)}{\partial \xi^2} + a_0(t,\xi) u(t,\xi) \\
+ \displaystyle\int_{-\infty}^t \alpha(t,s) \int_{-\infty}^0 a_1(s-r) u \left[s - \rho_1(r)\rho_2 \left(\int_0^\pi a_2(\theta) |u(r,\theta)|^2 d\theta \right), \xi \right] drds \\
\hfill t \geq 0, \; \xi \in [0,\pi], \\
u(t,0) = \; u(t,\pi) \; = 0, \hfill t \geq 0, \\
u(\theta,\xi) = \; u_0(\theta,\xi), \hfill -\infty < \theta \leq 0, \; \xi \in [0,\pi],
\end{cases} \tag{2.15}$$

où $a_0(t,\xi)$ est une fonction continue et est continue uniformément au sens de Hölder en t ; $\alpha : \mathbb{R}_-^2 \to \mathbb{R}$, $a_1 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ et $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\rho_i : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions continue pour $i = 1,2$.

Pour étudier ce système, nous considérons l'espace $E = L^2([0,\pi],\mathbb{R})$ et l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ donné par :

$$A(t)w = a(t,x)w''$$

avec

$$D(A) := \{\ w \in E\ : w, w'\ sont\ absolument\ continues, w'' \in E,\ w(0) = w(\pi) = 0\ \}$$

A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytiquen $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans E. Ainsi, A a un spectre discret avec les valeurs propres $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$ et les vecteurs propres normaux correspondant sont donnés par :

$$z_n(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(n\xi).$$

En plus, $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormale de E et $T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}(x, z_n)z_n$ for $x \in E$ pour $t \geq 0$. Il s'en suit de cette représentation quenn $T(t)$ est compact pour tout $t > 0$ et quenn $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$. Dans le domaine $D(A)$, on définit les opérateurs $A(t) : D(A) \subset E \to E$ par :

$$A(t)x(\xi) = Ax(\xi) + a_0(t, \xi)x(\xi).$$

En supposant quennn $a_0(.)$ est continue et quen $a_0(t, \xi) \leq -\delta_0$ ($\delta_0 > 0$) pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$\xi \in [0, \pi]$, il s'en suit quennn le système

$$u'(t) = A(t)u(t) \quad t \geq s,$$
$$u(s) = x \in E,$$

admet une famille d'évolution associée donnée par :

$$U(t, s)x(\xi) = \left[T(t-s)exp\left(\int_s^t a_0(\tau, \xi)d\tau\right)x\right](\xi).$$

De cette expression, il s'en suit quen $U(t, s)$ est un opérateur linéaire compact et quenn

$$\|U(t, s)\| \leq e^{-(1+\delta_0)(t-s)} \text{ pour tout } (t, s) \in \Delta.$$

Théorème 2.4.2. *Soient $\mathcal{B} = BUC(\mathbb{R}_-; E)$ et $\varphi \in \mathcal{B}$. Supposant quennn la condition (H_φ) est vérifiée, $\rho_i : [0, \infty[\to [0, \infty[, i = 1, 2$, sont continues et les fonctions $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues pour $i = 1, 2$. Alors il existe une uniquennnn solution faible de* (2.15).

Preuve. Sous les hypothèses, on a quenn

$$\mathcal{I}(t, \psi)(\xi) = \alpha(t, \xi),$$
$$f(t, \psi)(\xi) = \int_{-\infty}^0 a_1(s)\psi(s, \xi)ds$$

et

$$\rho(s, \psi) = s - \rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|\psi(0, \xi)|^2 d\theta\right)$$

sont des fonctions bien definées, qui permet de transformer le système (2.15) en système abstract (2.3). En plus, la fonction f est une fonction linéaire et bornée. Maintenant, l'existence des solutions faibles peut être déduit à partir d'une application directe du Théorème 3.3.1.

À partir de la Remarquenn 1.7.1, on a le résultat suivant

Corollaire 2.4.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{B}$ une fonction continue et bornée. Alors il existe une solution faible uniquenn de* (2.15) *sur* $\mathbb{R}$.

2.5 Problème de Type Neutre à Retard Infini

2.5.1 Solution faible et hypothèses

Rappellons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-differentiel d'évolution de type neutre (2.4) :

Définition 2.5.1. *On dit quen la fonction $y(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible de (2.4) si $y(t) = \phi(t)$ pour tout $t \in H$ et y satisfaite l'équation intégrale suivante*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)[\phi(0) - g(0,\phi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(r,y_r)})drds \quad \text{pout tout } t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Considérons les hypothèses (H_φ), $(H1) - (H3)$ et nous aurons besoin des hypothèses suivantes

$(G1)$ Il existe une constante $M_0 > 0$ telle que : $\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \leq M_0$ pour tout $t \geq 0$.

$(G2)$ Il existe une constante $0 < L < M_0^{-1}$, telle que : $\|A(t)g(t,\phi)\| \leq L(\|\phi\|_{\mathcal{B}} + 1)$ pour tout $t \in J$ et $\phi \in \mathcal{B}$.

$(G3)$ Il existe une constante $L_\star > 0$ telle que :

$$|A(s)\ g(s,\phi) - A(\overline{s})\ g(\overline{s},\overline{\phi})| \leq L_\star\ (|s - \overline{s}| + \|\phi - \overline{\phi}\|_{\mathcal{B}})$$

pour tout $s, \overline{s} \in J$ et $\phi, \overline{\phi} \in \mathcal{B}$.

Fixons $\tau > (1 - \overline{M}_0 L_\star K_n)^{-1}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $B_{+\infty}$ la semi-norme par :

$$\|y\|_n := \sup \{\ e^{-\tau\ L_n^*(t)}\ |y(t)| : t \in [0,n]\ \},$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)\ ds$, $\bar{l}_n(t) = MK_n[L_\star + nS_n l_n(t)]$ et l_n est la fonction de $(H3)$.

Alors $B_{+\infty}$ est un espace de Fréchet avec cette famille de semi-normes $\|\cdot\|_{n\in\mathbb{N}}$.

2.5.2 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 2.5.1. *Supposons que les hypothèses (H_ϕ), $(H1) - (H3)$ et $(G1) - (G3)$ sont satisfaites et en plus*

$$\int_{c_{4,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)} > \frac{K_n M}{1 - M_0 L} \int_0^n \max(L, nS_n p(s))ds \tag{2.17}$$

pour tout $n > 0$ où

$$\begin{aligned} c_{4,n} &= \left[\left(1 + \frac{K_n M_0 L}{1 - M_0 L}\right)(M_n + \mathcal{L}^\phi + K_n M H) + \frac{K_n M(1 + M_0 L)}{1 - M_0 L}\right] \|\phi\|_{\mathcal{B}} \\ &+ \frac{K_n\,(M_0 L(M+1) + MLn)}{1 - M_0 L}. \end{aligned}$$

Ensuite, le problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (2.4) a une solution faible unique.

Preuve. Transformons le problème (2.4) dans un problème à point fixe dans l'espace précédent de Fréchet. Considérons l'opérateur $N_4 : B_{+\infty} \to B_{+\infty}$ défini par :

$$N_4(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \leq 0 \\ U(t,0)[\phi(0) - g(0,\phi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(s,y_s)})drds, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Il est clair que les points fixes d'opérateur N_4 sont les solutions faibles du problème (2.4).

Pour $\phi \in \mathcal{B}$, on définit la fonction $x(.) : \mathbb{R} \to E$ par : $x(t) = \phi(t)$ pour $t \leq 0$ et $x(t) = U(t,0)\ \phi(0)$ for $t \in J$. Ensuite $x_0 = \phi$. pour chaque fonction $z \in B_{+\infty}$ avec $z(0) = 0$, nous désignons par : $\overline{z}$ la fonction définie par : $\overline{z}(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\overline{z}(t) = z(t)$ pour $t \in J$.

Si $y(\cdot)$ satisfait (2.16), on peut la décomposer comme $y(t) = z(t) + x(t)$, $t \geq 0$, ce qui implique $y_t = z_t + x_t$, pour tout $t \in J$ et la fonction $z(\cdot)$ satisfaite pour $t \in J$

$$\begin{aligned} z(t) &= g(t, z_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, z_{\rho(r,y_r)} + x_{\rho(r,y_r)})drds \quad \text{pour } t \in J. \end{aligned}$$

On définit l'opérateur $\widetilde{F} : B^0_{+\infty} \to B^0_{+\infty}$ par :

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(z)(t) &= g(t, z_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, z_{\rho(r,y_r)} + x_{\rho(r,y_r)})drds \quad \text{pour } t \in J. \end{aligned}$$

Il est clair que l'opérateur N a un point fixe est équivalent à F en a un, alors il faut prouver que : F a un point fixe.

Soit $z \in B^0_{+\infty}$ tel que : $z = \lambda\widetilde{F}(z)$ pour quelque $\lambda \in [0,1[$. Ensuite, utilisons $(H1)$, $(H5)$, $(G1)$, $(G2)$ et (2.14), on a pour $n \in \mathbb{N}$ donné et chaque $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \|A^{-1}(t)\|_{B(E)}\|A(t)g(t, z_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)})\| + M\|A^{-1}(0)\|_{B(E)}\|A(0)g(0,\phi)\| \\ &+ M\int_0^t \|A(s)g(s, z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)})\|\ ds \\ &+ M\int_0^t \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)||f(r, z_{\rho(r,y_r)} + x_{\rho(r,y_r)})|drds \\ &\leq M_0L(\|z_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)}\|_{\mathcal{B}} + 1) + MM_0L(\|\phi\|_{\mathcal{B}} + 1) \\ &+ ML\int_0^t (\|z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)}\|_{\mathcal{B}} + 1)\ ds \\ &+ Mn\ ess \sup_{t\in[0,n]} \mathcal{I}(t) \int_0^t p(s)\psi(\|z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)}\|_{\mathcal{B}})ds \\ &\leq M_0L\,(K_n|z(t)| + c_{3,n}) + MM_0L\|\phi\|_{\mathcal{B}} + M_0\ L(M+1) + MLn \\ &+ ML\int_0^t (K_n|z(s)| + c_{3,n})\,ds + MnS_n\int_0^t p(s)\psi(K_n|z(s)| + c_{3,n})ds. \end{aligned}$$

Ensuite, on a pour $c_{4,n} := c_{3,n} + K_n \dfrac{M_0 L c_{3,n} + M\|\phi\|_{\mathcal{B}}(1+M_0L) + M_0L(M+1) + MLn}{1-M_0L}$

$$\begin{aligned} K_n|z(t)| + c_{3,n} &\leq c_{4,n} + \frac{K_nM}{1-M_0L}\left[L\int_0^t (K_n|z(s)| + c_{3,n})\,ds \right. \\ &\left. \qquad + nS_n \int_0^t p(s)\psi(K_n|z(s)| + c_{3,n})ds\right]. \end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \sup_{t\in J}\{K_n|z(s)| + c_{3,n} : 0 \leq s \leq t\}.$$

Soit $t^\star \in [-r, t]$ tel que :

$$\mu(t^\star) = K_n|z(t^\star)| + c_{3,n}.$$

Si $t^\star \in [0, n]$, par l'inégalité précédente, nous avons pour $t \in [0, n]$

$$\mu(t) \leq c_{4,n} + \frac{K_nM}{1-M_0L}\left[L\int_0^t \mu(s)ds + nS_n\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds\right].$$

Si $t^\star \in [-r, 0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\phi\|_{\mathcal{B}}$ et l'inégalité précédente est vérifiée. Prenons le côté droit de l'inégalité ci-dessus $v(t)$. Ainsi, on a : $\mu(t) \leq v(t)$ pour tout $t \in [0, n]$. De la définition de v, on a : $v(0) = c_{4,n}$ et

$$v'(t) = \frac{K_nM}{1-M_0L}\left[L\mu(t) + nS_np(t)\psi(\mu(t))\right] \quad \text{p. p.} \quad t \in [0, n].$$

Utilisons la croissance de ψ pour obtenir pour tout $t \in [0, n]$

$$v'(t) \leq \frac{K_nM}{1-M_0L}\left[Lv(t) + nS_np(t)\psi(v(t))\right].$$

Ce qui implique que pour chaque $t \in [0, n]$ et en utilisant $(H5)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{c_{4,n}}^{v(t)} \frac{ds}{s+\psi(s)} &\leq \frac{K_nM}{1-M_0L}\int_0^t \max(L, nS_np(s))ds \\ &\leq \frac{K_nM}{1-M_0L}\int_0^n \max(L, nS_np(s))ds \\ &< \int_{c_{4,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $t \in [0, n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ et par conséquent $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|z\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|z\|_n \leq \Lambda_n$.

Maintenant, nous montrerons que : $\widetilde{F} : Z \to B^0_{+\infty}$ est une contraction. En effet, considérons $z, \overline{z} \in Z$, en utilisant $(H1)$ et $(G1)$ pour chaque $t \in [0, n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\widetilde{F}(z)(t) - \widetilde{F}(\overline{z})(t)| &\leq M_0|A(t)[g(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)}) - g(t, \overline{z}_{\rho(t,\overline{z}_t+x_t)} + x_{\rho(t,\overline{z}_t+x_t)})]| \\ &+M\int_0^t |A(s)[g(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}) - g(s, \overline{z}_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)} + x_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)})]|ds \\ &+M\int_0^t\int_0^s |\mathcal{I}(s,r)||f(r, z_{\rho(r,z_r+x_r)} + x_{\rho(r,z_r+x_r)}) - f(r, \overline{z}_{\rho(r,\overline{z}_r+x_r)} + x_{\rho(s,\overline{z}_r+x_r)})|ds \end{aligned}$$

Par $(H2)-(H3)$, $(G3)$ et (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
|\widetilde{F}(z)(t)-\widetilde{F}(\overline{z})(t)| &\leq M_0L_\star\|z_{\rho(t,z_t+x_t)}-\overline{z}_{\rho(t,\overline{z}_t+x_t)}\|_{\mathcal{B}} \\
&+ M\int_0^t L_\star\|z_{\rho(s,z_s+x_s)}-\overline{z}_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}ds \\
&+ Mn\ ess\sup_{t\in[0,n]}|\mathcal{I}(t)|\int_0^t l_n(s)\|z_{\rho(s,z_s+x_s)}-\overline{z}_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}ds \\
&\leq M_0L_\star K_n|z(t)-\overline{z}(t)|+\int_0^t ML_\star K_n|z(s)-\overline{z}(s)|ds \\
&+ \int_0^t MnS_nl_n(s)K_n|z(s)-\overline{z}(s)|ds \\
&\leq \overline{M}_0L_\star K_n\ |z(t)-\overline{z}(t)|+\int_0^t\overline{l}_n(s)\ |z(s)-\overline{z}(s)|ds \\
&\leq \overline{M}_0L_\star K_ne^{\tau\ L_n^\star(t)}\left[e^{-\tau\ L_n^\star(t)}\ |z(t)-\overline{z}(t)|\right] \\
&+ \int_0^t\overline{l}_n(s)e^{\tau\ L_n^\star(t)}\left[e^{-\tau\ L_n^\star(t)}|z(s)-\overline{z}(s)|\right]ds \\
&\leq \overline{M}_0L_\star K_n\ e^{\tau\ L_n^\star(t)}\ \|z-\overline{z}\|_n+\int_0^t\left[\frac{e^{\tau\ L_n^\star(s)}}{\tau}\right]'ds\ \|z-\overline{z}\|_n \\
&\leq \left[\overline{M}_0L_\star K_n+\frac{1}{\tau}\right]\ e^{\tau\ L_n^\star(t)}\ \|z-\overline{z}\|_n.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|\widetilde{F}(z)-\widetilde{F}(\overline{z})\|_n\leq\left[\overline{M}_0L_*K_n+\frac{1}{\tau}\right]\ \|z-\overline{z}\|_n.$$

Donc, pour un choix approprié de τ tel que : $\overline{M}_0L_*K_n+\dfrac{1}{\tau}<1$, l'opérateur $\widetilde{F}$ est une contraction pour tout $n\in\mathbb{N}$. Du choix de Z il n'y a pas $z\in\partial Z^n$ tel que : $z=\lambda\ \widetilde{F}(z)$ pour $\lambda\in]0,1[$. Ainsi seulement $(FG1)$ dans la Théorème 1.9.1 tient. Nous déduisons que : l'opérateur $\widetilde{F}$ a un point fixe unique $z^\star$. Alors $y^\star(t)=z^\star(t)+x(t)$, $t\in\mathbb{R}$ est l'unique point fixe d'opérateur N_4, qui est la solution faible unique du problème (2.4).

2.5.3 Exemple

Considérons les équations aux dérivées partielles de type neutre

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}\left[u(t,\xi)-\displaystyle\int_{-\infty}^0 a_3(s-t)u\left(s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2d\theta\right),\xi\right)ds\right] \\
=\dfrac{\partial^2u(t,\xi)}{\partial\xi^2}+a_0(t,\xi)u(t,\xi) \\
+\displaystyle\int_{-\infty}^t\alpha(t,s)\int_{-\infty}^0 a_1(s-r)u\left[s-\rho_1(r)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|u(r,\theta)|^2d\theta\right),\xi\right]drds \\
\hfill t\geq 0,\ \xi\in[0,\pi], \\
u(t,0)=\ u(t,\pi)\ =0, \hfill t\geq 0, \\
u(\theta,\xi)=\ u_0(\theta,\xi), \hfill -\infty<\theta\leq 0,\ \xi\in[0,\pi],
\end{cases} \tag{2.18}$$

où α, a_i, ρ_j comme dans (2.18) pour $i = 0, 1, 2$ et $j = 1, 2$. Soit $a_3 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Théorème 2.5.2. *Soient $\mathcal{B} = BUC(\mathbb{R}_-; E)$ et $\varphi \in \mathcal{B}$. Supposons que la condition (H_φ) est vérifie et le fait que les fonctions $\rho_i : [0, \infty[\to [0, \infty[, i = 1, 2$ et $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues pour $i = 1, 2, 3$. Alors il existe une unique solution faible de* (2.18).

Preuve. À partir des hypothèses, on a :

$$\mathcal{I}(t, \psi)(\xi) = \alpha(t, \xi),$$

$$f(t, \psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} a_1(s)\psi(s, \xi)ds,$$

$$g(t, \psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} a_3(s)\psi(s, \xi)ds$$

et

$$\rho(s, \psi) = s - \rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|\psi(0, \xi)|^2 d\theta\right)$$

sont des fonctions bien définies, qui permet de transformer le système (2.18) en un système abstrait (2.4). En plus, la fonction f est un opérateur linéaire borné. Maintenant, l'existence de l'unique solution faible peut être déduite à partir d'une application directe du Théorème 4.3.1.

À partir de la Remarque 1.7.1, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.5.1. *Pour $\varphi \in \mathcal{B}$ une fonction continue et bornée, il existe une solution faible unique de* (2.18) *sur* $\mathbb{R}$.

Chapitre 3

Équations Intégro-différentielles Perturbées d'Évolution à Retard Dépendant de l'État

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions faibles sur la demi-droite réelle positive de quatre classes d'équations intégro-différentielles perturbées d'évolution partielle et celle de type neutre à retard fini et infini dépendant de l'état en utilisant l'alternative non linéaire d'Avramescu pour la somme d'un opérateur continu compact et d'une contraction sur les espaces de Fréchet [10].

L'existence des solutions faibles est démontrée dans la Section 3.2 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles perturbées d'évolution avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + h(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f,\ h : J \times C(H;E) \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times C(H;E) \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(H;E)$ sont des fonctions données et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est déjà définie.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 3.3 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles perturbées d'évolution de type neutre avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] &= A(t)y(t) + h(t, y_{\rho(t,y_t)}) \\ &\quad + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $A(\cdot)$, f, h, $\mathcal{I}$ et φ sont définies dans le problème (3.1) et $g : J \times C(H;E) \to E$ est une fonction donnée.

L'existence des solutions faibles est démontrée dans la Section 3.4 citée dans [62] pour la classe suivante des équations intégro-différentielles perturbées d'évolution avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) &=& A(t)y(t) + h(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y_0 &=& \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $f : J \times \mathcal{B} \to E$, $h : J \times C(H;E) \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ sont des fonctions données, $\mathcal{B}$ et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ sont déjà définies.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 3.5 citée dans [62] pour la classe suivante des équations intégro-différentielles perturbées d'évolution de type neutre avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] &=& A(t)y(t) + h(t, y_{\rho(t,y_t)}) \\ &+& \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, & & \end{cases} \tag{3.4}$$

où $A(\cdot)$, f, h, $\mathcal{I}$ et ϕ sont définies dans le problème (3.3) et $g : J \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction donnée.

Enfin, quatre exemples seront donnés à la fin de chaque Section pour illustrer les résultats obtenus.

3.2 Problème à Retard Fini

3.2.1 Solution faible et hypothèses

Rappelons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (3.1) :

Définition 3.2.1. *La fonction $y(\cdot) : [-r, +\infty[\to E$ est dite solution faible du problème (3.1) si $y(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in H$ et y vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)\varphi(0) + \int_0^t U(t,s)h(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(r,y_r)})drds \quad \textit{pour tout } t \in J. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Supposons que : $\rho : J \times C(H;E) \to [-r, +\infty[$ est une fonction continue et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\varphi) : (s,\varphi) \in J \times C(H;E),\ \rho(s,\varphi) \leq 0\}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H_φ) La fonction $t \to \varphi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ dans $C(H;E)$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0,+\infty[$ telle que :

$$\|\varphi_t\| \leq \mathcal{L}^\varphi(t)\|\varphi\| \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-). \tag{3.6}$$

Pour la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :
$(H0)$ $U(t,s)$ est compact pour $t-s>0$.
$(H1)$ Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ telle que :

$$\|U(t,s)\|_{B(E)} \leq \widehat{M} \quad \text{pour tout } \ (t,s) \in \Delta.$$

$(H2)$ Il existe une fonction $\psi : J \to]0,+\infty[$ continue et croissante et il existe une fonction $p \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ telles que :

$$|f(t,u)| \leq p(t)\ \psi(\|u\|) \qquad \text{p. p. } \ t \in J, \ \forall u \in C(H;E).$$

$(H3)$ Pour tout $R>0$, il existe une fonction $l_R \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ tel que :

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq l_R(t)\ \|u-v\|$$

$\forall u,v \in C(H;E)$ avec $\|u\| \leq R$ et $\|v\| \leq R$.
$(H4)$ Pour tout $t \in J$, I(t,s) est mesurable sur $[0,t]$ et

$$\mathcal{I}(t) = \sup_{0\leq s\leq t} |\mathcal{I}(t,s)|$$

est bornée sur $[0,n]$; soit

$$S_n = ess \sup_{t\in[0,n]} \ \mathcal{I}(t).$$

$(H5)$ Il existe une fonction $\eta \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ telle que :

$$|h(t,u) - h(t,v)| \leq \eta(t)\ \|u-v\|$$

pour tout $t \in J$ et pour tout $u,v \in C(H;E)$.

Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans $C([-r,+\infty[;E)$ la famille de semi-norme par :

$$\|y\|_n = \sup\ \{\ e^{-\tau\ L^*_n(t)}\ |y(t)| : t \in [0,n]\ \}$$

où $L^*_n(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)\ ds$, $\bar{l}_n(t) = \widehat{M}\eta(t)$ et η est la fonction dans $(H5)$.

Alors $C([-r,+\infty[;E)$ est un espace de Fréchet muni de la famille des semi-normes $\|\cdot\|_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce qui suit, nous allons choisir $\tau > 1$.

3.2.2 Résultat d'existence

Théorème 3.2.1. *Supposons que :* (H_φ), $(H0)-(H5)$ *sont satisfaites. Si en plus*

$$\int_{c_{5,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)} > \widehat{M} \int_0^n \max(nS_np(s);\eta(s))\ ds. \tag{3.7}$$

avec $c_{5,n} = \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\| + \widehat{M}\displaystyle\int_0^n |h(s,0)|\ ds$. *Alors le problème* (3.1) *admet au moins une solution faible sur* $[-r,+\infty[$.

Preuve. Transformons le problème (3.1) en un problème à point fixe. Considéreons l'opérateur $N_5 : C([-r,+\infty[;E) \to C([-r,+\infty[;E)$ défini par :

$$N_5(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in H\,; \\ U(t,0)\ \varphi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s)\ h(s, y_{\rho(s,y_s)})\ ds, & \\ \quad + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, y_{\rho(r,y_r)}) dr ds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N_5 sont les solutions faibles du problème (3.1).

Définissons les opérateurs $F, G : C([-r,+\infty[;E) \to C([-r,+\infty[;E)$ par :

$$F(z)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in H\,; \\ U(t,0)\ \varphi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, y_{\rho(r,y_r)}) dr ds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

et

$$G(z)(t) = \int_0^t U(t,s)\ h(s, y_{\rho(s,y_s)})\ ds.$$

Évidemment l'opérateur N_5 a un point fixe est équivalent à $F + G$ en a un, donc il faut prouver que : $F + G$ a un point fixe.

Premièrement, montrons que : F est continue et compacte.

Etape 1 : Premièrement, on montre la continuité de F. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([-r,+\infty[;E)$ une suite tel que : $y_n \to y$. Par les hypothèses $(H1)$ et $(H4)$, on a :

$$\begin{aligned} |F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)||f(s, y_{n\rho(s,y_{ns})}) - f(s, y_{\rho(s,y_s)})| dr ds, \\ &\leq \widehat{M} n\ ess \sup_{t\in[0,n]} |\mathcal{I}(t)| \int_0^t \left| f(s, y_{n\rho(s,y_{ns})}) - f(s, y_{\rho(s,y_s)}) \right| ds, \\ &\leq \widehat{M} n S_n \int_0^t \left| f(s, y_{n\rho(s,y_{ns})}) - f(s, y_{\rho(s,y_s)}) \right| ds. \end{aligned}$$

Puisque : f est continue et par la convergence dominée du théorème de Lebesgue, on obtient :

$$|F(y_n)(t) - F(y)(t)| \to 0 \ \text{ lorsque } \ n \to +\infty.$$

Alors F est continue.

Etape 2 : Montrons que : F transforme chaque borné de $C([-r,+\infty[;E)$ en un ensemble borné i,e. pour chaque $d > 0$, il existe une constante positive ξ telle que pour tout $y \in B_d = \{y \in C([-r,+\infty[;E) \ : \|y\|_n \leq d\}$, on a : $\|F(y)\|_n \leq \xi$.

Soit $y \in B_d$, des hypothèses $(H1)$, $(H2)$ et $(H4)$, on a pour tout $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \left| f(s, y_{\rho(s,y_s)}) \right| \ dr ds, \\ &\leq \widehat{M} n S_n \int_0^t p(s)\ \psi(\|y_{\rho(s,y_s)}\|)\ ds. \end{aligned}$$

De (1.10), on a pour chaque $t \in [0,n]$

$$\|y_{\rho(t,y_t)}\| \leq |y(t)| + \mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\| \leq d + \mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\| := \delta_d. \qquad (3.8)$$

En utilisant la croissance de ψ, on a :

$$|F(y)(t)| \leq \widehat{M}nS_n \int_0^t p(s)\ \psi(|y(s)| + \mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|)\ ds.$$

D'où, on obtient grâce à (3.8) pour tout $t \in [0,n]$

$$|F(y)(t)| \leq \widehat{M}nS_n\psi(\delta_d)\|p\|_{L^1} := \xi_d.$$

Alors il existe une constante positive ξ_d telle que : $\|F(y)\|_n \leq \xi_d$. Alors $F(B_d) \subset B_{\xi_d}$.

Etape 3 : F transforme les ensembles bornés en ensembles équi-continus de $C([-r,+\infty[;E)$. Considérons B_d comme à l'étape 2 et on montre que : $F(B_d)$ est équi-continu. Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_1 < \tau_2$ et $y \in B_d$.

$$\begin{aligned} |F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &\leq \int_0^{\tau_1} \|U(\tau_2,s) - U(\tau_1,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)||f(s,y_{\rho(s,y_s)})|\ drds \\ &+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|U(\tau_2,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)||f(s,y_{\rho(s,y_s)})|\ drds. \end{aligned}$$

Alors par (3.8) et la croissance de ψ, on obtient :

$$\begin{aligned} |F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &\leq nS_n\psi(\delta_d)\int_0^{\tau_1} \|U(\tau_2,s) - U(\tau_1,s)\|_{B(E)}\ p(s)\ ds \\ &+ \widehat{M}nS_n\psi(\delta_d)\int_{\tau_1}^{\tau_2} p(s)\ ds. \end{aligned}$$

Notons que le second membre de l'inégalité tend vers zéro quand $\tau_2 - \tau_1 \to 0$. Comme $U(t,s)$ est continu et compact pour $t > s$, alors on a la continuité de l'opérateur uniforme dans la topologie (voir [3, 69]). En conséquence des étapes 1 à 3 et d'après le théorème d'Arzelá-Ascoli, il suffit de montrer que l'opérateur F transforme B_d en un ensemble pré-compact dans E.

Soit $t \in J$ fixé et soit ε un nombre réel satisfait $0 < \varepsilon < t$. Pour $y \in B_d$, on définit

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(y)(t) &= U(t,0)\ \varphi(0) + \int_0^{t-\varepsilon} U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r,y_{\rho(r,y_r)})drds \\ &= U(t,0)\ \varphi(0) + U(t,t-\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} U(t-\varepsilon,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r,y_{\rho(r,y_r)})drds \end{aligned}$$

Comme $U(t,s)$ est un opérateur compact, l'ensemble $Z_\varepsilon(t) = \{F_\varepsilon(y)(t)\ : y \in B_d\}$ est pré-compact dans E pour chaque ε, $0 < \varepsilon < t$. De plus, en utilisant (3.8), $(H1)$, $(H2)$ et la croissance de ψ, on obtient :

$$\begin{aligned} |F(y)(t) - F_\varepsilon(y)(t)| &\leq \int_{t-\varepsilon}^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r,y_{\rho(r,y_r)})drds, \\ &\leq \widehat{M}nS_n\psi(\delta_d)\int_{t-\varepsilon}^t p(s)\ ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble $Z(t) = \{F(y)(t) \ : y \in B_d\}$ est totalement borné donc relativement compact dans E. Donc, nous déduisons de Steps 1, 2 et 3 que : F est un opérateur compact.

Etape 4 : G est une contraction. Soient $y, \overline{y} \in C([-r, +\infty[; E)$. Par les hypothèses $(H1)$ et $(H5)$, on obtient pour chaque $t \in [0, n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |G(y)(t) - G(\overline{y})(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \mid h(s, y_{\rho(s,y_s)}) - h(s, \overline{y}_{\rho(s,y_s)}) \mid ds, \\ &\leq \widehat{M} \int_0^t \eta(s) \ \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\| \ ds. \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité (3.8), pour obtenir :

$$\begin{aligned} |G(y)(t) - G(\overline{y})(t)| &\leq \int_0^t \widehat{M} \ \ \eta(s) \ |y(s) - (\overline{y})(s)| \ ds, \\ &\leq \int_0^t \left[\overline{l}_n(s) \ e^{\tau L_n^*(s)}\right] \ \left[e^{-\tau L_n^*(s)} \ |y(s) - \overline{y}(s)|\right] \ ds, \\ &\leq \int_0^t \left[\frac{e^{\tau \ L_n^*(s)}}{\tau}\right]' \ ds \ \|y - \overline{y}\|_n, \\ &\leq \frac{1}{\tau} \ e^{\tau \ L_n^*(t)} \ \|y - \overline{y}\|_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\|G(y) - G(\overline{y})\|_n \leq \frac{1}{\tau} \ \|y - \overline{y}\|_n.$$

Alors l'opérateur G est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque : $\tau > 1$.

Etape 5 : Pour appliquer le théorème (1.9.2), nous devons vérifier que : $(Av2)$ n'est pas satisfaite i.e. il reste à montrer que l'ensemble

$$\Gamma = \left\{ y \in C([-r, +\infty[; E) \ : y = \lambda F(y) + \lambda G\left(\frac{y}{\lambda}\right) \quad \text{for some } \lambda \in]0,1[\right\}$$

est borné.

Soit $y \in \Gamma$. Par $(H1) - (H2)$ et $(H4)$, on a pour chaque $t \in [0, n]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}|y(t)| &\leq \int_0^t \ \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \ \left|f(s, y_{\rho(s,y_s)})\right| \ drds \\ &+ \int_0^t \ \|U(t,s)\|_{B(E)} \ \left| h\left(s, \frac{y_{\rho\left(s, \frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right) - h(s,0) + h(s,0) \right| \ ds, \\ &\leq \widehat{M} n S_n \int_0^t \ p(s) \ \psi(\|y_{\rho(s,y_s)})\| \ ds) + \widehat{M} \int_0^t \ \eta(s) \ \left\| \frac{y_{\rho\left(s, \frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda} \right\| \ ds \\ &+ \ \widehat{M} \int_0^t \ |h(s,0)| \ ds. \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité (3.8) pour avoir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|y(t)| &\leq \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\ \psi(|y(s)|+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|)\ ds+\frac{\widehat{M}}{\lambda}\int_0^t \eta(s)\ \ (|y(s)|+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|)\ ds\\ &+\ \widehat{M}\int_0^t\ |h(s,0)|\ ds.\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$u(t) := \sup_{\theta\in[0,t]}|y(\theta)|.$$

La croissance de ψ donne avec le fait que $0<\lambda<1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}u(t)+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\| &\leq \mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|+\widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\ \psi\left(u(s)+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|\right)\ ds\\ &+\ \frac{\widehat{M}}{\lambda}\int_0^t \eta(s)\ \ (u(s)+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|)\ ds+\widehat{M}\int_0^t\ |h(s,0)|\ ds.\end{aligned}$$

Soit $c_{5,n} := \mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|+\widehat{M}\int_0^n\ |h(s,0)|\ ds$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}u(t)+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\| &\leq c_{5,n}+\widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\ \psi\left(u(s)+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|\right)\ ds\\ &+\frac{\widehat{M}}{\lambda}\int_0^t \eta(s)\ \ (u(s)+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|)\ ds.\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t)=\sup_{0\leq s\leq t}\{u(s)+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|\ \}.$$

Soit $t^{\star}\in[0,t]$ tel que :

$$\mu(t\star)=u(t^{\star})+\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|.$$

De l'inégalité précédente, nous avons pour tout $t\in[0,n]$

$$\mu(t)\leq c_{5,n}+\widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds+\widehat{M}\int_0^t \eta(s)\mu(s)ds.$$

Si $t^{\star}\in[-r,0]$, alors $\mu(t^{\star})=\|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Prenons le côté droit de l'inégalité ci-dessus comme $v(t)$. Alors, on a :

$$\mu(t)\leq v(t)\quad \textit{pour tout } t\in[0,n].$$

De la définition de v, on a :

$$v(0)=c_{5,n}\quad \text{et}\quad v'(t)=\widehat{M}\left[nS_np(t)\psi(\mu(t))+\eta(t)\mu(t)\right]\quad \text{p. p. }\ t\in[0,n].$$

Utilisons la croissance de ψ, on obtient :

$$v'(t)\leq\widehat{M}[nS_np(t)\psi(v(t))+\eta(t)v(t)]\quad \text{p. p. }\ t\in[0,n]$$

Alors, utilisons (3.7) pour tout $t \in [0,n]$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_{c_{5,n}}^{v(t)} \frac{ds}{s+\psi(s)} &\leq \widehat{M} \int_0^t \max(nS_n p(s);\eta(s))\,ds \\ &\leq \widehat{M} \int_0^n \max(nS_n p(s);\eta(s))\,ds \\ &< \int_{\mathcal{L}^{\varphi}\|\varphi\|}^{+\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)}.\end{aligned}$$

Alors, pour chaque $t \in [0,n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ et donc : $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Tant que : $\|y\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|y\|_n \leq \Lambda_n$. Cela montre que l'ensemble Γ est borné. Ainsi $(Av2)$ du Théorème 1.9.2 ne tient pas. L'alternative non linéaire d'Avramescu implique que $(Av1)$ est satisfaite, nous déduisons que l'opérateur $F+G$ a un point fixe $y^\star$. Alors $y^\star(t) = y^\star(t) + x(t)$, $t \in]-\infty,+\infty[$ est le point fixe de l'opérateur N_5 qui est une solution faible du problème (3.1).

3.2.3 Exemple

Pour illustrer le résultat précédent, considérons dans cette section l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(t,x)\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \displaystyle\int_{-r}^{t} \eta(t,s)F(s,u(s-r,x))ds \\ \qquad + G(s,u(s-r,x)), \qquad t \geq 0, \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(t,x) = \Phi(t,x), \qquad x \in [-r,0],\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{3.9}$$

où $r > 0$; $a(t,x)$ est une fonction continue et uniformement Hölderienne par rapport à t ; $\eta : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $F, G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi : [-r,0]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Pour $x \in [0,\pi]$, on aura :

$$y(t)(x) = u(t,x) \quad t \geq 0,$$

$$\mathcal{I}(t,s) = \eta(t,s) \quad t,s \geq 0,$$

$$f(t,y_t)(x) = F(t,u(t-r,x)) \quad t \geq 0,$$

$$h(t,y_t)(x) = G(t,u(t-r,x)) \quad t \geq 0,$$

et

$$\varphi(t)(x) = \Phi(t,x) \quad t \in [-r,0].$$

Ainsi, avec les définitions ci-dessus de $\mathcal{I}$, f et $A(.)$, le système (3.9) peut être représenté par la forme abstraite du problème intégro-differentiel d'évolution (3.1). En outre, plus de conditions appropriées sur F, G et η assurent l'existence d'une solution faible pour (3.9) par le Théorème 3.2.1.

3.3 Problème de Type Neutre à Retard Fini

3.3.1 Solution faible et hypothèses

Rappelons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (3.2) :

Définition 3.3.1. *On dit que la fonction $y : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible de* (3.2) *si $y(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in H$ et y satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)\left[\varphi(0) - g(0,\varphi)\right] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)h(s, y_{\rho(s,y_s)})ds + \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, y_{\rho(s,y_s)})drds \quad \text{si } t \in J. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Considérons maintenant pour le cas neutre les hypothèses précédentes (H_φ), $(H0)-(H5)$ et ajoutons les hypothèses suivantes :

$(G1)$ Il existe une constante $\overline{M}_0 > 0$ telle que :

$$\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \leq \overline{M}_0 \quad \forall t \in J.$$

$(G2)$ Il existe une constante $0 < L < \overline{M}_0^{\,-1}$ telle que :

$$|A(t)g(t,\varphi)| \leq L(\|\varphi\| + 1) \quad \forall t \in J \text{ et } \forall \varphi \in C(H;E).$$

$(G3)$ Il existe une constante $L_* > 0$ telle que :

$$|A(s)g(s,\varphi) - A(\overline{s})g(\overline{s},\overline{\varphi})| \leq L_*(|s-\overline{s}| + \|\varphi - \overline{\varphi}\|)$$

pour tout $s, \overline{s} \in J$ et pour $\varphi, \overline{\varphi} \in C(H;E)$.

$(G4)$ La fonction g est complètement continue et pour tout ensemble borné $Q \subset C(J,E)$ l'ensemble $\{t \to g(t, x_{\rho(t,y_t)}) : x \in Q\}$ est équicontinu dans $C(J,E)$.

Considérons maintenant que : $\bar{l}_n(t) = \widehat{M}[L^* + \eta(t)]$ et choisissons $\tau > [1 - \overline{M}_0 L_*]^{-1}$.

3.3.2 Résultat d'existence

Théorème 3.3.1. *Supposons que : (H_φ), $(H0)-(H5)$ et $(G1)-(G4)$ sont satifaites et de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\int_{c_{6,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)} > \frac{\widehat{M}}{1 - \widehat{M}\overline{M}_0 L} \int_0^n \max(L + \eta(s); nS_n p(s))\ ds. \tag{3.11}$$

avec

$$c_{6,n} = \frac{\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\| + \widehat{M}\|\varphi\|(1 + \overline{M}_0 L) + 2\widehat{M}\overline{M}_0 L + \widehat{M}Ln + \widehat{M}\displaystyle\int_0^t |h(s,0)|ds}{1 - \widehat{M}\overline{M}_0 L}.$$

Alors le problème (3.2) *a une solution faible dans $[-r, +\infty[$.*

Preuve. Transformons le problème (3.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N_6 : C([-r, +\infty[; E) \to C([-r, +\infty[; E)$ défini par :

$$N_6(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in H\,; \\ U(t,0)\,[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \displaystyle\int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s)h(s, y_{\rho(s,y_s)})ds + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, y_{\rho(s,y_s)})drds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N_6 sont des solutions faibles du problème (3.2).

Définissons les opérateurs $F, G : C([-r, +\infty[; E) \to C([-r, +\infty[; E)$ par :

$$F(y)(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(r,y_r+x_r)} + x_{\rho(r,y_r+x_r)})drds$$

et

$$\begin{aligned} G(y)(t) &= U(t,0)\;[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)\; g(s, y_{\rho(s,y_s)})\; ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)\; h(s, y_{\rho(s,y_s)})\; ds. \end{aligned}$$

Il est clair que l'opérateur N_6 a un point fixe est équivaut à $F + G$ en a un, alors il faut prouver que : $F + G$ a un point fixe.

Dans la Section 3.2.2, nous avons montré en trois étapes que : F est continu et compact. Reste à montrer que : G est une contraction et que nous n'avons pas l'alternative $(Av2)$ du Théorème 1.9.2.

Etape 4 : G est une contraction. Soient $y, \overline{y} \in C([-r, +\infty[; E)$. Par les hypothèses $(H1)$, $(H5)$, $(G1)$ et $(G2)$, on obtient pour chaque $t \in [0, n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |G(y)(t) - G(\overline{y})(t)| &\leq |g(t, y_{\rho(t,y_t)}) - g(t, \overline{y}_{\rho(t,\overline{y}_t)})| \\ &+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} |A(s)\left(g(s, y_{\rho(s,y_s)}) - g(s, \overline{y}_{\rho(s,\overline{y}_s)})\right) ds \\ &+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} |h(s, y_{\rho(s,y_s)}) - h(s, \overline{y}_{\rho(s,y_s)})| ds, \\ &\leq \|A^{-1}(t)\|_{B(E)} |A(t)\left(g(t, y_{\rho(t,y_t)}) - g(t, \overline{y}_{\rho(t,\overline{y}_t)})\right)| \\ &+ \widehat{M}L^* \int_0^t \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,\overline{y}_s)}\| ds + \widehat{M} \int_0^t \eta(s) \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\| ds, \\ &\leq \overline{M}_0 L^* \|y_{\rho(t,y_t)} - \overline{y}_{\rho(t,\overline{y}_t)}\| + \int_0^t \widehat{M}[L^* + \eta(s)] \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,\overline{y}_s)}\| ds. \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité (3.8) pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
|G(y)(t)-G(\overline{y})(t)| &\leq \overline{M}_0 L^*|y(t)-\overline{y}(t)| + \int_0^t \widehat{M}[L^*+\eta(s)]|y(s)-\overline{y}(s)|ds, \\
&\leq \overline{M}_0 L^* \ e^{\tau L_n^*(t)} \ \left[e^{-\tau L_n^*(t)}|y(t)-\overline{y}(t)|\right] \\
&+ \int_0^t \left[\overline{l}_n(s)e^{\tau L_n^*(s)}\right]\left[e^{-\tau L_n^*(s)}|y(s)-\overline{y}(s)|\right] ds, \\
&\leq \overline{M}_0 L^* \ e^{\tau L_n^*(t)} \ \|y-\overline{y}\|_n + \int_0^t \left[\frac{e^{\tau L_n^*(s)}}{\tau}\right]' \ ds \ \|y-\overline{y}\|_n, \\
&\leq \left[\overline{M}_0 L^* + \frac{1}{\tau}\right] \ e^{\tau L_n^*(t)} \|y-\overline{y}\|_n.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|G(y)-G(\overline{y})\|_n \leq \left[\overline{M}_0 L^* + \frac{1}{\tau}\right] \ \|y-\overline{y}\|_n.
$$

Alors l'opérateur G est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 5 : Pour Appliquer le Théorème 1.9.2, nous devons exclure $(Av2)$: i.e. il reste à montrer que l'ensemble

$$
\Gamma = \ \left\{ y \in C([-r,+\infty[;E) \ : y = \lambda F(y) + \lambda G\left(\frac{y}{\lambda}\right) \quad \text{pour un certain } \lambda \in]0,1[\right\}.
$$

est borné.

Soit $y \in \Gamma$ pour chaque $t \in [0,n]$, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}|y(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \left|f(s, y_{\rho(s,y_s)})\right| drds + \|U(t,0)\|_{B(E)} \, |\varphi(0)-g(0,\varphi)| \\
&+ \left| g\left(t, \frac{y_{\rho\left(t,\frac{y_t}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right)\right| + \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \left| A(s) \ g\left(s, \frac{y_{\rho\left(s,\frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right)\right| ds \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \left| h\left(s, \frac{y_{\rho\left(s,\frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right) - h(s,0) + h(s,0)\right| ds.
\end{aligned}
$$

Par $(H1)$, $(H2)$, $(H5)$, $(G1)$ et $(G2)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}|y(t)| &\leq \widehat{M} n S_n \int_0^t p(s)\psi\left(\left\|y_{\rho(s,y_s)}\right\|\right) drds + \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \, |A(0)g(0,\varphi)| \\
&+ \widehat{M}\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \left| A(t) g\left(t, \frac{y_{\rho\left(t,\frac{y_t}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right)\right| + \widehat{M} L \int_0^t \left(\left\|\frac{y_{\rho\left(s,\frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right\| + 1\right) ds \\
&+ \widehat{M}\int_0^t \eta(s) \left\|\frac{y_{\rho\left(s,\frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right\| ds + \widehat{M}\int_0^t \ |h(s,0)| \ ds.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}|y(t)| &\leq \widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L)+2\widehat{M\overline{M}_0}L+\widehat{M}Ln+\widehat{M}\int_0^t |h(s,0)|\ ds\\
&+ \widehat{M\overline{M}_0}L\left\|\frac{y_{\rho\left(t,\frac{y_t}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right\|+\widehat{M}L\int_0^t\left\|\frac{y_{\rho\left(s,\frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right\|ds\\
&+ \widehat{M}\int_0^t\eta(s)\left\|\frac{y_{\rho\left(s,\frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda}\right\|ds+\widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi\left(\|y_{\rho(s,y_s)}\|\right)drds.
\end{aligned}$$

Utilisons la proposition (3.8) pour avoir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}|y(t)|+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\| &\leq \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|+\widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L)+2\widehat{M\overline{M}_0}L+\widehat{M}Ln\\
&+ \widehat{M}\int_0^t |h(s,0)|\ ds+\frac{\widehat{M\overline{M}_0}L}{\lambda}\left(|y(t)|+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right)\\
&+ \frac{\widehat{M}L}{\lambda}\int_0^t\left(|y(s)|+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right)ds+\frac{\widehat{M}}{\lambda}\int_0^t\eta(s)\left(|y(s)|+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right)ds\\
&+ \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi\left(|y(s)|+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right)drds.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$u(t):=\sup_{\theta\in[0,t]}|y(\theta)|.$$

La croissance de ψ donne avec le fait que $0<\lambda<1$

$$\begin{aligned}
\left(1-\widehat{M\overline{M}_0}L\right)\left(u(t)+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right) &\leq \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|+\widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L)+2\widehat{M\overline{M}_0}L+\widehat{M}Ln\\
&+ \widehat{M}\int_0^t|h(s,0)|ds+\widehat{M}\int_0^t(L+\eta(s))\left(u(s)+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right)ds\\
&+ \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi\left(u(s)+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right)drds.
\end{aligned}$$

Posons $c_{6,n}:=\dfrac{\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|+\widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L)+2\widehat{M\overline{M}_0}L+\widehat{M}Ln+\widehat{M}\displaystyle\int_0^t|h(s,0)|ds}{1-\widehat{M\overline{M}_0}L}$ pour avoir

$$\begin{aligned}
u(t)+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\| &\leq c_{6,n}+\frac{\widehat{M}}{1-\widehat{M\overline{M}_0}L}\int_0^t(L+\eta(s))\left(u(s)+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right)ds\\
&+ \frac{\widehat{M}nS_n}{1-\widehat{M\overline{M}_0}L}\int_0^t p(s)\psi\left(u(s)+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right)drds.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t)=\sup_{0\leq s\leq t}\left\{u(s)+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\ \right\},\quad 0\leq t\leq+\infty.$$

Soit $t^\star\in[0,t]$ telle que :

$$\mu(t^\star)=u(t^\star)+\mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|.$$

De l'inégalité précédente, nous avons pour tout $t \in [0,n]$

$$\mu(t) \leq c_{6,n} + \frac{\widehat{M}}{1-\widehat{M}\overline{M}_0 L}\int_0^t (L+\eta(s))\mu(s)ds + \frac{\widehat{M}nS_n}{1-\widehat{M}\overline{M}_0 L}\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))drds.$$

Si $t^\star \in [-r,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Prenons le côté droit de l'inégalité ci-dessus comme $v(t)$. Ensuite nous avons

$$\mu(t) \leq v(t) \quad \forall t \in [0,n].$$

De la définition de v, on a :

$$v(0) = c_{6,n} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{\widehat{M}}{1-\widehat{M}\overline{M}_0 L}(L+\eta(t))\mu(t) + \frac{\widehat{M}nS_n}{1-\widehat{M}\overline{M}_0 L}p(t)\psi(\mu(t)) \quad \text{p. p. } t \in [0,n].$$

Utilisons la croissance de ψ pour obtenir :

$$v'(t) \leq \frac{\widehat{M}}{1-\widehat{M}\overline{M}_0 L}(L+\eta(t))v(t) + \frac{\widehat{M}nS_n}{1-\widehat{M}\overline{M}_0 L}p(t)\psi(v(t)) \quad \text{p. p. } t \in [0,n]$$

Alors, en utilisant (3.11) pour chaque $t \in [0,n]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{c_{6,n}}^{v(t)} \frac{ds}{s+\psi(s)} &\leq \frac{\widehat{M}}{1-\widehat{M}\overline{M}_0 L}\int_0^t \max(L+\eta(s); nS_n p(s))\, ds \\
&\leq \frac{\widehat{M}}{1-\widehat{M}\overline{M}_0 L}\int_0^n \max(L+\eta(s); nS_n p(s))\, ds \\
&< \int_{c_{6,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $t \in [0,n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ et par conséquent $\mu(t) \leq \Lambda_n$. puisque : $\|y\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|y\|_n \leq \Lambda_n$. Cela montre que l'ensemble Γ est borné. Alors l'alternative $(Av2)$ dans le Théorème 1.9.2 ne tient pas. L'alternative non linéaire d'Avramescu implique que : $(Av1)$ est satisfait, nous déduisons que l'opérateur $F+G$ a un point fixe $y^\star$. Alors $y^\star(t)$ est un point fixe de l'opérateur N_6 qui est une solution faible du problème (3.2).

3.3.3 Exemple

Pour illustrer le résultat précédent, considérons dans cette section l'exemple suivant :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}[z(t,x) - \displaystyle\int_{-r}^t\int_0^\pi b(s-t,u,x)\ z(s,u)\ du\ ds] = a(t,x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) \\
+\displaystyle\int_0^t \alpha(t,s)Q(s,z(s-r,x),\frac{\partial z}{\partial x}(s-r,x))ds + L(s,z(s-r,x),\frac{\partial z}{\partial x}(s-r,x)), \\
\hfill t \geq 0, \quad x \in [0,\pi], \\
z(t,0) = z(t,\pi) = 0, \hfill t \geq 0, \\
z(t,x) = \Phi(t,x), \hfill t \in [-r,0],\ x \in [0,\pi].
\end{cases} \tag{3.12}$$

où $r > 0$; $a(t,x)$ est une fonction continue et uniformément Hölderienne par rapport à t ; $\alpha : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $Q, L : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi : [-r,0] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Pour $x \in [0,\pi]$, on aura :

$$\begin{aligned} y(t)(x) &= z(t,x) \quad t \geq 0, \\ \mathcal{I}(t,s) &= \alpha(t,s) \quad t,s \in [0,+\infty[, \\ f(t,y_t)(x) &= Q(t, z(t-r,x) \quad t \in [0,+\infty[, \\ h(t,y_t)(x) &= L(t, z(t-r,x) \quad t \in [0,+\infty[, \\ g(t,y_t)(x) &= \int_{-r}^{t}\int_0^{\pi} b(s-t,u,x)z(s,u)duds, \quad x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

et

$$\varphi(t)(x) = \phi(t,x) \quad t \in [-r,0].$$

Considérons $\varphi : [-r,0] \to E$ tel que : φ est Lebesgue mesurable et $h\|\varphi\|^2$ est Lebesgue intégrable sur $[-r,0]$ où $h : [-r,0] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable positive. Ici la norme définie par :

$$\|\varphi\| = \|\Phi(0)\| + (\int_{-r}^{0} h(s)\|\varphi\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$$

(i) la fonction b est mesurable et

$$\int_0^{\pi}\int_{-r}^{t}\int_0^{\pi} \frac{b^2(s,u,x)}{h(s)} ds\ du\ dx < \infty$$

(ii) les fonctions $\dfrac{\partial b}{\partial x}(s,u,x)$ et $\dfrac{\partial^2 b}{\partial^2 x}(s,u,x)$ sont mesurables, $b(s,u,0) = b(s,u,\pi) = 0$ et $\sup_{t\in[0,b]} N(t) < \infty$, où

$$N(t) = \int_0^{\pi}\int_{-r}^{t}\int_0^{\pi} \frac{1}{h(s)}(a(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}b(s,u,x))^2 ds\ du\ dx.$$

Ainsi, avec les définitions ci-dessus de f, g, $\mathcal{I}$ et A, le système (3.12) peut être représenté par la forme abstraite du problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (3.2). En outre, des conditions appropriées sur Q et L et η assurent l'existence d'une solution faible pour (3.12) par le Théorème 3.3.1.

3.4 Problème à Retard Infini

3.4.1 Solution faible et hypothèses

Définition 3.4.1. *On dit que la fonction $y : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible* (3.3) *si $y(t) = \phi(t)$ pour tout $t \leq 0$ et y satisfait l'équation intégrale suivante*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)\phi(0) + \int_0^t U(t,s)h(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(r,y_r)})drds \quad p.p.\ t \in J. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Supposons que : $\rho : J \times \mathcal{B} \to [-\infty, +\infty[$ est une fonction continue et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\phi) : (s,\phi) \in J \times \mathcal{B},\ \rho(s,\phi) \leq 0\}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H_ϕ) La fonction $t \to \phi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ dans $\mathcal{B}$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\phi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0, +\infty[$ telle que :

$$\|\phi_t\| \leq \mathcal{L}^\phi(t)\|\varphi\| \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-). \tag{3.14}$$

Nous aurons besoin d'introduire les hypothèses suivantes qui sont supposées ici

$(H0)$ $U(t,s)$ est compact pour $t - s > 0$.

$(H1)$ Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ telle que :

$$\|U(t,s)\|_{B(E)} \leq \widehat{M} \quad \text{pour tout } (t,s) \in \Delta.$$

$(H2)$ Il existe une fonction $p \in L^1_{loc}(J; \mathbb{R}_+)$ et une fonction continue et croissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to]0, \infty[$ et telle que :

$$|f(t,u)| \leq p(t)\ \psi(\|u\|_{\mathcal{B}}) \text{ pour tout } t \in J \text{ et chaque } u \in \mathcal{B}.$$

$(H4)$ Pour tout $t \in J$, I(t,s) est mesurable sur $[0,t]$ et

$$\mathcal{I}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |\mathcal{I}(t,s)|$$

est bornée sur $[0,n]$; soit

$$S_n = ess \sup_{t \in [0,n]} \mathcal{I}(t).$$

$(H5)$ Il existe une fonction $\eta \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$|h(t,u) - h(t,v)| \leq \eta(t) \quad \|u - v\|_{\mathcal{B}} \quad \text{p. p.} \quad t \in J \quad et \quad \forall u,v \in \mathcal{B}.$$

Considérons l'espace suivant

$$B_{+\infty} = \left\{ y : \mathbb{R} \to E : y|_{[0,T]} \text{ continue pour } T > 0 \text{ et } y_0 \in \mathcal{B} \right\},$$

où $y|_{[0,T]}$ est la restriction de y à l'intervale réel compact $[0,T]$.

Fixons $\tau > 1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $B_{+\infty}$ la semi-norme par :

$$\|y\|_n := \sup \{\ e^{-\tau\ L_n^*(t)}\ |y(t)| : t \in [0,n]\ \},$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)\ ds$, $\bar{l}_n(t) = \widehat{M} K_n \eta(t)$ et η est la fonction de $(H4)$.

Alors $B_{+\infty}$ est un espace de Fréchet avec cette famille de semi-normes $\|\cdot\|_{n \in \mathbb{N}}$.

3.4.2 Résultat d'existence

Théorème 3.4.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaites et de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\int_{c_{7,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)} > K_n \widehat{M} \int_0^n \max(nS_n p(s); \eta(s))\ ds. \tag{3.15}$$

with $c_{7,n} = (M_n + \mathcal{L}^\phi + K_n \widehat{M} H)\|\phi\|_{\mathcal{B}} + K_n \widehat{M} \int_0^n \ |h(s,0)|\ ds$. *Alors le problème* (3.3) *a une solution faible sur* $]-\infty, +\infty[$.

Preuve. Transformons le problème (3.3) à un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N_7 : B_{+\infty} \to B_{+\infty}$ défini par :

$$N_7(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \in \mathbb{R}^-; \\ \\ U(t,0)\ \phi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s)\ h(s, y_{\rho(s,y_s)})\ ds, & \\ \quad + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, y_{\rho(r,y_r)}) dr ds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

Il est clair que, les points fixes de l'opérateur N_7 sont les solutions faibles du problème (3.3).

Pour $\phi \in \mathcal{B}$, on définit la fonction $x(.) : \mathbb{R} \to E$ par :

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } \ t \leq 0; \\ U(t,0)\ \phi(0), & \text{si } \ t \in J. \end{cases}$$

Alors $x_0 = \phi$. Pour chaque fonction $z \in B_{+\infty}$, soit

$$y(t) = z(t) + x(t)$$

It est évident que y satisfait (3.13) si et seulement si z satisfait $z_0 = 0$ et

$$z(t) \;=\; \int_0^t U(t,s)\ h(s, y_{\rho(s,y_s)})\ ds + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, y_{\rho(r,y_r)}) dr ds.$$

Soit

$$B^0_{+\infty} = \{z \in B_{+\infty} : z_0 = 0\}.$$

On définit les opérateurs $F, G : B^0_{+\infty} \to B^0_{+\infty}$ par :

$$F(z)(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, z_{\rho(r,z_r+x_r)} + x_{\rho(r,z_r+x_r)}) dr ds$$

et

$$G(z)(t) = \int_0^t \ U(t,s) h(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}) ds.$$

Évidemment l'opérateur N_7 a un point fixe équivaut à $F+G$ en a un, alors on montre que : $F+G$ a un point fixe.

Premièrement, montrons que : F est continu et compact.

Etape 1 : Premièrement, on montre la continuité de F. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $B^0_{+\infty}$ tel que : $z_n \to z$ dans $B^0_{+\infty}$. Par l'hypothèse $(H1)$, on a :

$$\begin{aligned}|F(z_n)(t)-F(z)(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \times \\ &\quad \times |f(s, z_{n\rho(s,z_{ns}+x_s)} + x_{\rho(s,z_{ns}+x_s)}) - f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})| drds \\ &\leq \widehat{M}n\ ess \sup_{t\in[0,n]} |\mathcal{I}(t)| \int_0^t \left| f(s, z_{n\rho(s,z_{ns}+x_s)} + x_{\rho(s,z_{ns}+x_s)}) - f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})\right| ds \\ &\leq \widehat{M}nS_n \int_0^t \left| f(s, z_{n\rho(s,z_{ns}+x_s)} + x_{\rho(s,z_{ns}+x_s)}) - f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})\right| ds\end{aligned}$$

Puisque f est continue, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$|F(z_n)(t)-F(z)(t)| \to 0 \ \text{ si } \ n\to+\infty$$

Alors F est continu.

Etape 2 : Montrons que : F transforme tout borné de $B^0_{+\infty}$ dans un ensemble borné ; i,e. pour chaque $d>0$, il existe une constante positive ξ telle que :
$z\in B_d=\{z\in B^0_{+\infty} \ : \|z\|_n\leq d\}$ implique que : $\|F(z)\|_n\leq\xi$.

Soit $z\in B_d$, de $(H1)$, $(H2)$ et $(H4)$, on a pour chaque $t\in[0,n]$

$$\begin{aligned}|F(z)(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \times |f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})|\ drds \\ &\leq \widehat{M}nS_n \int_0^t p(s)\ \psi(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}})\ ds.\end{aligned}$$

De (1.13), on a pour chaque $t\in[0,n]$

$$\begin{aligned}\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}} &\leq \|z_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}} + \|x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_n|z(s)| + (M_n+\mathcal{L}^\phi)\|z_0\|_{\mathcal{B}} \\ &\qquad +K_n|x(s)| + (M_n+\mathcal{L}^\phi)\|x_0\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_n|z(s)| + K_n\|U(s,0)\|_{B(E)}|\phi(0)| + (M_n+\mathcal{L}^\phi)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_n|z(s)| + K_n\widehat{M}|\phi(0)| + (M_n+\mathcal{L}^\phi)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_n|z(s)| + K_n\widehat{M}H\|\phi\|_{\mathcal{B}} + (M_n+\mathcal{L}^\phi)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_n|z(s)| + (M_n+\mathcal{L}^\phi+K_n\widehat{M}H)\|\phi\|_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

Soit $c_n := (M_n+\mathcal{L}^\phi+K_n\widehat{M}H)\|\phi\|_{\mathcal{B}}$ et $\delta_n := K_nd+c_n$. Alors

$$\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}} \leq K_n|z(s)| + c_n \leq \delta_n. \tag{3.16}$$

Utilisons la croissance de ψ, on obtient pour chaque $t\in[0,n]$

$$|F(z)(t)| \leq \widehat{M}nS_n\psi(\delta_n)\|p\|_{L^1} := \varrho_n.$$

Alors il existe une constante positive ϱ_n telle que : $\|F(z)\|_n \leq \varrho_n$. Alors $F(B_d) \subset B_{\varrho_n}$.

Etape 3 : F transforme des ensembles bornés à des ensemble équi-continus de $B^0_{+\infty}$. Considérons B_d comme à l'étape 2 et on montre que : $F(B_d)$ est équi-continu. Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_1 < \tau_2$ et $z \in B_d$.

$$\begin{aligned}
|F(z)(\tau_2) - F(z)(\tau_1)| \;\leq\; & \int_0^{\tau_1} \|U(\tau_2,s) - U(\tau_1,s)\|_{B(E)} \times \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \\
& \quad \times |f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})| \, drds \\
+ & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|U(\tau_2,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \\
& \quad \times |f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})| \, drds.
\end{aligned}$$

Alors par (3.16) et la croissance de ψ, on obtient :

$$\begin{aligned}
|F(z)(\tau_2) - F(z)(\tau_1)| \;\leq\; & nS_n\psi(\delta_n) \int_0^{\tau_1} \|U(\tau_2,s) - U(\tau_1,s)\|_{B(E)} \, p(s) \, ds \\
+ & \widehat{M} n S_n \psi(\delta_n) \int_{\tau_1}^{\tau_2} p(s) \, ds.
\end{aligned}$$

Notons que le second membre de l'inégalité tend vers zéro quand $\tau_2 - \tau_1 \to 0$. Comme $U(t,s)$ est continu et compact pour $t > s$, alors on a la continuité de l'opérateur uniforme dans la topologie (voir [3, 69]). En conséquence des étapes 1 à 3 et d'après le théorème d'Arzelá-Ascoli, il suffit de montrer que l'opérateur F transforme B_d en un ensemble pré-compact dans E.

Soit $t \in J$ fixé et soit ε un nombre réel satisfait $0 < \varepsilon < t$. Pour $z \in B_d$, on définit

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(z)(t) &= U(t,0)\,\varphi(0) + \int_0^{t-\varepsilon} U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, z_{\rho(r,z_r)}) drds \\
&= U(t,0)\,\varphi(0) + U(t,t-\varepsilon) \int_0^{t-\varepsilon} U(t-\varepsilon,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, z_{\rho(r,z_r)}) drds
\end{aligned}$$

Comme $U(t,s)$ est un opérateur compact, l'ensemble $Z_\varepsilon(t) = \{F_\varepsilon(z)(t) \ : z \in B_d\}$ est pré-compact dans E pour chaque ε, $0 < \varepsilon < t$. De plus, en utilisant (3.16), $(H1)$, $(H2)$ et la croissance de ψ, on obtient :

$$\begin{aligned}
|F(z)(t) - F_\varepsilon(z)(t)| &\leq \int_{t-\varepsilon}^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, z_{\rho(r,z_r)}) drds, \\
&\leq \widehat{M} n S_n \psi(\delta_d) \int_{t-\varepsilon}^t p(s) \, ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble $Z(t) = \{F(z)(t) \ : z \in B_d\}$ est totalement borné donc relativement compact dans E. Donc, nous déduisons de Steps 1, 2 et 3 que : F est un opérateur compact.

Etape 4 : G est une contraction. Soient $z, \overline{z} \in B^0_{+\infty}$. Par les hypothèses $(H1)$ et $(H5)$, on obtient pour chaque $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|G(z)(t)-G(\overline{z})(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \times \\ &\quad \times \mid h(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)}+x_{\rho(s,z_s+x_s)}) - h(s, \overline{z}_{\rho(s,z_s+x_s)}+x_{\rho(s,z_s+x_s)}) \mid ds \\ &\leq \widehat{M}\int_0^t \eta(s)\ \|z_{\rho(s,z_s+x_s)}+x_{\rho(s,z_s+x_s)}-\overline{z}_{\rho(s,z_s+x_s)}-x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}\ ds \\ &\leq \widehat{M}\int_0^t \eta(s)\ \|z_{\rho(s,z_s+x_s)}-\overline{z}_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}\ ds.\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité (3.16), pour obtenir :

$$\begin{aligned}|G(z)(t)-G(\overline{z})(t)| &\leq \int_0^t \widehat{M}\ K_n\ \eta(s)\ |z(s)-(\overline{z})(s)|\ ds \\ &\leq \int_0^t \left[\overline{l}_n(s)\ e^{\tau L_n^*(s)}\right]\ \left[e^{-\tau L_n^*(s)}\ |z(s)-\overline{z}(s)|\right]\ ds \\ &\leq \int_0^t \left[\frac{e^{\tau\ L_n^*(s)}}{\tau}\right]'\ ds\ \|z-\overline{z}\|_n \\ &\leq \frac{1}{\tau}\ e^{\tau\ L_n^*(t)}\ \|z-\overline{z}\|_n.\end{aligned}$$

Donc

$$\|G(z)-G(\overline{z})\|_n \leq \frac{1}{\tau}\ \|z-\overline{z}\|_n.$$

Alors G est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 5 : Pour appliquer le théorème (1.9.2), il faut exclure $(Av2)$: c'est-à-dire qu'il reste à montrer que l'ensemble

$$\Gamma = \left\{ z \in B^0_{+\infty}\ : z = \lambda F(z) + \lambda G\left(\frac{z}{\lambda}\right) \quad \text{pour un certain } \lambda \in]0,1[\right\}.$$

est borné.

Soit $z \in \Gamma$. Par $(H1)-(H2)$ et $(H4)$, on a pour chaque $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|z(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)|\ \left|f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)}+x_{\rho(s,z_s+x_s)})\right|\ drds \\ &+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \left| h\left(s, \frac{z_{\rho\left(s, \frac{z_s}{\lambda}+x_s\right)}}{\lambda}\right) - h(s,0) + h(s,0)\right| ds \\ &\leq \widehat{M} n S_n \int_0^t p(s)\ \psi(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)}+x_{\rho(s,z_s+x_s)})\|_{\mathcal{B}})\ ds \\ &+ \widehat{M}\int_0^t \eta(s)\ \left\|\frac{z_{\rho\left(s, \frac{z_s}{\lambda}+x_s\right)}}{\lambda}\right\|_{\mathcal{B}}\ ds + \widehat{M}\int_0^t |h(s,0)|\ ds.\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité (3.16)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|z(t)| &\leq \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi(K_n|z(s)|+c_n)ds+\widehat{M}\int_0^t \eta(s)\left(\frac{K_n}{\lambda}|z(s)|+c_n\right)ds\\ &+ \widehat{M}\int_0^t |h(s,0)|\ ds.\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$u(t) := \sup_{\theta\in[0,t]}|z(\theta)|$$

et posons

$$c_{7,n} := c_n + K_n\widehat{M}\int_0^n |h(s,0)|\ ds.$$

Alors, de la croissance de ψ et le fait que $0<\lambda<1$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{K_n}{\lambda}u(t)+c_n &\leq c_{7,n}+K_n\widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\ \psi\left(\frac{K_n}{\lambda}u(s)+c_n\right)\ ds\\ &+ K_n\widehat{M}\int_0^t \eta(s)\ \left(\frac{K_n}{\lambda}u(s)+c_n\right)\ ds.\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t)=\sup\ \left\{\frac{K_n}{\lambda}u(s)+c_n\ :\ 0\leq s\leq t\right\},\quad 0\leq t\leq +\infty.$$

Soit $t^\star\in[0,t]$ telle que :

$$\mu(t^\star)=\frac{K_n}{\lambda}u(t^\star)+c_n.$$

De l'inégalité précédente, on a pour tout $t\in[0,n]$ et pour un certain $0<\lambda<1$

$$\mu(t)\leq c_{7,n}+K_n\widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds+K_n\widehat{M}\int_0^t\eta(s)\mu(s)ds.$$

Si $t^\star\in[-r,0]$, alors $\mu(t^\star)=\|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Prenons le côté droit de l'inégalité ci-dessus comme $v(t)$. Alors, on a :

$$\mu(t)\leq v(t)\quad \textit{pour tout } t\in[0,n].$$

De la définition de v, on a :

$$v(0)=c_{7,n}\quad \text{et}\quad v'(t)=K_n\widehat{M}\left[nS_np(t)\psi(\mu(t))+\eta(t)\mu(t)\right]\quad \text{p. p.}\ \ t\in[0,n].$$

Utilisons la croissance de ψ, on obtient :

$$v'(t)\leq K_n\widehat{M}[nS_np(t)\psi(v(t))+\eta(t)v(t)]\quad \text{p. p.}\ \ t\in[0,n]$$

Alors, utilisons (3.15) pour chaque $t\in[0,n]$ pour avoir

$$\begin{aligned}
\int_{c_{7,n}}^{v(t)} \frac{ds}{s+\psi(s)} &\leq K_n\widehat{M}\int_0^t \max(nS_np(s);\eta(s))\ ds \\
&\leq K_n\widehat{M}\int_0^n \max(nS_np(s);\eta(s))\ ds \\
&< \int_{c_{7,n}}^{+\infty}\frac{ds}{s+\psi(s)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $t \in [0,n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ et par conséquent $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|z\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|z\|_n \leq \Lambda_n$. Cela montre que l'ensemble Γ est borné. Alors l'alternative $(Av2)$ dans le Théorème 1.9.2 n'est pas vérifiée. L'alternative non linéaire d'Avramescu implique que : $(Av1)$ est satisfaite, nous déduisons que l'opérateur $F+G$ a un un point fixe $z^\star$. Alors $y^\star(t) = z^\star(t) + x(t)$, $t \in]-\infty,+\infty[$ est un point fixe de l'opérateur N_7 qui est une solution faible du problème (3.3).

3.4.3 Exemple

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \dfrac{\partial^2 u(t,\xi)}{\partial \xi^2} + a_0(t,\xi)u(t,\xi) \\
+\displaystyle\int_{-\infty}^0 a_1(s-t)u\left[s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2 d\theta\right),\xi\right] ds \\
+\displaystyle\int_{-\infty}^0 a_3(s-t)u\left[s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2 d\theta\right),\xi\right] ds, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi], \\
u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad\qquad t \geq 0, \\
u(\theta,\xi) = u_0(\theta,\xi), \qquad\qquad -\infty < \theta \leq 0,\ \xi \in [0,\pi],
\end{cases} \tag{3.17}$$

où $a_0(t,\xi)$ est une fonction continue et est continue uniformément au sens de Hölder en t ; $\eta : \mathbb{R}_-^2 \to \mathbb{R}$, $a_1, a_3 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ et $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\rho_i : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions continue pour $i = 1, 2$.

Théorème 3.4.2. *Soient $\mathcal{B} = BUC(\mathbb{R}_-;E)$ et $\phi \in \mathcal{B}$. Supposant que la condition (H_ϕ) est vérifiée, $\alpha : \mathbb{R}_-^2 \to \mathbb{R}$, $a_1, a_3 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ et $\rho_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, i = 1,2$ sont continues. Alors il existe au moins une solution faible de* (2.15).

Preuve. Sous les hypothèses, on a que :

$$f(t,\psi)(\xi) = \int_{-r}^0 a_1(s)\psi(s,\xi)ds,$$

$$h(t,\psi)(\xi) = \int_{-r}^0 a_3(s)\psi(s,\xi)ds$$

et

$$\rho(s,\psi) = s - \rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|\psi(0,\xi)|^2 d\theta\right)$$

sont des fonctions bien definées, qui permet de transformer le système (3.17) en système abstract (3.3). En plus, les fonctions f et h sont des fonctions linéaires et bornées. Maintenant, l'existence des solutions faibles peut être déduit à partir d'une application directe du Théorème 3.4.1.
À partir de la Remarque 1.7.1, on a le résultat suivant

Corollaire 3.4.1. *Soit $\phi \in \mathcal{B}$ une fonction continue et bornée. Alors il existe une solution faible de* (3.17) *sur* $\mathbb{R}$.

3.5 Problème de Type Neutre à Retard Infini

3.5.1 Solution faible et hypothèses

Avant d'énoncer et de prouver le résultat principal, nous donnons d'abord la définition d'une solution faible du problème d'évolution intégro-différentiel perturbé de type neutre à retard dépendant de l'état (3.4).

Définition 3.5.1. *On dit que la fonction $y(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible de* (3.4) *si $y(t) = \phi(t)$ pour tout $t \leq 0$ et y satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)[\phi(0) - g(0,\phi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)h(s, y_{\rho(s,y_s)})ds + \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, y_{\rho(s,y_s)})drds \ \forall t \in J. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Considérons les hypothèses précédentes et nous aurons besoin des hypothèses suivantes et nous aurons besoin d'introduire les hypothèses suivantes qui sont supposées ici

($G1$) Il existe une constante $\overline{M}_0 > 0$ telle que :

$$\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \leq \overline{M}_0 \quad \text{pour tout } t \in J.$$

($G2$) Il existe une constante $0 < L < \dfrac{1}{\overline{M}_0 K_n}$ telle que :

$$|A(t)\ g(t,\phi)| \leq L\ (\|\phi\|_{\mathcal{B}} + 1) \text{ pour tout } t \in J \text{ et } \phi \in \mathcal{B}.$$

($G3$) Il existe une constante $L_* > 0$ telle que :

$$|A(s)\ g(s,\phi) - A(\overline{s})\ g(\overline{s},\overline{\phi})| \leq L_*\ (|s - \overline{s}| + \|\phi - \overline{\phi}\|_{\mathcal{B}})$$

pour tout $s, \overline{s} \in J$ et $\phi, \overline{\phi} \in \mathcal{B}$.

($G4$) La fonction g est complètement continue et pour tout ensemble borné $Q \subset \mathcal{B}$ l'ensemble $\{t \to g(t, x_{\rho(t,y_t)}) : x \in Q\}$ est équi-continu dans $C(J,E)$.

Fixons $\tau > \left(1 - \overline{M}_0 L_* K_n\right)^{-1}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $B_{+\infty}$ la semi-norme par :

$$\|y\|_n := \sup\ \{\ e^{-\tau\ L_n^*(t)}\ |y(t)| : t \in [0,n]\ \},$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)\ ds$, $\bar{l}_n(t) = \widehat{M} K_n[L_* + \eta(t)]$ et η est la fonction de ($H5$).

Alors $B_{+\infty}$ est un espace de Fréchet avec cette famille de semi-normes $\|\cdot\|_{n\in\mathbb{N}}$.

3.5.2 Résultat d'existence

Théorème 3.5.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaites et de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\int_{c_{8,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)} > \frac{K_n\widehat{M}}{1-\overline{M}_0LK_n} \int_0^n \max(L+\eta(s), nS_np(s))\ ds \tag{3.19}$$

avec $c_n = \left(K_n\widehat{M}H + M_n + \mathcal{L}^\phi\right)\|\phi\|_{\mathcal{B}}$ *et*

$$c_{8,n} := c_n + \frac{K_n\left[\left(\widehat{M}+1\right)\overline{M}_0L + \widehat{M}\overline{M}_0L\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M}Ln + \overline{M}_0Lc_n + \widehat{M}\displaystyle\int_0^n |h(s,0)|\ ds\right]}{1-\overline{M}_0LK_n}.$$

Alors le problème (3.4) *a une solution faible.*

Preuve. Considérons l'opérateur $N_8 : B_{+\infty} \to B_{+\infty}$ défini par :

$$N_8(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \in \mathbb{R}^-; \\ U(t,0)\ [\phi(0) - g(0,\phi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s)A(s)\ g(s, y_{\rho(s,y_s)})\ ds + \int_0^t U(t,s)\ h(s, y_{\rho(s,y_s)})ds & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(s, y_{\rho(s,y_s)})\ drds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

Alors, les points fixes de l'opérateur N_8 sont des solutions faibles du problème (3.4).

Pour $\phi \in \mathcal{B}$, considérons la fonction $x(.) : \mathbb{R} \to E$ définie comme ci-dessous par :

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \le 0; \\ U(t,0)\ \phi(0), & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

Alors $x_0 = \phi$. Pour chaque fonction $z \in B_{+\infty}$, soit

$$y(t) = z(t) + x(t)$$

Il est clair que y satisfait (3.18) si et seulement si z satisfait $z_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} z(t) &= g(t, z_{\rho(s,z_t+x_t)} + x_{\rho(s,z_t+x_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) \\ &+ \int_0^t U(t,s)A(s)\ g(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})\ ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)\ h(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})\ ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)\ \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})\ drds. \end{aligned}$$

Soit

$$B^0_{+\infty} = \{z \in B_{+\infty} : z_0 = 0\}.$$

Définissons les opérateurs $F, G : B^0_{+\infty} \to B^0_{+\infty}$ par :

$$F(z)(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})\ drds$$

et

$$\begin{aligned} G(z)(t) &= g(t, z_{\rho(s,z_t+x_t)} + x_{\rho(s,z_t+x_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) \\ &+ \int_0^t U(t,s)A(s)\ g(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})\ ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)\ h(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})\ ds. \end{aligned}$$

Évidemment, l'opérateur N_8 ayant un point fixe est équivalent à $F+G$ ayant un, donc il faut prouver que : $F+G$ a un point fixe.

Dans la Section 3.4.2, nous avons montré en trois étapes que : F est continu et compact. Reste à montrer que : G est une contraction et que nous n'avons pas l'alternative $(Av2)$ du Théorème 1.9.2.

Etape 4 : G est une contraction. Soient $z, \overline{z} \in B^0_{+\infty}$. Par $(H1)$, $(H5)$, $(G1)$ et $(G2)$, on a pour chaque $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &|G(z)(t) - G(\overline{z})(t)| \leq \\ &\leq \|A^{-1}(t)\|_{B(E)}\ |A(t)[g(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)}) - g(t, \overline{z}_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)})]| \\ &+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} |A(s)[g(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}) - g(s, \overline{z}_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})]|\ ds \\ &+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)}\ |h(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}) - h(s, \overline{z}_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})|\ ds, \\ &\leq \overline{M_0} L_* \|z_{\rho(t,z_t+x_t)} - \overline{z}_{\rho(t,z_t+x_t)}\|_{\mathcal{B}} + \int_0^t \widehat{M} L_* \|z_{\rho(s,z_s+x_s)} - \overline{z}_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}\ ds \\ &+ \int_0^t \widehat{M} \eta(s) \|z_{\rho(s,z_s+x_s)} - \overline{z}_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}\ ds. \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité (3.16) pour obtenir :

$$\begin{aligned} |G(z)(t) - G(\overline{z})(t)| &\leq \overline{M_0} L_* K_n |z(t) - \overline{z}(t)| + \int_0^t \widehat{M} L_* K_n |z(s) - \overline{z}(s)|\ ds \\ &+ \int_0^t \widehat{M} K_n\ \eta(s) |z(s) - \overline{z}(s)|\ ds, \\ &\leq \overline{M_0} L_* K_n |z(t) - \overline{z}(t)| + \int_0^t \widehat{M} K_n [L_* + \eta(s)] |z(s) - \overline{z}(s)|\ ds, \\ &\leq \overline{M}_0 L_* K_n\ |z(t) - \overline{z}(t)| + \int_0^t \overline{l}_n(s)\ |z(s) - \overline{z}(s)| ds, \\ &\leq \left[\overline{M}_0 L_* K_n\ e^{\tau\ L^*_n(t)}\right]\ \left[e^{-\tau\ L^*_n(t)}\ |z(t) - \overline{z}(t)|\right] \\ &+ \int_0^t \left[\overline{l}_n(s)\ e^{\tau\ L^*_n(s)}\right]\ \left[e^{-\tau\ L^*_n(s)}\ |z(s) - \overline{z}(s)|\right] ds. \end{aligned}$$

Il en découle

$$\begin{aligned}|G(z)(t)-G(\overline{z})(t)| &\leq \overline{M}_0 L_* K_n\, e^{\tau\ L_n^*(t)}\ \|z-\overline{z}\|_n+\int_0^t\left[\frac{e^{\tau\ L_n^*(s)}}{\tau}\right]'\ ds\ \|z-\overline{z}\|_n,\\ &\leq \left[\overline{M}_0 L_* K_n+\frac{1}{\tau}\right]\ e^{\tau\ L_n^*(t)}\ \|z-\overline{z}\|_n.\end{aligned}$$

Donc

$$\|G(z)-G(\overline{z})\|_n \leq \left[\overline{M_0}L_* K_n+\frac{1}{\tau}\right]\|z-\overline{z}\|_n.$$

Alors pour $\overline{M_0}L_*K_n+\frac{1}{\tau}<1$, l'opérateur G est une contraction pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Etape 5 : Pour appliquer le théorème (1.9.2), il faut exclure l'alternative $(Av2)$ c'est-à-dire qu'il reste à montrer que l'ensemble

$$\widetilde{\Gamma}=\left\{z\in B_{+\infty}^0\ \ :\ z=\lambda F(z)+\lambda G\left(\frac{z}{\lambda}\right)\ \ pour\ 0<\lambda<1\right\}$$

est borné.

Soit $z\in\widetilde{\Gamma}$. Par $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$, $(H5)$, $(G1)$ et $(G2)$, on a pour chaque $t\in[0,n]$

$$\begin{aligned}\frac{|z(t)|}{\lambda} &\leq \int_0^t\|U(t,s)\|_{B(E)}\int_0^s|\mathcal{I}(s,r)||f(r,z_{\rho(r,z_r+x_r)}+x_{\rho(r,z_r+x_r)})|\ drds\\ &+ \|A^{-1}(t)\|_{B(E)}\left|A(t)g\left(t,\frac{z_{\rho(s,\frac{z_t}{\lambda}+x_t)}}{\lambda}+x_{\rho(s,\frac{z_t}{\lambda}+x_t)}\right)\right|\\ &+ \|U(t,0)\|_{B(E)}\|A^{-1}(0)\|_{B(E)}|A(0)g(0,\phi)|\\ &+ \int_0^t\|U(t,s)\|_{B(E)}\left|A(s)\ g\left(s,\frac{z_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}}{\lambda}+x_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}\right)\right|\ ds\\ &+ \int_0^t\|U(t,s)\|_{B(E)}\ \left|h\left(s,\frac{z_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}}{\lambda}+x_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}\right)-h(s,0)+h(s,0)\right|\ ds,\\ &\leq \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi\left(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)}+x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}\right)\ ds\\ &+ \overline{M}_0L\left(\left\|\frac{z_{\rho(s,\frac{z_t}{\lambda}+x_t)}}{\lambda}+x_{\rho(s,\frac{z_t}{\lambda}+x_t)}\right\|_{\mathcal{B}}+1\right)+\widehat{M}\overline{M}_0L\left(\|\phi\|_{\mathcal{B}}+1\right)\\ &+ \widehat{M}L\int_0^t\left(\left\|\frac{z_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}}{\lambda}+x_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)})\right\|_{\mathcal{B}}+1\right)\ ds\\ &+ \widehat{M}\int_0^t\eta(s)\left\|\frac{z_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}}{\lambda}+x_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}\right\|_{\mathcal{B}}\ ds+\widehat{M}\int_0^t|h(s,0)|\ ds,\\ &\leq \left(\widehat{M}+1\right)\overline{M}_0L+\widehat{M}\overline{M}_0L\|\phi\|_{\mathcal{B}}+\widehat{M}Ln+\widehat{M}\int_0^t|h(s,0)|\ ds\\ &+ \overline{M}_0L\left(\|z_{\rho(s,z_t+x_t)}+x_{\rho(s,z_t+x_t)}\|_{\mathcal{B}}\right)+\widehat{M}\int_0^t[L+\eta(s)]\|z_{\rho(s,z_s+x_s)}+x_{\rho(s,z_s+x_s)})\|_{\mathcal{B}}\ ds\\ &+ \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi\left(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)}+x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}\right)\ ds.\end{aligned}$$

Utilisons la Proposition 1.7.2 et $(A1)$ pour avoir

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{z_{\rho\left(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s\right)}}{\lambda} + x_{\rho\left(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s\right)} \right\|_{\mathcal{B}} &\leq \frac{1}{\lambda}\left\| z_{\rho\left(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s\right)} \right\|_{\mathcal{B}} + \left\| x_{\rho\left(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s\right)} \right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \frac{K_n}{\lambda}|z(s)| + \frac{M_n+\mathcal{L}^{\phi}}{\lambda}\|z_0\|_{\mathcal{B}} + K_n|x(s)| \\
&+ \left(M_n+\mathcal{L}^{\phi}\right)\|x_0\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \frac{K_n}{\lambda}|z(s)| + K_n\|U(s,0)\|_{B(E)}|\phi(0)| \\
&+ \left(M_n+\mathcal{L}^{\phi}\right)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \frac{K_n}{\lambda}|z(s)| + \left(K_n\widehat{M}H + M_n + \mathcal{L}^{\phi}\right)\|\phi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Pour $c_n := \left(K_n\widehat{M}H + M_n + \mathcal{L}^{\phi}\right)\|\phi\|_{\mathcal{B}}$, on an

$$\left\| \frac{z_{\rho\left(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s\right)}}{\lambda} + x_{\rho\left(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s\right)} \right\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{K_n}{\lambda}|z(s)| + c_n. \tag{3.20}$$

Utilisons ceci pour calculer les estimations précédentes

$$\begin{aligned}
\frac{|z(t)|}{\lambda} &\leq \left(\widehat{M}+1\right)\overline{M}_0L + \widehat{M\overline{M}}_0L\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M}Ln + \widehat{M}\int_0^t |h(s,0)|\ ds \\
&+ \overline{M}_0L\left(\frac{K_n}{\lambda}|z(t)| + c_n\right) + \widehat{M}\int_0^t [L+\eta(s)]\left(\frac{K_n}{\lambda}|z(s)| + c_n\right)\ ds \\
&+ \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\psi\left(K_n|z(s)| + c_n\right)\ ds.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction $u(\cdot)$ précédemment définie et la croissance de ψ pour avoir pour un certain $0<\lambda<1$

$$\begin{aligned}
\left(1-\overline{M}_0LK_n\right)\frac{u(t)}{\lambda} &\leq \left(\widehat{M}+1\right)\overline{M}_0L + \widehat{M\overline{M}}_0L\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M}Ln + \overline{M}_0Lc_n \\
&+ \widehat{M}\int_0^n |h(s,0)|\ ds + \widehat{M}\int_0^t [L+\eta(s)]\left(\frac{K_n}{\lambda}u(s) + c_n\right)\ ds \\
&+ \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\ \psi\left(\frac{K_n}{\lambda}u(s) + c_n\right)\ ds.
\end{aligned}$$

Pour $c_{8,n} := c_n + \dfrac{K_n\left[\left(\widehat{M}+1\right)\overline{M}_0L + \widehat{M\overline{M}}_0L\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M}Ln + \overline{M}_0Lc_n + \widehat{M}\int_0^n |h(s,0)|\ ds\right]}{1-\overline{M}_0LK_n}$.

L'estimation précédente devient :

$$\begin{aligned}
\frac{K_n}{\lambda}u(t) + c_n &\leq c_{8,n} + \frac{K_n\widehat{M}}{1-\overline{M}_0LK_n}\int_0^t [L+\eta(s)]\left(\frac{K_n}{\lambda}u(s) + c_n\right)\ ds \\
&+ \frac{K_n\widehat{M}nS_n}{1-\overline{M}_0LK_n}\int_0^t p(s)\ \psi\left(\frac{K_n}{\lambda}u(s) + c_n\right)\ ds.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \sup \left\{ \frac{K_n}{\lambda} u(s) + c_n \quad : \ 0 \leq s \leq t \right\}, \quad 0 \leq t \leq +\infty$$

Soit $t^\star \in [0, t]$ telle que :

$$\mu(t) = \frac{K_n}{\lambda} u(t^\star) + c_n.$$

Par l'inégalité précédente, on a npour $t \in [0, n]$

$$\mu(t) \leq c_{8,n} + \frac{K_n \widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L K_n} \int_0^t [L + \eta(s)] \mu(s) \ ds + \frac{K_n \widehat{M} n S_n}{1 - \overline{M}_0 L K_n} \int_0^t \ p(s) \ \psi\left(\mu(s)\right) \ ds.$$

Si $t^\star \in [-r, 0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Prenons le côté droit de l'inégalité ci-dessus comme $v(t)$. Alors On a

$$\mu(t) \leq v(t) \quad \textit{pour tout } t \in [0, n].$$

De la définition de v, on obtient : $v(0) = c_{8,n}$ et

$$v'(t) = \frac{K_n \widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L K_n} \ [L + \eta(t)] \ \mu(t) + \frac{K_n \widehat{M} n S_n}{1 - \overline{M}_0 L K_n} \ p(t) \ \psi\left(\mu(t)\right) \quad \text{p. p.} \quad t \in [0, n].$$

Utilisons la croissance de ψ pour avoir

$$v'(t) \leq \frac{K_n \widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L K_n} \ [L + \eta(t)] \ v(t) + \frac{K_n \widehat{M} n S_n}{1 - \overline{M}_0 L K_n} \ p(t) \ \psi\left(v(t)\right) \quad \text{p. p.} \quad t \in [0, n].$$

Alors utilisons (3.19) on obtient pour chaque $t \in [0, n]$

$$\begin{aligned}
\int_{c_{8,n}}^{v(t)} \frac{ds}{s + \psi(s)} \quad &\leq \quad \frac{K_n \widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L K_n} \int_0^t \max(L + \eta(s), n S_n p(s)) \ ds \\
&\leq \quad \frac{\widehat{M} K_n}{1 - \overline{M}_0 L K_n} \int_0^n \max(L + \eta(s), n S_n p(s)) \ ds \\
&< \quad \int_{c_{8,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $t \in [0, n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ et par conséquent $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|z\|_n \leq \mu(t)$, on a nnnn$\|z\|_n \leq \Lambda_n$. Cela montre que l'ensemble $\widetilde{\Gamma}$ est borné. Ensuite, l'alternative $(Av2)$ dans le Théorème 1.9.2 n'est pas verifiée. L'alternative non linéaire d'Avramescu $(Av1)$ donne que l'opérateur $F + G$ a un point fixe $z^\star$. Alors $y^\star(t) = z^\star(t) + x(t)$, $t \in]-\infty, +\infty[$ est un point fixe de l'opérateur N_8 qui est une solution faible du problème (3.4).

3.5.3 Exemple

Considérons les équations aux dérivées partielles de type neutre

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[u(t,\xi)-\displaystyle\int_{-\infty}^{0}a_3(s-t)u\left(s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^{\pi}a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2d\theta\right),\xi\right)ds\right] & \\ =\dfrac{\partial^2u(t,\xi)}{\partial\xi^2}+a_0(t,\xi)u(t,\xi) & \\ +\displaystyle\int_{-\infty}^{0}a_1(s-t)u\left(s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^{\pi}a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2d\theta\right),\xi\right)ds & \\ +\displaystyle\int_{-\infty}^{0}a_4(s-t)u\left(s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^{\pi}a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2d\theta\right),\xi\right)ds, & \\ \hfill t\geq 0,\ \xi\in[0,\pi], & \\ v(t,0)=\ v(t,\pi)\ =0, & t\geq 0, \\ v(\theta,\xi)=\ v_0(\theta,\xi), & -\infty<\theta\leq 0,\ \xi\in[0,\pi], \end{array}\right. \tag{3.21}$$

où a_i, ρ_j comme dans (3.17) pour $i=0,1,2,3$ et $j=1,2$. Soit $a_4:\mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

Théorème 3.5.2. *Soient $\mathcal{B}=BUC(\mathbb{R}_-;E)$ et $\phi\in\mathcal{B}$. Supposons que la condition (H_ϕ) est vérifie et le fait que les fonctions $a_1,a_3,a_4:\mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$, $a_2:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ et $\rho_i:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ pour $i=1,2$ sont continues. Alors il existe une solution faible de* (3.21) *sur* $]-\infty,+\infty[$.

Preuve. À partir des hypothèses, on an

$$\mathcal{I}(t,\psi)(\xi)=\alpha(t,\xi),$$

$$f(t,\psi)(\xi)=\int_{-\infty}^{0}a_1(s)\psi(s,\xi)ds,$$

$$g(t,\psi)(\xi)=\int_{-\infty}^{0}a_3(s)\psi(s,\xi)ds,$$

$$h(t,\psi)(\xi)=\int_{-r}^{0}a_4(s)\psi(s,\xi)ds$$

et

$$\rho(s,\psi)=s-\rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^{\pi}a_2(\theta)|\psi(0,\xi)|^2d\theta\right)$$

sont des fonctions bien définies, qui permettent de transformer le système (3.21) en un système abstrait (4.4). En plus, les fonctions f, g et h sont linéaires et bornées. Maintenant, l'existence d'une solution faible peut être déduite à partir d'une application directe du Théorème 3.5.1.

À partir de la Remarque 1.7.1, on a nle résultat suivant :

Corollaire 3.5.1. *Pour $\phi\in\mathcal{B}$ est une fonction continue et bornée, il existe une solution faible de* (3.21) *sur* $]-\infty,+\infty[$.

Chapitre 4

Contrôlabilité pour des Équations Intégro-différentielles d'Évolution à Retard Dépendant de l'État

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la contrôlabilité des solutions faibles sur la demi-droite réelle positive de quatre classes d'équations intégro-différentielles d'évolution partielles et celles de type neutre à retard fini et infini dépendant de l'état en appliquant l'alternative non linéaire d'Avramescu sur les espaces de Fréchet [10].

Premièrement, nous considérons la contrôlabilité des solutions faibles démontrée dans la Section 4.2 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + Cu(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, & \text{p. p. } t \in J \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f : J \times C(H;E) \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times C(H;E) \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(H;E)$ sont des fonctions données, C est un opérateur linéaire borné de E dans E et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille définie précédemment.

Une extension de ce problème de contrôle pour le type neutre est donnée dans la Section 4.3 pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] = A(t)y(t) + Cu(t) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s) f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $A(\cdot)$, f, C, $\mathcal{I}$ et φ sont définies dans le problème (4.1) et $g : J \times C(H;E) \to E$ est une fonction donnée.

La contrôlabilité des solutions faibles est démontrée dans la Section 4.4 citée dans [63] pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + Cu(t) + \int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, & \text{p. p. } t \in J \\ \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{4.3}$$

où $f : J \times C(H;E) \to E$, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ sont des fonctions données, C est un opérateur linéaire borné de E dans E et $\mathcal{B}$ et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ sont déjà définis.

Une extension de ce problème de contrôle pour le type neutre est donnée dans la Section 4.5 citée dans [63] pour la classe suivante des équations intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] = A(t)y(t) + Cu(t) \\ \qquad + \int_0^t \mathcal{I}(t,s)f(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{4.4}$$

où $A(\cdot)$, f, C, $\mathcal{I}$ et ϕ sont définies dans le problème (4.3) et $g : J \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction donnée.

Enfin, quatre exemples seront donnés à la fin de chaque Section pour illustrer les résultats obtenus.

4.2 Problème à Retard Fini

4.2.1 Solution faible et hypothèses

Rappelons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (4.1) :

Définition 4.2.1. *On dit que la fonction $y(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible de* (4.1) *si $y(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \leq 0$ et y satisfaite l'equation intégrale suivante*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)\varphi(0) + \int_0^t U(t,s)Cu(s)ds \\ &+ \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(r,y_r)})drds \text{ pour tout } t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Définition 4.2.2. *Le problème intégro-différentiel d'évolution* (4.1) *est dit contrôllable si pour tout fonction initiale $\varphi \in C(H;E)$ et $\widehat{y} \in E$, il existe, pour quelque $n > 0$, quelque contrôle $u \in L^2([0,n];E)$ tel que : la solution faible $y(.)$ de* (4.1) *satisfaite la condition finale $y(n) = \widehat{y}$.*

Supposons que : $\rho : J \times C(H;E) \to [-r,+\infty[$ est une fonction continue et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\varphi) : (s,\varphi) \in J \times C(H;E),\ \rho(s,\varphi) \le 0\}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H_φ) La fonction $t \to \varphi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ dans $C(H;E)$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0,+\infty[$ telle que :

$$\|\varphi_t\| \le \mathcal{L}^\varphi(t)\|\varphi\| \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-). \tag{4.6}$$

On considère les hypoyhèses suivantes :

Pour la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

$(H0)$ $U(t,s)$ est compact pour $t-s>0$.

$(H1)$ Il existe une constante $\widehat{M} \ge 1$ telle que :

$$\|U(t,s)\|_{B(E)} \le \widehat{M} \quad \text{pour tout} \quad (t,s) \in \Delta.$$

$(H2)$ Il existe une fonction $\psi : J \to]0,+\infty[$ continue et croissante et il existe une fonction $p \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ telles que :

$$|f(t,u)| \le p(t)\ \psi(\|u\|) \qquad \text{p. p. } \ t \in J,\ \forall u \in C(H;E).$$

$(H3)$ Pour tout $R>0$, il existe une fonction $l_R \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ tel que :

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le l_R(t)\ \|u-v\|$$

$\forall u,v \in C(H;E)$ avec $\|u\| \le R$ et $\|v\| \le R$.

$(H4)$ Pour tout $t \in J$, I(t,s) est mesurable sur $[0,t]$ et

$$\mathcal{I}(t) = \sup_{0 \le s \le t} |\mathcal{I}(t,s)|$$

est bornée sur $[0,n]$; soit

$$S_n = ess \sup_{t \in [0,n]} \mathcal{I}(t).$$

$(H6)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'opérateur linéaire $W : L^2([0,n];E) \to E$ est défini par :

$$Wu = \int_0^n U(n,s)Cu(s)ds,$$

a un opérateur pseudo-inversible $\widetilde{W}^{-1}$ qui prend des valeurs dans $L^2([0,n];E)/kerW$ et il existe deux constantes positives $\widetilde{M}$ et $\widetilde{M_1}$ tels que :

$$\|C\| \le \widetilde{M} \quad et \quad \|\widetilde{W}^{-1}\| \le \widetilde{M_1}.$$

La notion du pseudo-inverse est donné dans le livre de Carmichael et Quinn [32].

Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans $C([-r,+\infty[;E)$ la famille de semi-norme par :

$$\|y\|_n = \sup\ \{\ e^{-\tau\ L_n^*(t)}\ |y(t)| : t \in [0,n]\ \}$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)\ ds$, $\bar{l}_n(t) = \widehat{M}nS_nl_n(t)$ et l_n est la fonction dans $(H3)$.

Alors $C([-r,+\infty[;E)$ est un espace de Fréchet muni de la famille des semi-normes $\|\cdot\|_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce qui suit, nous allons choisir $\tau > 1$.

4.2.2 Résultat de Contrôlabilité

Théorème 4.2.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaites et de plus il existe une constante* $M^\star > 0$ *tel que :*

$$\frac{M^\star}{c_{9,n} + \widehat{M}nS_n\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right)\psi(M^\star)\|p\|_{L^1}} > 1, \quad \textit{for each } n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

avec $c_{9,n} := \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n|\widehat{y}| + \left[\widehat{M}H(1 + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n) + \mathcal{L}^\varphi\right]\|\varphi\|$. *Alors, le problème intégro-différentiel d'évolution* (4.1) *est contrôlable sur* $[-r, +\infty[$.

Preuve. Transformons le problème (4.1) en un problème de point fixe dans l'espace de Fréchet précédent. Considérons l'opérateur $N_9 : C([-r, +\infty[; E) \to C([-r, +\infty[; E)$ défini par :

$$N_9(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in H\,; \\ U(t,0)\varphi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s)Cu_y(s)ds & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(r,y_r)})drds, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Pour une fonction arbitraire $y(.)$ on définit le contrôle

$$u_y(t) = \widetilde{W}^{-1}[\widehat{y} - U(n,0)\varphi(0) - \int_0^n U(n,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(r,y_r)})drds]$$

On obtient par $(H1)$, $(H4)$ et $(H6)$

$$\begin{aligned} |u_y(t)| &\leq \|\widetilde{W}^{-1}\|\,\Big[|\widehat{y}| \\ &\quad + \|U(t,0)\|_{B(E)}|\varphi(0)| + \int_0^n \|U(n,\tau)\|_{B(E)}\int_0^s |\mathcal{I}(s,r)||f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})|drd\tau\Big], \\ &\leq \widetilde{M}_1\left[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\varphi\| + \widehat{M}nS_n\int_0^n |f(s, y_{\rho(s,y_s)})|ds\right]. \end{aligned}$$

En utilisant $(H2)$, on annnn

$$|u_y(t)| \leq \widetilde{M}_1\left[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\varphi\| + \widehat{M}nS_n\int_0^n |f(s, y_{\rho(s,y_s)})|ds\right]. \tag{4.8}$$

Utilisons ce contrôle et montrons que N_9 admet un point fixe $y(\cdot)$. Alors $y(\cdot)$ est une solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (4.1).

On définit les opérateurs $F, G : C([-r, +\infty[; E) \to C([-r, +\infty[; E)$ par :

$$F(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in H\,; \\ U(t,0)\ \varphi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s)Cu_y(s)ds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

et
$$G(y)(t) = \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r,y_{\rho(r,y_r)})drds.$$

Évidemment, l'opérateur N_9 a un point fixe équivalent à F en a un, donc il faut prouver que : $F+G$ a un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes. Nous montrons d'abord que : F est continu et compact.

Etape 1 : Premièrement, on montre la continuité de F. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([-r,+\infty[;E)$ une suite tel que : $y_n \to y$. Par les hypothèses $(H1)$, $(H4)$ et (4.8), on a pour chaque $t\in[0,n]$

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t)-F(y)(t)| &\leq \widehat{M}\widetilde{M}\int_0^t |u_{y_n}(s)-u_y(s)|ds \\
&\leq \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 nS_n\int_0^t\int_0^n |f(\tau,y_{n\rho(\tau,y_{n\tau})})-f(\tau,y_{\rho(\tau,y_\tau)})|d\tau ds, \\
&\leq \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2S_n\int_0^n |f(s,y_{n\rho(s,y_{ns})})-f(s,y_{\rho(s,y_s)})|ds.
\end{aligned}$$

Puisque : f est continue, on obtient par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$|F(y_n)(t)-F(y)(t)|\to 0 \quad \text{quand} \ \ n\to+\infty.$$

Donc : F est continu.

Etape 2 : F transforme tout borné de $C([-r,+\infty[;E)$ en ensembles bornés ; i,e. pour chaque $d>0$, il existe une constante positive ℓ telle que pour chaque $y\in B_d=\{y\in C([-r,+\infty[;E) \ : \|y\|_n\leq d\}$, on a : $\|F(y)\|_n\leq \ell$.

Soit $y\in B_d$, des hypothèses $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$ et (4.8), on a pour tout $t\in[0,n]$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \widehat{M}\widetilde{M}\int_0^t \widetilde{M}_1\left[|\widehat{y}|+\widehat{M}H\|\varphi\|+\widehat{M}nS_n\int_0^n p(r)\ \psi(\|y_{\rho(r,y_r)}\|)\ dr\right]ds, \\
&\leq \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\left[|\widehat{y}|+\widehat{M}H\|\varphi\|+\widehat{M}nS_n\int_0^n p(s)\ \psi(\|y_{\rho(s,y_s)}\|)ds\right].
\end{aligned}$$

De (3.8) et en utilisant la croissance de ψ, on a pour $t\in[0,n]$

$$|F(y)(t)|\leq \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\left[|\widehat{y}|+\widehat{M}H\|\varphi\|+\widehat{M}nS_n\psi(\delta_n)\|p\|_{L^1}\right]:=\varrho_d.$$

Alors il existe une constante positive ϱ_d telle quenn $\|F(y)\|_n\leq\varrho_d$. Alors $F(B_d)\subset B_{\varrho_d}$.

Etape 3 : F transforme les ensembles bornés en ensembles équi-continus de $C([-r,+\infty[;E)$. Considérons B_d comme à l'étape 2 et on montre quenn $F(B_d)$ est équi-continu. Soient $\tau_1,\tau_2\in J$ avec $\tau_1<\tau_2$ et $y\in B_d$.

$$\begin{aligned}
|F(y)(\tau_2)-F(y)(\tau_1)| &\leq \int_0^{\tau_1} \|U(\tau_2,s)-U(\tau_1,s)\|_{B(E)}\ \|C\||u_y(s)|\ ds \\
&+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|U(\tau_2,s)\|_{B(E)}\ \|C\||u_y(s)|\ ds.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité (4.8) et la croissance de ψ, on obtient :

$$|u_y(t)| \leq \widetilde{M}_1 \left[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\varphi\| + \widehat{M}\ nS_n\psi(\delta_n)\ \|p\|_{L^1}\right] := \omega. \tag{4.9}$$

Alors

$$\begin{aligned}|F(y)(\tau_2) - F(y)(\tau_1)| &\leq \|C\|_{B(E)}\ \omega \int_0^{\tau_1} \|U(\tau_2, s) - U(\tau_1, s)\|_{B(E)}\ ds \\ &+ \|C\|_{B(E)}\ \omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|U(\tau_2, s)\|_{B(E)}\ ds.\end{aligned}$$

Notons que le second membre de l'inégalité tend vers zéro quand $\tau_2 - \tau_1 \to 0$. Comme $U(t,s)$ est continu et compact pour $t > s$, alors on a la continuité de l'opérateur uniforme dans la topologie (voir [3, 69]). En conséquence des étapes 1 à 3 et d'après le théorème d'Arzelá-Ascoli, il suffit de montrer que l'opérateur F transforme B_d en un ensemble pré-compact dans E.

Soit $t \in J$ fixé et soit ε un nombre réel satisfait $0 < \varepsilon < t$. Pour $y \in B_d$, on définit

$$F_\epsilon(y)(t) = U(t, t-\epsilon) \int_0^{t-\epsilon} U(t-\epsilon, s)\ C\ u_y(s)\ ds.$$

Comme $U(t,s)$ est un opérateur compact, l'ensemble $Z_\varepsilon(t) = \{F_\varepsilon(y)(t)\ : y \in B_d\}$ est pré-compact dans E pour chaque ε, $0 < \varepsilon < t$. De plus, en utilisant (3.8), $(H1)$, $(H2)$ et la croissance de ψ, on obtient :

$$\begin{aligned}|F(y)(t) - F_\epsilon(y)(t)| &\leq \int_{t-\epsilon}^{t} \|U(t,s)\|_{B(E)}\ \|C\|\ |u_y(s)|\ ds \\ &\leq \|C\|_{B(E)}\ \omega \int_{t-\epsilon}^{t} \|U(t,s)\|_{B(E)}\ ds.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble $Z(t) = \{F(y)(t)\ : y \in B_d\}$ est totalement borné donc relativement compact dans E. Donc, nous déduisons de Steps 1, 2 et 3 que : F est un opérateur compact.

Etape 4 : Nous montrerons maintenant que l'opérateur G est une contraction. Soient $y, \overline{y} \in$. Par les hypothèses $(H1)$, $(H3)$, $(H4)$ et (3.8), on obtient pour chaque $t \in [0, n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|G(y)(t) - G(\overline{y})(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s \|\mathcal{I}(s,r)\|\ \left|f(r, y_{\rho(r,y_r)}) - f(r, \overline{y}_{\rho(r,\overline{y}_r)})\right| drds \\ &\leq \int_0^t \widehat{M}\ n\ S_n\ l_n(s)\ \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\| ds \\ &\leq \int_0^t \left[\overline{l}_n(s)\ e^{\tau L_n^*(s)}\right]\ \left[e^{-\tau L_n^*(s)}\ |y(s) - \overline{y}(s)|\right] ds \\ &\leq \int_0^t \left[\frac{e^{\tau\ L_n^*(s)}}{\tau}\right]'\ ds\ \|y - \overline{y}\|_n \\ &\leq \frac{1}{\tau}\ e^{\tau\ L_n^*(t)}\ \|y - \overline{y}\|_n.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|G(y) - G(\overline{y})\|_n \leq \frac{1}{\tau}\ \|y - \overline{y}\|_n.$$

Alors, l'opérateur G est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Etape 5 : Pour appliquer le théorème (1.9.2), nous devons vérifier que : $(Av2)$ n'est pas satisfaite i.e. il reste à montrer que l'ensemble
$\mathcal{E} = \left\{y \in C([-r, +\infty[; E) :\ y = \lambda\ F(y) + \lambda\ G\left(\frac{y}{\lambda}\right) \text{ pour quelque } 0 < \lambda < 1\right\}$ est borné.

Soit $y \in \mathcal{E}$. Par les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$ et $(H6)$ et par le contrôle (4.8), on a pour chaque $t \in [0, n]$

$$\begin{aligned}
\frac{|y(t)|}{\lambda} &\leq \|U(t,0)\|_{B(E)}\ |\varphi(0)| + \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)}\|C\||u_y(s)|ds \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \left| f\left(r, \frac{y_{\rho(r,\frac{y_r}{\lambda})}}{\lambda}\right)\right| drds \\
&\leq \widehat{M}H\|\varphi\| + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\left[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\varphi\| + \widehat{M}nS_n \int_0^n p(s)\psi(\|y_{\rho(s,y_s)}\|)ds\right] \\
&+ \widehat{M}nS_n \int_0^t p(s)\psi\left(\left\|\frac{y_{\rho(s,\frac{y_s}{\lambda})}}{\lambda}\right\|\right) ds \\
&\leq \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n|\widehat{y}| + \left[1 + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\right] \widehat{M}H\|\varphi\| \\
&+ \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n \int_0^n p(s)\psi(\|y_{\rho(s,y_s)}\|)ds + \widehat{M}nS_n \int_0^t p(s)\psi\left(\left\|\frac{y_{\rho(s,\frac{y_s}{\lambda})}}{\lambda}\right\|\right) ds.
\end{aligned}$$

Posons $c_{9,n} := \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n|\widehat{y}| + \left[\widehat{M}H(1 + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n) + \mathcal{L}^\varphi\right] \|\varphi\|$ et utilisons l'inégalité (3.8) et le fait que ψ est croissante, on obtient donc pour $0 < \lambda < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{|y(t)|}{\lambda} + \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\| &\leq \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\| + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n|\widehat{y}| + \left[1 + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\right] \widehat{M}H\|\varphi\| \\
&+ \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n \int_0^n p(s)\psi(|y(s)| + \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|)ds \\
&+ \widehat{M}nS_n \int_0^t p(s)\psi\left(\frac{|y(s)|}{\lambda} + \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right) ds, \\
&\leq c_{9,n} + \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n \int_0^n p(s)\psi\left(\frac{|y(s)|}{\lambda} + \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right) ds \\
&+ \widehat{M}nS_n \int_0^t p(s)\psi\left(\frac{|y(s)|}{\lambda} + \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\right) ds.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \sup\left\{\frac{|y(s)|}{\lambda} + \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|\ :\ s \in [0,t]\ \right\}\ \textit{pour tout } t \in J.$$

Soit $t^\star \in [0,t]$ tel que :

$$\mu(t^\star) = u(t^\star) + \mathcal{L}^\varphi\|\varphi\|.$$

De l'inégalité précédente, nous avons pour tout $t \in [0,n]$

$$\mu(t) \leq c_{9,n} + \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n \int_0^n p(s)\psi(\mu(s))ds + \widehat{M}nS_n \int_0^t p(s)\psi\left(\mu(s)\right)ds.$$

Si $t^\star \in [-r,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Ainsi

$$\mu(t) \leq c_{9,n} + \widehat{M}nS_n\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right)\int_0^n p(s)\psi(\mu(s))ds.$$

Par conséquent,

$$\frac{\|y\|_n}{c_{9,n} + \widehat{M}nS_n\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right)\psi(\|y\|_n)\|p\|_{L^1}} \leq 1.$$

Alors par la condition (4.7), il existe une constante $M_\star^n$ telle que : $\mu(t) \leq M_\star^n$. Comme $\|y\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|y\|_n \leq M_\star^n$. Cela montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné, c'est-à-dire l'alternative $(Av2)$ dans le Théorème 1.9.2 n'est pas vérifiée. Alors l'alternative nonlinéaire d'Avramescu [10] implique que : $(Av1)$ est vérifiée : c'est-à-dire l'opérateur $F+G$ a un point fixe $y^\star$. Alors, il existe au moins $y^\star(t)$, $t \in [-r,+\infty[$ qui est un point fixe de l'opérateur N_9, qui est une solution faible du problème (4.1). Ainsi le système d'évolution (4.1) est contrôllable sur $[-r,+\infty[$.

4.2.3 Exemple

Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(t,x)\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + d(\xi)u(t) + a_0(t,\xi)u(t,\xi) \\ + \displaystyle\int_{-r}^t \eta(t,s)F(s,u(s-r,x))ds, \qquad t \geq 0, \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = \ u(t,\pi) \ = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(t,x) = \ \Phi(t,x), \qquad x \in [-r,0], \ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{4.10}$$

où $r > 0$; $a(t,x)$ est une fonction continue et uniformement Hölderienne par rapport à t ; $\eta : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $F, G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d : [0,\pi] \to E$ et $\Phi : [-r,0] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Soit $u(\cdot)$ une fonction de contrôle donnée dans $L^2(\mathbb{R}_+;E)$ l'espace de Banach des fonctions de contrôles admissibles et C un opérateur linéaire borné de E dans E.

Pour $x \in [0,\pi]$, on aura :

$$y(t)(x) = z(t,x) \quad t \geq 0,$$

$$\mathcal{I}(t,s) = \eta(t,s) \quad t,s \geq 0,$$

$$f(t,y_t)(x) = F(t,u(t-r,x)) \quad t \geq 0,$$

$$Cu(t)(x) = d(x)u(t) \quad t \geq 0, \ u \in \mathbb{R}$$

et

$$\varphi(t)(x) = \Phi(t,x) \quad t \in [-r, 0].$$

Ainsi, avec les définitions ci-dessus de $\mathcal{I}$, f C et $A(.)$, le système (4.14) peut être représenté par la forme abstraite du problème intégro-différentiel d'évolution (4.1). En outre, plus de conditions appropriées sur F, d et η assurent la contrôlabilité de la solution faible pour (4.14) par le Théorème 4.2.1.

4.3 Problème de Type Neutre à Retard Fini

4.3.1 Solution faible et hypothèses

Avant d'énoncer et de prouver notre deuxième résultat principal, nous définissons d'abord la solution faible correspondante et nous définissons aussi le concept de contrôlabilité pour ce problème.

Définition 4.3.1. *On dit que la fonction $y(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible de* (4.2) *si $y(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in H$ et y satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)Cu(s)ds + \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, y_{\rho(s,y_s)})drds \text{ pour tout } t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Définition 4.3.2. *Le problème d'évolution de type neutre* (4.2) *est dit contrôllable si pour toute fonction initiale $\varphi \in C(H;E)$, $y^\star \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, il y a un certain contrôle $u \in L^2([0,n];E)$ tel que la solution faible $y(\cdot)$ de* (4.2) *satisfait $y(n) = y^\star$.*

On suppose ici que les hypothèses précédentes sont satifaites et nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

$(G1)$ Il existe une constante $\overline{M}_0 > 0$ telle que :

$$\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \leq \overline{M}_0 \quad \forall t \in J.$$

$(G2)$ Il existe une constante $0 < L < \overline{M}_0^{\,-1}$ telle que :

$$|A(t)g(t,\varphi)| \leq L(\|\varphi\| + 1) \quad \forall t \in J \text{ et } \forall \varphi \in C(H;E).$$

$(G3)$ Il existe une constante $L_* > 0$ telle que :

$$|A(s)g(s,\varphi) - A(\overline{s})g(\overline{s},\overline{\varphi})| \leq L_*(|s - \overline{s}| + \|\varphi - \overline{\varphi}\|)$$

pour tout $s, \overline{s} \in J$ et pour $\varphi, \overline{\varphi} \in C(H;E)$.

Considérons maintenant que $\bar{l}_n(t) = \widehat{M}[L^* + \eta(t)]$ et choisissons $\tau > [1 - \overline{M}_0 L_*]^{-1}$.

4.3.2 Résultat de Contrôlabilité

Théorème 4.3.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaits et de plus*

$$\frac{M^{\star\star}}{c_{10,n} + \frac{\widehat{M}}{1-\overline{M}_0L}\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + nS_n\right)[M^{\star\star} + \psi(M^{\star\star})] \ \ \psi(\|z\|_n)\|\zeta\|_{L^1}} > 1, \tag{4.12}$$

où $\zeta(t) = \max(L; p(t))$ *et* $c_{10,n} = (\mathcal{L}^\varphi + \widehat{M}H)\|\varphi\| + \frac{\beta_n}{1-\overline{M}_0L}$ *avec*

$$\begin{aligned}\beta_n &= \left[(\widehat{M}+1)\overline{M}_0L + \widehat{M}Ln\right]\left[\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right] + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\left(1+\overline{M}_0L\right)|\widehat{y}| \\ &+ \left[\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right)\overline{M}_0L\left[\widehat{M} + \mathcal{L}^\varphi\right] + \widehat{M}H\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + \overline{M}_0L\right)\right]\|\varphi\|.\end{aligned}$$

Alors le problème d'évolution de type neutre (4.2) *est contrôllable sur* $[r, +\infty[$.

Preuve. Considérons l'opérateur $N_{10} : C([-r, +\infty[; E) \to C([-r, +\infty[; E)$ défini par :

$$N_{10}(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in H; \\ U(t,0)\ [\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds & \\ + \int_0^t U(t,s)Cu(s)ds + \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, y_{\rho(s,y_s)})drds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

Alors, les points fixes d'opérateur N_{10} sont des solutions faibles du problème (4.2). Utilisons $(H6)$, pour une fonction arbitraire $y(\cdot)$, on définit le contrôle

$$\begin{aligned} u_y(t) = \tilde{W}^{-1}\Big[&y^\star - U(n,0)\left(\varphi(0) - g(0,\varphi)\right) - g(n, y_{\rho(n,y_n)}) \\ &- \int_0^n U(n,\tau)A(\tau)g(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})d\tau - \int_0^n U(n,\tau)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})drd\tau\Big](t). \end{aligned}$$

Par $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$, $(H6)$, $(G1)$ et $(G2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} |u_y(t)| &\leq \widetilde{M}_1\left[|y^\star| + \widehat{M}\left(H + \overline{M}_0L\right)\|\varphi\| + \left(\widehat{M}+1\right)\overline{M}_0L + \widehat{M}Ln\right] \\ &+ \widetilde{M}_1\overline{M}_0L\|y_{\rho(n,y_n)}\| + \widetilde{M}_1\widehat{M}L\int_0^n \|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\|d\tau \\ &+ \widetilde{M}_1\widehat{M}nS_n\int_0^n p(\tau)\psi(\|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\|)d\tau. \end{aligned} \tag{4.13}$$

En utilisant ce contrôle, l'opérateur N_{10} a un point fixe $y(\cdot)$. Alors $y(\cdot)$ est une solution faible du système d'évolution de type neutre (4.2).

On définit les opérateurs $F, G : C([-r, +\infty[; E) \longrightarrow C([-r, +\infty[; E)$ par :

$$\begin{aligned} F(y)(t) &= g(t, y_{\rho(t,y_t)}) - U(t,0)g(0,\varphi) \\ &+ \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds + \int_0^t U(t,s)Cu_y(s)ds \end{aligned}$$

et

$$G(y)(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(s, y_{\rho(s,y_s)}) dr ds.$$

Évidemment l'opérateur N_{10} a un point fixe est équivalent à $F+G$ a un, donc il faut prouver que : $F+G$ a un point fixe.

On peut montrer comme dans Section 4.2.2 que l'opérateur F est continu et compact et que l'opérateur G est une contraction. Pour appliquer l'alternative nonlinéaire d'Avramescu, nous devons exclure $(Av2)$ du Théorème 1.9.2 : c'est-à-dire qu'il reste à montrer que l'ensemble suivant

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \left\{ y \in C([-r,+\infty[;E) : \ y = \lambda F(y) + \lambda G\left(\frac{y}{\lambda}\right) \quad \text{for some } 0 < \lambda < 1 \right\}$$

est borné.

Soit $y \in \widetilde{\mathcal{E}}$. En utilisant les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$, $(H6)$, $(G1)$, $(G2)$ et le contrôle (4.13), on aura pour chaque $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned}
\frac{|y(t)|}{\lambda} &\leq \|A^{-1}\|_{B(E)} |Ag(t, y_{\rho(t,y_t)})| + \|U(t,0)\|_{B(E)} \|A^{-1}\|_{B(E)} |Ag(0,\varphi)| \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} |A(s) g(s, y_{\rho(s,y_s)})| ds + \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \|C\| |u_y(s)| ds \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| \left| f\left(s, \frac{y_{\rho\left(s, \frac{y_s}{\lambda}\right)}}{\lambda} \right) \right| dr ds, \\
&\leq \left[(\widehat{M}+1)\overline{M}_0 L + \widehat{M} L n \right] \left[\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1 \right] + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n |\widehat{y}| \\
&+ \widehat{M} \left[\overline{M}_0 L \left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1 \right) + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n H \right] \|\varphi\| \\
&+ \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 \overline{M}_0 L n \|y_{\rho(n,y_n)}\| + \overline{M}_0 L \|y_{\rho(t,y_t)}\| + \widehat{M} L \int_0^t \|y_{\rho(s,y_s)}\| \, ds \\
&+ \widehat{M}^2 \widetilde{M}\widetilde{M}_1 L n \int_0^n \|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\| \, d\tau + \widehat{M}^2 \widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n \int_0^n p(\tau) \ \psi(\| \left(y_{\rho(\tau,y_\tau)} \right) \|) \, d\tau \\
&+ \widehat{M} n S_n \int_0^t p(s) \ \psi \left(\left\| \frac{y_{\rho\left(s, \frac{y_\tau}{\lambda}\right)}}{\lambda} \right\| \right) ds.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité (3.8), on obtient $\|y_{\rho(n,y_n)}\| \leq |\widehat{y}| + L^{\varphi} \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente devient pour $0 < \lambda < 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{|y(t)|}{\lambda} + L^{\varphi}\|\varphi\| &\leq L^{\varphi}\|\varphi\| + \left[(\widehat{M}+1)\overline{M}_0 L + \widehat{M}Ln\right]\left[\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right] + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n|\widehat{y}| \\
&+ \widehat{M}\left[\overline{M}_0 L\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right) + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 nH\right]\|\varphi\| \\
&+ \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1\overline{M}_0 Ln\left(|\widehat{y}| + L^{\varphi}\|\varphi\|\right) + \overline{M}_0 L\left(|y(t)| + L^{\varphi} + \widehat{M}H\|\varphi\|\right) \\
&+ \widehat{M}L\int_0^t \left(|y(s)| + L^{\varphi})\|\varphi\|\right) ds + \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 Ln\int_0^n \left(|y(\tau)| + L^{\varphi}\|\varphi\|\right) d\tau \\
&+ \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n\int_0^n p(\tau)\ \psi\left(|y(\tau)| + L^{\varphi}\|\varphi\|\right) d\tau \\
&+ \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\ \psi\left(\frac{|y(s)|}{\lambda} + L^{\varphi}\|\varphi\|\right) ds.
\end{aligned}
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
\beta_n &:= \left[(\widehat{M}+1)\overline{M}_0 L + \widehat{M}Ln\right]\left[\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right] + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\left(1 + \overline{M}_0 L\right)|\widehat{y}| \\
&+ \left[\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right)\overline{M}_0 L\left[\widehat{M} + \mathcal{L}^{\varphi}\right] + \widehat{M}H\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\overline{M}_0 L\right)\right]\|\varphi\|.
\end{aligned}
$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$
\mu(t) = \sup_{s\in[0,t]}\frac{|y(s)|}{\lambda} + L^{\varphi}\|\varphi\| \quad \text{pour } t \in J.
$$

Soit $t^{\star} \in [0,t]$ tel que :

$$
\mu(t^{\star}) = \frac{|y(t^{\star})|}{\lambda} + L^{\varphi}\|\varphi\|.
$$

Par l'inégalité précédente, on a pour $c_{10,n} := L^{\varphi}\|\varphi\| + \dfrac{\beta_n}{1-\overline{M}_0 L}$, alors on obtient pour $t \in [0,n]$

$$
\mu(t) \leq c_{10,n} + \frac{\widehat{M}}{1-\overline{M}_0 L}\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + nS_n\right)\int_0^n \left[L\mu(s) + p(s)\ \psi(\mu(s))\right] ds
$$

Si $t^{\star} \in [-r,0]$, alors $\mu(t^{\star}) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Posons $\zeta(t) := \max(L;p(t))$ pour $t \in [0,n]$. Par conséquent, nous obtenons

$$
\frac{\|y\|_n}{c_{10,n} + \dfrac{\widehat{M}}{1-\overline{M}_0 L}\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + nS_n\right)\left[\|y\|_n + \psi(\|y\|_n)\right]\ \psi(\|y\|_n)\|\zeta\|_{L^1}} \leq 1.
$$

Alors par la condition (4.12), il existe une constante $M_{\star\star}^n$ telle que : $\mu(t) \neq M_{\star\star}^n$. Puisque : $\|y\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|y\|_n \neq M_{\star\star}^n$. Cela montre que l'ensemble $\widetilde{\mathcal{E}}$ est borné, c'est-à-dire $(Av2)$ dans le Théorème 1.9.2 n'est pas vérifiée. Alors l'alternative nonlinéaire d'Avramescu [10] implique que : $(Av1)$ est vérifiée : c'est-à-dire l'opérateur $F+G$ a un point fixe $y^{\star\star}$. Alors, Il existe au moins $y^{\star\star}(t) = y^{\star\star}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ qui est un point fixe de l'opérateur N_{10}, ce qui est une solution faible du problème (4.2). Ainsi le système d'évolution de type neutre (4.2) est contrôllable sur $\mathbb{R}$.

4.3.3 Exemple

Considérons le problème de contrôle de type neutre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[v(t,\xi) - \displaystyle\int_{-\infty}^{0} a_3(s-t)v\left(s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^{\pi} a_2(\theta)|v(t,\theta)|^2 d\theta\right),\xi\right)ds\right] \\ = \dfrac{\partial^2 v(t,\xi)}{\partial \xi^2} + d(\xi)u(t) + a_0(t,\xi)v(t,\xi) \\ + \displaystyle\int_{-r}^{t} \eta(t,\tau)\int_{-\infty}^{0} a_1(s-t)v\left(s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^{\pi} a_2(\theta)|v(t,\theta)|^2 d\theta\right),\xi\right)dsd\tau, \\ \hfill t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi], \\ v(t,0) = \ v(t,\pi)\ = 0, \hfill t \geq 0, \\ v(\theta,\xi) = \ v_0(\theta,\xi), \hfill -r < \theta \leq 0,\ \xi \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{4.14}$$

où $a_3 : [-r,0] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Pour $x \in [0,\pi]$, on aura :

$$\mathcal{I}(t,s) = \eta(t,\tau) \quad t,\tau \geq 0,$$

$$f(t,\psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} a_1(s)\psi(s,\xi)ds,$$

$$g(t,\psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} a_3(s)\psi(s,\xi)ds,$$

$$\rho(s,\psi) = s - \rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^{\pi} a_2(\theta)|\psi(0,\xi)|^2 d\theta\right),$$

$$Cu(t)(\xi) = d(\xi)u(t),\ t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi],\ u \in \mathbb{R},\ d(\xi) \in E$$

sont bien définis et permettant de transformer le système (4.14) au système abstrait (2.4). De plus, les fonctions f et g sont linéaires bornées. Maintenant, On peut assurer la contrôlabilité de la solution faible par application direct du Théorème 4.3.1.

4.4 Problème à Retard Infini

4.4.1 Solution faible et hypothèses

Rappelons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (4.1) :

Définition 4.4.1. *On dit que la fonction $y(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible de* (4.1) *si $y(t) = \phi(t)$ pour tout $t \leq 0$ et y satisfait l'équation intégrale suivante pour tout $t \geq 0$*

$$y(t) = U(t,0)\phi(0) + \int_0^t U(t,s)Cu(s)ds + \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r,y_{\rho(r,y_r)})drds. \tag{4.15}$$

Définition 4.4.2. *Le problème intégro-différentiel d'évolution à retard infini dépendant de l'état* (4.1) *est dit contrôllable si pour tout fonction initiale* $\phi \in C(\mathcal{H}; E)$, $\widehat{y} \in E$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *il existe un contrôle* $u \in L^2([0,n]; E)$ *tel que la solution faible* $y(.)$ *de* (4.1) *satisfait la condition finale* $y(n) = \widehat{y}$.

Supposons que : $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\phi) : (s,\phi) \in J \times \mathcal{B},\ \rho(s,\phi) \leq 0\}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H_ϕ) La fonction $t \to \phi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ dans $\mathcal{B}$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\phi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0, +\infty[$ telle que :

$$\|\phi_t\| \leq \mathcal{L}^\phi(t)\|\varphi\| \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-). \tag{4.16}$$

Nous aurons besoin d'introduire les hypothèses suivantes

$(H0)$ $U(t,s)$ est compact pour $t - s > 0$.

$(H1)$ Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ telle que :

$$\|U(t,s)\|_{B(E)} \leq \widehat{M} \quad \text{pour tout } (t,s) \in \Delta.$$

$(H2)$ Il existe une fonction $p \in L^1_{loc}(J; \mathbb{R}_+)$ et une fonction continue et croissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to]0, \infty[$ et telle que :

$$|f(t,u)| \leq p(t)\ \psi(\|u\|_{\mathcal{B}}) \text{ pour tout } t \in J \text{ et chaque } u \in \mathcal{B}.$$

$(H3)$ Pour tout $R > 0$, il existe $l_R \in L^1_{loc}(J; \mathbb{R}_+)$ tel que :

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq l_R(t)\ \|u - v\|_{\mathcal{B}}$$

pour tout $u, v \in \mathcal{B}$ avec $\|u\|_{\mathcal{B}} \leq R$ et $\|v\|_{\mathcal{B}} \leq R$.

$(H4)$ Pour tout $t \in J$, I(t,s) est mesurable sur $[0,t]$ et

$$\mathcal{I}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |\mathcal{I}(t,s)|$$

est bornée sur $[0,n]$; soit

$$S_n = ess \sup_{t \in [0,n]} \mathcal{I}(t).$$

$(H6)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'opérateur linéaire $W : L^2([0,n]; E) \to E$ est défini par :

$$Wu = \int_0^n U(n,s)Cu(s)ds,$$

a un opérateur pseudo-inversible $\widetilde{W}^{-1}$ qui prend des valeurs dans $L^2([0,n]; E)/kerW$ et il existe deux constantes positives $\widetilde{M}$ et $\widetilde{M_1}$ tels que : :

$$\|C\| \leq \widetilde{M} \quad et \quad \|\widetilde{W}^{-1}\| \leq \widetilde{M_1}.$$

La notion du pseudo-inverse est donné dans le livre de Carmichael et Quinn [32].

Considérons l'espace suivant

$$B_{+\infty} = \left\{ y : \mathbb{R} \to E : y|_{[0,T]} \text{ continue pour } T > 0 \text{ et } y_0 \in \mathcal{B} \right\},$$

où $y|_{[0,T]}$ est la restriction de y à l'intervale réel compact $[0,T]$.

Fixons $\tau > 1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $B_{+\infty}$ la semi-norme par :

$$\|y\|_n := \sup \; \{ \; e^{-\tau \; L_n^*(t)} \; |y(t)| : t \in [0,n] \; \},$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s) \; ds$, $\bar{l}_n(t) = \widehat{M} \; n \; S_n \; l_n(s)$ et l_n est la fonction de $(H3)$.

Alors $B_{+\infty}$ est un espace de Fréchet avec cette famille de semi-normes $\| \cdot \|_{n \in \mathbb{N}}$.

4.4.2 Résultat de Contrôlabilité

Théorème 4.4.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaites et de plus il existe une constante $M^\star > 0$ telle que :*

$$\frac{M^\star}{c_{11,n} + K_n \widehat{M} n S_n \left(\widehat{M} \widetilde{M} \widetilde{M}_1 n + 1 \right) \psi(M^\star) \|p\|_{L^1}} > 1 \quad \text{pour chaque } n \in \mathbb{N} \tag{4.17}$$

avec $c_{11,n} = (M_n + \mathcal{L}^\phi + K_n \widehat{M} H)\|\phi\|_{\mathcal{B}} + K_n \widehat{M} \widetilde{M} \widetilde{M}_1 n \left[|\widehat{y}| + \widehat{M} H \|\phi\|_{\mathcal{B}} \right]$. Alors, le problème intégro-différentiel d'évolution (4.3) *a une solution faible contrôlable.*

Preuve. Transformons le problème (4.3) en un problème à point fixe dans l'espace de Fréchet précédent. Considérons l'opérateur $N_{11} : B_{+\infty} \to B_{+\infty}$ défini par :

$$N_{11}(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \leq 0\,; \\ \\ U(t,0)\phi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s) C u_y(s) ds & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, y_{\rho(r,y_r)}) dr ds, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On utilise l'hypoyhèse $(H6)$, pour une fonction arbitraire $y(.)$. Ainsi, on définit le contrôle

$$u_y(t) = \widetilde{W}^{-1}[\widehat{y} - U(n,0)\phi(0) - \int_0^n U(n,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, y_{\rho(r,y_r)}) dr ds]$$

On obtient

$$\begin{aligned} |u_y(t)| \;&\leq\; \|\widetilde{W}^{-1}\| \left[|\widehat{y}| + \|U(t,0)\|_{B(E)} |\phi(0)| + \right. \\ &+\; \left. \int_0^n \|U(n,\tau)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)| |f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})| dr d\tau \right], \\ &\leq\; \widetilde{M}_1 \left[|\widehat{y}| + \widehat{M} H \|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M} n S_n \int_0^s |f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})| d\tau \right]. \end{aligned}$$

D'où le contrôle qu'on va utiliser

$$|u_y(t)| \le \widetilde{M}_1 \left[|\widehat{y}| + \widehat{M} H \|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M} n S_n \int_0^s p(\tau)\psi(\|y_\tau\|_{\mathcal{B}}) d\tau \right]. \tag{4.18}$$

Avec ce contrôle, montrons que : N_{11} admet un point fixe $y(\cdot)$. Alors $y(\cdot)$ est une solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (4.1)

Pour $\phi \in \mathcal{B}$, on définit la fonction $x(.) : \mathbb{R} \to E$ by $x(t) = \phi(t)$ pour $t \le 0$ et $x(t) = U(t,0)\ \phi(0)$ pour $t \in J$. Alors $x_0 = \phi$.

Pour chaque fonction $z \in B_{+\infty}$ avec $z(0) = 0$, on note par : $\overline{z}$ la fonction définie par : $\overline{z}(t) = 0$ pour $t \le 0$ et $\overline{z}(t) = z(t)$ pour $t \in J$.

Si $y(\cdot)$ satisfait (4.15), on peut la décomposer comme $y(t) = z(t) + x(t)$, $t \ge 0$, ce qui implique : $y_t = z_t + x_t$, pour tout $t \in J$ et la fonction $z(\cdot)$ satisfait pour $t \in J$

$$z(t) = \int_0^t U(t,s) C u_{z+x}(s) ds + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, z_{\rho(r,z_r+x_r)} + x_{\rho(r,z_r+x_r)}) dr ds.$$

Soit $B^0_{+\infty} = \{z \in B_{+\infty} : z_0 = 0 \in \mathcal{B}\}$. Pour chaque $z \in B^0_{+\infty}$ on a :

$$\|z\|_{+\infty} = \|z_0\|_{\mathcal{B}} + \sup_{0 \le s < +\infty} |z(s)| = \sup_{0 \le s < +\infty} |z(s)|.$$

Ainsi $(B^0_{+\infty}, \|\cdot\|_{+\infty})$ est un espace de Banach. On définit les opérateurs $F, G : B^0_{+\infty} \to B^0_{+\infty}$ par :

$$F(z)(t) = \int_0^t U(t,s) C u_{z+x}(s) ds, \qquad \textit{pour } t \ge 0.$$

$$G(z)(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r, z_{\rho(r,z_r+x_r)} + x_{\rho(r,z_r+x_r)}) dr ds \qquad \text{pour } t \ge 0.$$

Évidemment, l'opérateur N_{11} a un point fixe équivalent à F a un, donc il faut prouver que : $F + G$ a un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes. Nous montrons d'abord que : F est continu et compact.

Etape 1 : F est continu. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $B^0_{+\infty}$ telle que : $z_n \to z$ dans $B^0_{+\infty}$. Par $(H1)$, $(H6)$ et (4.18), on obtient pour chaque $t \in [0, n]$

$$\begin{aligned}
|F(z_n)(t) - F(z)(t)| &\le \widehat{M}\widetilde{M} \int_0^t |u_{z_n+x}(s) - u_{z+x}(s)| ds \\
&\le \widehat{M}^2 \widetilde{M}\widetilde{M}_1 n S_n \int_0^t \int_0^n |f(\tau, z_{n\rho(\tau, z_{n\tau}+x_\tau)} + x_{\rho(\tau, z_{n\tau}+x_\tau)}) \\
&\qquad\qquad - f(\tau, z_{\rho(\tau,z_\tau+x_\tau)} + x_{\rho(\tau,z_\tau+x_\tau)})| d\tau ds \\
&\le \widehat{M}^2 \widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n \int_0^n |f(s, z_{n\rho(s,z_{ns}+x_s)} + x_{\rho(s,z_{ns}+x_s)}) - f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})| ds.
\end{aligned}$$

Comme f est continu, on obtient par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$|F(z_n)(t) - F(z)(t)| \to 0 \quad \text{as} \ \ n \to +\infty.$$

Donc F est continu.
Etape 2 : F transforme ensembles bornés de $B^0_{+\infty}$ en ensembles bornés ; i.e. pour chaque $d > 0$, il existe une constante positive ℓ telle que pour chaque $z \in B_d = \{z \in B^0_{+\infty} : \|z\|_n \leq d\}$ a un $\|F(z)\|_n \leq \ell$.

Soit $z \in B_d$. Par $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$ et (4.18), on a pour chaque $t \in [0, n]$

$$\begin{aligned} |F(z)(t)| &\leq \widehat{M}\widetilde{M} \int_0^t \widetilde{M}_1 \Big[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\ &\qquad\qquad + \widehat{M}nS_n \int_0^n p(\tau)\ \psi(\|z_{\rho(\tau,z_\tau+x_\tau)} + x_{\rho(\tau,z_\tau+x_\tau)}\|_{\mathcal{B}})\ d\tau\Big]\, ds \\ &\leq \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n \left[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M}nS_n \int_0^n p(s)\ \psi(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}) ds\right]. \end{aligned}$$

Utilisons la majoration (3.16), pour $z \in B_d$, alors on a pour $\delta_n := K_n d + c_n$. Par la croissance de ψ, on obtient pour chaque $t \in [0, n]$

$$|F(z)(t)| \leq \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n \left[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M}nS_n\psi(\delta_n)\|p\|_{L^1}\right] := \varrho_n.$$

Donc il existe un nombre positif ϱ_n tel que : $\|F(z)\|_n \leq \varrho_n$. Par conséquent $F(B_d) \subset B_{\varrho_n}$.
Etape 3 : F transforme tout les ensembles bornés en ensembles équi-continus de $B^0_{+\infty}$. Considérons B_d comme à l'étape 2 et on montre que : $F(B_d)$ est équi-continu.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_2 > \tau_1$ et $z \in B_d$. Alors

$$\begin{aligned} |F(z)(\tau_2) - F(z)(\tau_1)| &\leq \int_0^{\tau_1} \|U(\tau_2, s) - U(\tau_1, s)\|_{B(E)}\ \|C\||u_{z+x}(s)|\ ds \\ &+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|U(\tau_2, s)\|_{B(E)}\ \|C\||u_{z+x}(s)|\ ds. \end{aligned}$$

Par les majorationss (4.18) et (3.16) et la croissance de ψ, on obtient :

$$|u_{z+x}(t)| \leq \widetilde{M}_1 \left[|y^\star| + \widehat{M}H\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M}\ nS_n\psi(\delta_n)\ \|p\|_{L^1}\right] := \omega. \tag{4.19}$$

Alors

$$\begin{aligned} |F(z)(\tau_2) - F(z)(\tau_1)| &\leq \|C\|_{B(E)}\ \omega \int_0^{\tau_1} \|U(\tau_2, s) - U(\tau_1, s)\|_{B(E)}\ ds \\ &+ \|C\|_{B(E)}\ \omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|U(\tau_2, s)\|_{B(E)}\ ds. \end{aligned}$$

Notons que le second membre de l'inégalité tend vers zéro quand $\tau_2 - \tau_1 \to 0$. Comme $U(t, s)$ est continu et compact pour $t > s$, alors on a la continuité de l'opérateur uniforme dans la topologie (voir [3, 69]). En conséquence des étapes 1 à 3 et d'après le théorème d'Arzelá-Ascoli, il suffit de montrer que : l'opérateur F transforme B_d en un ensemble pré-compact dans E.

Soit $t \in J$ fixé et soit ε un nombre réel satisfait $0 < \varepsilon < t$. Pour $z \in B_d$, on définit

$$F_\epsilon(z)(t) = U(t, t - \epsilon) \int_0^{t-\epsilon} U(t - \epsilon, s)\ C\ u_{z+x}(s)\ ds.$$

Comme $U(t,s)$ est un opérateur compact, l'ensemble $Z_\varepsilon(t) = \{F_\varepsilon(z)(t) : z \in B_d\}$ est pré-compact dans E pour chaque ε, $0 < \varepsilon < t$. De plus, en utilisant (3.16), $(H1)$, $(H2)$ et la croissance de ψ, on obtient :

$$\begin{aligned} |F(z)(t) - F_\epsilon(z)(t)| &\le \int_{t-\epsilon}^{t} \|U(t,s)\|_{B(E)} \, \|C\| \, |u_{z+x}(s)| \, ds \\ &\le \|C\|_{B(E)} \, \omega \int_{t-\epsilon}^{t} \|U(t,s)\|_{B(E)} \, ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble $Z(t) = \{F(z)(t) : z \in B_d\}$ est totalement borné donc relativement compact dans E. Donc, nous déduisons de Steps 1, 2 et 3 que : F est un opérateur compact.

Step 4 : On montre maintenant que : l'opérateur G est une contraction. En effet, considérons $z, \overline{z} \in B^0_{+\infty}$. Par $(H1)$,$(H3)$ $(H4)$ et (3.16), on obtient pour chaque $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |G(z)(t) - G(\overline{z})(t)| &\le \int_0^t \widehat{M} \; n \; S_n \; l_n(s) \; \|z_{\rho(s,z_s+x_s)} - \overline{z}_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\le \int_0^t \widehat{M} \; n \; S_n \; K_n \; l_n(s) \; |z(s) - \overline{z}(s)| ds \\ &\le \int_0^t \left[\overline{l}_n(s) \; e^{\tau L_n^*(s)}\right] \; \left[e^{-\tau L_n^*(s)} \; |z(s) - \overline{z}(s)|\right] ds \\ &\le \int_0^t \left[\frac{e^{\tau \; L_n^*(s)}}{\tau}\right]' \; ds \; \|z - \overline{z}\|_n \\ &\le \frac{1}{\tau} \; e^{\tau \; L_n^*(t)} \; \|z - \overline{z}\|_n. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|G(z) - G(\overline{z})\|_n \le \frac{1}{\tau} \; \|z - \overline{z}\|_n.$$

Alors, l'opérateur G est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 5 : Pour appliqer le Théorème 1.9.2, nous devons exclure $(Av2)$: c'est-à-dire qu'il reste à montrer que l'ensemble suivant est borné

$$\mathcal{E} = \left\{ z \in B^0_{+\infty} : \; z = \lambda \; F(z) + \lambda \; G\left(\frac{z}{\lambda}\right) \quad \text{pour quelque } 0 < \lambda < 1 \right\}.$$

Soit $z \in \mathcal{E}$. Par (4.18), on a pour chaque $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned} \frac{|z(t)|}{\lambda} &\le \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n \left[|\widehat{y}| + \widehat{M} H \|\phi\|_{\mathcal{B}}\right] \\ &+ \widehat{M}^2 \widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n \int_0^n p(s)\psi\left(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}\right) ds \\ &+ \widehat{M} n S_n \int_0^t p(s)\psi\left(\left\|\frac{z_{\rho(s, \frac{z_s}{\lambda} + x_s)}}{\lambda} + x_{\rho(s, \frac{z_s}{\lambda} + x_s)}\right\|_{\mathcal{B}}\right) ds. \end{aligned}$$

Utilisons la première inégalité dans (3.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{z_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}}{\lambda} + x_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)} \right\|_{\mathcal{B}} &\leq \frac{K_n|z(s)|}{\lambda} + \frac{M_n+\mathcal{L}^\phi}{\lambda}\|z_0\|_{\mathcal{B}} \\
&+ K_n|x(s)| + \left(M_n+\mathcal{L}^\phi\right)\|x_0\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \frac{K_n|z(s)|}{\lambda} + K_n\|U(s,0)\|_{B(E)}|\phi(0)| + \left(M_n+\mathcal{L}^\phi\right)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \frac{K_n|z(s)|}{\lambda} + \left(K_n\widehat{M}H + M_n + \mathcal{L}^\phi\right)\|\phi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\left\| \frac{z_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}}{\lambda} + x_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)} \right\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{K_n|z(s)|}{\lambda} + c_n. \tag{4.20}$$

Par l'inégalité précédente et la croissance de ψ, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{|z(t)|}{\lambda} + c_n &\leq c_n + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\left[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\phi\|_{\mathcal{B}}\right] \\
&+ \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n \int_0^n p(s)\ \psi(K_n|z(s)| + c_n)ds \\
&+ \widehat{M}nS_n \int_0^t p(s)\ \psi\left(\frac{K_n|z(s)|}{\lambda} + c_n\right)ds.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ défini par :

$$\mu(t) = \sup_{s\in[0,t]} \frac{K_n|z(s)|}{\lambda} + c_n \quad \text{pour } t \in J.$$

Soit $t^\star \in [0,t]$ tel que :

$$\mu(t^\star) = \frac{K_n|z(t^\star)|}{\lambda} + c_n.$$

Si $t^\star \in [0,n]$, par l'inégalité précédente et la croissance de ψ, on a pour $c_{11,n} := c_n + K_n\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\left[|\widehat{y}| + \widehat{M}H\|\phi\|_{\mathcal{B}}\right]$

$$\mu(t) \leq c_{11,n} + K_n\widehat{M}nS_n\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right)\int_0^n p(s)\ \psi(\mu(s))\ ds.$$

Si $t^\star \in [-r,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Par conséquent,

$$\frac{\|z\|_n}{c_{11,n} + K_n\widehat{M}nS_n\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right)\psi(\|z\|_n)\|p\|_{L^1}} \leq 1.$$

Alors par la condition (4.17), il existe une constante $M_\star^n$ telle que : $\mu(t) \leq M_\star^n$. Comme $\|z\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|z\|_n \leq M_\star^n$. Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné, c'est-à-dire $(Av2)$ du le Théorème 1.9.2 ne tient pas. Ainsi, l'alternative non linéaire d'Avramescu

[10] implique que : $(Av1)$ est vérifiée : c'est-à-dire l'opérateur $F+G$ a un point fixe $z^\star$. Alors, il existe au moins $y^\star(t) = z^\star(t) + x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ qui est un fixe point de l'opérateur N_{11}, qui est une solution faible du problème (4.3). Ainsi le système d'évolution (4.3) est contrôllable sur $\mathbb{R}$.

4.4.3 Exemple

Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,\xi) = a(t,\xi)\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}(t,\xi) + d(\xi)u(t) + a_0(t,\xi)u(t,\xi) \\ + \displaystyle\int_{-r}^{t} \eta(t,\tau) \int_{-\infty}^{0} a_1(s-t)u\left[s - \rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2 d\theta\right), \xi\right] ds d\tau, \\ \hfill t \geq 0, \xi \in [0,\pi], \\ z(t,0) = \ z(t,\pi) \ = 0, \hfill t \geq 0, \\ z(\theta,\xi) = \ z_0(\theta,\xi), \hfill -\infty < \theta \leq 0, \xi \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{4.21}$$

où $a_0(t,\xi)$ est une fonction continue et uniformément Hölderienne par rapport à t ; $\eta : \mathbb{R}^2_- \to \mathbb{R}$, $a_1 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ et $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $\rho_i : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues pour $i = 1, 2$.

Soit $u(\cdot)$ une fonction de contrôle donnée dans $L^2(\mathbb{R}_+; E)$ l'espace de Banach des fonctions des contrôles admissibles et C un opérateur linéaire borné de E dans E.

Théorème 4.4.2. *Soient $\mathcal{B} = BUC(\mathbb{R}_-; E)$ et $\phi \in \mathcal{B}$. Supposons que la condition (H_ϕ) est satisfaite et que les fonctions $d : [0,\pi] \to E$, $\rho_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$, $a_1 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ et $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont continues. Alors le problème* (4.25) *est contrôlable sur* $]-\infty, +\infty[$.

Preuve. D'après les hypothèses, nous avons que :

$$\mathcal{I}(t,s) = \eta(t,\tau) \quad t,\tau \geq 0,$$

$$f(t,\psi)(\xi) = \int_{-r}^{0} a_1(s)\psi(s,\xi)ds,$$

$$\rho(s,\psi) = s - \rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|\psi(0,\xi)|^2 d\theta\right)$$

et

$$Cu(t)(\xi) = d(\xi)u(t),\ t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi],\ u \in \mathbb{R},\ d(\xi) \in E$$

sont bien définis permettant de transformer le système (4.21) au système abstrait (4.3). De plus, la fonction f est linéaire bornée. Maintenant, l'existence de la solution faible contrôlable peut être déduite d'une application directe du Théorème 4.4.1.

D'après la Remarque 1.7.1, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 4.4.1. *Soit $\phi \in \mathcal{B}$ une fonction continue et bornée. Alors le problème* (4.21) *est contrôlable sur* $]-\infty, +\infty[$.

4.5 Problème de Type Neutre à Retard Infini

4.5.1 Solution faible et hypothèses

Avant d'affirmer et de prouver notre résultat, nous définissons tout d'abord la solution faible correspondante puis nous définissons le concept de contrôlabilité pour ce problème.

Définition 4.5.1. *On dit que la fonction $y(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ est une solution faible de* (4.4) *si $y(t) = \phi(t)$ pour tout $t \leq 0$ et y satisfait l'équation intégrale suivante*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)[\phi(0) - g(0,\phi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s)Cu(s)ds + \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, y_{\rho(s,y_s)})drds \text{ pour tout } t \geq 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Définition 4.5.2. *Le problème d'évolution de type neutre* (4.4) *est dit contrôllable si pour chaque fonction initiale $\phi \in \mathcal{B}$, $y^\star \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, il y a quelque contrôle $u \in L^2([0,n]; E)$ tel que la solution faible $y(\cdot)$ de* (4.4) *satisfait $y(n) = y^\star$.*

Considérons les hypothèses précédentes et nous aurons besoin des hypothèses suivantes et nous aurons besoin d'introduire les hypothèses suivantes qui sont supposées ici

$(G1)$ Il existe une constante $\overline{M}_0 > 0$ telle que :

$$\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \leq \overline{M}_0 \quad \textit{pour tout } t \in J.$$

$(G2)$ Il existe une constante $0 < L < \dfrac{1}{\overline{M}_0 K_n}$ telle que :

$$|A(t)\ g(t,\phi)| \leq L\ (\|\phi\|_{\mathcal{B}} + 1) \text{ pour tout } t \in J \text{ et } \phi \in \mathcal{B}.$$

$(G3)$ Il existe une constante $L_* > 0$ telle que :

$$|A(s)\ g(s,\phi) - A(\overline{s})\ g(\overline{s},\overline{\phi})| \leq L_*\ (|s - \overline{s}| + \|\phi - \overline{\phi}\|_{\mathcal{B}})$$

pour tout $s, \overline{s} \in J$ et $\phi, \overline{\phi} \in \mathcal{B}$.

$(G4)$ La fonction g est complètement continue et pour tout ensemble borné $Q \subset \mathcal{B}$ l'ensemble $\{t \to g(t, x_{\rho(t,y_t)}) : x \in Q\}$ est équi-continu dans $C(J,E)$.

Fixons $\tau > \left(1 - \overline{M}_0 L_* K_n\right)^{-1}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $B_{+\infty}$ la semi-norme par :

$$\|y\|_n := \sup \{\ e^{-\tau\ L_n^*(t)}\ |y(t)| : t \in [0,n]\ \},$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)\ ds$, $\bar{l}_n(t) = \widehat{M} K_n[L_* + \eta(t)]$ et η est la fonction de $(H4)$.

Alors $B_{+\infty}$ est un espace de Fréchet avec cette famille de semi-normes $\|\cdot\|_{n\in\mathbb{N}}$.

4.5.2 Résultat de Contrôlabilité

Théorème 4.5.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaites et de plus*

$$\frac{M^{\star\star}}{\gamma_n + \dfrac{K_n\widehat{M}}{1-\overline{M}_0LK_n}\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + nS_n\right)[M^{\star\star}+\psi(M^{\star\star})]\ \ \psi(\|z\|_n)\|\zeta\|_{L^1}} > 1, \tag{4.23}$$

où $\zeta(t) = \max(L; p(t))$ *et* $\gamma_n = (M_n + \mathcal{L}^\phi + K_n\widehat{M}H)\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \dfrac{K_n\beta_n}{1-\overline{M}_0LK_n}$ *avec*

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \left[(\widehat{M}+1)\overline{M}_0L + \widehat{M}Ln\right]\left[\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right] + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n\left(1 + K_n\overline{M}_0L\right)|\widehat{y}| \\
&+ \left[\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right)\overline{M}_0L\left[\widehat{M} + M_n + \mathcal{L}^\phi\right] + \widehat{M}H\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + \overline{M}_0LK_n\right)\right]\|\phi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Alors le problème d'évolution de type neutre (4.4) *est contrôllable sur* $\mathbb{R}$.

Preuve. Considérons l'opérateur $N_{12} : B_{+\infty} \to B_{+\infty}$ défini par :

$$N_{12}(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \le 0; \\[2mm] U(t,0)\ [\phi(0) - g(0,\phi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \displaystyle\int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s)Cu(s)ds + \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, y_{\rho(s,y_s)})drds, & \text{si } t \in J. \end{cases}$$

Alors, les points fixes d'opérator N_{12} sont des solutions faibles du problème (4.4).

Utilisons $(H6)$, pour des fonctions arbitraires $y(\cdot)$, on définit le contrôle

$$\begin{aligned}
u_y(t) &= \tilde{W}^{-1}\left[y^\star - U(n,0)\left(\phi(0) - g(0,\phi)\right) - g(n, y_{\rho(n,y_n)})\right. \\
&- \left.\int_0^n U(n,\tau)A(\tau)g(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})d\tau - \int_0^n U(n,\tau)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(\tau, y_{\rho(\tau,y_\tau)})drd\tau\right](t).
\end{aligned}$$

Notons que par : $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$, $(G1)$ et $(G2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|u_y(t)| &\le \widetilde{M}_1\left[|y^\star| + \widehat{M}\left(H + \overline{M}_0L\right)\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \left(\widehat{M}+1\right)\overline{M}_0L + \widehat{M}Ln\right] \\
&+ \widetilde{M}_1\overline{M}_0L\|y_{\rho(n,y_n)}\|_{\mathcal{B}} + \widetilde{M}_1\widehat{M}L\int_0^n \|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\|_{\mathcal{B}}d\tau \\
&+ \widetilde{M}_1\widehat{M}nS_n\int_0^n p(\tau)\psi(\|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\|_{\mathcal{B}})d\tau.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Utilisons ce contrôle, l'opérateur N_{12} a un point fixe $y(\cdot)$. Alors $y(\cdot)$ est une solution faible du système d'évolution de type neutre (4.4).

Pour $\phi \in \mathcal{B}$, nous allons définir la fonction $x(.) : \mathbb{R} \to E$ par : $x(t) = \phi(t)$ pour $t \le 0$ et $x(t) = U(t,0)\ \phi(0)$ pour $t \in J$. Alors $x_0 = \phi$.

Pour chaque $z \in B_{+\infty}$ avec $z(0) = 0$, on note par : $\overline{z}$ la fonction définie par : $\overline{z}(t) = 0$ pour $t \le 0$ et $\overline{z}(t) = z(t)$ pour $t \in J$.

Si $y(\cdot)$ satisfait (4.22), on la décompose comme $y(t) = z(t) + x(t)$ pour $t \geq 0$, ce qui implique $y_t = z_t + x_t$, pour tout $t \in J$ et la fonction $z(\cdot)$ satisfait $z_0 = 0$ et pour $t \in J$, on obtient :

$$\begin{aligned}
z(t) &= g(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) \\
&+ \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})ds + \int_0^t U(t,s)Cu_{z+x}(s)ds \\
&+ \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})drds.
\end{aligned}$$

Soient les opérateurs $F, G : B^0_{+\infty} \longrightarrow B^0_{+\infty}$ par :

$$\begin{aligned}
F(z)(t) &= g(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) \\
&+ \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})ds + \int_0^t U(t,s)Cu_{z+x}(s)ds
\end{aligned}$$

et

$$G(z)(t) = \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)})drds.$$

Évidemment l'opérateur N_{12} a un point fixe est équivalent à $F+G$ a un, alors il faut prouver que : $F+G$ a un point fixe.

On peut montrer comme dans la Section 4.4.2 que : l'opérateur F est continu et compact et que l'opérateur G est une contraction. Pour appliquer l'alternative nonlineire d'Avramescu, il faut exclure $(Av2)$ à Théorème 1.9.2 : c'est à dire qu'il reste à montrer que l'ensemble suivant

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \left\{ z \in B^0_{+\infty} : \ z = \lambda F(z) + \lambda G\left(\frac{z}{\lambda}\right) \quad \text{pour chaque } 0 < \lambda < 1 \right\}$$

est borné.

Soit $z \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Alors, Utilisons $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$, $(G1)$ et $(G2)$ ainsi que le contrôle (4.24), on a pour chaque $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned}
\frac{|z(t)|}{\lambda} &\leq \left[(\widehat{M}+1)\overline{M}_0 L + \widehat{M}Ln\right]\left[\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right] + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n|\widehat{y}| \\
&+ \widehat{M}\left[\overline{M}_0 L\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + 1\right) + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 nH\right]\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
&+ \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1\overline{M}_0 Ln\|z_{\rho(n,z_n+x_n)} + x_{\rho(n,z_n+x_n)}\|_{\mathcal{B}} \\
&+ \overline{M}_0 L\|z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)}\|_{\mathcal{B}} + \widehat{M}L\int_0^t \|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}\, ds \\
&+ \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 Ln\int_0^n \|\left(z_{\rho(\tau,z_\tau+x_\tau)}\right) + x_{\rho(\tau,z_\tau+x_\tau)}\|_{\mathcal{B}}\, d\tau \\
&+ \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n^2 S_n\int_0^n p(\tau)\ \psi(\|\left(z_{\rho(\tau,z_\tau+x_\tau)}\right) + x_{\rho(\tau,z_\tau+x_\tau)}\|_{\mathcal{B}})\, d\tau \\
&+ \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\ \psi\left(\left\|\frac{z_{\rho(s,\frac{z_\tau}{\lambda}+x_s)}}{\lambda} + x_{\rho(s,\frac{z_s}{\lambda}+x_s)}\right\|_{\mathcal{B}}\right) ds.
\end{aligned}$$

Par Proposition (1.7.2), on obtient :

$$\|z_{\rho(n,z_n+x_n)} + x_{\rho(n,z_n+x_n)}\|_{\mathcal{B}} \leq K_n|\widehat{y}| + (M_n + \mathcal{L}^{\phi})\|\phi\|_{\mathcal{B}}.$$

Utilisons l'inégalité (3.16) et (4.20), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{|z(t)|}{\lambda} + c_n &\leq c_n + \left[(\widehat{M}+1)\overline{M}_0L + \widehat{M}Ln\right]\left[\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1n + 1\right] + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1n|\widehat{y}| \\
&+ \widehat{M}\left[\overline{M}_0L\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1n + 1\right) + \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1nH\right]\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
&+ \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1\overline{M}_0Ln\left(K_n|\widehat{y}| + (M_n + \mathcal{L}^{\phi})\|\phi\|_{\mathcal{B}}\right) \\
&+ \overline{M}_0L\left(K_n|z(t)| + (M_n + \mathcal{L}^{\phi} + K_n\widehat{M}H)\|\phi\|_{\mathcal{B}}\right) \\
&+ \widehat{M}L\int_0^t (K_n|z(s)| + c_n)\,ds + \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1Ln\int_0^n (K_n|z(\tau)| + c_n)\,d\tau \\
&+ \widehat{M}^2\widetilde{M}\widetilde{M}_1n^2S_n\int_0^n p(\tau)\ \psi\left(K_n|z(\tau)| + c_n\right)d\tau \\
&+ \widehat{M}nS_n\int_0^t p(s)\ \psi\left(\frac{K_n|z(s)|}{\lambda} + c_n\right)ds.
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\beta_n &:= \left[(\widehat{M}+1)\overline{M}_0L + \widehat{M}Ln\right]\left[\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1n + 1\right] \\
&+ \widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1n\left(1 + K_n\overline{M}_0L\right)|\widehat{y}| + \left[\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1n + 1\right)\overline{M}_0L\left[\widehat{M} + M_n + \mathcal{L}^{\phi}\right]\right. \\
&+ \left.\widehat{M}H\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1n\overline{M}_0LK_n\right)\right]\|\phi\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ défini par :

$$\mu(t) = \sup_{s\in[0,t]}\frac{K_n|z(s)|}{\lambda} + c_n \qquad \text{pour } t \in J.$$

Soit $t^{\star} \in [0,t]$ tel que :

$$\mu(t) = \frac{K_n|z(t^{\star})}{\lambda} + c_n.$$

Si $t^{\star} \in [-r,0]$, alors $\mu(t^{\star}) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Par l'inégalité précédente, on a

$$\mu(t) \leq \gamma_n + \frac{K_n\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0LK_n}\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1n + nS_n\right)\int_0^n \left[L\mu(s) + p(s)\ \psi(\mu(s))\right]ds$$

pour $\gamma_n := c_n + \dfrac{K_n\beta_n}{1 - \overline{M}_0LK_n}$.

Soit $\zeta(t) := \max(L; p(t))$ for $t \in [0,n]$.

Par conséquent, nous obtenons

$$\frac{\|z\|_n}{\gamma_n + \dfrac{K_n\widehat{M}}{1-\overline{M}_0 L K_n}\left(\widehat{M}\widetilde{M}\widetilde{M}_1 n + nS_n\right)[\|z\|_n + \psi(\|z\|_n)]\ \ \psi(\|z\|_n)\|\zeta\|_{L^1}} \leq 1.$$

Alors par la condition (4.23), il existe une constante $M^n_{\star\star}$ telle que : $\mu(t) \leq M^n_{\star\star}$. Comme $\|z\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|z\|_n \leq M^n_{\star\star}$. Cela montre que l'ensemble $\widetilde{\mathcal{E}}$ est borné, c'est-à-dire l'alternative $(Av2)$ dans Théorème 1.9.2 n'est pas vérifiée. Donc l'alternative non linéaire d'Avramescu [10] implique que : $(Av1)$ est vérifiée : c'est-à-dire que l'opérateur $F+G$ a un point fixe $z^{\star\star}$. Alors, il existe au moins $y^{\star\star}(t) = z^{\star\star}(t) + x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ qui est un point fixe de l'opérateur N_{12} qui est une solution faible du problème (4.4). Donc le système d'évolution de type neutre (4.4) est contrôllable sur $\mathbb{R}$.

4.5.3 Exemple

Considérons le problème de contrôle de type neutre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[v(t,\xi) - \displaystyle\int_{-\infty}^{0} a_3(s-t)v\left(s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|v(t,\theta)|^2 d\theta\right),\xi\right)ds\right] \\ = \dfrac{\partial^2 v(t,\xi)}{\partial \xi^2} + d(\xi)u(t) + a_0(t,\xi)v(t,\xi) \\ + \displaystyle\int_{-r}^{t}\eta(t,\tau)\int_{-\infty}^{0} a_1(s-t)v\left(s-\rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|v(t,\theta)|^2 d\theta\right),\xi\right)dsd\tau, \\ \hfill t\geq 0,\ \xi\in[0,\pi], \\ v(t,0) = \ v(t,\pi)\ = 0, \hfill t\geq 0, \\ v(\theta,\xi) = \ v_0(\theta,\xi), \hfill -\infty<\theta\leq 0,\ \xi\in[0,\pi]. \end{cases} \tag{4.25}$$

où $a_3 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Théorème 4.5.2. *Soient $\mathcal{B} = BUC(\mathbb{R}_-; E)$ et $\phi \in \mathcal{B}$. Supposons que la condition (H_ϕ) est satisfaite et que les fonctions $d : [0,\pi] \to E$, $\rho_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1,2$, $a_1, a_3 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ et $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont continues. Alors le problème (4.25) est contrôlable sur $]-\infty,+\infty[$.*

Preuve. D'après les hypothèses, nous avons que :

$$\mathcal{I}(t,s) = \eta(t,\tau) \quad t,\tau \geq 0,$$

$$f(t,\psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} a_1(s)\psi(s,\xi)ds,$$

$$g(t,\psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} a_3(s)\psi(s,\xi)ds,$$

$$\rho(s,\psi) = s - \rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|\psi(0,\xi)|^2 d\theta\right)$$

et

$$Cu(t)(\xi) = d(\xi)u(t),\ t\geq 0,\ \xi\in[0,\pi],\ u\in\mathbb{R},\ d(\xi)\in E$$

sont bien définis permettant de transformer le système (4.25) au système abstrait (4.4). De plus, les fonctions f et g sont linéaires bornées. Maintenant, On peut assurer l'existence de la solution faible par application direct du Théorème 4.5.1.

D'après la remarque 1.7.1, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 4.5.1. *Soit $\phi \in \mathcal{B}$ une fonction continue et bornée. Alors le problème* (4.25) *est contrôlable sur* $]-\infty, +\infty[$.

Chapitre 5

Inclusions Intégro-différentielles d'Évolution à Retard Fini Dépendant de l'État

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions faibles sur la demi-droite réelle positive de deux classes d'inclusions intégro-différentielles perturbées d'évolution partielle et celle de type neutre à retard fini dépendant de l'état en utilisant l'alternative non linéaire de Frigon pour les contractions multivoques admisssibles dans les espaces de Fréchet [38, 39, 40].

L'existence des solutions faibles est démontrée dans la Section 5.2 pour la classe suivante des inclusions intégro-différentielles d'évolution avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) \in A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)F(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $F : J \times C(H;E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est une application multivoque à valeurs compactes non vides, $\mathcal{P}(E)$ est la famille des sous-ensembles de E, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times C(H;E) \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in C(H;E)$ sont des fonctions données et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille déjà définie.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 5.3 pour la classe suivante des inclusions intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard fini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] \in A(t)y(t) + \displaystyle\int_0^t \mathcal{I}(t,s)F(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \text{ p. p. } t \in J \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in H, \end{cases} \tag{5.2}$$

où $A(\cdot)$, F, $\mathcal{I}$ et φ sont données dans le problème (13) et $g : J \times C(H;E) \to E$ est une fonction donnée.

Enfin, deux exemples seront donnés à la fin de chaque Section pour illustrer les résultats obtenus.

5.2 Problème à Retard Fini

5.2.1 Solution faible et hypothèses

Rappelons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (5.1) :

Définition 5.2.1. *La fonction $y(\cdot) : [-r, +\infty[\longrightarrow E$ est dite solution faible du problème (5.1) si $y(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in H$ et $y(.)$ est continue sur l'interval J et il existe $f(.) \in L^1(J;E)$; $f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ presque partout dans J telle que y vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = U(t,0)\ \varphi(0) + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ f(\tau)\ d\tau ds \quad \textit{pour tout}\ \ t \in J. \tag{5.3}$$

Supposons que : $\rho : J \times C(H;E) \to [-r, +\infty[$ est une fonction continue et considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\varphi) : (s,\varphi) \in J \times C(H;E),\ \rho(s,\varphi) \leq 0\}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

$(\widehat{H}_\varphi)$ La fonction $t \to \varphi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ dans $C(H;E)$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to]0, +\infty[$ telle que :

$$\|\varphi_t\| \leq \mathcal{L}^\varphi(t)\|\varphi\| \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{R}(\rho^-). \tag{5.4}$$

Pour la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

$(\widehat{H}0)$ $U(t,s)$ est compact pour $t - s > 0$.

$(\widehat{H}1)$ Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ telle que :

$$\|U(t,s)\|_{B(E)} \leq \widehat{M} \quad \text{pour tout} \quad (t,s) \in \Delta.$$

$(\widehat{H}2)$ La multifonction $F : J \times C(H;E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est L^1_{loc}−Carathéodory compacte et convexe pour tout $u \in C(H;E)$ et Il existe une fonction $\psi : J \longrightarrow]0, +\infty[$ continue et croissante et il existe une fonction $p \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ telles que :

$$\|F(t,u)\|_{\mathcal{P}(E)} \leq p(t)\ \psi(\|u\|)$$

presque partout pour $t \in J$ et pour tout $u \in C(H;E)$.

$(\widehat{H}3)$ Pour tout $R > 0$, il existe une fonction $l_R \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ tel que :

$$H_d\left(F(t,u); F(t,v)\right) \leq l_R(t)\ \|u - v\|$$

$\forall u, v \in C(H;E)$ avec $\|u\| \leq R$ et $\|v\| \leq R$ et

$$H_d\left(0; F(t,0)\right) \leq l_R(t) \quad \text{p. p.}\ \ t \in J.$$

$(\widehat{H}4)$ Pour tout $t \in J$, I(t,s) est mesurable sur $[0,t]$ et

$$\mathcal{I}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} |\mathcal{I}(t,s)|$$

est bornée sur $[0,n]$; soit

$$S_n = ess \sup_{t \in [0,n]} \mathcal{I}(t).$$

Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans $C([-r,+\infty[;E)$ la famille de semi-norme par :

$$\|y\|_n = \sup \{ \ e^{-\tau \ L_n^*(t)} \ |y(t)| : t \in [0,n] \ \}$$

où $L_n^*(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s) \ ds$, $\bar{l}_n(t) = \widehat{M} n S_n l_n(t)$ et l_n est la fonction dans $(\widehat{H}3)$.

Alors $C([-r,+\infty[;E)$ est un espace de Fréchet muni de la famille des semi-normes $\| \cdot \|_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce qui suit, nous allons choisir $\tau > 1$.

5.2.2 Résultat d'existence

Théorème 5.2.1. *Supposons queles hypothèses précédentes sont satisfaites. Si en plus*

$$\int_{c_{13,n}}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} > \widehat{M} n S_n \int_0^n p(s) \ ds, \quad \textit{pour tout } n > 0 \tag{5.5}$$

avec $c_{13,n} = \widehat{M}\|\varphi\|$. *Alors le problème* (5.1) *admet une solution faible.*

Preuve. Transformons le problème (5.1) en un problème de point fixe. Considérons pour cela l'opérateur $N_{13} : C([-r,+\infty[;E) \longrightarrow \mathcal{P}(C([-r,+\infty[;E))$ défini par :

$$N_{13}(y) = \left\{ h \in C([-r,+\infty[;E) : h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(t), & \text{pour } t \in H\,; \\ U(t,0) \ \varphi(0) & \text{pour } t \in J \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau) \ f(\tau) \ d\tau ds. & \end{array} \right. \right\}$$

avec $f \in S_{F,y} = \left\{ \vartheta \in L^1(J;E), \ \vartheta(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)}) \ \text{ p. p. } \ t \in J \right\}$.

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N_{13} sont les solutions faibles du problème (5.1).

Soit y une solution faible possible du problème (5.1). On remarque aussi que, pour chaque $y \in C([-r,+\infty[;E)$, l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide, par $(\widehat{H}2)$ F a une sélection mesurable (voir [33], Théorème III.6).

Soit y un point fixe possible de l'opérateur N_{13}. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $t \leq n$, alors y devrait être la solution faible de l'inclusion $y \in \lambda N_{13}(y)$ pour quelque $\lambda \in]0,1[$ et il existe $f \in S_{F,y} \Leftrightarrow f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ telle que, pour chaque $t \in [0,+\infty[$. Alors d'après $(\widehat{H}1)$,

$(\widehat{H}2)$ et $(\widehat{H}4)$, on a :

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |U(t,0)|\ |\varphi(0)| + \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)}\ |\int_0^s \mathcal{I}(s,\tau) f(\tau)\ d\tau| ds \\
&\leq \widehat{M}|\varphi(0)| + \widehat{M} \int_0^t \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)|\ |f(\tau)|\ d\tau\ ds \\
&\leq \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M} \int_0^t \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)|\ p(\tau)\ \psi\left(\|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\|\right)\ d\tau\ ds \\
&\leq \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^t p(s)\ \psi\left(\|y_{\rho(s,y_s)}\|\right)\ ds.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) := \sup\ \{\ |y(s)|\ :\ 0 \leq s \leq t\ \}, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Soit $t^\star \in [-r, t]$ tel que

$$\mu(t^\star) = |y(t^\star)|.$$

Si $t^\star \in [0, n]$, d'après l'inégalité précédente, on aura :

$$\mu(t) \leq \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^t p(s)\ \psi(\mu(s))\ ds \quad t \in [0, n].$$

Si $t^\star \in [-r, 0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Prenons le second membre de cette inégalité comme étant $v(t)$. Ainsi nous aurons :

$$\mu(t) \leq v(t) \text{ pour tout } t \in [0, n].$$

De la définition de v, nous obtenons :

$$c_{13,n} := v(0) = \widehat{M}\|\varphi\| \quad \text{et} \quad v'(t) = \widehat{M}\ n\ S_n\ p(t)\ \psi(\mu(t)) \quad \text{p. p. } t \in [0, n].$$

Utilisons la croissance de ψ pour avoir :

$$v'(t) \leq \widehat{M}\ n\ S_n\ p(t)\ \psi(v(t)) \text{ p. p. } t \in [0, n].$$

Utilisons la condition (5.5) pour avoir :

$$\int_{c_{13,n}}^{v(t)} \frac{ds}{\psi(s)} \leq \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^t p(s)\ ds \leq \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^n p(s)\ ds < \int_{c_{13,n}}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} \quad \forall t \in [0, n].$$

Pour chaque $t \in [0, n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ ainsi $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|y\|_n \leq \mu(t)$, nous aurons donc $\|y\|_n \leq \max\{\|\varphi\|, \Lambda_n\} := \Delta_n$.

Considérons l'ensemble

$$Y = \{\ y \in C([-r, +\infty[; E)\ :\ \sup\{|y(t)| : 0 \leq t \leq n\} \leq \Delta_n + 1, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Il est clair que : Y est un sous-ensemble fermé de $C([-r, +\infty[; E)$.

Il faut montrer que : $N_{13} : \bar{Y} \to \mathcal{P}(C([-r, +\infty[; E))$ est une contraction et un opérateur admissible. Tout d'abord, nous prouvons que : N_{13} est une contraction.

Soient $y, \bar{y} \in C([-r, +\infty[; E)$. Alors, il existe $f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ telle que pour chaque $t \in [0, n]$

$$h(t) = U(t,0)\ \varphi(0) + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ f(\tau)\ d\tau ds.$$

De $(\widehat{H}3)$, il en résulte que :

$$H_d\left(F(t, y_{\rho(t,y_t)}); F(t, \bar{y}_{\rho(t,\bar{y}_t)})\right) \leq l_n(t)\ \|y_\rho - \bar{y}_\rho\|$$

Par conséquent, il y a $\omega \in F(t, \bar{y}_\rho)$ telle que :

$$|f(t) - \omega| \leq l_n(t)\ \|y_\rho - \bar{y}_\rho\|,\ t \in [0, n].$$

Considérons $Y_\star : [0, n] \to \mathcal{P}(E)$, donné par :

$$Y_\star = \{\omega \in E : |f(t) - \omega| \leq l_n(t)\ \|y_\rho - \bar{y}_\rho\|\}.$$

Comme l'opérateur multivoque $\upsilon(t) = Y_\star(t) \cap F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ est mesurable (dans [33], voir Proposition III.4), il existe une fonction $\bar{f}(t)$, qui est une sélection mesurable pour υ. Alors, $\bar{f}(t) \in F(t, \bar{y}_{\rho(t,\bar{y}_t)})$ et on obtient pour chaque $t \in [0, n]$

$$|f(t) - \bar{f}(t)| \leq l_n(t)\ \|y_\rho - \bar{y}_\rho\|.$$

On définit, pour chaque $t \in [0, n]$

$$\bar{h}(t) = U(t,0)\ \varphi(0) + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ \bar{f}(\tau)\ d\tau ds.$$

Considérons pour cela $y, \overline{y} \in C([-r, +\infty[; E)$. D'après $(\widehat{H}1)$, $(\widehat{H}3)$ et $(\widehat{H}4)$, nous aurons pour tout $t \in [0, n]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|h(t) - \bar{h}(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)||f(r) - \bar{f}(\tau, \overline{y}_{\rho(\tau,y_\tau)})|\ d\tau ds \\
&\leq \int_0^t \widehat{M}\ ess \sup_{t\in[0,n]} \mathcal{I}(t) \int_0^s |f(\tau) - \bar{f}(\tau, \overline{y}_{\rho(\tau,y_\tau)})|\ d\tau ds \\
&\leq \int_0^t \widehat{M}\ n\ S_n\ l_n(s)\ \|y_s - \overline{y}_s\|\ ds \\
&\leq \int_0^t [\bar{l}_n(s)\ e^{\tau\ L_n^*(s)}]\ [e^{-\tau\ L_n^*(s)}\ \|y_s - \overline{y}_s\|]\ ds \\
&\leq \int_0^t \left[\frac{e^{\tau\ L_n^*(s)}}{\tau}\right]'\ ds\ \|y - \overline{y}\|_n \\
&\leq \frac{1}{\tau}\ e^{\tau\ L_n^*(t)}\ \|y - \overline{y}\|_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|h - \overline{h}\|_n \leq \frac{1}{\tau}\ \|y - \overline{y}\|_n.$$

Par une relation analogue, obtenue en interchangeant les rôles de y et de $\bar{y}$, il en résulte que :

$$H_d(N_{13}(y), N_{13}(y)) \leq \frac{1}{\tau}\ \|y - \overline{y}\|_n.$$

Alors, pour $\tau > 1$, N_{13} est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Reste à montrer que : N_{13} est un opérateur admissible. Soit $y \in C([-r,+\infty[;E)$. Considérons $h : C([-r,n];E) \to \mathcal{P}(C([-r,n];E)$, donné par :

$$h(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \in H\,; \\ U(t,0)\ \varphi(0) + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ f(\tau)\ d\tau ds, & \text{si } t \in [0,n]. \end{cases}$$

avec $f \in S_{F,y} = \left\{\vartheta \in L^1([0,n];E),\ \vartheta(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)}) \text{ p. p. } t \in [0,n]\right\}$.

De $(\widehat{H}1)-(\widehat{H}3)$ et comme F est une transformation multivoque avec des variables compactes, on peut prouver que pour chaque $y \in C([-r,n];E), N_{13}(y) \in \mathcal{P}_{cp}(C([-r,n];E))$ et il existe $y_\star \in C([-r,n];E)$ tel que : $y_\star \in N_{13}(y_\star)$. Soient $h \in C([-r,n];E), \bar{y} \in \bar{Y}$ et $\epsilon > 0$. On suppose que : $y_\star \in N_{13}(\bar{y})$, alors on a :

$$\begin{array}{rcl} \|\bar{y}(t) - y_\star(t)\| & \leq & \|\bar{y}(t) - h(t)\| + \|y_\star(t) - h(t)\| \\ & \leq & \tau\ e^{\tau\ L_n^*(t)} \|\bar{y} - N_{13}(\bar{y})\|_n + \|y_\star(t) - h(t)\| \end{array}$$

Comme h est arbitraire, nous pouvons supposer que :
$h \in B(y_\star, \epsilon) = h \in C([-r,n];E) : \|h - y_\star\|_n \leq \epsilon$. Donc,

$$\|\bar{y} - y_\star\|_n \leq \|\bar{y} - N_{13}(\bar{y})\|_n + \epsilon.$$

Si y n'est pas dans $N_{13}(\bar{y})$, alors $\|y_\star - N_{13}(\bar{y})\| \neq 0$. Comme $N_{13}(\bar{y})$ est compact, il existe $x \in N_{13}(\bar{y})$ tel que : $\|y_\star - N_{13}(\bar{y})\| = \|y_\star - x\|$. Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} \|\bar{y}(t) - x(t)\| & \leq & \|\bar{y}(t) - h(t)\| + \|x(t) - h(t)\|, \\ & \leq & \tau\ e^{\tau\ L_n^*(t)} \|\bar{y} - N_{13}(\bar{y})\|_n + \|x(t) - h(t)\|. \end{array}$$

Ainsi,

$$\|\bar{y} - x\|_n \leq \|\bar{y} - N_{13}(\bar{y})\|_n + \epsilon.$$

Alors, N_{13} est une contraction de l'opérateur admissible. Du choix de Y, il n'y a pas $y \in \partial Y$ telle que : $y = \lambda N_{13}(y)$ pour quelque $\lambda \in]0,1[$. Alors $(F2)$ dans Théorème 1.9.3 n'est pas vérifiée. Une conséquence de l'alternative non linéaire de Frigon est que : $(F1)$ est vérifiée, Alors, nous en déduisons que l'opérateur N_{13} admet un point fixe $y^\star$ dans $\overline{Y}$ qui est une solution faible du problème (5.1).

5.2.3 Exemple

Pour illustrer le résultat précédent, considérons dans cette section l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in a(t,x) \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \\ \qquad + \displaystyle\int_{-r}^t \eta(t,s) F(s, u(s-r,x)) ds, \quad t \geq 0, \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(t,x) = \Phi(t,x), \qquad x \in [-r,0],\ x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{5.6}$$

où $r > 0$; $a(t, x)$ est une fonction continue et uniformement Hölderienne par rapport à t ; $\eta : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi : [-r, 0] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Pour $x \in [0, \pi]$, on aura :

$$\begin{gathered} y(t)(x) = u(t,x) \quad t \geq 0, \\ \mathcal{I}(t,s) = \eta(t,s) \quad t,s \geq 0, \\ f(t,y_t)(x) = F(t, u(t-r,x)) \quad t \geq 0 \end{gathered}$$

et

$$\varphi(t)(x) = \Phi(t,x) \quad t \in [-r, 0].$$

Ainsi, avec les définitions ci-dessus de $\mathcal{I}$, f et $A(.)$, le système (5.6) peut être représenté par la forme abstraite du problème intégro-différentiel d'évolution (5.1). En outre, plus de conditions appropriées sur F et η assurent l'existence de la solution faible pour (5.6) par le Théorème 5.2.1.

5.3 Problème de Type Neutre à Retard Fini

5.3.1 Solution faible et hypothèses

Donnons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (5.2).

Définition 5.3.1. *La fonction $y(\cdot) : [-r, +\infty[\longrightarrow E$ est dite solution faible du problème (5.2) si $y(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in H$ et $y(.)$ est continue sur l'interval J et il existe $f(.) \in L^1(J; E)$; $f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ presque partout dans J et $g : J \times C(H; E) \to E$. telle que : y vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} y(t) &= U(t,0)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})\, ds \\ &\quad + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau) f(\tau)\, d\tau ds \qquad \text{pour tout} \quad t \in J. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Considérons maintenant pour le cas neutre les hypothèses précédentes et ajoutons les hypothèses suivantes :

($\widehat{G}1$) Il existe une constante $\overline{M}_0 > 0$ telle que :

$$\|A^{-1}(t)\|_{B(E)} \leq \overline{M}_0 \quad \forall t \in J.$$

($\widehat{G}2$) Il existe une constante $0 < L < \overline{M}_0^{\,-1}$ telle que :

$$|A(t)g(t,\varphi)| \leq L(\|\varphi\| + 1)$$

$\forall t \in J$ et $\forall \varphi \in C(H; E)$.

($\widehat{G}3$) Il existe une constante $L_* > 0$ telle que :

$$|A(s)g(s,\varphi) - A(\overline{s})g(\overline{s},\overline{\varphi})| \leq L_*(|s - \overline{s}| + \|\varphi - \overline{\varphi}\|)$$

$\forall s, \overline{s} \in J$ et $\forall \varphi, \overline{\varphi} \in C(H; E)$.

Considérons maintenant que : $\bar{l}_n(t) = \widehat{M}(L_* + nS_n l_n(t))$ et choisissons $\tau > [1 - \overline{M}_0 L_*]^{-1}$.

5.3.2 Résultat d'existence

Théorème 5.3.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaites. Si en plus*

$$\int_{c_{14,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)} > \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L} \int_0^n \max(L; nS_n p(s))\, ds, \quad \textit{pour tout } n > 0 \tag{5.8}$$

avec

$$c_{14,n} = \frac{\widehat{M}\|\varphi\|(1 + \overline{M}_0 L) + \overline{M}_0 L(\widehat{M} + 1) + \widehat{M} L_n}{1 - \overline{M}_0 L}.$$

Alors le problème (5.2) *admet une solution faible sur* $[-r, +\infty[$.

Preuve. Transformons le problème (5.2) en un problème de point fixe. Considérons pour cela l'opérateur $N_{14} : C([-r, +\infty[; E) \longrightarrow \mathcal{P}(C([-r, +\infty[; E))$ défini par :

$$N_{14}(y) = \left\{ h \in C([-r, +\infty[; E) : h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(t), & \text{si } t \in [-r, 0]\,; \\ U(t,0)[\,\varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s) A(s) g(s, y_{\rho(s,y_s)})\, ds & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau) f(\tau) d\tau ds, & \\ & \text{si } t \geq 0\ . \end{array} \right. \right\}$$

avec $f \in S_{F,y} = \left\{\vartheta \in L^1(J; E),\ \vartheta(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)}) \ \text{ p. p. } \ t \in J\right\}.$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N_{14} sont les solutions faibles du problème (5.2).

Soit y une solution faible possible du problème (5.2). On remarque aussi que pour chaque $y \in C([-r, +\infty[; E)$, l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide, par $(\widehat{H}2)$ F a une sélection mesurable (voir [33], Théorème III.6).

Soit y un point fixe possible de l'opérateur N_{14}. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $t \leq n$, alors y devrait être la solution faible de l'inclusion $y \in \lambda N_{14}(y)$ pour un certain $\lambda \in]0, 1[$ et il existe $f \in S_{F,y} \Leftrightarrow f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ telle que pour chaque $t \in [0, +\infty[$. Alors d'après

$(\widehat{H}1)$, $(\widehat{H}2)$, $(\widehat{H}4)$, $(\widehat{G}1)$ et $(\widehat{G}2)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |y(t)| & \leq & |U(t,0)|\ |\varphi(0)-g(0,\varphi)| + |g(t,y_{\rho(t,y_t)})| + \displaystyle\int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)}|A(s)g(s,y_{\rho(s,y_s)})|ds \\ & + & \displaystyle\int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \left|\int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)f(\tau)\ d\tau ds\right| \\ & \leq & \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\|A^{-1}(0)\|\|A(0)g(0,\varphi)\| + \|A^{-1}(t)\|\|A(t)g(t,y_{\rho(t,y_t)})\| \\ & + & \widehat{M}\displaystyle\int_0^t \|A(s)g(s,y_{\rho(s,y_s)})\|ds + \widehat{M}\int_0^t\int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)|\ |f(\tau)|\ d\tau\ ds, \\ & \leq & \widehat{M}\|\varphi\| + \widehat{M}\overline{M}_0L(\|\varphi\|+1) + \overline{M}_0L(\|y_{\rho(t,y_t)}\|+1) \\ & + & \widehat{M}L\displaystyle\int_0^t (\|y_{\rho(s,y_s)}\|+1)ds + \widehat{M}\int_0^t\int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)|\ p(\tau)\psi(\|y_{\rho(\tau,y_\tau)}\|)\ d\tau\ ds, \\ & \leq & \widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln \\ & + & \overline{M}_0L\|y_{\rho(t,y_t)}\| + \widehat{M}L\displaystyle\int_0^t \|y_{\rho(s,y_s)}\|ds + \widehat{M}\ n\ S_n \int_0^t p(s)\ \psi\left(\|y_{\rho(s,y_s)}\|\right)\ ds. \end{array}$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) := \sup\ \{\ |y(s)|\ :\ 0 \leq s \leq t\ \},\quad 0 \leq t < +\infty.$$

Soit $t^\star \in [-r,t]$ tel que :

$$\mu(t^\star) = |y(t^\star)|.$$

Si $t^\star \in [0,n]$, d'après l'inégalité précédente, on aura :

$$\begin{array}{rcl} \mu(t) & \leq & \widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln \\ & + & \overline{M}_0L\mu(t) + \widehat{M}L\displaystyle\int_0^t \mu(s)ds + \widehat{M}\ n\ S_n\int_0^t p(s)\ \psi(\mu(s))\ ds. \end{array}$$

Si $t^\star \in [-r,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Alors

$$\begin{array}{rcl} (1-\overline{M}_0L)\mu(t) & \leq & \widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln \\ & + & \widehat{M}L\displaystyle\int_0^t \mu(s)ds + \widehat{M}\ n\ S_n\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds. \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \mu(t) & \leq & \dfrac{1}{1-\overline{M}_0L}[\widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln] \\ & + & \dfrac{\widehat{M}L}{1-\overline{M}_0L}\displaystyle\int_0^t \mu(s)ds + \dfrac{\widehat{M}\ n\ S_n}{1-\overline{M}_0L}\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds \\ & = & c_{14,n} + \dfrac{\widehat{M}}{1-\overline{M}_0L}\left[\displaystyle\int_0^t L\mu(s)ds + \int_0^t\ n\ S_n\ p(s)\psi(\mu(s))ds\right]. \end{array}$$

avec $c_{14,n} := \dfrac{1}{1-\overline{M}_0L}[\widehat{M}\|\varphi\|(1+\overline{M}_0L) + \overline{M}_0L(\widehat{M}+1) + \widehat{M}Ln]$.

Prenons le second membre de cette inégalité comme étant $v(t)$. Ainsi nous aurons :

$$\mu(t) \leq v(t) \quad pour\ tout\ t \in [0, n].$$

Si $t^\star \in [-r, 0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée. De la définition de v, nous obtenons :

$$c := v(0) = c_{14,n} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L}[L\mu(t) + n\ S_n\ p(t)\ \psi(\mu(t))] \quad \text{p. p. } t \in [0, n].$$

Utilisons la croissance de ψ pour avoir :

$$v'(t) \leq \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}}[Lv(t) +\ n\ S_n\ p(t)\ \psi(v(t))].$$

Utilisons la condition (5.8) pour avoir :

$$\begin{aligned}
\int_{c_{14,n}}^{v(t)} \frac{ds}{s + \psi(s)} &\leq \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L} \int_0^t \max(L, n\ S_n\ p(s))\ ds, \\
&\leq \frac{\widehat{M}}{1 - \overline{M}_0 L} \int_0^n \max(L, n\ S_n\ p(s))\ ds \\
&< \int_{c_{14,n}}^{+\infty} \frac{ds}{s + \psi(s)}.
\end{aligned}$$

Pour chaque $t \in [0, n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ ainsi $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|y\|_n \leq \mu(t)$, nous aurons donc : $\|y\|_n \leq \max\{\|\varphi\|, \Lambda_n\} := \Delta_n$.

Considérons l'ensemble

$$Y = \{\ y \in C([-r, +\infty[; E)\ \ \|y\|_\infty \leq \Delta_n + 1, \quad \forall\ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Il est clair que : Y est un sous-ensemble fermé de $C([-r, +\infty[; E)$.

Montrons maintenant que l'opérateur $N_{14} : \bar{Y} \to \mathcal{P}(C([-r, +\infty[; E))$ est une contraction et un opérateur admissible.

Tout d'abord, nous prouvons que : N_{14} est une contraction. Soient $y, \bar{y} \in C([-r, +\infty[; E)$. Alors il existe $f(t) \in F(t, y_{\rho(t, y_t)})$ et $g : J \times C(H; E)$ telle que pour chaque $t \in [0, n]$

$$\begin{aligned}
h(t) &= U(t, 0)[\ \varphi(0) - g(0, \varphi)] + g(t, y_{\rho(t, y_t)}) + \int_0^t U(t, s) A(s) g(s, y_{\rho(s, y_s)})\ ds \\
&+ \int_0^t U(t, s) \int_0^s \mathcal{I}(s, \tau)\ f(\tau)\ d\tau ds.
\end{aligned}$$

De $(\widehat{H}3)$, il en résulte que :

$$H_d\left(F(t, y_{\rho(t, y_t)}); F(t, \bar{y}_{\rho(t, \bar{y}_t)})\right) \leq l_n(t)\ \|y_\rho - \bar{y}_\rho\|.$$

Par conséquent, il y a $\omega \in F(t, \bar{y}_\rho)$ telle que :

$$|f(t) - \omega| \leq l_n(t)\ \|y_\rho - \bar{y}_\rho\|,\ t \in [0, n].$$

Considérons $Y_\star : [0,n] \to \mathcal{P}(E)$, donné par :

$$Y_\star = \omega \in E : |f(t) - \omega| \leq l_n(t)\ \|y_\rho - \bar{y}_\rho\|.$$

Comme l'opérateur multivoque $\upsilon(t) = Y_\star(t) \cap F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ est mesurable (dans [33], voir Proposition III.4), il existe une fonction $\bar{f}(t)$ qui est une selection mesurable pour υ. Alors, $\bar{f}(t) \in F(t, \bar{y}_{\rho(t,\bar{y}_t)})$ et on obtient pour chaque $t \in [0,n]$

$$|f(t) - \bar{f}(t)| \leq l_n(t)\ \|y_\rho - \bar{y}_\rho\|.$$

On définit, pour chaque $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned}
\bar{h}(t) &= U(t,0)[\ \varphi(0) - g(0,\varphi)] + g(t, \bar{y}_{\rho(t,y_t)}) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, \bar{y}_{\rho(s,y_s)})\ ds \\
&+ \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ \bar{f}(\tau)\ d\tau ds.
\end{aligned}$$

Considérons pour cela $y, \overline{y} \in Y$. D'après $(\widehat{H}1)$, $(\widehat{H}3)$, $(\widehat{H}4)$, $(\widehat{G}1)$ et $(\widehat{G}3)$ nous aurons pour tout $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|h(t) - \overline{h}(t)| &\leq |g(t, y_{\rho(t,y_t)}) - g(t, \overline{y}_{\rho(t,y_t)})| \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)}\ |A(s)[g(s, y_{\rho(s,y_s)}) - g(s, \overline{y}_{\rho(s,y_s)})]|ds \\
&+ |\int_0^t U(t,s)\ \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)[f(\tau) - \overline{f}(\tau)]\ d\tau ds|, \\
&\leq \|A^{-1}(t)\|\ \|A(t)g(t, y_{\rho(t,y_t)}) - A(t)g(t, \overline{y}_{\rho(t,y_t)})\| \\
&+ \widehat{M} \int_0^t \|A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)}) - A(s)g(s, \overline{y}_{\rho(s,y_s)})\|\ ds \\
&+ \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)}\ \int_0^s |\mathcal{I}(s,\tau)||f(\tau) - \overline{f}(\tau)|d\tau ds, \\
&\leq \widehat{M}_0 L_* \|y_{\rho(t,y_t)} - \overline{y}_{\rho(t,y_t)}\| + \int_0^t \widehat{M} L_* \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\|ds \\
&+ \int_0^t \widehat{M} n S_n l_n(s) \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\|, \\
&\leq \widehat{M}_0 L_* \|y_{\rho(t,y_t)} - \overline{y}_{\rho(t,y_t)}\| + \int_0^t [\widehat{M} L_* + \widehat{M} n S_n l_n(s)] \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\|\ ds, \\
&\leq \overline{M}_0 L_* e^{\tau L_n^*(t)} [e^{-\tau L_n^*(t)} \|y_{\rho(t,y_t)} - \overline{y}_{\rho(t,y_t)}\|] \\
&+ \int_0^t \overline{l}_n(s) e^{\tau L_n^*(s)} [e^{-\tau L_n^*(s)} \|y_{\rho(s,y_s)} - \overline{y}_{\rho(s,y_s)}\|]\ ds, \\
&\leq \overline{M}_0 L_* e^{\tau L_n^*(t)} \|y - \overline{y}\|_n + \int_0^t [\frac{e^{\tau L_n^*(s)}}{\tau}]'\ ds \|y - \overline{y}\|_n, \\
&\leq \overline{M}_0 L_* e^{\tau L_n^*(t)} \|y - \overline{y}\|_n + \frac{1}{\tau} e^{\tau L_n^*(t)} \|y - \overline{y}\|_n, \\
&\leq \left[\overline{M}_0 L_* + \frac{1}{\tau}\right] e^{\tau L_n^*(t)} \|y - \overline{y}\|_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|h-\overline{h}\|_n \leq \left[\overline{M}_0 L_* + \frac{1}{\tau}\right] \|y-\overline{y}\|_n.$$

Par une relation analogue, obtenue en interchangeant les rôles de y et $\bar{y}$, il en résulte que :

$$H_d(N_{14}(y), N_{14}(y)) \leq \left[\overline{M}_0 L_* + \frac{1}{\tau}\right] \|y-\overline{y}\|_n.$$

Donc, pour un choix approprié de L_* et τ tels que : $\overline{M}_0 L_* + \dfrac{1}{\tau} < 1$, l'opérateur N_{14} est une contraction pour tout $n \in N$. D'après le choix de Y, il n'existe aucun $y \in \partial Y^n$ tel que : $y \in \lambda\ N_{14}(y),\ \lambda \in]0,1[$. Alors l'alternative $(FG2)$ dans le Théorème 1.9.1 n'est pas satisfaite. Donc l'alternative non linéaire de Frigon-Granas montre que : $(FG1)$ est satisfaite. Alors, nous en déduisons que : l'opérateur N_{14} admet un point fixe qui est la solution faible du problème (5.2).

5.3.3 Exemple

Pour illustrer le résultat précédent, considérons dans cette section l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}[z(t,x) - \displaystyle\int_{-r}^{t}\int_{0}^{\pi} b(s-t,u,x)\ z(s,u)\ du\ ds] \in a(t,x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) \\ +\displaystyle\int_0^t \alpha(t,s)Q(s, z(s-r,x), \dfrac{\partial z}{\partial x}(s-r,x))ds, \quad t\geq 0, \quad x\in[0,\pi], \\ z(t,0) = \ z(t,\pi)\ = 0, \qquad\qquad t\geq 0, \\ z(t,x) = \ \Phi(t,x), \qquad\qquad t\in[-r,0],\ x\in[0,\pi]. \end{cases} \tag{5.9}$$

où $r > 0$; $a(t,x)$ est une fonction continue et uniformement Hölderienne par rapport à t ; $\alpha : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi : [-r,0] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Pour $x \in [0,\pi]$, on aura :

$$y(t)(x) = z(t,x) \quad t \geq 0,$$

$$\mathcal{I}(t,s) = \alpha(t,s) \quad t,s \in [0,+\infty[,$$

$$f(t,y_t)(x) = Q(t, z(t-r,x) \quad t \in [0,+\infty[,$$

$$g(t,y_t)(x) = \int_{-r}^{t}\int_{0}^{\pi} b(s-t,u,x)z(s,u)duds, \quad x \in [0,\pi]$$

et

$$\varphi(t)(x) = \varphi(t,x) \quad t \in [-r,0].$$

Considérons $\varphi : [-r,0] \to E$ tel que : φ est Lebesgue mesurable et $h\|\varphi\|^2$ est Lebesgue intégrable sur $[-r,0]$ où $h : [-r,0] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable positive. Ici la norme définie par :

$$\|\varphi\| = \|\Phi(0)\| + (\int_{-r}^{0} h(s)\|\varphi\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$$

(i) la fonction b est mesurable et

$$\int_0^\pi \int_{-r}^t \int_0^\pi \frac{b^2(s,u,x)}{h(s)} ds\ du\ dx < \infty$$

(ii) les fonctions $\dfrac{\partial b}{\partial x}(s,u,x)$ et $\dfrac{\partial^2 b}{\partial^2 x}(s,u,x)$ sont mesurables, $b(s,u,0) = b(s,u,\pi) = 0$ et $\sup\limits_{t\in[0,b]} N(t) < \infty$, où

$$N(t) = \int_0^\pi \int_{-r}^t \int_0^\pi \frac{1}{h(s)} (a(s,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} b(s,u,x))^2 ds\ du\ dx.$$

Ainsi, avec les définitions ci-dessus de f, g, $\mathcal{I}$ et A, le système (5.9) peut être représenté par la forme abstraite du problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (5.2). En outre, plus de conditions appropriées sur Q et η assurent l'existence de la solution faible pour (5.9) par le Théorème 5.3.1.

Chapitre 6

Inclusions Intégro-différentielles d'Évolution à Retard Infini Dépendant de l'État

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions faibles sur la demi-droite réelle positive de deux classes d'inclusions intégro-différentielles d'évolution partielles et celles de type neutre à retard infini dépendant de l'état en appliquant l'alternatives non linéaire de Frigon pour les contractions multivoques admissibles sur les espaces Fréchet [38, 39, 40].

L'existence des solutions faibles est démontrée dans la Section 6.2 citée dans [64] pour la classe suivante des inclusions intégro-différentielles d'évolution avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} y'(t) \in A(t)y(t) + \int_0^t \mathcal{I}(t,s)F(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \quad \text{p. p. } t \in J \\ \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{6.1}$$

où $F : J \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est une application multivoque à valeurs compactes non vides, $\mathcal{I} : J \times J \to \mathbb{R}$, $\rho : J \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ sont des fonctions données et $\mathcal{B}$ et $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ sont déjà définis.

Une extension de ce problème pour le type neutre est donnée dans la Section 6.3 citée dans [65] pour la classe suivante des inclusions intégro-différentielles d'évolution de type neutre avec retard infini dépendant de l'état

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_{\rho(t,y_t)})] \in A(t)y(t) + \int_0^t \mathcal{I}(t,s)F(s, y_{\rho(s,y_s)})ds, \ \text{p. p. } t \in J \\ \\ y_0 = \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{6.2}$$

où $A(\cdot)$, F, $\mathcal{I}$ et ϕ sont définies dans le problème (6.1) et $g : J \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction donnée.

Enfin, deux exemples seront donnés à la fin de chaque Section pour illustrer les résultats obtenus.

6.2 Problème à Retard Infini

6.2.1 Solution faible et hypothèses

Rappelons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution (6.1) :

Définition 6.2.1. *La fonction $y(\cdot) :]-\infty,+\infty[\longrightarrow E$ est dite solution faible du problème (6.1) si $y(t) = \phi(t)$ pour tout $t \in H$ et $y(.)$ est continue sur l'interval J et il existe $f(.) \in L^1(J;E)$; $f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ presque partout dans J telle que : y vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = U(t,0)\phi(0) + \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r)drds \quad \text{pour chaque } t \geq 0. \tag{6.3}$$

Soit $\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\phi) : (s,\phi) \in J\times\mathcal{B}, \rho(s,\phi) \leq 0\}$. Nous supposons toujours que : $\rho : J\times\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ est continue. De plus, nous introduisons l'hypothèse suivante

$(\tilde{H}_\phi)$ La fonction $t \to \phi_t$ est continue de $\mathcal{R}(\rho^-)$ à $\mathcal{B}$ et il existe une fonction continue et bornée $\mathcal{L}^\phi : \mathcal{R}(\rho^-) \to \mathbb{R}_+^\star$ telle que : $\|\phi_t\|_\mathcal{B} \leq \mathcal{L}^\phi(t)\|\phi\|_\mathcal{B}$ pour chaque $t \in \mathcal{R}(\rho^-)$.

Pour la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

$(\tilde{H}1)$ Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ telle que :

$$\|U(t,s)\|_{B(E)} \leq M \quad \text{pour tout } (t,s) \in \Delta.$$

$(\tilde{H}2)$ La multifoction $F : J\times\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est $L^1_{loc}-$carathéodory compacte et convexe pour tout $u \in \mathcal{B}$ et Il existe une fonction $\psi : J \longrightarrow]0,+\infty[$ continue et croissante et il existe une fonction $p \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ telles que :

$$\|F(t,u)\|_{\mathcal{P}(E)} \leq p(t)\ \psi(\|u\|_\mathcal{B}) \qquad \text{p. p. } t \in J,\ \forall u \in \mathcal{B}.$$

$(\tilde{H}3)$ Pour tout $R > 0$, il existe une fonction $l_R \in L^1_{loc}(J;\mathbb{R}_+)$ tel que :

$$H_d\left(F(t,u);F(t,v)\right) \leq l_R(t)\ \|u-v\|_\mathcal{B}$$

$\forall u,v \in \mathcal{B}$ avec $\|u\|_\mathcal{B} \leq R$ et $\|v\|_\mathcal{B} \leq R$ et

$$H_d\left(0;F(t,0)\right) \leq l_R(t) \quad \text{p. p. } t \in J.$$

$(\tilde{H}4)$ Pour tout $t \in J$, I(t,s) est mesurable sur $[0,t]$ et

$$\mathcal{I}(t) = \sup_{0\leq s\leq t} |\mathcal{I}(t,s)|$$

est bornée sur $[0,n]$; soit

$$S_n = ess \sup_{t\in[0,n]} \mathcal{I}(t).$$

Considérons l'espace suivant

$$B_{+\infty} = \left\{ y : \mathbb{R} \to E : y|_{[0,T]} \text{ continu pour } T > 0 \text{ et } y_0 \in \mathcal{B} \right\},$$

où $y|_{[0,T]}$ est la restriction de y vers l'intervale réel compact $[0,T]$.

Fixons $\tau > 1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit dans $B_{+\infty}$ la semi-norme par :

$$\|y\|_n = \sup_{t\in[0,n]} \{e^{-\tau L_n^\star(t)}|y(t)|\}$$

où $L_n^\star(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{l}_n(s)ds$, $\bar{l}_n(t) = K_n M n S_n l_n(t)$ et l_n est la fonction de $(\tilde{H}3)$. Alors $B_{+\infty}$ est un espace de Fréchet avec cette famille de semi-norme $\|\cdot\|_{n\in\mathbb{N}}$.

6.2.2 Résultat d'existence

Théorème 6.2.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaites et de plus*

$$\int_{c_n}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)} > K_n \widehat{M} n S_n \int_0^n p(s)ds \quad \textit{pour chaquen} \in \mathbb{N} \tag{6.4}$$

avec $c_n = (M_n + L^\phi + K_n M H)\|\phi\|_{\mathcal{B}}$. *Alors, le problème intégro-différentiel d'évolution* (6.1) *a une solution faible.*

Preuve. Transformons le problème (6.1) en un problème de point fixe dans l'espace de Fréchet précédent. Considérons l'opérateur $N_{15} : B_{+\infty} \to \mathcal{P}(B_{+\infty})$ défini par :

$$N_{15}(y) = \left\{ h \in B_{+\infty} : h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(t), & \text{si } t \leq 0\,; \\ U(t,0)\phi(0) & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r)drds, & \text{si } t \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

avec $f \in S_{F,y} = \left\{ \vartheta \in L^1(J;E),\ \vartheta(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)}) \text{ p. p. } t \in J \right\}$.
Il est clair que les points fixes de l'opérateur N_{15} sont les solutions faibles du problème (6.1) .

Pour $\phi \in \mathcal{B}$, on définit la fonction $x(.) : \mathbb{R} \to E$ par : $x(t) = \phi(t)$ pour $t \leq 0$ et $x(t) = U(t,0)\ \phi(0)$ pour $t \in J$. Alors $x_0 = \phi$. Pour chaque fonction $z \in B_{+\infty}$ avec $z(0) = 0$, on note par : $\overline{z}$ la fonction définie par : $\overline{z}(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\overline{z}(t) = z(t)$ pour $t \in J$.

Si $y(\cdot)$ satisfait (6.3), on peut la décomposer comme $y(t) = z(t) + x(t)$, $t \geq 0$, ce qui implique $y_t = z_t + x_t$, pour chaque $t \in J$ et la fonction $z(\cdot)$ satisfait pour $t \in J$

$$z(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r)drds \quad \text{pour } t \in J.$$

avec $f(t) \in F(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)})$ presque partout $t \in J$.
Soit $B_{+\infty}^0 = \{z \in B_{+\infty} : z_0 = 0 \in \mathcal{B}\}$. Pour tout $z \in B_{+\infty}^0$ on a :

$$\|z\|_{+\infty} = \|z_0\|_{\mathcal{B}} + \sup_{0\leq s<+\infty} |z(s)| = \sup_{0\leq s<+\infty} |z(s)|.$$

Ainsi $(B^0_{+\infty}, \|\cdot\|_{+\infty})$ est un espace de Banach. On définit l'opérateur $F : B^0_{+\infty} \to \mathcal{P}(B^0_{+\infty})$ par :

$$F(z)(t) = \left\{ h \in B^0_{+\infty} : h(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r) f(r) dr ds \quad \text{pour } t \in J. \right\}$$

avec $f \in S_{F,z} = \left\{ \vartheta \in L^1(J;E),\ \vartheta(t) \in F(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)}) \text{ p. p. } t \in J \right\}$.

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N_{15} sont les solutions faibles du problème (6.1).

Soit y une solution faible possible du problème (6.1). On remarque aussi que, pour chaque $y \in C(]-\infty,+\infty[;E)$, l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide, par $(\tilde{H}2)$ F a une sélection mesurable (voir [33], Théorème III.6).

Soit y un point fixe possible de l'opérateur N_{15}. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $t \leq n$, alors y devrait être la solution faible de l'inclusion $y \in \lambda N_{15}(y)$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$ et il existe $f \in S_{F,y} \Leftrightarrow f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ pour chaque $t \in [0,+\infty[$. Alors, l'opérateur N_{15} a un point fixe équivalent à F en a un, donc : F a un point fixe.

Soit y une solution faible possible du problème (6.1). On remarque aussi que, pour chaque $y \in C(]-\infty,+\infty[;E)$, l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide, par $(\tilde{H}2)$, F a une selection mesurable (voir [56], Théorème III.6).

Soit $z \in B^0_{+\infty}$ un point fixe possible de l'opérateur F. Et $n \in \mathbb{N}$, $t \leq n$, alors z devrait être la solution faible de l'inclusion $z \in \lambda F(z)$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$ et il existe $f \in S_{F,z} \Leftrightarrow f(t) \in F(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)})$. Par les hypothèses $(\tilde{H}1)$, $(\tilde{H}2)$, $(\tilde{H}_\phi)$ et le Lemme 1.7.2, on a pour chaque $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)|\,|f(r)|\, dr ds \\ &\leq Mn \sup_{t\in[0,n]} \mathcal{I}(t) \int_0^t p(s)\psi(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}) dr ds \\ &\leq MnS_n \int_0^t p(s)\psi(\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}) ds. \end{aligned}$$

De (3.16) et la croissance de ψ, on obtient pour chaque $t \in [0,n]$

$$K_n|z(t)| + c_n \;\leq\; c_n + K_n MnS_n \int_0^t p(s)\psi(K_n|z(s)| + c_n) ds.$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \sup_{t\in J}\{K_n|z(s)| + c_n : 0 \leq s \leq t\}.$$

Soit $t^\star \in]-\infty, t]$ telle que :

$$\mu(t) = K_n|z(t^\star)| + c_n.$$

Si $t^\star \in]-\infty,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\phi\|_{\mathcal{B}}$ et si $t^\star \in [0,n]$, l'inégalité précédente devient

$$\mu(t) \leq c_n + K_n MnS_n \int_0^t p(s)\psi(\mu(s)) ds, \quad t \in [0,n].$$

Si $t^\star \in [-r,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Prenons le côté droit de l'inégalité ci-dessus comme $v(t)$. Alors, pour tout $t \in [0,n]$, on a :

$$v(0) = c_n \text{ et } v'(t) = K_n M n S_n p(t)\psi(\mu(t)).$$

Utilisons la croissance de ψ, on obtient :

$$v'(t) \leq K_n M n S_n p(t)\psi(v(t)), \quad t \in [0,n].$$

La condition (6.4) implique que pour chaque $t \in [0,n]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{c_n}^{v(t)} \frac{ds}{\psi(s)} &\leq K_n M n S_n \int_0^t p(s)ds,\\ &\leq K_n \widehat{M} n S_n \int_0^n p(s)ds,\\ &< \int_{c_n}^{+\infty} \frac{ds}{\psi(s)}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $t \in [0,n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ et par conséquent $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|z\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|z\|_n \leq \Lambda_n$.

Soit

$$Z = \{z \in B^0_{+\infty} : \sup_{0\leq t\leq n} |z(t)| \leq \Lambda_n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Clairement, Z est un sous-ensemble fernmé de $B^0_{+\infty}$.

Nous allons montrer que : $F : \bar{Z} \to B^0_{+\infty}$ est une contraction multivoque. En effet, considérons $z, \overline{z} \in B^0_{+\infty}$ donc il existe $f(t) \in F(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)})$ et $h \in F(z)$. En utilisant ainsi $(\tilde{H}1)$, $(\tilde{H}3)$ et (3.16), on obtient pour chaque : $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$h(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ f(\tau)\ d\tau ds$$

De $(\tilde{H}3)$, il en résulte que :

$$H_d\left(F(t, z_\rho + x_\rho); F(t, \bar{z}_\rho + x_\rho)\right) \leq l_n(t)\ \|z_\rho - \bar{z}_\rho\|_{\mathcal{B}}$$

Par conséquent, il y a $\omega \in F(t, \bar{z}_\rho + x_\rho)$ telle que :

$$|f(t) - \omega| \leq l_n(t)\ \|z_\rho - \bar{z}_\rho\|_{\mathcal{B}},\ t \in [0,n]$$

Considérons $Z_\star : [0,n] \to \mathcal{P}(E)$, donné par :

$$Z_\star = \omega \in E : |f(t) - \omega| \leq l_n(t)\ \|z_\rho - \bar{z}_\rho\|_{\mathcal{B}}.$$

Puisque l'opérateur multivoque $v(t) = Z_\star(t) \cap F(t, \bar{z}_\rho + x_\rho)$ est mesurable (dans [33], voir Proposition III.4), il existe une fonction $\bar{f}(t)$ qui est une selection mesurable pour v. Alors, $\bar{f}(t) \in F(t, \bar{z}_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)})$ et on obtient pour chaque $t \in [0,n]$

$$|f(t) - \bar{f}(t)| \leq l_n(t)\ \|z_\rho - \bar{z}_\rho\|.$$

On définit, pour chaque $t \in [0,n]$

$$\bar{h}(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ \bar{f}(\tau)\ d\tau ds$$

Considérons pour cela $z, \overline{z} \in B^0_{+\infty}$. D'après $(\tilde{H}1)$, $(\tilde{H}3)$ et $(\tilde{H}4)$, nous aurons pour tout $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|h(t) - \overline{h}(t)| &\leq \int_0^t \|U(t,s)\|_{B(E)} \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)|\ \left|f(r) - \overline{f}(r)\right|\ dr\ ds,\\
&\leq Mn\ ess \sup_{t\in[0,n]} \ \mathcal{I}(t) \int_0^t l_n(s) \left\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} - \overline{z}_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)}\right\|_{\mathcal{B}} ds,\\
&\leq MnS_n \int_0^t l_n(s) K_n \left|z(s) - \overline{z}(s)\right| ds,\\
&\leq \int_0^t \left[\bar{l}_n(s)\ e^{\tau\ L^\star_n(s)}\ \right]\ \left[e^{-\tau\ L^\star_n(s)}\ |z(s) - \overline{z}(s)|\right]\ ds,\\
&\leq \int_0^t \left[\frac{e^{\tau\ L^\star_n(s)}}{\tau}\right]'\ ds\ \|z - \overline{z}\|_n,\\
&\leq \frac{1}{\tau}\ e^{\tau\ L^\star_n(t)}\ \|z - \overline{z}\|_n.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|h - \overline{h}\|_n \leq \frac{1}{\tau}\ \|z - \overline{z}\|_n.$$

Par une relation analogue, obtenue en interchangeant les rôles de z et de $\bar{z}$, il en résulte que :

$$H_d(F(z), F(\bar{y})) \leq \frac{1}{\tau}\ \|z - \overline{z}\|_n.$$

Alors, pour $\tau > 1$, F est une contraction pour tout $n\mathbb{N}$.

Il reste à montrer que : F est un opérateur multivoque admissible. Soit $z \in B^0_{+\infty}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'espace

$$B^0_n := \left\{y :]-\infty, n] \to E : y|_{[0,n]} \in C([0,n];E), y_0 \in \mathcal{B}\right\}$$

et considérons l'opérateur multivoque $F : B^0_n \to \mathcal{P}_{cl}(B^0_n)$ defin é par :

$$F(z) = \left\{h \in B^0_n : h(t) = \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,\tau)\ f(\tau)\ d\tau ds, t \in [0,n]\right\}$$

avec $f \in S^n_{F,y} = \left\{\vartheta \in L^1([0,n];E),\ \vartheta(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})\ \text{ p. p. }\ t \in [0,n]\right\}.$

De $(\tilde{H}1) - (\tilde{H}3)$ et puisque F est une application à plusieurs valeurs avec des valeurs compactes, nous pouvons prouver que pour chaque $z \in B^0_n, F(z) \in \mathcal{P}_{cp}(B^0_n)$, il existe $z_\star \in B^0_n$ telle que : $z_\star \in F(z_\star)$. Soient $h \in B^0_n, \bar{z} \in \bar{Z}$ et $\epsilon > 0$. supposons que : $z_\star \in F(\bar{z})$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|\bar{z}(t) - z_\star(t)\| &\leq \|\bar{z}(t) - h(t)\| + \|z_\star(t) - h(t)\|\\
&\leq \tau e^\tau L^*_n(t) \|\bar{z} - F(\bar{z})\|_n + \|z_\star(t) - h(t)\|
\end{aligned}$$

Puisque : h est arbitraire, nous pouvons supposer que :

$$h \in B(z_\star, \epsilon) = h \in B_n^0 : \|h - z_\star\|_n \leq \epsilon.$$

Donc,

$$\|\bar{z} - z_\star\|_n \leq \|\bar{z} - F(\bar{z})\|_n + \epsilon.$$

Si z n'est pas dans $F(\bar{z})$ alors $\|z_\star - F(\bar{z})\| \neq 0$. Puisque : $F(\bar{z})$ est compact, il existe $x \in F(\bar{z})$ tel que : $\|z_\star - F(\bar{z})\| = \|z_\star - x$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\|\bar{z}(t) - x(t)\| & \leq \|\bar{z}(t) - h(t)\| + \|x(t) - h(t)\| \\ & \leq \tau e^\tau\ L_n^*(t)\|\bar{z} - F(\bar{z})\|_n + \|x(t) - h(t)\|.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|\bar{z} - x\|_n \leq \|\bar{z} - F(\bar{z})\|_n + \epsilon.$$

Alors, F est une contraction de l'opérateur admissible. Du choix de Z, il n'y a pas $z \in \partial Z$ tel que : $z = \lambda F(z)$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$. Alors l'alternative $(F2)$ du Théorème 1.9.3 ne tient pas. Une conséquence de l'alternative non linéaire de Frigon est que : $(F1)$ est vérifiée, alors nous déduisons que l'opérateur F admet un point fixe $z^\star$ dans $\overline{Z}$,. Ainsi $y^\star(t) = z^\star(t) + x(t),\ t \in]-\infty, +\infty[$ est un point fixe de l'opérateur N_{15} qui est une solution faible du problème d'inclusion de l'évolution (6.1).

6.2.3 Exemple

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) \in \dfrac{\partial^2 u(t,\xi)}{\partial \xi^2} + a_0(t,\xi)u(t,\xi) \\ + \displaystyle\int_{-r}^{t} \eta(t,\tau) \int_{-r}^{0} a_1(s-t) u \left[s - \rho_1(t)\rho_2 \left(\int_0^\pi a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2 d\theta \right), \xi \right] ds d\tau, \\ \hfill t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi], \\ u(t,0) = \ u(t,\pi) \ = 0, \hfill t \geq 0, \\ u(\theta,\xi) = \ u_0(\theta,\xi), \hfill -r < \theta \leq 0,\ \xi \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{6.5}$$

où $a_0(t,\xi)$ est une fonction continue et uniformément Hölderienne par rapport à t ; $\eta : \mathbb{R}^2_- \to \mathbb{R}$, $a_1 :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ et $\rho_1 : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et $\rho_2 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque à valeurs compactes convexes.

Théorème 6.2.2. *Soit $\phi \in \mathcal{B}$. Supposons que la condition $(\tilde{H}_\phi)$ est satisfaite et que $\rho_1 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\rho_2 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque à valeurs compactes et covexes, $a_1 :]-\infty,0] \to \mathbb{R}$ et $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Alors il existe une solution faible de* (6.5).

Preuve. D'après les hypothèses, nous avons que :

$$\mathcal{I}(t,s) = \eta(t,\tau) \quad t,\tau \geq 0,$$

$$f(t,\psi)(\xi)=\int_{-r}^{0}a_1(s)\psi(s,\xi)ds$$

et

$$\rho(s,\psi)=s-\rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^{\pi}a_2(\theta)|\psi(0,\xi)|^2d\theta\right),$$

sont des fonctions bien définies qui permettent de transformer le système (6.5) au système abstrait (6.1). De plus, la fonction f est linéaire bornée. Maintenant, l'existence de la solution faible peut être déduite d'une application directe du Théorème 6.2.1.

D'après la Remarque 1.7.1, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 6.2.1. *Soit $\phi\in\mathcal{B}$ une fonction continue et bornée. Alors il existe une solution faible du problème* (6.5) *sur* $]-\infty,+\infty[$.

6.3 Problème de Type Neutre à Retard Infini

6.3.1 Solution faible et hypothèses

Rappellons tout d'abord la définition de la solution faible du problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (6.2) :

Définition 6.3.1. *On dit que la fonction $y(\cdot):\mathbb{R}\to E$ est une solution faible de* (6.2) *si $y(t)=\phi(t)$ pour tout $t\in]-\infty,0]$ et $y(.)$ est continue sur l'interval J et il existe $f(.)\in L^1(J;E)$; $f(t)\in F(t,y_{\rho(t,y_t)})$ presque partout dans J et $g:J\times C(\mathcal{B};E)\to E$. telle que : y vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} y(t)\ &=U(t,0)[\phi(0)-g(0,\phi)]+g(t,y_{\rho(t,y_t)})+\int_0^t U(t,s)A(s)g(s,y_{\rho(s,y_s)})ds\\ &+\int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r,y_{\rho(r,y_r)})drds\qquad \textit{for each } t\geq 0.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Considérons les hypothèses précédentes et nous aurons besoin des hypothèses suivantes

($\tilde{G}1$) Il existe une constante $M_0>0$ telle que :

$$\|A^{-1}(t)\|_{B(E)}\leq M_0$$

pour tout $t\geq 0$.

($\tilde{G}2$) Il existe une constante $0<L<M_0^{-1}$, telle que :

$$\|A(t)g(t,\phi)\|\leq L(\|\phi\|_{\mathcal{B}}+1)$$

pour tout $t\in J$ et $\phi\in\mathcal{B}$.

($\tilde{G}3$) Il existe une constante $L_\star>0$ telle que :

$$|A(s)\ g(s,\phi)-A(\overline{s})\ g(\overline{s},\overline{\phi})|\leq L_\star\ (|s-\overline{s}|+\|\phi-\overline{\phi}\|_{\mathcal{B}})$$

pour tout $s,\overline{s}\in J$ et $\phi,\overline{\phi}\in\mathcal{B}$.

($G4$) La fonction g est complètement continue et pour tout ensemble borné $Q\subset\mathcal{B}$ l'ensemble $\{t\to g(t,x_{\rho(t,y_t)}):x\in Q\}$ est équi-continu dans $C(J,E)$.

Prenons $\overline{l}_n(t)=MK_n[L_\star+nS_nl_n(t)]$ pour l_n la fonction de ($\tilde{H}3$) pour la famille de seminorme $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

6.3.2 Résultat d'existence

Théorème 6.3.1. *Supposons que les hypothèses précédentes sont satisfaits et de plus*

$$\int_{D_n}^{+\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)} > \frac{K_n M}{1-M_0 L} \int_0^n \max(L, nS_n p(s))ds \tag{6.7}$$

pour chaque $n > 0$ où

$$\begin{aligned} D_n &= \left[\left(1+\frac{K_n M_0 L}{1-M_0 L}\right)(M_n + \mathcal{L}^\phi + K_n M H) + \frac{K_n M(1+M_0 L)}{1-M_0 L}\right] \|\phi\|_{\mathcal{B}} \\ &+ \frac{K_n\left(M_0 L(M+1) + M L n\right)}{1-M_0 L}. \end{aligned}$$

Alors le problème intégro-différentiel d'évolution de type neutre (6.2) *a une solution faible.*

Preuve. Transformons le problème (6.2) en un problème de point fixe dans l'espace de Fréchet précédent. Considérons l'opérateur $N_{16} : B_{+\infty} \to \mathcal{P}(B_{+\infty})$ défini par :

$$N_{16}(y) = \left\{ h \in B_{+\infty} : h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(t), & \text{si } t \leq 0 \\ U(t,0)[\phi(0) - g(0,\phi)] + g(t, y_{\rho(t,y_t)}) & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds & \\ + \displaystyle\int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r)drds, & \text{si } t \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

avec $f \in S_{F,y} = \left\{ f \in L^1(J;E),\ f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)}) \ \text{ p. p. } \ t \in J \right\}$.

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N_{16} sont les solutions faibles du problème (6.2).

Pour $\phi \in \mathcal{B}$, on définit la fonction $x(.) : \mathbb{R} \to E$ by $x(t) = \phi(t)$ pour $t \leq 0$ et $x(t) = U(t,0)\ \phi(0)$ pour $t \in J$. Alors $x_0 = \phi$. Pour chaque fonction $z \in B_{+\infty}$ avec $z(0) = 0$, on note par : $\overline{z}$ la fonction définie par : $\overline{z}(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\overline{z}(t) = z(t)$ pour $t \in J$. Si $y(\cdot)$ satisfait (6.6), on peut là décomposer comme $y(t) = z(t) + x(t)$, $t \geq 0$, ce qui implique : $y_t = z_t + x_t$, pour chaque $t \in J$ et la fonction $z(\cdot)$ satisfait pour $t \in J$

$$\begin{aligned} z(t) &= g(t, z_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)})ds \\ &+ \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r)drds \quad \text{for } t \in J. \end{aligned}$$

avec $f(t) \in F(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)})$ presque partout $t \in J$.

Soit $B_{+\infty}^0 = \{z \in B_{+\infty} : z_0 = 0 \in \mathcal{B}\}$. Pour chaque $z \in B_{+\infty}^0$ on a :

$$\|z\|_{+\infty} = \|z_0\|_{\mathcal{B}} + \sup_{0 \leq s < +\infty} |z(s)| = \sup_{0 \leq s < +\infty} |z(s)|.$$

Ainsi $(B^0_{+\infty}, \|\cdot\|_{+\infty})$ est un espace de Banach . On définit l'opérateur $F : B^0_{+\infty} \to \mathcal{P}(B^0_{+\infty})$ par :

$$\widetilde{F}(y) = \left\{ h \in B_{+\infty} : h(t) = \left\{ \begin{array}{l} g(t, y_{\rho(t,y_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) \\ + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, y_{\rho(s,y_s)})ds \\ + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r, y_{\rho(s,y_s)})drds, \quad \text{si } t \geq 0. \end{array} \right. \right\}$$

avec $f \in S_{F,z} = \left\{\vartheta \in L^1(J;E),\ \vartheta(t) \in F(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)}) \ \text{ p. p. } \ t \in J\right\}$.

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N_{16} sont les solutions faibles du problème (6.2).

Soit y une solution faible possible du problème (6.2). On remarque aussi que, pour chaque $y \in C(]-\infty, +\infty[; E)$, l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide. Par $(\tilde{H}2)$, F a une sélection mesurable (voir [33], Théorème III.6).

Soit y un point fixe possible de l'opérateur N_{16}. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $t \leq n$, alors y devrait être la solution faible de l'inclusion $y \in \lambda N_{16}(y)$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$ et il existe $f \in S_{F,y} \Leftrightarrow f(t) \in F(t, y_{\rho(t,y_t)})$ telle que, pour chaque $t \in [0, +\infty[$. Alors d'après $(\tilde{H}_\phi)$, $(\tilde{H}1)$, $(\tilde{H}2)$, $(\tilde{H}4)$, $(\tilde{G}1)$ et $(\tilde{G}2)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |z(t)| & \leq & \|A^{-1}(t)\|_{B(E)}\|A(t)g(t, z_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)})\| + M\|A^{-1}(0)\|_{B(E)}\|A(0)g(0,\phi)\| \\ & + & M\int_0^t \|A(s)g(s, z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)})\| \ ds \\ & + & M\int_0^t \int_0^s |\mathcal{I}(s,r)||f(r)|drds, \\ & \leq & M_0L(\|z_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)}\|_{\mathcal{B}} + 1) + MM_0L(\|\phi\|_{\mathcal{B}} + 1) \\ & + & ML\int_0^t (\|z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)}\|_{\mathcal{B}} + 1) \ ds \\ & + & Mn \ ess \sup\limits_{t\in[0,n]} \ \mathcal{I}(t) \int_0^t p(s)\psi(\|z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)}\|_{\mathcal{B}})ds, \\ & \leq & M_0L\left(K_n|z(t)| + c_n\right) + MM_0L\|\phi\|_{\mathcal{B}} + M_0 \ L(M+1) + MLn \\ & & +ML\int_0^t \left(K_n|z(s)| + c_n\right)ds + MnS_n\int_0^t p(s)\psi(K_n|z(s)| + c_n)ds. \end{array}$$

Alors, on a pour $D_n = c_n + K_n\dfrac{M_0Lc_n + M\|\phi\|_{\mathcal{B}}(1 + M_0L) + M_0L(M+1) + MLn}{1 - M_0L}$

$$K_n|z(t)| + c_n \leq D_n + \frac{K_nM}{1 - M_0L}\left[L\int_0^t \left(K_n|z(s)| + c_n\right)ds + nS_n\int_0^t p(s)\psi(K_n|z(s)| + c_n)ds\right].$$

Considérons la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \sup_{t\in J}\{K_n|z(s)| + c_n : 0 \leq s \leq t\}.$$

Soit $t^\star \in]-\infty, t]$ telle que :

$$\mu(t) = K_n|z(t^\star)| + c_n.$$

Si $t^\star \in [0,n]$, par l'inégalité précédente, nous avons pour $t \in [0,n]$

$$\mu(t) \quad \leq \quad D_n + \frac{K_n M}{1-M_0 L}\left[L\int_0^t \mu(s)ds + nS_n\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds\right].$$

Si $t^\star \in [-r,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\varphi\|$ et l'inégalité précédente est vérifiée.

Si $t^\star \in]-\infty,0]$, alors $\mu(t^\star) = \|\phi\|_{\mathcal{B}}$ et l'inégalité précédente tient. Prenons le côté droit de l'inégalité ci-dessus comme $v(t)$. Alors on a : $\mu(t) \leq v(t)$ pour tout $t \in [0,n]$. De la définition de v, on a : $v(0) = D_n$ et

$$v'(t) = \frac{K_n M}{1-M_0 L}\left[L\mu(t) + nS_n p(t)\psi(\mu(t))\right] \quad \text{p. p.} \quad t \in [0,n].$$

Utilisons la croissance de ψ, on obtient pour p. p. $t \in [0,n]$

$$v'(t) \leq \frac{K_n M}{1-M_0 L}\left[Lv(t) + nS_n p(t)\psi(v(t))\right].$$

Cela implique que pour chaque $t \in [0,n]$ et utilisons $(\tilde{H}5)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{D_n}^{v(t)} \frac{ds}{s+\psi(s)} &\leq \frac{K_n M}{1-M_0 L}\int_0^t \max(L, nS_n p(s))ds \\
&\leq \frac{K_n M}{1-M_0 L}\int_0^n \max(L, nS_n p(s))ds \\
&< \int_{D_n}^{+\infty} \frac{ds}{s+\psi(s)}.
\end{aligned}$$

Donc, pour chaque $t \in [0,n]$, il existe une constante Λ_n telle que : $v(t) \leq \Lambda_n$ et par conséquent $\mu(t) \leq \Lambda_n$. Puisque : $\|z\|_n \leq \mu(t)$, on a : $\|z\|_n \leq \Lambda_n$.

nous montrerons que : $F : \bar{Z} \to B^0_{+\infty}$ est une contraction. En effet, considérons $z, \overline{z} \in B^0_{+\infty}$ tels qu'il existe $f(t) \in F(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)})$ et $h \in F(z)$.

En utilisant ainsi $(\tilde{H}1)$, $(\tilde{G}1)$ et (6.6), on obtient pour chaque $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
h(t) &= g(t, z_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, z_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)})ds \\
&+ \int_0^t U(t,s)\int_0^s \mathcal{I}(s,r)f(r)drds \quad \text{for } t \in J.
\end{aligned}$$

De $(\tilde{H}3)$ il en résulte que :

$$H_d\left(F(t, z_\rho + x_\rho); F(t, \bar{z}_\rho + x_\rho)\right) \leq l_n(t)\ \|z_\rho - \bar{z}_\rho\|_{\mathcal{B}}.$$

Par conséquent, il y a $\omega \in F(t, \bar{z}_\rho + x_\rho)$ telle que :

$$|f(t) - \omega| \leq l_n(t)\ \|z_\rho - \bar{z}_\rho\|_{\mathcal{B}},\ t \in [0,n].$$

Considérons $Z_\star : [0,n] \to \mathcal{P}(E)$, donné par :

$$Z_\star = \omega \in E : |f(t) - \omega| \leq l_n(t)\ \|z_\rho - \bar{z}_\rho\|_{\mathcal{B}}.$$

Puisque l'opérateur multivoque $v(t) = Z_\star(t) \cap F(t, \bar{z}_\rho + x_\rho)$ est mesurable (dans [33], voir Proposition III.4), il existe une fonction $\bar{f}(t)$, qui est une sélection mesurable pour v.

Alors, $\bar{f}(t) \in F(t, \bar{z}_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)})$ et nous obtenons pour chaque $t \in [0,n]$

$$|f(t) - \bar{f}(t)| \leq l_n(t)\ \|z_\rho - \bar{z}_\rho\|_{\mathcal{B}}.$$

On définit, pour chaque $t \in [0,n]$

$$\begin{aligned}\bar{h}(t) = g(t, \bar{z}_{\rho(t,y_t)} + x_{\rho(t,y_t)}) - U(t,0)g(0,\phi) + \int_0^t U(t,s)A(s)g(s, \bar{z}_{\rho(s,y_s)} + x_{\rho(s,y_s)})ds \\ + \int_0^t U(t,s) \int_0^s \mathcal{I}(s,r)\bar{f}(r, \bar{z}_{\rho(r,y_r)} + x_{\rho(r,y_r)})drds \quad \text{for } t \in J.\end{aligned}$$

Considérons pour cela $z, \overline{z} \in B^0_{+\infty}$. D'après $(\tilde{H}1)$ et $(\tilde{H}3)$ et $(\tilde{H}4)$, nous aurons pour tout $t \in [0,n]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&|h(t) - \widetilde{h}(t)| \leq M_0|A(t)[g(t, z_{\rho(t,z_t+x_t)} + x_{\rho(t,z_t+x_t)}) - g(t, \overline{z}_{\rho(t,\overline{z}_t+x_t)} + x_{\rho(t,\overline{z}_t+x_t)})]| \\ &+M\int_0^t |A(s)[g(s, z_{\rho(s,z_s+x_s)} + x_{\rho(s,z_s+x_s)}) - g(s, \overline{z}_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)} + x_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)})]|ds \\ &+M\int_0^t\int_0^s |\mathcal{I}(s,r)||f(r) - \overline{f}(r)|ds.\end{aligned}$$

Par $(\tilde{H}2) - (\tilde{H}3)$, $(\tilde{G}3)$ et (3.16), on obtient :

$$\begin{aligned}|h(t) - \widetilde{h}(t)| &\leq M_0L_\star\|z_{\rho(t,z_t+x_t)} - \overline{z}_{\rho(t,\overline{z}_t+x_t)}\|_{\mathcal{B}} \\ &+ M\int_0^t L_\star\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} - \overline{z}_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}ds \\ &+ Mn\ ess \sup_{t\in[0,n]} |\mathcal{I}(t)| \int_0^t l_n(s)\|z_{\rho(s,z_s+x_s)} - \overline{z}_{\rho(s,\overline{z}_s+x_s)}\|_{\mathcal{B}}ds, \\ &\leq M_0L_\star K_n|z(t) - \overline{z}(t)| + \int_0^t ML_\star K_n|z(s) - \overline{z}(s)|ds \\ &+ \int_0^t MnS_nl_n(s)K_n|z(s) - \overline{z}(s)|ds, \\ &\leq \overline{M}_0L_\star K_n\|z(t) - \overline{z}(t)| + \int_0^t \overline{l}_n(s)\ |z(s) - \overline{z}(s)|ds \\ &\leq \overline{M}_0L_\star K_n e^{\tau\ L^\star_n(t)}\left[e^{-\tau\ L^\star_n(t)}\|z(t) - \overline{z}(t)|\right] \\ &+ \int_0^t \overline{l}_n(s)e^{\tau\ L^\star_n(t)}\left[e^{-\tau\ L^\star_n(t)}|z(s) - \overline{z}(s)|\right]ds, \\ &\leq \overline{M}_0L_\star K_n\ e^{\tau\ L^\star_n(t)}\ \|z - \overline{z}\|_n + \int_0^t \left[\frac{e^{\tau\ L^\star_n(s)}}{\tau}\right]'\ ds\ \|z - \overline{z}\|_n \\ &\leq \left[\overline{M}_0L_\star K_n + \frac{1}{\tau}\right]\ e^{\tau^\star_n(t)}\ \|z - \overline{z}\|_n.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|h - \widetilde{h}\|_n \leq \left[\overline{M}_0L_* K_n + \frac{1}{\tau}\right]\ \|z - \overline{z}\|_n.$$

Par une relation analogue, obtenue en interchangeant les rôles de z et de $\bar{z}$, il en résulte que :

$$H_d(F(z), F(\bar{y})) \leq \left[\overline{M}_0 L_* K_n + \frac{1}{\tau}\right] \|z - \overline{z}\|_n.$$

Alors, pour $\left[\overline{M}_0 L_* K_n + \frac{1}{\tau}\right] < 1$, l'opérateur F est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$ et F est un opérateur admissible.

Du choix de Z il n'y a pas $z \in \partial Z$ telle que : $z = \lambda F(z)$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$. Alors l'alternative $(F2)$ dans le Théorème 1.9.3 ne tient pas. Une conséquence de l'alternative non linéaire de Frigon, $(F1)$ est vérifiée. Alors, nous en déduisons que l'opérateur F admet un point fixe $z^\star$ dans $\overline{Z}$. Alors $y^\star(t) = z^\star(t) + x(t),\ t \in]-\infty, +\infty[$ est un point fixe de l'opérateur N_{16} qui est une solution faible du problème d'inclusion de l'évolution (6.2).

6.3.3 Exemple

Considérons le problème de type neutre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[u(t,\xi) - \displaystyle\int_{-r}^{0} a_3(s-t)u\left(s - \rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2 d\theta\right), \xi\right) ds\right] \\ \in \dfrac{\partial^2 u(t,\xi)}{\partial \xi^2} + a_0(t,\xi)u(t,\xi) \\ + \displaystyle\int_{-r}^{t} \eta(t,\tau) \int_{-r}^{0} a_1(s-t)u\left(s - \rho_1(t)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|u(t,\theta)|^2 d\theta\right), \xi\right) ds d\tau, \\ \hfill t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi], \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0, \hfill t \geq 0, \\ v(\theta,\xi) = v_0(\theta,\xi), \hfill -r < \theta \leq 0,\ \xi \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{6.8}$$

où $a_3 :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Théorème 6.3.2. *Soit $\phi \in C(H;E)$. Supposons que la condition $(\tilde{H}_\phi)$ est satisfaite et que : $\rho_1 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\rho_2 : [0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque à valeurs compactes et covexes, $a_1, a_3 :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ et $a_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Alors il existe une solution faible de* (6.8).

Preuve. D'après les hypothèses, nous avons que :

$$\mathcal{I}(t,s) = \eta(t,\tau) \quad t,\tau \geq 0,$$

$$f(t,\psi)(\xi) = \int_{-r}^{0} a_1(s)\psi(s,\xi) ds,$$

$$g(t,\psi)(\xi) = \int_{-r}^{0} a_3(s)\psi(s,\xi) ds,$$

$$\rho(s,\psi) = s - \rho_1(s)\rho_2\left(\int_0^\pi a_2(\theta)|\psi(0,\xi)|^2 d\theta\right),$$

sont des fonctions bien définies qui permettent de transformer le système (6.8) au système abstrait (6.2). De plus, les fonctions f et g sont linéaires bornées. Maintenant, on peut assurer l'existence de la solution faible par application direct du Théorème 6.3.1.

D'après la remarque 1.7.1, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 6.3.1. *Soit* $\phi \in \mathcal{B}$ *une fonction continue et bornée. Alors il existe une solution faible de* (6.8) *sur* $]-\infty, +\infty[$.

Conclusion

Dans cette thèse, on a présenté quelques résultats d'existence, d'unicité et de la contrôlabilité des solutions faibles sur $\mathbb{R}_+$ concernant des classes de premier ordre pour les équations et les inclusions intégro-differentielles perturbées et non perturbées d'évolution à retard fini et infini dépendant de l'état sur les espace de Fréchet en utilisant l'argument du point fixe combiné avec la théorie des semi-groupes plus préciesément les alternatives de Frigon-granas [41], Avramescu [10] et Frigon [38, 39, 40].

Nous avons considéré le cas intégro-différentiel lorsque le retard dépend des solutions faibles des problèmes considérés par Baghli *et al.* dans [2] et [16]-[20].

Notre travail publié de cette thèse a été d'établir l'existence des solutions faibles pour les inclusions intégro-differentielles d'évolution de type neutre à retard infini dépendant de l'état par le Théorème 6.3.1.

Perspectives

Nos perspectives sont d'étudier l'existence, l'unicité et la contrôlabilité des solutions faibles sur toute la droite réelle pour les différentes classes des *dérivées d'ordre fractionnaire* pour les équations et les inclusions intégro-différentielles d'évolution fonctionnelles partielles et de type neutre perturbées et non perturbées lorsque le retard est fini et infini et lorsqu'il dépend de la solution.

Bibliographie

[1] N. Abada, R. P. Agarwal, M. Benchohra and H. Hammouche, Existence results for nondensely defined impulsive semilinear functional differential equations with state-dependent delay, *Asian-Eur. J. Math.*, **1** (4) (2008), 449-468.

[2] R. P. Agarwal, S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Controllability of mild solutions on semiinfinite interval for classes of semilinear functional and neutral functional evolution equations with infinite delay, *Appl. Math. Optim.*, **60** (2) (2009), 253–274.

[3] N.U. Ahmed, *Dynamic systems and control with applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

[4] N. U. Ahmed, *Semigroup theory with applications to systems and control*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **246**. Longman Scientific & Technical, Harlow John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

[5] E. Ait Dads and K. Ezzinbi, Boundedness and almost periodicity for some state-dependent delay differential equations, *Electron. J. Differential Equations*, **2002** (67) (2002), 1-13.

[6] D. Aoued, *Existence des solutions d'équations et d'inclusions d'évolution à retard*, Thèse de Doctorat, Université de Sidi Bel-Abbès, 2017.

[7] D. Aoued, S. Baghli-Bendimerad, Mild solutions for perturbed evolution equations with infinite state-dependent delay, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **59** (2013), 1–24.

[8] D. Aoued, S. Baghli-Bendimerad, Controllability of mild solutions for evolution equations with infinite state-dependent delay, *Europian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **9** (4) (2016), 383-401.

[9] A. Anguraj, M. M. Arjunan and E. M. Hernàndez, Existence results for an impulsive neutral functional differential equation with state-dependent delay, *Appl. Anal.*, **86** (7) (2007), 861-872.

[10] C. Avramescu, Some remarks on a fixed point theorem of Krasnoselskii, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **5** (2003), 1-15.

[11] K. Balachandran and E. R. Anandhi, Boundary controllability of integrodifferential systems in Banach spaces, *Proc. Indian Aced. Sci. Math. Sci.*, **111** (1) (2001), 127-135.

[12] K. Balachandran and E. R. Anandhi, Controllability of neutral integrodifferential infinite delay systems in Banach spaces, *Taiwanese J. Math.*, **8** (4) (2004), 689-702.

[13] K. Balachandran and A. Leelamani, Null controllability of neutral integrodifferential systems with infinite delay, *Math. Problems in Engineering*, (2006), 1-18.

[14] S. Baghli-Bendimerad, Global mild solution for functional evolution inclusions with state-dependent delay, *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, **5** (4) (2013), 1–19.

[15] S. Baghli-Bendimerad, *Résultats d'existence et d'unicité des solutions faibles pour quelques classes d'équations et d'inclusions d'évolution à retard*, Thèse de Doctorat, Université de Sidi Bel-Abbès, 2008.

[16] S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Uniqueness results for partial functional differential equations in Fréchet spaces, *Fixed Point Theory*, **9** (2) (2008), 395–406.

[17] S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Existence results for semilinear neutral functional differential equations involving evolution operators in Fréchet spaces, *Georgian Math. J.*, **17** (3) (2010), 423-436.

[18] S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Global uniqueness results for partial functional and neutral functional evolution equations with infinite delay, *Differential Integral Equations*, **23** (1 & 2) (2010), 31–50.

[19] S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Perturbed functional and neutral functional evolution equations with infinite delay in Fréchet spaces, *Electron. J. Differential Equations*, **2008** (69) (2008), 1–19.

[20] S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Multivalued evolution equations with infinite delay in Fréchet spaces, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, **2008** (33) (2008), 1–24.

[21] S. Baghli-Bendimerad, M. Benchohra and K. Ezzinbi, Controllability results for semilinear functional and neutral functional evolution equations with infinite delay, *Surv. Math. Appl.*, **4** (2009), 15–39.

[22] S. Baghli-Bendimerad, M. Benchohra and J. J. Nieto, Global uniqueness results for partial functional and neutral functional evolution equations with state-dependent delay, *Journal of Advanced Research in Differential Equations*, **2** (3) (2010), 35-52.

[23] M. Benchohra, E. P. Gastori and S. K. Ntouyas, Existence results for semi-linear integrodifferential inclusions with nonlocal conditions, *Rocky Mountain J. Math.*, **34** (3) (2004), 833-848.1340-1350.

[24] M. Benchohra, L. Górniewicz and S. K. Ntouyas, *Controllability of neutral of functional differential and integrodifferential inclusions in Banach spaces with nonlocal conditions*, *Nonlinear Anal. Forum*, **7** (2002), 39-54.

[25] M. Benchohra, L. Górniewicz and S. K. Ntouyas, *Controllability of Some Nonlinear Systems in Banach spaces : The fixed point theory approach*, Pawel Wlodkowicz University College, Plock, (2003).

[26] M. Benchohra, J. Henderson and S. K. Ntouyas, *Impulsive differential equations and inclusions*, Hindawi Publishing Corporation, *2*, New York, 2006.

[27] M. Benchohra and S. K. Ntouyas, Existence of mild solutions on semiinfinite interval for first order differential equation with nonlocal condition, *Comm. Math. Univ. Carolinae*, **41** (3) (2000), 485-491.

[28] M. Benchohra and S. K. Ntouyas, Existence of mild solutions for certain delay semilinear evolutions inclusions with nonlocal condition, *Dynam. Systems Appl.*, **9** (3) (2000), 405-412.

[29] M. Benchohra and S. K. Ntouyas, Existence results on infinite intervals for neutral functional and integrodifferential inclusions in banach spaces, *Georgian Math. J.*, **7** (2000), 609-625.

[30] T. A. Burton, A fixed-point theorem of Krasnoselskii, *Appl. Math. Lett.*, **11** (1) (1998), 85-88.

[31] T. A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii type, *Math. Nach.*, **189** (1998), 23-31.

[32] N. Carmichael and M. D. Quinn, An approach to nonlinear control problems using the fixed point methods, degree theory and pseudo-inverses, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **7** (1984-1985), 197-219.

[33] C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Math., vol. **580**, Springer-Verlag, New York, 1977.

[34] C. Corduneanu and V. Lakshmikantham, Equations with unbounded delay, *Nonlinear Anal.*, **4** (1980), 831-877.

[35] K. Deimling, *Multivalued differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.

[36] K.J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[37] A. Freidman, *Partial differential equations*, Holt, Rinehat and Winston, New York, 1969.

[38] M. Frigon, Fixed point results for generalized contractions in gauge spaces and applications, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128** (10) (2000), 2957-2965.

[39] M. Frigon, Fixed point results for multivalued contractions on gauge spaces. Set valued mappings with applications in nonlinear analysis, *Ser. Math. Anal. Appl.*, **4**, Taylor & Francis, London, (2002), 175–181.

[40] M. Frigon, Fixed point and continuation results for contractions in metric and gauge spaces, *Fixed point theory and its applications*, 89–114, Banach Center Publ., 77, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2007.

[41] M. Frigon and A. Granas, Résultats de type Leray-Schauder pour des contractions sur des espaces de Fréchet, *Ann. Sci. Math. Québec*, **22** (2) (1998), 161-168.

[42] X. Fu, Controllability of abstract neutral functional differential systems with unbounded delay, *Appl. Math. Comput.*, **151** (2004), 299–314.

[43] L. Górniewicz, *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, Math. Appl., **495**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[44] I. Gyori and F. Hartung, Exponential stability of a state-dependent delay system. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **18** (4) (2007), 773-791.

[45] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[46] J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[47] J. Hale and J. Kato, Phase space for retarded equations with infinite delay, *Funkcial. Ekvac.*, **21** (1978), 11-41.

[48] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Appl. Math. Sci., **99**, Springer-Verlag, New York, 1993.

[49] E. Hernandez, Regularity of solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay, *Proyecciones*, **21** (1) (2002), 65-95.

[50] F. Hartung, Linearized stability for a class of neutral functional differential equations with state-dependent delay. *Nonlinear Anal.* **69** (5-6) (2008), 1629-1643.

[51] F. Hartung, Differentiability of solutions with respect to parameters in neutral differential equations with state-dependent delay. *J. Math. Anal. Appl.* **324** (1) (2006), 504-524.

[52] F. Hartung, Linearized stability in periodic functional differential equations with state-dependent delay. *J. Comput. Appl. Math.* **174** (2) (2005), 201-211.

[53] E. Hernández, A. Prokopczyk and L. Ladeira, A note on partial functional differential equations with state-dependent delay. *Nonlinear Anal. Real World Applications* **7** (2006), 510-519.

[54] E. Hernandez, R. Sakthivel and S. Tanaka Aki, Existence results for impulsive evolution differential equations with state-dependent delay, *Electron. J. Differential Equations*, **2008** (28) (2008), 1–11.

[55] Y. Hino and S. Murakami, Total stability in abstract functional differential equations with infinite delay, *Electronic J. of Qualitative Theory of Diff. Equa.*, Lecture Notes in Math., **1473**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[56] Y. Hino and S. Murakami, Total stability in abstract functional differential equations with infinite delay, Proceedings of the 6th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (Szeged, 1999), **13**, 9 pp. (electronic) Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Szeged, 2000.

[57] Y. Hino, S. Murakami and T. Naito, *Functional differential equations with infinite delay*, Lecture Notes in Math., **1473**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[58] Sh. Hu and N. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*, Volume I : Theory, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1997.

[59] M. Kisielewicz, *Differential inclusions and optimal control*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

[60] V. Kolmanovskii, and A. Myshkis, *Introduction to the theory and applications of functional-differential equations.* Math. Appl., **463**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[61] V. Lakshmikantham, L. Wen and B. Zhang, *Theory of differential equations with unbounded delay*, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[62] **A. Mebarki**, S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Mild solutions for perturbed integro-differential evolution equations with infinite state-dependent delay, submitted.

[63] **A. Mebarki**, S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Controllability of mild solutions for integro-differential evolution equations with infinite state-dependent delay, in preparation.

[64] **A. Mebarki** and Selma Baghli-Bendimerad, Partial integro-differential evolution inclusions with infinite delay depending on the state, submitted.

[65] **A. Mebarki** and S. Baghli-Bendimerad, Neutral multi-valued integro-differential evolution equations with infinite state-dependent delay, *Turkish J. Math.* **44** (6) (2020), 2312-2329.

[66] **A. Mebarki**, S. Baghli-Bendimerad and M. Benchohra, Mild solution for disturbed integro-differential evolution inclusions with infinite delay depending on the state, in preparation.

[67] W. S. Li, Y. K. Chang and J. J. Nieto, Solvability of impulsive neutral evolution differential inclusions with state-dependent delay, *Math. Comput. Model.* **49** (2009), 1920-1927.

[68] X. Li and J. Yong, *Optimal control theory for infinite dimensional systems*, Birkhauser, Berlin, 1995.

[69] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[70] A. V. Rezounenko and J. Wu, A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay : Local theory and global attractors, *J. Comput. Appl. Math.* **190** (1-2) (2006), 99-113.

[71] A. A. Tolstonogov, *Differential inclusions in a Banach space*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[72] D. R. Willé and C. T. H. Baker, Stepsize control and continuity consistency for state-dependent delay-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **53** (2) (1994), 163-170.

[73] J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*, Appl. Math. Sci. **119**, Springer-Verlag, New York, 1996.

[74] K. Yosida, *Functional analysis*, 6^{th} edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980.