

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية <

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT MATERIAUX ET DEVELOPPEMENT DURABLE

THESE DE DOCTORAT

Filière : Physique

Spécialité : Physique Énergétique et sciences des Matériaux

Sujet de thèse

*Contribution à l'étude de la stabilité thermique et de la vibration libre des nano-structures incorporée dans un milieu polymère.*

Présenté par : M<sup>me</sup> BOUKHATEM Fatima

Soutenu le 01/07/2021 devant le jury composé de :

Président	: A. BENZAIK	Professeur	UDL SIDI BEL ABBES
Directeur de thèse	: M.S.A. HOUARI	Professeur	UNIV MASCARA
CO- Directeur de thèse	: H. HEIRECHE	Professeur	UDL SIDI BEL ABBES
Examineurs	: L. BOUMIA	MCA	UNIV TISSEMSILT

Année universitaire 2020-2021



## Dédicaces \_\_\_\_\_

---

*Je dédie ce modeste travail :*

*À mes chers parents*

*À mes sœurs*

*À mon mari*

*À mon encadreur Mr HOUARI Mohammed Sid Ahmed.*

*À mon co-encadreur Mr HERRICHE Houari.*

*À tous mes amis*

---

# Remerciements \_\_\_\_\_

---

Je remercie notre dieu tout puissant pour la force et le courage qu'il nous a donné pour mener à terme ce projet.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements au Mr Mohammed Sid Ahmed HOUARI mon directeur de thèse pour son suivi, son encadrement, ses recommandations, sa patience et sa disponibilité tout au long de cette thèse.

Je voudrais exprimer mes plus profonds remerciements à Mr Houari HEIRECHE pour son aide, sa patience et son soutien tout au long de ces années.

Un grand remerciement à mes parents et mon mari, pour leurs encouragements et leur soutien moral.

Je tiens à remercier Mr Abdelouahed TOUNSI, pour son aide et son soutien.

Je remercie ma chère amie Fatima Zohra ZAOUI pour son aide.

Mes remerciements s'adressent au président et aux membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail.

---

# Table des matières \_\_\_\_\_

---

## Table des matières

Résumé.....	8
Abstract .....	9
ملخص.....	10
Liste des figures .....	11
Liste des tableaux.....	13
Notations.....	14
Abréviations .....	16
Introduction générale .....	18
<b>Chapitre I : Généralité sur les nanomatériaux.....</b>	<b>22</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>22</b>
<b>2. Les nanomatériaux .....</b>	<b>22</b>
2.1. Définition des nanomatériaux .....	22
2.2. Historique et périmètre des nanomatériaux .....	23
2.3. Les grandes familles de nanomatériaux .....	26
2.4. Les formes allotropiques du carbone .....	28
2.5. La fabrication des nanostructures .....	34
<b>3. Domaines d'application des nanomatériaux .....</b>	<b>37</b>
3.1. La médecine .....	37
3.2. Domain des composites .....	38
3.3. Aéronautique.....	38
3.4. Industries automobile.....	38
3.5. Industries de l'électronique et des communications.....	39
3.6. Industries chimiques et des matériaux .....	39
3.7. Secteur manufacturier .....	39
3.8. Environnement.....	39
<b>4. Les avantages de la nanotechnologie .....</b>	<b>39</b>
<b>5. Les inconvénients de la nanotechnologie .....</b>	<b>40</b>
<b>6. Conclusion .....</b>	<b>41</b>
<b>Chapitre II : Revue sur les travaux réalisés sur les nanostructures.....</b>	<b>43</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>43</b>
<b>2. Théorie de l'élasticité non locale.....</b>	<b>46</b>

---

# Table des matières \_\_\_\_\_

---

2.1. Révision de la théorie de l'élasticité non locale .....	46
2.2. Modèles de poutre .....	47
2.3. Modèles de plaque .....	48
<b>3. Théorie modifiée du gradient de contrainte .....</b>	<b>50</b>
<b>4. Modèles d'éléments finis .....</b>	<b>52</b>
4.1. Éléments de poutre .....	52
4.2. Éléments de plaque .....	55
<b>5. Conclusion .....</b>	<b>57</b>
<b>Chapitre III : Développement Mathématique .....</b>	<b>59</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>59</b>
<b>2. Formulation mathématique .....</b>	<b>59</b>
<b>3. La Vibration libre .....</b>	<b>60</b>
3.1. Équations Cinématiques .....	60
3.2. Équations de mouvement .....	62
3.3. Le modèle d'élasticité non locales pour feuille de graphène .....	63
3.4. Les équations gouvernantes en termes de déplacements .....	64
3.5. Solutions analytiques .....	66
<b>4. La stabilité thermique .....</b>	<b>67</b>
4.1. Équations Cinématiques .....	67
4.2. Équations de stabilité .....	69
4.3. Le modèle de thermo-élasticité non local du graphène .....	70
4.4. Les équations gouvernantes en termes de déplacements : .....	71
4.5. Solutions analytiques .....	72
4.6. Solutions de flambement thermique .....	73
<b>5. Conclusion .....</b>	<b>74</b>
<b>Chapitre IV : Résultats et Discussion .....</b>	<b>77</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>77</b>
<b>2. Validation et comparaison des résultats .....</b>	<b>77</b>
2.1. La vibration libre .....	78
2.2. Stabilité thermique .....	86
<b>3. Conclusion .....</b>	<b>91</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>93</b>

---

# Table des matières \_\_\_\_\_

---

<b>Références .....</b>	<b>94</b>
-------------------------	-----------

---

## Résumé

Ce travail a pour but essentiel de proposer un nouveau modèle analytique pour le calcul de la charge critique de flambement thermique et les fréquences naturelles en vibration des nanostructures incorporée dans un milieu élastique. On a proposé un modèle d'ordre supérieur de déformation de cisaillement pour prédire les déplacements au sein de la plaque afin de déterminer les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles de vibration. Le principe d'Hamilton sera employé pour déterminer les équations d'équilibre du problème. L'analyse du problème s'effectuera par des méthodes numériques. Les résultats seront validés par des travaux de la littérature.

**Mots clés :** Nanostructures, effet de cisaillement transverse, théorie non-locale, stabilité, vibration, fondation élastique.



## Abstract

The main aim of this work is to propose a new analytical model for the calculation of the critical thermal buckling load and the natural frequencies in vibration of nanostructures incorporated in an elastic medium. A higher-order model of shear strain has been proposed to predict displacements within the plate to determine critical buckling loads and natural frequencies of vibration. Hamilton's principle will be used to determine the equilibrium equations of the problem. The analysis of the problem will be carried out by numerical methods. The results will be validated by work in the literature.

**Keywords:** Nanostructures, transverse shear effect, non-local theory, stability, vibration, elastic foundation.

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو اقتراح نموذج تحليلي جديد لحساب التحمل الحراري الحرج والترددات الطبيعية في اهتزاز الهياكل النانوية المدمجة في وسط مرن. تم اقتراح نموذج عالي المستوى لإجهاد القص للتنبؤ بالانتحالات داخل اللوحة لتحديد أحمال الالتواء الحرج، والترددات الطبيعية للاهتزاز.

سيتم استخدام مبدأ هاملتون لتحديد معادلات التوازن للمشكلة. سيتم تحليل المشكلة بالطرق العددية. كما سيتم التحقق من صحة النتائج من خلال الدراسات السابقة.

**الكلمات المفتاحية:** الهياكل النانوية، تأثير القص المستعرض، نظرية غير محلية، الاستقرار، اهتزاز، أساس مرن.

# Liste des figures \_\_\_\_\_

---

## Liste des figures

Figure I-1. Illustration de l'échelle nanométrique.....	25
Figure I-2. Spécificités des nanomatériaux. ....	27
Figure I-3. Trois sortes de nanostructures de carbone pur dérivées du graphite.....	28
Figure I-4. La structure moléculaire du graphite.....	29
Figure I-5. La structure de diamant. ....	30
Figure I-6. La structure d'un fullerène. ....	31
Figure I-7. Structure d'un nanotube de carbone mono feuillet(A) et double feuillets (B) [38]. .....	33
Figure I-8. Le graphène, modèle de base des autres matériaux du carbone : a) mis en boule en fullerènes, b) enroulé en nanotubes ou c) empilé en graphite.....	34
Figure I-9. Les deux approches d'élaboration des nano-objets et des nanomatériaux.....	35
Figure I-10. Graphène à partir du graphite [44]. ....	37
Figure I-11. Nanorobot en médecine (molécule active).....	38
Figure II-1. Illustration schématique des différentes formes de NTCs [120]. ....	45
Figure II-2. Nanomatériaux à base de graphène [121]. ....	45
Figure II-3. Fréquences fondamentales des poutres encastées (CC) et des poutres encastées libres(CF) [84]. ....	47
Figure II-4. Comparaison de divers modèles de mécanique du continuum avec des simulations de MD pour (5,5) SWCNT [94]. ....	48
Figure II-5. Effet du rapport de Poisson dans un micro-poutre encasté libre [103]. ....	50
Figure II-6. Comparaison entre le modèle de gradient de déformation et le modèle de contrainte couplée pour les micro-poutres [104]. ....	51
Figure II-7. Comparaison entre le modèle de gradient de déformation et le modèle de contrainte couplée pour les microplaques [107]. ....	52
Figure II-8. Comparaison du modèle de contrainte de couple avec le résultat expérimental pour les micropoutres encastée libre [108]. ....	54
Figure II-9. Comparaison du modèle de gradient de contrainte avec le résultat expérimental pour les micropoutres encastée libre [110]. ....	55
Figure II-10. Fonctions de base des B-splines rationnelles non uniformes (NURBS). ....	56
Figure III-1. Schéma d'une nano-plaque reposant sur une fondation élastique avec des paramètres géométriques et des systèmes de coordonnées. ....	59
Figure IV-1. Vibration libre $\Omega$ par rapport au paramètre non local $\mu$ pour différentes valeurs des paramètres de fondation élastique.....	83

## Liste des figures \_\_\_\_\_

---

Figure IV-2. Effets des coefficients d'élasticité et de cisaillement de la fondation sur la première fréquence naturelle non dimensionnelle $\Omega$ d'une nano-plaque carrée ( $a/h = 10, \mu = 2$ ) .....	84
Figure IV-3. La variation des paramètres de fréquence naturelle non dimensionnels $\Omega$ par rapport au paramètre non local avec différents aspects du rapport d'épaisseur ( $a / h$ ) des nano-plaques carrées simplement supportées ( $k_w = 100, k_s = 20$ ) .....	85
Figure IV-4. Effets du (a) paramètre de Winkler $k_w$ , (b) paramètre de la couche de cisaillement $k_s$ sur la température critique de flambage $T_{cr}$ des nano-plaques carrées simplement supportées, en fonction du rapport d'épaisseur sous la variation linéaire de la température ( $e_0 a = 2 nm$ ) .....	88
Figure IV-5. Effets (a) du rapport d' épaisseur, (b) du rapport d'aspect de la plaque et (c) du paramètre non local sur la température critique de flambement $T_{cr}$ , des nano-plaques simplement appuyées en raison des variations de température uniforme, linéaire et non linéaire ( $k_w = 100, k_s = 100$ ). .....	90

# Liste des tableaux \_\_\_\_\_

---

## Liste des tableaux

Tableau IV-1. Fréquence non dimensionnelle de premier mode $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée simplement appuyée. ( $a = 10, E = 30 \times 10^6, \nu = 0.3, \rho = 1$ ). .....	78
Tableau IV-2. Fréquence fondamentale non dimensionnelle $\hat{\omega}$ de plaques carrées simplement appuyées. ( $h = 0.34 \text{ nm}, E = 1.02 \text{ TPa}, \rho = 2.250 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.16, \rho_0 = 1, E_0 = 1$ ).....	79
Tableau IV-3. Vibration libre $10\bar{\omega}$ des feuilles de graphène monocouche isotropes sans ou reposant sur les fondations élastiques pour diverses valeurs de paramètre non local.....	80
Tableau IV-4. Vibration libre $\Omega$ des feuilles de graphène monocouche sans ou reposant sur des fondations élastiques pour différentes valeurs de paramètre non local ( $\mu$ ). .....	82
Tableau IV-5. Comparaison du changement de température de flambement $T_{cr}$ d'une feuille de graphène monocouche incorporée dans un milieu élastique sous variation de température linéaire ( $k_w = 100, k_s = 100$ ). .....	86

# Notations

---

## Notations

$E$	module d'Young
$G$	module de cisaillement
$A$	section transversale
$I$	Moment d'inertie de la section
$x$	Coordonnée dans le sens de l'axe x
$t$	temps
$w$	déflexion transversale
$\phi$	pente
$k$	nombre d'onde
$v$	vitesse d'onde
$\omega$	fréquence de résonance
$\rho$	densité de masse par unité de volume
$e_0 a$	facteur de taille (non local)
[ ]	Matrice
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de $z$
$E(z)$	Module de Young en fonction de $z$
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de $z$
$V(z)$	Fraction volumique
$K$	Paramètre du matériau
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Épaisseur de la plaque
$u_0; v_0; w_0$	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$u, v, w$	Déplacements dans les directions $x, y, z$
$\varphi_x, \varphi_y$	Les rotations autour des axes $x, y$
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_x, \tau_y$	Contraintes cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformation dans la direction $x, y$ et $z$
$\gamma_x, \gamma_y$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_x, \delta \gamma_y$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_z, M_{xy}$	Moments de flexion
$S_x, S_y, S_{xy}$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$Q_{xz}, Q_{yz}$	Effort de cisaillement
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Effort de cisaillement

## Notations \_\_\_\_\_

---

$A_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij}$	Termes de la matrice de flexion
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$i, j$	Nombres naturels
$\partial$	Dérivée partielle

# Abréviations \_\_\_\_\_

---

## Abréviations

<b>AFM :</b>	Microscopie à force atomique (Atomic Force Microscopy)
<b>Å :</b>	Angstrom
<b>C :</b>	Carbone
<b>CVD :</b>	Dépôt de vapeur chimique (chemical Vapeur deposition)
<b>CLPT :</b>	Théorie classique des plaques (Classical Lamination Plate Theory).
<b>CT :</b>	Cisaillement transverse
<b>°C :</b>	Degré Celsius
<b>1D :</b>	Unidimensionnel
<b>2D :</b>	Bidimensionnel
<b>3D :</b>	Tridimensionnel
<b>FSDT :</b>	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First order Shear Deformation Theory)
<b>HSDT :</b>	Théorie des plaques d'ordre supérieur ( Higher order Shear Deformation Theory)
<b>MD :</b>	Dynamique moléculaire
<b>NTC :</b>	les nanotubes de carbones
<b>nm :</b>	Nanomètre.
<b>PSDPT :</b>	La théorie de la plaque de déformation en cisaillement parabolique (Parabolic Shear Deformation Plate Theory)
<b>SWNT :</b>	les nanotubes de carbones à simple-parois
<b>SSDT:</b>	La théorie de la plaque de déformation en cisaillement de deuxième ordre (Second-Order Shear Deformation Theories)
<b>SLGS:</b>	feuilles de graphène monocouche (single-layered graphene sheets).
<b>% :</b>	Pourcent.



---

# Introduction Générale

---

# Introduction Générale \_\_\_\_\_

---

## Introduction générale

Durant ces dernières années, les caractéristiques électriques, chimiques et mécaniques des nanostructures, y compris les nanotubes, les nano-tiges et les nano-plaques ont reçu une grande attention dans les nanosciences et la nanotechnologie en raison de leurs propriétés supérieures telles que les caractéristiques électriques, chimiques et mécaniques, et à leurs larges applications dans tous les domaines de la vie actuelle. Par la suite, des nombreuses études ont été réalisées pour des travaux théoriques et expérimentaux afin d'analyser le statique, vibration, flambement mécanique et thermique des nanostructures en raison de la pertinence accrue de ce composant. En tant que telles, ces structures sont souvent soumises à une charge thermique dans des conditions environnementales intenses pendant leur utilisation [1]. Ainsi, il est très nécessaire de prendre en compte l'effet de petite taille dans l'analyse de flambement mécanique et thermique de ces nanostructures pour une meilleure conception ou compréhension de ces structures à petite échelle. Il convient de noter que la mécanique de la théorie classique est indépendante de la taille et ne convient pas aux nanostructures en raison de l'impossibilité de capturer l'effet de la taille. Afin d'examiner l'effet dépendant de la taille, plusieurs théories non classiques impliquent que des paramètres supplémentaires d'échelle de longueur des matériaux ont été proposés, tels que la théorie de l'élasticité non locale [2-3], la théorie du gradient de déformation [4-6], la théorie de la contrainte de couple modifiée [7], et la théorie non locale du gradient de déformation [8].

La mécanique non locale continue développée par Eringen [2-3] suppose que la contrainte a un point dans un corps est considéré comme une fonction des contraintes en tous points dans les régions voisines. Dans cette théorie, les forces entre les atomes et l'échelle de longueur interne sont prises en compte dans la construction des équations constitutives [9].

Sur la base du modèle local, Hebali et al. [10] ont présenté une analyse de flexion, de flambement et de vibration de plaques à gradation fonctionnelle en utilisant une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). De plus, les phénomènes de flambement thermique, de flexion et de vibration libre des plaques composites laminées ont été étudiés dans la littérature pour comparer les résultats obtenus en utilisant des approches classiques et ceux prédits par les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur en élasticité [11-14]. Sur la base de la relation constitutive non locale d'Eringen, un certain nombre

# Introduction Générale \_\_\_\_\_

---

d'études ont été réalisées pour développer des modèles de plaques non locales et les appliquer pour analyser les réponses mécaniques et vibratoires des nano-plaques [15-17]. Pradhan et Kumar [18] ont étudié le comportement vibratoire non local des feuilles de graphène en utilisant la théorie de l'élasticité non locale.

Wang et al. [19] étudie le flambement thermique de la plaque à l'échelle nanométrique via la théorie classique et la théorie de la plaque de Mindlin en utilisant une condition aux limites simplement appuyée. Ansari et al. [20] ont présenté un premier modèle d'éléments finis de la théorie de la déformation par cisaillement (FSDT) combinée à la théorie de l'élasticité non locale pour les nano-plaques avec des conditions aux limites simplement appuyées et serrées intégrées dans un milieu élastique. Sobhy [21] a étudié la vibration libre, le flambement mécanique et thermique des feuilles de graphène multicouches (MLGS) en utilisant de nouvelles théories non locales à deux plaques variables.

Babaei et Shahidi [22] ont étudié les effets à petite échelle sur la réponse de stabilité élastique des SLGS quadrilatéraux sous compression biaxiale par la théorie de l'élasticité non locale en utilisant la méthode de Galerkin et la mécanique du milieu continu non local. Sobhy [23] a étudié les analyses de flexion thermomécanique et de vibration libre de feuilles de graphène monocouche intégrées dans une fondation élastique basée sur la théorie des plaques de déformation par cisaillement sinusoïdal avec l'utilisation de relations constitutives différentielles non locales d'Eringen. Chakraverty et Behera [24] ont étudié l'analyse des vibrations des nano-plaques rectangulaires sur la base de la théorie classique des plaques (CPT) en conjonction avec la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen. Radic et al [25] ont étudié le flambement des nano-plaques doublement orthotropes sur la base de la théorie de l'élasticité non locale en utilisant le (CPT). Samaei et autres [26] ont analysé la réponse aux vibrations de la feuille de graphène encastree dans un milieu élastique en utilisant la théorie non locale de la plaque de Mindlin. Aksencer et Aydogdu [27] ont présenté une solution Levy-type pour l'analyse du flambement et des vibrations des nanoplaques. Bessaim et al. [28] ont développé un modèle non local quasi-3D pour l'analyse de vibration libre de nanoplaques isotropes basé sur la théorie sinusoïdale quasi-3D. Toutes les théories FSDT et d'ordre supérieur contiennent cinq fonctions inconnues, et par conséquent elles conduisent à cinq équations gouvernantes.

# Introduction Générale \_\_\_\_\_

---

Récemment, de nouvelles théories des plaques ont été développées pour réduire le nombre d'équations gouvernantes [29-30].

Dans ce présent travail, une nouvelle théorie non locale de déformation de cisaillement hyperbolique à quatre variables, des nano-plaques incorporées dans un milieu élastique est développée, pour l'étude de la vibration libre et le flambement thermique des plaques à l'échelle nanométrique.

Pour étudier l'interaction de la nano-plaque avec le milieu élastique on utilise les deux paramètres Winkler et Pasternak. En se basant sur les relations constitutives non locales d'Eringen, le principe de Hamilton sera employé pour déterminer les équations d'équilibres.

Des exemples numériques sont présentés pour démontrer l'effet du paramètre non local, le paramètre du module de Fondation élastique et le rapport géométrique de la nano-plaque sur la fréquence et la charge critique du flambement des nano-plaques sur un milieu substrat élastique. Les résultats calculés sont comparés aux solutions disponibles dans la littérature.

Ce travail de thèse est structuré en quatre chapitres répartis comme suit :

- Le premier chapitre présentera une vue générale sur les nanomatériaux, leurs importances dans la nanotechnologie et leurs coté applicatif qui touche tous les domaines de la vie moderne.
- Le deuxième chapitre rassemble une étude bibliographique sur les différents travaux réalisés sur les nano structures.
- Le troisième chapitre présentera le développement d'un modèle analytique du comportement de vibration libre et flambement thermique d'une feuille monocouche de graphène.
- Le dernier chapitre est consacré pour les résultats des études comparatives réalisées et les commentaires sur ces résultats.

À la fin. Nous concluons notre thèse par une conclusion générale qui résume l'ensemble de nos travaux réalisés.

---

# Chapitre I

---

Généralité sur les nanomatériaux

---

## Chapitre I : Généralité sur les nanomatériaux

### 1. Introduction

Les nanomatériaux comme les particules, les tubes, les tiges ou les fibres nanométriques sont les principaux produits des nanotechnologies. Les nanoparticules sont généralement définies comme ayant au moins une dimension inférieure à 100 nanomètres.

Depuis les années 80, de nombreux travaux ont montré que les matériaux nanostructurés présentent des caractéristiques physico-chimiques distinctes de leurs homologues microstructurés. [31]. Les nanomatériaux représentent un domaine de recherche très actif et largement étudiés par la communauté scientifique. Ces derniers devenus désormais une réalité industrielle avec des enjeux économiques très importants.

Les nanomatériaux sont un sujet de recherche en pleine expansion en vue de nombreuses applications, à savoir, la santé, l'électronique, la technologie d'information, le domaine de composite et la protection de l'environnement. Cependant, les propriétés des nanomatériaux ne sont pas toujours bien caractérisées, cela peut produire des risques potentiels durant leur fabrication et leur utilisation.

### 2. Les nanomatériaux

#### 2.1. Définition des nanomatériaux

Ce sont des matériaux constitués de nano-objets qui présentent des propriétés spécifiques à l'échelle nanométrique. Les nano-objets peuvent se présenter sous la forme de particules, fibres ou tubes, de couches minces ou de constituants structurels. L'unité de référence du monde des nanotechnologies est donc le nanomètre (nm).

Le terme nano (du grec Nanos qui signifie « nain ») est un préfixe, qui placé devant une unité la divise par le facteur  $10^{-9}$ . Un nanomètre correspond donc à un milliardième de mètre ; en pratique, il indique une petitesse extrême à tel point d'ailleurs qu'une nanostructure doit être agrandie plus de 10 million de fois avant que nous puissions apprécier aisément ses détails minutieux à l'œil nu. [32]

Il existe de nombreuses définitions du terme « nanomatériau » :

- La Commission européenne a proposé en octobre 2011, dans le cadre d'une recommandation, une définition pour le terme « nanomatériau ». Un nanomatériau est un matériau naturel, formé accidentellement ou manufacturé contenant des particules libres, sous forme d'agrégat ou sous forme d'agglomérat, dont au moins 50 % des particules, dans la répartition numérique par taille, présentent une ou plusieurs dimensions externes se situant entre 1 nm et 100 nm.  
Est également mentionné dans cette recommandation, que tout matériau est à considérer comme relevant de la définition mentionnée ci-dessus dès lors qu'il présente une surface spécifique en volume supérieure à  $60 \text{ m}^2/\text{cm}^3$ .
- Selon la norme ISO TS 80004-1, un nanomatériau est un matériau dont au moins une dimension externe est à l'échelle nanométrique c'est-à-dire comprise approximativement entre 1 et 100 nm ou qui possède une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique.

### 2.2. Historique et périmètre des nanomatériaux

Lors d'une conférence organisée en 1959, le physicien Richard Feynman a déclaré que les principes de la physique autorisaient la manipulation et le positionnement contrôlé des atomes et des molécules, individuellement, à la manière de briques de construction type Lego®. Par cette déclaration, le physicien américain suggérait à la communauté scientifique d'explorer l'univers de l'infiniment petit [34].

Le terme nanotechnologie fut utilisé, la première fois en 1974, par Norio Tanigushi. Il fut toute fois popularisé par K. Eric Drexler dans les années 80, lorsque celui-ci introduisit le Terme « manufacture moléculaire ». Richard Feynman a été le premier scientifique à avancer l'idée qu'il serait bientôt possible, pour l'homme, de transformer la matière au niveau atomique.

Pour définir la notion de nanoparticules et/ou de nanomatériaux, il aura fallu attendre la terminologie prénormative telle que définie par l'ISO publiée à la fin du mois de septembre 2008 sous le numéro ISO/TS27687 (« Nanotechnologies – Terminologie et définitions relatives aux nano- objets – Nanoparticule, nanofibre et nanoplaque ») à savoir :

- La définition nanométrique considère le domaine de dimension compris entre 1 et 100 nm.

- Les nano-objets sont des matériaux présentent une, deux ou trois dimension extrême dans le domaine nanométrique. Parmi ces nano-objets, les nanoparticules comprennent leurs trois dimensions dans le domaine nanométrique, les nano-plaques ont une dimension nanométrique alors que les nano fibres sont des nano-objets présentant deux dimensions nanométriques, troisième dimension étant plus longue de façon significative.

« Santé Canada » précise que l'échelle nanométrique signifie 1 à 100 nanomètres, c'est-à-dire la préconisation de l'ISO. Deux concepts spécifiques sont par contre ajoutés. Tout d'abord celui de « phénomènes à l'échelle nanométrique » qui sont liés à la taille et sont distincts des propriétés chimiques ou physiques des atomes, molécules et matériaux particuliers. D'autre part, « Santé Canada » distingue les produits manufacturés en précisant « le terme « manufacturé » comprend les processus techniques et les contrôles de la matière et des processus à l'échelle nanométrique ».

En octobre 2010, la commission européenne lance une consultation sur la définition des nanomatériaux et, à cette occasion, propose une recommandation : « les états membres, les agences européennes et l'industrie ont invités à employer cette définition du terme nanomatériau lorsqu'ils adoptent et implémentent des réglementations ou des programmes concernant les produits issus des nanotechnologies. »

Un nanomatériau remplit au moins l'un des critères suivants :

- Il est composé de particules avec au moins une dimension dans la gamme 1-100 nanomètres, pour au moins 1% d'entre elles.
- Il a des structurations internes ou de surface avec au moins une dimension dans la gamme 1-100 nanomètres.
- Il a une surface spécifique de plus de  $60\text{m}^2/\text{cm}^3$ , en excluant les matériaux formés de particules de tailles inférieures au nanomètre.

La lecture de ces propositions de définitions- pour certaines encore à l'état de « brouillon » ou de simple recommandation- traduit très clairement la prise en compte, par les autorités en charge de l'encadrement du développement de ces secteurs industriels, des spécificités des nanomatériaux, à savoir : la variation de propriétés physico-chimiques,

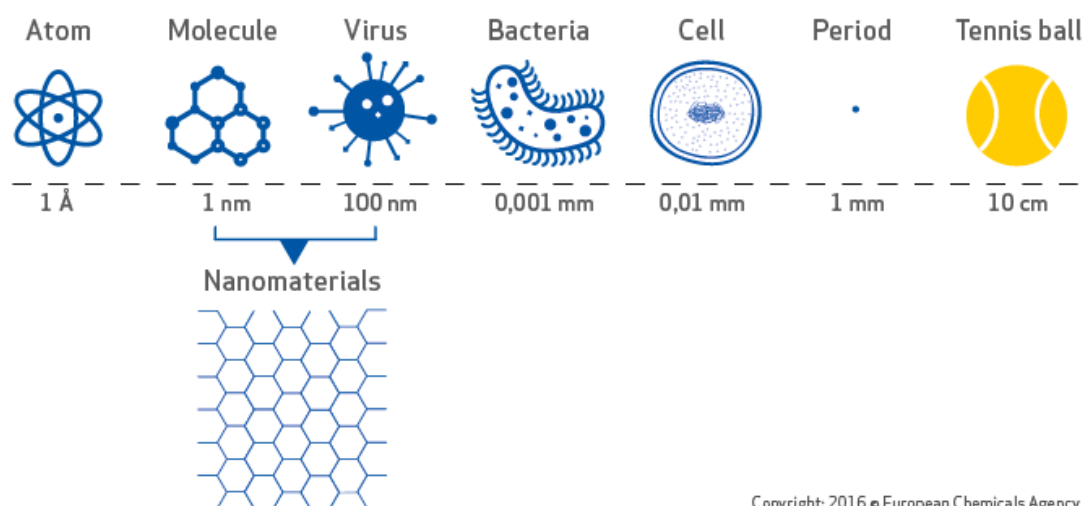


l'importance de la surface spécifique et encore l'intégration de la notion de distribution de tailles de nanoparticules avec la prise en compte d'une teneur minimum à partir de laquelle un produit/ composant ou encore une substance doivent être considérés comme relevant du champ «nano».

Il convient de souligner la difficulté, pour des définitions et/ou textes réglementaires, à définir des bornes précises en termes de dimensions pour ce champ « nano ».

Ainsi, les limites dimensionnelles 1nm et 100nm peuvent être strictes et exclusives, ou indicatives.

Outre ces tentatives de définition, il en est certaines qui sont quasiment entrées dans le langage commun. Par extension (et sans aucun doute, abus de langage par rapport à cette définition), il est très souvent d'usage d'étendre la notion de nanoparticules à l'ensemble des nano-objets, faisant alors abstraction du nombre de dimensions de l'objet inférieures à 100nm [33]. La Figure I.1 permet d'illustrer la taille extrêmement fine d'un nanomatériau.



Copyright: 2016 e European Chemicals Agency

Figure I-1. Illustration de l'échelle nanométrique.

### 2.3. Les grandes familles de nanomatériaux

Il existe deux grandes familles de nanomatériaux :

#### 2.3.1. Les nano-objets

Les nano-objets qui sont des matériaux dont une, deux ou trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique c'est-à-dire approximativement entre 1 et 100 nm.

Parmi les nano-objets, il est possible de distinguer trois catégories :

- a) **Les nanoparticules** : qui désignent des nano-objets dont les trois dimensions externes se situent à l'échelle nanométrique : nanoparticules de latex, d'oxyde de zinc, de fer et de cérium, d'alumine, de dioxyde de titane, de carbonate de calcium, etc.
- b) **Les nano fibres, nanotubes, nano filaments ou nano bâtonnets** : qui se rapportent à des nano-objets dont deux dimensions externes sont à l'échelle nanométrique et la troisième dimension significativement supérieure (nanotubes de carbone, nano fibres de polyester, nanotubes de bore, etc.). Ces termes désignent des nano-objets longilignes de section comprise entre 1 et quelques dizaines de nm et de longueur comprise entre 500 et 10000 nm.
- c) **Les nano-feuillets, nano-plats ou nano-plaquettes** : qui définissent des nanoobjets dont une dimension externe se situe à l'échelle nanométrique et les deux autres dimensions sont significativement supérieures (nano-feuillets d'argile, nano-plaquettes de séléniure de cadmium, etc.).

Les nano-objets peuvent être utilisés en tant que tels sous forme de poudre, de suspension liquide ou de gel.

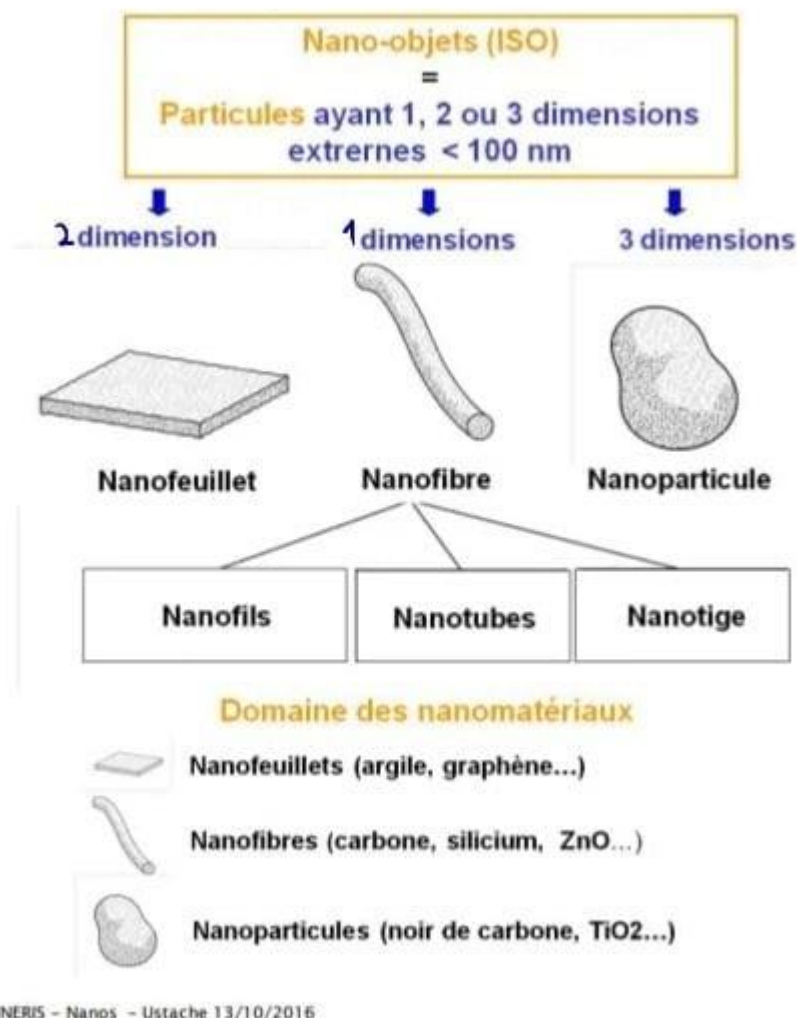


Figure I-2. Spécificités des nanomatériaux.

### 2.3.2. Les matériaux nano-structurés

Les matériaux nano-structurés qui possèdent une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique. Parmi les matériaux nano-structurés, il est possible de distinguer plusieurs familles parmi lesquelles :

- a) **Les agrégats et agglomérats de nano-objets** : Les nano-objets peuvent se présenter soit sous forme individuelle (c'est-à-dire sous forme de particules primaires) ou soit sous forme d'agrégats ou d'agglomérats dont la taille est sensiblement supérieure à 100 nm.
- b) **Les nano-composites** : Ces matériaux sont composés pour tout ou partie de nano-objets qui leur confèrent des propriétés améliorées ou spécifiques de la dimension nanométrique. Les nano-objets sont incorporés dans une matrice ou sur une surface afin d'apporter une nouvelle fonctionnalité ou de modifier certaines propriétés mécaniques,

magnétiques, thermiques, etc. Les polymères chargés de nanotubes de carbone utilisés dans le secteur des équipements sportifs, afin d'améliorer leur résistance mécanique et de diminuer leur poids, constituent un exemple de nano-composites.

- c) **Les matériaux nano-poreux** : Ces matériaux possèdent des pores de taille nanométrique. Les aérogels de silice sont des matériaux nano-poreux qui présentent d'excellentes propriétés d'isolation thermique. [34]

## 2.4. Les formes allotropiques du carbone

Le carbone est le 4<sup>e</sup> élément le plus abondant dans l'univers et le 15<sup>e</sup> le plus abondant dans la croûte terrestre. Le corps simple carbone présente plusieurs formes allotropiques dont principalement le graphite et le diamant. De nombreuses structures basées sur le carbone ont également été synthétisées comme les nanotubes, les fullerènes et le graphène.

Pour arriver à dévoiler les particularités structurelles des nanomatériaux, nous mettons l'accent sur les différentes formes connues de carbone.

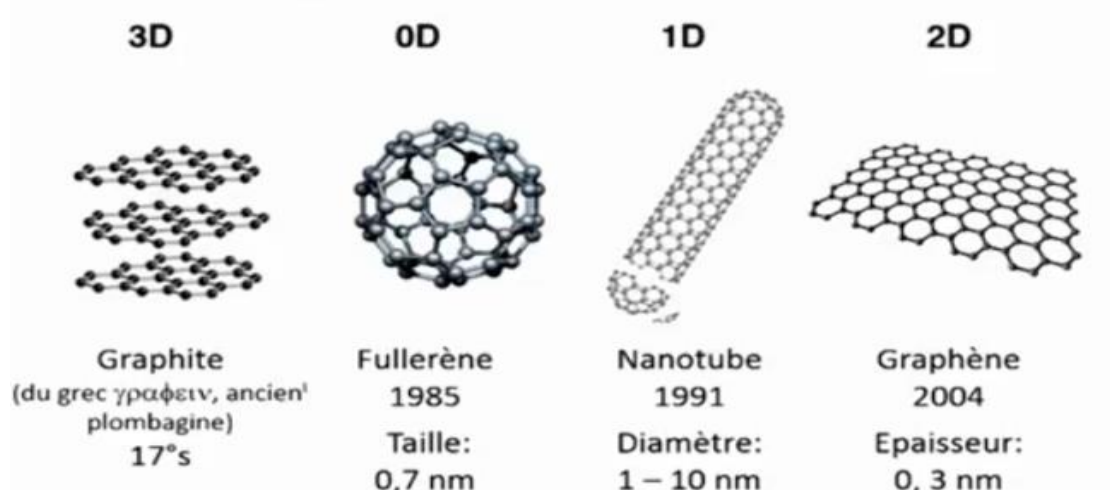


Figure I-3. Trois sortes de nanostructures de carbone pur dérivées du graphite.

### 2.4.1. Graphite

C'est la forme la plus courante du carbone à l'état libre. On le trouve dans les sédiments métamorphiques, souvent à proximité du charbon organique.

Le graphite est constitué de feuillets où chaque atome de carbone se trouve au sommet d'un hexagone régulier. Ces feuillets, nommé « graphène », sont superposés les uns aux autres à environ 0,34 nm les uns des autres.

Au sein d'un feuillet, chaque atome de carbone est relié à trois autres par de solides liaisons covalentes. Les électrons qui ne sont pas mobilisés par ces liaisons (un par atome de carbone) sont engagés dans des liaisons covalentes, bien plus fragiles que les précédentes, qui lient les feuillets entre eux.

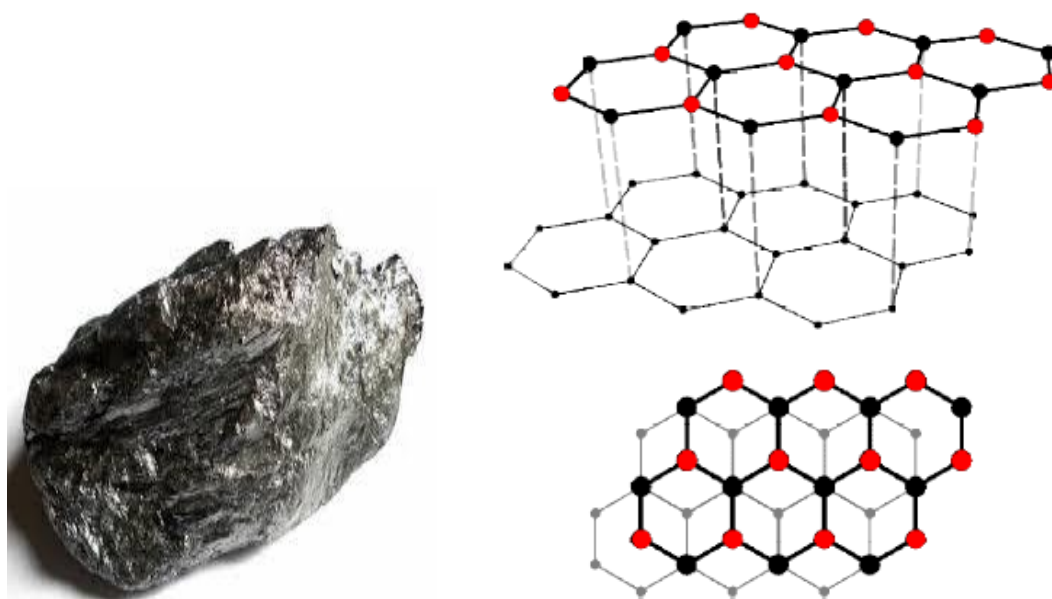


Figure I-4. La structure moléculaire du graphite.

Cette organisation particulière des atomes de carbone et les deux types de liaisons mises en œuvre confèrent à cette substance des propriétés particulières utilisés dans de nombreuses activités industrielles.

Du fait de l'organisation en feuillets superposés, le graphite est un solide de faible dureté perpendiculairement aux feuillets. C'est ce qui explique son utilisation pour réaliser des joints, des pièces de frottement et qui en fait un excellent lubrifiant.

Les fragiles liaisons entre les feuillets sont susceptibles de libérer des électrons qui rendent le graphite un conducteur électrique. On l'utilise donc pour la fabrication des balais des moteurs électriques (les charbons) afin d'amener le courant dans les bobines en rotation.

Du fait de sa structure, ses propriétés mécaniques (élasticité, résilience...) ne sont pas les mêmes dans le plan des feuillets et perpendiculairement aux feuillets. C'est pourquoi il est utilisé dans les alliages composites dits « fibres de carbone » où il est mélangé à des polymères pour accroître leur élasticité.

Le graphite existe sous des formes intermédiaires plus ou moins dégradées qui vont des parfaits réseaux de feuillets hexagonaux, jusqu'au carbone amorphe constitutif du noir de fumée. Sous toutes ces formes, c'est une substance très utilisée en chimie.[35]

### 2.4.2. Diamant

Le diamant est la forme la plus compacte du carbone, qui donne à la substance son énorme dureté. De manière naturelle, il ne se forme qu'à haute température et haute pression (plus de 1000°C et plusieurs giga pascals) et n'est, en théorie, stable qu'à haute pression.

Cependant, c'est une forme métastable du carbone, ce qui lui permet donc d'exister aux conditions ambiantes.

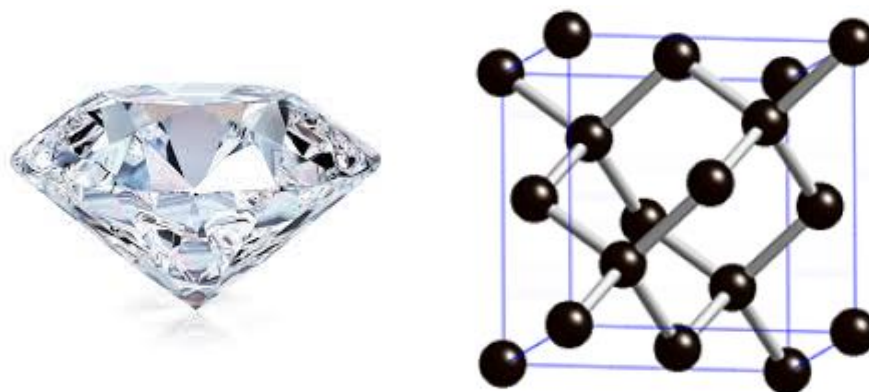


Figure I-5. La structure de diamant.

Dans la structure du diamant chaque atome de carbone est entouré tétraédriquement de quatre autres atomes de carbone. Il en résulte un réseau tridimensionnel d'hexagones déformés. C'est cette structure rigide qui fait du diamant le minéral naturel le plus dur qui soit. Les diamants naturels servent exclusivement à la production de bijoux. Les outils, avec lesquels certains matériaux très durs doivent être travaillés, sont munis de diamants synthétiques ou de débris de diamants. [35]

### 2.4.3. Fullerène

Si dans un graphène tel que décrit précédemment, on remplace ici et là une structure hexagonale par une structure pentagonale, la surface plane du graphène se courbe.

C'est en cousant ensemble 20 hexagones et 12 pentagones de cuir judicieusement disposés que l'on réalise un ballon de football.

D'une manière analogue, si on associe 60 atomes de carbone placés aux sommets de 20 hexagones et de 12 pentagones non adjacents, on obtient une molécule stable de forme sphérique et creuse que l'on appelle « footballène ». Cette molécule est la plus simple de la famille des fullerènes.



Figure I-6. La structure d'un fullerène.

Elle a été découverte en 1985 par H.W. Kroto (prix Nobel de chimie 1996), de l'université du Sussex près de Brighton, en Angleterre, et par R.E. Smalley de l'université de Rice au Texas (Etats-Unis).

Les fullerènes sont des molécules organiques non-saturées. Si l'on considère le footballène, 90 arêtes représentent les liaisons entre les atomes de carbone : 30 sont des doubles liaisons et 60 des liaisons simples.

Pour avoir une idée de la taille de ces molécules, on peut dire que si  $R_T$  est le rayon de la Terre,  $R_B$  le rayon d'un ballon de football et  $R_f$  celui d'un fullerène, on a la relation :

$$\frac{R_T}{R_B} = \frac{R_B}{R_f} \quad (1)$$

En d'autres termes, la taille du ballon de football est à la Terre ce que la taille d'un fullerène est au ballon de football.

Le diamètre des fullerènes est de l'ordre du nanomètre et il est remarquable que ce sont des solides qui ne sont pas liés entre eux. Ce sont donc des nanoparticules.

Partant de cette découverte, les chimistes eurent l'idée que les graphènes étaient susceptibles de s'enrouler sur eux-mêmes, tels des tubes. C'est ainsi qu'en 1991 ont été découverts les nanotubes par Sumio Iijima, dans les sous-produits de la fabrication des fullerènes.

Au plan chimique, les nanotubes qui sont creux sont susceptibles de transporter des substances en les isolant de l'environnement jusqu'à leur libération. Ce sont des récipients moléculaires. On envisage d'immenses nanofils pour transporter en toute sécurité l'hydrogène dans le cadre du développement de ce carburant.

Il existe donc plusieurs formes allotropiques du carbone. Parmi celles-ci, deux sont naturelles : le diamant et le graphite. Les fullerènes, les NTC et le graphène sont trois nouveaux allotropes du carbone, découverts coup sur coup lors des trois dernières décennies [36].

#### **2.4.4. Les Nanotubes de Carbones**

Les nanotubes de carbone ont été découverts dans les débuts des années 1991 par Iijima et al. Ils se composent d'une seule couche graphitique enroulée sur elle-même, en se terminant par des demi sphères de fullerènes de chaque côté. Possédant un caractère monodimensionnel (1 D) et un arrangement hexagonal des atomes de carbone, les nanotubes de carbones peuvent être à mono ou à plusieurs parois [37].



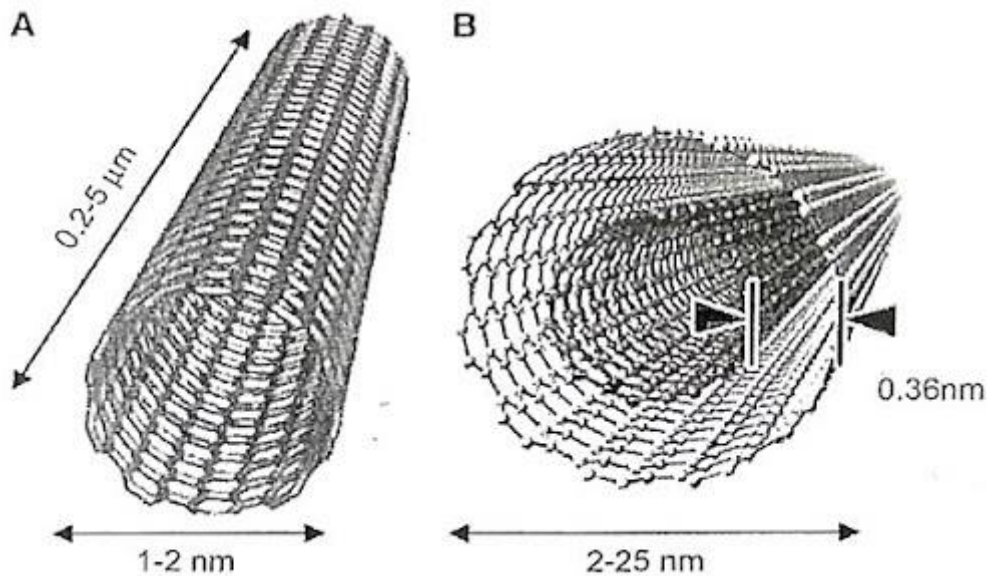


Figure I-7. Structure d'un nanotube de carbone mono feuillet(A) et double feuillets (B) [38].

Le facteur commun entre ces allotropes de carbone (graphite, nanotube et fullerène) est un arrangement hexagonal des atomes de carbone, d'où une monocouche de carbone peut être obtenue sous plusieurs formes, un empilement de feuillets de graphène, en cylindre afin de former des nanotubes de carbone et la forme de ballon qui caractérise les fullerènes. Récemment une autre forme allotropique a été rajoutée à la famille des nano carbone, cette dernière est nommée le graphène. Depuis sa découverte en 2004, il devient un sujet très discuté dans le domaine de la recherche des sciences des matériaux [39].

#### 2.4.5. Graphène

Ce matériau a été découvert en 2004 par Andre Geim et Konstantin Novoselov [40].

Le graphène est le nom que l'on donne à un plan d'atomes de carbone assemblés en 2 dimensions (2D) selon une structure en nid d'abeille. Il peut être considéré comme un matériau 2D parfait puisqu'il n'est constitué que d'une seule couche d'atomes. Il est parmi les matériaux les plus forts dans la nature (200 fois plus résistant que l'acier et 6 fois plus léger).

Le graphène sert de matériau de base pour des matériaux graphitiques de toutes dimensionnalités : fullerènes (0D), nanotubes (1D) ou graphite (3D). En effet, la taille nanométrique des fullerènes les rend assimilables à un point sans dimension et du fait de leur

longueur largement supérieure à leur diamètre, les nanotubes de carbone sont assimilables à une ligne et donc à un objet unidimensionnel (voire fig.I.8).

Bien que connu comme faisant partie intégrante de ces allotropes, on a longtemps pensé que le graphène ne pouvait exister. Jusqu'à récemment, il était utilisé comme objet théorique permettant de modéliser les propriétés des autres matériaux carbonés. En 2004, le modèle devint réalité lorsque les premiers plans de graphène furent isolés par Geim et son coéquipier Novoselov. Il fait ainsi depuis quelques années l'objet d'un intérêt croissant [41] [42].

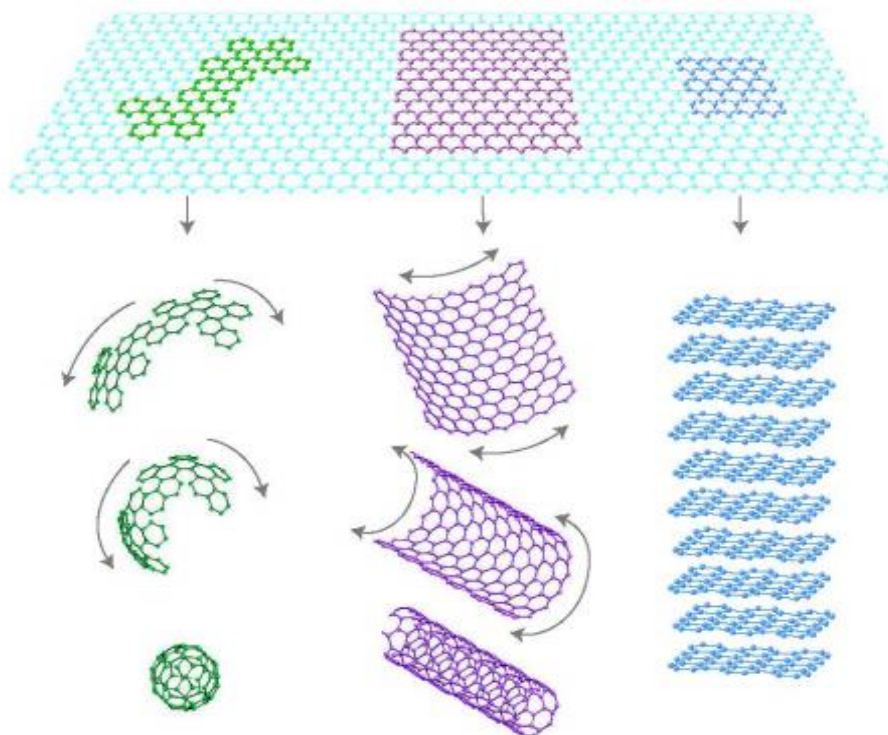


Figure I-8. Le graphène, modèle de base des autres matériaux du carbone : a) mis en boule en fullerènes, b) enroulé en nanotubes ou c) empilé en graphite.

## 2.5. La fabrication des nanostructures

Les nanomatériaux manufacturés peuvent être synthétisés selon deux approches différentes (fig.I.9). Il convient ainsi de différencier la méthode dite ascendante (en anglais bottom-up) de la méthode dite descendante (en anglais top-down).

- L'approche ascendante vient des laboratoires de recherche et des nanosciences. Elle consiste à construire les nanomatériaux atome par atome, molécule par molécule ou agrégat par agrégat. L'assemblage ou le positionnement des atomes,

des molécules ou des agrégats s'effectue de façon précise, contrôlée et exponentielle permettant ainsi l'élaboration de matériaux fonctionnels dont la structure est complètement maîtrisée.

- L'approche descendante est issue de la microélectronique. Elle consiste à réduire et plus précisément à miniaturiser les systèmes actuels (généralement des matériaux microstructurés) en optimisant les technologies industrielles existantes. Les dispositifs ou les structures sont ainsi graduellement sous-dimensionnés ou fractionnés jusqu'à atteindre des dimensions nanométriques.

Les deux approches tendent à converger en termes de gamme de tailles des objets.

L'approche bottom-up semble, néanmoins, plus riche en termes de type de matière, de diversité d'architecture et de contrôle de l'état nanométrique alors que l'approche top-down permet d'obtenir des quantités de matière plus importantes mais le contrôle de l'état nanométrique s'avère plus délicat.

L'approche ascendante fait appel à des procédés d'élaboration chimiques et physiques (réactions en phase vapeur, techniques sol-gel, pyrolyse laser, micro-ondes, etc.) alors que l'approche descendante induit, principalement, l'utilisation de méthodes mécaniques (mécano-synthèse, forte déformation par torsion, etc.). [34]

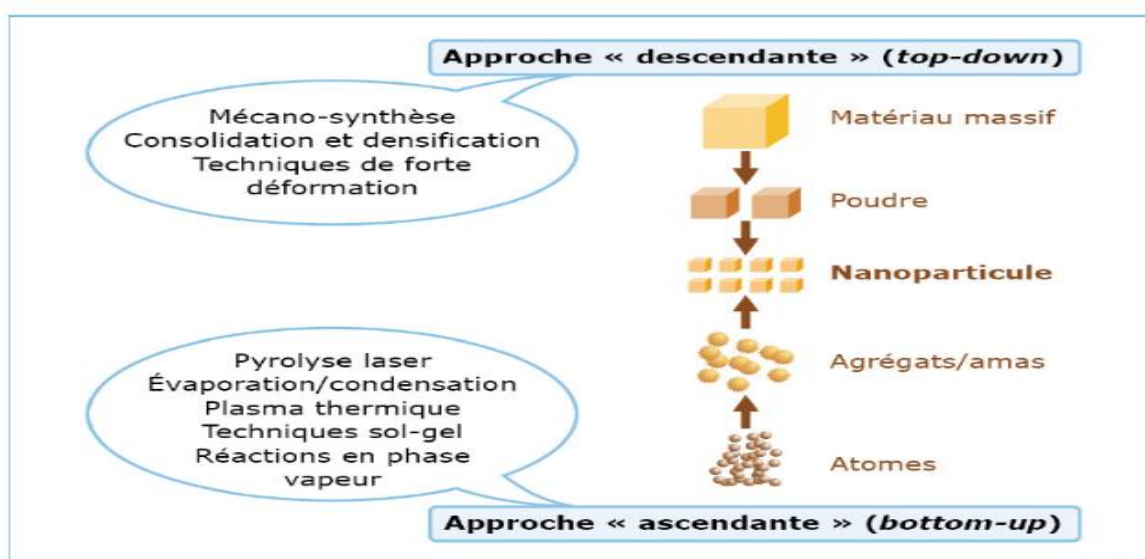


Figure I-9. Les deux approches d'élaboration des nano-objets et des nanomatériaux.

Les procédés actuels permettant la fabrication de nanomatériaux sont classés en trois grandes catégories :

### **2.5.1. Procédés par voie physique**

- L'évaporation/condensation,
- L'ablation laser,
- La décharge électrique,
- Les flammes de combustion,
- La pyrolyse laser,
- Les micro-ondes,
- L'irradiation ionique ou électronique,
- La décomposition catalytique,
- Les dépôts physiques en phase vapeur regroupés sous le terme de PVD (Physical Vapor Deposition), etc.

### **2.5.2. Procédés par voie chimique**

- Les réactions en phase vapeur regroupées sous le terme de CVD (Chemical Vapor Deposition),
- Les réactions en milieu liquide : co-précipitation chimique, hydrolyse, etc.,
- Les réactions en milieu solide,
- Les fluides supercritiques avec réaction chimique,
- Les techniques sol-gel : sol-gel à base de silice, alkoxyde de métal, etc.

### **2.5.3. Procédés par voie mécanique**

- Le broyage à haute énergie ou mécano-synthèse,
- A consolidation et la densification,
- Les techniques de forte déformation : torsion, friction, laminage, etc.

L'approche « ascendante » fait appel à des procédés d'élaboration chimiques et physiques alors que l'approche « descendante » induit, principalement, l'utilisation de méthodes mécaniques [43]

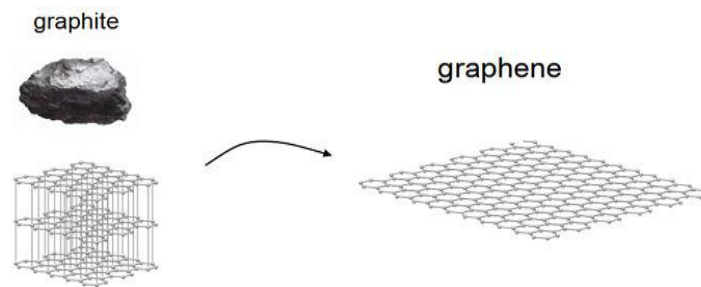


Figure I-10. Graphène à partir du graphite [44].

### 3. Domaines d'application des nanomatériaux

La nanotechnologie a connu une révolution qui a permis de résoudre beaucoup de problèmes de notre monde afin d'avoir une meilleure vie. Cette révolution a permis un développement industriel, ainsi que l'élaboration de nombreux systèmes de transformations et de productions.

#### 3.1. La médecine

Les nanotechnologies vont permettre une révolution dans le domaine de la médecine.

Au cours de ces dernières décennies on a vu la naissance de la nano-exploration et le nanodiagnostic, les nano médicaments, les neuro-prothèses et enfin l'ingénierie tissulaire, destinée à remplacer des tissus ou organes. Il est maintenant possible de manipuler le corps humain à l'échelle cellulaire voir moléculaire. En effet les nanotechnologies permettent la création de prothèses ayant une meilleure longévité, biocompatibilité, résistance et même pouvant restituer un sens perdu [43] :

- Un petit nanotube qui peut redonner vie aux nerfs
- Les nanoparticules (ferromagnétiques) pour la lutte contre le cancer
- Un nanorobot servant à repérer et anéantir des cellules cancéreuses et détecter des produits chimiques toxiques dans l'environnement et mesurer leur concentration.

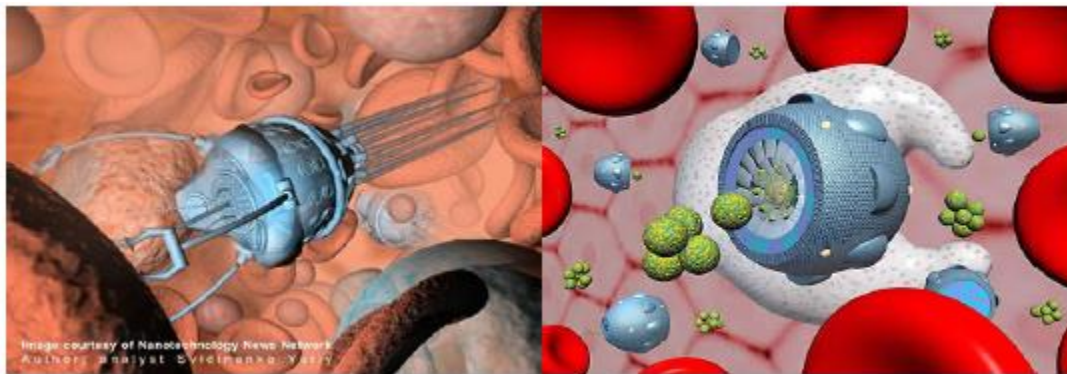


Figure I-11. Nanorobot en médecine (molécule active).

### 3.2. Domain des composites

Les similitudes entre les NTC et les fibres de carbone, ainsi que leurs exceptionnelles propriétés mécaniques, ont rapidement amené à envisager leur utilisation en tant que charge dans des matériaux composites. Les matériaux composites à matrice polymère sont utilisés, entre autres, dans les articles de sports de haut niveau car un gain important de masse peut être obtenu. Ainsi, quelques années après leur découverte, des premiers tests en tant que renfort mécanique dans des matrices polymères ont été menés [45].

### 3.3. Aéronautique

Les performances mécaniques des matériaux composites à base de nanotubes intéressent les spécialistes de l'aéronautique. L'idée est de fabriquer des matériaux les plus légers et les plus résistants possible. On peut adjoindre des fonctions supplémentaires pour obtenir des matériaux dits multifonctionnels. Les avions d'aujourd'hui sont encore constitués de plus de 80 pour cent en masse d'alliages métalliques (surtout à base d'aluminium), mais ces derniers sont progressivement remplacés par des composites à base de carbone. Cela permettrait des gains substantiels en termes de masse et donc en économies de carburants. Incorporer des nanotubes à ces plastiques les renforcerait sans les alourdir et, éventuellement, les rendraient conducteurs pour en faire des matériaux « intelligents ». Ils seraient sensibles, par exemple, à des contraintes et des déformations sur l'avion et capables d'en informer l'équipage. [35]

### 3.4. Industries automobile

Matériaux renforcés par des nanoparticules qui sont plus légers, pneus renforcés par des nanoparticules qui durent plus longtemps et qui sont recyclables, peinture extérieure sur

laquelle la saleté n'a pas prise, plastiques ininflammables et peu coûteux, textiles et recouvrements qui se réparent d'eux-mêmes. [35]

### **3.5. Industries de l'électronique et des communications**

Enregistrement de données avec des médias utilisant les nanocouches et les points quantiques, écrans plats, technologie sans fil, nouveaux appareils et processus dans tout le domaine des technologies de l'information et des communications, des vitesses de traitement et des capacités d'enregistrement des millions de fois plus rapides et, de plus, moins coûteuses que les méthodes actuelles.

### **3.6. Industries chimiques et des matériaux**

Des catalyseurs qui augmentent l'efficacité énergétique des usines de transformation chimique et qui augmentent l'efficacité de la combustion des véhicules moteurs (ce qui va diminuer la pollution), des outils de coupe extrêmement durs et résistants, des fluides magnétiques intelligents pour les lubrifiants et les joints d'étanchéité [46].

### **3.7. Secteur manufacturier**

Une ingénierie de précision pour la production de nouvelles générations de microscopes et d'instruments de mesure, de nouveaux processus et de nouveaux outils pour manipuler la matière au niveau atomique, des nanopoudres incorporées dans des matériaux en vrac avec des propriétés spéciales telles que des senseurs qui détectent les bris imminents et des contrôles en mesure de corriger le problème, auto-assemblage de structures à partir de molécules, des matériaux inspirés par la biologie ainsi que des bio-structures. [35]

### **3.8. Environnement**

Des membranes sélectives qui peuvent filtrer les contaminants ou encore le sel de l'eau, des pièges nanostructurés pour enlever les polluants des rejets industriels, caractérisation des effets des nanostructures sur l'environnement, des réductions importantes dans l'utilisation des matériaux et de l'énergie, réduction des sources de pollution, de nouvelles opportunités pour le recyclage. [35]

## **4. Les avantages de la nanotechnologie**

La nanotechnologie n'est pas seulement une révolution industrielle, mais également une voie permettant de résoudre beaucoup de problèmes de notre monde et aussi une voie

permettant d'avoir une meilleure vie. De plus avec la nanotechnologie, l'élaboration de nombreux systèmes de transformations et de productions plus performants pourra permettre une meilleure utilisation des ressources naturelles. Grâce à eux, certains matériaux nocifs pour l'environnement (ex : lubrifiants, engrais chimiques, pesticides...) pourraient être remplacés.

On peut dire également qu'avec la nanotechnologie, la dépollution et la réparation des dégâts causés à l'environnement sont à notre portée. Prenons l'exemple de la dépollution avec l'élimination de la pollution des eaux industrielles et de l'air. Par la nanotechnologie, des nanoparticules comme les nanopoudres peuvent être utilisées pour dépolluer l'eau. Des études ont montrées que cette méthode peut être utilisée avec succès. De plus, cette méthode a un coût beaucoup plus petit que les méthodes qui nécessitent de pomper l'eau hors de la terre pour le traitement. Au niveau de l'air, une des applications de la nanotechnologie la plus répandue dans ce domaine est le pot catalytique. Grâce à celui-ci, tous les polluants (monoxyde de carbone, oxyde d'azote) peuvent être éliminés. Ensuite, la nanotechnologie permettra une grande avancée dans le domaine médical avec l'élaboration de nombreux médicaments permettant de vaincre certaines maladies, dans le domaine militaire avec l'amélioration des armes et dans le domaine informatique avec la production de nouveaux ordinateurs, portables... Pour conclure, les nanotechnologies ont le gros avantage de pouvoir résoudre certains problèmes inhérents aux conditions de la vie de l'homme [47].

### **5. Les inconvénients de la nanotechnologie**

Les risques liés aux nanotechnologies sont divers. Tout d'abord, il est important de savoir que grâce à leur petite taille, les nanotechnologies peuvent facilement pénétrer dans le corps humain. En effet, ce dernier a plusieurs entrées, notamment la peau et les voies respiratoires.

C'est pour cela que le corps humain est exposé aux dangers. La peau n'est plus une barrière efficace contre bon nombre de corps étrangers. Un nanorobot peut passer à travers les barrières naturelles du cerveau tout comme il peut atteindre la zone placentaire chez la femme enceinte. Il faut être prudent, car les effets cardiovasculaires, respiratoires et cancérigènes des nanotechnologies sont encore inconnus. Même si les avancées apportées par les nanotechnologies dans le domaine de la santé sont très prometteuses, il y a beaucoup d'inquiétudes concernant les nanomatériaux. [47]



## **6. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné un état de l'art sur les nanomatériaux, leurs importances dans la nanotechnologie et leurs coté applicatif qui touche tous les domaines de la vie moderne.

En premier lieu nous avons présenté une vue générale sur les nanomatériaux. Nous avons commencé par décrire les familles des nanomatériaux et les formes de présence du carbone tel que le graphite, le diamant ainsi que les nouvelles formes du carbone comme le fullerène, les nanotubes de carbone et le Graphene. En seconde partie, nous nous somme focalisé sur les procédés de synthèse des nanomatériaux.

Par la suite, les domaines d'application des nanomatériaux, leurs avantages et leurs inconvénients, ont été présenté.

Les nanomatériaux sont d'ores et déjà une réalité industrielle et économique.

---

# Chapitre II

---

Revue des travaux réalisés sur les  
nanostructures

---

## Chapitre II : Revue sur les travaux réalisés sur les nanostructures

### 1. Introduction

Le développement des théories de milieu continu d'ordre supérieur remonte aux travaux les plus anciens de Piola sur le 19<sup>ème</sup> siècle comme démontré dans [48-49] et aux travaux de Cosserat et Cosserat [50] en 1909. Cependant, jusqu'en 1960, l'idée des frères Cosserat a reçu une attention considérable de la part des chercheurs et un grand nombre de théories de milieu continu d'ordre supérieur ont été développées. En général, ces théories peuvent être classées en trois classes différentes, à savoir la famille des gradients de contrainte, microcontinuum et les théories de l'élasticité non locale.

La famille de gradients de contrainte est composée de la théorie des contraintes couplée, de la première et de la deuxième théorie de gradient de déformation, la théorie de la contrainte de couple modifiée et la théorie du gradient de déformation modifiée. La théorie de la contrainte de couple modifiée et la théorie du gradient de contrainte modifiée. Dans la famille des gradients de contrainte, les déformations et le gradient de déformation sont pris en compte dans l'énergie de déformation. L'effet de taille est donc pris en compte à l'aide des paramètres d'échelle de longueur du matériau. Dans la théorie des contraintes couplée initiée par Toupin [51], Mindlin et Tiersten [52] et Koiter [53], seul le gradient du vecteur rotation est pris en compte dans l'énergie de déformation, donc seuls deux paramètres d'échelle de longueur de matériau sont nécessaires. La théorie de la contrainte de couple modifiée a été proposée par Yang et al. [54] basé sur la modification de la théorie de la contrainte de couple. En introduisant une condition d'équilibre des moments des couples pour forcer le tenseur de contrainte de couple à être symétrique, le nombre de paramètres d'échelle de longueur de matériau de la théorie de contrainte de couple modifiée est réduits de deux à un. La première théorie de gradient de déformation initiée par Mindlin [55] ne considère que le premier gradient de déformation. Un an plus tard, Mindlin [56] a élaboré la deuxième théorie du gradient de contrainte, considérée comme la forme la plus générale de théorie du gradient de contrainte tenant compte à la fois des premiers et deuxièmes gradients des contraintes. Lam et al. [57] ont proposé la théorie modifiée du gradient de contrainte avec seulement trois paramètres d'échelle de longueur de matériau en modifiant la théorie de Mindlin en utilisant une approche similaire de Yang et al. [54] La théorie du microcontinuum a été développée par Eringen [58-60]

composé de théories micropolaires, microstretch et micromorphes (3M). La théorie micropolaire qui a été initiée par les frères Cosserat [50] est la plus simple parmi les théories 3M, tandis que la théorie micro morphique est la plus générale parmi les théories 3M. Dans les théories 3M, chaque particule peut pivoter et se déformer indépendamment du mouvement du centre de gravité de la particule. Plus de détails sur les théories 3M ainsi que leurs applications peuvent être trouvés dans [61-67]. La théorie de l'élasticité non locale a été proposée à l'origine par Kroner [68] et améliorée par Eringen [69-70] et Eringen et Edelen [71]. Dans cette théorie, la contrainte à un point de référence dans un continuum dépend des déformations à tous les points du corps, et l'effet de taille est donc capturé au moyen d'équations de comportement utilisant un paramètre non local. La théorie de l'élasticité non locale a été initialement formulée sous une forme intégrale, puis reformulée par Eringen [72] sous une forme différentielle en considérant une fonction spécifique du noyau. Par rapport au modèle intégral, le modèle différentiel est largement utilisé pour les nanostructures en raison de sa simplicité. De plus, une autre classe de théorie d'ordre supérieur appelée théorie de gradient de contrainte nonlocal a été récemment proposée sur la base d'une combinaison de la théorie de l'élasticité nonlocal et de la théorie de gradient de contrainte. Le lecteur intéressé peut se référer à [73-75] pour plus de détails sur cette théorie.

Les modèles dépendants de la taille ont été largement utilisés pour prédire le comportement global de nanostructures en forme de poutre et de plaques, telles que les nanotubes de carbone (NTC) et les feuilles de graphène. Les CNT ont été découverts par Iijima [29] en roulant des feuilles de graphène. Sur la base de la voie de synthèse et des paramètres de réaction, il est possible d'obtenir différents types de NTC, tels que les nanotubes de carbone à paroi unique (SWCNT), les nanotubes de carbone à double paroi (DWCNT) et les nanotubes de carbone à parois multiples (MWCNT) (voir la figure II.1) par le roulement des feuilles de graphène simple couche (SLGS), des feuilles de graphène double couche (DLGS) et des feuilles de graphène multicouche (MLGS) (voir la figure II.2).

Le nanotube est une nanostructure clé et a un large éventail d'applications dans tous les domaines de la nanotechnologie. Parmi ceux-ci, notons le transport de fluides [77-83] et dispositifs de système nano-fluidiques.

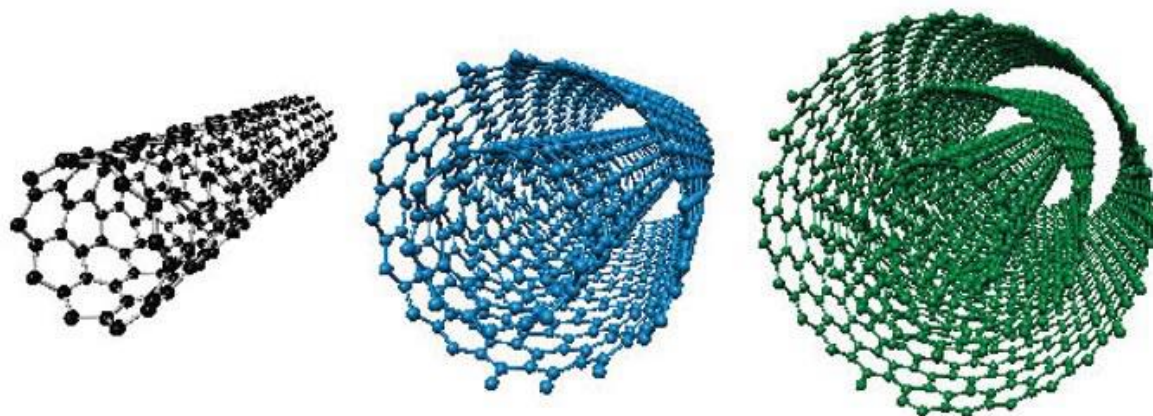


Figure II-1. Illustration schématique des différentes formes de NTCs [120].

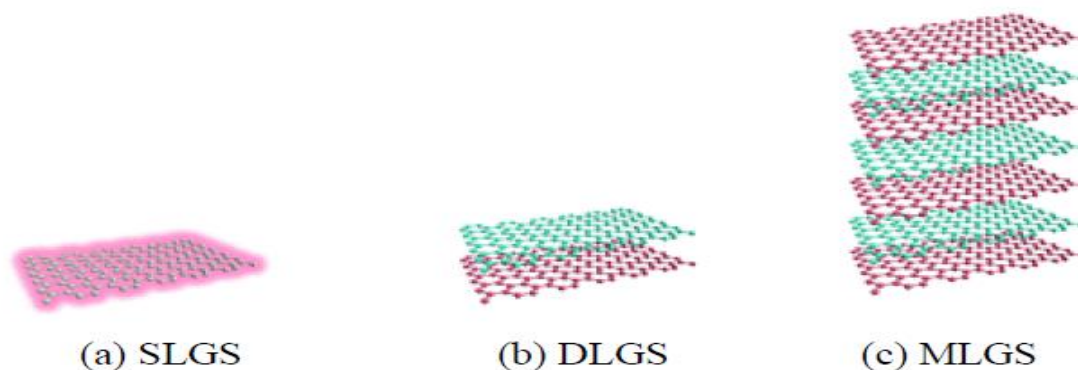


Figure II-2. Nanomatériaux à base de graphène [121].

Les équations principales dérivées des modèles dépendants de la taille susmentionnée peuvent être résolues à l'aide de méthodes analytiques ou d'approches numériques. Cependant, l'application de méthodes analytiques est limitée à une nanostructure particulière avec une géométrie, un chargement et des conditions aux limites (BCs) simples. Par exemple, la méthode Navier n'est appliquée que pour les plaques rectangulaires avec des conditions aux limites simplement appuyés, tandis que la méthode Levy ne s'applique qu'aux plaques rectangulaires dans lesquelles deux bords opposés sont simplement appuyés et les deux bords restants peuvent avoir n'importe quelles conditions aux limites. Pour les problèmes pratiques de géométrie générale, de chargement et de conditions aux limites, il est impossible de rechercher des solutions analytiques en raison de la complexité mathématique des modèles dépendants de la

taille par rapport aux modèles classiques. Par conséquent, les approches numériques telles que la méthode des éléments finis, la méthode de quadrature différentielle, la méthode sans maillage, la méthode de Ritz, la méthode de Galerkin, etc. deviennent les plus appropriées pour résoudre de tels problèmes. Parmi les différentes techniques numériques, la méthode des éléments finis est l'outil le plus puissant et le plus couramment utilisé pour l'analyse des structures, et donc le développement de solutions d'éléments finis pour les modèles dépendants de la taille. [122]

## 2. Théorie de l'élasticité non locale

### 2.1. Révision de la théorie de l'élasticité non locale

La théorie de l'élasticité non locale a été initialement formulée par Eringen [69-70] et Eringen et Edelen [71] au moyen de l'équation constitutive intégrale

$$\sigma_{ij} = \int_{\bar{\chi}} k (|\chi - \bar{\chi}|, k) \sigma_{ij}^L dx \quad (1)$$

où  $\sigma_{ij}$  et  $\sigma_{ij}^L$  sont les composantes des tenseurs de contrainte non locaux et locaux, respectivement et  $k$  est la fonction du noyau déterminée en fonction du paramètre non local et de la distance de voisinage  $|\chi - \bar{\chi}|$  dans laquelle  $k = e_0 \mathbf{a}$  et  $e_0$  et  $\mathbf{a}$  sont respectivement la constante de matériau et la longueur caractéristique interne, c'est-à-dire paramètre de réseau, taille granulaire ou diamètre moléculaire. Comme indiqué sur la Figure II.3.

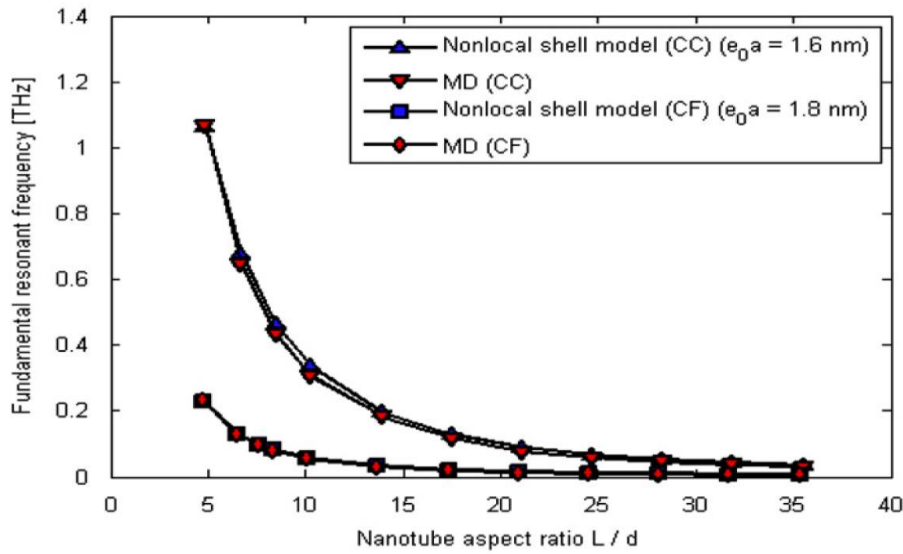


Figure II-3. Fréquences fondamentales des poutres encastées (CC) et des poutres encastées libres(CF) [84].

En considérant une fonction spécifique du noyau  $k$ , Eringen [72] a reformulé l'équation constitutive non locale sous une forme différentielle :

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L \quad (2)$$

Par rapport au modèle intégral, le modèle différentiel est largement utilisé pour les nanostructures en raison de sa simplicité. Cependant, le modèle différentiel peut donner des résultats paradoxaux dans certains cas, par exemple. Problèmes de flexion et de vibration des poutres simplement appuyés. Plus d'informations sur le comportement paradoxal du modèle différentiel peuvent être trouvées dans [85-88].

## 2.2. Modèles de poutre

Sur la base de la non-linéarité de Von Karman, Ansari et al. [89] ont développé un modèle EBT non linéaire non locale pour les vibrations non linéaires des MWCNT incorporés dans un environnement thermique, tandis que Ansari et al. [90] ont inclus l'effet thermique sur la stabilité dynamique des MWCNT incorporés. Ansari et al. [91] ont développé un modèle TBT non local pour la vibration forcée non linéaire des nano-poutres magnéto-électro-thermo-élastiques.

Mashat et al. [92] ont étudié les vibrations et le flambement thermique de nano-poutres intégrées dans différentes conditions aux limites en utilisant un modèle HSDT non local unifié couvrant les théories EBT, TBT, RBT et sinusoidale. Récemment, Thai et al. [93] ont présenté un modèle HSDT non local simple pour nano-poutres isotropes, qui ne comporte qu'un seul inconnu. Des solutions de forme fermée pour les déflexions et les fréquences propres ont également été obtenues pour des nano-poutres sous différentes conditions aux limites. Les résultats numériques indiquent que la précision de la théorie actuelle est comparable à celle du modèle TBT non local, bien qu'elle n'ait qu'une inconnue, comme dans le cas du modèle EBT non local.

### 2.3. Modèles de plaque

Comme le montre la Figure II.4. On peut voir que pour les SWCNT longs avec des rapports d'aspect importants, le modèle EBT local peut donner des résultats comparables à ceux obtenus par le modèle EBT non local et les simulations MD. Cependant, pour les SWCNT courts avec des rapports de format faibles, seul le modèle de coque non local peut donner des prévisions comparables à l'aide des simulations MD. Rouhi et Ansari [95] ont également présenté un modèle de coque classique non local pour le flambement axial de DWCNT sous différentes conditions aux limites.

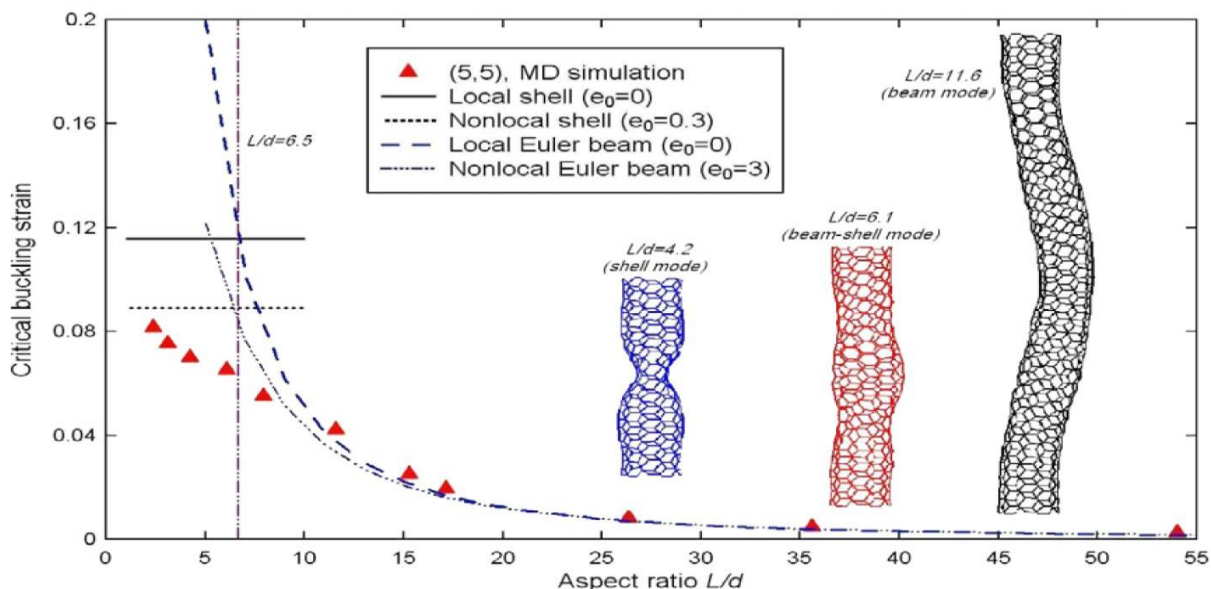


Figure II-4. Comparaison de divers modèles de mécanique du continuum avec des simulations de MD pour (5,5) SWCNT [94].

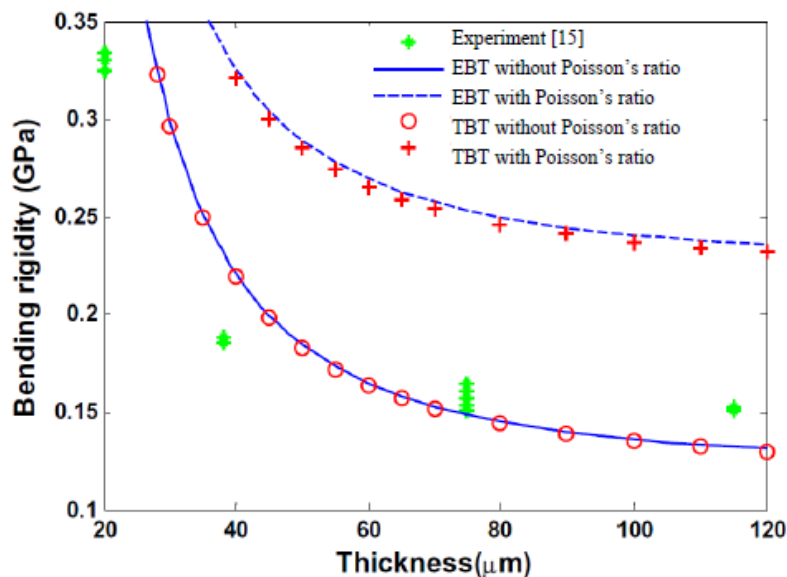


Ansari et al. [96] ont présenté des expressions analytiques pour les fréquences naturelles des SLGS avec conditions aux limites aléatoires en prenant en compte le potentiel interatomique en dérivant les propriétés matérielles des SLGS.

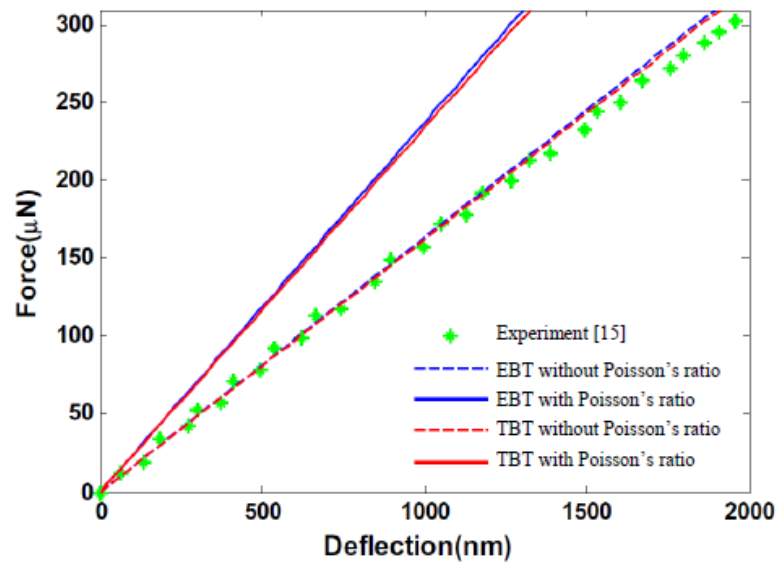
Arani et al. [97] ont examiné les effets électro-thermo-torsionnel de flambage de nanotubes de nitrure de bore à double couches à appui simple, basés sur le modèle de coque FSDT non local.

Sobhy [98] a également utilisé ce modèle pour examiner la vibration libre des DLGS perpendiculaires dans des conditions hydrothermiques. Zenkour et Sobhy [99], Alzahrani et al. [100], flambement thermique de nano-plaques incorporées [99], flexion hydro-thermo-mécanique du nano-plaques [100].

Récemment, Sobhy et Radwan [102] ont également développé une théorie quasi-3D non locale pour la vibration libre et le flambement des nanoplaques FG. Cette théorie comporte cinq inconnues et est similaire à celle proposée dans [101], mais elle est basée sur une nouvelle fonction hyperbolique. Comme représenté sur la Figure II.5.



(a) Rigidité à la flexion en fonction de l'épaisseur



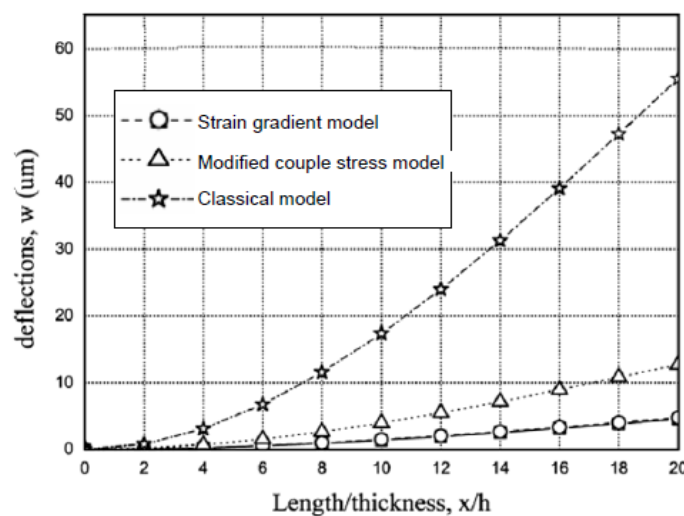
(b)

(b) Réponse à la déflexion de la charge ( $h = 38 \mu\text{m}$ )

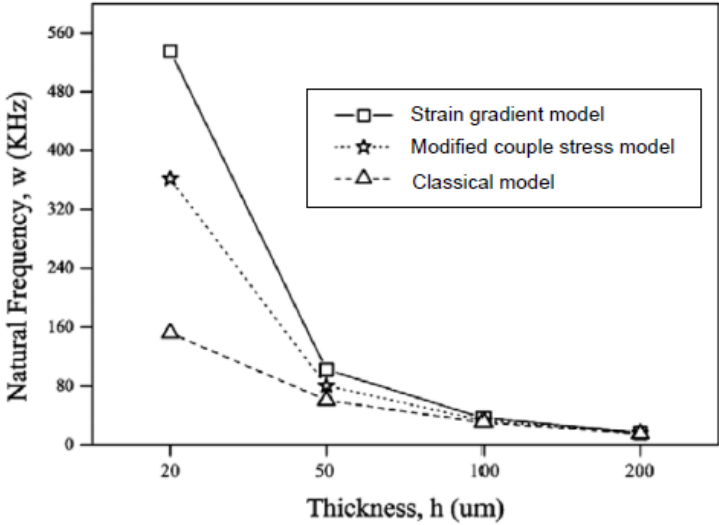
Figure II-5. Effet du rapport de Poisson dans un micro-poutre encasté libre [103].

### 3. Théorie modifiée du gradient de contrainte

La précision de la théorie du gradient de contrainte a également été comparée à celle de la théorie modifiée de contrainte couplée et de la théorie classique, comme le montre la figure II.6 et II.7. Les résultats de la comparaison ont indiqué que le modèle de gradient de contrainte prédit l'effet de la taille mieux que le modèle modifié de contrainte couplée puisqu'il prend en compte un tenseur de gradient de dilatation et un tenseur de gradient déviateur étirement en plus du tenseur de gradient de rotation.

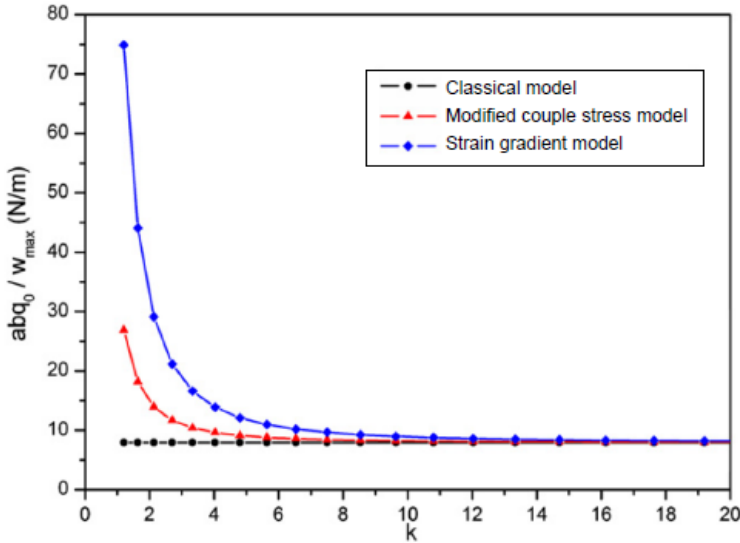


(a) analyse de la flexion

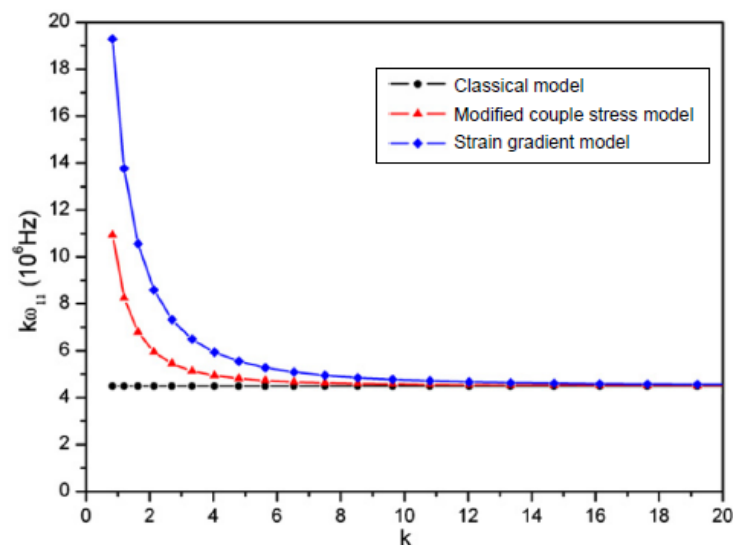


(b) analyse des vibrations libres

Figure II-6. Comparaison entre le modèle de gradient de déformation et le modèle de contrainte couplée pour les micro-poutres [104].



(a) Analyse de la flexion



(b) analyse des vibrations libres

Figure II-7. Comparaison entre le modèle de gradient de déformation et le modèle de contrainte couplée pour les microplaques [107].

Ansari et al. [105] ont étendu le modèle TBT à gradient de contrainte pour étudier les vibrations linéaires et non linéaires des poutres viscoélastiques fractionnaires. Il convient de noter que Gholami et al. [106] ont développé un modèle TBT à gradient de contrainte pour examiner la stabilité non linéaire et les vibrations des micro-interrupteurs FG, mais il est basé sur la forme la plus générale de la théorie du gradient de contrainte de Mindlin [56] qui n'est pas couverte dans cette étude.

## 4. Modèles d'éléments finis

### 4.1. Éléments de poutre

#### 4.1.1. Éléments d'élasticité non locaux

L'élément EBT comporte deux nœuds à six degrés de liberté (4-DOF) dans lesquels les déplacements axiaux et transversaux sont respectivement approximés à l'aide des fonctions d'interpolation cubique de Lagrange et d'Hermite. L'élément a deux nœuds avec 6-DOF et est basé sur des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur. L'élément à deux nœuds est une continuité  $C^0$  et est basé sur des fonctions d'interpolation de Lagrange pour le moment de flexion et de flexion.

L'élément EBT non linéaire utilisait des fonctions d'interpolation cubique Lagrange et Hermite pour approximer respectivement les déplacements axial et transversal, tandis que l'élément TBT non linéaire utilisait des fonctions d'interpolation de Lagrange pour les déplacements et la rotation axiaux et transversaux. L'élément qui rend compte de l'effet de la surface neutre physique a trois nœuds et est basé sur des fonctions d'interpolation de Lagrange quadratiques. [122]

### 4.1.2. Éléments de contrainte couplée modifiés

Les éléments EBT et TBT à deux nœuds avec 3-DOF à chaque nœud. Dans l'élément EBT non linéaire, les déplacements axial et transversal ont été approximés à l'aide des fonctions d'interpolation cubique de Lagrange et d'Hermite, respectivement. Pendant ce temps, les éléments TBT et RBT non linéaires utilisaient des fonctions d'interpolation de Lagrange pour le déplacement axial et la rotation, et des fonctions d'interpolation cubique d'Hermite pour le déplacement transversal.

Les deux nœuds de leur élément n'ont que 2-DOF à chaque nœud et était basé sur les fonctions de forme dérivées en résolvant directement les équations de base du modèle TBT à contraintes de couple modifié. Les résultats numériques ont indiqué que la réponse charge-déviations d'un micro-poutre encastree libre prédite par son élément correspond au résultat expérimental présenté à la Figure II.8.

L'élément a deux nœuds avec 3-DOF à chaque nœud. Il a été basée sur les fonctions de forme exactes dérivées directement des solutions analytiques du modèle TBT à contraintes de couple modifié [122].

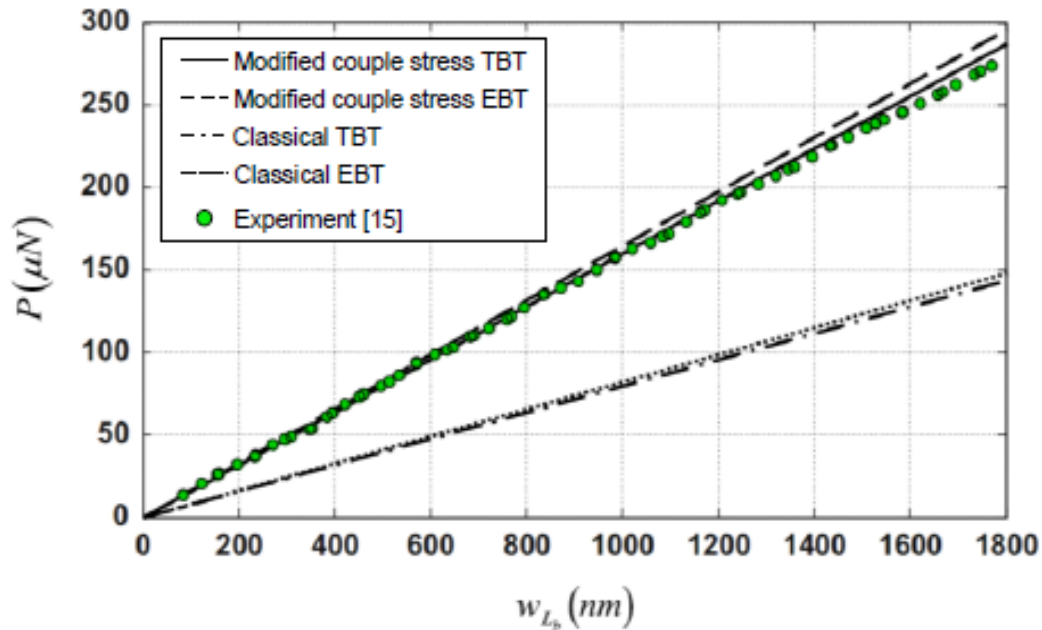


Figure II-8. Comparaison du modèle de contrainte de couple avec le résultat expérimental pour les micropoutres encastree libre [108].

#### 4.1.3. Éléments de gradient de contrainte

Deux nœuds avec 3-DOF à chaque nœud, y compris la déflexion, la pente et la courbure. Les fonctions d'interpolation déterminées en résolvant directement les équations déterminantes du modèle EBT à gradient de contrainte. L'élément a deux nœuds avec 6-DOF à chaque nœud lorsque l'on considère les déformations de flexion et d'étirement, et 4-DOF à chaque nœud lorsque l'on considère uniquement les déformations de flexion. Le champ de déplacement de l'élément est approximé à l'aide de fonctions d'interpolation hyperbolique exactes dérivées de la résolution directe des équations déterminantes du modèle TBT à gradient de déformation. Qui est similaire à celle développée par Zhang et al. [109] Cependant, il a 4-DOF par nœud et considère uniquement la déformation en flexion. L'élément a deux nœuds avec 2-DOF à chaque nœud. Les fonctions de forme de leur élément ont été dérivées en résolvant directement les équations d'équilibre du modèle TBT à gradient de contrainte avec les conditions aux limites appropriés. En comparant avec les résultats expérimentaux, il a été conclu que l'élément actuel est capable de prédire avec précision la réponse charge-déflexion d'un micro-poutres encastree libre, comme illustré à la Figure II.9.

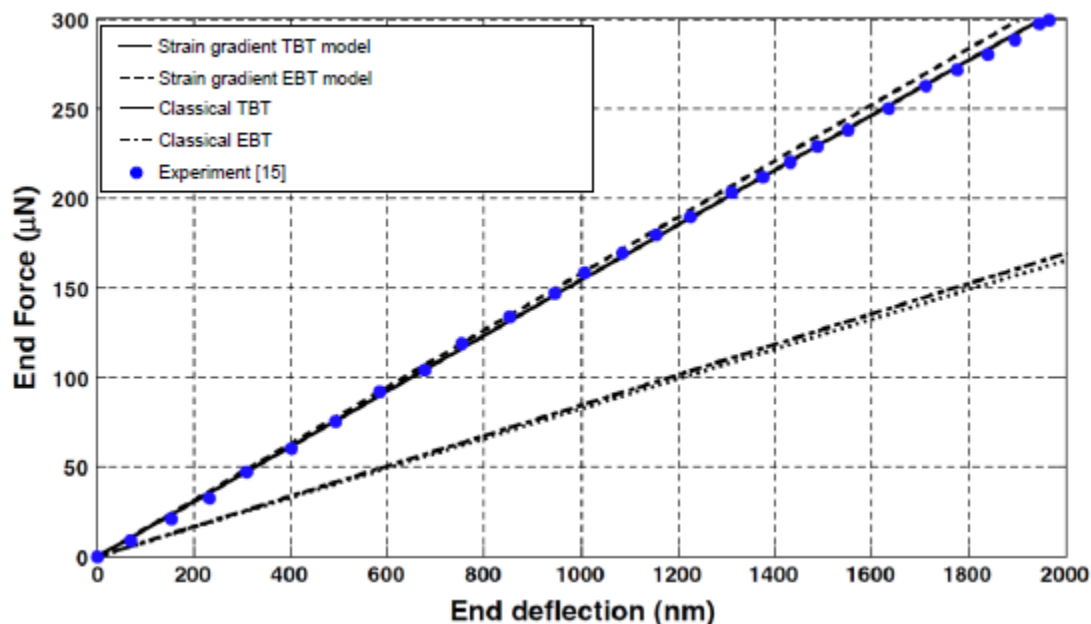


Figure II-9. Comparaison du modèle de gradient de contrainte avec le résultat expérimental pour les micropoutres encastree libre [110].

Il convient de noter que Eltaher et al. [111], Ebrahimi et al. [112] et Ansari et al. [113-115] ont également développé des éléments de gradient de contrainte pour les micro-poutres isotropes basés sur les modèles EBT [111-113] et TBT [114-115], mais ils étaient basés sur la théorie du gradient de contrainte non locale et la forme la plus générale de la théorie du gradient de contrainte de Mindlin [56] qui ne sont pas abordées dans cette étude.

## 4.2. Éléments de plaque

### 4.2.1. Éléments d'élasticité non locaux

L'élément développé par Phadikar et Pradhan [116] a quatre nœuds avec 3-DOF à chaque nœud et était basé sur des fonctions d'interpolation cubique Hermite, tandis que l'élément proposé par Ansari et al. [117] a huit nœuds avec 5-DOF à chaque nœud et était basé sur des fonctions d'interpolation de sérendipité quadratiques. Par les fonctions de base des B-splines rationnelles non uniformes (NURBS), comme indiqué à la Figure II.10. Ansari et Norouzzadeh [118] ont étudié les effets non locaux et superficiels sur le comportement en flambage des nanoplaques FG en se basant sur les approches FSĐT et IGA.

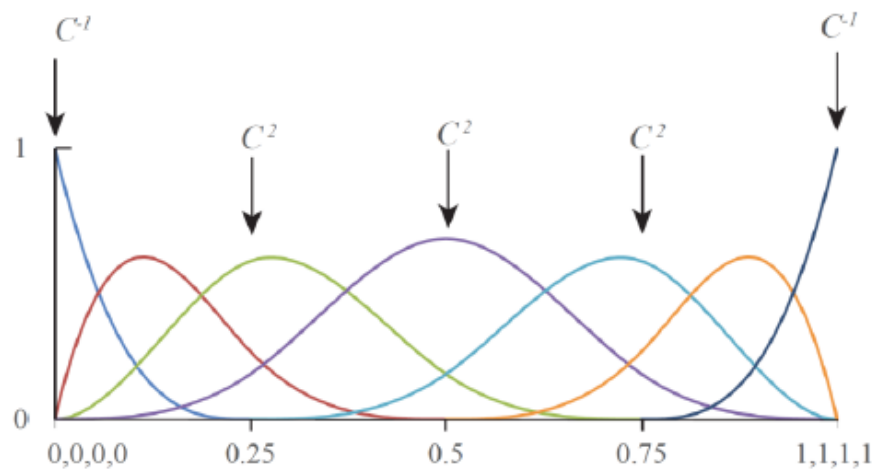


Figure II-10. Fonctions de base des B-splines rationnelles non uniformes (NURBS).

#### 4.2.2. Éléments de contrainte couplée modifiés

Quatre nœuds avec 15-DOF par nœud. Les fonctions B3-spline sont utilisées dans le sens longitudinal et les fonctions cubiques d'Hermite dans le sens transversal de la bande [119]. L'élément est non conforme et comporte quatre nœuds avec 44-DOF à chaque nœud, ce qui explique la non-linéarité géométrique et nécessite une continuité C1 pour toutes les variables. L'élément CPT axisymétrique a deux nœuds avec 3-DOF à chaque nœud basé sur les fonctions d'interpolation de Lagrange pour le déplacement axial et les fonctions d'interpolation d'Hermite pour le déplacement transversal. Entre-temps, l'élément FSDT axisymétrique qui a deux nœuds avec 4-DOF à chaque nœud a utilisé des fonctions d'interpolation de Lagrange pour le déplacement axial et la rotation, et des fonctions d'interpolation d'Hermite pour le déplacement transversal. [122]

#### 4.2.3. Éléments de gradient de contrainte

Il convient de noter que Ansari et al [120-121] ont développé des éléments de gradient de contrainte pour les microplaques isotropes, mais ils se sont basés sur la forme la plus générale de la théorie du gradient de contrainte de Mindlin [56] qui n'est pas couverte dans cette étude.



## 5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les effets de la taille sur les réponses globales des structures à petite échelle de poutres et de plaques. Au cours de la dernière décennie, des grands efforts ont été consacrés à l'élaboration des modèles dépendant de la taille et basés sur l'approche de la mécanique de milieu continu. Cette étude se concentre principalement sur les poutres et les plaques développés sur la base de la théorie de l'élasticité non locale, de la théorie des contraintes couplée modifiées et de la théorie de gradient de contrainte en raison de leur utilisation commune dans la prévision du comportement global des nanostructures.

Les modèles de poutre et de plaque non locaux sont largement utilisés pour l'analyse de nanostructures telles que les NTC et les feuilles de graphène, tandis que les modèles de contrainte couplée modifiés et de gradient de contrainte sont appliqués aux microstructures.

---

# Chapitre III

---

Développement Mathématique

## Chapitre III : Développement Mathématique

### 1. Introduction

Dans ce travail, un modèle de plaque élastique non local tenant compte à la fois de la déformation par cisaillement et des effets à petite échelle est proposé pour étudier la vibration libre et la stabilité thermique des nano-plaques incorporée dans un milieu élastique Winkler-Pasternak. La présente version comporte un nouveau champ de déplacement qui introduit des intégrales variables indéterminées afin de réduire le nombre des inconnues et les équations gouvernantes. En appliquant le principe de Hamilton, pour obtenir les équations de mouvement non locales et on les résolut par la méthode de la solution de Navier, et les solutions analytiques pour la vibration libre et le flambement thermique des plaques nanométriques simplement appuyées et reposante sur un milieu élastique Winkler Pasternak sont illustrées,

### 2. Formulation mathématique

Considérons une nano-plaque (SLGS: single-layered graphène sheet), simplement appuyée, de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h$  reposant sur une fondation élastique, comme le montre **la figure.1**. Un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  est utilisé pour décrire la nano-plaque dans le sens de l'épaisseur de la nano-plaque, le plan situé au centre de la surface médiane de la nano-plaque non déformée.

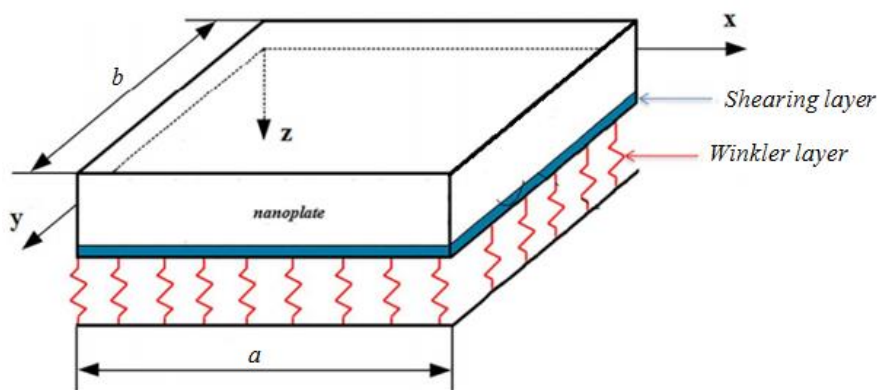


Figure III-1. Schéma d'une nano-plaque reposant sur une fondation élastique avec des paramètres géométriques et des systèmes de coordonnées.

### 3. La Vibration libre

#### 3.1. Équations Cinématiques

Les équations classiques de champ de déplacement de la théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT), est exprimé par

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (1a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (1b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (1c)$$

Où  $u_0$ ;  $v_0$ ;  $w_0$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  sont cinq variables de déplacement du SLGS,  $f(z)$  présente la fonction de forme qui représente la variation de la déformation et contrainte de cisaillement le long de l'épaisseur de la plaque. En supposant que  $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$  et  $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$ , le champ de déplacement de l'actuelle HSDT peut être écrit comme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \eta_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (2a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \eta_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (2b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2c)$$

La théorie actuelle de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur est obtenue en posant [123-124]

$$f(z) = \sinh^{-1} \left( \frac{3z}{h} \right) - z \frac{6}{h\sqrt{13}} \quad (3)$$

On observe que le champ de déplacement dans l'équation (2) est proposé avec seulement quatre inconnues ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  et  $\theta$ ).

Les équations de déformations simplifiées s'écrivent comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \theta \\ \eta_2 \theta \\ \eta_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \int \theta dy \\ \eta_2 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad (5b)$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (5c)$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus se résolvent par la solution Navier et peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (6)$$

Les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont exprimés selon le type de solution utilisée, dans ce choix de cas par Navier. Par conséquent,  $A'$ ,  $B'$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad \eta_1 = \alpha^2, \quad \eta_2 = \beta^2 \quad (7)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis en relation (17).

### 3.2. Équations de mouvement

Les équations d'équilibre de la feuille de graphène reposant sur une fondation élastique peuvent être déterminées en utilisant le principe de Hamilton [125-127]. Les équations d'équilibre sont déterminées comme suit

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + \eta_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad (8a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + \eta_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \quad (8b)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + K_w w - K_s \nabla^2 w = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} & -I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left( \eta_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + \eta_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\ & -\eta_1 M_x^s - \eta_2 M_y^s - (\eta_1 A' + \eta_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \eta_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \eta_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = -J_1 \left( \eta_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \eta_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \quad (8d) \\ & -K_2 \left( (\eta_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (\eta_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left( \eta_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \eta_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

où  $K_w$  est la rigidité élastique de la fondation de Winkler et  $K_s$  la rigidité de la couche de cisaillement du milieu élastique. les résultats des contraintes et des moments:  $N$ ,  $M^b$ ,  $M^s$  et  $S$  sont exprimés comme suit :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy), \quad (i = x, y, xy) \text{ and } (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (9)$$

### 3.3. Le modèle d'élasticité non locales pour feuille de graphène

La théorie non locale considère que la contrainte en un point intérieur d'un corps est liée non seulement à la déformation à ce point mais également aux déformations à tous les autres points dans les régions voisines du corps. Selon la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen [2]. La relation constitutive non locale d'une feuille de graphène prend les formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Où  $\mu = (e_0 a)^2$  est un paramètre non local à l'échelle nanométrique révélant l'effet sur la réponse des nanostructures,  $e_0$  est une constante qui dépend du matériau et  $a$  est une longueur caractéristique interne, les coefficients de rigidité,  $C_{ij}$ , peuvent être définis par

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (11)$$

En remplaçant équation. (4) dans l'équation. (10) et les résultats suivants dans l'équation. (9), les contraintes-moment sont obtenues comme :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{pmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{pmatrix} \quad (12a)$$

$$\begin{pmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{pmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{pmatrix} \quad (12b)$$

Où  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  etc., les composants de rigidité de la plaque sont définie par

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (13a)$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}[g(z)]^2 dz, \quad (i, j = 4, 5) \quad (13b)$$

### 3.4. Les équations gouvernantes en termes de déplacements

En utilisant l'opérateur différentiel linéaire  $(1 - \mu \nabla^2)$ , les équations gouvernantes non locales de la théorie des plaques proposée, peuvent être exprimées en termes de déplacements  $(u_0; v_0; w_0$  et  $\theta)$  en substituant les résultantes des contraintes dans l'équation (12) dans l'équation (8) comme

$$\begin{aligned} & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ & + (B_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) d_{122} \theta + (B_{11}^s \eta_1 + B_{12}^s \eta_2) d_{11} \theta = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + \eta_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (14a)$$



$$\begin{aligned}
 & A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 \\
 & + (B_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s \eta_2 + B_{12}^s \eta_1) d_{22} \theta = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + \eta_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 \\
 & - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s \eta_1 + D_{12}^s \eta_2) d_{11} \theta \\
 & + 2(D_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) d_{1122} \theta + (D_{12}^s \eta_1 + D_{22}^s \eta_2) d_{22} \theta \\
 & + (1 - \mu \nabla^2) (K_w w - K_s \nabla^2 w) = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left( \eta_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + \eta_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \right)
 \end{aligned} \quad (14c)$$

$$\begin{aligned}
 & - (B_{11}^s \eta_1 + B_{12}^s \eta_2) \frac{\partial u_0}{\partial x} - (B_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - (B_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12}^s \eta_1 + B_{22}^s \eta_2) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
 & + (D_{11}^s \eta_1 + D_{12}^s \eta_2) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2(D_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + (D_{12}^s \eta_1 + D_{22}^s \eta_2) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 & - H_{11}^s \eta_1^2 \theta - H_{22}^s \eta_2^2 \theta - 2H_{12}^s \eta_1 \eta_2 \theta - ((\eta_1 A' + \eta_2 B')^2 H_{66}^s) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{44}^s (\eta_2 B')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + A_{55}^s (\eta_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \\
 & (1 - \mu \nabla^2) \left[ -J_1 (\eta_1 A' d_{11} \ddot{u}_0 + \eta_2 B' d_{22} \ddot{v}_0) + J_2 (\eta_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + \eta_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 ((\eta_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (\eta_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) \right]
 \end{aligned} \quad (14d)$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (15)$$

### 3.5. Solutions analytiques

On utilise La méthode de la solution Navier, pour une nano-plaque rectangulaire, simplement appuyée, avec longueur  $a$  et largeur  $b$ , pour déterminer les solutions analytiques des équations de mouvement, dans l'étude de la vibration libre, pour lesquelles les fonctions de déplacement sont exprimées pour respecter les équations gouvernantes et les conditions limites. Les variables de déplacement à adopter ont la forme comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{mn}$  et  $X_{mn}$  sont des coefficients arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée à  $(m, n)$  le mode propre.  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis comme suit :

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b. \quad (17)$$

En substituant l'équation (16) à l'équation (14), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix} - \lambda \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Où

$$S_{11} = -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad S_{12} = -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}), \quad S_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2),$$

$$S_{14} = \alpha(\eta_1 B_{11}^s + \eta_2 B_{12}^s - (\eta_1 A' + \eta_2 B') B_{66}^s \beta^2),$$

$$\begin{aligned}
 S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \quad S_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \\
 S_{24} &= \beta(\eta_2 B_{22}^s + \eta_1 B_{12}^s - (\eta_1 A' + \eta_2 B') B_{66}^s \alpha^2) \\
 S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) + \lambda(K_w + K_s(\alpha^2 + \beta^2)), \\
 S_{34} &= -\eta_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2 - 2A'D_{66}^s\alpha^2\beta^2) - \eta_2(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2 - 2B'D_{66}^s\alpha^2\beta^2), \\
 S_{44} &= \eta_1^2(-H_{11}^s - A'^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - A'^2 A_{55}^s \alpha^2) + \eta_2^2(-H_{22}^s - B'^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - B'^2 A_{44}^s \beta^2) \\
 &\quad - \eta_1 \eta_2 (2H_{12}^s + 2A'B'H_{66}^s \alpha^2 \beta^2) \\
 m_{11} &= -I_0, \quad m_{13} = \alpha I_1, \quad m_{14} = \frac{J_1 \eta_1}{\alpha}, \quad m_{22} = -I_0, \quad m_{23} = \beta I_1, \quad m_{24} = \frac{J_2 \eta_2}{\beta}, \quad m_{33} = -I_0 - I_2(\alpha^2 + \beta^2) \\
 m_{34} &= -J_2(\eta_1 + \eta_2), \quad m_{44} = \frac{-K_2(\eta_1^2 \beta^2 + \eta_2^2 \alpha^2)}{\alpha^2 \beta^2}, \quad \lambda = 1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)
 \end{aligned} \tag{19}$$

## 4. La stabilité thermique

### 4.1. Équations Cinématiques

Les équations classiques de champ de déplacement de la théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT), est exprimé par

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \tag{20a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \tag{20b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{20c}$$

Où  $u_0$ ;  $v_0$ ;  $w_0$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  sont cinq variables de déplacement du SLGS,  $f(z)$  présente la fonction de forme qui représente la variation de la déformation et contrainte de cisaillement le long de l'épaisseur de la plaque. En supposant que  $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$  et  $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$ , le champ de déplacement de l'actuelle HSDT peut être écrit comme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \eta_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (21a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \eta_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (21b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (21c)$$

Dans ce travail, la théorie actuelle de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur est obtenue en posant

$$f(z) = \frac{1}{\tanh(1)^2} \left( \frac{h}{2} \tanh\left(\frac{2z}{h}\right) + z(-1 + \tanh(1)^2) \right) \quad (22)$$

On observe que le champ de déplacement dans l'équation (21) est proposé avec seulement quatre inconnues ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  et  $\theta$ ).

Les équations linéaires déformation-déplacement de Von Karman sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \theta \\ \eta_2 \theta \\ \eta_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (24a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \int \theta dy \\ \eta_2 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad (24b)$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (24c)$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus se résolvent par la solution Navier et peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (25)$$

Les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont exprimés selon le type de solution considérée, dans le choix de cas via Navier. Par conséquent,  $A'$ ,  $B'$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad \eta_1 = \alpha^2, \quad \eta_2 = \beta^2 \quad (26)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis en relation (38).

#### 4.2. Équations de stabilité

Les équations d'équilibre de la feuille de graphène reposant sur une fondation élastique sous charges thermiques, peuvent être déterminées sur la base de l'énergie potentielle stationnaire. Les équations d'équilibre sont déterminées comme suit

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (27a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (27b)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} + K_w w - K_s \nabla^2 w = 0 \quad (27c)$$

$$-\eta_1 M_x^s - \eta_2 M_y^s - (\eta_1 A' + \eta_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \eta_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \eta_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0 \quad (27d)$$

Avec

$$\bar{N} = N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (28)$$

Où

$$N^0 = N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha ET}{1-\nu} dz \quad (29)$$

Où  $K_w$  est la rigidité élastique de la fondation de Winkler, et  $K_s$  la rigidité de la couche de cisaillement du milieu élastique. les résultats des contraintes et des moments:  $N$ ,  $M^b$ ,  $M^s$  et  $S$  sont exprimés comme suit :

$$\left(N_i, M_i^b, M_i^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy), \quad (i = x, y, xy) \quad \text{et} \quad \left(S_{xz}^s, S_{yz}^s\right) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz$$

### 4.3. Le modèle de thermo-élasticité non local du graphène

La théorie non locale considère que la contrainte en un point intérieur d'un corps est liée non seulement à la déformation à ce point mais également aux déformations à tous les autres points dans les régions voisines du corps. Selon la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen [2]. La relation constitutive non locale d'une feuille de graphène prend les formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Où  $\mu = (e_0 a)^2$  est un paramètre non local à l'échelle nanométrique révélant l'effet sur la réponse des nanostructures,  $e_0$  est une constante qui dépend du matériau et  $a$  est une longueur caractéristique interne, et  $T$  est la différence de température. Les coefficients de rigidité,  $C_{ij}$ , peuvent être définis par

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2[1+\nu]}, \quad (32)$$

En remplaçant équation. (23) dans l'équation. (31) et les résultats suivants dans l'équation. (30), les contraintes-moment sont obtenues comme

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{66}^s \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (33a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} - \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (33b)$$

Où  $A_{ij}$  ,  $B_{ij}$  etc., les composants de rigidité de la nano-plaque sont définie par

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} \{1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)\} dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (34a)$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} [g(z)]^2 dz, \quad (i, j = 4, 5) \quad (34b)$$

#### 4.4. Les équations gouvernantes en termes de déplacements :

En utilisant l'opérateur différentiel linéaire  $(1 - \mu \nabla^2)$  , les équations gouvernantes non locales de la théorie des plaques proposée peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $u_0; v_0; w_0$  et  $\theta$ ) en substituant les résultantes des contraintes dans l'équation (33) dans l'équation (27) comme :

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ + (B_{66}^s (\eta_1 A + \eta_2 B)) d_{122} \theta + (B_{11}^s \eta_1 + B_{12}^s \eta_2) d_{11} \theta = 0 \end{aligned} \quad (35a)$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) d_{112} \theta + (B_{22}^s \eta_2 + B_{12}^s \eta_1) d_2 \theta = 0 \quad (35b)$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + (D_{11}^s \eta_1 + D_{12}^s \eta_2) d_{11} \theta + 2(D_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) d_{1122} \theta + (D_{12}^s \eta_1 + D_{22}^s \eta_2) d_{22} \theta + \bar{N} - \mu \nabla^2 \bar{N} + K_w w_0 - K_s \nabla^2 w_0 = 0 \quad (35c)$$

$$-(B_{11}^s \eta_1 + B_{12}^s \eta_2) d_1 u_0 - (B_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) d_{122} u_0 - (B_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) d_{112} v_0 - (B_{12}^s \eta_1 + B_{22}^s \eta_2) d_2 v_0 + (D_{11}^s \eta_1 + D_{12}^s \eta_2) d_{11} w_0 + 2(D_{66}^s (\eta_1 A' + \eta_2 B')) d_{1122} w_0 + (D_{12}^s \eta_1 + D_{22}^s \eta_2) d_{22} w_0 - H_{11}^s \eta_1^2 \theta - H_{22}^s \eta_2^2 \theta - 2H_{12}^s \eta_1 \eta_2 \theta - ((\eta_1 A' + \eta_2 B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta + A_{44}^s (\eta_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (\eta_1 A')^2 d_{11} \theta = 0 \quad (35d)$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$ , et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (36)$$

#### 4.5. Solutions analytiques

On utilise La méthode de la solution Navier pour une nano-plaque rectangulaire simplement appuyée avec longueur  $a$  et largeur  $b$ , pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les fonctions de déplacement sont exprimées pour respecter les équations gouvernantes et les conditions limites prises en charge.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (37)$$



Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{mn}$  et  $X_{mn}$  sont des coefficients arbitraires à déterminer,  $(m, n)$  le mode propre.  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis comme suit :

$$\alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b. \quad (38)$$

En substituant l'équation (37) à l'équation (35), On obtient

$$[S]\{\Delta\} = \{0\} \quad (39)$$

$$\text{Où } \{\Delta\} = \{U_{mn} \quad V_{mn} \quad W_{mn} \quad X_{mn}\}^T$$

+

4

Les éléments  $S_{ij}$  de la matrice symétrique  $[S]$ , pour les théories de la plaque de déformation a cisaillements, sont données par :

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad S_{12} = -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}), \quad S_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\ S_{14} &= \alpha(\eta_1 B_{11}^s + \eta_2 B_{12}^s - (\eta_1 A' + \eta_2 B')B_{66}^s \beta^2), \\ S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \quad S_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), \\ S_{24} &= \beta(\eta_2 B_{22}^s + \eta_1 B_{12}^s - (\eta_1 A' + \eta_2 B')B_{66}^s \alpha^2) \\ S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) - K_w - \mu K_s(\alpha^2 + \beta^2) \\ &+ (N^T - K_2)(\alpha^2 + \beta^2) + \mu(N^T - K_2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 \\ S_{34} &= -\eta_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) + 2(\eta_1 A' + \eta_2 B')D_{66}^s\alpha^2\beta^2 - \eta_2(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2), \\ S_{44} &= -H_{11}^s\eta_1^2 - 2H_{12}^s\eta_1\eta_2 - H_{22}^s\eta_2^2 - (\eta_1 A' + \eta_2 B')^2 H_{66}^s\alpha^2\beta^2 - (\eta_1 A')^2 A_{55}^s\alpha^2 - (\eta_2 B')^2 A_{44}^s\beta^2 \end{aligned} \quad (40)$$

#### 4.6. Solutions de flambement thermique

Dans cette section, la solution de l'équation  $|S|=0$  est présentée en considérant différents types de charges thermiques. La température est considérée comme répartie uniquement sur l'épaisseur.

#### 4.6.1. La température élevée à travers l'épaisseur

Si la température change de manière linéaire ( $\xi = 1$ ), ou non linéaire ( $\xi \neq 1$ ), sur l'épaisseur de la nano-plaque comme

$$T(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\xi \Delta T, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad 0 \leq \xi \leq \infty \quad (41)$$

Alors la charge de pré-flambement  $N^0$  est exprimée comme

$$N^0 = \frac{\alpha E}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\xi \Delta T dz = \frac{\alpha h E}{(1-\nu)(1+\xi)} \Delta T. \quad (42)$$

La résolution de l'équation  $[S]$  conduit à la température de stabilité critique.

#### 4.6.2. Augmentation uniforme de la température

La température initiale de la nano-plaque est censée être de  $T_i$ . La température varie uniformément ( $\xi = 0$ ), jusqu'à une valeur finale  $T_f$ , où la nano-plaque se déforme. L'augmentation de la température est de  $\Delta T = T_f - T_i$ . Par conséquent, la charge de pré-flambement  $N_0$  est exprimée comme suit

$$N_0 = \frac{\alpha h E}{(1-\nu)} \Delta T \quad (43)$$

Identiquement au type de chargement précédent, l'élévation de la température de stabilité critique  $\Delta T_{cr}$ , peut être obtenue résolvant l'équation  $[S]$ .

### 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi la formulation théorique par le calcul des propriétés efficaces du nano-plaque reposante sur une fondation élastique. Le champ de déplacement est obtenu à partir de la théorie classique de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT), afin de déterminer les fréquences naturelles de vibration et les charges critiques de flambement. Selon le principe de Hamilton et les théories d'élasticités non locale d'Eringen, les équations différentielles de mouvement non locale sont obtenues, ensuite, ces équations sont résolues en utilisant la méthode analytique de Navier.

Enfin, nous avons présenté des solutions analytiques des équations de mouvement pour la vibration libre et la stabilité thermique.

---

# Chapitre IV

---

Résultats et Discussion

---

## Chapitre IV : Résultats et Discussion

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous avons présenté la précision de la nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique à quatre variables, pour démontrer la réponse de la vibration libre, et la stabilité thermique sous température critique du nano-plaques reposant sur une fondation élastique, les résultats obtenus sont comparés avec d'autres résultats disponibles dans la littérature.

Les exemples numériques illustrés dans cette partie démontrent l'influences du paramètre non local, la déformation du cisaillement, la fondation élastique, le comportement de la vibration libre et les charges critiques du flambement des plaques nanométriques.

Les paramètres non dimensionnels utilisés sont :

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega h \sqrt{\rho/G}, \quad \hat{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho/E}, \quad \Omega = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{\rho_0 h / D}, \\ k_w &= \frac{K_w a^4}{D}, \quad k_s = \frac{K_s a^2}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ T_{cr} &= 10^{-4} \Delta T_{cr} \end{aligned} \tag{32}$$

### 2. Validation et comparaison des résultats

Pour démontrer la validité et la précision de la présente méthode, les résultats de vibration libre et du flambement thermique sont comparés avec ceux des travaux déjà publiés. Dans ce qui suit, nous allons présenter les résultats numériques de notre étude qui seront illustrer dans les tableaux.

Afin d'étudier les effets des différents paramètres sur la nano-plaque, plusieurs résultats sont présentés sur les figures.

### 2.1. La vibration libre

Dans un premier exemple, dans **le tableau 1**, le premier paramètre  $\bar{\omega}$  de fréquence naturelle de nano-plaques homogènes carrées, simplement appuyées, sans fondation élastique, évalué pour différents paramètres d'échelle, est comparé à celui obtenu sur la base de CPT (théorie de la plaque classique), FSDT (théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement), TSDT (théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement) dans [128], et les solutions d'élasticité tridimensionnelles développées par Ansari et al. [129]. Le module d'Young et la masse volumique de la plaque sont supposés être  $E = 30 \times 10^6$ ,  $\rho = 1$ . Il ressort de ce tableau que les résultats actuels sont en très bon accord avec ceux des solutions d'élasticité tridimensionnelle, FSDT, TSDT, ce qui confirme la fiabilité de la solution proposée.

Tableau IV-1. Fréquence non dimensionnelle de premier mode  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée simplement appuyée. ( $a = 10, E = 30 \times 10^6, \nu = 0.3, \rho = 1$ ).

$(a/h)$	$\mu (nm^2)$	CPT <sup>(a)</sup>	FSDT <sup>(a)</sup>	TSDT <sup>(a)</sup>	3D Solution <sup>(b)</sup>	Present
10	0	0.0963	0.0930	0.0935	0.0931	0.0931
	1	0.0880	0.0850	0.0854	0.0827	0.0851
	2	0.0816	0.0737	0.0741	0.0751	0.0788
	3	0.0763	0.0696	0.0699	0.0692	0.0738
20	0	0.0241	0.0239	0.0239	0.0239	0.0239
	1	0.0220	0.0218	0.0218	0.0211	0.0211
	2	0.0204	0.0202	0.0202	0.0191	0.0191
	3	0.0191	0.0189	0.0189	0.0176	0.0176

<sup>(a)</sup> Aghababaei and Reddy [128]

<sup>(b)</sup> Ansari et al. [129]

Dans le deuxième exemple, les paramètres de fréquence naturelle non dimensionnelle  $\hat{\omega}$  d'une nano-plaque simplement supportée sont présentés dans le **tableau 2**, pour différentes valeurs de rapport d'épaisseur  $a/h$  et de paramètre d'échelle  $\mu$ . À cette fin, les propriétés géométriques et matérielles des nano-plaques sont considérées comme  $E = 1.02 \text{ TPa}$ ,  $\nu = 0.16$  et  $\rho = 2.250 \text{ kg/m}^3$ . Une valeur de  $h = 0.34 \text{ nm}$  est supposée pour l'épaisseur de SLGS. Pour les solutions FSDT, le facteur de correction de cisaillement  $k = 5/6$  est adopté. On peut voir que les résultats de la théorie actuelle sont en excellent accord avec ceux prévus par (TSDT), (FSDT) et la solution trigonométrique quasi-3D développée par Bessaim et al. [28] pour toutes les valeurs de paramètre d'échelle, même pour des nano-plaques ayant des rapports d'épaisseur différents  $a/h$ .

Tableau IV-2. Fréquence fondamentale non dimensionnelle  $\hat{\omega}$  de plaques carrées simplement appuyées. ( $h = 0.34 \text{ nm}, E = 1.02 \text{ TPa}, \rho = 2.250 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.16, \rho_0 = 1, E_0 = 1$ ).

$(a/h)$	$\sqrt{\mu}$ (nm)	Fréquence $\hat{\omega}$			
		FSDT [28]	TSDT [28]	Quasi-3D [28]	Present
5	0	5.1759	5.1767	5.1897	5.1865
	0.5	3.1456	3.1461	3.1539	3.1520
	1	1.8497	1.8500	1.8546	1.8535
	1.5	1.2794	1.2795	1.2828	1.2820
	2	0.9726	0.9726	0.9752	0.9746
10	0	5.5997	5.599	5.6050	5.6027
	0.5	4.6878	4.6878	4.6922	4.6903
	1	3.4031	3.4031	3.4063	3.4040
	1.5	2.5448	2.5448	2.5472	2.5462
	2	2.0011	2.0011	2.0030	2.0022
20	0	5.7275	5.7275	5.7300	5.7282

	0.5	5.4444	5.4443	5.4468	5.4451
	1	4.7948	4.7948	4.7969	4.7955
	1.5	4.0906	4.0905	4.0924	4.0911
	2	3.4808	3.4808	3.4823	3.4813

Dans le troisième exemple, la précision de la méthode présentée a été entreprise pour étudier l'analyse des vibrations des feuilles de graphène monocouche reposant sur des fondations élastiques. Les paramètres de fréquence naturelle non dimensionnels  $10\bar{\omega}$  sont calculés et comparés à la solution de Sobhy [130] en utilisant la théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdal (SSDT). **Le tableau 3**, explique la vibration libre  $10\bar{\omega}$  des plaques de graphène monocouche isotropes avec ou sans fondations élastiques pour différentes valeurs de paramètre non local  $\mu$  et le rapport d'épaisseur  $a/h$ . Encore une fois, un très bon accord est trouvé entre les résultats. Il est à noter que la présence des fondations élastiques entraîne une augmentation notable de la vibration. De plus, on peut voir que la vibration libre diminue au fur et à mesure que  $\mu$  et  $a/h$  augmente. Selon ces résultats, on peut voir que la théorie non locale prédit des valeurs de fréquence naturelle plus petites que la théorie locale, en particulier pour les plaques épaisses. Ainsi, la théorie locale surestime la fréquence naturelle.

Tableau IV-3. Vibration libre  $10\bar{\omega}$  des feuilles de graphène monocouche isotropes sans ou reposant sur les fondations élastiques pour diverses valeurs de paramètre non local.

$\mu$	Model	$k_w = 0, k_s = 0$				$k_w = 100, k_s = 100$			
		$a/h = 5$	10	20	30	$a/h = 5$	10	20	30
0	SSDT [130]	3.40693	0.93033	0.23864	0.10659	9.32834	2.39400	0.60360	0.26873
	Present	3.41401	0.93089	0.23868	0.10660	9.32953	2.39418	0.60362	0.26873



1	SSDT [130]	1.21752	0.56539	0.19978	0.09772	8.62213	2.27702	0.58932	0.26533
	Present	1.22006	0.56573	0.19981	0.09773	8.62459	2.27707	0.58933	0.26534
2	SSDT [130]	0.88979	0.44276	0.17527	0.09075	8.11608	2.24958	0.58147	0.26285
	Present	0.89165	0.44302	0.17530	0.09076	8.13377	2.24960	0.58148	0.26285
3	SSDT [130]	0.73491	0.37598	0.15802	0.08509	7.04268	2.23727	0.57651	0.26095
	Present	0.73645	0.37621	0.15805	0.08510	7.232820	2.23727	0.57651	0.26095
4	SSDT [130]	0.64019	0.33247	0.14503	0.08037	6.13493	2.23023	0.57308	0.25944
	Present	0.64152	0.33267	0.14505	0.08038	6.42294	2.23024	0.57309	0.25945
5	SSDT [130]	0.57463	0.30124	0.13479	0.07635	5.50673	2.22566	0.57058	0.25823
	Present	0.57583	0.30142	0.13481	0.07636	5.80917	2.22566	0.57059	0.25823
6	SSDT [130]	0.52581	0.27743	0.12646	0.07289	5.03889	2.22242	0.56866	0.25723
	Present	0.52691	0.27760	0.12648	0.07290	5.33669	2.22242	0.56867	0.25723

Dans l'exemple suivant, encore une fois, la vibration libre  $\Omega$  des plaques de graphène monocouche est examinée et comparée à la solution de Sobhy [23] en utilisant la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal des plaques (SSDT) lorsque ces plaques reposent sur des fondations élastiques à deux paramètres. La plaque est considérée comme une plaque carrée et est simplement appuyée. Les propriétés du matériau sont le module d'Young  $E = 1 \text{ TPa}$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0.19$  et la densité de masse  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$  [9]. D'après ces résultats dans le **tableau 4**, on peut voir que les résultats de la présente étude sont en excellent accord

avec ceux obtenus par Sobhy [23] en utilisant la théorie des plaques de déformation par cisaillement sinusoidal (SSDT) avec cinq variables.

Tableau IV-4. Vibration libre  $\Omega$  des feuilles de graphène monocouche sans ou reposant sur des fondations élastiques pour différentes valeurs de paramètre non local ( $\mu$ ).

$k_w$	$k_s$	$\mu$	SSDT [23]	Present
0	0	0	1.93861	1.93962
		1	1.17816	1.17877
		2	0.92261	0.92310
		3	0.78347	0.78388
		4	0.69279	0.69316
100	0	0	2.18396	2.18484
		1	1.54903	1.54949
		2	1.36479	1.36510
		3	1.27485	1.27509
		4	1.22122	1.22142
0	20	0	2.78410	2.78478
		1	2.31969	2.31997
		2	2.20092	2.20109
		3	2.14629	2.14641
		4	2.11486	2.11495
100	20	0	2.96017	2.96081
		1	2.52831	2.52856
		2	2.41979	2.41994
		3	2.37020	2.37031

		4	2.34177	2.34185
--	--	---	---------	---------

**La Figure 1**, montre les variations de la fréquence  $\Omega$ , par rapport au paramètre non local  $\mu$  pour différentes valeurs des paramètres de fondation élastique  $k_w$  et  $k_s$ . On peut voir que la fréquence  $\Omega$  diminue de façon monotone à mesure que  $\mu$  augmente. En outre, plus les paramètres des fondations élastiques changent, plus la fréquence augmente.

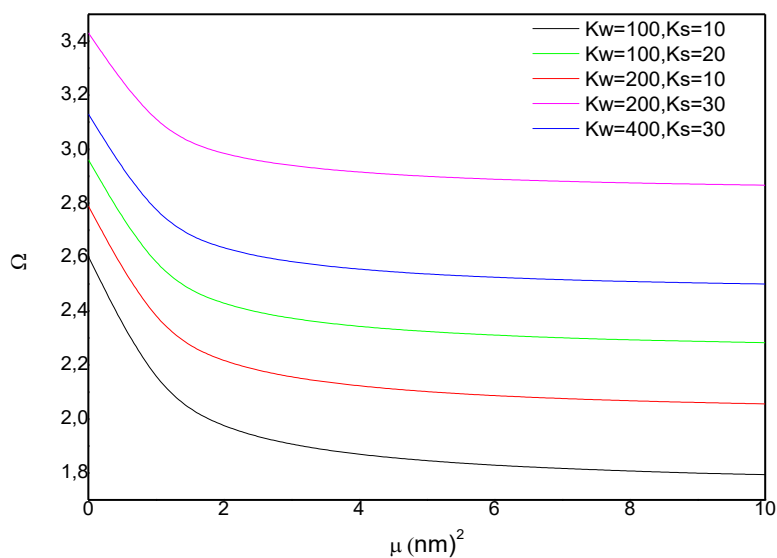
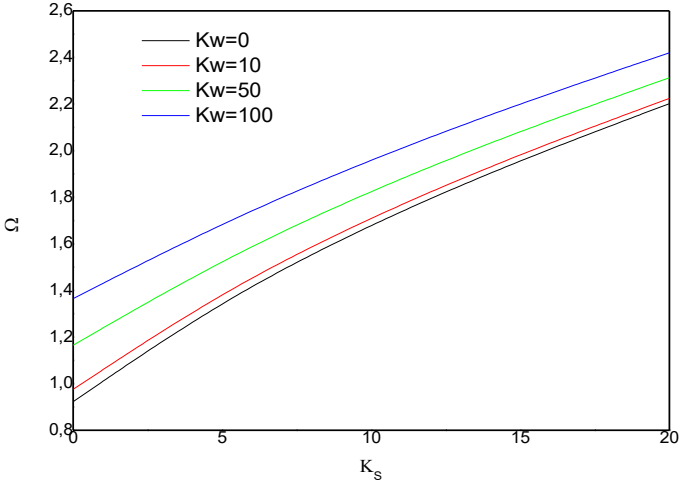


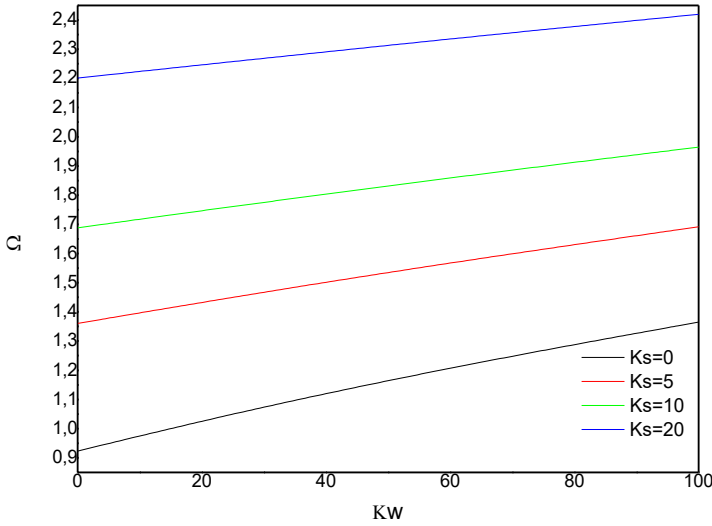
Figure IV-1. Vibration libre  $\Omega$  par rapport au paramètre non local  $\mu$  pour différentes valeurs des paramètres de fondation élastique.

Pour démontrer les effets des paramètres de fondation élastiques sur le comportement vibratoire des nano-plaques individuellement, **la figure 2**, présentent les variations de la fréquence naturelle  $\Omega$  par rapport aux constantes de Winkler et de Pasternak, respectivement à  $a/h=10$  et  $\mu=2$ , Il est clair que lorsque les coefficients des couches élastique  $k_w$  et de cisaillement  $k_s$  augmentent, la fréquence naturelle augmente également, en particulier à de petites valeurs de  $k_w$ . En outre, pour une valeur spécifique de  $k_s$ , une augmentation du coefficient de Winkler entraîne une augmentation de la fréquence naturelle. Ces observations

indiquent les effets importants des fondations élastiques sur la fréquence naturelle de la nano-plaque. Cependant, il convient de noter qu'à de grandes valeurs de  $k_w$ , la sensibilité de la fréquence naturelle à la constante de couche de cisaillement diminue.



(a)



(b)

Figure IV-2. Effets des coefficients d'élasticité et de cisaillement de la fondation sur la première fréquence naturelle non dimensionnelle  $\Omega$  d'une nano-plaque carrée ( $a/h = 10, \mu = 2$ )

Les effets du paramètre non local ainsi que l'influence du rapport d'épaisseur d'aspect sur les premiers paramètres de fréquence naturelle non dimensionnels  $\Omega$  des nano-plaques carrées simplement supportées sont représentés sur **la figure 3**, ( $k_w = 100, k_s = 20$ ). On peut voir que les premiers paramètres de fréquence naturelle non dimensionnelle diminuent de façon monotone en augmentation du paramètre non local.

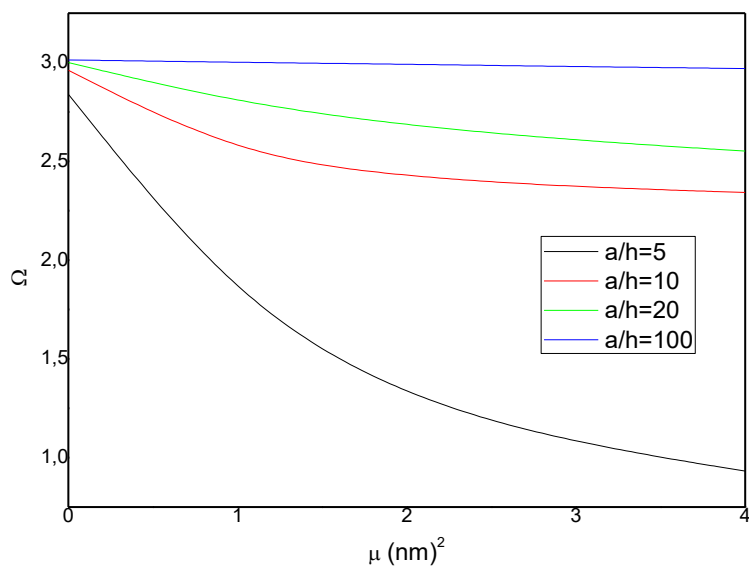


Figure IV-3. La variation des paramètres de fréquence naturelle non dimensionnels  $\Omega$  par rapport au paramètre non local avec différents aspects du rapport d'épaisseur ( $a / h$ ) des nano-plaques carrées simplement supportées ( $k_w = 100, k_s = 20$ ).

## 2.2. Stabilité thermique

Les caractéristiques du matériau sont le module d'Young  $E = 1 \text{ TPa}$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0.19$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha = 1.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Les nano-plaques analysées sont exposées à une température uniforme, linéaire ou non linéaire.

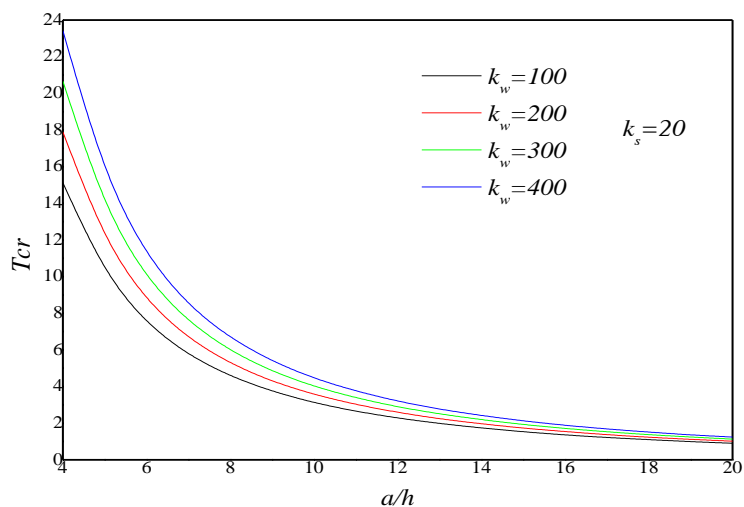
Pour vérifier la solution de stabilité thermique, d'une nano-plaque simplement appuyée reposante sur un milieu élastique, sous distribution de température linéaire en utilisant la nouvelle théorie non locale des plaques à quatre variables, les résultats calculés sont rapportés dans le **tableau 5**. Et sont comparés avec ceux obtenus par Sobhy [131]. En a trouvé un bon accord entre les résultats comme il est montré dans (Tableau 5). On peut voir que la température de stabilité  $T_{cr}$  diminue à mesure que, le rapport  $a/h$  et le paramètre d'échelle  $\mu$  augmentent, et que le rapport  $b/a$  diminue.

Tableau IV-5. Comparaison du changement de température de flambement  $T_{cr}$  d'une feuille de graphène monocouche incorporée dans un milieu élastique sous variation de température linéaire ( $k_w = 100, k_s = 100$ ).

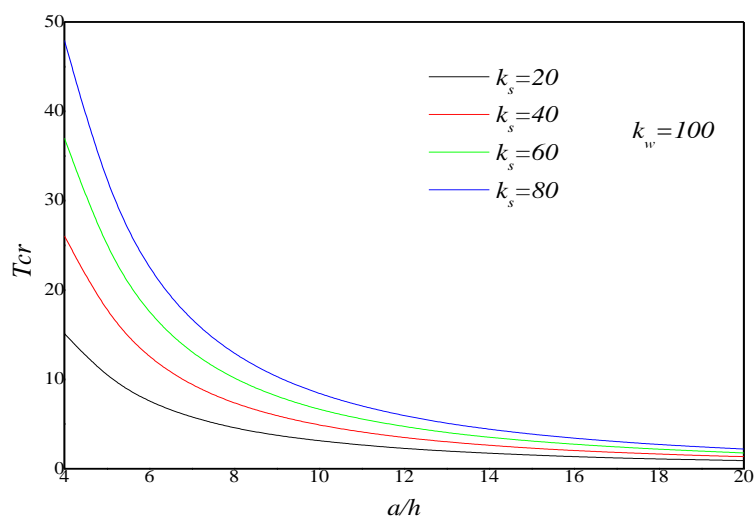
$b/a$	$a/h$	$\mu = 4 \text{ nm}^2$		$\mu = 9 \text{ nm}^2$		$\mu = 16 \text{ nm}^2$	
		Sobhy [131]	Present	Sobhy [131]	Present	Sobhy [131]	Present
0.5	5	35.89163	35.89222	35.79885	35.79911	35.76602	35.76617
	10	9.14398	9.14419	9.02860	9.02869	8.98647	8.98652
	15	4.18135	4.18144	4.07005	4.07010	4.02737	4.02740
	20	2.43164	2.43169	2.33155	2.33157	2.29070	2.29072
	25	1.61060	1.61063	1.52380	1.52381	1.48578	1.48579
1	5	36.99221	36.99252	36.88049	36.88063	36.84032	36.84040

	10	9.40739	9.40748	9.29763	9.29768	9.25514	9.25516
	15	4.27380	4.27383	4.18354	4.18355	4.14473	4.14474
	20	2.45686	2.45688	2.38738	2.38739	2.35374	2.35375
	25	1.60259	1.60260	1.55082	1.55083	1.52259	1.52259
2	5	38.06523	38.06544	37.94985	37.94994	37.90771	37.90777
	10	9.66195	9.66200	9.56186	9.56189	9.52102	9.52103
	15	4.36924	4.36926	4.29567	4.29568	4.26093	4.26093
	20	2.49537	2.49538	2.44454	2.44454	2.41661	2.41662
	25	1.61625	1.61626	1.58187	1.58187	1.56016	1.56016
3	5	38.42111	38.42129	38.30549	38.30557	38.26306	38.26310
	10	9.74667	9.74671	9.64972	9.64974	9.60950	9.60951
	15	4.40213	4.40215	4.33314	4.33315	4.29964	4.29964
	20	2.51026	2.51027	2.46398	2.46398	2.43765	2.43765
	25	1.62343	1.62344	1.59291	1.59291	1.57288	1.57288

**La figure.4** montre la variation de la température critique de stabilité en fonction du rapport  $a/h$  d'épaisseur pour différentes valeurs des coefficients de fondation. Afin d'évaluer l'effet de chaque coefficient de fondation individuellement, nous présentons les calculs numériques en variant un d'entre eux, et en considérant l'autre comme une constante comme il est indiqué sur le graphique de **Fig.4 (a), (b)**. On peut observer que la température critique de stabilité  $T_{cr}$  augmente avec l'augmentation de  $k_w$  et  $k_s$ . Cependant, la variation du paramètre de Pasternak  $k_s$  est plus efficace sur le  $T_{cr}$  que la variation du paramètre de Winkler  $k_w$ .



(a)

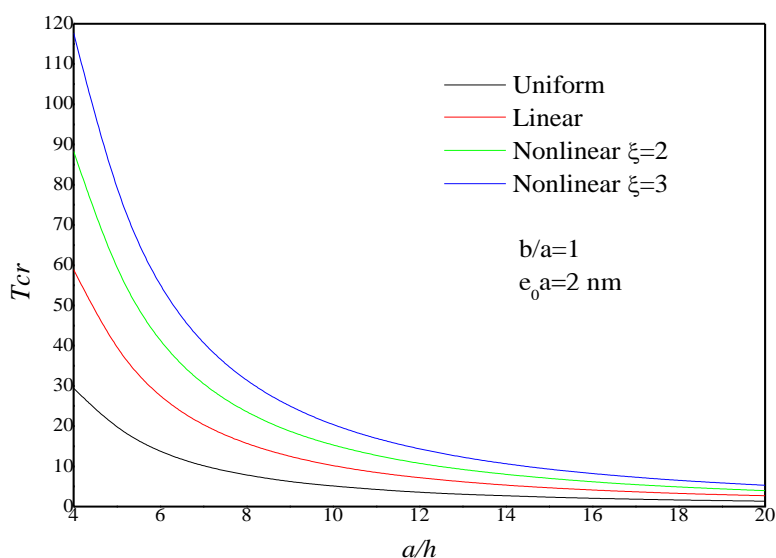


(b)

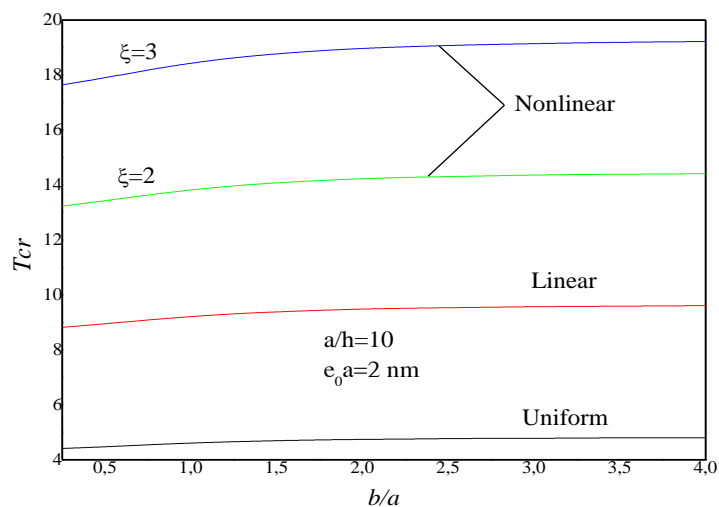
Figure IV-4. Effets du (a) paramètre de Winkler  $k_w$ , (b) paramètre de la couche de cisaillement  $k_s$  sur la température critique de flambage  $T_{cr}$  des nano-plaques carrées simplement supportées, en fonction du rapport d'épaisseur sous la variation linéaire de la température ( $e_0 a = 2 \text{ nm}$ ).



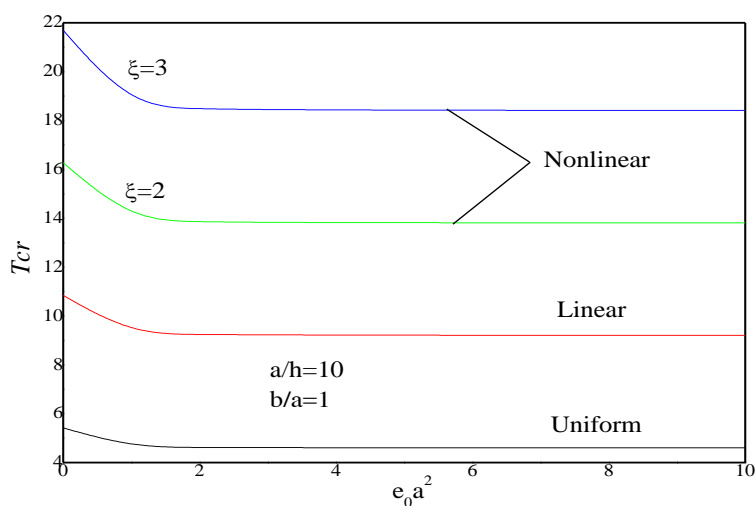
**La figure.5** présente la variation de la température critique de stabilité  $T_{cr}$  des SLGS reposant sur des fondations élastiques sous diverses variations de température en fonction (a) du rapport d'épaisseur  $a/h$ , (b) du rapport d'allongement  $b/a$  et (c) du paramètre d'échelle  $e_0a$ . La distribution de la température est considérée comme uniforme ( $\xi = 0$ ), linéaire ( $\xi = 1$ ) ou non linéaire ( $\xi = 2$  ou 3) dans l'épaisseur de la nano-plaque. On peut conclure que, indépendamment des valeurs de  $a/h$ ,  $b/a$  et  $e_0a$ , la nano-plaque soumise à une température uniforme  $T_{cr}$  présente des valeurs minimales, mais dans le cas d'une température non linéaire,  $T_{cr}$  prend des valeurs maximales. Cependant, sous une variation linéaire de la température, les valeurs de  $T_{cr}$  sont considérées comme intermédiaires pour la nano-plaque. Par conséquent, on en déduit que le paramètre non linéaire  $\xi$  peut considérablement affecter la réponse de stabilité d'une nano-plaque.



(a)



(b)



(c)

Figure IV-5. Effets (a) du rapport d' épaisseur, (b) du rapport d'aspect de la plaque et ( $e_0 a$ ) du paramètre non local sur la température critique de flambement  $T_{cr}$ , des nano-plaques simplement appuyées en raison des variations de température uniforme, linéaire et non linéaire ( $k_w = 100, k_s = 100$ ).

### 3. Conclusion

Les réponses de la vibration et de la stabilité thermique des nano-plaques sont affectées par divers paramètres tels que les constantes de fondation élastique, le paramètre non local, le rapport de géométrie, le rapport d'épaisseur, et le paramètre non linéaire. On conclut que ;

La présence de la non-localité diminue la rigidité de la plaque, réduit la fréquence et réduit la température critique de stabilité des nano plaques SLGS, par contre, les paramètres de fondation élastique de Winkler et Pasternak ( $k_w$ ,  $k_s$ ) améliorent la structure de la plaque, augmentent les fréquences et augmente la température critique.

La fréquence naturelle diminue avec l'augmentation du rapport de géométrie et le rapport d'épaisseur. Et la température critique de stabilité diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur, et augmente avec l'augmentation du rapport d'allongement.

Le paramètre de cisaillement (Pasternak) a plus d'effet sur la fréquence fondamentale que le paramètre Winkler.

La nano-plaque SLGS soumis à la température uniforme présente des valeurs minimum de la température critique de stabilité  $T_{cr}$ , mais dans le cas de la température non linéaire,  $T_{cr}$  prend des valeurs maximales, Cependant, sous la température linéaire,  $T_{cr}$  prend les valeurs intermédiaires pour les nano-plaques. Donc le paramètre non linéaire  $\xi$  peut affecter la réponse de stabilité d'une SLGS.

Dans notre travail toutes les études comparatives effectuées, ont montré que les résultats obtenus sont identiques à ceux de la littérature.

---

# Conclusion Générale

---

# Conclusion Générale \_\_\_\_\_

---

## Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons examiné le comportement vibratoire et la stabilité thermique d'une nanostructure représentée sous forme d'une nano-plaque simplement appuyée, incorporées dans un milieu élastique, en proposant une nouvelle théorie non locale hyperbolique de déformation de cisaillement a quatre variables.

Le modèle d'élasticité non locale d'Eringen est considéré pour introduire les effets d'échelle. On obtient les équations différentielles de mouvement non locales par le principe de Hamilton et les relations constitutives non locales d'Eringen, Ces équations sont résolues en utilisant la méthode analytique de Navier.

Pour simuler l'interaction des nano-plaque avec le milieu élastique on utilise Les deux modèles de type Winkler et Pasternak.

Les résultats ont démontré que le paramètre non local, les constantes de fondation élastique, le rapport d'épaisseur, le rapport de la géométrie, et le paramètre non linéaire, ont des effets considérables sur la réponse de la vibration et de la stabilité des nanoplaques.

On peut conclure que la présence de la non-localité diminue la rigidité de la plaque, réduit la fréquence et réduit la charge de flambement des nano plaques SLGS, par contre, les paramètres de fondation élastique de Winkler et Pasternak ( $k_w, k_s$ ), augmentent les fréquences ainsi que la charge de flambement, et cela rend la nanoplaque plus rigide. L'augmentation de rapport d'épaisseur, diminue La fréquence naturelle et la température critique de stabilité. Le paramètre de cisaillement (Pasternak) a plus d'effet sur la fréquence fondamentale que le paramètre Winkler. Et le paramètre non linéaire  $\xi$  affecter la réponse de stabilité thermique d'une SLGS.

Les résultats trouvés sont comparés avec ceux trouvés dans les littératures, cela nous a montré l'efficacité de notre théorie.

# Références \_\_\_\_\_

---

## Références

- [1] Bouazza, M., Becheri, T., Boucheta, A., & Benseddiq, N. (2016). Thermal buckling analysis of nanoplates based on nonlocal elasticity theory with four-unknown shear deformation theory resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 17(5-6), 362-373.
- [2] Eringen, A.C. (1972), “Nonlocal polar elastic continua”, *Int. J. Eng. Sci.*, 10(1), 1-16.
- [3] Eringen, A.C. (1983), “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *J. Appl. Phys.*, 54(9), 4703-4710.
- [4] Mindlin, R.D. (1964), “Micro-structure in linear elasticity”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16(1), 51-78.
- [5] Mindlin, R.D. (1965), “Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity”, *Int. J. Solids Struct.*, 1(4), 417-438.
- [6] Papargyri-Beskou, S., Tsepoura, K.G., Polyzos, D. and Beskos, D.E. (2003), “Bending and stability analysis of gradient elastic beams”, *Int. J. Solids Struct.*, 40(2), 385-400.
- [7] Yang, F.A.C.M., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. (2002), “Couple stress based strain gradient theory for elasticity”, *Int. J. Solids Struct.*, 39(10), 2731-2743.
- [8] Askes, H. and Aifantis, E.C. (2009), “Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes”, *Phys. Rev. B*, 80(19), 195412.
- [9] Reddy, J. N., & Pang, S. D. (2008). Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2), 023511.
- [10] Hebali, H., Bakora, A., Tounsi, A., & Kaci, A. (2016). A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Steel and Composite Structures*, 22(3), 473-495.
- [11] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H., & Mahmoud, S. R. (2017). Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT. *Smart Structures and Systems*, 19(3), 289-297.
- [12] Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E. A., & Mahmoud, S. R. (2017). A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Geomechanics and Engineering*, 13(3), 385-410.
- [13] Merdaci, S., Tounsi, A., & Bakora, A. (2016). A novel four variable refined plate theory for laminated composite plates. *Steel and Composite Structures*, 22(4), 713-732.

## Références \_\_\_\_\_

---

- [14] Bensaid, I., Bekhadda, A., Kerboua, B., & Abdelmadjid, C. (2018). Investigating nonlinear thermal stability response of functionally graded plates using a new and simple HSDT. *WIND AND STRUCTURES*, 27(6), 369-380.
- [15] Pradhan, S. C., & Phadikar, J. K. (2009). Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates. *Journal of Sound and Vibration*, 325(1-2), 206-223.
- [16] Dastjerdi, S., Lotfi, M., & Jabbarzadeh, M. (2016). The effect of vacant defect on bending analysis of graphene sheets based on the Mindlin nonlocal elasticity theory. *Composites Part B: Engineering*, 98, 78-87.
- [17] Shen, L. E., Shen, H. S., & Zhang, C. L. (2010). Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments. *Computational Materials Science*, 48(3), 680-685.
- [18] Pradhan, S. C., & Kumar, A. (2011). Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method. *Composite Structures*, 93(2), 774-779.
- [19] Wang, Y. Z., Cui, H. T., Li, F. M., & Kishimoto, K. (2013). Thermal buckling of a nanoplate with small-scale effects. *Acta Mechanica*, 224(6), 1299-1307.
- [20] Ansari, R., Rajabiehfard, R., & Arash, B. (2010). Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets. *Computational Materials Science*, 49(4), 831-838.
- [21] Sobhy, M. (2014). Generalized two-variable plate theory for multi-layered graphene sheets with arbitrary boundary conditions. *Acta Mechanica*, 225(9), 2521-2538.
- [22] Babaei, H., & Shahidi, A. R. (2011). Small-scale effects on the buckling of quadrilateral nanoplates based on nonlocal elasticity theory using the Galerkin method. *Archive of Applied Mechanics*, 81(8), 1051-1062.
- [23] Sobhy, M. (2014). Thermomechanical bending and free vibration of single-layered graphene sheets embedded in an elastic medium. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 56, 400-409.
- [24] Chakraverty, S., & Behera, L. (2014). Free vibration of rectangular nanoplates using Rayleigh–Ritz method. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 56, 357-363.
- [25] Radić, N., Jeremić, D., Trifković, S., & Milutinović, M. (2014). Buckling analysis of double-orthotropic nanoplates embedded in Pasternak elastic medium using nonlocal elasticity theory. *Composites Part B: Engineering*, 61, 162-171.

## Références \_\_\_\_\_

---

- [26] Samaei, A. T., Aliha, M. R. M., & Mirsayar, M. M. (2015). FREQUENCY ANALYSIS OF A GRAPHENE SHEET EMBEDDED IN AN ELASTIC MEDIUM WITH CONSIDERATION OF SMALL SCALE. *Materials Physics & Mechanics*, 22(2).
- [27] Aksencer, T., & Aydogdu, M. (2011). Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(4), 954-959.
- [28] Bessaim, A., Houari, M. S. A., Bernard, F., & Tounsi, A. (2015). A nonlocal quasi-3D trigonometric plate model for free vibration behaviour of micro/nanoscale plates. *Structural Engineering and Mechanics*, 56(2), 223-240.
- [29] Meziane, M.A.A., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293–318.
- [30] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I., Tounsi, A. (2016), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, 20(2), 227 – 249.
- [31] E. Gaffet, S. Begin-Colin, O. Tillementm Rapport D'expertise, Editeur Innovation 128 (1998) - 185 Pages.
- [32] M. C. Tchangna, Mémoire de Maitrise, "Les Nanotechnologie et les Risques de Santé ", Université de Toulouse I, France, 2008.
- [33] E. Gaffet, " Nanomatériaux : Une Revue Des Définitions, Des Applications, Des Effets Sanitaires Et Des Moyens À Mettre En Oeuvre Pour Un Développement Sécurisé", *Comptes Rendus Physique*, Vol. 12, No. 7, P. 648-658, 2011.
- [34] M. Ricaud, D. Stephanie, "Les Nanomatériaux Manufacturés À L'horizon 2030 ", Conséquences En Santé Et Sécurité Au Travail Dans Les Pme - Tpe En France. Vep 2, Date De Publication, (Sep 2016)
- [35] A. Zemri, Thèse De Doctorat, Étude Comparative Entre La Théorie Locale Et Non Locale D'élasticité : Application Aux Structures Homogènes, Université Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes Algérie, 2015
- [36] E. Garrido, Fonctionnalisation De Nanotubes De Carbone Pour Leur Incorporation Dans Des Matrices Metalliques, L'universite De Bordeaux N° Ordre : 4134,P 24
- [37] S. Helical (1991), « Microtubules Of Graphitic Carbon ». *Nature* 1991, 354, 56–58 J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. Moreno, 2002, Functionally Gradient Ceramics By Sequential Slip Casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.



## Références \_\_\_\_\_

---

- [38] A. Denneulin, Inkjet Printing of Conductive Inks For Rfid Technology: Influence Of Substrate, Ink And Process. Thèse, Grenoble : Lgp2, 2010
- [39] Novoselov, G.Morozov, Jiang, Zhang, Dubonos, Grigorievaet Firsov, 2004
- [40] A. K., Geim, Novoselov, The Rise Of Graphene. Nature Materials, Vol. 6, P. 183-191, 2007.
- [41] K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T. J. Booth, V. V. Khotkevich, S. V. Morozov, A. K. Geim, Proceedings of The National Academy Of Sciences Of The United States Of America, 102, P. 10451–10453, 2005.
- [42] S. Biswas, L. T. Drzal (2009), Nano Letters, Vol. 9, P. 167–172
- [43] K.Aissani, Thèse De Doctorat, Etude Du Comportement Mécanique Des Macros Et Nano Structures Sur Des Fondations Élastiques, Universite Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes Algerie, 2017
- [44] Boussaboun. Z. Boussaboun, Synthèse Et Caractérisation De Nanocomposites D'argile Et De Graphène Formés À Partir De Précurseurs Organiques, Mémoire Présenté À L'école De Technologie Supérieure, Université Du Québec (2016)
- [45] P. M Ajayan, O. Stephan, C. Colliex, D. Trauth, Aligned Carbon Nanotube Arrays Formed By Cutting A Polymer Resin-Nanotube Composite. Science, Vol. 265, P.1212–1214, 1994
- [46] P. M. Ajayan, J.C. Charlier, A. G. Rinzler, Carbon Nanotubes : From Macromolecules To Nanotechnology, Proceedings Of The National Academy Of. Sciences Of The United States Of America, Vol. 96, N° 25, 7, P. 14199-14200, 1999.
- [47] S. Benguediab, Thèse De Doctorat, Application De L'élasticité Locale Et Non Locale Dans Le Calcul Des Macros Et Nano Structures, Universite Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes Algerie, 2014.
- [48] Dell'Isola F, Andreaus U, Placidi L. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. Mathematics and Mechanics of Solids. 2015; 20:887-928.
- [49] Dell'Isola F, Della Corte A, Esposito R, Russo L. Some cases of unrecognized transmission of scientific knowledge: From antiquity to Gabrio Piola's peridynamics and generalized continuum theories. Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials: Springer; 2016. p. 77-128.
- [50] Cosserat E, Cosserat F. Théorie des corps déformables : Paris : Hermann et Fils, 1909.

## Références \_\_\_\_\_

---

- [51] Toupin RA. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962; 11:385-414.
- [52] Mindlin RD, Tiersten HF. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962; 11:415-48.
- [53] Koiter WT. Couple stresses in the theory of elasticity, I and II. *Nederl Akad Wetensch Proc Ser B*. 1964; 67:17-44.
- [54] Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int J Solids Struct*. 2002; 39:2731-43.
- [55] Mindlin RD. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964;16:51-78.
- [56] Mindlin RD. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int J Solids Struct*. 1965; 1:417-38.
- [57] Lam DCC, Yang F, Chong ACM, Wang J, Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J Mech Phys Solids*. 2003; 51:1477-508.
- [58] Eringen AC. Simple microfluids. *Int J Eng Sci*. 1964; 2:205-17.
- [59] Eringen AC. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics*. 1966;15:909-23.
- [60] Eringen AC. Micropolar fluids with stretch. *Int J Eng Sci*. 1969; 7:115-27.
- [61] Altenbach H, Eremeyev VA. Strain rate tensors and constitutive equations of inelastic micropolar materials. *International Journal of Plasticity*. 2014; 63:3-17.
- [62] Ansari R, Bazdid-Vahdati M, Shakouri A, Norouzzadeh A, Rouhi H. Micromorphic prism element. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016; doi: 10.1177/1081286516637115.
- [63] Ansari R, Bazdid-Vahdati M, Shakouri A, Norouzzadeh A, Rouhi H. Micromorphic first-order shear deformable plate element. *Meccanica*. 2016; 51:1797-809.
- [64] Ansari R, Shakouri AH, Bazdid-Vahdati M, Norouzzadeh A, Rouhi H. A nonclassical finite element approach for the nonlinear analysis of micropolar plates. *J Comput Nonlinear Dyn*. 2016; 12:011019-12.
- [65] Chen Y, Lee JD. Determining material constants in micromorphic theory through phonon dispersion relations. *Int J Eng Sci*. 2003; 41:871-86.

## Références \_\_\_\_\_

---

- [66] Eringen AC. Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids. Springer ; 1999.
- [67] Eringen AC. Microcontinuum field theories: II. Fluent media: Springer, 2001.
- [68] Kroner E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *Int J Solids Struct.* 1967; 3:731- 42.
- [69] Eringen AC. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *Int J Eng Sci.* 1972; 10:425-35.
- [70] Eringen AC. Nonlocal polar elastic continua. *Int J Eng Sci.* 1972; 10:1-16.
- [71] Eringen AC, Edelen DGB. On nonlocal elasticity. *Int J Eng Sci.* 1972; 10:233-48.
- [72] Eringen AC. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *J Appl Phys.* 1983 ;54 :4703-10.
- [73] Aifantis EC. On the gradient approach – Relation to Eringen’s nonlocal theory. *Int J Eng Sci.* 2011; 49:1367-77.
- [74] Lim C, Zhang G, Reddy J. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *J Mech Phys Solids.* 2015 ;78 :298-313.
- [75] Narendar S, Gopalakrishnan S. Ultrasonic wave characteristics of nanorods via nonlocal strain gradient models. *J Appl Phys.* 2010; 107:084312-8.
- [76] Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature.* 1991; 354:56-8.
- [77] Ansari R, Norouzzadeh A, Gholami R, Faghieh Shojaei M, Darabi MA. Geometrically nonlinear free vibration and instability of fluid-conveying nanoscale pipes including surface stress effects. *Microfluid Nanofluid.* 2016; 20:28-42.
- [78] Ansari R, Gholami R, Norouzzadeh A, Darabi MA. Wave characteristics of nanotubes conveying fluid based on the non-classical Timoshenko beam model incorporating surface energies. *Arab J Sci Eng.* 2016; 41:4359-69.
- [79] Ansari R, Gholami R, Norouzzadeh A. Size-dependent thermo-mechanical vibration and instability of conveying fluid functionally graded nanoshells based on Mindlin's strain gradient theory. *Thin Wall Struct.* 2016; 105:172-84.
- [80] Ansari R, Gholami R, Norouzzadeh A, Sahmani S. Size-dependent vibration and instability of fluidconveying functionally graded microshells based on the modified couple stress theory. *Microfluid Nanofluid.* 2015; 19:509-22.

## Références \_\_\_\_\_

---

- [81] Ansari R, Gholami R, Norouzzadeh A, Darabi M. Surface stress effect on the vibration and instability of nanoscale pipes conveying fluid based on a size-dependent Timoshenko beam model. *Acta Mechanica Sinica*. 2015; 31:708-19.
- [82] Ansari R, Norouzzadeh A, Gholami R, Shojaei MF, Hosseinzadeh M. Size-dependent nonlinear vibration and instability of embedded fluid-conveying SWBNNTs in thermal environment. *Phys E*. 2014; 61:148-57.
- [83] Wang L. Vibration analysis of fluid-conveying nanotubes with consideration of surface effects. *Phys E*. 2010 ;43 :437-9.
- [84] Arash B, Ansari R. Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain. *Phys E*. 2010;42:2058-64.
- [85] Norouzzadeh A, Ansari R, Rouhi H. Pre-buckling responses of Timoshenko nanobeams based on the integral and differential models of nonlocal elasticity: an isogeometric approach. *Applied Physics A*. 2017; 123:330-41.
- [86] Norouzzadeh A, Ansari R. Finite element analysis of nano-scale Timoshenko beams using the integral model of nonlocal elasticity. *Phys E*. 2017; 88:194-200.
- [87] Fernandez-Saez J, Zaera R, Loya JA, Reddy JN. Bending of Euler–Bernoulli beams using Eringen’s integral formulation: A paradox resolved. *Int J Eng Sci*. 2016; 99:107-16.
- [88] Challamel N, Wang CM. The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved. *Nanotechnology*. 2008 ;19 :345703-7.
- [89] Ansari R, Ramezannezhad H, Gholami R. Nonlocal beam theory for nonlinear vibrations of embedded multiwalled carbon nanotubes in thermal environment. *Nonlinear Dyn*. 2012; 67:2241-54.
- [90] Ansari R, Gholami R, Sahmani S, Norouzzadeh A, Bazdid-Vahdati M. Dynamic stability analysis of embedded multi-walled carbon nanotubes in thermal environment. *Acta Mech Solida Sin*. 2015; 28:659- 67.
- [91] Ansari R, Gholami R, Rouhi H. Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electrothermo- elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity theory. *Compos Struct*. 2015; 126:216-26.
- [92] Mashat D, Zenkour A, Sobhy M. Investigation of vibration and thermal buckling of nanobeams embedded in an elastic medium under various boundary conditions. *J Mech*. 2016; 32:277-87.
- [93] Thai S, Thai HT, Vo TP, Patel VI. A simple shear deformation theory for nonlocal beams. *Compos Struct*. 2017 ; doi : 10.1016/j.compstruct.2017.03.022.

## Références \_\_\_\_\_

---

- [94] Zhang YY, Wang CM, Duan WH, Xiang Y, Zong Z. Assessment of continuum mechanics models in predicting buckling strains of single-walled carbon nanotubes. *Nanotechnology*. 2009; 20:395707-8.
- [95] Rouhi H, Ansari R. Nonlocal analytical Flugge shell model for axial buckling of double-walled carbon nanotubes with different end conditions. *Nano*. 2012; 7:1250018-10.
- [96] Ansari R, Shahabodini A, Rouhi H. A nonlocal plate model incorporating interatomic potentials for vibrations of graphene with arbitrary edge conditions. *Curr Appl Phys*. 2015; 15:1062-9.
- [97] Arani AG, Abdollahian M, Kolahchi R, Rahmati A. Electro-thermo-torsional buckling of an embedded armchair DWBNT using nonlocal shear deformable shell model. *Compos B Eng*. 2013; 51:291-9.
- [98] Sobhy M. Hygrothermal vibration of orthotropic double-layered graphene sheets embedded in an elastic medium using the two-variable plate theory. *Appl Math Model*. 2016; 40:85-99.
- [99] Zenkour AM, Sobhy M. Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium. *Phys E*. 2013; 53:251-9.
- [100] Alzahrani EO, Zenkour AM, Sobhy M. Small scale effect on hygro-thermo-mechanical bending of nanoplates embedded in an elastic medium. *Compos Struct*. 2013; 105:163-72.
- [101] Bessaim A, Houari MSA, Bernard F, Tounsi A. A nonlocal quasi-3D trigonometric plate model for free vibration behaviour of micro/nanoscale plates. *Struct Eng Mech*. 2015; 56:223-40.
- [102] Sobhy M, Radwan AF. A new quasi 3D nonlocal plate theory for vibration and buckling of FGM nanoplates. *Int J Appl Mech*. 2017; 9:1750008-29.
- [103] Dehrouyeh-Semnani AM, Nikkhah-Bahrami M. A discussion on incorporating the Poisson effect in microbeam models based on modified couple stress theory. *Int J Eng Sci*. 2015; 86:20-5.
- [104] Kong S, Zhou S, Nie Z, Wang K. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *Int J Eng Sci*. 2009; 47:487-98.
- [105] Ansari R, Faraji Oskouie M, Rouhi H. Studying linear and nonlinear vibrations of fractional viscoelastic Timoshenko micro-/nano-beams using the strain gradient theory. *Nonlinear Dyn*. 2017; 87:695-711.

## Références \_\_\_\_\_

---

- [106] Gholami R, Ansari R, Rouhi H. Studying the effects of small scale and Casimir force on the non-linear pull-in instability and vibrations of FGM microswitches under electrostatic actuation. *Int J Non-Linear Mech.* 2015; 77:193-207.
- [107] Wang B, Zhou S, Zhao J, Chen X. A size-dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory. *Eur J Mech A Solids.* 2011 ;30 :517-24.
- [108] Kahrobaiyan MH, Asghari M, Ahmadian MT. A Timoshenko beam element based on the modified couple stress theory. *Int J Mech Sci.* 2014; 79:75-83.
- [109] Zhang B, He Y, Liu D, Gan Z, Shen L. Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. *Finite Elem Anal Des.* 2014; 79:22-39.
- [110] Kahrobaiyan MH, Asghari M, Ahmadian MT. A strain gradient Timoshenko beam element: application to MEMS. *Acta Mech.* 2015; 226:505-25.
- [111] Eltahir MA, Hamed MA, Sadoun AM, Mansour A. Mechanical analysis of higher order gradient nanobeams. *Appl Math Comput.* 2014; 229:260-72.
- [112] Ebrahimi F, Ansari R, Shojaei MF, Rouhi H. Postbuckling analysis of microscale beams based on a strain gradient finite element approach. *Meccanica.* 2016; 51:2493-507.
- [113] Ansari R, Shojaei MF, Ebrahimi F, Rouhi H, Bazdid-Vahdati M. A novel size-dependent microbeam element based on Mindlin's strain gradient theory. *Eng Comput.* 2016; 32:99-108.
- [114] Ansari R, Shojaei MF, Rouhi H. Small-scale Timoshenko beam element. *European Journal of Mechanics-A/Solids.* 2015; 53:19-33.
- [115] Ansari R, Faghieh Shojaei M, Ebrahimi F, Rouhi H. A non-classical Timoshenko beam element for the postbuckling analysis of microbeams based on Mindlin's strain gradient theory. *Arch Appl Mech.* 2015; 85:937-53.
- [116] Phadikar JK, Pradhan SC. Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Comput Mater Sci.* 2010; 49:492-9.
- [117] Ansari R, Rajabiehfard R, Arash B. Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets. *Comput Mater Sci.* 2010; 49:831-8.
- [118] Ansari R, Norouzzadeh A. Nonlocal and surface effects on the buckling behavior of functionally graded nanoplates: an isogeometric analysis. *Phys E.* 2016 ;84 :84-97.
- [119] Mirsalehi M, Azhari M, Amoushahi H. Stability of thin FGM microplate subjected to mechanical and thermal loading based on the modified couple stress theory and spline finite strip method. *Aerosp Sci Technol.* 2015; 47:356-66.

## Références \_\_\_\_\_

---

- [120] Ansari R, Faghieh Shojaei M, Mohammadi V, Bazdid-Vahdati M, Rouhi H. Triangular Mindlin microplate element. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2015; 295:56-76.
- [121] Ansari R, Faghieh Shojaei M, Shakouri AH, Rouhi H. Nonlinear bending analysis of first-order shear deformable microscale plates using a strain gradient quadrilateral element. *J Comput Nonlinear Dyn.* 2016; 11:051014-18.
- [122] Thai, Huu-Tai, Vo, Thuc, Nguyen, Trung-Kien and Kim, Seung-Eock, A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates. *Composite Structures*, 2017; 177. pp. 196-219. ISSN 0263-8223
- [123] Nguyen, T.K. (2015), "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials", *Int.J.Mech.Mater.Des.*, 11(2), 203-219.
- [124] Taleb, O., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Tounsi, A and Mahmoud, S.R. (2018), "A new plate model for vibration response of advanced composite plates in thermal environment", *Structural Engineering and Mechanics.*, Int. J., 18(3), 693-709.
- [125] Reddy, J.N. (2017), *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons.
- [126] Hajmohammad, M.H., Maleki, M. and Kolahchi, R. (2018), "Seismic response of underwater concrete pipes conveying fluid covered with nano-fiber reinforced polymer layer", *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, 110, 18-27.
- [127] Aghababaei, R., Reddy, J.N. (2009). Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates. *J. Sound Vib.*, 326, 277–289.
- [128] Aghababaei, R., Reddy, J.N. (2009). Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates. *J. Sound Vib.*, 326, 277–289.
- [129] Ansari, R., Shahabodini, A., & Shojaei, M. F. (2016). Nonlocal three-dimensional theory of elasticity with application to free vibration of functionally graded nanoplates on elastic foundations. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 76, 70-81.
- [130] Sobhy, M. (2014). Natural frequency and buckling of orthotropic nanoplates resting on two-parameter elastic foundations with various boundary conditions. *Journal of Mechanics*, 30(5), 443-453.
- [131] Sobhy M. Generalized two-variable plate theory for multi-layered grapheme sheets with arbitrary boundary conditions. *Acta Mech* 2014; 225: 2521–2538.