



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Sciences

Par:

Monsieur : NAOURI Abdallah

Spécialité: Génie Mécanique

Option : Turbomachine Thermique

Intitulé de la thèse

## Etude de l'influence du film amortisseur des paliers hydrodynamiques sur la stabilité des turbomachines

Soutenue le: 31/05/2021

Devant le Jury Composé de :

Mr. BOUKHOULDA Farouk Benallel	Professeur	Président	UDL Sidi Bel Abbès
Mr. REFASSI Kaddour	Professeur	Directeur de thèse	UDL Sidi Bel Abbès
Mr. YOUNES Mimoun	Professeur	Co-directeur de thèse	UDL Sidi Bel Abbès
Mr. ZAHY Rachid	MCA	Examineur	U de Relizane
Mr. KEZRANE Cheikh	MCA	Examineur	UZA Djelfa
Mr. LASBET Yahia	MCA	Examineur	UZA Djelfa

Année Universitaire:2020-2021

# إهداء

أهدى هذا العمل المتواضع إلى:

إلى والدي.....

والدتي رحمة الله عليها.....

إلى زوجتي وأولادي.....

إلى كافة أساتذتي في جميع مراحل تعليمي.

# Remerciement

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier et à adresser ma reconnaissance à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près afin de réaliser l'un de mes rêves...

Avant tout je tiens à remercier Dieu tout puissant de nous avoir donné cette foi et cette confiance en soi, ainsi que cette volonté et ce courage, pour pouvoir nous voir un jour devant un jury, afin d'obtenir un tel diplôme. Je remercie encore tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, par leurs encouragements, leurs conseils et leurs critiques.

Je tiens à remercier très vivement mon directeur de thèse, Pr: **REFASSI Kaddour**, pour ses qualités humaines et scientifiques. Je ne pourrai jamais oublier sa gentillesse, sa générosité, son esprit de recherche et ses commentaires efficaces. Un grand merci de m'avoir donné la chance de faire une thèse malgré ma situation contraignante. J'aimerais aussi remercier le Pr : **YOUNES Mimoun** qui m'a aidé au début de cette thèse, je voudrais qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et toute ma sympathie.

J'exprime ma profonde gratitude à l'ensemble des enseignants qui ont contribué à assurer ma formation, je les prie de bien vouloir à ma gratitude en espérant que cet humble travail fera crédibilité à leurs efforts.

Je tiens à remercier aussi messieurs les membres du jury qui ont bien voulu examiner ce travail. Qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude.

Mes vifs remerciements vont également à tous mes amis pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné, et les encouragements qu'ils m'ont offerts ainsi que les moments de travail que nous avons passés ensemble sont inoubliables. Pour terminer, j'adresse mon grand amour à ma femme (**Fadhia**), à mes parents, mes frères et ma Magnifique famille : (**Rima, Nadia, Roumisa, Sid ahmed, Oussama, Zahra, Naas Bassem**) C'est grâce à leur amour et leurs sacrifices que cette thèse a été menée à bonne fin. Mon plus grand souhait dans cette vie, c'est de les voir toujours à côté de moi, en bonne santé, heureux et que la paix soit avec eux.

## *Résumé*

L'objectif de ce travail est d'étudier les coefficients d'amortissement des paliers hydrodynamiques et leurs influences sur la stabilité des turbomachines. Le film amortisseur des paliers hydrodynamiques influe directement sur la stabilité dynamique de ce type des machines. La démarche proposée s'appuie sur la méthode des plans d'expériences pour étudier l'effet de quinze facteurs (diamètres, coefficients d'amortissement) sur la stabilité. Le plan de criblage de Plackett-Burman est utilisé afin d'identifier les facteurs les plus influents sur la marge des premières fréquences propres du système rotor. Lors de la conception et l'optimisation, deux niveaux ont été utilisés pour aboutir quarante-huit essais. Les résultats obtenus mettent en évidence l'importance des plans d'expériences dans l'analyse des phénomènes instables en turbomachines et la pertinence de la méthode de Plackett-Burman dans la prédiction de la stabilité du système.

### ***Mots clefs:***

*Palier hydrodynamique, Stabilité des turbomachines, Plackett-Burman, Coefficient d'amortissement.*

## *Abstract*

The objective of this work is to study the damping coefficients of the hydrodynamic bearings and their influences on the stability of the turbo machinery. The film shock absorber of the hydrodynamic bearings influences directly the dynamic stability of this type of the machines. The step suggested is based on the method of the experimental designs, to study the effect of the fifteen factors (diameters, damping coefficients) on stability. The plan of sifting of Plackett-Burman is used in order to identify the most influential factors on the margin of the first Eigen frequencies of the system rotor. At the time of the design and optimization two levels were used which led to forty-eight tests. The results obtained highlight the importance of the experimental designs in the analysis of the unstable phenomena out of rotating machines and the relevance of the method of Plackett-Burman in the prediction of the stability of the system.

### ***Keywords:***

*Hydrodynamic bearing , Stability of Turbomachinery , Plakett-Burman, Damping coefficient .*

# ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة معاملات الإخماد للمحامل الهيدروديناميكية وتأثيرها على استقرار الماكينات التوربينية ، حيث يؤثر شريط زيت الإخماد للمحامل الهيدروديناميكية بشكل مباشر على الاستقرار الديناميكي لهذا النوع من الآلات. يعتمد النهج المقترح على تصميم طريقة التجارب ، لدراسة تأثير مجموعه من خمسة عشرة عاملا (الأقطار ، معاملات الإخماد) على الاستقرار. تستخدم خطة الفرز-Plackett-Burman لتحديد المعاملات الأكثر تأثيرًا على هامش التردد الطبيعي للنظام حيث تم استخدام تحسين التصميم بمستويين لكل معامل للحصول على ثمانية وأربعين تجربة. النتائج التي تم الحصول عليها تسلط الضوء على أهمية التصاميم التجريبية في تحليل الظواهر غير المستقرة في الآلات التوربينية ومدى ملاءمة طريقة بلاكيت بورمان في التنبؤ باستقرار النظام.

**الكلمات المفتاحية:** المحمل الهيدروديناميكي ، بلاكيت بورمان ، معاملات الإخماد ، استقرار الماكينات

التوربينية.

# ***SOMMAIRE***

<b>Introduction générale.....</b>	<b>2</b>
<b>CHAPITRE I : .....Généralités sur les paliers hydrodynamiques .....</b>	<b>5</b>
<b>I.2. Paliers hydrodynamiques.....</b>	<b>11</b>
I.2.1 Les paliers à géométrie fixe .....	11
I.2.2. Paliers à géométrie variable .....	12
<b>I.3. Le lubrifiant.....</b>	<b>13</b>
I.3.1. Lubrification hydrodynamique.....	15
I.3.2. Régimes de fonctionnement d'un contact lubrifié.....	16
<b>I.4. Mode de guidages d'un palier hydrodynamique .....</b>	<b>18</b>
<b>I.5. Alimentation des paliers lisses .....</b>	<b>20</b>
I.5.1 Position et forme des rainures d'alimentation.....	20
I.5.2 Rôle de la pression d'alimentation.....	21
I.5.3 Epaisseur de film .....	22
I.5.4 Jeu diamétral .....	23
<b>I.6. Limites de fonctionnement.....</b>	<b>24</b>
<b>CHAPITRE II : .....Équations de base dans les contacts lubrifiés .....</b>	<b>26</b>
<b>II.1 Introduction .....</b>	<b>27</b>
<b>II.2 Équations de base de la lubrification .....</b>	<b>28</b>
<b>II.3 Modélisation de l'écoulement de Reynolds.....</b>	<b>28</b>
<b>II.4. Hypothèses de la lubrification hydrodynamique .....</b>	<b>30</b>
<b>II.5. Équations générales de la lubrification hydrodynamique .....</b>	<b>30</b>
<b>II.6. Equation de Reynolds en lubrification.....</b>	<b>32</b>
<b>II.7. Conditions aux limites.....</b>	<b>34</b>
II.7.1. Conditions de Sommerfeld.....	35
II.7.2. Conditions de GUMBEL.....	35
II.7.3. Conditions de Reynolds (SWIFT-STAIKER) .....	36
<b>II.8. Conclusion.....</b>	<b>37</b>
<b>CHAPITRE III : .....Étude de la stabilité des paliers hydrodynamiques .....</b>	<b>38</b>
<b>III.1. Introduction.....</b>	<b>39</b>
<b>III.2. Dynamique des rotors et vibrations .....</b>	<b>39</b>

<b>III.3. Caractéristiques et performances dynamiques .....</b>	<b>40</b>
III.3.1. Caractéristiques statiques .....	41
III.3.2. Caractéristiques dynamiques .....	42
<b>III.4. Équations du mouvement .....</b>	<b>44</b>
<b>III.5. Effet de tourbillon sur le mouvement rotatif des arbres .....</b>	<b>47</b>
<b>III.6. L'instabilité des paliers hydrodynamiques .....</b>	<b>51</b>
III.6.1. Phénomène de tourbillonnement et fouettement d'huile.....	53
III.6.2. Le balourd et le tourbillon d'huile.....	54
III.6.3. Tourbillon à demi-fréquence.....	55
III.6.4. Vitesse d'apparition de l'instabilité .....	57
III.6.5. Stabilité des système linéaires .....	58
<b>III.7. Stabilité d'un rotor rigide .....</b>	<b>60</b>
III.7.1. Vitesse et fréquence de tourbillonnement d'huile .....	60
III.7.2. Masse critique du rotor .....	63
<b>III.8. Vitesse critique de rotation .....</b>	<b>65</b>
<b>III.9. Etude de la stabilité .....</b>	<b>66</b>
<b>III.10. Conclusion .....</b>	<b>71</b>
<b>CHAPITRE IV : .....Méthode des plans d'expériences.....</b>	<b>72</b>
<b>IV.1 Introduction.....</b>	<b>73</b>
<b>IV.2. Domaine expérimental.....</b>	<b>76</b>
<b>IV.3. Méthodologie des plans d'expériences .....</b>	<b>79</b>
<b>IV.4. Objectifs des plans d'expériences .....</b>	<b>81</b>
<b>IV.5. Notion de modélisation mathématique.....</b>	<b>81</b>
<b>IV.6. Types des plans d'expériences .....</b>	<b>83</b>
• Plan de Plackett et Burman (PB) .....	84
<b>IV.7. Méthodes d'analyse des plans d'expériences.....</b>	<b>85</b>
<b>IV.8. Matrice d'expérience .....</b>	<b>86</b>
IV.8.1. Propriétés associées à la matrice d'un plan d'expérience.....	87
IV.8.2. Variables codées ou coordonnées centrées réduites .....	89
<b>IV.9. Analyse statistique du modèle.....</b>	<b>90</b>
<b>IV.10. Analyse graphique du modèle.....</b>	<b>98</b>
IV.10.1. Droite des effets de Henry.....	98



IV.10.2. Demi-droite des effets de Henry.....	99
IV.10.3. Traces des effets moyens.....	100
IV.10.4. Traces des interactions.....	102
IV.10.5. Diagramme de pareto.....	103
IV.10.6. Surface et contours de réponses.....	104
<b>IV.11. Conclusion .....</b>	<b>105</b>
<b>CHAPITRE V : ...Étude de l'influence du film amortisseur du palier</b>	
<b>hydrodynamique par plans d'expériences (Plackett-Burman).....</b>	<b>106</b>
<b>V.1. Introduction .....</b>	<b>107</b>
<b>V.2. Description des programmes de résolution.....</b>	<b>108</b>
<b>V.3. Validation du programme de calcul .....</b>	<b>108</b>
<b>V.4. Conception de Doe (Design of Experiment).....</b>	<b>110</b>
<b>V.5. Plan de criblage (Plackett-Burman).....</b>	<b>110</b>
• Représentation graphique et statistique.....	110
<b>V.6. Résultats statistiques de l'optimisation (PBD) .....</b>	<b>113</b>
V.6.1 Effets et coefficients de fréquences .....	113
V.6.2 Analyse de la variance (ANOVA).....	114
V.6.3. Représentation graphique des effets .....	115
<b>V.7. Optimisation de la reponse .....</b>	<b>123</b>
<b>V.8. Conclusion .....</b>	<b>130</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>131</b>
<b>Conclusion et perspectives.....</b>	<b>132</b>
<b>Annexe</b>	

## *Table des figures*

Figure I.1 : Schéma d'un palier hydrodynamique typique .....	11
Figure I.2 : Palier lisse cylindrique.....	12
Figure I.3 : Schématisation d'un palier à arc partiel.....	12
Figure I.4 : Photographie et schéma d'un palier à trois patins oscillants.....	13
Figure I.5 : Schéma d'un palier à trois lobes .....	13
Figure I.6 : Schéma d'un contact lubrifié .....	16
Figure I.7 : Courbe de Stribeck .....	17
Figure I.8 : Position d'un arbre dans un palier lisse hydrodynamique .....	19
Figure I.9 : Trajectoire du centre de l'arbre .....	19
Figure I.10 : Position des rainures axiale.....	20
Figure I.11 : Répartition de pression dans un palier lisse .....	22
Figure. I.12 : Valeurs acceptables d'épaisseur minimale .....	23
Figure I.13 : Valeur du jeu diamétrale en fonction de la vitesse .....	24
Figure I.14 : Conditions limites de charge et de vitesse.....	24
Figure II.1 : Schémas des principaux paramètres du palier hydrodynamique.....	27
Figure II.2 : Système d'axes en coordonnées cartésiennes pour un palier développé .....	31
Figure II.3 : Section droite du palier .....	32
Figure II.4 : Conditions aux limites de Sommerfeld .....	35
Figure II.5 : Conditions aux limites de Gümbel .....	36
Figure II.6 : Conditions aux limites de Reynolds .....	36
Figure.III.1 : Fonctionnement d'un palier hydrodynamique .....	40
Figure.III.2 : Schématisation des composantes de la charge.....	41
Figure.III.3 : La représentation physique des coefficients dynamiques d'un palier hydrodynamique.....	42
Figure.III.4 : Forces de réaction des paliers lisses .....	43
Figure.III.5 : La force Tangentielle $f_T$ .....	48
Figure.III.6 : Mouvement libre (décomposé en deux tourbillons).....	49
Figure.III.7 : Forces agissant sur la masse.....	50
Figure.III.8 : Phénomène oil.....	53
Figure.III.9 : Schéma de fréquence du tourbillon d'huile.....	55
Figure.III.10 : Palier lisse circulaire(vitesse induite( $e\omega$ )).....	56
Figure.III.11 : Courbe de fréquence d'instabilité.....	57
Figure.III.12 : Types de mouvement associés à la position dans le plan complexe.....	58
Figure.III.13 : Seuil d'instabilité d'un rotor avec paliers lisses cylindriques .....	63

Figure.III.14 :Diagramme de stabilité pour un palier lisse .....	64
Figure.III.15 :Masse critique sans dimension du rotor au début de l'instabilité en fonction de S( [98]) .....	65
Figure.III.16 : Configuration du Rotor .....	66
Figure.III.17 :Diagramme de Campbell et seuil d'instabilité .....	67
Figure.III.18 :Diagramme de stabilité.....	68
Figure IV.1 :Schéma simplifié d'un système donné .....	74
Figure IV.2 : Différents types de variables .....	75
Figure IV.3 : Domaine de variation du facteur .....	77
Figure IV.4 : Définition du domaine d'étude.....	78
Figure IV.5 : Domaine expérimental et surface de réponse .....	79
Figure IV.6 : Etapes du processus de simulation numérique.....	80
Figure IV.7 :Représentation de la loi de Fisher-Snedecor .....	95
Figure IV.8 : Droite de HENRY (Réponse).....	99
Figure IV.9 : Demi-Droite de HENRY (Réponse) .....	100
Figure IV.10 :Exemple de tracé des effets moyens.....	101
Figure IV.11 :Représentation de l'effet d'un facteur.....	101
Figure IV.12 : Exemple de tracé des interactions .....	102
Figure IV.13 : Représentation d'une interaction entre deux facteurs .....	103
Figure IV.14 :Diagramme de Pareto .....	104
Figure IV.15 : Contour et surface de réponses .....	104
Figure V.1 : Configuration de rotor Nelson.....	109
Figure V.2: Diagramme de l'effet normalisé .....	111
Figure V.3 : Diagramme Demi Droite-normal des effets.....	111
Figure V.4 : Diagramme d'effet .....	112
Figure V.5 : Diagramme de la valeur absolue des effets.....	116
Figure V.6 :Diagramme normal d'effet.....	117
Figure V.7 :Diagramme Demi Droite-normal des effets.....	117
Figure V.8 :Diagramme des effets principaux de différents paramètres sur la fréquence .....	118
Figure V.9 :Graphe d'interaction pour la réponse et les coefficients d'amortissements.....	119
Figure V.10 :Diagramme d'interaction globale de fréquence afin de visualiser les interactions possibles.....	120
Figure V.11 :Courbe et surface (Cyz, Cyy) correspondant à la fréquence propre .....	121
Figure V.12 :Courbe et surface (Czy, Cyy) correspondant à la fréquence propre .....	123

<b>Figure V.13 : Diagramme de contours présentant les effets des différents facteurs sur la réponse.....</b>	<b>124</b>
<b>Figure V.14 : Diagramme de surface présentant les effets des différents facteurs sur la réponse.....</b>	<b>124</b>
<b>Figure V.15 : Solution optimale par la fonction .....</b>	<b>126</b>
<b>Figure V.16 : Diagramme de Campbell du rotor avec des paliers hydrodynamiques amortis .....</b>	<b>127</b>
<b>Figure V.17 : Formes modales du rotor correspondant au diagramme de Campbell V.17....</b>	<b>129</b>

## *Liste des tableaux*

<b>Tableau IV.1 : Présentation générale d'un tableau d'analyse de la variance .....</b>	<b>92</b>
<b>Tableau V.1 : Niveaux des variables utilisée dans la DOE.....</b>	<b>109</b>
<b>Tableau V.2 : Effets et coefficients de fréquences .....</b>	<b>112</b>
<b>Tableau V.3 : Analyse de variance initial pour la fréquence .....</b>	<b>113</b>
<b>Tableau V.4 : Effets et coefficients de fréquences .....</b>	<b>114</b>
<b>Tableau V.5 : Analyse de variance de la fréquence .....</b>	<b>114</b>
<b>Tableau V.6 : Récapitulatif de l'ajustement du modèle.....</b>	<b>115</b>
<b>Tableau. A.1: Résultat de DOE (Plakett-Burman) .....</b>	<b>142</b>

## Liste des symboles

Symboles	significations	Unités(SI)
<b>C</b>	Jeu radial	[m]
<b>e</b>	Excentricité	[m]
<b>h</b>	Epaisseur du film fluide	[m]
<b>h<sub>0</sub></b>	Epaisseur nominale du film fluide	[m]
<b>R<sub>a</sub></b>	Rayon de l'arbre	[m]
<b>R<sub>c</sub></b>	Rayon du coussinet	[m]
<b>S</b>	Nombre de Sommerfeld	
<b>U</b>	Vitesse linéaire de l'arbre	[m/s]
<b>u<sub>1,2</sub></b>	Vitesses des surfaces 1 et 2 selon l'axe x	[m/s]
<b>u<sub>i</sub></b>	Composantes de la vitesse d'écoulement	[m/s]
<b>v<sub>1,2</sub></b>	Vitesses des surfaces 1 et 2 selon l'axe y	[m/s]
<b>W</b>	Charge extérieur (statique)	[N]
<b>μ</b>	Viscosité dynamique du lubrifiant	[Kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> ]
<b>ρ</b>	Masse volumique du fluide	[kg/m <sup>3</sup> ]
<b>δ<sub>ij</sub></b>	Symbole de Kronecker	
<b>σ<sub>ij</sub></b>	Tenseur des contraintes	
<b>λ</b>	Coefficients de dilatation	
<b>Γ</b>	Frontière du domaine	
<b>t<sub>X</sub></b>	Matrice transposée du vecteur x	
<b>φ</b>	Angle de calage [ <i>rad</i> ]	
<b>ω<sub>a</sub></b>	Vitesse de rotation angulaire de l'arbre	[rad/s]
<b>O<sub>c</sub>, O<sub>a</sub></b>	Centres du coussinet et de l'arbre	
<b>P</b>	Pression hydrodynamique du lubrifiant	[Pa]
<b>R<sub>a</sub></b>	Rayon de l'arbre	[m]
<b>R<sub>c</sub></b>	Rayon du coussinet	[m]
<b>S</b>	Nombre de Sommerfeld	
<b>X<sub>j</sub></b>	Moyenne arithmétique des valeurs prises par la variable x <sub>j</sub>	
<b>σ(x<sub>j</sub>)</b>	Ecart type de la variable x <sub>j</sub>	
<b>Var (X<sub>j</sub>)</b>	Variance de la variable x <sub>j</sub>	
<b>R(X,Y)</b>	Coefficient de corrélation entre x et y	
<b>e<sub>i</sub></b>	Erreur résiduel.	
<b>R<sup>2</sup>(x,y)</b>	Coefficient de détermination entre x et y ( Coefficient de corrélation)	
<b>ŷ<sub>i</sub></b>	Réponse calculée	Rad/s

## **Introduction générale**

Les applications avancées des machines tournantes exigent un contrôle de plus en plus complet des caractéristiques de chaque composant. Ces machines sont constituées d'une partie mobile (rotor) et d'une partie fixe (stator). La liaison entre le rotor et le stator est faite par des éléments, autorisant le mouvement relatif entre eux, appelés paliers. Les paliers hydrodynamiques offrent des perspectives de conception intéressantes, lorsqu'il s'agit des arbres fortement chargés et tournants à grandes vitesses, ce support de guidage joue un rôle crucial. Son impact est important sur le bon fonctionnement de l'ensemble du système et assurera sa durée de vie.

Selon l'utilisation des machines, plusieurs solutions ont été adoptées pour minimiser les effets d'instabilité et les risques des endommagements brusques des machines tournantes, pour lesquelles des études préliminaires de performance doivent être développées, ainsi qu'un suivi périodique des changements de paramètres, en particulier les paramètres dynamiques.

La résolution numérique des problèmes de l'instabilité des paliers hydrodynamiques par les méthodes classiques nécessite, en effet des temps de simulation longs, et une capacité de stockage des données importante, ce qui rend le coût de calcul trop élevé. Des méthodes de réduction, basées sur la méthodologie des plans d'expériences, qui doivent en principe rechercher une solution réduite, permettant, ainsi de diminuer la taille et le temps de traitement du problème posé. Aussi, notre travail de recherche contient à analyser la stabilité des paliers hydrodynamiques afin de déterminer leurs caractéristiques et leurs influences sur le comportement dynamique du système étudiée.

L'utilisation des plans d'expériences pour notre étude est basé sur le nombre des facteurs étudiés. Nous nous sommes servis des plans de criblage à deux niveaux sont les matrices d'Hadamard ou de Plackett et Burman pour lesquels le nombre de simulations est proche du nombre de facteurs étudiés qui consistent à mettre en évidence les effets de certains facteurs sur la réponse étudiée.

Ainsi, il est primordial de comprendre les effets des facteurs qui agissent sur la fréquence vu leur lien étroit avec l'amélioration de la sécurité et la stabilité des turbomachines.

Dans ce contexte, nous nous intéressons à la méthode de plan Plackett et Burman, qui consiste à trouver une solution statistique à la stabilité, qui à démontrer son importance intrinsèque. Une implémentation développée sera effectuée sous Matlab<sup>TM</sup> permettant de calculer les fréquences propres et les coefficients d'amortissements de ces derniers types de paliers. Ensuite, dans une deuxième étape, une étude de criblage peut être définie comme une étape permettant de repérer les facteurs influents dans un domaine expérimental fixé, en utilisant un programme Minitab<sup>17</sup>.

Cette étude permettra de déterminer l'effet de chaque niveau de chaque facteur, pour ensuite les classer par ordre d'importance. Cette démarche expérimentale permettra de structurer la recherche, pour mieux comparer, vérifier et comprendre les phénomènes étudiés, ainsi prévoyant les effets d'amortissement et leur influence sur la stabilité des paliers hydrodynamiques.

A cet effet, nous avons structuré notre thèse comme suit :

***La thèse est organisée en cinq chapitres.***

***Le Chapitre I*** présente une généralité sur les paliers hydrodynamiques, leur lubrification, leur mode de fonctionnement et leurs limites d'utilisation.

***Le Chapitre II*** est consacré à l'étude théorique du problème de lubrification hydrodynamique appliquée à un palier lisse cylindrique. Dans ce chapitre nous avons développé toutes les équations gérant ce problème ainsi que les hypothèses et les simplifications retenues dans notre étude.

***Le Chapitre III*** est consacré à l'étude de l'influence des caractéristiques dynamiques sur la stabilité des machines tournantes supportées par des paliers hydrodynamiques.

***le Chapitre IV*** présente la méthode des plans d'expériences, les étapes d'une étude par les plans d'expériences, ainsi les différents types des plans d'expériences, comme étant des outils d'analyse privilégiée et montrant leurs propriétés expérimentales, et leurs analyses statistiques et graphiques.

**le Chapitre V** présente la démarche et l'analyse par la méthode de Plakett-Burman (PBD) en vue de déterminer les paramètres (coefficients d'amortissements, diamètres) avec un minimum d'expériences afin d'obtenir les facteurs les plus influents et de trouver la fréquence optimal sur la stabilité des turbomachines.

Une conclusion générale, réunissant l'ensemble des travaux réalisés, et les résultats obtenus, ainsi que des perspectives de développement ultérieurs, complètent ce manuscrit.



# *Généralités sur les paliers hydrodynamiques*

<b>I.1. Introduction.....</b>	<b>6</b>
<b>I.2. Paliers hydrodynamiques.....</b>	<b>11</b>
I.2.1. Les paliers à géométrie fixe .....	11
I.2.2. Paliers à géométrie variable .....	12
<b>I.3. Le lubrifiant.....</b>	<b>13</b>
I.3.1. Lubrification hydrodynamique.....	15
I.3.2. Régimes de fonctionnement d'un contact lubrifié.....	16
<b>I.4. Mode de guidages d'un palier hydrodynamique .....</b>	<b>18</b>
<b>I.5. Alimentation des paliers lisses .....</b>	<b>20</b>
I.5.1 Position et forme des rainures d'alimentation.....	20
I.5.2 Rôle de la pression d'alimentation.....	21
I.5.3 Epaisseur de film .....	22
I.5.4 Jeu diamétral .....	23
<b>I.6. Limites de fonctionnement.....</b>	<b>24</b>
<b>I.7. Conclusion .....</b>	<b>25</b>

## I.1. Introduction

Les machines tournantes telles que les turbomachines et les compresseurs sont devenues depuis de nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne. Les constructeurs sont amenés à améliorer leurs produits. Cependant, les efforts générés, de plus en plus importants, sollicitent fortement le comportement dynamique global de la machine et les amplitudes vibratoires deviennent trop élevées pour que la structure puisse les supporter.

La stabilité d'une machine tournante est liée directement au comportement dynamique de ses supports. Un bon dimensionnement ainsi qu'un choix judicieux de ses supports (paliers) permet d'éviter les incidents dus aux vibrations. Une prédiction précise des caractéristiques de vibrations des systèmes rotor-palier doit être faite. La littérature est actuellement riche de travaux numériques et expérimentaux qui prévoient l'influence des performances statiques et dynamiques des paliers hydrodynamiques sur le comportement dynamique des rotors. La contribution du palier est traitée et représentée comme des forces hydrodynamiques extérieures exercées sur le rotor. Ces forces sont des fonctions non linéaires des déplacements et des vitesses du centre géométrique de l'arbre dans le palier.

Les pertes de stabilité ont des conséquences coûteuses et dangereuses sur le fonctionnement du palier. C'est pourquoi la conception des machines doit intégrer des analyses de stabilité aussi précise que possible. Cela passe par une compréhension fine de ces phénomènes non-linéaires afin de prédire correctement l'évolution du système. La connaissance des paramètres dynamiques permet aux spécialistes de vibration de modéliser les rotors-paliers pour la recherche des instabilités, des vitesses critiques et de la réponse des lignes d'arbres.

Dans ce chapitre, on a commencé par une synthèse des travaux qui ont été réalisés principalement sur les paliers hydrodynamiques puis une explication du phénomène de base de la lubrification hydrodynamique.

Gurudatt.B et Vikram K.[1]ont présenté une variante appelée l'analyse harmonique pour identifier la fréquence d'un système par l'amplitude et l'angle de phase. Le

déséquilibre de rotor dû à l'excentricité a été employé comme excitation pour exécuter une telle analyse. Ils ont conclu qu'à des niveaux modérés du balourd et des valeurs élevées de l'excentricité conduisent à une réponse non périodique pour une vitesse de rotation du rotor au-dessus de la valeur du seuil d'instabilité.

Khonsari et Chang [2] ont montré qu'il existe une région stable dans le cercle de jeu de palier court en dehors de laquelle les conditions initiales pour le problème dynamique transitoire non linéaire donnent une orbite instable même si le palier hydrodynamique doit être stable selon l'analyse linéaire.

Villa.C et al[3] ont étudié un rotor flexible monté sur des paliers hydrodynamiques basés sur la théorie des paliers de longueur finie. Ils modélisent le rotor en utilisant la méthode des éléments finis et la méthode de synthèse modale qui décompose le système en un ensemble de sous-structures et réduit les degrés de liberté en conservant ceux sur lesquels les non linéarités agissent. De plus, ils calculent les oscillations auto-excitées (self-excited oscillations) et prévoient numériquement les réponses périodiques du rotor et leur stabilité grâce à la théorie de Floquet.

Whalley et Abdul-Ameer[4] ont calculé la résonance, la vitesse critique et la fréquence de rotation d'un rotor où le diamètre varie d'une section à l'autre en employant la méthode de réponse harmonique.

Zheng et Hasebe[5] ont étudié les phénomènes dynamiques non linéaires, tels que une bifurcation de type quasi-périodique et un phénomène de saut, sont identifiés pour des systèmes de rotor flexible montés sur des paliers hydrodynamiques elliptiques et modélisés avec la méthode des éléments finis basée sur la théorie des poutres de Timoshenko.

Gasch. R. [6] a étudié un rotor de type Jeffcott supporté par des paliers infiniment longs à film d'huile, afin d'obtenir des orbites périodiques, leur période et leur stabilité à l'aide de la méthode de tir généralisée (Generalized shooting method).

ZHOU et al[7] ont présenté une comparaison entre des réponses linéaires et non linéaires au balourd pour un système rotor flexible-palier hydrodynamique modélisé

par la méthode de masse localisée (Lumped Mass Method) pour réduire les degrés de liberté.

Lu et al [8] ont discrétisé un rotor flexible sur des paliers fluides multiples en utilisant les éléments finis de poutre de Timoshenko. Ils introduisent l'approche de contrainte variationnelle (Variational Constraint Approach) et la méthode des éléments finis iso paramétriques pour résoudre l'équation de Reynolds et calculer les forces du film d'huile.

Qiu.Z.L Tieu AK.[9] ont présenté l'analyse dynamique d'un rotor rigide monté sur des paliers hydrodynamiques soumis à des excitations sismiques de rotation et de translation du support. Leur travail montre l'intérêt de la prise en compte la rotation du support dans l'analyse.

Newkirk. B.L [10],[11] a montré expérimentalement la présence d'une fréquence de vibration qui peut être supprimée par simple réduction de l'alimentation en huile. Il a mis en évidence ce phénomène en identifiant une vibration propre aux arbres supportés par les paliers fluides. Deux effets sont à spécifier, le premier est un mouvement de précession de l'arbre à une vitesse voisine de la moitié de la vitesse de rotation et qui évolue avec la vitesse de l'arbre, le second est un fouettement caractérisé par une augmentation des amplitudes à une vitesse fixe, proche de la moitié de la pulsation propre du rotor. Cette vitesse n'évolue donc plus avec celle de l'arbre, et il convient de ne pas la dépasser, pour éviter la destruction de la machine. Ces phénomènes ont par la suite été abondamment étudiés, dans le cas d'arbres rigides et flexibles [12],[13],[14].

Hori.Y [15] a déterminé les huit coefficients dynamiques, à savoir : quatre coefficients de rigidité et quatre coefficients d'amortissement en utilisant un palier infiniment long avec rupture du film d'huile dans lequel l'écoulement s'effectue seulement suivant la direction circonférentielle du palier.

Holms. R.[16] a étudié le comportement dynamique d'un palier lisse cylindrique en utilisant les deux approches numériques linéaires et non linéaires, d'où il a comparé les orbites du mouvement de l'arbre obtenu par l'analyse linéaire à celle non linéaire

en présence de la déformation de l'arbre ce qui confirme la validité des résultats obtenus par N. Stokes.[17].

Lund.J. W [18] a proposé une approche directe du problème, pour tracer la carte de stabilité des paliers. Il a montré que le mouvement de l'arbre à l'intérieur du coussinet doit être orbitale. Le calcul des coefficients dynamiques du film dans le cas d'un palier de longueur finie (écoulement 2-D) n'a pas pu se faire qu'avec le développement des moyens de calcul Sternlicht [19].

Tiwari. R et Lees AW[20]ont modélisé des systèmes rotor-palier en employant des éléments finis de poutre de Timoshenko et en prenant en compte la dissymétrie du disque, de l'arbre et/ou du palier. Ils montrent que les vitesses critiques peuvent varier en fonction des différents angles entre les axes majeurs de disque et d'arbre, de la dissymétrie de l'arbre ainsi que les caractéristiques du palier.

Ritesh . F, Vimal. P[21] ont présenté une variante appelée l'analyse harmonique pour identifier la fréquence d'un système par la vitesse critique, amplitude et l'angle de phase en employant ANSYS. Le déséquilibre qui existe dans n'importe quel rotor dû à l'excentricité a été employé comme excitation pour différents paliers .

Kaidi.I et A.Kabouche[22]ont présenté une étude théorique sur l'effet du désalignement sur les caractéristiques dynamiques d'un palier lisse cylindrique (hydrodynamique) . Un modèle mathématique du palier hydrodynamique a été développé, en employant l'équation du Reynolds du film lubrifiant. La résolution numérique de cet équation est effectuée par la méthode des différences finies. Le modèle est basé sur l'approche linéaire par la détermination des coefficients de rigidité et d'amortissement ainsi que la recherche de la réponse au balourd obtenu en résolvant l'équation du mouvement de l'arbre.

Chouksey. M et ses collègues [23]ont étudié l' influence de l'amortissement interne du rotor et les forces du film fluide (générées par l'action hydrodynamique dans les paliers) sur le comportement modal d'un système rotor-arbre flexible.

Bonneau.O[24],[25] a étudié l'influence des caractéristiques des paliers fluide sur le comportement dynamique des lignes d'arbres.

Reddi. M [26] a présenté une étude basée sur le principe variationnel pour déterminer les caractéristiques statiques des paliers hydrodynamiques dans le cas isotherme.

Lun et Thomsen[27] ont lancé un algorithme numérique basé sur les petites vibrations de l'arbre pour le calcul des coefficients de rigidité et d'amortissements. Le modèle linéaire et la réponse synchrone au balourd est adéquate pour analyser le comportement dynamique d'un rotor supporté par paliers hydrodynamiques [28]. l'approche linéaire et le calcul des coefficients de raideurs et d'amortissements permettent de résoudre l'équation de mouvement et obtenir ainsi les trajectoires du centre de l'arbre [29].

Mattieu.C[30] a étudié le comportement dynamique d'un palier lisse cylindrique en employant les deux approches numériques linéaire et non linéaire, d'où il a comparé les orbites du mouvement de l'arbre obtenus par l'analyse linéaire avec celle non linéaire en présence de la déformation au palier.

Kabouya.A[31] a étudié l'influence du paramètre du couple de contrainte sur les performances statiques et dynamiques des paliers lisses indéformables désalignés en présence d'un balourd sur la stabilité.

Dakel.M ,S.Baguet , R.Dufour [32] ont présenté le comportement dynamique en flexion d'un rotor monté sur des paliers hydrodynamiques non linéaires en présence de mouvements du support rigide. Le modèle de rotor proposé est basé sur les éléments finis de poutre de Timoshenko. Les effets des mouvements du support combinés aux paliers hydrodynamiques sont analysés et discutés grâce à des cartes de stabilité, des orbites du rotor ainsi que des analyses spectrales.

Wang. W.M, Li QH, Gao JJ, Yao JF, Allaire P [33] ont expliqué que la méthode utilisant les coefficients dynamiques restent assez précise, même pour des mouvements relativement de grande amplitude. Notons que l'on peut aussi utiliser les coefficients dynamiques dans un repère mobile si le mouvement est piloté principalement par un chargement dynamique. En conséquence cette méthode est applicable sur une grande plage de chargements, mais se révèle limitée lorsque deux chargements de même amplitude, possédant des dynamiques différentes, interagissent avec le fluide.

L'analyse exacte d'un système rotor-palier est donc très complexe. Puisqu'elle nécessite la résolution du système d'équations relatives au mouvement du rotor et au comportement hydrodynamique des paliers décrit par l'équation de Reynolds. Compte tenu des difficultés inhérentes à la résolution des problèmes non linéaires, une étude simplifiée peut être réalisée par les équations linéaire du mouvement .

## I.2. Paliers hydrodynamiques

Ces paliers sont conçus pour fonctionner dans des conditions sévères, des charges et des fréquences de rotations élevées. Les quatre composants du palier hydrodynamique, à savoir le lubrifiant, le tourillon, le coussinet et le logement ont des particularités de conception qui leurs sont propres.

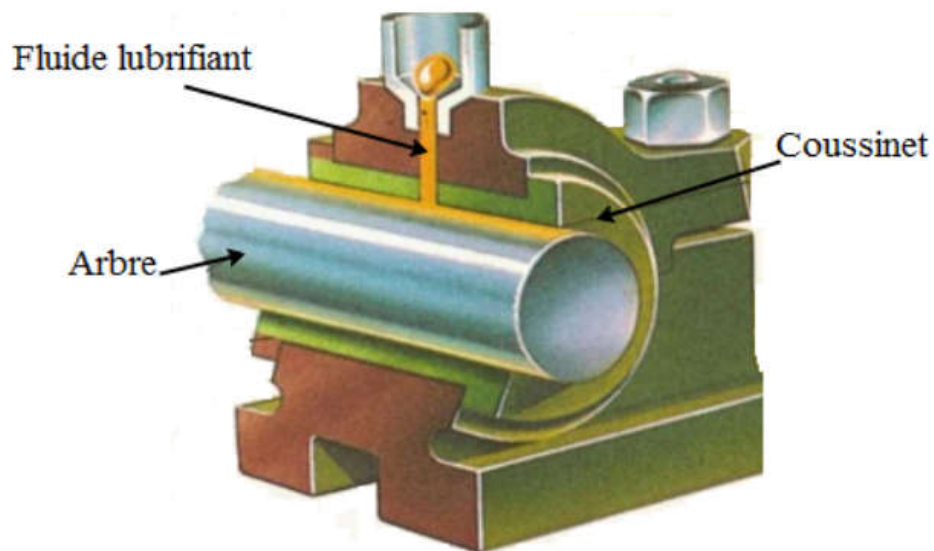


Figure I .1: Schéma d'un palier hydrodynamique typique[34]

On distingue deux types de paliers hydrodynamiques :

- Les paliers à géométrie fixe .
- Les Paliers à géométrie variable.

### I.2.1.Les paliers à géométrie fixe

1. **Les paliers lisses cylindriques** : ce type de paliers comportent un arbre tournant à l'intérieur d'un coussinet complet, un film lubrifiant sépare totalement ces deux éléments.

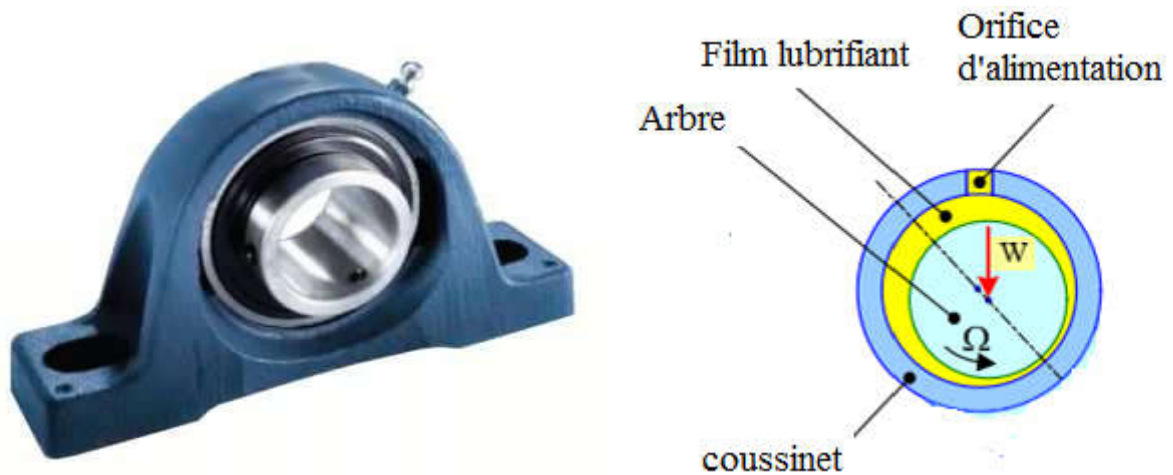


Figure I .2: Palier lisse cylindrique[34]

2. Les paliers à arc partiel : Pour lesquels la charge est faible à vitesses élevées.

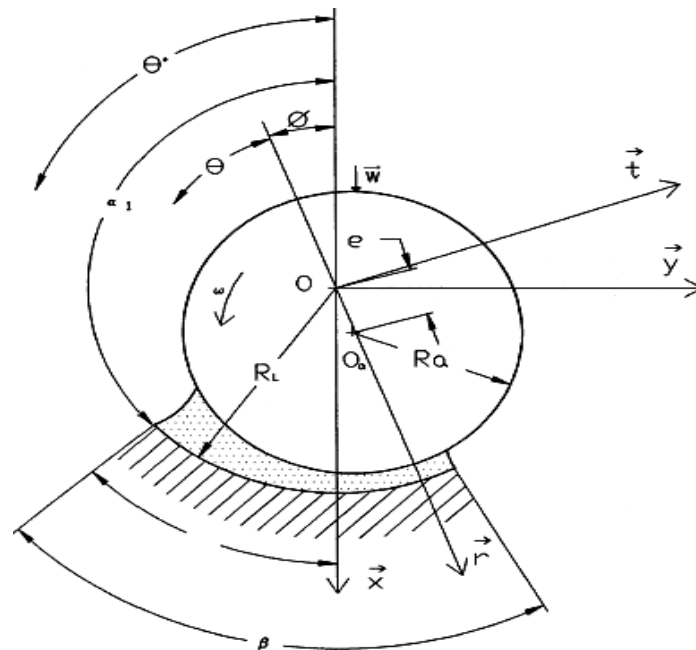


Figure I .3: Schématisation d'un palier à arc partiel[34]

3. Les Paliers à films amortisseurs : Ce type de palier est essentiellement utilisé pour le guidage des rotors de turbines tournant à grandes vitesses.

### I.2.2.Paliers à géométrie variable

1. Paliers à patins oscillants :Ce type de palier supporte une charge de capacité assez élevée et offre une excellente stabilité.



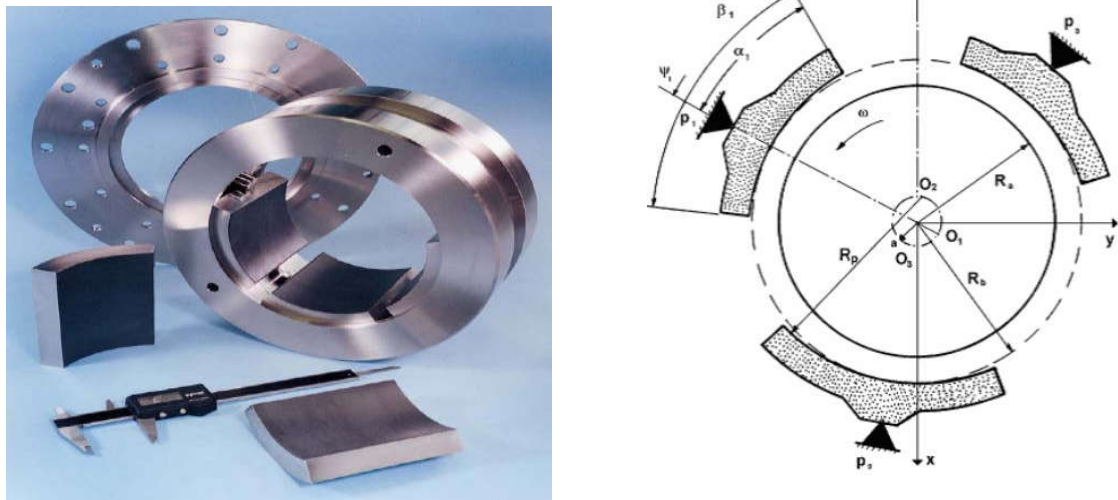
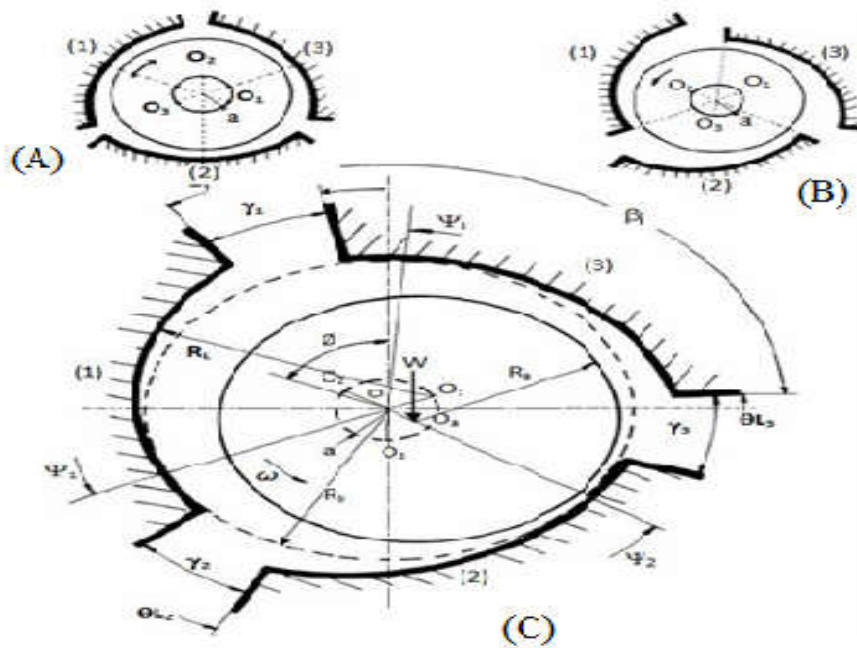


Figure I .4: Photographie et schéma d'un palier à trois patins oscillants[34]

**2. Paliers multilobés :** Les discontinuités dans le film d'huile semblent donner à ce palier l'avantage d'une grande stabilité.



A) Lobes symétriques (palier centré). B) Lobes asymétriques (palier centré).

C) Cas général : Palier excentré

Figure I .5: Schéma d'un palier à trois lobes[34]

Dans notre cas, on s'intéressera à l'étude des paliers hydrodynamiques.

### I.3. Le lubrifiant

Le lubrifiant dans le palier hydrodynamique a pour rôle à la fois de réduire le frottement, le bruit de fonctionnement , évacuer la chaleur et de séparer les surfaces en contact. En tribologie, les huiles synthétiques présentent l'avantage d'être plus

stable chimiquement et de mieux résister à l'oxydation. Les structures moléculaires de ces différents types d'huile et leurs propriétés physiques permettent de les décrire à l'échelle de la mécanique des milieux continus [35]

**Origines des huiles** : Les lubrifiants peuvent être classés en deux catégories : les bases pétrolières (ou minérales) et les bases synthétiques. Les huiles les plus utilisées sont les huiles minérales. Cependant, des huiles synthétiques ont été développées pour des applications nécessitant des lubrifiants à usage humain (procédés alimentaires, industrie pharmaceutique) ou pour des applications à faible pression de vapeur saturée (moteurs d'avion, pompes à vide).

**Viscosité de l'huile** : La viscosité est le principal facteur qui affecte en premier la capacité d'une huile séparant les surfaces, qui varie considérablement avec la température, le taux de cisaillement, la pression ou l'épaisseur du film en contact. Plus l'huile est visqueuse, plus sa tendance à séparer les surfaces de contact est grande.

**Relation viscosité-pression** : La viscosité d'un lubrifiant augmente avec la pression. La loi de Barus la plus utilisée est appliquée cependant à des pressions inférieures à 0.5 GPa. Cette relation s'exprime :

$$\mu_p = \mu_0 \exp(\alpha_b p) \quad (I.1)$$

Le coefficient  $\alpha_b$ , appelé le coefficient de piézo-viscosité, peut aussi être obtenu expérimentalement par identification. Par ailleurs il peut être exprimé à partir de la structure moléculaire du lubrifiant. Différentes relations semi-empiriques peuvent permettre d'exprimer ce coefficient en fonction de constantes numériques et de la viscosité cinématique par exemple .

**Propriétés thermiques des lubrifiants** : Les trois propriétés thermiques essentielles des lubrifiants sont la chaleur spécifique (exprimée en  $J.kg^{-1}.K^{-1}$ ), la conductivité thermique ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ ), et la diffusivité thermique ( $m^2.s^{-1}$ ). Ces trois paramètres sont importants dans le dimensionnement du palier afin de s'assurer les températures de fonctionnement acceptables pour le bon fonctionnement.

**Additifs** : Un lubrifiant typique est composé de 95% d'huile de base et de 5% d'additifs. Ces additifs visent à corriger les propriétés des huiles.

Depuis les années 1940 de nombreux additifs ont été développés. Les objectifs principaux sont :

- ✓ améliorer les caractéristiques d'abrasion et de friction en apportant des composés pour l'adsorption et la lubrification haute pression.
- ✓ améliorer la résistance à l'oxydation.
- ✓ contrôler la corrosion et la contamination par produits de réaction, particules d'abrasion ou autres débris.
- ✓ limiter la décroissance de la viscosité à hautes températures.
- ✓ abaisser le point d'écoulement et inhiber la formation de mousse.

Les phénomènes liés à l'ajout d'additifs sont complexes, et de nombreuses affiliations sont possibles et encore étudiées à l'heure actuelle.

### **Huiles du type Poly-alpha-oléfine sans additifs :**

Les oléfines (ou alcènes) sont des chaînes d'hydrocarbures non saturés de formule générale  $(-CH_2-)$ . Ils consistent en un chaîne droite de carbones avec un carbone insaturé à la fin de la chaîne. Selon la longueur de la chaîne, on peut obtenir des lubrifiants de différentes viscosités. Ces huiles ont une forte résistance à l'oxydation, et ne sont ni toxiques ni corrosives.

#### **I.3.1. Lubrification hydrodynamique**

La lubrification hydrodynamique est un domaine important de la tribologie, c'est l'étude des contacts dans lesquels un film de fluide sépare les surfaces en présence. pour réduire le frottement et l'usure entre deux surfaces en mouvement relatif, il est commode de les séparer par un film fluide lubrifiant mince. Ce dernier peut-être un liquide ou un gaz (figure I.6). La charge supportée par le système étudiée est opposée aux effets de pression criées, soit par une source de pression extérieure, soit par le mouvement des surfaces.

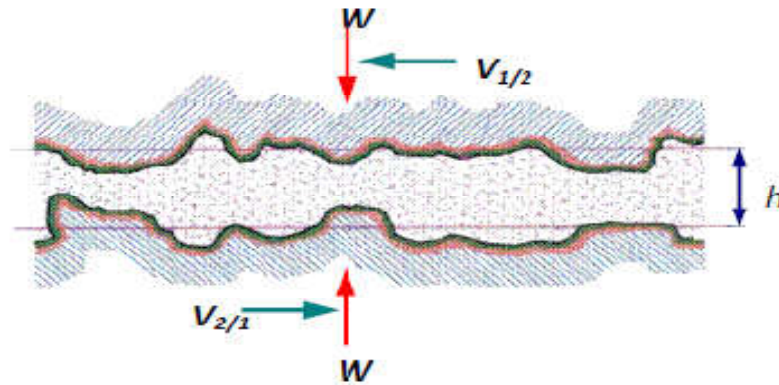


Figure I.6: Schéma d'un contact lubrifié.[36]

### I.3.2. Régimes de fonctionnement d'un contact lubrifié

La lubrification caractérise les conditions dans lesquelles l'arbre et le coussinet sont séparés par le lubrifiant. Il existe trois régimes de fonctionnement des paliers lisses qui dépendent, de la famille à laquelle ils appartiennent, des conditions d'utilisation (tr/min, T°C), du mode de lubrification ainsi que de la viscosité du lubrifiant. Leur spécificité repose sur l'existence d'un lubrifiant visqueux, en film complet ou non selon la nature et les propriétés du lubrifiant.

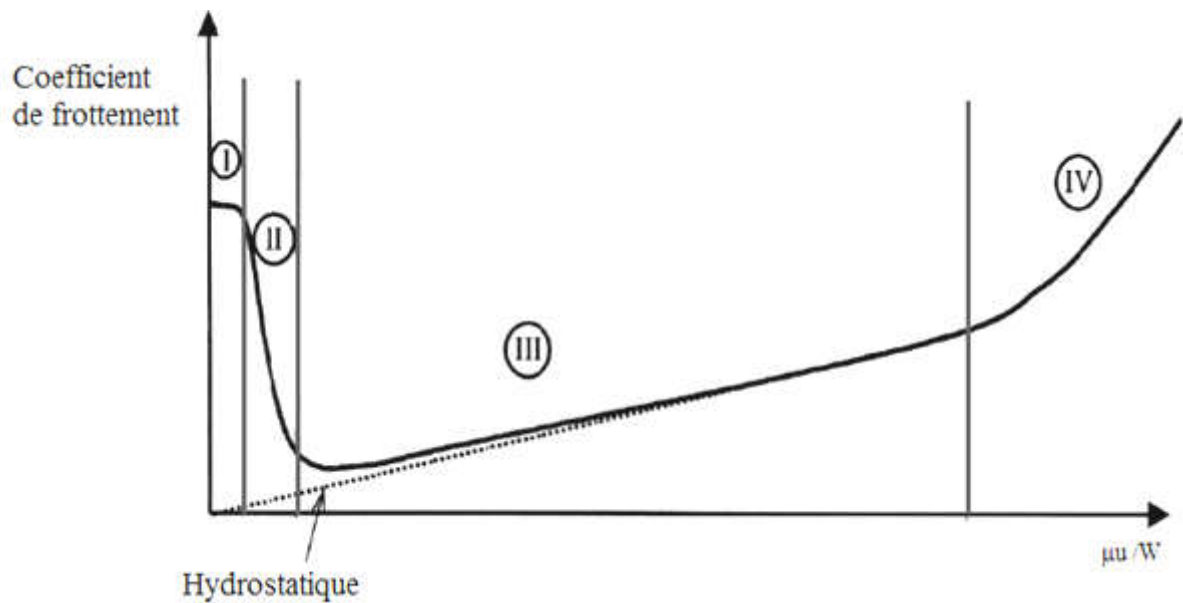
#### • Contacts lubrifiés

Historiquement c'est Richard Stribeck, en (1902) (figure I.7), qui le premier définit la relation qui existe entre le coefficient de friction d'un palier et l'épaisseur de film, puis ultérieurement avec la variable :

$$Z = \mu u / W \quad (\text{variable de Hershey}) \quad (I.2)$$

où  $Z$  : le coefficient de similitude,  $\mu$  : la viscosité dynamique du lubrifiant,  $u$  : la vitesse linéaire de l'arbre en rotation et  $W$  : la charge radiale exercée sur l'arbre.

Cette courbe définit quatre régimes de lubrification différents. La zone (I) correspond à la lubrification limite. La zone (II) présente la lubrification mixte, La zone (III) montre la lubrification hydrodynamique et la zone (IV) définit la lubrification hydrodynamique non laminaire. La ligne en trait discontinu, présente la lubrification hydrostatique qui peut être réalisée en régime laminaire ou non laminaire.



**Figure I.7:** Courbe de Stribeck [37]

La nature du fluide lubrifiant n'a pas été précisée car cette courbe peut être obtenue pour toutes sortes de fluides liquides ou gazeux et pas uniquement pour les huiles lubrifiants.

➤ **Régime limite zone (I)**

Le frottement est relativement important, le coefficient de frottement est compris entre 0.05 et 0.15, selon la nature du lubrifiant et les matériaux qui forment le contact direct, n'est utilisé que lorsqu'on recherche l'adhérence : freinage, embrayage, contact pneumatiques-sol, ... etc.

➤ **Régime mixte "onctueux" zone (II)**

Il est intermédiaire entre le régime limite et le régime de lubrifiant fluide hydrodynamique, tandis que l'effet hydrodynamique est insuffisant pour générer la pression hydrodynamique de sorte qu'il garantit complètement la séparation des surfaces et ainsi la charge appliquée est supportée à la fois par le fluide sous pression et la rugosité de surface.

➤ **Régime hydrodynamique zone (III)**

À haute vitesse, le film d'huile devient épais, la distribution de pression s'élargit jusqu'à la séparation totale des deux surfaces. Le frottement visqueux devient prépondérant et le coefficient de frottement augmente avec la vitesse. En

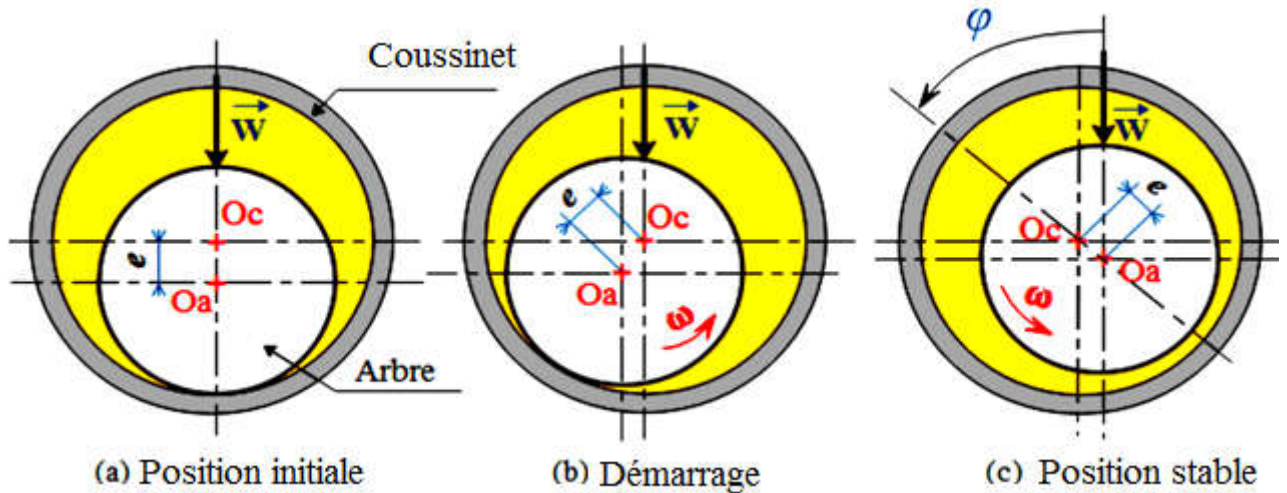
général en lubrification hydrodynamique, il y a une dissipation d'énergie dans le film qui se traduit par une force de friction ou un couple.

➤ ***La lubrification hydrodynamique non laminaire zone (IV)***

La description et la modélisation des régimes non laminaires en lubrification ont été développées entre les années 1960 et 1980 et conduit à une équation semblable à l'équation de Reynolds qui fait intervenir des coefficients ou des nombres de Reynolds caractérisant l'écoulement. L'épaisseur la plus faible du film d'huile ( $h_0$ ) varie entre 0.008 mm et 0.020 mm .

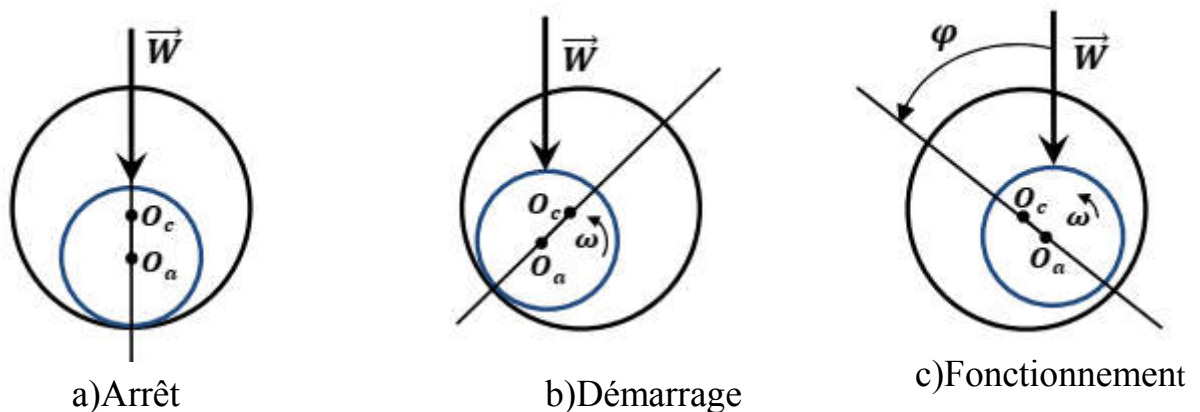
#### **I.4. Mode de guidage d'un palier hydrodynamique**

En fonctionnement normal il n'y a jamais contact métal sur métal entre l'arbre et le coussinet, sauf au démarrage. Un palier lisse hydrodynamique peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins. L'arbre généralement en acier de rayon  $R_a$  et le coussinet en bronze ou en acier régulé de rayon intérieur  $R_c$  et de longueur  $L$  et caractérisé par trois grandeurs: le jeu radial  $e$ , le rapport  $e/R$  (ou jeu relatif de l'ordre de  $10^{-3}$ ) et le rapport  $L/D$  de la longueur au diamètre du palier la (figure I.8) présente les trois phases que l'on observe lors de la mise en route d'un palier sous chargement. À l'arrêt, (figure I.8.a), l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance  $O_c O_a$  est égale au jeu radial  $e$ . Au démarrage, (figure I.8.b), l'arbre roule en glissement à l'intérieur de coussinet, le régime de lubrification est dit mixte, le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet. Dès que la vitesse de rotation devient suffisante, (figure I.8.c), il y a présence d'un champ de pression hydrodynamique qui supporte la charge Constante, le centre de l'arbre  $O_a$  occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet.



**Figure I.8:**Position d'un arbre dans un palier lisse hydrodynamique [38]

L'analyse vibratoire des paliers, nécessite d'étudier la trajectoire du centre de l'arbre (figure I.9), lorsque la sollicitation du contact augmente pour une charge faible, le palier est dit centré car l'excentricité est faible et donc l'arbre est centré dans l'alésage. Quand la charge augmente, le centre de l'arbre se déplace surtout radialement ce qui conduit à des angles de calage voisin de  $90^\circ$  (a). Ce n'est que pour des charges intermédiaires que l'arbre « descend » dans l'alésage ( $\varnothing 45$ ). Enfin, pour les charges très importantes, on obtient des angles de calage voisin de 0. Les faibles valeurs d'angle de calage  $\varphi \approx 0$  à  $10^\circ$ , doivent être étudiées avec attention car les épaisseurs de film d'huile sont faibles ce qui présente le risque d'atteindre le régime limite.



**Figure I.9:**Trajectoire du centre de l'arbre

Pour les valeurs importantes d'angle de calage,  $\varphi \approx 80^\circ$  à  $90^\circ$ , le film est épais mais le faible «enfoncement» de l'arbre dans le film d'huile favorise l'apparition d'instabilités latérales (vibrations à la moitié de la fréquence de rotation de l'arbre).

## I.5. Alimentation des paliers lisses

Lors de son fonctionnement, le palier lisse peut être immergé ou alimenté par un orifice ou rainure. La plupart des paliers lisses acceptent l'alimentation à travers la rainure et il existe également plusieurs types (hélicoïdaux circonférentiels, axiaux et autres), mais les rainures circonférentielles et axiales sont les plus couramment utilisées. La position et la forme des rainures d'alimentation et la pression d'alimentation affectent les caractéristiques de fonctionnement du palier à glissement.

### I.5.1 Position et forme des rainures d'alimentation

Il y a deux types classiques de rainures : les rainures axiales et les rainures circonférentielles.

#### • Les rainures axiales

Ce type de rainure permet de distribuer le lubrifiant suivant la longueur du palier est généralement employé pour des configurations admettant une charge fixe en direction (figure I.10). La position la plus favorable pour la rainure axiale, au point de vue du remplissage en huile, est souvent à  $90^\circ$  ou  $135^\circ$ , en amont de la charge. Si le sens de rotation n'est pas fixe, on peut placer deux rainures soit diamétralement opposées à  $90^\circ$  de la ligne de charge, soit à  $90^\circ$  l'une de l'autre et à  $135^\circ$  de la charge dans la zone d'épaisseur maximale du film. La position de la rainure axiale modifie très peu la valeur de la portante dès lors que cette rainure est située dans la partie supérieure du palier, mais elle peut influencer sur la valeur du couple de frottement .

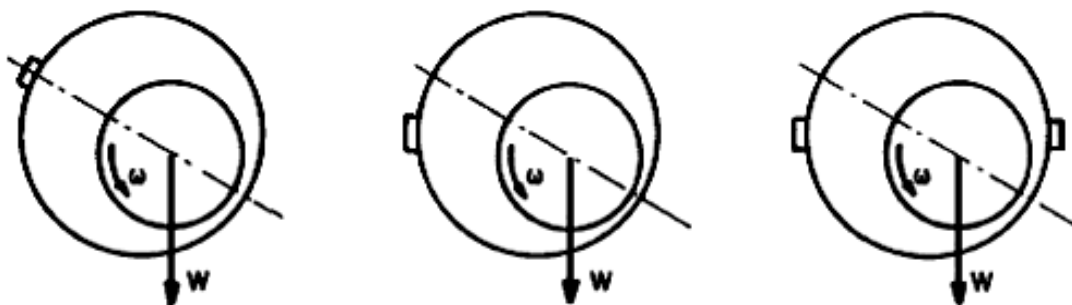


Figure I.10: Position des rainures axiale



### • *Les rainures circonférentielles*

Une rainure circonférentielle est généralement située dans la section médiane du palier, lorsque la charge est variable en direction (charge tournante par exemple). L'objectif d'une rainure d'alimentation circonférentielle est de jouer un rôle de réservoir réparti sur toute la circonférence. Ce type de rainure diminue considérablement la portance du palier, en pratique, la géométrie du palier, la forme et le positionnement des rainures peuvent être plus complexes et il existe des paliers qui comportent à la fois des rainures axiales et circonférentielles.

### **I.5.2 Rôle de la pression d'alimentation**

Une alimentation sous pression améliore la sécurité de fonctionnement du palier, car :

- Elle établit une circulation forcée du lubrifiant et augmente ainsi l'évacuation de l'énergie dissipée en frottement .
- Elle élimine les risques de cavitation en irriguant la zone inactive du palier. La valeur de la pression d'alimentation modifie tous les paramètres de fonctionnement du palier, cependant c'est le débit qui est le plus influencé :
  - ✓ Le débit augmente avec la pression d'alimentation.
  - ✓ Le couple de frottement augmente et tend vers une limite qui correspond à la valeur calculée pour un palier entièrement plein d'huile.
  - ✓ L'angle de calage augmente très légèrement, car il est fonction du couple.

L'influence de la pression d'alimentation sur la charge dépend de la forme de la rainure d'alimentation dans le cas d'une rainure axial et pour une excentricité donnée, la charge décroît légèrement lorsque la pression d'alimentation croît, dans le cas d'une rainure circonférentielle, la charge augmente avec la pression d'alimentation pour des excentricités relatives inférieures à 0,8 et décroît pour des excentricités plus importantes. En lubrification hydrodynamique, la portance peut caractériser la performance d'un contact lubrifié, la présence d'un épais film d'huile entre coussinet et pièce. Ce film d'huile se crée uniquement en régime permanent, et est dû au phénomène de portance. Une vitesse minimale est à atteindre pour que ce phénomène apparaisse, l'alimentation du film en huile doit toujours se faire dans les régions de moindre pression. La (figure I.11) montre la répartition de pression dans un palier.

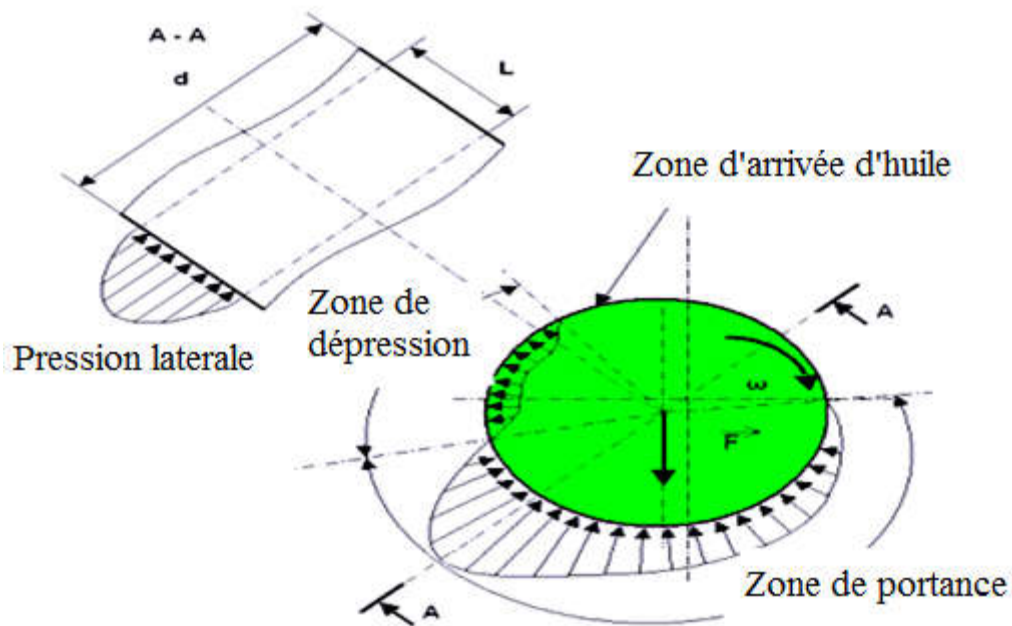


Figure I.11: Répartition de pression dans un palier lisse [39]

### I.5.3 Epaisseur de film

L'épaisseur du film lubrifiant est fonction croissante de la viscosité du lubrifiant, de la vitesse des surfaces et est inversement proportionnelle à la charge appliquée qui entraîne une déformation élastique des surfaces. Pour une épaisseur du film lubrifiant trop faible, il y a risque de contact des surfaces de l'arbre et du coussinet, pouvant conduire à une usure et à une destruction du palier. L'épaisseur du film doit être nettement supérieure à la somme des rugosités des surfaces rivales pour qu'un régime de fonctionnement hydrodynamique puisse s'établir.

Pour des conditions de fonctionnement usuelles les valeurs minimales d'épaisseur de film de lubrifiant sont précisées pour différents diamètres d'arbre (figure I.12). Ces valeurs ont été établies à partir des valeurs usuelles de rugosité et en prenant un rapport 3 entre la somme des valeurs des hauteurs totales des rugosités de l'arbre et du coussinet et l'épaisseur minimale du film .

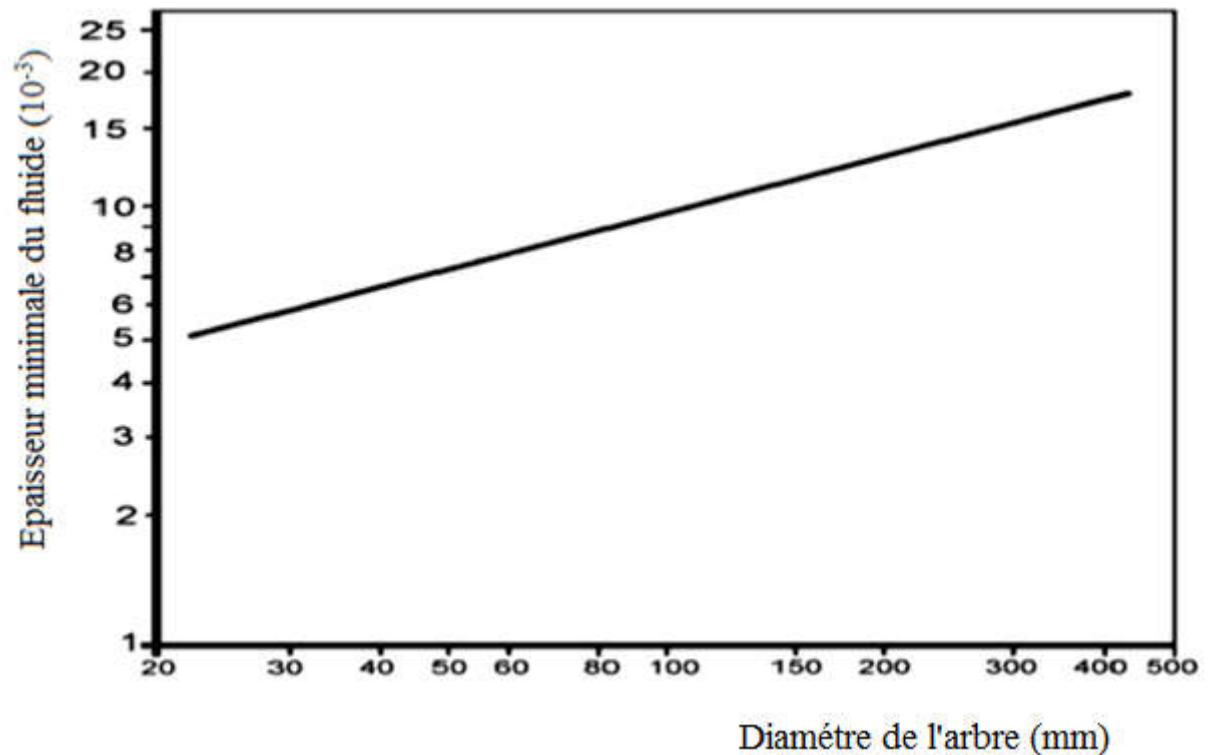


Figure. I.12: Valeurs acceptables d'épaisseur minimale [40]

#### I.5.4 Jeu diamétral

Un jeu trop important entraîne, pour des conditions de fonctionnement données, un accroissement de débit, ainsi qu'une réduction de l'épaisseur minimale du film lubrifiant. Par contre, une valeur trop faible du jeu implique une augmentation des pertes par frottement et peut entraîner lors du démarrage ou lors d'un changement de régime, une perte totale de jeu (serrage) dû aux dilatations différentielles. L'étude des variations des différentes caractéristiques du palier telles que l'épaisseur minimale du film, la puissance dissipée ou le débit en fonction du jeu, permet de fixer un jeu moyen et des tolérances de fabrication prenant en compte l'effet de la vitesse de rotation la (figure I.13).

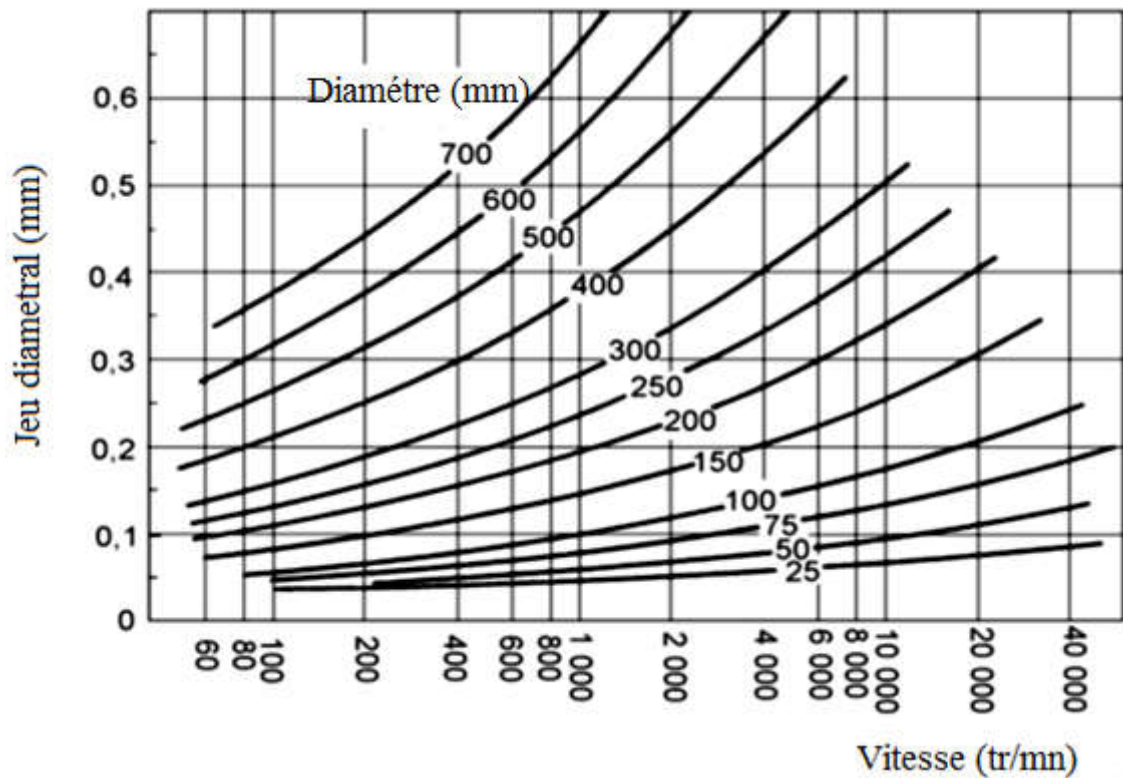


Figure. I.13: Valeur du jeu diamétrale en fonction de la vitesse [41]

## I.6. Limites de fonctionnement

Pour un palier donné, les conditions limites de charge et de vitesse de rotation sont précisées (figure I.14). Il est nécessaire de s'assurer qu'il fonctionne de façon satisfaisante.

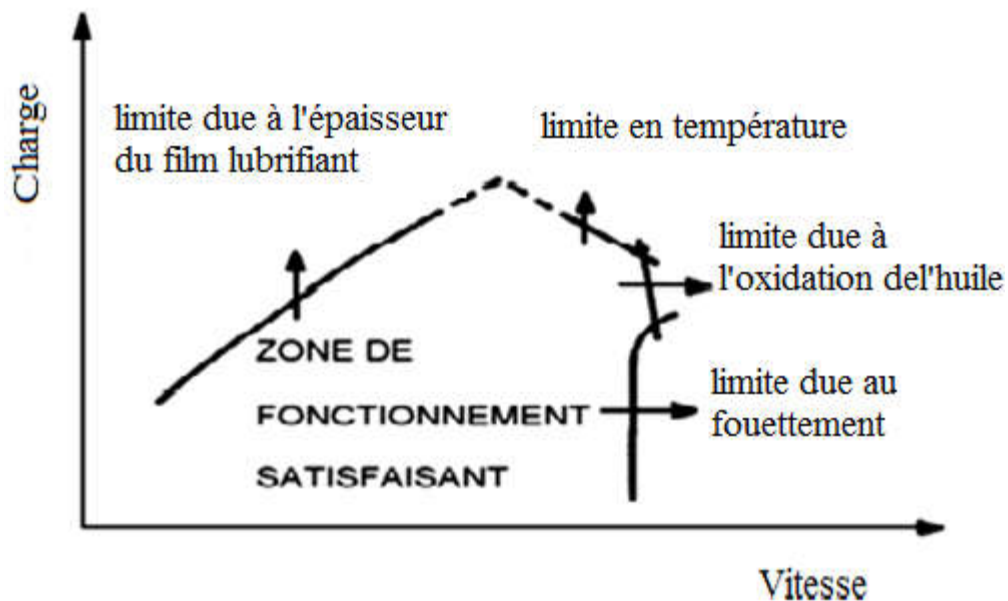


Figure I.14: Conditions limites de charge et de vitesse [42]

À faible vitesse et à charge élevée, il y a risque de contact entre l'arbre et le coussinet dû à une épaisseur trop faible du film du lubrifiant. À vitesse et à charge élevées, il y a possibilité de fluage soumis à des températures et des pressions trop importantes. Pour des vitesses plus élevées et une charge faible "le fouettement" où la fréquence coïncide avec la vitesse critique correspondant à la première pulsation propre du rotor conduit généralement à des niveaux d'instabilités inacceptables.

## **I.7. Conclusion**

Après la description générale de la lubrification qui reste un élément primordial pour assurer le bon fonctionnement des éléments d'une machine. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux paliers hydrodynamiques et leurs principales caractéristiques de fonctionnement et mode de guidage.

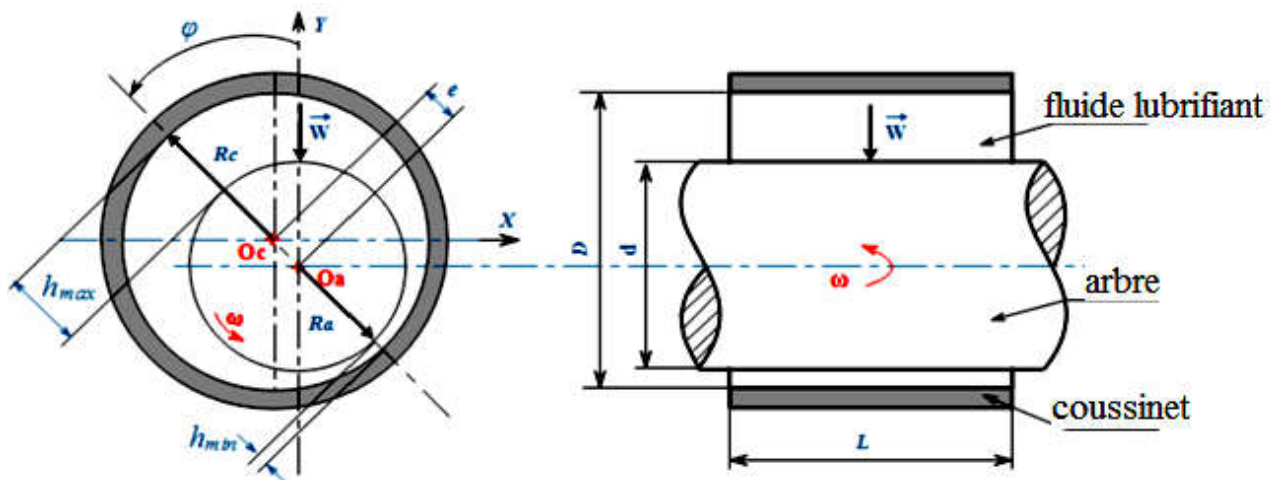
## CHAPITRE II

# *Équations de base dans les contacts lubrifiés*

II.1 Introduction .....	27
II.2 Équations de base de la lubrification .....	28
II.3 Modélisation de l'écoulement de Reynolds.....	28
II.4. Hypothèses de la lubrification hydrodynamique .....	30
II.5. Équations générales de la lubrification hydrodynamique .....	30
II.6. Equation de Reynolds en lubrification.....	32
II.7. Conditions aux limites.....	34
II.7.1. Conditions de Sommerfeld.....	35
II.7.2. Conditions de GUMBEL.....	35
II.7.3. Conditions de Reynolds (SWIFT-STAIKER) .....	36
II.8. Conclusion.....	37

## II.1 Introduction

Les paliers hydrodynamiques sont des organes de machines tournantes séparés par un film mince de fluide. Un palier hydrodynamique est constitué d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet fixe, séparé de celui-ci par un film de fluide lubrifiant. Lors du mouvement l'arbre présente un certain excentrement par rapport au coussinet, il forme ainsi un convergent et un divergent dans le fluide. La rotation de l'arbre entraîne le fluide dans le coin convergent et crée un gradient de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge et l'équilibre (figure II.1).



**Figure II.1:** Schémas des principaux paramètres du palier hydrodynamique [43]

Les principaux paramètres qui participent dans la définition de ces paliers sont nombreux dont on peut citer :

- Les paramètres géométriques : diamètre, longueur, jeu radial.
- Les paramètres cinématiques : vitesse de rotation, charge.
- Les paramètres dynamiques : charge variable, mode de rotation (continu ou alternatif), vibrations....
- Les paramètres caractéristiques du lubrifiant : viscosité dynamique, masse volumique, chaleur spécifique.

Dans la majorité des cas, la charge, la vitesse de rotation et le diamètre de l'arbre sont les données les plus significatives pour la sélection du palier. Il ne faut toutefois pas oublier que d'autres données peuvent aussi influencer le choix du palier. Ce sont par exemple : la fréquence de démarrage, la durée des périodes d'arrêt, la charge au démarrage, la température ambiante, etc.

## II.2 Équations de base de la lubrification

Les équations de base de la théorie de lubrification sont basées sur les équations générales de la mécanique des milieux continus. Ces derniers sont représentés par les trois lois de conservation (conservation de masse, conservation de la quantité du mouvement et la conservation de l'énergie). en tenant compte de quelques hypothèses propres aux problèmes de lubrification. Les hypothèses de départ sont:

- le milieu fluide est supposé continu.
- le fluide est supposé Newtonien.

## II.3 Modélisation de l'écoulement de Reynolds

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien permettent de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince. Sur la base des équations de Navier-Stokes, cette théorie est mise en équation par O. Reynolds en 1886[44], elle permet le calcul de la répartition de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant, et constitue ainsi la base de la théorie de la lubrification actuelle.

Les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus :

### 1. Loi de conservation de la masse (continuité) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{II.1})$$

Dans le cas particulier d'un écoulement permanent des fluides incompressibles homogènes, l'équation (II.1) devient [45]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Où  $u_i$  : composantes de la vitesse d'écoulement dans la direction  $x_i$

$\rho$  : masse volumique du fluide.

### 2. Loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{II.3})$$



En utilisant l'hypothèse d'incompressibilité(en négligeant les forces massiques)

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$x_i, t$  : variables d'espace et de temps

$f_i$  : force de volume

$p$  : pression hydrodynamique

$\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes (symétrique)

### 3. Loi de comportement rhéologique

Loi de comportement rhéologique pour un fluide newtonien s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Où } \tau_{ij} = \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad k=1,2,3$$

Pour un fluide iso-volume ou incompressible :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{II.6})$$

$P$ : pression hydrodynamique

$\delta_{ij}$ :symbole de Kronecker

$\lambda$  : Coefficient de viscosité de dilatation du fluide

$\mu$ : coefficients de viscosité dynamique

$D_{ij}$  :Tenseur des taux de déformation

**Remarque :** Le régime d'écoulement étant isotherme, on ne tient donc pas compte de l'équation de conservation d'énergie.

En reportant l'équation de comportement rhéologique (II.6) dans l'équation de la dynamique (II.4), on obtient les équations de mouvement du fluide newtonien appelées équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.7})$$

## II.4. Hypothèses de la lubrification hydrodynamique

Dans ce contexte, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été adoptées pour aboutir à l'équation de Reynolds qui gouverne le problème de lubrification hydrodynamiques sont rappelées par Frêne et al[46].

1. Le milieu est continu : l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film.
2. Le fluide est newtonien : il y a proportionnalité entre le taux de cisaillement et les contraintes de cisaillement dans le film.
3. L'écoulement est laminaire : dans le cas contraire, il faudra utiliser une équation autre que l'équation de Reynolds.
4. Les forces massiques extérieures dans le fluide sont négligeables.
5. Les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression.
6. Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact : ainsi, sur les parois, la vitesse du fluide est égale à celle des parois.
7. l'épaisseur de film lubrifiant est petite devant la largeur et la longueur du film fluide, que le rayon de courbure des parois est grand devant l'épaisseur moyenne de film.
8. La viscosité, la température et la masse volumique du fluide ne varient pas à travers l'épaisseur du film et dans le temps.
9. La masse volumique du fluide est constante, ce qui, en lubrification hydrodynamique, est pratiquement le cas pour tous les liquides.

## II.5. Équations générales de la lubrification hydrodynamique

L'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux s'effectue à partir des équations qui décrivent le comportement des milieux continus [47]et[48]. En tenant compte des conditions géométriques et cinématiques d'un écoulement en film mince. L'équation généralisée de l'écoulement des films minces visqueux se réduit à l'équation de Reynolds :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\rho(u_1 - u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(w_1 - w_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ 6h \frac{\partial}{\partial x} (\rho(u_1 + u_2)) + 6h \frac{\partial}{\partial z} (\rho(w_1 + w_2)) + 12\rho v_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

où  $u_1, u_2, v_2, w_1, w_2$  sont les vitesses de surfaces (1) et (2) (figure II.2) selon les axes  $x, y, z$  ;  $h$  : est l'épaisseur du film ;  $p$  : la pression hydrodynamique ;  $\mu$  : est la viscosité dynamique du lubrifiant ;  $\rho$  : est la masse volumique du lubrifiant.

En régime permanent le terme  $12h \frac{\partial \rho}{\partial t}$  est nul dans l'équation de Reynolds :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\rho(u_1 - u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(w_1 - w_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ 6h \frac{\partial}{\partial x} (\rho(u_1 + u_2)) + 6h \frac{\partial}{\partial z} (\rho(w_1 + w_2)) + 12\rho v_2 \end{aligned}$$

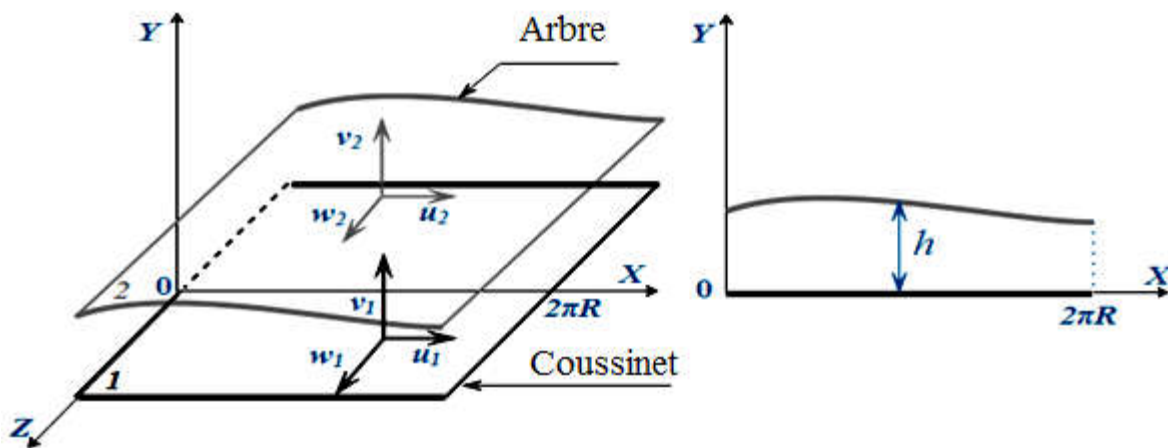


Figure II.2 :Système d'axes en coordonnées cartésiennes pour un palier développé

Les composantes de la vitesse du fluide s'écrivent :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} u_1 + \frac{y}{h} u_2 \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} w_1 + \frac{y}{h} w_2 \\ v = -\int_0^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

De ces relations les contraintes dans le fluide s'écrivent :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} (2y - h) + (u_2 - u_1) \frac{\mu}{h} \\ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} (2y - h) + (w_2 - w_1) \frac{\mu}{h} \end{cases} \quad (II.10)$$

### II.6. Équation de Reynolds en lubrification

Considérons une section droite du palier est constitué par deux cercles de rayons voisins (figure II.3). d'un coussinet, de centre  $O_c$ , de rayon  $R_c$ , et d'un arbre de centre  $O_a$  et de rayon  $R_a$ . Sous l'action de la charge  $W$ , les centres  $O_c$  et  $O_a$  ne coïncident pas. La distance  $O_c O_a$  est l'excentricité absolue  $e$ . Un point  $M$  appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire  $\theta = (\overrightarrow{o_c A}, \overrightarrow{o_c M})$ , l'épaisseur du film lubrifiant qui sépare les surfaces de l'arbre et du coussinet est donnée par :

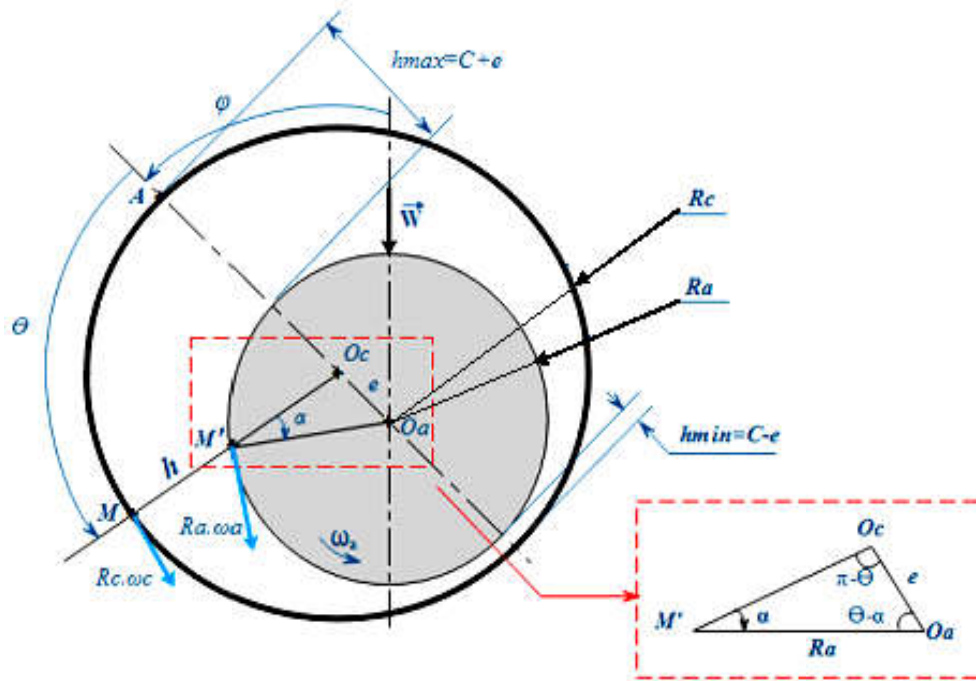


Figure II.3 : Section droite du palier [43]

$$h = O_c M - O_c M' \quad \text{alors : } h = R_c - O_c M' = (R_a + C) - O_c M'$$

En appliquant la règle des sinus au triangle  $O_a M' O_c$ , il vient :

$$\frac{O_a M'}{\sin(O_a O_c M')} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{O_c M'}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin \theta}$$

$$\sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta, \quad O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(O_a O_c M')$$

$$\begin{aligned}
D'o\grave{u} \quad \theta - \alpha &= \theta - \sec^{-1} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right), O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin \left( \theta - \sec^{-1} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right) \right) \\
\sin \left( \theta - \sec^{-1} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right) \right) &= \sin \theta \cos \left[ \sec^{-1} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right) - \cos \theta \sec^{-1} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right) \right] \\
\cos \theta \sec^{-1} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right) &= \sqrt{1 - \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2} \\
\sin \left( \theta - \sec^{-1} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right) \right) &= \frac{e}{R_a} \sin \theta \\
\sin \left( \theta - \sec^{-1} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right) \right) &= \sin \theta \sqrt{1 - \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2} - \frac{e}{R_a} \sin \theta \cos \theta \\
O_c M' &= R_a \sqrt{1 - \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2} - e \cos \theta
\end{aligned}$$

La quantité  $\frac{e}{R_a}$  est très petite devant l'unité (de l'ordre  $10^{-3}$ ) donc on peut négliger le

terme  $\frac{e}{R_a} \sin \theta$  devant 1. On obtient :  $h = R_c - R_a + e \cos \theta = C \left( 1 + \frac{e}{C} \cos \theta \right)$

En posant l'excentricité relative  $\varepsilon = \frac{e}{C}$  variant de 0 à 1, l'expression devient:

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (\text{II.11})$$

Avec :  $C$  le jeu radial,  $\varepsilon$  L'excentricité relative défini par  $\varepsilon = e/C$ .

En coordonnées cartésiennes (figure II.2), les conditions cinématiques relatives aux surfaces d'un palier lisse cylindrique de longueur finie travaillant en régime stationnaire établi, s'écrivent :

Dans ce cas les conditions aux limites des vitesses de paroi seront :

**Sur la paroi 1 (le coussinet)**, pour  $y = 0$  :  $u_1 = u_c = 0$  ;  $v_1 = v_c = 0$  ;  $w_1 = w_c = 0$ .

**Sur la paroi 2 (l'arbre)**, pour  $y = h$  :  $u_2 = u_a$  ;  $v_2 = v_a$  ;  $w_2 = w_a = 0$ .

En introduisant ces conditions dans l'équation de Reynolds généralisée se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\rho (u_c - u_a) \frac{\partial h}{\partial x} + 12\rho v_a \quad (\text{II.12})$$

Ces conditions cinématiques relatives aux surfaces de l'arbre et du coussinet s'écrivent compte tenu de la (figure II.3):

$$\begin{cases} u_c = R_c \omega_c \\ v_a = R_a \omega_a \sin \alpha \\ u_a = R_a \omega_a \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Tel que  $\alpha$ , l'angle entre  $O_cM'$  et  $O_aM'$  ; représente la pente de la courbe  $h(x)$  :

$$\tan \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{1}{R_a} \frac{dh}{d\theta} = -\frac{e}{R_a} \sin \theta \quad (\text{II.14})$$

La quantité  $e/Ra$  étant très petite devant 1, il est possible d'effectuer un

développement limité d'ordre 1 :  $\cos \sim 1$  ;  $\sin \alpha \sim \alpha$  et  $tg \alpha = dh / dx$  (II.15)

En reportant l'expression les vitesses des surfaces (II.13) dans l'équation de Reynolds (II.12), et si on pose  $\omega_c = 0$  ;  $\omega = \omega_a$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial P}{\mu \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial P}{\mu \partial z} \right) = 6 \frac{\partial}{\partial x} (R_a \omega) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{II.16})$$

Avec :  $p$  : la pression ;  $h$  : l'épaisseur du film d'huile ;  $R_a$  : le rayon de l'arbre ;  $\omega$  : la vitesse de rotation de l'arbre ;  $\mu$  : la viscosité dynamique.

En adoptant  $u = R_a \omega$  dans l'équation (II.16) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \mu u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{II.17})$$

## II.7. Conditions aux limites

Le choix des conditions aux limites fait partie intégrante de la qualité du modèle. Il est alors nécessaire de préciser les conditions aux limites du domaine de film lubrifiant. Dans le cas d'un palier lisse, les hypothèses de palier court [49],[50] et les hypothèses de palier long [51], un palier de longueur finie [52],[53]. De nombreux travaux ont été faite pour obtenir un choix judicieux de ces condition, où la méthode des éléments finis a été employée, on trouve les travaux de Booker . A et al[55] [54], Childs et al.[55], Sorsimo et al.[56], Raghavendra et al[57]. Les travaux de Gertzos et al [58], Deligant et al [59] et Tiwari et al.[60] ont utilisé les logiciels de CFD basés sur la méthode des volumes finies comme FLUENT, ANSYS pour analyser les performances et la stabilité des paliers lisses. Ces conditions donnent une bonne approximation de l'équation de Reynolds et pour calculer le champ de pression, il faut résoudre l'équation de Reynolds .

Dans ce contexte trois types de condition ont été proposées pour résoudre l'équation de Reynolds dans le cas d'un palier hydrodynamique en fonctionnement stationnaire, notons :

### II.7.1. Conditions de Sommerfeld

Sommerfeld en 1904 [61] a supposé que le film lubrifiant est continu sans possible rupture, la pression reste toujours positive. Ceci n'est valable que pour les paliers fonctionnant à de très faibles charges ou avec des pressions d'alimentation importantes. Le champ de pression obtenu après résolution est antisymétrique  $\theta = \pi$  (figure. II.4).

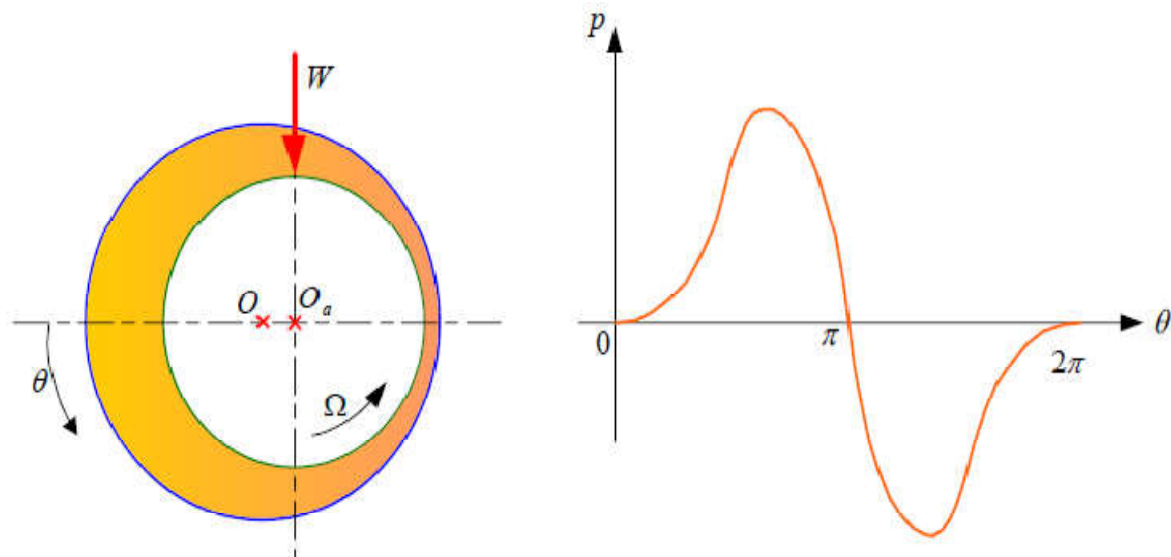


Figure II.4: Conditions aux limites de Sommerfeld

### II.7.2. Conditions de GUMBEL

GUMBEL en 1921 [62] (figure II.5), a proposé de négliger les pressions inférieures à la pression atmosphérique. Dans ces zones on prend pour pression une valeur constante (en général la pression atmosphérique). Cette approche a le défaut majeur de ne pas respecter la conservation de débit. Cependant, cette méthode donne des résultats souvent proches des résultats expérimentaux. On a donc :

$$\begin{cases} P(\theta = 0, z) = 0 \\ P(\theta = \pi, z) = 0 \\ P(\theta, z) = 0 \text{ pour } \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

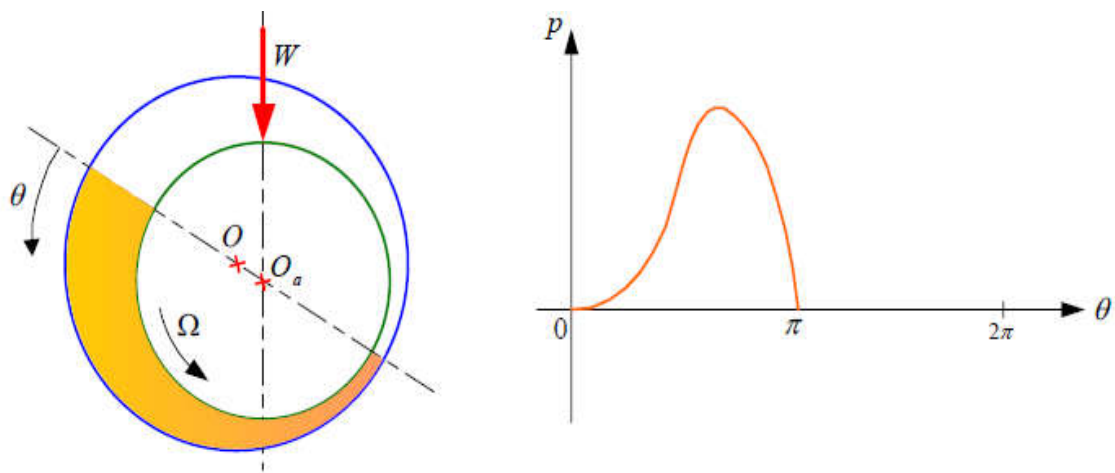


Figure II.5: Conditions aux limites de Gumbel

### II.7.3. Conditions de Reynolds (SWIFT-STAIKER)

Ces conditions proposées indépendamment par Swift en 1932 et par Steiber en 1933[63], dans ces conditions, Le débit de lubrifiant est considéré continu dans le palier. Ainsi pour une abscisse circonférentielle donnée la pression et le gradient s’annulent (figure II.6). On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\theta = 0, z) = 0 \\ P(\theta = \theta_s, z) = 0 \\ P(\theta, z = 0) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta = \theta_s, z) = 0 \\ P(\theta, z) = 0 \text{ pour } \theta_s < \theta < 2\pi \end{array} \right. \quad \text{(II.19)}$$

Avec  $\theta_s$  et une région inactive à pression nulle.

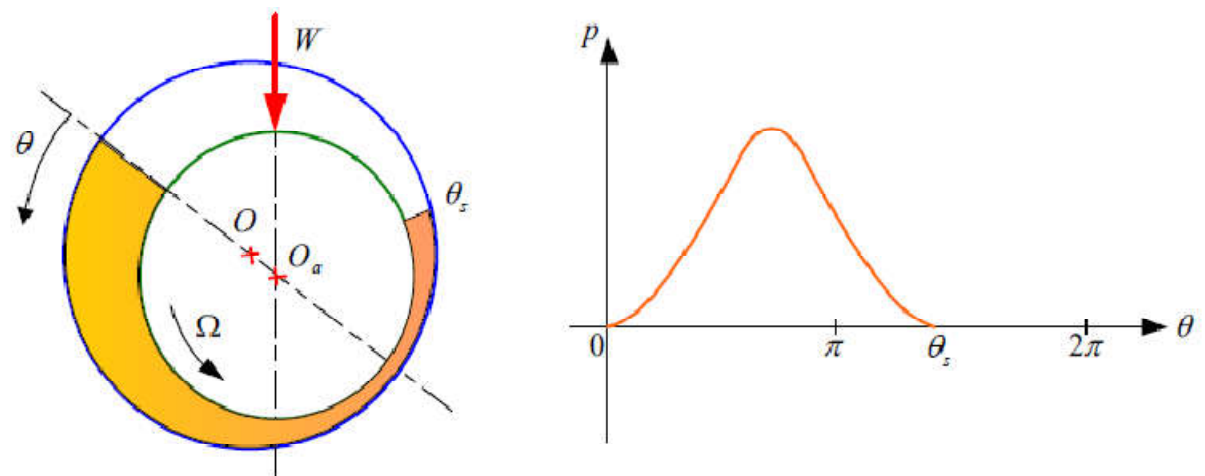


Figure II.6: Conditions aux limites de Reynolds.



Tenant compte de ces hypothèses qui ont été appréciées dans de nombreuses études expérimentales et qui donnent les solutions les plus exactes pour la résolution de l'équation de Reynolds en se basant sur la séparation des zones actives et inactives.

Une région active où la pression est positive et le film complet, pour des valeurs de  $\theta$  comprises entre 0 et  $\theta_s$  et une région inactive à pression nulle et dans laquelle en régime dynamique, peut apparaître de la cavitation, pour  $\theta_s < \theta < 2\pi$ .

### **II.8. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail les lois fondamentales de la théorie des milieux continus, à savoir les lois de: conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement, loi de comportement rhéologique pour un fluide newtonien en vue de décrire l'écoulement d'un fluide sur la base de cette théorie, nous avons dérivé une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire appelée équation de Reynolds modifiée qui sera utilisée dans notre travail.

*Étude de la stabilité  
des paliers hydrodynamiques*

<b>III.1. Introduction.....</b>	<b>39</b>
<b>III.2. Dynamique des rotors et vibrations.....</b>	<b>39</b>
<b>III.3. Caractéristiques et performances dynamiques .....</b>	<b>40</b>
III.3.1. Caractéristiques statiques .....	41
III.3.2. Caractéristiques dynamiques.....	42
<b>III.4. Équations du mouvement .....</b>	<b>44</b>
<b>III.5. Effet de tourbillon sur le mouvement rotatif des arbres .....</b>	<b>47</b>
<b>III.6. L'instabilité des paliers hydrodynamiques .....</b>	<b>51</b>
III.6.1. Phénomène de tourbillonnement et fouettement d'huile.....	53
III.6.2. le balourd et le tourbillon d'huile .....	54
III.6.3. Tourbillon à demi-fréquence.....	55
III.6.4. Vitesse d'apparition de l'instabilité .....	57
III.6.5. Stabilité des systèmes linéaires.....	58
<b>III.7. Stabilité d'un rotor rigide .....</b>	<b>60</b>
III.7.1. Vitesse et fréquence de tourbillonnement d'huile .....	60
III.7.2. Masse critique du rotor .....	63
<b>III.8. Vitesse critique de rotation .....</b>	<b>65</b>
<b>III.9. Etude de la stabilité .....</b>	<b>66</b>
<b>III.10. Conclusion .....</b>	<b>71</b>

### III.1. Introduction

La connaissance du comportement dynamique des paliers hydrodynamiques est indispensable pour la conception des machines tournantes, compte tenu des difficultés rencontrées pour la détermination expérimentale des caractéristiques de ce type d'appuis, des approches théoriques ont été envisagées. Les coefficients de film d'huile sont les principales caractéristiques dynamiques du paliers permettant de modéliser les vibrations des paliers pour la recherche des instabilités de fonctionnement, des vitesses critiques et de la réponse vibratoire des arbres aux excitations dynamiques pour le calcul des coefficients de rigidités et d'amortissements. Pour déterminer ces coefficients, cela conduit à la résolution simultanée de l'équation de Reynolds :

- L'équation hydrodynamique de Reynolds qui définit le comportement du fluide .
- L'équation géométrique qui définit l'épaisseur du film lubrifiant.

Dans ce chapitre, on va développer et présenter de façon détaillée les équations de base et les relations permettant de calculer les paramètres de stabilité.

### III.2. Dynamique des rotors et vibrations

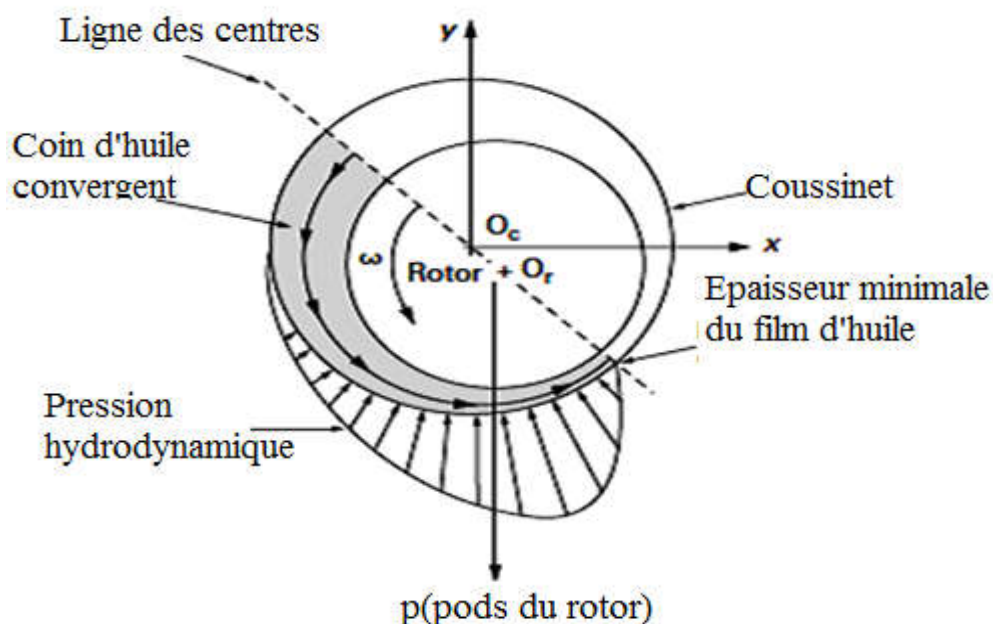
Les rotors peuvent être excités, dans les directions axiales, radiales, ou en torsion par rapport à son axe de rotation. En plus, des vibrations apparaissent aussi au niveau des supports de guidage (que l'on nomme paliers), ou au niveau des fluides qui entourent le système en rotation, les effets de vibrations sont accentués dans ces configurations, et les conséquences mécaniques indésirables peuvent devenir de plus en plus dangereuses. C'est pourquoi il est nécessaire de mieux comprendre les phénomènes vibratoires et leurs interactions pour les applications à vitesses de rotation élevées [64].

En général, l'arbre ne doit pas se déformer radialement sous l'effet de la pression générée au sein du fluide. De plus, sa flèche doit être limitée pour des raisons d'alignement et de concentricité des paliers. Vis-à-vis de cette déformation en flexion pendant la sollicitation, on distingue deux types d'arbres [65],[66] :

- **les rotors rigides**, dont la flèche ne change pas avec la vitesse de rotation et l'excitation, ou du moins sa déformation étant négligée dans la plage de fonctionnement de la machine ; leurs premiers modes de résonance sont identifiés à de très hautes fréquences par rapport à la fréquence d'excitation du système ; l'arbre ne subit pas de déformation et se déplace uniquement selon des mouvements de corps rigides.
- **les rotors flexibles**, qui vibrent de façon importante avec la sollicitation dynamique de la machine ; en général il s'agit de rotors ayant une fréquence de résonance de l'ordre de grandeur de la fréquence d'excitation .

### III.3. Caractéristiques et performances dynamiques

Les turbomachines à haute vitesse de rotation sont généralement équipées de paliers hydrodynamiques, dont le fonctionnement est représenté selon la (figure III.1).[67]



**Figure III.1:** Fonctionnement d'un palier hydrodynamique[67]

Le film d'huile, créé par la rotation de l'arbre à l'intérieur du palier, génère une rigidité et un amortissement visqueux dont les caractéristiques doivent être déterminées avec le plus grand soin. Les paramètres de rigidité et d'amortissement d'un palier sont fonction de la charge appliquée par le rotor,

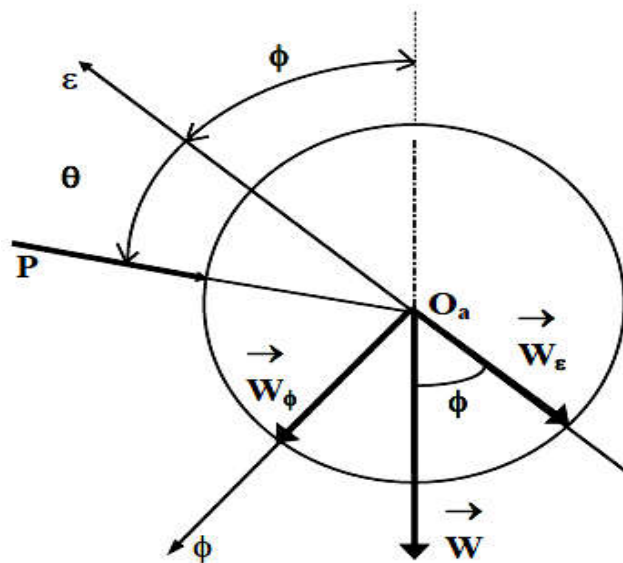
ainsi que de la vitesse de rotation qui influent directement sur l'épaisseur du film d'huile.

### III.3.1. Caractéristiques statiques

Les caractéristiques statiques sont déterminées à partir du champ de pression calculé à partir de l'équation de Reynolds sans tenir compte du terme transitoire. On peut citer ici : le champ de pression dans le film fluide, la charge supportée par le palier ainsi que l'angle d'attitude de ce palier[68] [68].

#### •La Charge

Le palier doit être capable de supporter la charge induite par le rotor et son mouvement. La charge, supportée par le palier est égale à la résultante des forces de pression effectives sur l'arbre. Elle est obtenue par l'intégration du champ de pression dans le film fluide sur toute la surface du contact. Comme le palier n'est pas un contact plan, on projette la pression sur les axes  $O_a \varepsilon$  et  $O_a \phi$  (figure III.2).



**Figure.III.2:** Schématisation des composantes de la charge

Les expressions des composantes  $W_\varepsilon$  et  $W_\phi$  de la charge dans les directions de  $\varepsilon$  et  $\phi$  respectivement (le repère lié à la ligne des centres) s'expriment par :

$$W = \int_A P dA \quad (III.1)$$

$$\begin{cases} W_\varepsilon = -\int p \cos \theta ds \\ W_\phi = -\int p \sin \theta ds \end{cases} \quad \text{(III.2)}$$

La valeur de la pression étant nulle dans la zone inactive du film, on écrit :

$$\begin{cases} W_\varepsilon \\ W_\phi \end{cases} = \mp \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{\theta_s} p \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} R d\theta dz \quad \text{(III.3)}$$

$\phi$ - Angle d'attitude appelé aussi angle de calage. Il représente l'angle compris entre la ligne des centres et la direction de la charge. Cet angle est donné par l'expression suivante :

$$\phi = \text{arctg} \frac{W_\varepsilon}{W_\phi} \quad \text{(III.4)}$$

### III.3.2. Caractéristiques dynamiques

Le type d'étude dynamique le plus répandu est basé sur l'approche linéaire (figure III.3). La détermination des coefficients dynamiques du palier permet de déterminer la stabilité du point de fonctionnement considéré. Alors que la charge appliquée à l'arbre est toujours dirigée dans le sens vertical. Il est doté de composantes de rigidité et d'amortissement directes et croisées variables en fonction de nombre de Sommerfeld (S) et de L'excentricité relative ( $\varepsilon$ ). C'est l'étude des valeurs de ces coefficients qui va nous permettre de fixer les seuils de stabilité.

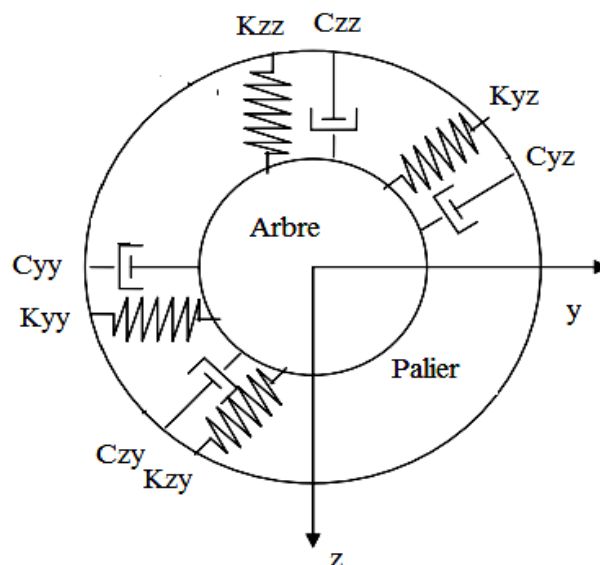


Figure III.3: La représentation physique des coefficients dynamiques d'un palier hydrodynamique.

Les relations liant les forces hydrodynamiques aux déplacements et vitesse du centre de l'arbre sont non linéaires et dépendent des conditions du chargement. En évaluant les coefficients linéaires et en se mettant dans l'hypothèse de petits déplacements et de petites variations de vitesse autour de la position d'équilibre (voir figure III.4). Les forces additionnelles  $F_y$  et  $F_z$  sont des fonctions non linéaires des déplacements  $y$  et  $z$  de centre de journal, et ses composants  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$  de vitesse sont:

$$F_y = F_y(y, z, \dot{y}, \dot{z}), F_z = F_z(y, z, \dot{y}, \dot{z})$$

Ainsi nous pouvons exprimer les forces de palier comme une expansion de série de Taylor [70] autour de la position du coussinet comme dans les équations suivantes :

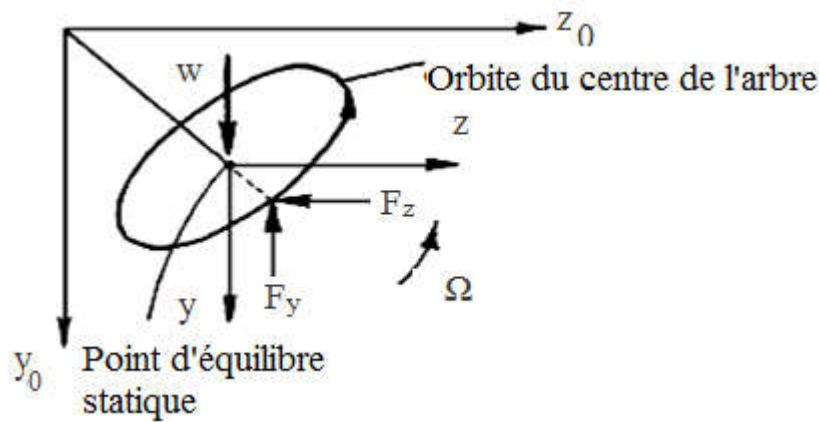


Figure.III.4: Forces de réaction des paliers lisses.

$$\begin{aligned} F_y &= F_{y_0} + k_{yy}y + k_{yz}z + c_{yy}\dot{y} + c_{yz}\dot{z} \\ F_z &= F_{z_0} + k_{zy}y + k_{zz}z + c_{zy}\dot{y} + c_{zz}\dot{z} \end{aligned} \tag{III.5}$$

Les composants statiques de force de réaction sont :

$$F_{y_0} = W \text{ et } F_{z_0} = 0$$

Les huit coefficients des composants de force sont calculés comme des gradients en position d'équilibre statique :

$$(y = z = \dot{y} = \dot{z})$$

$$\begin{aligned} k_{yy} &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_0, k_{yz} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)_0, k_{zy} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} \right)_0, k_{zz} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)_0 \\ c_{yy} &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_0, c_{yz} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{z}} \right)_0, c_{zy} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial \dot{y}} \right)_0, c_{zz} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial \dot{z}} \right)_0 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Les forces de film fluide sont des fonctions générales des déplacements et des vitesses de centre de l'axe. On le suppose soumis au petit mouvement d'amplitude  $c$ .-à-d., les déplacements dynamiques de l'axe sont moins que le dégagement de palier.

Sous la forme de matrice, l'équation (III.5) peut être écrite :

$$\begin{Bmatrix} F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Les incréments de la force de film due à de petits mouvements autour de la position de l'équilibre statique sont exprimés en termes des coefficients de rigidité et des coefficients d'amortissement :

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = [K^b] \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + [C^b] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Les coefficients sans dimensions de rigidité sont définis comme :

$$[K^b] = \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} = \frac{C}{W} [k^b] \quad (\text{III.9})$$

Tandis que les coefficients d'amortissement sans dimension sont définis comme:

$$[C^b] = \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} = \frac{C \Omega}{W} [c^b] \quad (\text{III.10})$$

$K_{ij}$  et  $C_{ij}$  correspondent respectivement aux rigidités et aux amortissements dus, à l'existence du film lubrifiant. Le premier indice indique la direction de la force, le second celle du déplacement (ou vitesse de déplacement).

Les composantes dynamiques adimensionnées sont :

$$k_{ij} = K_{ij} \frac{C}{W} \quad c_{ij} = C_{ij} \frac{C \Omega}{W} \quad i, j = z, y \quad (\text{III.11})$$

qui correspondent aux rigidités et aux amortissements dus au film d'huile.

### III.4. Équations du mouvement

Les équations du mouvement pour le système rotor-palier sont obtenues sous la forme des équations différentielles en second ordre, en utilisant la méthode de Lagrange. Plusieurs méthodes sont possibles pour trouver l'équation du mouvement, la méthode la plus simple consiste à exprimer directement l'équilibre



dynamique de toutes les forces agissant sur la masse  $m$  qui sont le chargement appliqué  $f(t)$  et les forces engendrées par le mouvement [70]. d'où l'équation différentielle :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad \text{(III.12)}$$

Avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} [K + K_{yy}] & [K_{yz}] \\ [K_{zy}] & [K + K_{zz}] \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{yy}] & [C_{yz}] \\ [C_{zy}] & [C_{zz}] \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} [0] & [g] \\ [-g] & [0] \end{bmatrix} \quad \text{(III.13)}$$

$$\{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{Y}\} \\ \{\dot{Z}\} \end{Bmatrix}, \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{Y}\} \\ \{\ddot{Z}\} \end{Bmatrix}, p = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}, f = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_x \end{Bmatrix}, x = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  sont respectivement les (matrice masse, l'effet gyroscopique et l'amortissement, et raideur).  $\{x\}$  est le vecteur déplacement,  $\{f\}$  force d'excitation ou chargement. Ainsi pour le calcul numérique l'équation de mouvement (III.12) est transformée en équations de premier ordre .

Présentation d'une équation auxiliaire :

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\} \quad \text{(III.14)}$$

Les équations (III.12) et (III.13) peuvent être combinées pour donner :

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{p\} \quad \text{(III.15)}$$

Où  $[A]$  et  $[B]$  sont des matrices réelles, non symétriques de taille  $(2N \times 2N)$

$q_i$ : Déplacement généralisé,  $\dot{q}_i$ : Vitesse généralisé

Avec  $x = \{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots\}$

$$[A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ -[M] & [0] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}$$

Le système résultant des équations combinées (III.12), (III.14) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & -[M] \\ [K] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.16)}$$

### •Analyse des valeurs propres

Pour les systèmes gyroscopiques réduits, les fréquences naturelles, les constantes d'amortissement, les formes modales et les seuils de stabilité peuvent être déterminés en résolvant le problème de valeur propre pour  $\{p\} = 0$

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{p\} \quad (\text{III.17})$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres à droite et à gauche sont obtenus en résolvant la forme homogène de l'équation (III.17).

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{0\} \quad (\text{III.18})$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$\{q\} = \{\Phi^d\} e^{\lambda t} \quad (\text{III.19})$$

$\{\Phi^d\}$  : désigné sous le nom des vecteurs propres droite.

L'équation (III.18) peut être écrite:

$$(\lambda[A] + [B])\{\Phi^d\} = \{0\} \quad (\text{III.20})$$

Il y a ( $r=2N$ ) valeurs propres  $\lambda_r$  obtenu de:

$$\det(\lambda[A] + [B]) = 0$$

Les vecteurs propres satisfaisant le problème de valeur propre généralisé s'écrit :

$$[B]\{\Phi_r^d\} = -\lambda_r[A]\{\Phi_r^d\}, \quad r = 1, \dots, 2N \quad (\text{III.21})$$

Si on transpose l'équation matricielle (III.20):

$$[A]^T \{\dot{q}\} + [B]^T \{q\} = \{0\} \quad (\text{III.22})$$

On suppose les solutions pour les valeurs gauches sont de la forme:

$$\{q\} = \{\Phi^g\} e^{\lambda t}$$

$\{\Phi^g\}$  : désigné sous le nom des vecteurs propres gauches.

Il en résulte :

$$(\lambda[A]^T + [B]^T)\{\Phi^g\} = \{0\} \quad (\text{III.23})$$

Les valeurs propres sont données par l'équation :

$$\det(\lambda[A] + [B])^T = 0 \quad (\text{III.24})$$

Cette équation est appelée équation aux fréquences propres du système. Le développement du déterminant nous donne une équation polynomiale de degré n. Les (2NX1) vecteurs propres à droite et à gauche ont les relations de Bi-orthogonalité suivantes :

$$\{\Phi_s^g\}^T [A] \{\Phi_r^d\} = \alpha_r \delta_{rs} = \begin{cases} \alpha_r & \text{pour } r = s \\ 0 & \text{pour } r \neq s \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

$$\{\Phi_s^g\}^T [B] \{\Phi_r^d\} = \beta_r \delta_{rs} = \begin{cases} \beta_r & \text{pour } r = s \\ 0 & \text{pour } r \neq s \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Il en résulte

$$\lambda_r = \frac{\beta_r}{\alpha_r} \quad (\text{III.27})$$

Ces relations de Bi-orthogonalité entre les modes du système original et ceux du système transposé peuvent être employées pour découpler les équations de système.

### III.5. Effet de tourbillon sur le mouvement rotatif des arbres

L'instabilité de l'arbre dans le palier peut apparaître sous l'effet de variations de certains paramètres qui se manifestent par une vibration auto-entretenu qui entraîne une précession du rotor, accompagnée d'un changement de la fréquence de tourbillonnement à une valeur non synchrone. cette fréquence est celle de la fréquence propre la plus basse du système rotor, c'est-à-dire la fréquence de la première vitesse critique. Au seuil d'instabilité, appelé "vitesse d'apparition de l'instabilité", la partie réelle d'une valeur propre devient nulle [71].

Dans le cas du tourbillonnement, les rotors sont déstabilisés par des forces de réaction tangentielles qui sont normales à un déplacement radial et dans le sens de rotation de l'arbre. Les forces déstabilisatrices sont dans le sens du tourbillonnement et s'opposent à la force d'amortissement externe, qui tend à empêcher le mouvement tourbillonnaire. Souvent, ces forces sont considérées comme étant proportionnelles à la déviation radiale. Le facteur de proportionnalité est un coefficient de rigidité couplé transversalement, puisqu'il relie l'amplitude de la force à une déflexion

normale à la force. Sous forme de matrice on écrit :

$$\begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & k_{yz} \\ -k_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

Où les termes de couplage croisé sont asymétriques :

$$k_{yz} = -k_{zy} \quad (\text{III.29})$$

Comme le montre (figure III.5), lorsque la force tangentielle  $f_T$  agit dans le sens du tourbillonnement, elle fournit de l'énergie au mouvement, ce qui permet d'obtenir un amortissement "négatif".

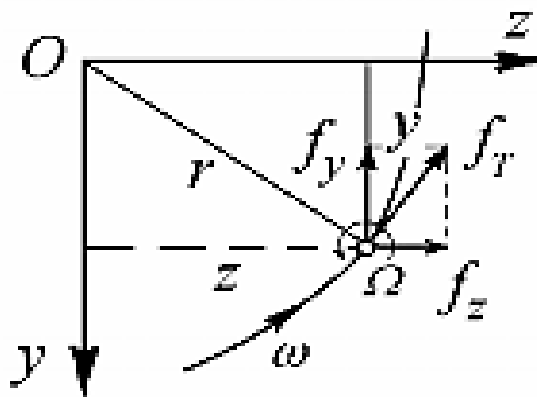
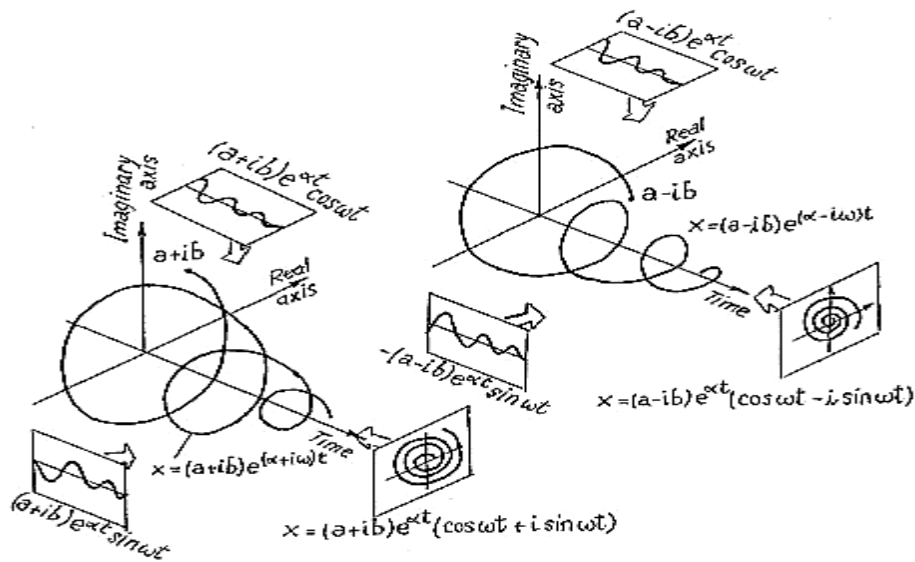


Figure III.5: La force Tangentielle  $f_T$ . [72]

Si le mouvement libre est décomposé en deux tourbillons, chacun dans une spirale d'Archimède (figure III.6), l'un avec le sens de rotation et l'autre contre lui, à des vitesses inférieures à la vitesse d'apparition de l'instabilité, les deux spirales sont d'amplitude décroissante. À des vitesses supérieures à la vitesse d'apparition de l'instabilité, dans presque tous les cas, le tourbillon dans le sens de la rotation est d'une amplitude exponentiellement croissante (donc instable) tandis que celui dans le sens opposé est d'une amplitude décroissante. C'est la composante avant du tourbillon qui est responsable de l'amortissement "négatif".



**Figure III.6:**Mouvement libre (décomposé en deux tourbillons) [72]

Pour un rotor (figure III.7), de masse  $m$  et une rigidité d'arbre  $k$ , tourbillonnant à une vitesse instantané  $\omega$  à un rayon  $r$ , les forces agissant sur la masse sont la force centrifuge  $m \omega^2 r$ , la force de rappel élastique  $k r$ , la force d'amortissement radiale  $c (dr/dt)$ , la force d'inertie radial  $m(d^2r/dt^2)$ , la force d'amortissement tangentielle  $c \omega r$ , la force de Coriolis  $2m \omega(dr/dt)$  et la force de déstabilisation  $f_T$ . Les équations du mouvement sont écrites en utilisant le principe de d'Alembert. Le bilan des forces radiales donne :

$$m \frac{d^2r}{dt^2} + c \frac{dr}{dt} + kr - mr\omega^2 = 0 \tag{III.30}$$

L'équilibre des forces tangentielles donne :

$$2m\omega \frac{dr}{dt} + c\omega r - f_T = 0 \tag{III.31}$$

Où la force déstabilisatrice est proportionnelle à la déviation radiale :

$$f_T = k_{yz} r \tag{III.32}$$

$k_{yz}$  est la rigidité croisée.

La solution prend la forme :

$$r = r_0 e^{\lambda t} \tag{III.33}$$

Pour que le système soit stable, le coefficient de l'exposant :

$$\lambda = \frac{k_{yz} - c\omega}{2m\omega} \tag{III.34}$$

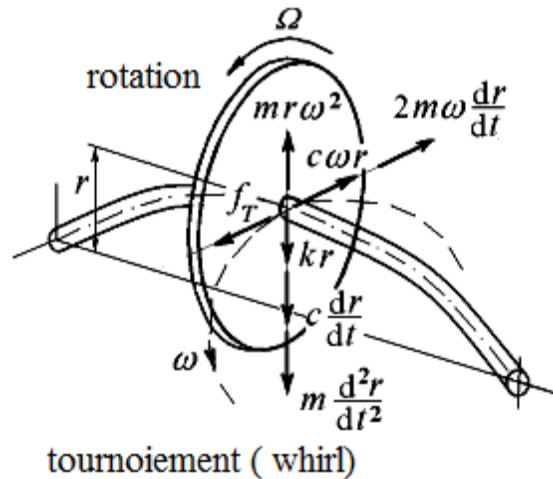


Figure III.7 : Forces agissant sur la masse [73]

Doit être négative, ce qui donne l'exigence d'un fonctionnement stable comme :

$$k_{yz} \leq c\omega$$

Ou, sous une forme sans dimension, où  $\zeta$  est le rapport d'amortissement :

$$\frac{k_{yz}}{m\omega^2} \leq \frac{c}{m\omega} = 2\zeta \quad (\text{III.35})$$

Au début de l'apparition de l'instabilité  $\lambda = 0$ , la vitesse de tourbillonnement peut être écrite, de l'équation (III.30) :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{III.36})$$

La vitesse de tourbillonnement au début de l'instabilité est la fréquence propre du rotor, quelle que soit la vitesse de rotation de l'arbre. Même si la vitesse de rotation  $\Omega$  augmente, la vitesse de tourbillonnement reste égale à la fréquence propre du rotor, de sorte que le tourbillonnement est un mouvement sub-synchrone.

En fait, les non-linéarités dans le système rotor dissipent l'énergie plus rapidement avec des amplitudes croissantes que ce qui est prévu par un modèle linéaire. Par conséquent, les amplitudes de tourbillonnement augmentent fortement avec le temps mais sont généralement finies, ce qui permet d'obtenir un cycle limite en régime permanent avec une orbite fermée.

L'équation (III.35) montre que, en augmentant le rapport d'amortissement du système rotor, la vitesse d'apparition de l'instabilité est poussée à une vitesse plus élevée. La

stabilité du rotor est améliorée en augmentant l'amortissement externe, ou de manière équivalente, par l'introduction d'une anisotropie dans les supports de palier.

### III.6. L'instabilité des paliers hydrodynamiques

Les variations des composantes de l'action du fluide sur le rotor sont reliées aux composantes de déplacements et de vitesses du centre du rotor. Les coefficients de rigidité sont donc interprétés comme des variations des composantes de la charge sous l'effet des déplacements de l'arbre. Les coefficients d'amortissement, quant à eux, sont reliés aux variations des composantes de la charge sous l'effet des vitesses de déplacement de l'arbre. Le cas d'un palier chargé est plus compliqué car il fait intervenir le gradient de pression qui influe sur le débit. On constate alors que le rapport de la vitesse moyenne du fluide à la vitesse de rotation diminue et que l'excentricité relative augmente.

Le modèle le plus couramment utilisé est celui du rotor rigide symétrique supporté par deux paliers identiques. L'avantage de ce modèle réside dans sa simplicité, Chaque palier supporte la masse  $M$  du rotor. Les équations du mouvement du rotor à l'intérieur de chaque palier s'écrivent alors sous forme matricielle :

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + [K_{ij}] \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} + [C_{ij}] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{III.37})$$

Où  $y$  et  $z$  sont les composantes dans le repère fixe, du déplacement du centre de l'arbre à partir de la position d'équilibre statique. On recherche une solution harmonique du type :

$$y = A e^{st} \quad , z = B e^{st} \quad (\text{III.38})$$

Où  $s = \delta + j\omega$  est une fréquence complexe. Le signe du coefficient  $\delta$  permet de définir la stabilité du régime de fonctionnement de l'arbre. Lorsque  $\delta$  est inférieur à zéro, le régime est stable et vice versa.

La limite de la stabilité  $\delta = 0$ , donc le mouvement est purement harmonique  $s = j\omega$ .

Dans ces conditions le report de  $y$  et  $z$  dans les équations du mouvement conduit au système homogène :

$$\begin{bmatrix} K_{yy} - M\omega^2 + j\omega C_{yy} & K_{yz} + j\omega C_{yz} \\ K_{zy} + j\omega C_{zy} & K_{zz} - M\omega^2 + j\omega C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

L'annulation des parties réelles et imaginaires permet de déterminer la fréquence d'instabilité. Si l'on utilise les variables sans dimensions suivantes :

$$\bar{M} = \frac{MC\omega^2}{W}, k_{ij} = K_{ij} \frac{C}{W}, c_{ij} = C \frac{C\Omega}{W}, \lambda = \frac{\omega}{\Omega} \quad (\text{III.40})$$

Où C le jeu radial du palier,  $\Omega$  la vitesse de rotation du rotor, ( $M, c_{ij}, k_{ij}$ ) masse et coefficients dynamiques adimensionnés. Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{yy} - \bar{M}\lambda^2 + j\lambda C_{yy} & K_{yz} + j\lambda C_{yz} \\ K_{zy} + j\lambda C_{zy} & K_{zz} - \bar{M}\lambda^2 + j\lambda C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

L'annulation de son déterminant conduit aux équations :

$$\bar{M}_c \lambda_c^2 = k_{eq} = \frac{K_{yy} C_{zz} + K_{zz} C_{yy} - C_{zy} K_{yz} - C_{yz} K_{zy}}{C_{yy} + C_{zz}} \quad (\text{III.42})$$

Et

$$\lambda_c^2 = \frac{(K_{eq} - K_{yy})[K_{eq} - K_{zz}] - K_{yz} K_{zy}}{C_{yy} C_{zz} - C_{yz} C_{zy}} \quad (\text{III.43})$$

Pour un palier donné les coefficients,  $k_{ij}; c_{ij}$ , la masse critique sans dimension  $\bar{M}_c$  et la fréquence critique  $\lambda_c$  ne dépendent que de l'excentricité de fonctionnement. L'expression de la masse sans dimension  $\bar{M}_c$  permet pour une masse M du rotor de déterminer la vitesse critique de rotation  $\Omega_c$  au-delà de laquelle il y aura instabilité.

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{\bar{M}_c W}{MC}} \quad (\text{III.44})$$

Ainsi une valeur de  $\lambda_c^2$  négative obtenue à partir de l'équation (III.43), signifie un fonctionnement stable pour toute valeur de la masse du rotor. Par ailleurs, si la masse critique est négative pour une valeur de  $\lambda_c^2$  positive, le palier est instable pour toute valeur de la masse du rotor. Par ailleurs, si la masse critique est négative pour une valeur de  $\lambda_c^2$  positive, le palier est instable pour toute valeur de la masse du rotor. Il est donc possible d'évaluer si un point de fonctionnement donné est stable ou non.



### III.6.1. Phénomène de tourbillonnement et fouettement d'huile

Les vibrations liées aux paliers hydrodynamiques sont connus sous le nom fouettement, appelé whirl, et d'œil whip (figure III.8).[74] deux effets voisins sont à distinguer :

- Le tournoiement, appelé le « whirl » dont la fréquence correspond environ à la moitié de la fréquence de rotation et ne dépasse pas le double de la première fréquence propre du rotor. Il s'agit d'un phénomène de précession autour du centre d'équilibre statique. Le phénomène apparait à partir d'une certaine vitesse de rotation que l'on appelle vitesse limite de stabilité.
- Le fouettement « whip » apparait lorsque la fréquence de whirl est égale ou supérieure à la première fréquence propre de flexion du rotor. Il s'agit d'un phénomène d'excitation par fouettement. En effet, le phénomène de précession étant présent, puisque nous sommes au dessus de la vitesse limite de stabilité, l'amplitude des vibrations engendrées par le palier vont augmenter rapidement. Elles sont assez importantes pour provoquer la destruction de la machine. Pour cette raison , il est recommandé de ne pas faire fonctionner la machine tournante au-delà du double de la fréquence du premier mode de résonance de l'arbre.

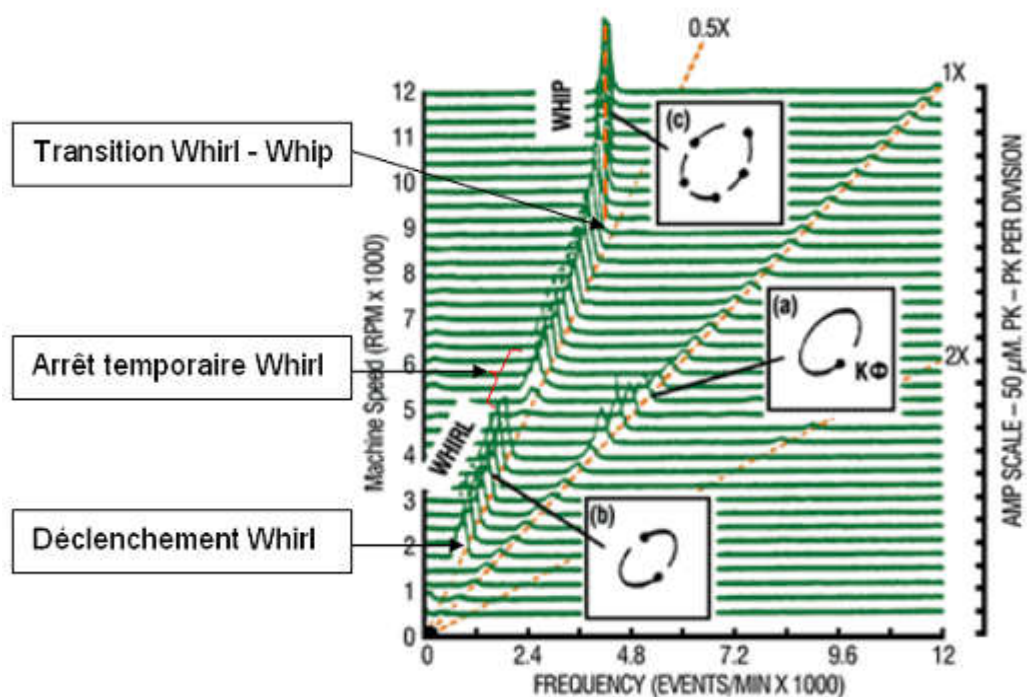


Figure III.8 : Phénomène oil « whirl et whip » [74]

### III.6.2. Le balourd et le tourbillon d'huile

Il s'agit d'un déséquilibre qui se produit lorsque l'axe des centres de gravité du rotor ne coïncide pas avec l'axe de rotation. L'axe des centres de gravité est défini comme une ligne joignant les centres de gravité de tranches minces fictives dont l'alignement formant le rotor. En réalité, l'axe des centres de gravité a plutôt la forme d'un serpent enroulé autour de l'axe de rotation, la force centrifuge tournante résultant du balourd augmente rapidement avec la vitesse de rotation.

On peut réduire le balourd au minimum en équilibrant le rotor, soit en ajoutant des poids du côté du rotor où la masse est plus faible, soit en enlevant de la matière du côté où la masse est plus élevée. Si l'équilibrage est effectué correctement, le balourd sera tellement faible qu'il ne causera pas de problèmes de vibrations. Les déséquilibres (balourds) proviennent en général de défauts d'usinage, d'assemblage des rotors ou de montage. En fonctionnement, les rotors peuvent alors aussi se déformer sous l'effet d'échauffements dissymétriques. Lorsque l'arbre commence à tourner avec une vitesse de rotation lentement croissante, une précession synchrone de faible amplitude est observée tout au long de l'axe du rotor. Ceci est produit par le déséquilibre résiduel inhérent au rotor. À faible vitesse de rotation, cette précession est stable, une perturbation par impulsion du rotor provoque un mouvement tourbillonnaire transitoire de courte durée, et le même schéma de précession est rétabli (figure III.9). À des vitesses de rotation plus élevées (généralement inférieures à la première vitesse critique), la précession synchrone forcée n'est pas le seul régime de vibration. En plus de la précession, un tourbillon d'huile apparaît. Le tourbillon d'huile est la précession subharmonique latérale avant du rotor autour du centre du palier à une fréquence proche de la moitié de la vitesse de rotation. Dans cette gamme de vitesses de rotation, le rotor se comporte comme un corps rigide. Les amplitudes du tourbillon d'huile sont généralement beaucoup plus élevées que celles de la précession synchrone. Elles sont cependant limitées par le jeu du palier et les forces fluides non linéaires.

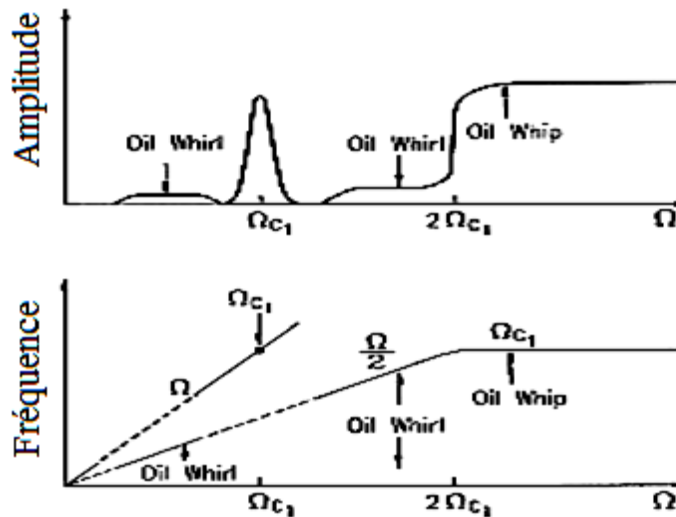


Figure III.9: Schéma de fréquence du tourbillon d'huile [73]

Avec l'augmentation de la vitesse de rotation, le schéma de précession reste stable. La "demi" fréquence du tourbillon d'huile suit l'augmentation de la vitesse de rotation, en maintenant avec elle le rapport  $\approx 1/2$ . L'amplitude des rayons de précession reste presque constante et généralement élevée. Au palier, le rayon de précession peut couvrir presque tout le jeu du palier. Dans la plage de vitesse de rotation considérée, les effets de la dynamique des fluides du palier dominent clairement. Lorsque la vitesse de rotation croissante approche de la première vitesse critique  $\Omega_{c1}$ , c'est-à-dire la première fréquence propre du rotor, le tourbillon d'huile devient soudainement instable.

### III.6.3. Tourbillon à demi-fréquence

Un palier lisse légèrement chargé, c'est-à-dire que la pression développée dans le film est insignifiante et que le centre du palier lisse fonctionne près du centre du palier et que l'excentricité est très faible par rapport au jeu radial. Comme on suppose que l'écoulement induit par la pression est négligeable, le profil de vitesse du film dans l'espace de jeu est linéaire, avec une valeur maximale  $\Omega R$  à la surface du tourillon, l'écoulement dans la cale du coussinet est :

$$q_i = \frac{1}{2} LR\Omega(c + e) \quad (\text{III.45})$$

Le flux sortant de la cale est :

$$q_0 = \frac{1}{2} LR\Omega(c - e) \quad (\text{III.46})$$

Si la pression est développée dans le film, lorsque le palier fonctionne dans des conditions stables, le débit entrant est réduit et le débit sortant est augmenté par le flux induit par la pression, qui équilibre  $q_i$  et  $q_o$  pour maintenir la continuité du flux. Cependant, si la charge est faible, en l'absence de pression, une petite vitesse de tourbillonnement est induite.

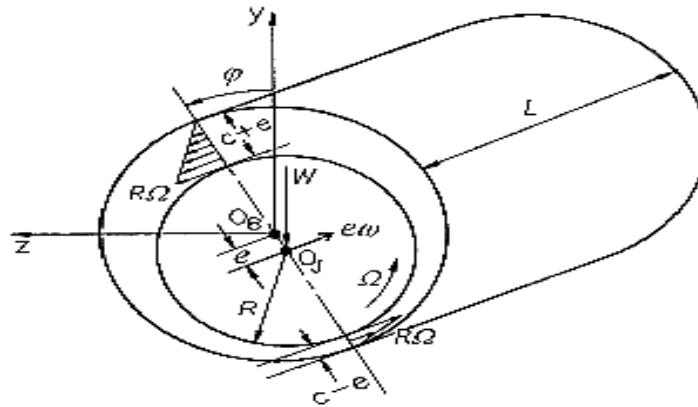


Figure III.10: Palier lisse circulaire (vitesse induite  $(e\omega)$ ) [75]

Si la vitesse instantanée du tourbillon est  $\omega$  pour le centre du journal  $O_r$ , alors la vitesse induite est  $e\omega$  comme indiqué sur la (figure III.10). En dégageant le tourillon de sa position d'équilibre, le volume du film augmente de :

$$V = 2LR e\omega \tag{III.47}$$

Où  $2LR$  est la surface projetée du palier. Par conséquent :

$$\frac{1}{2}LR\Omega(C + e) = \frac{1}{2}LR\Omega(C - e) - 2LR e\omega \tag{III.48}$$

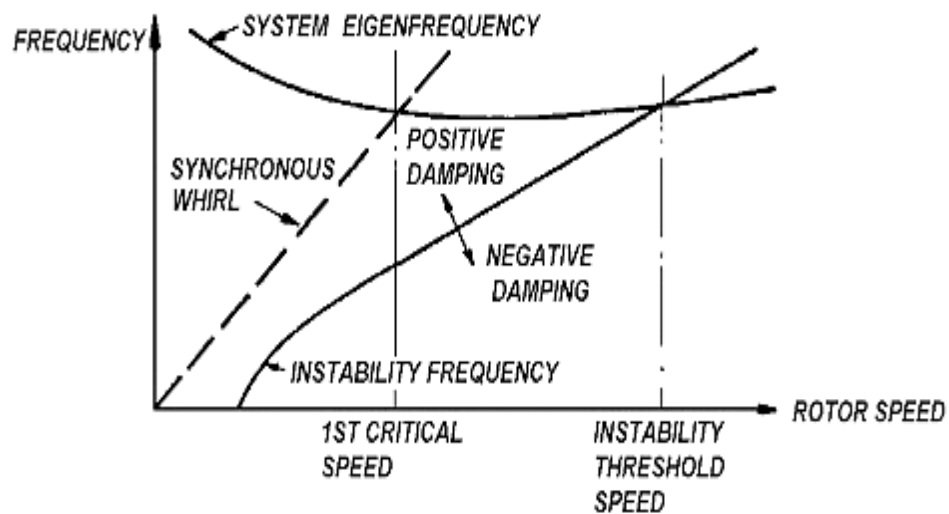
Avec  $\omega = \frac{1}{2}\Omega$

Le rotor entraîne donc de tourbillonner à une fréquence égale à la moitié de la vitesse de rotation pour maintenir l'équilibre du flux.

Si  $\omega > 1/2 \Omega$ , le flux sortant est plus important et donc la pression est développée dans le film et le palier devient stable. Si par contre  $\omega < 1/2 \Omega$ , le flux entrant est plus important, le palier perd sa capacité de charge et continue à tourbillonner, afin de créer plus d'espace pour l'huile excessive qui entre dans le coin. Le rotor perd donc sa capacité de charge et devient instable. On observe que la fréquence de tourbillonnement des rotors dans telles conditions se situe entre 0,46 et 0,48 de la vitesse de rotation.

### III.6.4. Vitesse d'apparition de l'instabilité

Il peut être démontré que, pour décrire le début de l'instabilité, un palier peut être représenté par un seul coefficient de ressort effectif et un seul coefficient d'amortissement effectif. Ces coefficients peuvent être calculés à partir des huit coefficients dynamique. Cependant, les deux coefficients ainsi obtenus dépendent de la fréquence de précession, de sorte que le coefficient d'amortissement effectif est négatif pour les petites fréquences et devient positif pour les fréquences plus élevées, et nul pour les fréquences d'instabilité. Celle-ci se trouve en fonction de la vitesse, comme le montre la courbe correspondante de la (figure III.11). La ligne de précession synchrone croise la courbe de fréquence naturelle à la première vitesse critique (où la vitesse de rotation est égale à la fréquence naturelle du système). La ligne de tourbillonnement à demi- fréquence croise la courbe au seuil d'instabilité connu sous le nom de fouet d'huile.



**Figure III.11:** Courbe de fréquence d'instabilité [76]

Pour les fréquences inférieures à la fréquence d'instabilité (c'est-à-dire dans la région située en dessous de la courbe), l'amortissement effectif est négatif, et pour les fréquences supérieures à la fréquence d'instabilité, l'amortissement est positif. Le coefficient d'élasticité effectif du palier ainsi que la flexibilité du rotor déterminent les fréquences de résonance du système rotor-palier. Comme la rigidité du palier est fonction de la vitesse, les fréquences de résonance deviennent dépendantes de la vitesse. La plus basse de ces fréquences de résonance est indiquée par la courbe

appelée "fréquence propre du système". Cette courbe coupe la courbe de la fréquence d'instabilité à une vitesse appelée "vitesse du seuil d'instabilité".

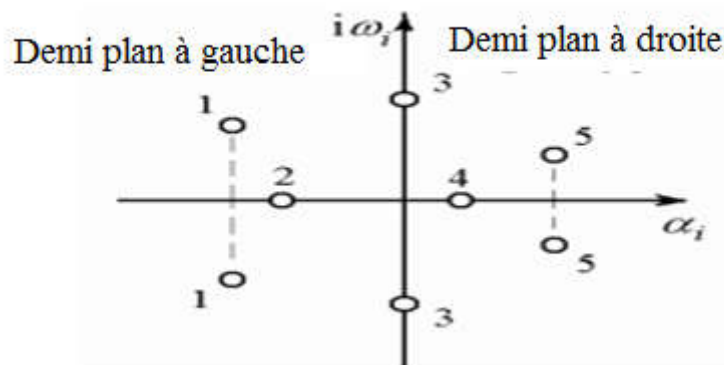
Cependant, si le rotor tourne en dessous de la vitesse du seuil d'instabilité, les paliers fournissent un amortissement positif et le mouvement de précession s'éteint. À mesure que la vitesse augmente, l'amortissement disponible pour la précession diminue jusqu'à ce qu'il devienne égal à zéro à la vitesse d'instabilité initiale. Si l'on tente d'augmenter la vitesse au-delà du seuil, l'amortissement devient négatif, de sorte que toute perturbation imposée est amplifiée et le système est instable.

**III.6.5. Stabilité des systèmes linéaires**

En 1877, E. J. Routh a établi un algorithme pour déterminer le nombre de racines d'un polynôme réel qui se trouvent dans le demi-plan droit. Indépendamment, en 1895, A. Hurwitz a donné une deuxième solution. Les inégalités déterminantes qu'il a obtenues sont connues sous le nom de conditions de stabilité Routh-Hurwitz pour les équations de mouvement à coefficients réels, l'équation caractéristique :

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{III.49}$$

à n racines de la forme générale  $\lambda_i = \alpha_i + i\omega_i$ . Les racines répétées ne sont pas prises en compte ici, s'il y a un  $\alpha > 0$ , le système sera instable. Les types de mouvement associés à la position dans le plan complexe (figure III.12) sont résumés dans le tableau III.1.



**Figure III.12:** Types de mouvement associés à la position dans le plan complexe

Position de la racine dans la Figure III. 12	Type de mouvement
1	stable ; oscillatoire amorti
2	stable ; apériodique amorti
3	oscillatoire

4	instable ; divergent (la distance augmente exponentiellement avec le temps)
5	instable amplitude croissante, dite dynamiquement instable

**Tableau III.1.**

Il est souvent intéressant de décider si un système est stable ou non sans avoir à résoudre son équation caractéristique. Considérer la matrice avec des éléments réels [77] :

$$\begin{bmatrix}
 a_1 & -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 - & & & & & & & \\
 a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\
 - & & & & & & \\
 a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_0 & \dots & 0 \\
 \cdot & & & & & & \\
 a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdot & \cdot & a_n
 \end{bmatrix}
 \tag{III.50}$$

$$D_1 = a_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0
 \tag{III.51}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = -a_1(a_1 a_4 - a_5 a_0) + a_3(a_1 a_2 - a_3 a_0)$$

$$D_n = \begin{bmatrix}
 a_1 & -a_0 & -0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 - & & & & & & & \\
 a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\
 - & & & & & & \\
 a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_0 & \dots & 0 \\
 \cdot & & & & & & \\
 a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdot & \cdot & a_n
 \end{bmatrix}
 \tag{III.52}$$

Si  $r > n$  ou  $r < 0$ , alors  $a_r = 0$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de  $f(\lambda) = 0$  se trouvent dans le demi-plan gauche est que tous les déterminants partiels soient positifs  $D_i > 0$ . Si  $n > 0$ , il suffit de tester les déterminants de  $D_1$  à  $D_{n-1}$ , car  $D_n = a_n D_{n-1}$ . Les coefficients  $a_r$  peuvent être exprimés en fonction des racines  $\lambda_i$  de l'équation (III.49), par exemple :

$$a = -a \sum_{i=1}^n \lambda_i, a = a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \quad (i \neq j) \tag{III.53}$$

En considérant les formes de ces expressions, il est facile de montrer que tous les  $a_i$  ont le même signe que  $a_0$  si toutes les racines ont des parties réelles négatives. La seule façon dont l'un des coefficients peut être nul ou prendre le signe opposé à  $a_0$  est qu'une ou plusieurs des racines aient des parties réelles positives. Par conséquent, une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que toutes les racines de  $f(\lambda) = 0$  se trouvent dans le demi-plan gauche est que tous les  $a_r = (2, 1, \dots, n)$  soient positifs.

### III.7. Stabilité d'un rotor rigide

Pour l'étude de la stabilité on considère un rotor symétrique constitué par un arbre tournant à une vitesse de rotation  $\omega$ . La masse totale du rotor est  $2m$  répartie uniformément sur les deux paliers fluide identiques. Le film d'huile entre l'arbre et le coussinet est modélisé par huit coefficients dynamiques.

#### III.7.1. Vitesse et fréquence de tourbillonnement d'huile

Pour une charge et une vitesse de rotation constantes, le centre du tourillon maintient une position d'équilibre stable dans le jeu du palier, définie uniquement par le nombre de Sommerfeld qui représente les conditions de fonctionnement [78] :

$$S = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{\mu DL}{W} \left( \frac{R}{C} \right)^2 \tag{III.54}$$

L'équation de mouvement par rapport à l'état d'équilibre est écrite, en considérant que chaque tourillon a une masse  $m$ , comme :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \tag{III.55}$$

Substituer des solutions de la forme :



$$y = y_0 e^{\lambda t} \quad , z = z_0 e^{\lambda t}$$

Dans la partie homogène de l'équation (III.55) on obtient :

$$\begin{bmatrix} m\lambda^2 + c_{yy}\lambda + k_{yy} & c_{yz}\lambda + k_{yz} \\ c_{zy}\lambda + k_{zy} & m\lambda^2 + c_{zz}\lambda + k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.56})$$

Pour les valeurs non négligeables de  $y_0$  et  $z_0$ , on obtient l'équation caractéristique :

$$(m\lambda^2 + c_{yy}\lambda + k_{yy})(m\lambda^2 + c_{zz}\lambda + k_{zz}) - (c_{zy}\lambda + k_{zy})(c_{yz}\lambda + k_{yz}) = 0$$

Il s'agit d'une équation algébrique du quatrième ordre de la forme :

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (\text{III.57})$$

$$a_0 = m^2$$

$$a_1 = m(c_{yy} + c_{zz})$$

$$a_2 = m(k_{yy} + k_{zz}) + (c_{yy}c_{zz} - c_{yz}c_{zy}) \quad (\text{III.58})$$

$$a_3 = c_{yy}k_{zz} + c_{zz}k_{yy} - (c_{yz}k_{zy} + c_{zy}k_{yz})$$

$$a_4 = k_{yy}k_{zz} - k_{yz}k_{zy}$$

Les conditions de précession stable de Routh-Hurwitz sont :

$$a_1 > 0 \quad , a_2 > 0 \quad , a_3 > 0 \quad , a_4 > 0$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$$

Au début de l'instabilité, la racine de l'équation (III.58) est purement imaginaire.

$$\lambda = i\omega \quad (\text{III.59})$$

Où  $\omega$  est la fréquence du tourbillon.

En substituant (III.58) à l'équation (III.59) on obtient :

$$a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_4 + i(-a_1 \omega^3 + a_3 \omega) = 0 \quad (\text{III.60})$$

En mettant les parties réelle et imaginaire à zéro, nous trouvons :

$$a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_4 = 0 \quad (\text{III.61})$$

$$\omega(a_3 - a_1 \omega^2) = 0$$

A partir de l'équation (III.60), on obtient la fréquence de tourbillon à la limite de stabilité :

$$\omega^2 = \left( \frac{a_3}{a_1} \right)_{\Omega = \Omega_{th}} \quad (\text{III.62})$$

La substitution de (III.61) dans l'équation (III.62) donne :

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 = 0 \quad (\text{III.63})$$

Cela signifie qu'à la vitesse de rotation  $\Omega = \Omega_{th}$  la limite de stabilité est rencontrée et la fréquence de tourbillonnement instable est donnée par l'équation (III.62).

Généralement, le seuil de la vitesse et la fréquence de tourbillon sont exprimées en fonction des huit coefficients de palier sans dimension :

$$k_{ij} = \frac{C}{W} k_{ij}, C_{ij} = \frac{C\Omega}{W} c_{ij}, i, j = y, z \quad (\text{III.64})$$

Où C est le jeu radial,  $W = mg$  est la charge statique sur le palier,  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation.

Désignant :

$$A_1 = C_{yy} + C_{zz}, A_2 = k_{yy} + k_{zz}, A_3 = C_{yy}C_{zz} - C_{yz}C_{zy} \quad (\text{III.65})$$

$$A_4 = C_{yy}K_{zz} + C_{zz}K_{yy} - (C_{yz}K_{zy} + C_{zy}K_{yz}), A_5 = K_{yy}K_{zz} - K_{yz}K_{zy}$$

En substituant (III.58) et (III.64) à (III.65), on obtient :

$$a_0 = \left(\frac{W}{g}\right)^2, a_1 = \frac{W^2}{gC\Omega} A_1, a_2 = \frac{W^2}{gC} A_2 + \left(\frac{W}{C\Omega}\right)^3 A_3$$

$$a_3 = \frac{W^2}{C^2\Omega} A_4, a_4 = \left(\frac{W}{C}\right)^2 A_5 \quad (\text{III.66})$$

En substituant maintenant (III.66) aux équations (III.63), nous obtenons le vitesse d'apparition de l'instabilité sans dimension :

$$\frac{\Omega_{th}^2}{g/c} = \frac{A_1 A_3 A_4}{A_4^2 + A_1^2 A_5 - A_1 A_2 A_4} \quad (\text{III.67})$$

La fréquence de tourbillonnement instable sans dimension :

$$\frac{\omega_{th}^2}{g/c} = \left(\frac{A_4}{A_1}\right)_{\Omega=\Omega_{th}} \quad (\text{III.68})$$

Dans les calculs pratiques, le nombre de Sommerfeld est calculé à la vitesse de fonctionnement. Si le seuil de la vitesse est supérieure à la vitesse de fonctionnement, le système est stable ; sinon, il est instable.

### III.7.2.Masse critique du rotor

Le seuil d'instabilité peut être défini au moyen des diagrammes de conception générale dans lesquels les paramètres du rotor et les paliers sont inclus. Si l'on suppose que le rotor est rigide, alors la masse est le seul paramètre. Dans le cas des paliers à film fluide incompressible, la fréquence de tourbillonnement instable sans dimension n'est fonction que du nombre S de Sommerfeld (et aussi du rapport d'excentricité  $\varepsilon$ ). Il est donc possible, pour n'importe quel nombre de Sommerfeld (ou rapport d'excentricité), de calculer la masse du tourbillon nécessaire

Sous forme non dimensionnelle, la masse du tourbillon d'un rotor rigide peut être exprimée comme suit  $Cm\omega^2/W$ . L'équation (III.68) peut être écrite :

$$\frac{Cm\omega^2}{W} = K = \frac{C_{yy}K_{zz} - C_{zz}K_{yy} - (C_{yz}K_{zy} - C_{zy}K_{yz})}{C_{yy} + C_{zz}} \quad (\text{III.69})$$

Où K est la masse sans dimension du rotor par palier.

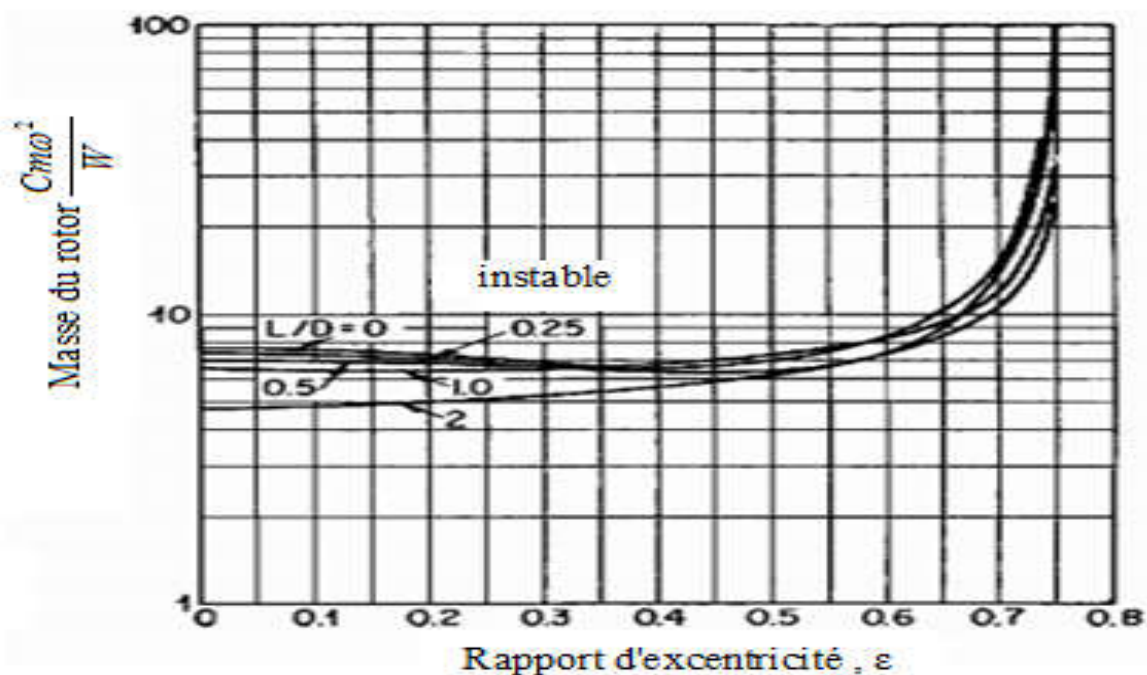


Figure III.13:Seuil d'instabilité d'un rotor avec paliers lisses cylindriques [73]

Pour un rotor fonctionnant avec des paliers lisses cylindriques incompressibles, une courbe donnant la relation entre K et  $\varepsilon$ , qui définit le seuil d'instabilité (figure III.13). Cette courbe peut être utilisée pour déterminer la vitesse de début de l'instabilité une fois que l'on a trouvé comment le rapport d'excentricité  $\varepsilon$  dépend de la vitesse du rotor. L'équation (III.69) peut être écrite :

$$\frac{Cm\Omega^2}{W} = \frac{A_1 A_3 A_4}{A_4^2 + A_1^2 A_3 - A_1 A_2 A_4} = \frac{A_3}{K + \frac{A_3}{K} - A_2} = \frac{KA_3}{A_3 - A_2 K + K^2} \quad (III.70)$$

$$\Omega \sqrt{\frac{Cm}{W}} = \sqrt{\frac{KA_3}{A_3 - A_2 K + K^2}}$$

Ou

$$2\pi S \frac{\sqrt{CmW}}{\mu DL \left(\frac{R}{C}\right)^2} = \sqrt{\frac{KA_3}{A_3 - A_2 K + K^2}} \quad (III.71)$$

La masse critique sans dimension du rotor peut être exprimée en fonction de nombre Sommerfeld comme :

$$\frac{\sqrt{CmW}}{\mu DL \left(\frac{R}{C}\right)^2} = \frac{1}{2\pi S} \sqrt{\frac{KA_3}{A_3 - A_2 K + K^2}} \quad (III.72)$$

La (figure III.14) présente un diagramme de stabilité pour un palier lisse. La masse critique sans dimension  $\frac{\sqrt{CmW}}{\mu DL \left(\frac{R}{C}\right)^2}$  est tracée en fonction du nombre S de Sommerfeld pour deux valeurs du rapport L / D . Un rotor est stable pour les conditions de fonctionnement à gauche des courbes.

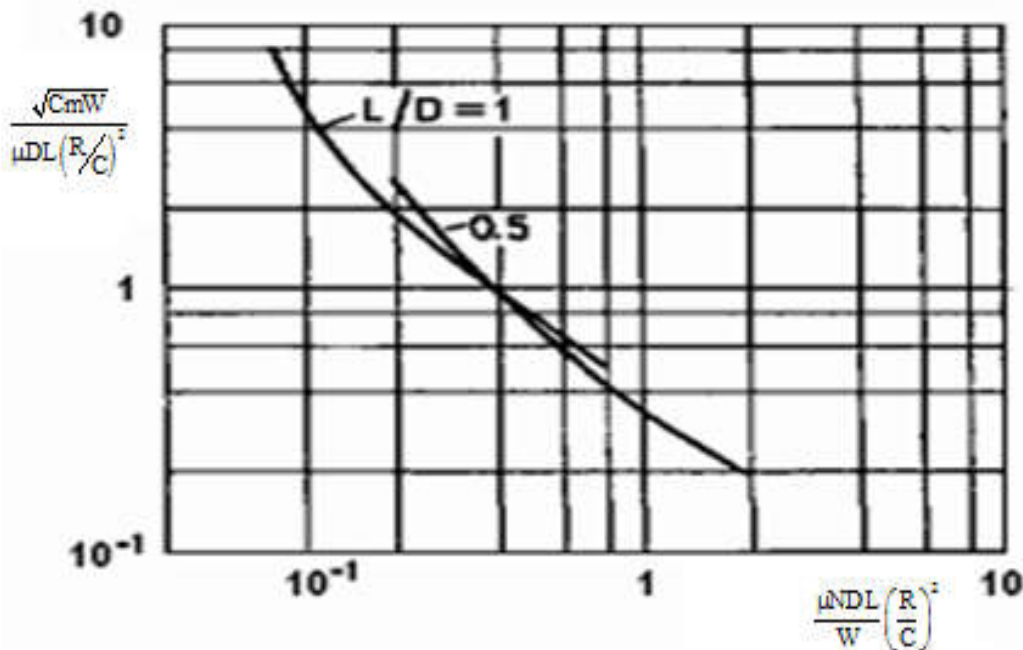


Figure III.14: Diagramme de stabilité pour un palier lisse [73]

Des diagrammes de conception similaires sont présentés dans les (figures III.15), qui

donnent la masse critique sans dimension du rotor au début de l'instabilité en fonction de  $S$ . La (figure III.15<sub>a</sub>), s'applique aux paliers elliptiques fonctionnant avec un lubrifiant incompressible dans un régime laminaire, tandis que (figure III.15<sub>b</sub>), s'applique aux paliers à arc partiel et à charge centrale.

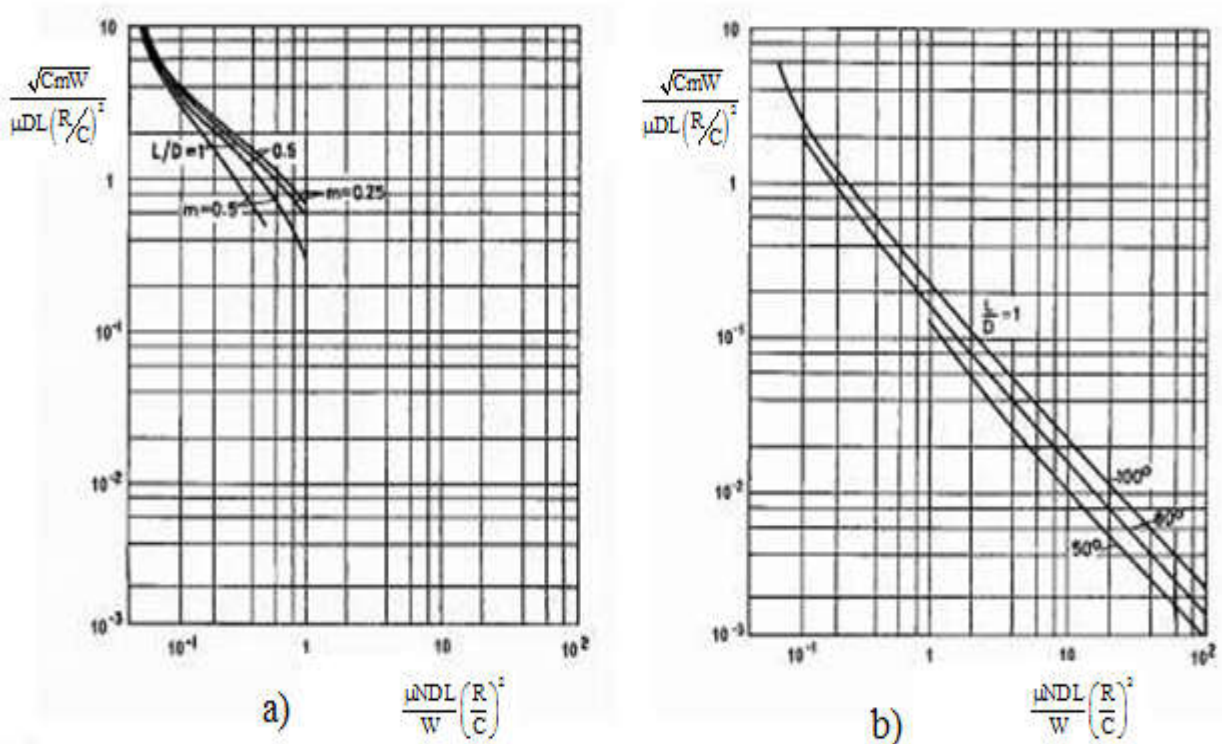


Figure III.15: Masse critique sans dimension du rotor au début de l'instabilité en fonction de  $S$  ([73])

### III.8. Vitesse critique de rotation

L'expression de cette vitesse est donnée par la relation suivante [79] :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\overline{M}_c W_0}{MC}} \tag{III.73}$$

Avec :

$W_0$  : la charge supportée par le rotor

$M$  : la masse globale du rotor

$C$  : le jeu radial dans le palier.

Si on considère que le palier est soumis seulement au poids de rotor, nous pouvons écrire alors :

$$W_0 = M.g \tag{III.74}$$

$g$  est l'accélération de pesanteur.

Ce qui donne :

$$\omega^2 = \frac{10\bar{M}_c}{C} \quad (\text{III.75})$$

La vitesse de rotation en tour/min est donc :  $N = \frac{60\omega}{2\pi}$  (III.76)

### III.9. Étude de la stabilité

Dans cette partie, nous déterminons les points d'apparition d'instabilité d'un exemple de rotor pour différentes vitesses de rotation.

#### Le modèle :

Le modèle examiné est un arbre en acier de longueur 0,080(m) et un diamètre de 0.04(m) qui porte un rotor de masse 0,603 (kg) à une distance 0.56(m) de l'extrémité gauche, le nombre d'éléments de l'arbre NE=13, la masse volumique de l'arbre et le disque est  $\rho=7800\text{Kg/m}^3$ . Les deux paliers identiques sont placés aux extrémités de l'arbre avec une charge statique de 2909.1 (N). Module de Young  $E=2e11(\text{Pa})$ , la viscosité dynamique de l'huile  $\mu=1.0054e-3 (\text{N}\cdot\text{sec/m}^2)$  (figure III.16).

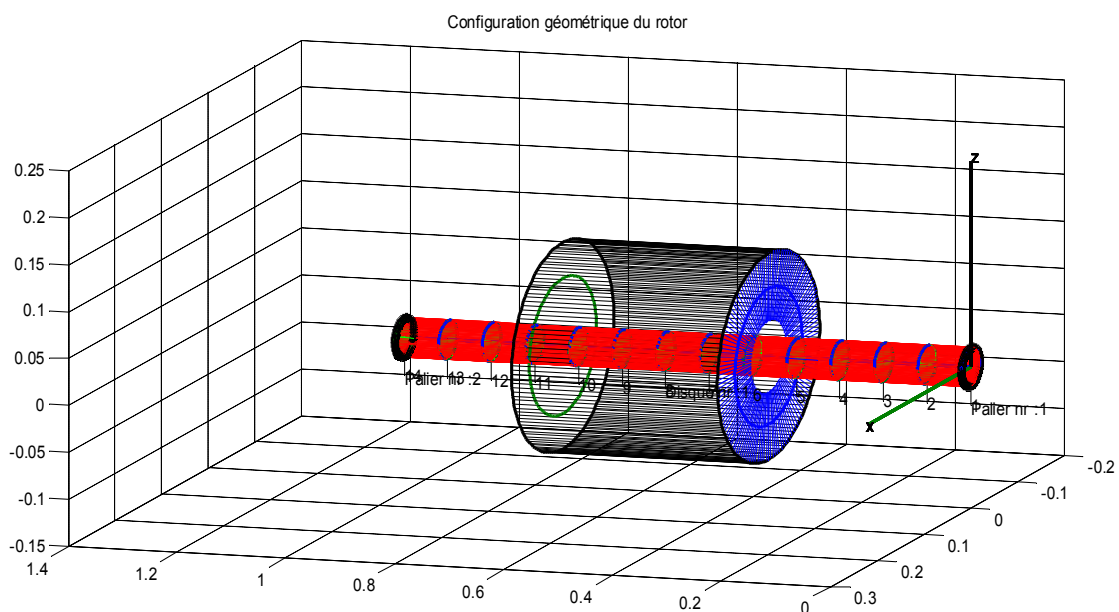


Figure III.16: Configuration du Rotor [73]

Le calcul dynamique est réalisé par un code numérique en matlab.

#### Diagramme de Campbell :

Le diagramme de Campbell de la (figure III.17) montre l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, la courbe croissante c'est la Précession

directe (PD), la courbe décroissante c'est la Précession indirecte (PI). Les vitesses critiques sont situées aux points d'intersection de la ligne bissectrice avec les lignes des modes indirectes. Les points de départ de chaque mode sont les fréquences propres de système, leurs valeurs sont présentées dans le tableau III.2.

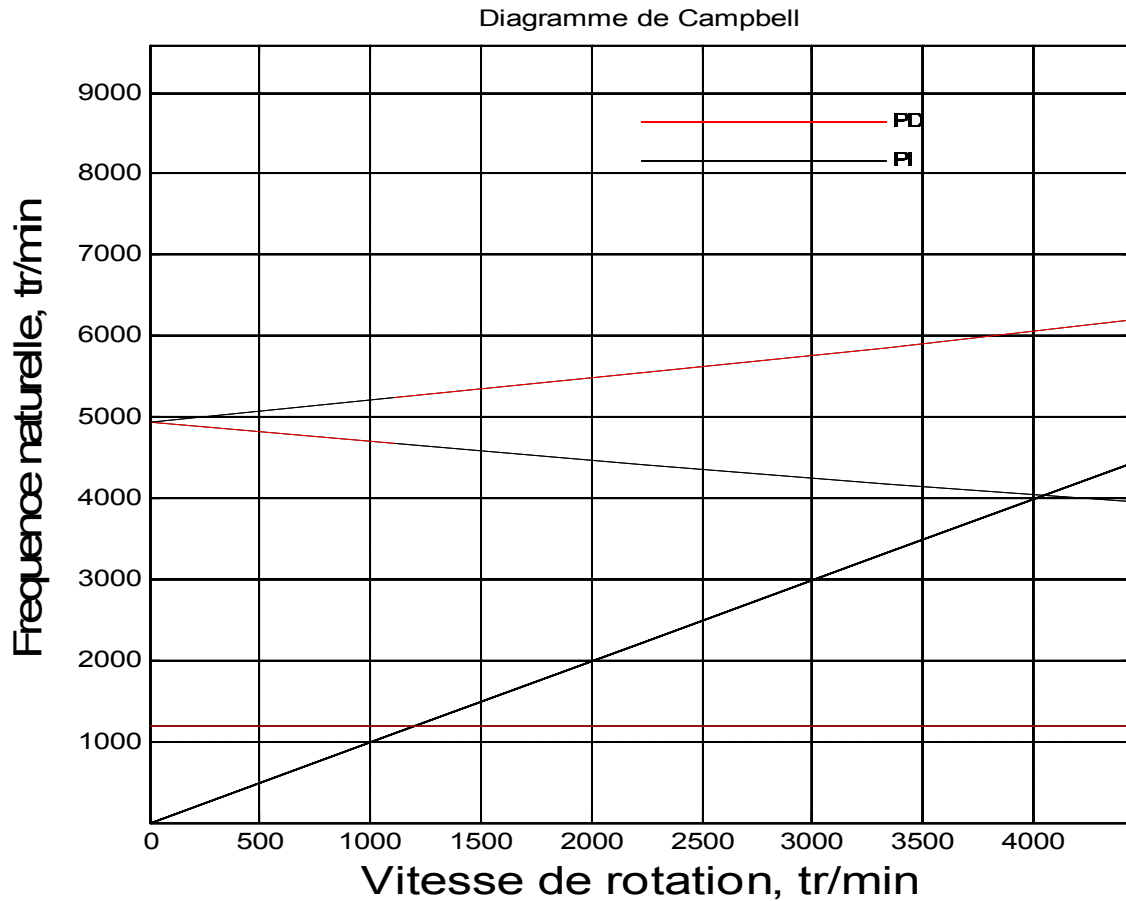


Figure III.17: Diagramme de Campbell et seuil d'instabilité

### Vitesse critique

Tableau III.2.

Mode	(Hz)	(tr/min)
1	1.9967e+001	1.1980e+003
2	1.9986e+001	1.1992e+003
3	6.7272e+001	4.0363e+003
4	1.1709e+002	7.0256e+003

### • Diagramme de stabilité

La (figure III.18) présente le diagramme d'instabilité où les modes des fréquences apparaît instable pour le modèle étudié.

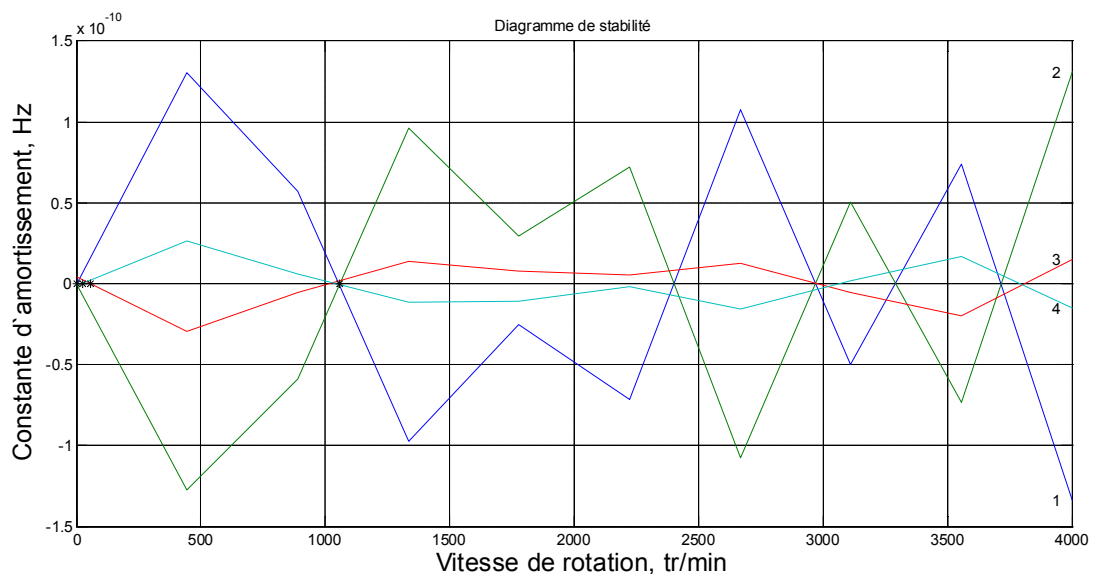


Figure III.18: Diagramme de stabilité

**vitesse d'apparition de l'instabilité (onset of instability speeds).**

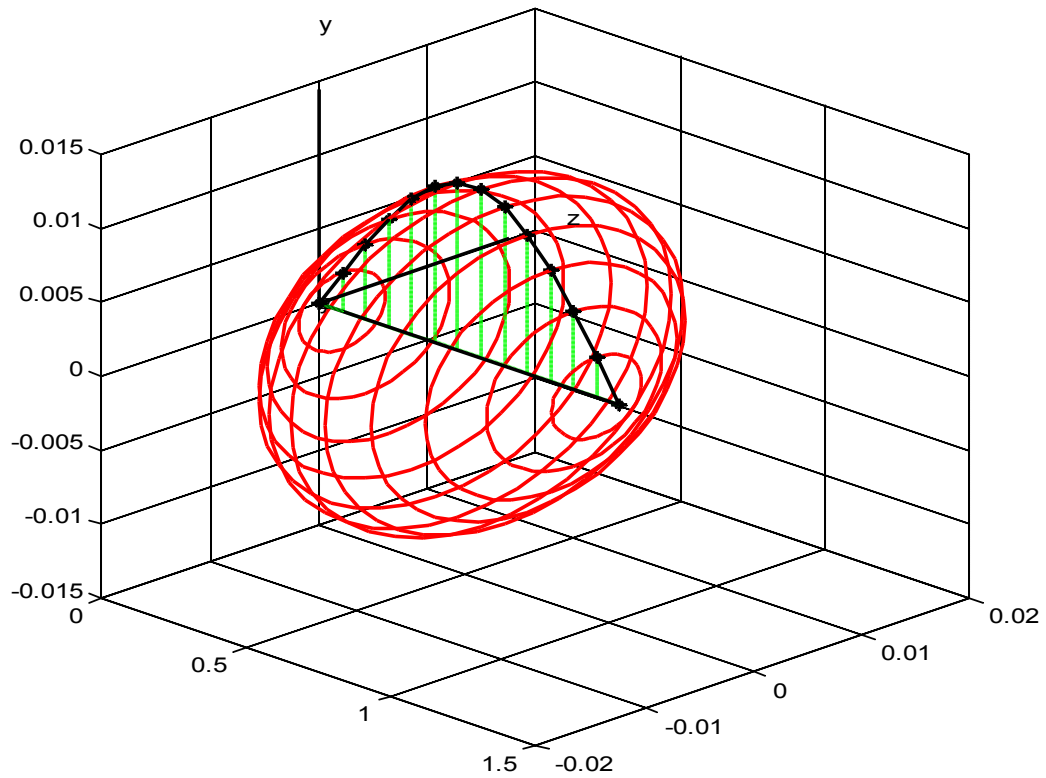
Mode	(Hz)	(tr/min)
1	1.5276e+002	9.1656e+003
2	2.7527e+002	1.6516e+004
3	4.1101e+002	2.4661e+004
4	3.5044e+002	2.1026e+004

### • Mode de précession

Les figures ci-dessous montrent les formes modales des fréquences qui montrent l'instabilité du système aux différentes vitesses de rotations qui permettent d'éviter la rotation au voisinage de ces vitesses.

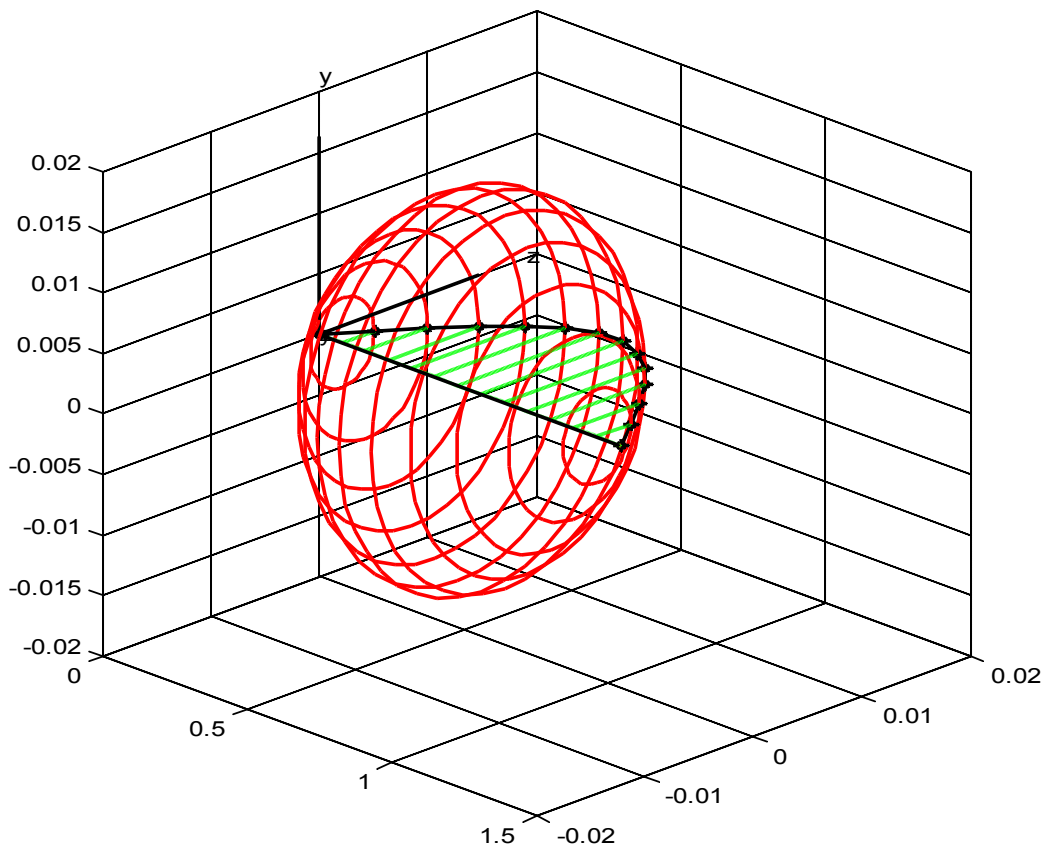


Mode # 1 PI = 1198.1919 tr/min pour une vitesse de rotation = 800 tr/min



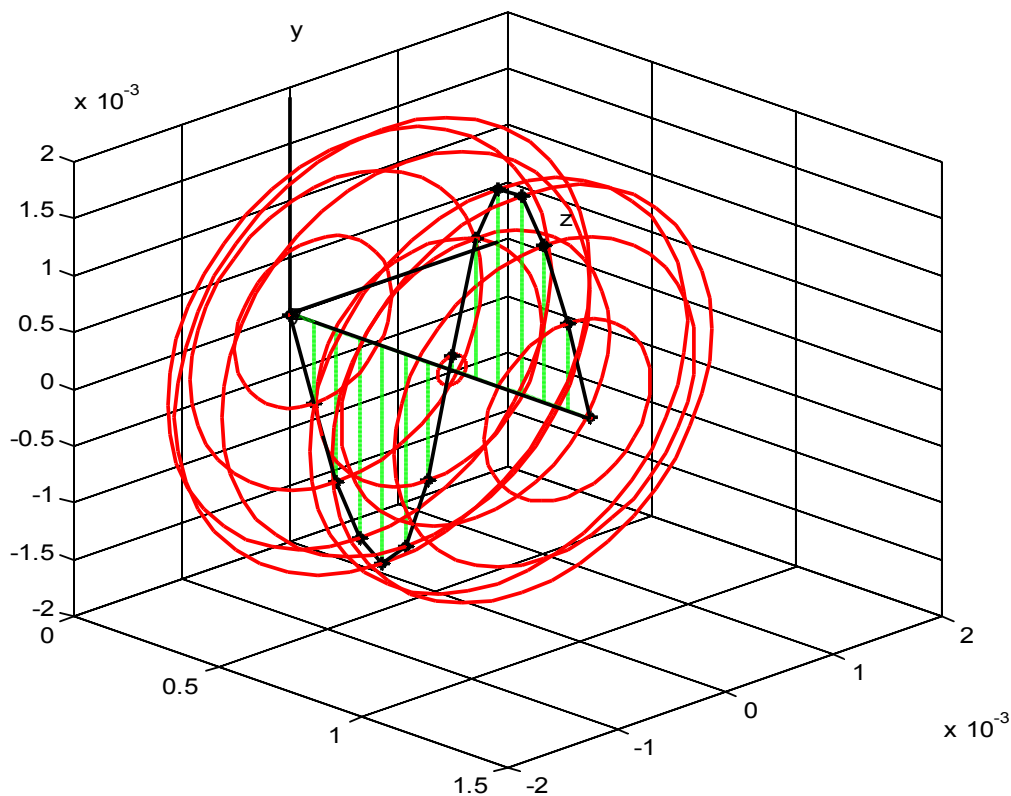
Mode 1-Précession indirecte pour  $v=800\text{tr/min}$

Mode # 2 PD = 1199.3604 tr/min pour une vitesse de rotation = 1600 tr/min



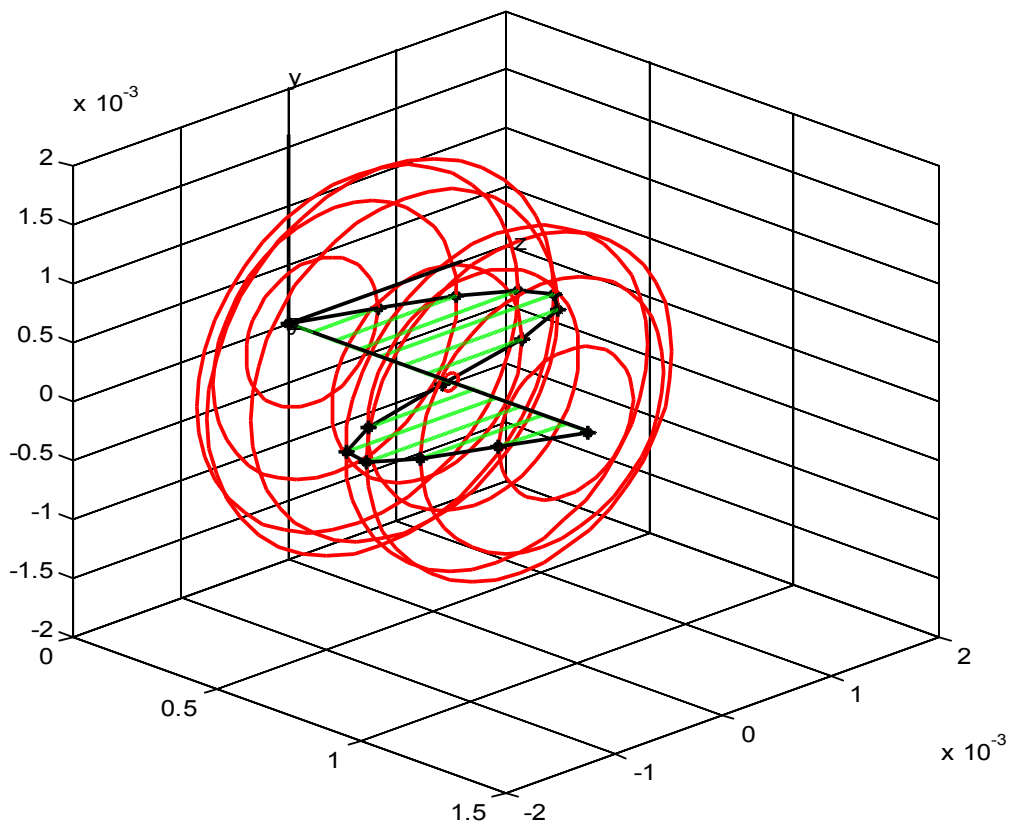
Mode 2-Précession directe pour  $v=1600\text{tr/min}$

Mode # 3 PI = 4561.3954 tr/min pour une vitesse de rotation = 1600 tr/min



Mode3-Précession indirecte pour  $v=1600\text{tr/min}$

Mode # 4 PD = 5590.0394 tr/min pour une vitesse de rotation = 2400 tr/min



Mode 4-Précession directe pour  $v=2400\text{tr/min}$

### **III.10. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons étudié le comportement dynamique et l'instabilité d'un palier hydrodynamique et leur influence sur les machines tournantes.

L'étude des paliers hydrodynamiques a permis la détermination de ces performances qui jouent un rôle très important dans la connaissance du comportement dynamique des rotors et lignes d'arbres. Ainsi la considération des phénomènes d'instabilité doit faire l'objet d'une attention particulière. Pour cela, on s'est intéressé aux caractéristiques dynamiques des paliers et notamment la marge de la fréquence propre sur la stabilité des turbomachines.

## *Méthode des plans d'expériences*

IV.1 Introduction.....	73
IV.2. Domaine expérimental.....	76
IV.3. Méthodologie des plans d'expériences .....	79
IV.4. Objectifs des plans d'expériences .....	81
IV.5. Notion de modélisation mathématique.....	81
IV.6. Types des plans d'expériences .....	83
• Plan de Plackett et Burman (PB) .....	84
IV.7. Méthodes d'analyse des plans d'expériences .....	85
IV.8. Matrice d'expérience .....	86
IV.8.1. Propriétés associées à la matrice d'un plan d'expérience.....	87
IV.8.2. Variables codées ou coordonnées centrées réduites .....	89
IV.9. Analyses statistique du modèle .....	90
IV.10. Analyse graphique du modèle.....	98
IV.10.1. Droite des effets de Henry.....	98
IV.10.2. Demi-droite des effets de Henry.....	99
IV.10.3. Traces des effets moyens.....	100
IV.10.4. Traces des interactions.....	102
IV.10.5. Diagramme de Pareto .....	103
IV.10.6. Surface et contours de réponses .....	104
IV.11. Conclusion .....	105

## IV.1 Introduction

Le terme plans d'expériences vient de l'anglais (Design of Experimentes (DOE)) qui se traduit par planification des expériences, la méthode englobe aussi bien la définition de la séquence d'essais à réaliser pour étudier un problème donnée que l'analyse statistique des résultats de ces essais permettent d'avoir un maximum d'information avec un minimum d'expériences, quel que soit le domaine d'étude ,on cherche à obtenir des bonnes informations dans les meilleurs délais et pour le moindre coût pour résoudre le problème. les plans d'expériences peuvent être utilisés pour étudier des phénomènes complexes souvent non linéaires, afin de comprendre leur fonctionnement et d'optimiser leurs performances [80].Dune manière générale cette technique est une stratégie optimale permettant d'organiser au mieux les essais qui accompagnent une recherche scientifique ou des études industrielles et se révèle plus efficace que les démarches habituelles de conduite des essais, c'est-à-dire, qu'elle permet d'arriver aux mêmes résultats avec un nombre d'essais moindre tout en assurant à l'expérimentateur plus de sûreté et de précision sur les résultats attendus et de fournir le meilleur protocole expérimental pour modéliser ou prédire une réponse à partir d'essais (ou calculs numériques simulant les essais) basée sur des outils statistiques en fonction des facteurs de variabilité, selon un modèle présumé et permet d'obtenir une maximum d'informations concernant l'influence des paramètres opératoires sur un processus ou un système, ainsi que la meilleure précision possible sur la modélisation des résultats ,et de structurer les expériences et chercher la relation entre les facteurs d'entrée et les réponses de sortie.

La Méthodologie des Plans d'Expériences (MPE) est une méthode qui a été développés et mis en pratique par le matimaticien britannique .Elle se base sur le fait qu'une expérience convenablement organisée, conduira fréquemment à une analyse et à une interprétation statistique relativement simple des résultats de manière efficace et économique. Après 1945, les plans d'expériences suscitent de nombreuses publications et recherches dans le monde anglo-saxon. Des statisticiens comme Yates, Cochran, Plackett et Burman, découvrent la méthode de ces nouveaux plans permettent l'étude d'un grand nombre de facteurs auxquelles, on affecte deux

modalités ce qui facilite l'analyse des résultats d'essais et respectent les règles d'orthogonalité. La taille des plans de ce type est égale au multiple de quatre directement supérieur au nombre d'inconnues du modèle additif sans interactions. G.E.P.Box et J.S.Hunter[81] en s'appuyant sur les travaux de Yates[82], développent des méthodes particulières de construction de plans d'expériences fractionnaires à deux niveaux (criblage), ils s'intéressent à l'étude des facteurs quantitatifs et introduisent, dans les années 60, les modèles de surface de réponses associés à des plans comme des plans composites centrés à partir des années 50, le Japon imprime un nouveau souffle en s'attaquant à l'amélioration de la qualité. Taguchi élabore des tables permettant de construire des plans d'expériences adaptés à la majorité des problèmes industrielles.

Le principe général de plan d'expérience et de rechercher la combinaison des facteurs d'entrée qui donne systématiquement le meilleur résultat en sortie afin de résoudre des problèmes complexes où un grand nombre de variables sont modélisés mathématiquement et de mettre une méthodologie rigoureuse afin d'optimiser la démarche de résolution qui permettent d'organiser au mieux les essais qui accompagnent une recherche scientifique. L'application des plans d'expériences à la simulation numérique est soumise aux spécificités du processus qui repose sur la définition des quatre étapes suivantes (figure IV.1).

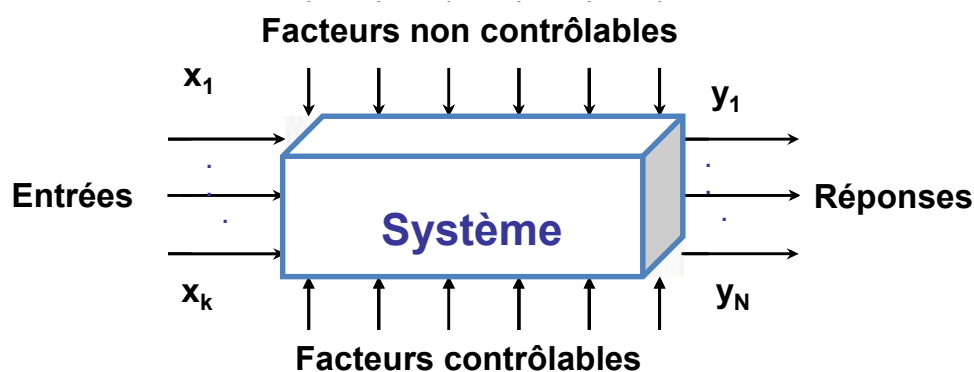


Figure IV.1: Schéma simplifié d'un système donné

- **les facteurs contrôlables** : qui dépendent directement du choix du technicien.
- **les facteurs non contrôlables** : qui varient indépendamment du choix du technicien (conditions climatiques, environnement d'utilisation...)

Deux cas sont à considérer selon la nature de ces facteurs : facteurs qualitatifs ou quantitatifs (figure IV.2)[83].

**Un facteur qualitatif** : une variable est quantitative lorsqu'elle prend ses valeurs sur une échelle numérique. C'est aussi une variable que l'on appelle continue. Ces facteurs sont destinés à l'étude des effets qui s'effectue lorsqu'il y a nécessité de faire un choix (à cause des limites économiques) entre les différents facteurs. Il faudra donc justifier le nombre et le choix des modalités en fonction des besoins d'information recherchée en terme d'effet des facteurs.

**Un facteur quantitatif** : une variable est qualitative lorsqu'elle prend des modalités non numériques continues. C'est aussi une variable que l'on appelle discrète. Le choix du nombre de niveaux et la valeur prise  $U_i$  par chaque facteur à chacun des niveaux est défini par le plan d'expériences choisi et l'étendue de ces facteurs. L'étendue de variation de ces facteurs est matérialisée à partir de deux limites  $U_{\min}$  et  $U_{\max}$  à l'intérieur desquelles on définira les niveaux  $U_i$  imposés par le plan d'expériences.

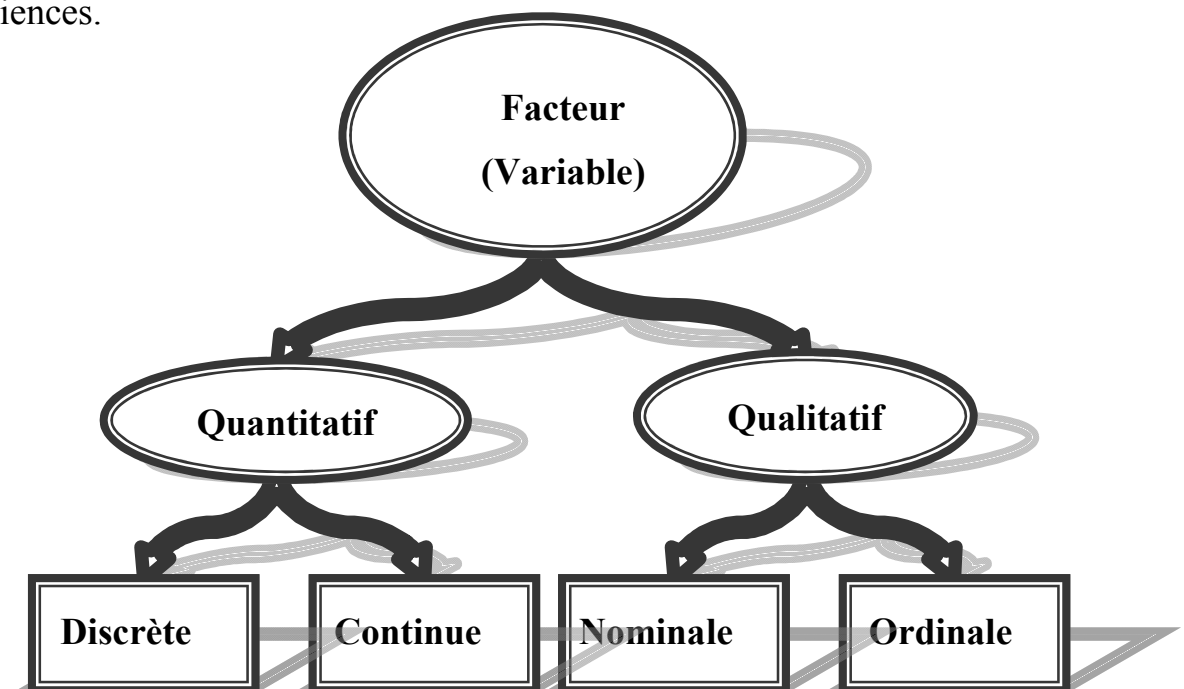


Figure IV.2: Différents types de variables

• **les facteurs d'entrée** : dont on cherche à analyser une influence et une cause possible de variation de la réponse. Un facteur est une variable de prédiction qui varie en vue de l'évaluation de son effet sur la variable de réponse

• **Réponses** : La réponse (variable de sortie) correspond à un paramètre de sortie du système étudié, mesurée afin de connaître les effets des facteurs sur le système étudiés ou les grandeurs de sortie. Dans le cadre des processus d'optimisation, la grandeur étudiée dont on cherche les meilleures valeurs est généralement appelée fonction objectif ou fonction réponse.

Une réponse doit être représentative, quantifiable et la moins dispersée possible pour des variables d'entrées maîtrisées et constantes. En effet, les méthodes d'analyses des résultats d'essais telles que l'analyse de variance ou l'analyse de régression au sens des moindres carrés, s'appuient sur des données exclusivement quantitatives. Par ailleurs, les réponses qualitatives qui n'est pas un critère quantitatif, pourront s'interpréter à partir d'un codage spécifique des modalités des réponses. La réponse est la grandeur mesurée à chaque essai ; le plan vise à déterminer quels facteurs l'influencent ou quelle est son évolution en fonction de ceux-ci. Cette grandeur est le plus souvent mesurable mais elle peut également être qualitative. La méthodologie des plans d'expériences aide l'expérimentateur à résoudre les problèmes suivants [84] :

la sélection des facteurs qui influencent la réponse.

- la modélisation des variations de la réponse du système en fonction des fluctuations des facteurs et la validation expérimentale par une équation mathématique.
- la détermination de la (ou des) combinaison(s) de facteurs conduisant à une optimisation de la réponse.
- Diminution du nombre des essais.
- Détection des interactions entre facteurs
- Meilleure précision sur les résultats
- Modélisation des résultats et obtention de l'optimum

## IV.2. Domaine expérimental

Le domaine expérimental délimite la zone d'étude des facteurs. Il est différent selon le problème de l'expérimentateur (plan de criblage ou plan d'optimisation). Dans les deux cas, il représente les combinaisons d'expériences choisies parmi



l'ensemble des combinaisons possibles des facteurs principaux. Un domaine d'étude est défini comme l'ensemble de tous les points de la surface de réponse délimitée par les niveaux bas et haut de chaque facteur, c'est donc un espace multidimensionnelle dans lequel chaque point représente un "traitement". Un expérimentateur qui lance une étude s'intéresse à une grandeur qu'il mesure à chaque essai. Cette grandeur s'appelle la réponse, c'est la grandeur d'intérêt. Mathématiquement, cette réponse est représentée par  $f(x)$ . Les variables de sortie d'un simulateur sont la plupart du temps vectorielles. Pour simplifier, nous ne supposons que  $y \in \mathbb{R}$ . La valeur de la réponse simulée au  $i$ -ième point.

$$x^i = (x_1^i \dots x_d^i) \in \mathbb{R}^d \text{ sera notée par : } y_i = f(x^i).$$

Aussi, le vecteur des réponses sur le plan d'expériences est de la forme :

$$Y = (y_1, \dots, y_n) = f(x^1), \dots, f(x^n)$$

La valeur de cette grandeur dépend de plusieurs variables. Au lieu du terme «variable» on utilisera le mot facteur. La réponse dépend donc de un ou de plusieurs facteurs. Le premier facteur peut être représenté par un axe gradué et orienté (figure IV.3). La valeur donnée à un facteur pour réaliser un essai est appelée niveau. Lorsqu'on étudie l'influence d'un facteur, en général, on limite ses variations entre deux bornes. La borne inférieure est le niveau bas. La borne supérieure est le niveau Haut [85].

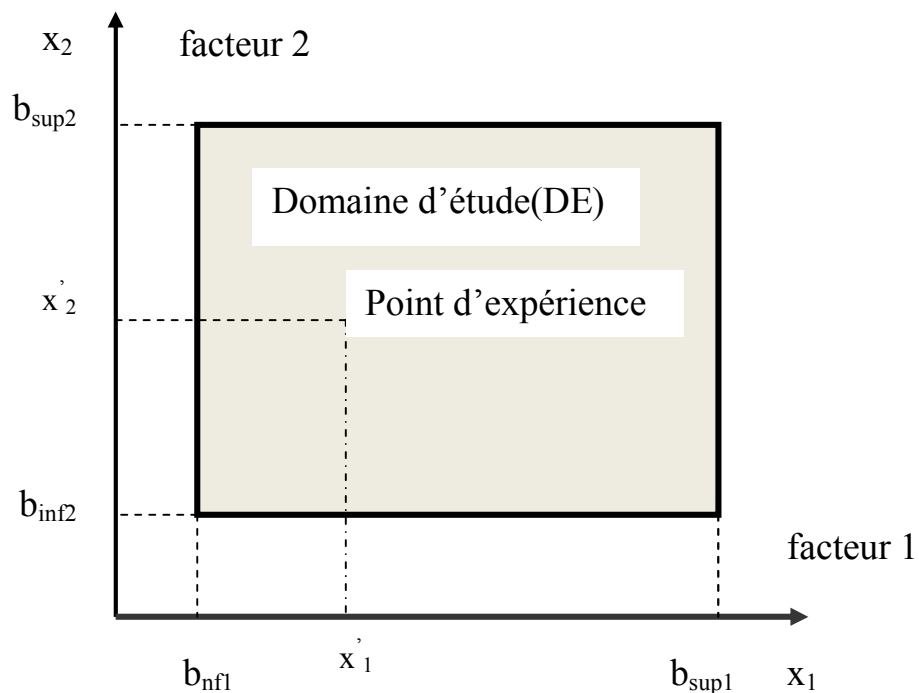


**Figure IV.3:** Domaine de variation du facteur

L'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre le facteur entre le niveau bas et le niveau haut, s'appelle le domaine de variation du facteur ou le domaine du facteur. On a l'habitude de noter le niveau bas par  $-1$  et le niveau haut par  $+1$ . Le niveau  $x_1$  du facteur 1 et le niveau  $x_2$  du facteur 2 peuvent être considérés comme les coordonnées

d'un point de l'espace expérimental qui représente Une expérience donnée dans ce système d'axes.

Un plan d'expériences est représenté par un ensemble de points expérimentaux. Le regroupement des domaines des facteurs définit le «domaine d'étude» les points intérieurs de ce domaine sont les points d'expériences, car ils sont la traduction mathématiques, par leurs coordonnées, des combinaisons de valeurs des grandeurs physiques leur correspondant. Ce domaine d'étude est la zone de l'espace expérimental choisie par l'expérimentateur pour faire ses essais. Une étude, c'est-à-dire plusieurs expériences bien définies, est représentée par des points répartis dans le domaine d'étude, on peut représenter le domaine d'étude (DE) comme une zone rectangulaire limitée par les bornes prises par les 2 facteurs  $x_1$  et  $x_2$  ( $[b_{inf1}, b_{sup1}]$  et  $[b_{sup2}, b_{inf2}]$  respectivement) (figure IV.4). Cette façon de représenter une expérimentation par des points dans un espace cartésien est une représentation géométrique de l'étude.



**Figure IV.4:** Définition du domaine d'étude.

La représentation géométrique de la réponse s'effectue donc dans un espace ayant une dimensionnelle plus que celle de l'espace expérimental [86]. À l'ensemble de tous les points du domaine d'étude correspond un ensemble de réponses qui se localisent sur une surface appelée surface de réponse (figure IV.5).

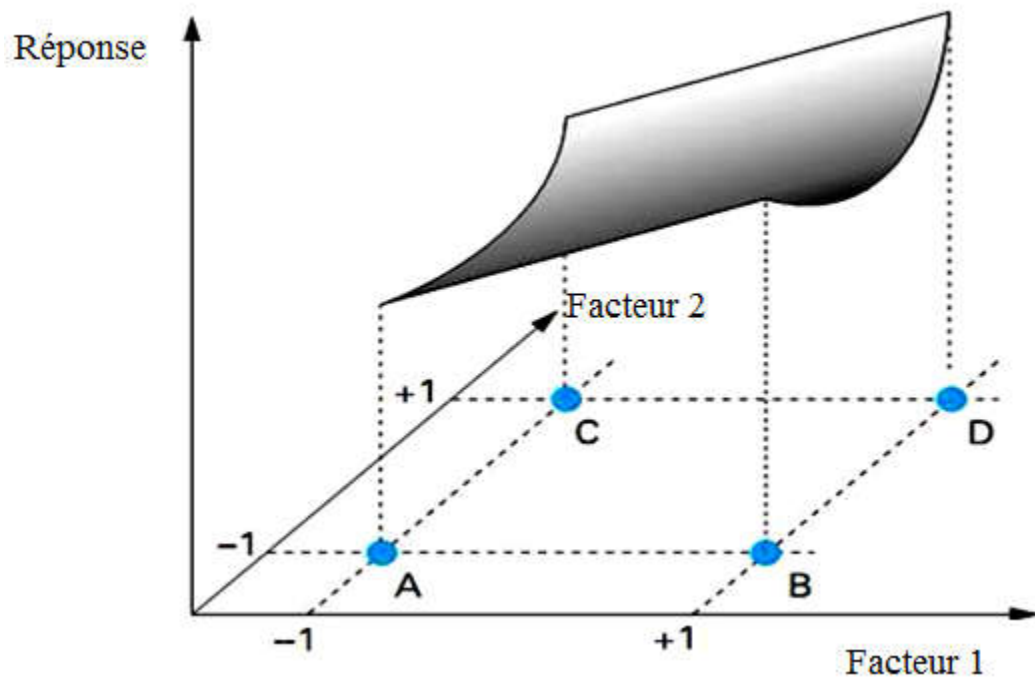
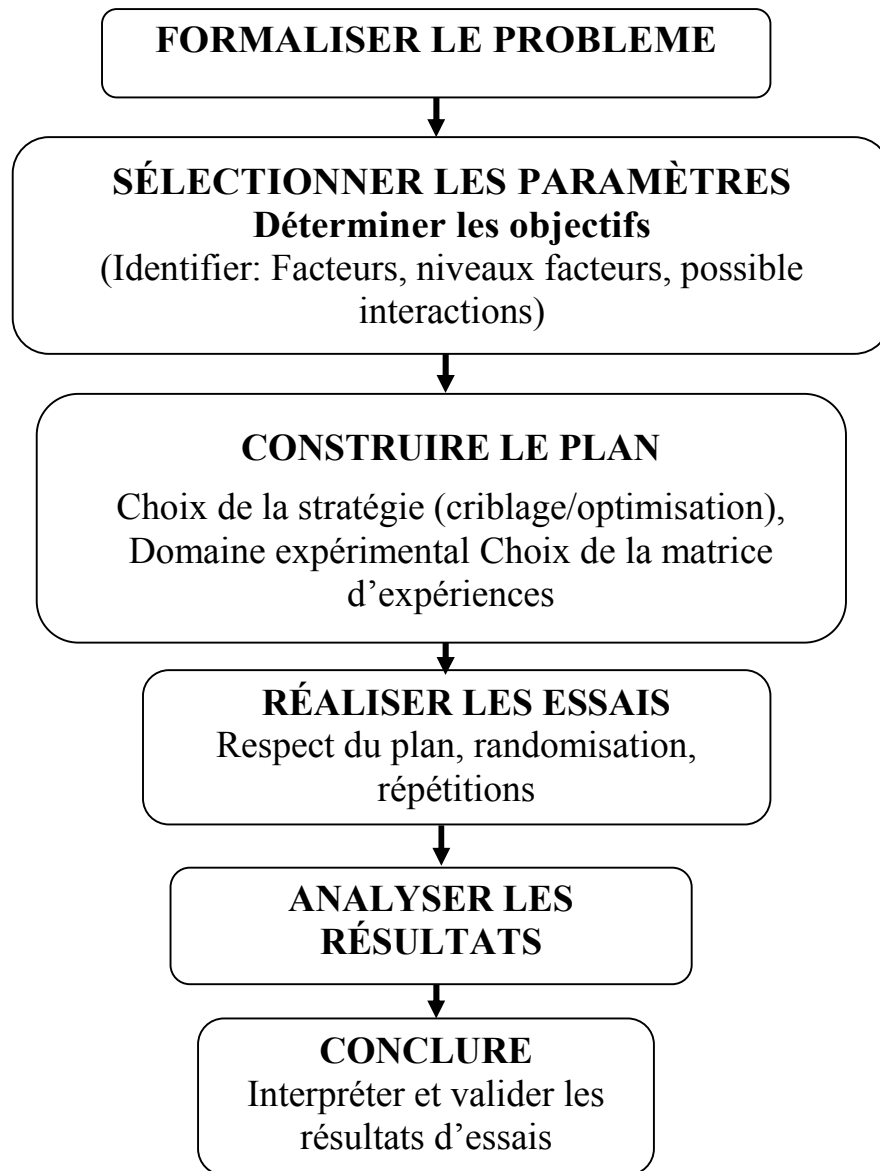


Figure IV.5: Domaine expérimental et surface de réponse.

### IV.3. Méthodologie des plans d'expériences

Toute expérience doit être l'objet d'une planification précise qui se concrétise sous la forme d'un plan d'expériences ou protocole expérimental.[87]. La simulation numérique consiste à mettre la puissance de calcul informatique au service des activités de simulation. Cette évolution, suivant les progrès des technologies de l'information ont permis d'obtenir des prédictions de comportement plus précises, plus rapidement, et pour des phénomènes et des systèmes plus complexes. Pourtant, toutes ces possibilités peuvent provoquer un besoin d'expertises avancées et la génération d'une grande quantité de données. Le processus de simulation numérique peut être décomposé en plusieurs étapes (figure IV.6).



**Figure IV.6:**Etapes du processus de simulation numérique [88].

Le processus de simulation numérique est un processus complexe. De nombreux choix conditionnent la qualité des résultats finaux. Ce processus peut nécessiter un temps important pour modéliser le problème, le discrétiser, le résoudre et analyser ses résultats. Il peut être nécessaires de réaliser plusieurs essais avant de trouver la bonne stratégie ,par contre il existe aussi de nombreuses sources de variations présentes lors de l'initialisation et du déroulement des processus d'expérimentation numérique. Indépendamment de la méthode des plans d'expérience (MPE), parmi les sources de variations on peut citer :

- La précision des données d'entrée, compréhension du phénomène à modéliser.
- Les possibilités réelles des logiciels utilisées pour la modélisation.

- Degré de simplification adopté pour le modèle proposé.
- Caractéristiques du maillage du modèle.
- Capacité de l'ordinateur, etc.

De plus il faut tenir compte aussi des inconvénients liés à la MPE :

- Type de plan utilisé.
- Type de modélisation utilisée, etc.

#### IV.4. Objectifs des plans d'expériences

La compréhension de la méthode des plans d'expériences s'appuie sur deux notions essentielles, celle d'espace expérimental et celle de modélisation mathématique des grandeurs étudiées, avec les objectifs sont:

- Diminuer le nombre d'essais (ou de calculs).
- Connaître les effets des paramètres.
- Dédire les paramètres influents.
- Évaluer les interactions entre paramètres.
- Avoir une meilleure précision sur les résultats.
- Établir une modélisation mathématique de la réponse.

#### IV.5. Notion de modélisation mathématique

Le modèle choisit et une fonction mathématique qui relie la réponse aux facteurs  $x_1, x_2, \dots, x_K$  et la réponse étudiée. La fonction  $\mathcal{Y} = f(x_1, x_2, \dots, x_K)$  correspondant à une surface de réponse, on prend un développement limité de la série de Taylor-Mac Laurin [89]. Si les dérivées du développement de Taylor peuvent être considérées comme constantes, le développement prendra la forme d'un polynôme de degré plus au moins élevé.

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum a_{ii} x_i^2 + a_{ij\dots z} x_i x_j \dots x_z \quad (\text{IV. 1})$$

- $y$  est la réponse ou la grandeur d'intérêt. Elle est mesurée au cours de l'expérimentation et elle est obtenue avec une précision donnée.
- $x_i$  représente le niveau attribué au facteur  $i$  par l'expérimentateur pour réaliser un essai. Cette valeur est parfaitement connue. On suppose même que ce niveau est déterminé sans erreur (hypothèse classique de la régression).

•  $a_0, a_i, a_{ij}, a_{ii}$  sont les coefficients du modèle mathématique adopté a priori. Ils ne sont pas connus et doivent être calculés à partir des résultats des expériences.

Ce modèle mathématique du mathématicien est caractérisé par l'absence d'erreur expérimentale, alors que la représentation polynomiale de la réponse permet l'utilisation du calcul matriciel, et aussi de faire apparaître dans l'expression elle-même les effets des facteurs, ainsi que leurs interactions. Les réponses mesurées au cours d'une expérimentation sont entachées d'une incertitude appelée erreur expérimentale ou erreur de mesure ou erreur pure. Ceci est dû à la variation de certains paramètres qui ne sont pas connus par l'expérimentateur. Deux compléments doivent être apportés au modèle précédemment écrit. Le premier est le manque d'ajustement ou bien l'erreur d'ajustement. Cette expression traduit le fait que le modèle choisi par l'expérimentateur avant les essais est probablement un peu différent du modèle réel qui régit le phénomène étudié. Il y a un écart entre ces deux modèles. Cet écart est le manque d'ajustement ( $\Delta$  Lack of Fit). Le second est la prise en compte de la nature aléatoire de la réponse. En effet si l'on mesure plusieurs fois une réponse en un même point expérimental, on n'obtient pas exactement le même résultat. Il y a une dispersion des résultats. Les dispersions ainsi constatées sont appelées erreurs aléatoires  $\sigma_y$ . Ces deux écarts sont souvent réunis dans un seul écart, le résidu. Le modèle utilisé par l'expérimentateur s'écrit alors :

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ii} x_j^2 + a_{ij\dots z} x_i x_j \dots x_z + \Delta + \sigma_y \quad (\text{IV. 2})$$

Ce modèle se compose de trois parties. La première partie est un modèle du mathématicien, la seconde partie est l'écart d'ajustement. La troisième partie est l'erreur aléatoire. L'objectif de l'expérimentateur est de réduire ce terme pour le ramener à une valeur de l'ordre de grandeur de l'erreur expérimentale. Cette erreur est due à la variation des niveaux des facteurs non contrôlés. Le modèle précédent est trop compliqué pour faire des calculs. On effectue les simplifications suivantes:

- L'erreur d'ajustement entre le modèle choisie à priori et le modèle réel est supposée négligeable.
- Les erreurs aléatoires sont issues d'une même population, pour tout le domaine d'étude.

Il s'agit de valeurs ayant la même moyenne, le même écart type et provenant de la même distribution. Il faut bien voir que les valeurs de l'erreur sont différentes les unes des autres, Puisqu'elles résultent de tirages au hasard dans une population donnée. Pour un modèle polynomial du second degré à deux facteurs, le modèle statistique s'écrit [90]:

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \dots + \sum a_{ii} x_i^2 + a_{ij\dots z} x_i x_j \dots x_z + \sigma_y \quad (\text{IV.3})$$

Cette expression polynomiale s'écrit également sous forme matricielle :

$$y = Xa + \sigma_y \quad (\text{IV.4})$$

Cette équation est résolue grâce à des logiciels de calcul .Dans le cas de plans factoriels, le plan est toujours saturé c'est-à-dire qu'il y égalité entre le nombre d'expériences N (nombre de lignes de la matrice d'expériences) et le nombre de coefficients du polynôme modélisateur (nombre de colonnes de la matrice d'expériences). Les matrices X sont alors dites d'Hadamard. Ces matrices ont les propriétés spécifiques suivantes [91]:

- ses éléments sont soit + 1 , - 1.
- ces matrices sont carrés et ont un nombre de lignes (ou colonnes) égal à 2 ou multiple de 4 .
- ces matrices sont orthogonales, c'est-à-dire que le produit scalaire de deux lignes (ou deux colonnes) est égal à zéro .

#### IV.6. Types des plans d'expériences

Il existe de nombreux types de plans d'expériences et le choix de l'un d'eux peut s'avérer difficile. Le principe de ce choix est de sélectionner le plan le plus rentable, présentant le moins d'expériences possible pour obtenir le plus d'informations possible. Ce choix dépend de l'objectif fixée, des méthodes d'analyse utilisées, des contraintes expérimentales, des ressources, du comportement étudié (liée aux facteurs et aux variables d'intérêt) et de l'expertise à disposition. Cette section dresse une liste non-exhaustive et synthétique des plans d'expériences existants. Deux types des plans peuvent être distingués [92]:

- les plans "usuels" ont été conçus pour des applications sur des systèmes réels, plus spécifiquement utilisés pour des applications numériques, dont le but principal est de générer une distribution d'expériences remplissant de la meilleure façon le domaine expérimental. D'autre part, les plans usuels sont associés à un modèle empirique polynomial pour analyser les résultats. Parmi ces plans, les plans factoriels complets sont les plus simples à concevoir mais sont très coûteux, puisqu'ils couvrent toutes les combinaisons de niveaux entre tous les facteurs. Les plans factoriels fractionnaires sont des sous-ensembles de plans factoriels complets moins coûteux d'utiliser, ce qui conduit à négliger, a priori, l'influence de certains facteurs ou interactions sur la réponse.
- Autres plans proposent un nombre limité d'expériences pour la modélisation de surface de réponse (modèle empirique) et l'analyse de sensibilités, tel que : les plans composites, les plans de Box-Behnken, Doehlert, Taguchi et les plans de Plackett- Burmann. Certains de ces plans sont aussi limités en termes de nombre de facteurs.
- Les plans d'expériences « space-filling » (remplissage de l'espace) sont plus spécifiques aux applications numériques. Ils permettent de définir un grand nombre d'expériences et de traiter un grand nombre de facteurs et de niveaux. De nombreux plans sont basés sur la recherche d'une distribution des expériences la plus uniforme possible en évitant les manques d'expériences au sein du domaine expérimental. Tel que le plan de Strauss, Les plans WSP, les plans basés sur des suites telles que les suites de Halton.

#### • Plan de Plackett et Burman (PB)

C'est en 1946 que Plackett et Burmann[93] ont publié le célèbre article "The designs of optimal multi factoriel experiment", dans lequel il est décrit comment construire des plans permettant d'étudier un grand nombre de facteurs avec peu d'essais. Ils indiquent toutes les matrices  $(n, n)$  à partir de  $n = 8$  et jusqu'à  $n = 100$  qu'il est possible de construire sauf la matrice  $(96, 96)$ , laquelle était plus tard donnée par Baumert, Golomb et Hall en 1962. Un PB dit plan de criblage ou matrice d'Hadamard est une fraction d'un plan factoriel complet  $2^k$  qui permet d'estimer un



modèle d'ordre 1 pour  $k$  facteurs quantitatifs ou qualitatifs à deux niveaux. Le nombre d'essais  $n$  est un multiple de  $4 > k + 1$ . Les conceptions de PB utilisent deux niveaux pour chaque facteur, de plus le haut niveau étant dénoté « + » et l'inférieur dénoté « - », les différentes expériences d'essai sont assignés d'une façon cyclique. De plus, ces facteurs peuvent affecter la réaction de système interactivement, c.-à-d. l'effet d'un facteur peut dépendre des niveaux de d'autres.

L'analyse statistique du modèle est l'étape principale de l'analyse des résultats des facteurs qui affectent de manière significative la réponse observée. Le modèle mathématique est suivant :

$$y = a_0 + \sum a_i x_i \quad (\text{IV. 5})$$

Ces plans sont utilisés pour sélectionner les facteurs les plus influents sur la réponse  $Y$  et où les interactions sont négligeables ou supposées négligeables.

La construction d'un plan de Plackett et Burmann est basée sur la duplication de lignes ou de colonnes contenant une alternance particulière de signes négatifs et positifs, par simple permutation circulaire. L'estimation des effets moyens des facteurs s'effectue en comparant la moyenne des réponses observées pour chacune des modalités des facteurs. Cette comparaison est d'autant plus équitable que l'on introduit le même nombre d'observations dans chacune des moyennes et que ces observations sont nombreuses. C'est pour cette raison que l'on retrouve le même nombre de signes positifs et négatifs dans chaque colonne du tableau. Par ailleurs, chaque fois qu'un facteur est affecté d'un signe positif ou négatif dans une colonne, l'ensemble des autres facteurs apparaît un même nombre de fois avec un signe positif et avec un signe négatif dans les autres colonnes.

#### IV.7. Méthodes d'analyse des plans d'expériences

Il existe de nombreuses méthodes permettant de décrire qualitativement ou quantitativement la sensibilité d'une réponse par rapport aux facteurs. Les principales méthodes des PE, liées à des utilisations et d'investigations différents sont [94]:

- les méthodes de criblage (*screening*) permet de déterminer, parmi un ensemble initial de facteurs, les éléments influents. Il s'agit donc d'un procédé technique utilisée dans la méthode des plans d'expérience permet de déterminer, parmi les

facteurs recensés ceux qui ont une influence statistiquement non négligeable sur les variations de la réponse.[94]La technique de criblage permet d'obtenir un maximum d'informations concernant l'influence des paramètres opératoires sur un processus ou un système, ainsi que la meilleure précision possible sur la modélisation des résultats . À l'aide de cette technique, on réalise la comparaison entre les variations de la réponse engendrées par deux sources différentes :

- ✓ les variations des facteurs étudiés .
  - ✓ les variations de grandeurs considérées comme n'ayant pas d'effet sur la réponse.
- Méthode de la Surface de Réponse (MSR) (Response Surface Methodology (RSM))s'appuient sur des tests d'hypothèses statistiques pour quantifier l'influence des facteurs permettant de calculer les variations de la fonction-réponse en fonction des facteurs considérés comme influent. Ces méthodes sont basé sur une relation d'approximation entre la réponse mesurée  $y$  et  $n$  variables aléatoires (les facteurs étudiés) en utilisant les données observées d'un processus ou d'un système. Le choix d'une méthode d'analyse dépend principalement de la nature du comportement du modèle numérique , du nombre de facteurs et du coût de chaque expérience.

#### **IV.8. Matrice d'expérience**

La matrice d'expérience définit les essais à réaliser, le terme essai est l'équivalent de point d'expérience. Le choix de la matrice  $X$  du plan d'expérience dépend de la forme du modèle proposé ou plus généralement des objectifs fixés. La diversité des domaines d'application a conduit à mettre en évidence de nouvelles propriétés (qualitatives ou quantitatives) et à proposer de nouvelles matrices de plans d'expériences. Certaines de ces propriétés ont été quantifiées et ont ainsi constitué des critères de qualité. Les critères les plus importants peuvent être rangés dans une des trois classes [95]:

- La première classe regroupe les propriétés des matrices d'expériences elles-mêmes.

- La deuxième classe fait référence à la qualité des estimateurs des coefficients du modèle mathématique postulé.
- La troisième classe porte sur la qualité prévisionnelle du modèle mathématique.
- Ces différentes propriétés dépendent de la structure de la matrice X du plan d'expériences choisi et elles peuvent être déterminées avant qu'aucune expérience n'ait été effectuée. Hadamard a montré que la matrice X devait aussi vérifier la condition:

$${}^t X \cdot X = N \cdot I \quad (\text{IV. 6})$$

où  ${}^t X$  est la matrice transposée de X, I la matrice identité et N le nombre d'expériences réalisées. N doit être un multiple de 4.

Il existe un grand nombre de matrices d'expériences disponibles mais, il est également possible de les construire pour pouvoir adapter le plan à un problème.

#### **IV.8.1. Propriétés associées à la matrice d'un plan d'expérience**

##### ***Nombres d'expériences***

Toute expérimentation est soumise à des contraintes liées au coût de l'expérience et à sa durée. En effet, des modifications des paramètres mesurés peuvent avoir lieu si l'expérience dure dans le temps par exemple. Il est donc naturel de chercher à réaliser un nombre minimal d'expériences permettant d'obtenir des informations de qualité suffisante pour répondre aux questions posées (Cf. Drobeky, 1997).

##### ***Nombre de niveaux de chaque variable***

Les matrices des plans d'expérience peuvent être soit symétriques ou asymétriques. Toujours pour des raisons souvent pratiques, certaines expériences peuvent s'avérer impossibles à réaliser ou même dangereuses et de ce fait, le domaine expérimental n'est plus un polygone régulier. Pour chaque facteur, on choisit le plus petit nombre de niveaux en les espaçant au maximum afin de couvrir une région expérimentale exhaustive (Cf. Drobeky, 1997).

##### ***Séquentialité***

Si le plan réalisé s'avère insuffisant pour apporter l'information recherchée, l'addition de nouvelles expériences peut être souhaitable. Si des modifications

éventuelles sont prévisibles ou au moins soupçonnables dès le début de l'expérimentation, il faut choisir des matrices d'expériences qui possèdent la propriété de séquentialité ou complémentarité.

### ***Le "blocage"***

Des difficultés d'ordre pratique, impossibilité de faire toutes les expériences dans les mêmes conditions ou sur la même installation ou dans une durée suffisamment courte pour éviter l'évolution de certains facteurs non contrôlés incitent à partitionner la matrice d'expériences en blocs homogènes de taille suffisamment restreinte et gagner ainsi en précision (Cf. Drobeky, 1997).

### ***Orthogonalité***

L'orthogonalité est une propriété qui confère aux plans d'expériences des propriétés remarquables (un meilleur modèle de régression, une meilleure précision sur les coefficients, etc.). On considère qu'une matrice d'expérience  $X$  est dite orthogonale si sa matrice de dispersion  $(X^T X)^{-1}$  est diagonale. Il existe aussi le critère d'orthogonalité d'Hadamard pour les matrices qui satisfont la relation (IV.7) et qui portent son nom. Dans cette équation  $I_n$  représente la matrice identité d'ordre  $n$ .

$$X^T X = I_n \quad \text{(IV.7)}$$

L'orthogonalité implique notamment que :

- Les coefficients du modèle associé sont totalement décorrélés entre eux .
- Les coefficients estimés ont la meilleure précision possible.

On notera que les plans factoriels complets et fractionnaires ainsi que les plans de Plackett-Burman et de Taguchi sont construits à partir des matrices d'Hadamard, qui sont orthogonales.

### ***Presque-orthogonalité***

La propriété d'orthogonalité, qui est un critère d'optimalité, n'est pas toujours vérifiée. Toutefois des transformations sont possibles pour approcher cette condition en introduisant la propriété de "presque orthogonalité" qui consiste à rapprocher la matrice de dispersion d'une matrice diagonale. Ainsi, dans ce cas les coefficients estimés sont au plus corrélés avec le terme constant. Ainsi, dans ce cas les coefficients estimés sont au plus corrélés avec le terme constant.

### **Notion de degrés de liberté d'un modèle**

Le nombre de degrés de liberté (ddl) d'un modèle correspond au nombre de variables indépendantes qui le composent. Ainsi, le nombre de degré de liberté d'un modèle à  $k$  variables est de  $k+1$  ( $k$  ddl associés aux variables plus un ddl associé à la constante  $\beta_0$  du modèle qui est la moyenne arithmétique des réponses). Evidemment, la régression linéaire n'est possible que si le nombre de ddl du modèle est inférieur ou égal au nombre d'essais.

#### **IV.8.2. Variables codées ou coordonnées centrées réduites**

D'une manière générale, l'utilisation des variables centrées réduites présente l'intérêt de pouvoir généraliser la théorie des plans d'expériences quels que soient les facteurs ou les domaines d'études retenus. Remplacer les variables naturelles par les variables codées va permettre d'avoir pour chaque facteur le même domaine de variation et de pouvoir ainsi comparer entre eux l'effet des facteurs. Dans le cas où les variables sont codées, toutes varient entre les mêmes valeurs minimales et maximales (respectivement  $-1$  et  $+1$  notation largement acceptée quand il y a deux niveaux par facteur) elles n'ont plus de dimension. D'après Goupy [96]. Lorsque l'on attribue la valeur  $-1$  au niveau bas et la valeur  $+1$  au niveau haut, on effectue deux modifications importantes :

- on change l'unité de mesure.
- on déplace l'origine des mesures.

Ces deux modifications entraînent l'introduction de nouvelles variables que l'on appelle variables centrées réduites ou variables codées (centrées pour indiquer le changement d'origine et réduites pour signaler la nouvelle unité).

La formule permettant le passage des variables réelles aux variables codées  $x_k$  est donnée par la relation suivante :

$$x_j = \frac{y_j - y_j^0}{\Delta y_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad \text{(IV. 8)}$$

$$\text{d'où } \Delta y_j = \frac{y_{jmax} - y_{jmin}^0}{2}, \quad y_j^0 = \frac{y_{jmax} + y_{jmin}^0}{2}$$

avec :

- $x_1, x_2, \dots, x_k$ : Variables centrées réduites ou variables codées.
- $y_1, y_2, \dots, y_k$ : Facteurs contrôlables (variables réelles) .
- $y_1^0, y_2^0, \dots, y_j^0$  Variables réelles correspondantes au centre du plan ou parfois niveau fondamental.
- $\Delta y_j$  Unité ou intervalle de variation suivant l'axe des  $y_j$ .
- $y_{\min}$  Valeur minimale de la variable réelle .
- $y_{\max}$  Valeur maximale de la variable réelle.

Les variables  $x_j$  sont appelées variables centrées réduites et elles sont utilisées pour faciliter les comparaisons et l'étude des variations. En travaillant avec ces variables codées, nous pouvons comparer directement leurs différents effets sans tenir compte de leurs unités.

#### IV.9. Analyse statistique du modèle

L'équation du modèle mathématique calculé n'est qu'une approximation de la réalité, la mise en œuvre de tests statistiques nous permet d'identifier les effets probablement « significatifs » ou « actifs » des facteurs et de porter un jugement sur les résultats obtenus et de connaître la qualité des estimations des coefficients c'est-à-dire de fournir à l'utilisateur une valeur limite numérique qui peut être tracée sur la représentation graphique et qui permet de définir, de manière moins subjective ce qui est important de ce que ne l'est pas.

##### • Analyse de la variance (ANOVA)

Les techniques d'analyse de la variance abrégée en ANOVA permettent de déterminer à partir de quel seuil un effet peut être considéré comme significatif et avoir une influence sur la réponse  $Y$ . L'analyse de la variance permet d'estimer si les effets calculés sont significatifs ou s'ils proviennent de facteurs non contrôlés (non étudiés dans le plan), elle se décompose en deux phases, la première consiste à décomposer la somme des carrés des réponses mesurées, diminuée de la somme des carrés de la moyenne, en plusieurs carrés, cette somme de carrés est décomposée en deux carrés, l'un relatif au modèle mathématique, l'autre au résidus. La seconde phase consiste à évaluer l'importance de ces différents carrés par rapport à la variance

de la réponse. Lorsqu'on connaît cette variance, on obtient une bonne estimation de l'importance des carrés, et lorsqu'on ne la connaît pas, on est amené à poser des hypothèses pour la remplacer.

Pour le modèle des moindres carrés, les  $N$  résultats expérimentaux  $y_i$  et les réponses calculées par le modèle  $\hat{y}_i$  ont la même moyenne générale  $\bar{y}$ , les sommes des carrés vérifiant la relation [97]:

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 - \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2 \quad (\text{IV. 9})$$

L'égalité (IV. 10) peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^N y_i^2 = \sum_{i=1}^N e_i^2 + \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2 \quad (\text{IV. 10})$$

Retranchant  $N \bar{y}^2$  aux deux membres de l'égalité. On obtient :

$$\sum_{i=1}^N y_i^2 - N \bar{y}^2 = \sum_{i=1}^N e_i^2 - N \bar{y}^2 + \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2 \quad (\text{IV. 11})$$

La dispersion des  $y_i$  autour de leur moyenne, encore appelée dispersion totale, se décompose en deux part :

- La dispersion des  $\hat{y}_i$  autour de leur moyenne. Elle correspond à la dispersion expliquée par le modèle.
- La dispersion des écarts autour de leur moyenne correspond à la dispersion résiduelle. Elle est appelée somme des carrés des écarts.

Les degrés de liberté correspondant à chacune de ces sommes des carrés sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} N - 1 & \text{pour } \sum_{i=1}^N y_i^2 - N \bar{y}^2 \\ q & \text{pour } \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2 - N \bar{y}^2 \\ N - q - 1 & \text{pour } \sum_{i=1}^N e_i^2 \end{array} \right. \quad (\text{IV. 12})$$

Par définition la variance est obtenue en divisant la somme des carrés par le nombre de degrés de liberté de ces sommes. On obtient ainsi les variances :

$$\left\{ \begin{aligned} Var (tot) &= \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2 - N \bar{y}^2}{N - 1} \\ Var (ajust) &= \frac{\sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2 - N \bar{y}^2}{q} \\ Var (résid) &= \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{N - q - 1} \end{aligned} \right. \tag{IV. 13}$$

Les résultats de l'analyse de la variance des PE sont généralement présentés sous la forme du tableau IV.1 [98].

**Tableau IV.1:**Présentation générale d'un tableau d'analyse de la variance

Source de variation		ddl.	Sommes des carrés Des écarts	Carrés Moyens	F <sub>obs</sub>	F <sub>théo</sub>	p-valeur
Facteurs	a	p-1	SCE <sub>a</sub>	CM <sub>a</sub>	CM <sub>a</sub> /CM <sub>r</sub>	F <sub>(p-1 ; pq(n-1))</sub>	F <sub>ddla,ddlr, 1-α</sub>
	...	...	...	...	...	...	...
	b	q-1	SCE <sub>b</sub>	CM <sub>b</sub>	CM <sub>b</sub> /CM <sub>r</sub>	F <sub>(q-1 ; pq(n-1))</sub>	F <sub>ddlb,ddlr, 1-α</sub>
Interactions	...	...	...	...	...	...	...
	ab	(p-1)×(q-1)	SCE <sub>ab</sub>	CM <sub>ab</sub>	CM <sub>ab</sub> /CM <sub>r</sub>	F <sub>((p-1)(q-1) ; pq(n-1))</sub>	F <sub>ddlab,ddlr, 1-α</sub>
	...	...	...	...	...	...	...
Erreur		pq(n-1)	SCE <sub>r</sub>	CM <sub>r</sub>			
Total		pqn-1	SCE <sub>t</sub>				

### Qualité descriptive et prédictive du modèle

#### Coefficient de corrélation multiple R<sup>2</sup>

Le coefficient R<sup>2</sup> est aussi appelé coefficient de détermination.il donne une indication sur la qualité du modèle et des informations sur l'existence d'une relation linéaire entre les variables considérées.[102]Plus R<sup>2</sup> sera grand les réponses calculées seront fortement corrélées avec les réponses expérimentales[99].

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \hat{y}_i^2 - N \bar{y}^2}{\sum_{i=1}^{i=N} y_i^2 - N \bar{y}^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{i=N} e_i^2}{\sum_{i=1}^{i=N} y_i^2 - N \bar{y}^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \tag{IV. 14}$$



D'après cette formule on voit que le rapport  $R^2$  varie entre 0 et 1. S'il vaut zéro c'est que le modèle n'explique rien, s'il vaut 1 c'est que le modèle explique toutes les réponses mesurées, pour éviter cela que le coefficient de détermination ( $R_a^2$ ) a été introduit. Le  $R_a^2$  ajusté.

$R_a^2$  AJUSTÉ(R-sq(adj))

Par définition, le coefficient  $R^2_{ajuste}$  est la différence à 1 du rapport entre le carré moyen des écarts des résidus et le carré moyen des écarts expérimentaux.[103]la relation est donné par :

$$R^2_{ajusté} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} e_i^2}{N - q - 1}}{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} y_i^2 - N \bar{y}^2}{N - 1}} \quad (\text{IV. 15})$$

**R carré (prév) (R-sq(pred))**

La valeur  $R^2_{prévu}$  permet de déterminer la capacité du modèle à prévoir la réponse pour de nouvelles observations. Les modèles ayant des valeurs de  $R^2_{prévu}$  élevées ont une meilleure capacité de prévision. Par définition la qualité de l'ajustement est donné par la relation :

$$Q^2 = \frac{(\sum y_i^2 - N \bar{y}^2) - \sum_{i=1}^N \frac{e_i^2}{(1-h_i)^2}}{\sum y_i^2 - N \bar{y}^2} \quad (\text{IV. 16})$$

Où  $h_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal de la matrice  $X(X'X)^{-1}X'$

En général un  $Q^2$  d'une valeur 0,7 ou plus signifie que l'ajustement est d'une bonne qualité. Plus la valeur du coefficient de régression est proche de 1 et plus la qualité descriptive du modèle est satisfaisante. Il est également possible de traduire la qualité prédictive d'un modèle à partir du coefficient de corrélation prédictif  $Q^2$  calculé grâce à la formule :

$$Q^2 = 1 - \frac{\text{PRESS}}{\text{SCT}} \quad (\text{IV. 17})$$

$$\text{Dans lequel : } Press = \sum_{i=1}^N \frac{y_i - \hat{y}_i}{1 - h_{ii}} \quad (\text{IV. 18})$$

Avec :  $y_i$  la réponse mesurée au point  $i$ ,  $\hat{y}_i$  la réponse calculée par le modèle au point  $i$ ,  $h_{ii}$  le  $i$ ème terme diagonal de la matrice H définie comme :

$$H = X(X^t X)^{-1} X^t \quad (\text{IV. 19})$$

Dans la relation (IV.19), *PRESS* est l'abréviation du terme anglaise Prédiction Error Sum of Square. Plus la valeur de *PRESS* est faible, plus le modèle est prédictif .

## S

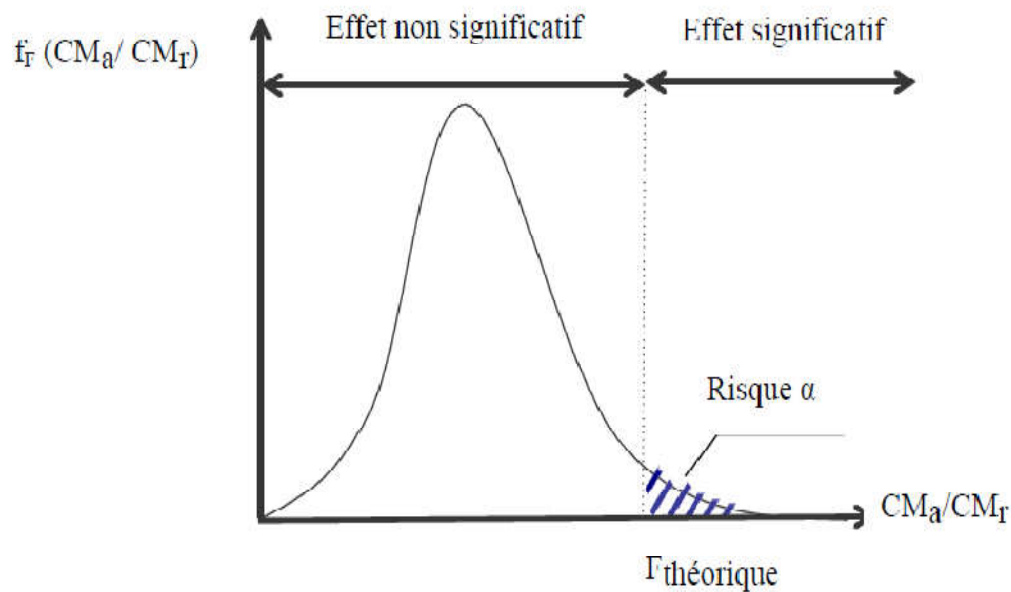
Est une évaluation de l'écart type de la limite d'erreur dans le modèle. Plus S est petit, mieux le modèle décrit la réponse. Utilisant S pour évaluer la capacité du modèle à décrire la réponse.

### Test de Fisher-Snedecor

Le test Fisher-Snedecor [100] est un test qui permet de comparer deux variances (figure IV.7). Pour conclure que l'effet d'un facteur est significatif, nous cherchons à montrer que  $CM_a$  est supérieure à  $CM_r$ . Enfin, en divisant les sommes des carrés des écarts par leurs nombres de degrés de liberté, on définit les carrés moyens, à savoir un carré moyen total, un carré moyen factoriel, un carré moyen relatif à l'interaction et un carré moyen résiduel.

$$CM_a = \frac{SCE_a}{(p-1)}, CM_r = \frac{SCE_r}{pq(n-1)}, CM_t = \frac{SCE_t}{(pqn-1)}, CM_{ab} = \frac{SCE_{ab}}{(p-1)(q-1)} \quad (\text{IV. 20})$$

Ces quantités sont des mesures, respectivement, de la dispersion de l'ensemble des observations, de l'importance des différences existant entre les moyennes relatives aux différentes modalités (variation factorielle), et de l'importance des variations apparaissant à l'intérieur des différentes modalités (variation résiduelle).



**Figure IV.7:** Représentation de la loi de Fisher-Snedecor

On utilise cette loi pour savoir à partir de quelle valeur particulière, appelée valeur critique, le numérateur de la quantité  $F$  est significativement supérieur au dénominateur. Pour qu'il existe le moins de résidus possible, il faut que ce rapport soit le plus grand possible. Dans ce cas on pourra dire que le modèle apporte de l'information, on calcule alors le ratio suivant, pour les facteurs considéré :

$$F_{obs} = \frac{CM_a}{CM_r} = \frac{SCE_a / P - 1}{SCE_r / N - P} \quad (\text{IV. 21})$$

$$SCE = \sum_{i=1}^N (y_i + \hat{y}_i)^2 \quad (\text{IV. 22})$$

On rappelle que l'application de la méthode des moindres carrés utilisée pour la détermination des coefficients du modèle, induit la relation :

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (\text{IV. 23})$$

Les quantités  $(p-1)$  et  $(N-P)$  correspondent respectivement au nombre de degrés de liberté affectés à la somme des carrés factorielle associée au modèle ( $SCE_a$ ) et à la somme des carrés associés aux résidus ( $SCE_r$ ). Le rapport  $F_{obs}$  exprime donc le rapport entre 2 variances. Pour le  $i^{\text{ème}}$  traitement du plan d'expériences, la valeur observée  $y_i$  du résultat d'essai représente une valeur particulière de la variable aléatoire caractérisant la réponse pour ce traitement. Par voie de conséquence, la

statistique  $F_{\text{obs}}$  est elle-même une variable aléatoire dont les valeurs suivent une fonction de répartition théorique, appelée loi F [101] :

$$F = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} \hat{y}_i^2 - N \bar{y}^2}{q}}{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} e_i^2}{N - q - 1}} \quad (\text{IV. 24})$$

Le modèle sera déclaré globalement significatif si  $F > F_{1-\alpha, q, N-q-1}$ . On peut dire aussi que la qualité du modèle est d'autant meilleure que la variance d'ajustement est plus faible par rapport à la variance expérimentale.

### Probabilité ou Valeur P (P-Value)

La valeur p est la probabilité d'obtenir une statistique de test qui est au moins aussi extrême que la valeur calculée si l'hypothèse nulle est vraie. En raison de leur rôle fondamental dans les tests d'hypothèses, les valeurs p sont utilisées dans de nombreux domaines de la statistique, y compris les statistiques de base, les modèles linéaires, la fiabilité et les variables multi variées [102]. La Plage des valeurs P est de 0 à 1. Si la valeur p d'une statistique de test est inférieure à alpha( $\alpha$ ), (déterminer avant d'effectuer des analyses une valeur couramment utilisée est de 0,05), qui rejettent l'hypothèse nulle. Pour déterminer si un coefficient est différent de 0, doit être comparé la valeur de p du terme au seuil de signification afin d'évaluer l'hypothèse nulle. L'hypothèse nulle est que le coefficient est égal à 0, ce qui implique qu'il n'existe aucune effet entre le facteur et la réponse.

- Si la valeur de  $p \leq \alpha$  : l'effet est statistiquement significative.
- Si la valeur de  $p > \alpha$  : l'effet n'est pas statistiquement significative.
- Si la valeur de p est supérieure au seuil de signification, ce qui conclure qu'il n'existe un effet statistiquement significative entre la variable de réponse et le terme.

Si un coefficient est statistiquement significatif, l'interprétation dépend du type de terme suivantes [103] :

**Termes linéaires**

Si le coefficient d'un terme linéaire est statistiquement significatif, on peut conclure que le coefficient du facteur n'est pas égal à 0.

**Interactions entre facteurs**

Si le coefficient d'une interaction est statistiquement significatif, on peut en conclure que la relation entre un facteur et la réponse dépend des autres facteurs du terme.

**Termes quadratiques**

Si le coefficient d'un terme quadratique est statistiquement significatif, on peut en conclure que la surface de réponse présente une courbure.

**Blocs**

Si le coefficient d'un bloc est statistiquement significatif, on peut en conclure que la moyenne des valeurs de réponse dans ce bloc est différente de la moyenne globale pour la réponse.

**Alpha ( $\alpha$ )**

Utilisé dans le test d'hypothèses est souvent appelé le niveau de signification ou le niveau de risque maximal acceptable pour rejeter un véritable hypothèse nul et est exprimée comme une probabilité comprise entre 0 et 1. Soit à définir avant de commencer l'analyse.

**Analyse des résidus**

Un résidu est la différence entre la réponse mesurée et la réponse calculée, ils ont la particularité de représenter la partie non expliquée par l'équation de régression[104]. Les méthodes d'analyse des résidus consistent essentiellement en des méthodes graphiques, relativement simples à appliquer et fournissant une importante information sur la distribution et le comportement des erreurs. Il s'agit d'une représentation graphique des résidus permettent de mettre en évidence les situations ou les hypothèses énoncées. Un autre avantage de l'analyse graphique des résidus est la possibilité de détecter des valeurs aberrantes, c'est-à-dire des observations dont le résidu est, en valeur absolue, bien plus élevé que les autres. En abscisse on porte les valeurs des réponses prédites par le modèle  $\hat{y}$  et en leur coordonnée on porte les valeurs des résidus  $\varepsilon_i$ . On regarde si les résidus semblent

être distribués aléatoirement ou non. Un modèle est bon si les points  $(\hat{y}_i, \varepsilon_i)$  semblent disposés au hasard. On obtient alors la valeur des résidus:  $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$

On calcule ensuite la somme des carrés des résidus notée SCRES [105]:

$$\text{SCRES} = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \quad \text{(IV. 25)}$$

$$\text{SCRES} = \text{SCE}_1 + \text{SCE}_2 \quad \text{(IV. 26)}$$

Où :  $\text{SCE}_1$  : l'erreur due au manque d'ajustement du modèle, ou encore **Lack of Fit**.

$\text{SCE}_2$  : l'erreur pure ou naturelle encore appelé **Pure Error**.

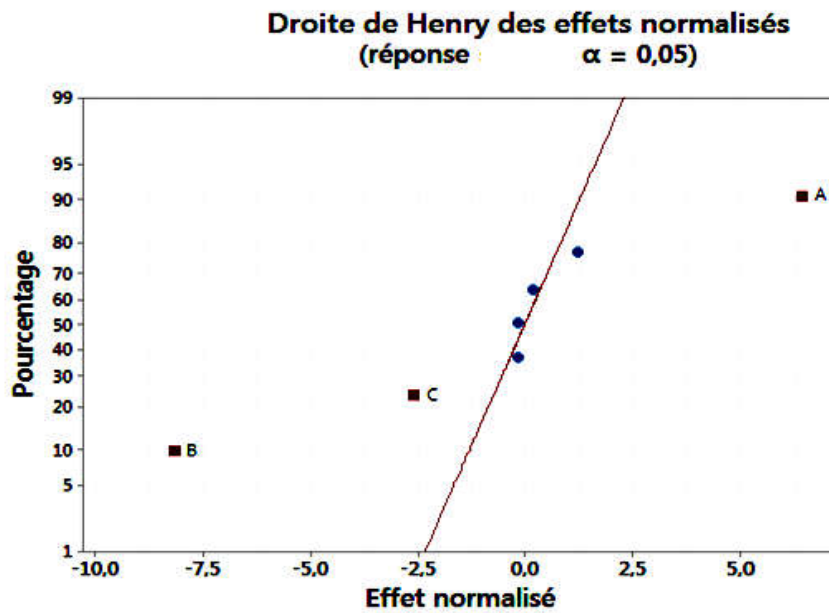
#### IV.10. Analyse graphique du modèle

L'analyse graphique des résultats d'essais permet une restitution plus visuelle des résultats d'essais et de leur analyse statistique dont le résultat se traduit par le tracé des limites de signification sur les diagrammes.

##### IV.10.1. Droite des effets de Henry

La droite des effets de Henry (figure IV.8), indique la position des effets normalisés par rapport à la droite d'ajustement. Les effets normalisés sont des statistiques t qui vérifient l'hypothèse nulle. Les effets positifs augmentent la réponse lorsque les paramètres passent de la valeur bas à la valeur élevée du facteur. Les effets négatifs diminuent la réponse lorsque les paramètres passent de la valeur bas (faible) à la valeur élevée du facteur. Plus les effets sont éloignés de 0 sur l'axe X, plus ils sont importants. Les effets les plus éloignés de 0 sont statistiquement plus significatifs. La distance à laquelle doivent se trouver les points par rapport à la ligne de référence afin d'être statistiquement significatifs dépend du seuil de signification (noté  $\alpha$  ou alpha). En outre, la droite de Henry des effets a pour déterminer la valeur, le sens et l'importance des effets. La couleur et la forme des points diffèrent entre les effets qui sont statistiquement significatifs et ne le sont pas [106].

Les effets qui s'écartent de la droite (en dessous ou haut-dessus de la droite, selon que les effets sont positifs ou négatifs) sont considérés comme probablement actifs.



**Figure IV.8:** Droite de HENRY (Réponse)

La droite de Henry affichant les effets négatifs sur le côté gauche du graphique et les effets positifs sur le côté droit, il est plus difficile d'y comparer les effets pour déterminer ceux qui modifient le plus la réponse que sur les diagrammes qui présentent les valeurs absolues des effets normalisés. La demi-droite de Henry et le diagramme de Pareto montrent les valeurs absolues des effets normalisés.

#### **IV.10.2. Demi-droite des effets de Henry**

La demi-droite des effets de Henry (figure IV.9), montre les valeurs absolues des effets normalisés, en les classant de la plus élevée à la plus faible. En outre, la demi-droite de Henry des effets a pour déterminer l'amplitude et l'importance des effets. Les points sont comparés à une ligne de référence qui représente le cas où tous les effets seraient de 0. Plus les effets sont éloignés de 0 sur l'axe des x, plus leur amplitude est élevée. Les effets les plus éloignés de 0 sont statistiquement plus significatifs mais pas quels sont ceux qui augmentent ou réduisent la réponse[107]. La couleur et la forme des points diffèrent entre les effets qui sont statistiquement significatifs et ceux qui ne le sont pas. En outre, Minitab<sup>17</sup> ajoute une étiquette aux points statistiquement significatifs.

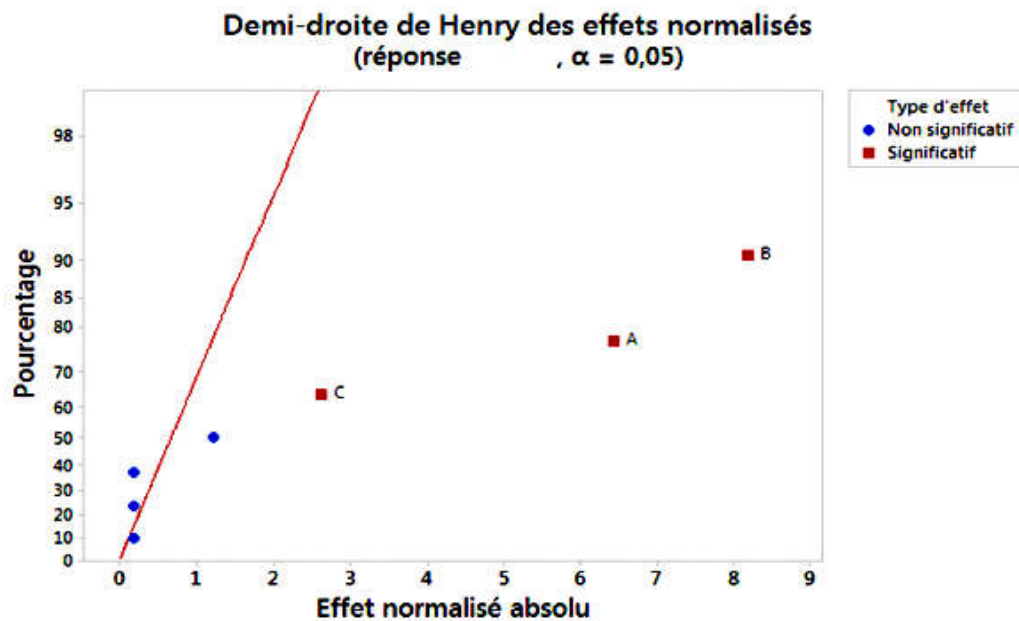


Figure IV.9: Demi-droite de HENRY (Réponse)

### IV.10.3. Traces des effets moyens

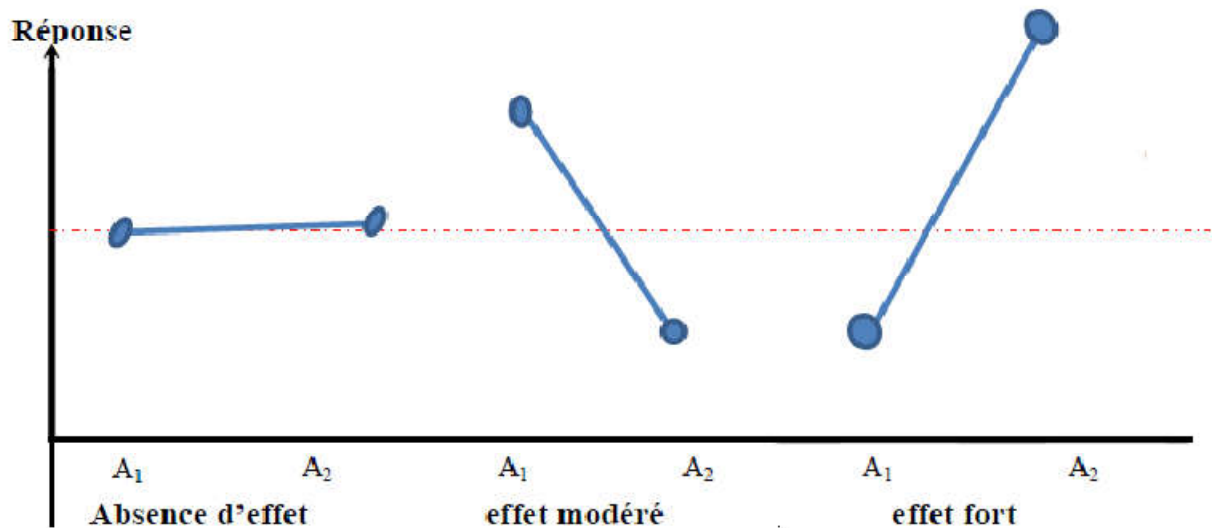
L'effet moyen d'un facteur est définie comme étant la variation de la réponse observée ou modélisée lorsque le facteur change de modalité. Le tracé des effets moyens des facteurs, facilitent l'estimation, la visualisation des effets moyens et la restitution de l'information [108].

Les graphiques des effets principaux indiquent comment chaque facteur influe sur la caractéristique de réponse. Un effet principal se produit lorsque les différents niveaux d'un facteur affectent différemment la caractéristique.

Minitab<sup>17</sup> conçoit le graphique des effets principaux en traçant la moyenne des caractéristiques pour chaque niveau de facteur. Ces moyennes sont identiques à celles affichées dans la (figure IV.10) des réponses. Une ligne relie les points de chaque facteur pour déterminer l'effet principal.

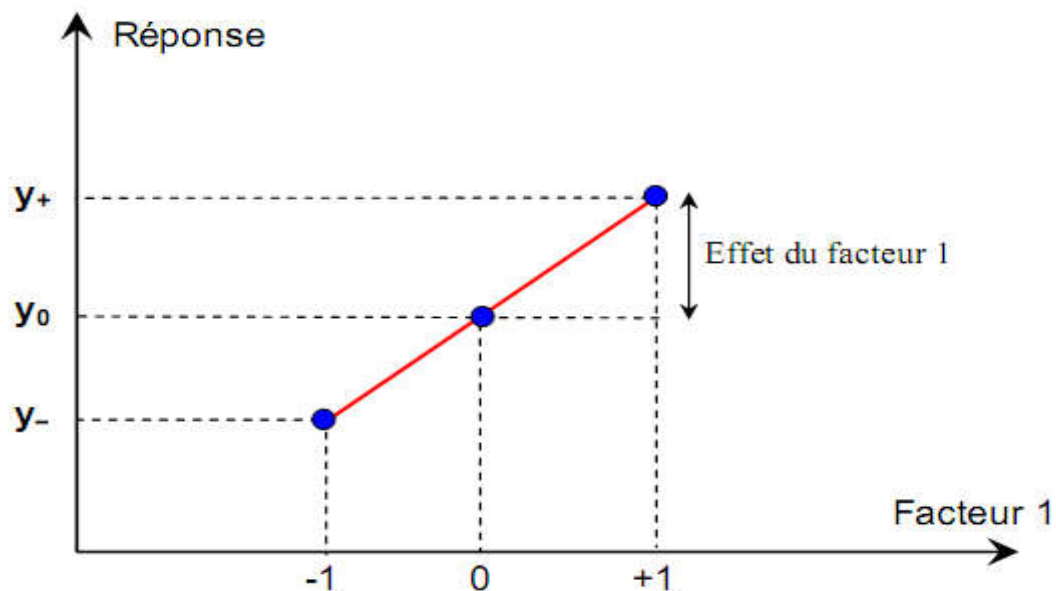
- Lorsque la ligne est horizontale, il n'existe aucun effet principal. Chaque niveau de facteur influe sur la caractéristique de la même façon et la moyenne de la caractéristique est la même, quel que soit le niveau de facteur.
- Lorsque la ligne n'est pas horizontale, il existe un effet principal. Les différents niveaux du facteur influent différemment sur la caractéristique. Plus la différence entre les points relevés sur les ordonnées est grande (c'est-à-dire, moins la ligne est parallèle à l'axe des X), plus l'effet principal est important.





**Figure IV.10:**Exemple de tracé des effets moyens

En comparant les pentes des lignes, nous pouvons comparer l'importance relative des effets du facteur. La formule permettant de calculer l'effet d'un facteur montre que toutes les expériences, l'effet calculé représente alors un effet moyen et l'on sait que les moyennes sont plus précises que les valeurs individuelles. L'effet d'un facteur (figure IV.11) peut être positif ou négatif suivant le signe du coefficient.



**Figure IV.11:**Représentation de l'effet d'un facteur.

Les effets des facteurs  $b_j$  sont déterminés par la méthode des moindres carrés à partir de la relation suivante :

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^j y_i X_{ij}}{\sum_i X_{ij}} \quad (\text{IV. 27})$$

#### IV.10.4. Traces des interactions

L'interaction indique une incohérence de l'effet principal d'un facteur sur la réponse selon le niveau d'un autre facteur. Dans un système complexe, les paramètres sont souvent couplés. La connaissance des effets de chaque paramètre n'est pas suffisante pour pouvoir estimer une réponse. Il faut donc une information sur l'influence de la variation de chacun des facteurs sur l'effet des autres facteurs. Cette notion, appelée interaction, est représentée graphiquement par la (figure IV.12) [109].

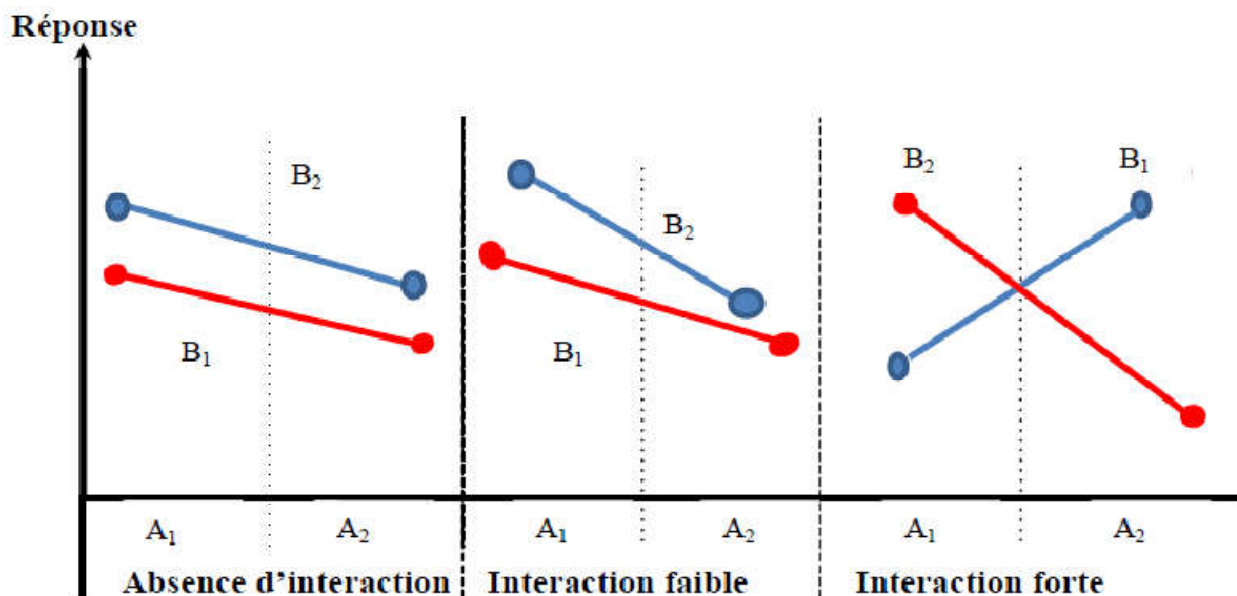


Figure IV.12: Exemple de tracé des interactions

Dans un diagramme des interactions :

- Si les lignes sont parallèles entre elles, il n'existe aucune interaction entre les deux facteurs.
- Si les lignes ne sont pas parallèles entre elles, il y a donc interaction entre les deux facteurs.

Plus la différence de pente est grande entre les lignes, plus le degré d'interaction est élevé. Toutefois, le diagramme des interactions n'indique pas si l'interaction est statistiquement significative. Minitab<sup>17</sup> trace quatre points, représentant les quatre combinaisons de niveaux possibles. Les niveaux d'un facteur sont indiqués sur l'axe

horizontal, tandis que les niveaux de l'autre facteur sont indiqués par des lignes et symboles de couleurs différentes (figure IV.13).

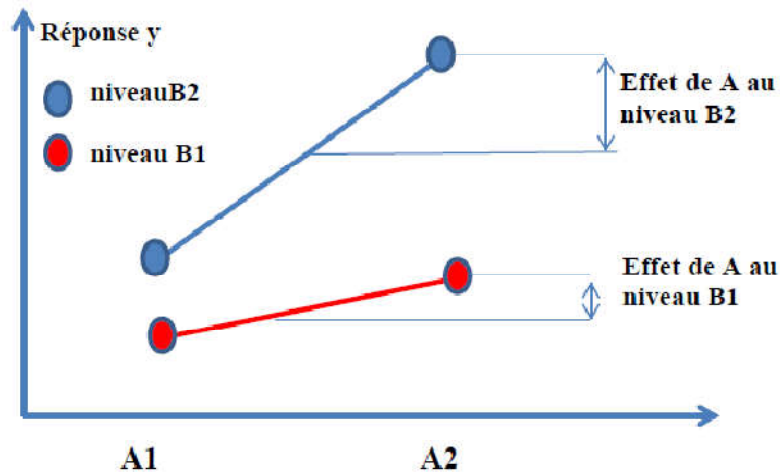


Figure IV.13: Représentation d'une interaction entre deux facteurs.

#### IV.10.5. Diagramme de Pareto

Le diagramme de Pareto (figure IV.14), permet de repérer visuellement les effets importants et de comparer l'importance relative des divers effets mais pas quels sont ceux qui augmentent ou réduisent la réponse, ainsi montre les valeurs absolues des effets normalisés, en les classant de la plus élevée à la plus faible. Le diagramme comprend également une ligne indiquant la signification statistique qui dépend du seuil de signification (noté  $\alpha$  ou alpha). Sur le diagramme de Pareto, les barres qui coupent la ligne de référence sont statistiquement significatives.

Il est possible de décomposer la variation d'une réponse à partir des contributions apportées par chacun des facteurs qui permettent de déterminer les facteurs influents par ordre de contribution décroissante dans un modèle à partir de la relation [110].

Avec :

$$CTR_j = \frac{a_j^2}{\sum_{j=1}^k a_j^2} \quad (\text{IV. 28})$$

$CTR_j$  : la contribution du facteur  $j$  à la variation de la réponse.

$a_j$  : le coefficient du modèle associé au facteur  $j$ ,

$k$  : le nombre de facteurs de l'étude.

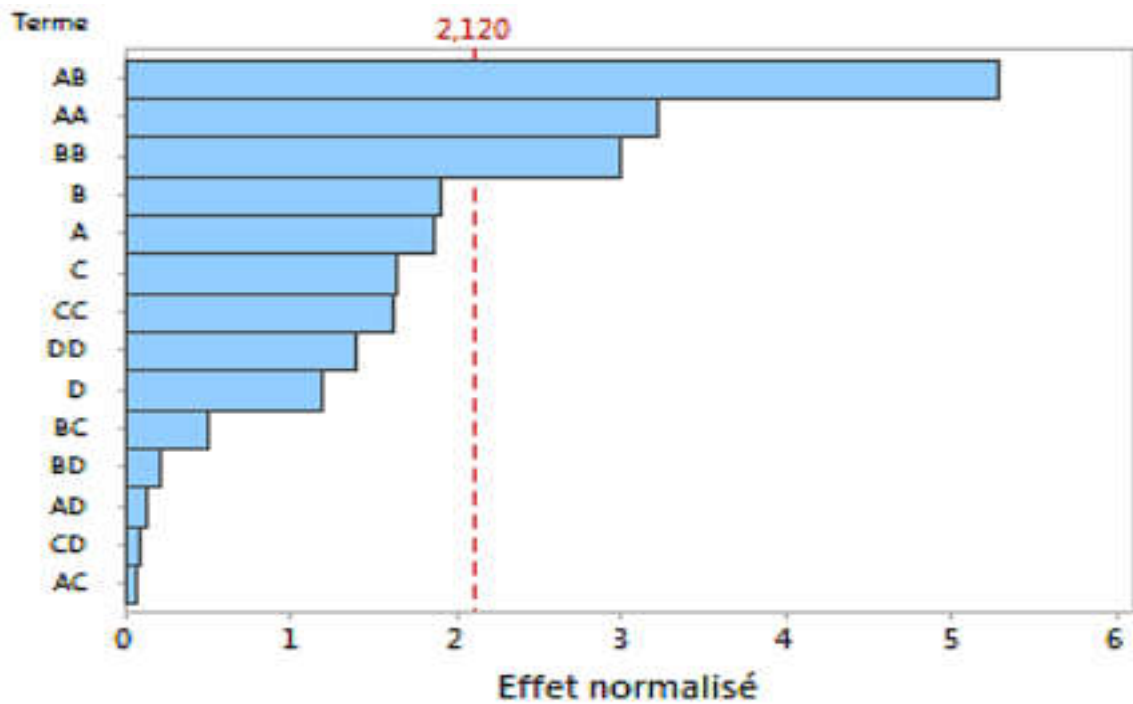


Figure IV.14:Diagramme de Pareto

### IV.10.6. Surface et contours de réponses

Un des grands avantages des plans d'expériences est la présentation des résultats sous forme graphique (figure IV.15). Les surfaces et les contours de réponse sont avant tout un outil d'aide à l'interprétation des résultats, ils permettent également de manière plus communicative de tirer plus rapidement des conclusions et ainsi d'orienter la poursuite d'une étude.

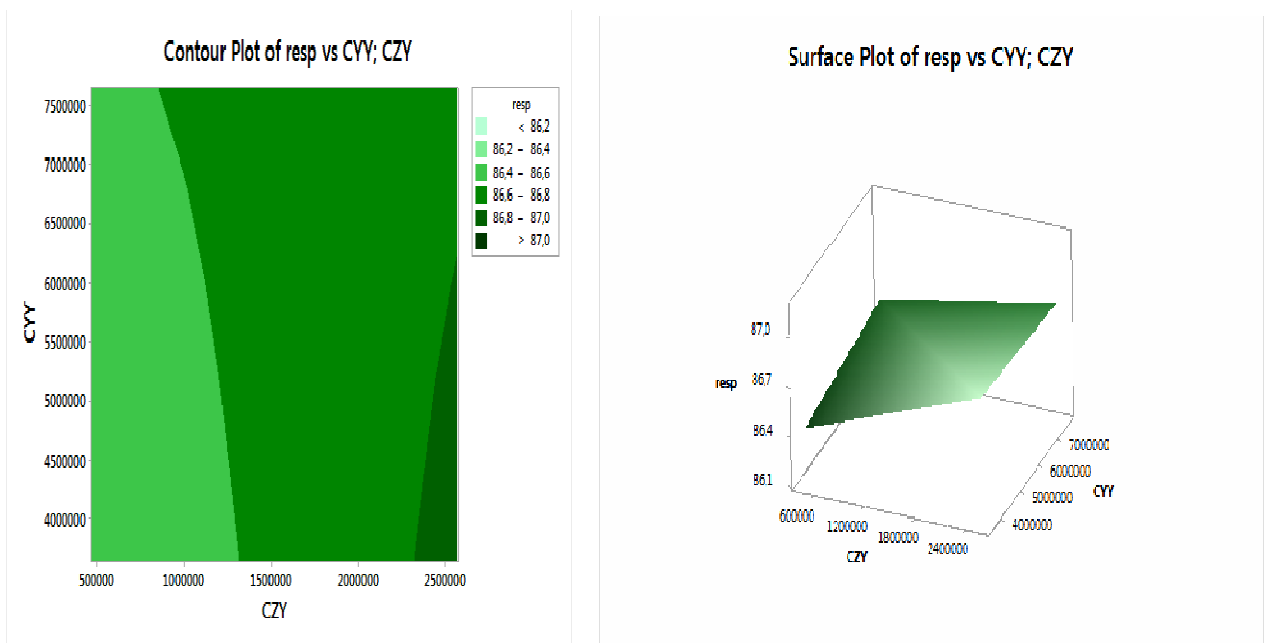


Figure IV.15:Contour et surface de réponses

## **IV.11. Conclusion**

La méthodologie des plans d'expérience est un outil incontestablement efficace permettant de conduire avec la meilleure efficacité possible, une étude où interviennent de nombreux paramètres pour mettre en œuvre des expériences. Nous avons vu à travers cette partie une introduction aux stratégies que nous allons étudier les plans de criblage, les plans d'optimisation et les différentes articulations méthodologiques des plans d'expériences. En s'appuyant sur cette méthode, nous allons : définir le problème, déterminer les objectifs de l'étude ainsi que les variables de sortie du système étudié.

Toutefois, il est possible de savoir des informations complètes sur l'usage des statistiques dans l'analyse des plans d'expériences. On peut estimer la qualité descriptive et prédictive des modèles obtenus.

# *Étude de l'influence du film amortisseur du palier hydrodynamique par plans d'expériences (Plackett-Burman)*

<b>V.1. Introduction .....</b>	<b>107</b>
<b>V.2. Description des programmes de résolution.....</b>	<b>108</b>
<b>V.3. Validation du programme de calcul .....</b>	<b>108</b>
<b>V.4. Conception de Doe (Design Of Experiment).....</b>	<b>110</b>
<b>V.5. Plan de Criblage (Plackett-Burman).....</b>	<b>110</b>
• Représentation graphique et statistique.....	110
<b>V.6. Résultats statistiques del'optimisation (Pbd).....</b>	<b>113</b>
V.6.1 Effets et coefficients de fréquences .....	113
V.6.2 Analyse de la variance (ANOVA).....	114
V.6.3. Représentation graphique des effets .....	115
<b>V.7. Optimisation de la reponse .....</b>	<b>123</b>
<b>V.8. Conclusion.....</b>	<b>130</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>131</b>
<b>Conclusion et perspectives.....</b>	<b>132</b>

## V.1. Introduction

Les comportements dynamiques des machines tournantes nécessitent de prédire les propriétés d'amortissement, en particulier l'amortissement provoqué par les pièces tournantes équipées d'un palier hydrodynamique, ce qui peut générer une instabilité. Ces prévisions sont fondamentales pour la conception des machines tournantes afin de donner une idée précise de la «sécurité» dans les limites de vitesse critiques. Ces dernières années, l'utilisation des supports flexibles s'est fortement développée en raison de certains avantages pratiques offerts par cette conception. Plusieurs concepteur ont modélisé et analysé le comportement dynamique des machines tournantes afin d'ajuster certains paramètres du système et d'obtenir la conception la plus adaptée dans la plage de vitesse requise. L'un des objectifs des chercheurs [111],[112],[113],[114],[115] à obtenir des modèles mathématiques de base qui s'adaptent aux phénomènes d'instabilité observés afin de prédire numériquement le comportement dynamique des systèmes. Connaître les paramètres dynamiques permet aux spécialistes d'étudier l'instabilité des machines tournantes (voir chapitre III).

La méthode de plan d'expérience fournit une méthodologie robuste et une approche efficace pour trouver une combinaison idéale de paramètres de conception proches et de nombreuses données sur l'effet de la réponse due à un ou plusieurs facteurs améliorant la mise en œuvre. La conception d'optimisation (design of experiment DOE) assure l'optimisation et l'identification des facteurs qui ont des impacts significatifs sur la réponse et la stabilité, permettant l'accès à l'information pour éviter les effets graves des vibrations induites par le système et l'analyse des résultats inestimables. L'utilisation de la méthode de criblage Plackett-Burman (voir chapitre IV) dans la conception des expériences est l'un des outils pour déterminer l'effet des coefficients d'amortissement et des diamètres responsables des principales influences sur la fréquence propre et la stabilité des machines tournantes. Les objectifs des différentes analyses que nous développerons dans la suite de ce chapitre sont:

- Calcul des effets des variables d'entrée sur la fluctuation des variables de sortie et détecter des facteurs les plus influents.

- Utiliser le travail réalisé par Ritesh Fegade[116], dans le cadre de sa publication en fournissant des paramètres d'amortissement et en expliquant la création d'un plan (DOE) ainsi que les différentes analyses graphiques et statistiques nécessaires pour ce type de plans pour définir les paramètres d'amortissement responsables de la production des effets majeurs sur la fréquence et la stabilité du rotor.
- Rétablir les facteurs de sortie, pour aider à comprendre les effets des facteurs d'amortissement sur la fréquence propre du palier hydrodynamique et sur la stabilité du système.

## V.2. Description des programmes de résolution

L'étude théorique du comportement dynamique, traitée dans le chapitre précédent d'un palier lisse nous a permis la réalisation d'un programme de simulation en Matlab basé sur l'approche numérique à partir de la théorie de palier court lisse. Ce programme permet de déterminer les performances hydrodynamiques du palier lubrifié par un fluide soumis à une excitation dynamique.

Un logiciel Minitab<sup>17</sup> est un outil statistique mis au point, à l'origine, par le département de statistique de l'université de Pennsylvanie (U.S.A.). Il propose cinq types de plans : les plans de criblage, les plans factoriels, les plans de surface de réponse, les plans de mélange et les plans de Taguchi. Une fois effectuer l'expérience et saisi les résultats, Minitab<sup>17</sup> dispose de plusieurs outils analytiques et graphiques pour aider à mieux comprendre ces résultats lors de la création et de l'analyse d'un plan. On s'intéresse au plan de criblage.

## V.3. Validation du programme de calcul

Le programme utilisé dans ce travail est un ensemble de scripts et de fonctions écrits en Matlab. Le programme développé permet ce qui suit:

- Définir le modèle.
- Déterminer les coefficients d'amortissements et les fréquences propres.
- Moyens graphiques pour la représentation du modèle et la visualisation des résultats.

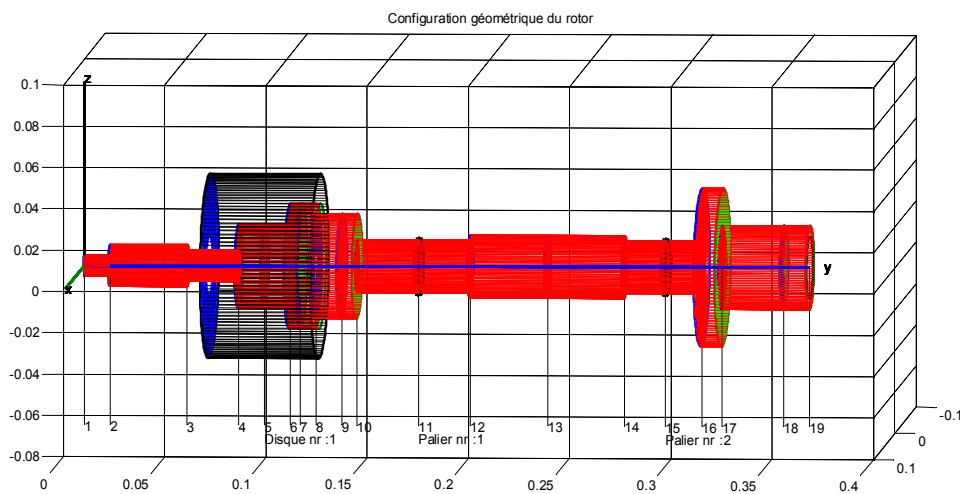
En deuxième étape le logiciel Minitab<sup>17</sup> permet d'analyser simultanément les effets des variables d'entrée (facteurs) sur une variable de sortie (réponse) et d'identifier les



paramètres qui influent sur la fréquence et la stabilité du système, et de déterminer ainsi les facteurs offrant des résultats optimaux.

**Modèle**

Le modèle examiné (figure. V.1)est un rotor de Nelson[117] ,[118]qui est un arbre de 0,355 m de longueur et de 14 sections transversales différentes. L'arbre porte un rotor de masse 1,401 (kg) et excentricité 0,635 (cm) à 0,0889 (m) de l'extrémité gauche et est soutenu par deux paliers à une distance de 0,1651 (m) et 0,287 (m) de l'extrémité gauche respectivement , inertie polaire0.002 kg. m<sup>2</sup>, module de Young E=2.078e11(Pa)



**Figure V.1:** Configuration de rotor Nelson

**Facteurs et domaine d'étude**

Les facteurs présentent deux modalités i.e. (deux niveaux par facteur) ,tableau V.1 a énuméré les niveaux codés des variables utilisées dans cette recherche. Nombre de facteurs :  $k = 15$  , Nombre de modalités (niveau bas et le niveau haut) :  $m_i = 2$  ,  $N_{total} = 2^k$ .

**Tableau V.1 :** Niveaux des variables utilisée dans la DOE

Facteurs	Niveau	
	Niveau haut (+1)	Niveau bas (-1)
D1	0.0152	0.0052
D2	0.0254	0.0154
D3	0.0204	0.0102
D4	0.0456	0.0356
D6	0.071	0.061
D8	0.0558	0.0458
D10	0.0304	0.0204

D12	0.0354	0.0254
D14	0.0304	0.0204
D16	0.0204	0.0102
D17	0.0456	0.0356
Cyy	7.65E+06	3.64E+06
Cyz	4.66E+05	2.57E+06
Czy	4.66E+05	2.57E+06
Czz	4.43E+06	3.51E+06

Les paramètres utilisés sont les diamètres et les coefficients d'amortissements des paliers hydrodynamiques avec deux niveaux ce qui donne quarante-huit combinaisons. Les effets de ces paramètres sur la fréquence sont observés dans l'analyse de DOE en utilisant la conception Plackett-Burman pour identifier les facteurs les plus importants.

#### V.4. Conception de Doe (Design Of Experiment)

La construction des plans de Plackett et Burman est une matrice d'Hadamard s'obtient par une permutation circulaire d'une série de niveaux + et - donnée dans la littérature sous forme d'une ligne[119]. Pour la matrice d'Hadamard à 48 lignes, mise en œuvre dans le cadre de ce travail, la matrice d'expériences est obtenue en effectuant une permutation circulaire de ces niveaux de gauche vers la droite de la matrice, ainsi accompli en déplaçant les facteurs de la conception de base de la matrice manuellement et en maintenant la correspondance des valeurs de la fréquence pour chaque ligne et en conservant l'équilibre de la matrice.

Le tableau. A.1 (**voir annexe**) montre la matrice Plackett et Burman à quinze facteurs et 48 expériences a été appliqué pour déterminer les effets des facteurs importants sur la fréquence et la stabilité du système.

#### V.5. Plan de criblage (Plackett-Burman)

##### •Représentation graphique et statistique

À l'étape initiale, cette analyse a été effectuée pour un niveau de signification de  $\alpha = 5\%$  correspondant à un niveau de confiance de 95% en utilisant le logiciel Minitab<sup>17</sup>. Dans les graphiques (figure V.2), le coefficient d'amortissement Czy a un effet positif significatif sur la marge de fréquence, mais Cyz a un effet négatif sur la marge de fréquences selon la position comparé à l'axe de référence en rouge. La (figure V.3) représente l'effet en valeur absolue des facteurs Cyz et Czy.

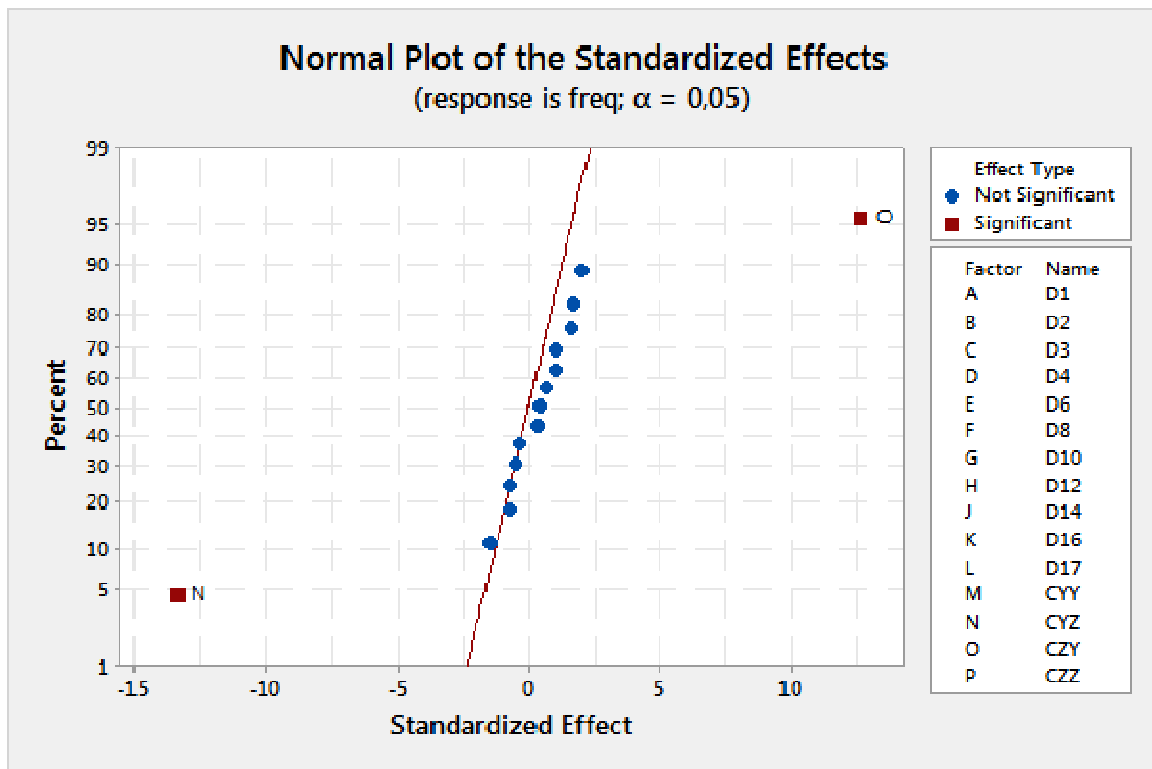


Figure V.2 : Diagramme de l'effet normalisé

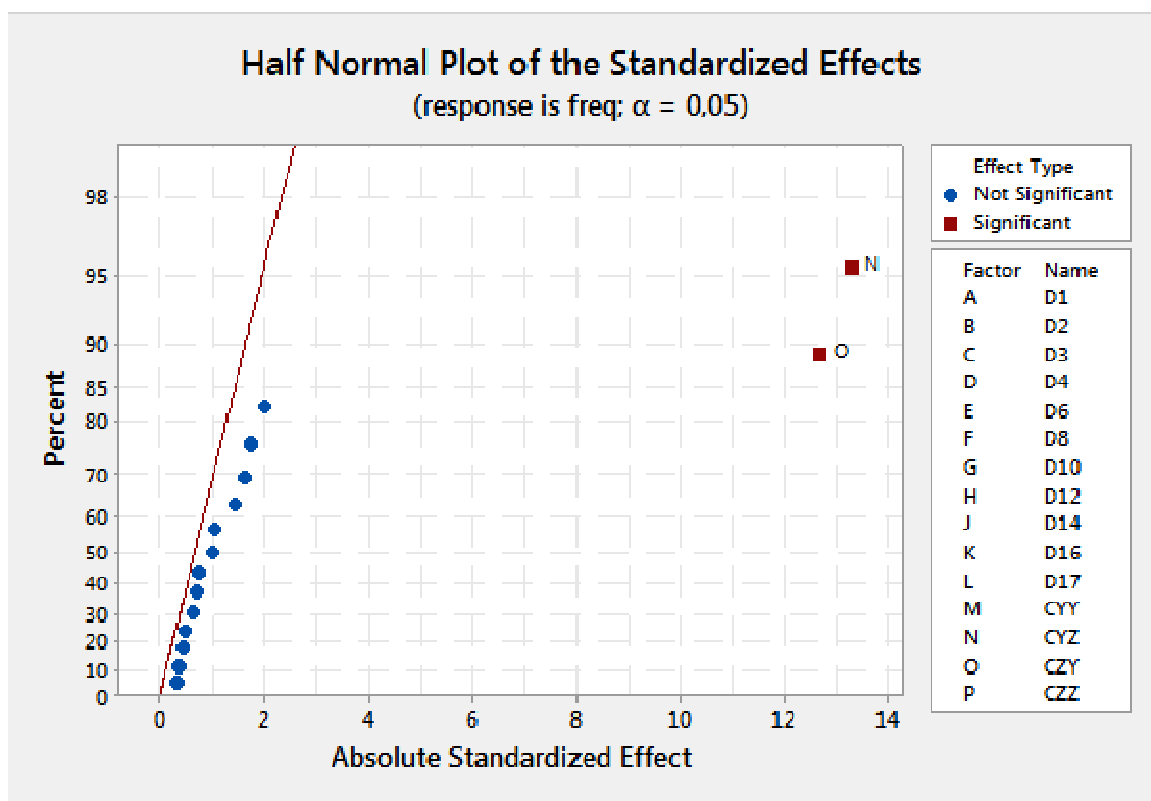


Figure V.3: Diagramme Demi Droite-normal des effets

Diagramme Pareto (figure V.4), confirme le résultat, les coefficients d'amortissements Czy et Cyz apparaissent comme des facteurs très influents sur cette marge de fréquences.

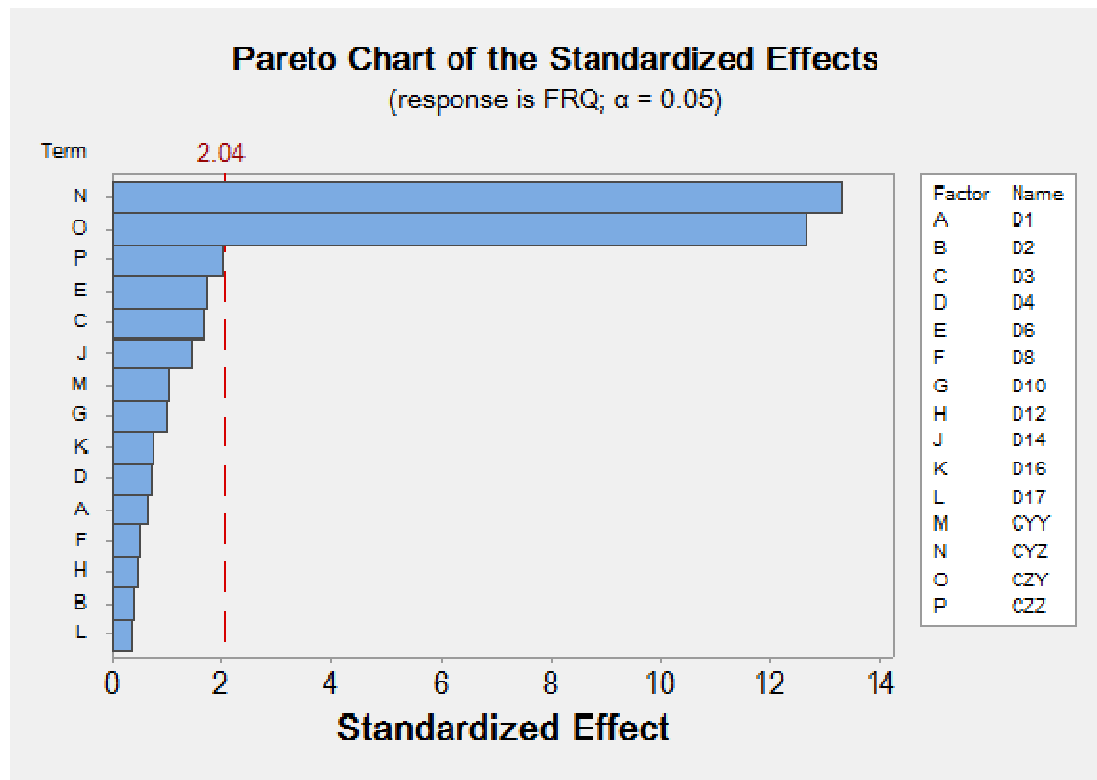


Figure V.4: Diagramme d'effet « Pareto »

Dans le tableau V.2, nous pouvons voir que Cyy, Cyy ont une influence significatifs sur la réponse puisque leurs valeurs-p est moins que l'alpha ( $\alpha=0.05$ ). Le facteur ayant le coefficient d'effet le plus élevé en valeur absolue Cyy (0.3150) a un grand impact sur la réponse donnée. L'erreur standard de coefficient (SECoef) (mesure la précision de données) sont constante avec un valeur de (0.0124) ce que ne permet d'estimer l'erreur et devraient être optimisé.

Tableau V.2: Effets et coefficients de fréquences

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value
<b>Constant</b>		<b>86.6542</b>	<b>0.0124</b>	<b>6981.84</b>	<b>0.000</b>
D1	0.0158	0.0079	0.0124	0.64	0.528
D2	0.0092	0.0046	0.0124	0.37	0.714
D3	0.0408	0.0204	0.0124	1.64	0.110
D4	-0.0175	-0.0087	0.0124	-0.70	0.486
D6	0.0433	0.0217	0.0124	1.75	0.090
D8	-0.0117	-0.0058	0.0124	-0.47	0.642
D10	0.0250	0.0125	0.0124	1.01	0.321
D12	0.0108	0.0054	0.0124	0.44	0.665
D14	-0.0358	-0.0179	0.0124	-1.44	0.159
D16	-0.0183	-0.0092	0.0124	-0.74	0.466
D17	-0.0083	-0.0042	0.0124	-0.34	0.739
Cyy	0.0258	0.0129	0.0124	1.04	0.306
Cyy	-0.3300	-0.1650	0.0124	-13.29	0.000

Czy	0.3150	0.1575	0.0124	12.69	0.000
Czz	0.0500	0.0250	0.0124	2.01	0.052

Le tableau V.3, représente l'analyse de la variance ANOVA pour la fréquence a montre que Cyz, Czy sont les facteurs le plus statistiquement significatif avec des valeurs de F (167.74 et 161.04) respectivement et une valeur de probabilité (valeur-P) inférieure à 0.05.

**Tableau V.3** : Analyse de variance initial pour la fréquence

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
<b>Model</b>	15	2,61656	0,17444	23,59	0,000
<b>Linear</b>	15	2,61656	0,17444	23,59	0,000
D1	1	0,00301	0,00301	0,41	0,528
D2	1	0,00101	0,00101	0,14	0,714
D3	1	0,02001	0,02001	2,71	0,110
D4	1	0,00368	0,00368	0,50	0,486
D6	1	0,02253	0,02253	3,05	0,090
D8	1	0,00163	0,00163	0,22	0,642
D10	1	0,00750	0,00750	1,01	0,321
D12	1	0,00141	0,00141	0,19	0,665
D14	1	0,01541	0,01541	2,08	0,159
D16	1	0,00403	0,00403	0,55	0,466
D17	1	0,00083	0,00083	0,11	0,739
Cyy	1	0,00801	0,00801	1,08	0,306
Cyz	1	1,30680	1,30680	176,74	0,000
Czy	1	1,19070	1,19070	161,04	0,000
Czz	1	0,03000	0,03000	4,06	0,052
Error	32	0,23661	0,00739		
Total	47				

## V.6. Résultats statistiques de l'optimisation (Plakett-Burman Design)

### V.6.1 Effets et coefficients de fréquences

En se référant au tableau V.4, ci-dessous, montre l'effet simultané de tous les facteurs sur la réponse, la valeur et les signes sont importants pour la détermination. On peut voir que Czy et Cyz ont des effets significatifs avec p inférieur (0.05) et en plus que Czy a le plus grand effet (0,278 799) sur la réponse et la valeur du coefficient d'erreur standard (0,000822) vérifie la réponse la plus élevée, et que Cyz a l'effet le plus faible (- 0,39518) et la valeur du coefficient d'erreur standard (0,00134) donne une réponse élevée au sens négatif. De même que les diamètres D10, D17 ,D14.

L'erreur standard des paramètres est (0,0007), elle indique que le modèle est fourni avec les données et ceci conclut les résultats présentés. Un signe positif pour chacun des facteurs (Cyy, Czy, Czz,) indique que la valeur maximale de ces facteurs conduit à une réponse plus élevée que la valeur minimale. Les facteurs (D2, D6, Cyz) ont des signes de valeur négative qui indiquent que la valeur inférieure de ce facteur entraîne une réponse plus élevée, et on peut voir que les coefficients avec des valeurs plus élevées sont les facteurs les plus importants.

**Tableau V.4:** Effets et coefficients de fréquences

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value
<b>Const</b>		86,6542	<b>0,0007</b>	132259,47	<b>0.000</b>
D1	0,016104	0,008052	0,000664	12,12	<b>0.000</b>
D2	-0,05071	-0,02535	0,00148	-17,11	<b>0.000</b>
D3	0,05288	0,02644	0,00148	17,84	<b>0.000</b>
D4	0,031435	0,015717	0,000976	16,11	<b>0.000</b>
D6	-0,05655	-0,02827	0,00163	-17,32	<b>0.000</b>
D8	0,025473	0,012737	0,000974	13,08	<b>0.000</b>
<b>D10</b>	<b>0,13664</b>	0,06832	0,00123	55,72	<b>0.000</b>
D12	0,06888	0,03444	0,00169	20,40	<b>0.000</b>
<b>D14</b>	<b>-0,14817</b>	-0,07408	0,00106	-69,57	<b>0.000</b>
D16	0,04191	0,02095	0,00105	19,88	<b>0.000</b>
<b>D17</b>	<b>0,24590</b>	0,12295	0,00214	57,39	<b>0.000</b>
<b>Cyy</b>	0,09805	0,04902	0,00118	41,61	<b>0.000</b>
<b>Cyz</b>	<b>-0,39605</b>	-0,19802	0,00126	<b>-157,06</b>	<b>0.000</b>
<b>Czy</b>	<b>0,278493</b>	0,139246	0,000809	<b>172,05</b>	<b>0.000</b>
<b>Czz</b>	0,092275	0,046138	0,000914	50,49	<b>0.000</b>

### V.6.2 Analyse de la variance (ANOVA)

L'analyse de la variance comprend, les statistiques F et les valeurs p, pour déterminer si les facteurs sont significatifs par rapport à la réponse. Le tableau V.5, où l'analyse de la variance montre que tous les termes sont importants et que la (valeur P) statistiquement inférieure à 0,05, et plus la valeur F (9229,30) est élevée, plus l'effet sur la caractéristique de performance est important [120]. Nous pouvons voir que les paramètres Czy, Cyz, D10 et D17 ont une grande signification avec une valeur F plus élevés, par conséquent, nous concluons que le modèle amélioré est meilleur du point de vue statistique.

**Tableau V.5:** Analyse de variance de la fréquence

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
<b>Model</b>	15	2,85251	0,190167	<b>9229,30</b>	<b>0.000</b>

<b>Linear</b>	15	2,85251	0,190167	9229,30	<b>0.000</b>
D1	1	0,00303	0,003027	146,89	<b>0.000</b>
D2	1	0,00603	0,006031	292,69	<b>0.000</b>
D3	1	0,00656	0,006556	318,17	<b>0.000</b>
D4	1	0,00534	0,005345	259,39	<b>0.000</b>
D6	1	0,00618	0,006179	299,88	<b>0.000</b>
D8	1	0,00353	0,003527	171,15	<b>0.000</b>
D10	1	0,06397	0,063972	<b>3104,75</b>	<b>0.000</b>
D12	1	0,00857	0,008571	415,99	<b>0.000</b>
D14	1	0,09972	0,099722	<b>4839,75</b>	<b>0.000</b>
D16	1	0,00814	0,008144	395,27	<b>0.000</b>
D17	1	0,06787	0,067874	<b>3294,08</b>	<b>0.000</b>
<b>Cyy</b>	1	0,03568	0,035677	1731,49	<b>0.000</b>
<b>Cyz</b>	1	0,50827	0,508273	<b>24667,81</b>	<b>0.000</b>
<b>Czy</b>	1	0,60990	0,609896	<b>29599,84</b>	<b>0.000</b>
<b>Czz</b>	1	0,05253	0,052527	2549,27	<b>0.000</b>
Error	23	0,00066	0,000021		
Lack-of-Fit	11	0,00066	0,000055		
Pure Error	21	0,00000	0,000000		
Total	47	2,85317			

### Déterminer l'ajustement du modèle

Pour déterminer l'adéquation du modèle aux données, les statistiques d'ajustement doivent être examinées dans le tableau récapitulatif du modèle. Le tableau V.6 montre que S est une estimation de l'écart type du terme d'erreur du modèle est petit, donc mieux le modèle décrit la réponse, R-carré ( $R^2$ ), R-carré ( $R^2$  modulé) et R-carré (prédits  $R^2$ ) sont tous suffisamment élevés, PRESS estime que la puissance prédictive du modèle est plus faible, ce modèle semble donc bon pour les données.

Tableau V.6: Récapitulatif de l'ajustement du modèle

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)	PRESS
<b>0.0045392</b>	100%	99.96%	99.94%	0.0016297

### V.6.3. Représentation graphique des effets

#### a. Diagramme de Pareto

Diagramme des effets de Pareto (figure V.5), où identifier les termes qui contribuent le plus à la variabilité de la réponse. les effets sont représenté par ordre décroissant de leurs valeurs absolues. On peut voir sur le graphique ci-dessous que toutes les facteurs ont un impact important sur la marge de fréquences, puisque les barres représentant ces paramètres sur le graphique s'étendent au-delà de la ligne de

référence verticale rouge (ligne de référence des effets significatifs). Plus clairement, on peut voir que Czy, Cyz, D14 et D17 ont des effets majeurs importants sur la fréquence.

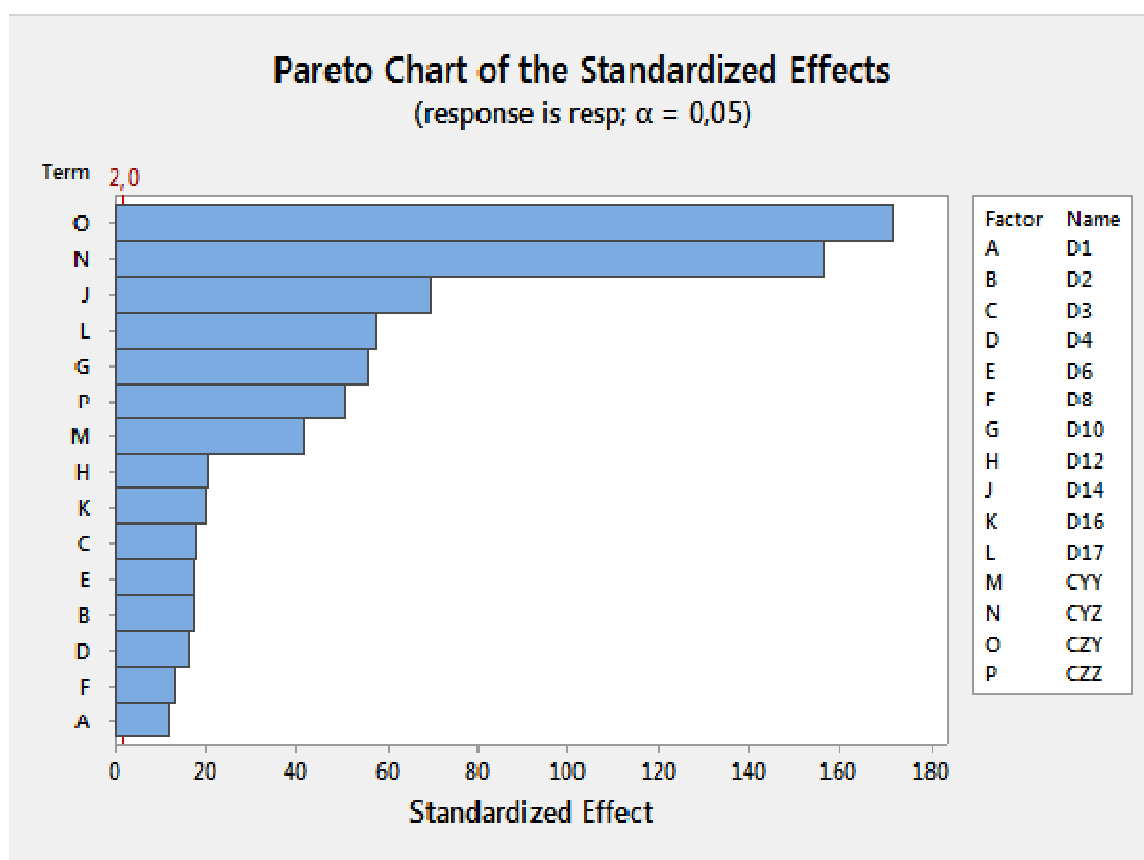


Figure V.5: Diagramme de la valeur absolue des effets « Pareto »

### b. Diagrammes des effets normalisés

La (figure V.6), où étudier l'importance et la direction des effets sur le même graphique qui affiche la valeur absolue des effets et trace une ligne de référence sur le graphique. Les effets les plus éloignés de zéro sont statistiquement plus significatifs. Czy (O) a un effet normalisé positif. Lorsque Czy (O) passe du niveau inférieur au niveau de facteur supérieur, la réponse augmente. Le facteur Cyz (N) a un effet négatif normalisé, et lorsque ce facteur est augmenté, la réponse diminue. Les diamètres D10 (G), D17 (L) sont statistiquement significatifs, aussi que D14 (J) a des effets négatifs. Le Demi-droite de l'effet de la (figure. V.7) montre les valeurs absolues des effets normalisés (mesurés), classées du plus élevé au plus bas. Les effets éloignés de zéro sont statistiquement plus significatifs.



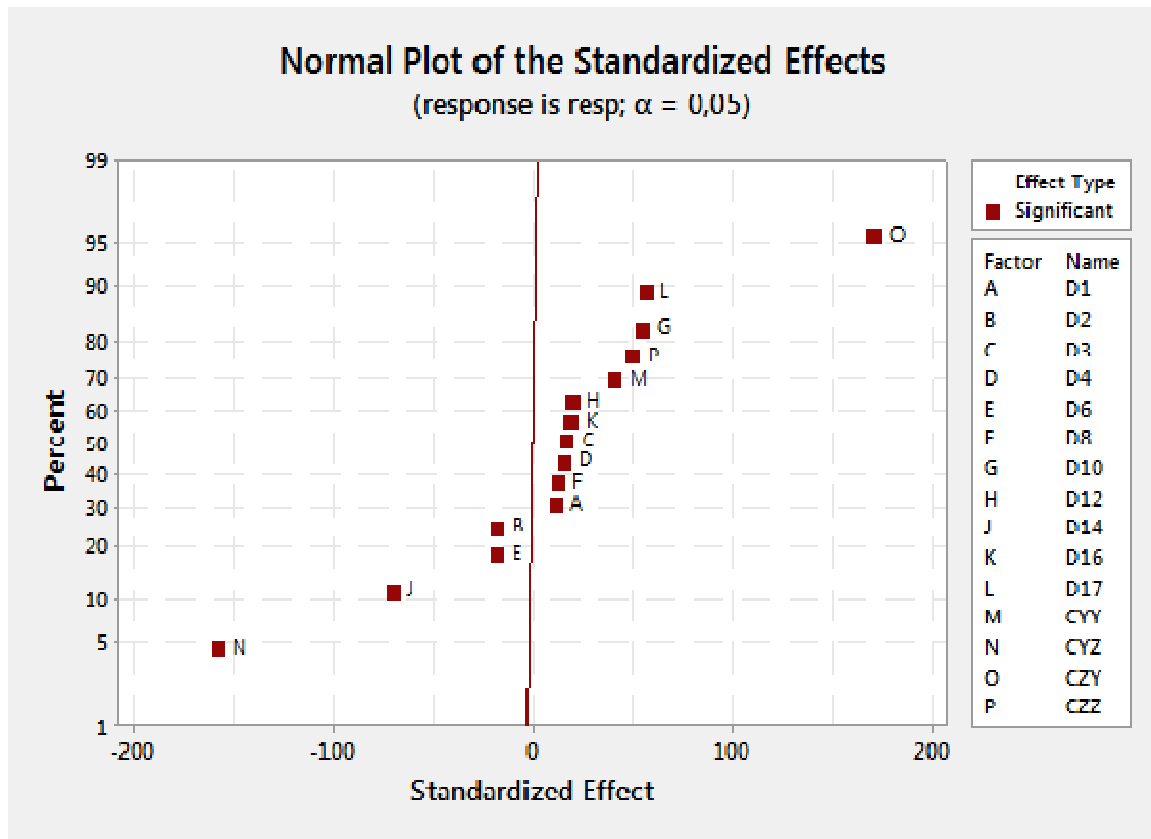


Figure V.6: Diagramme normal d'effet

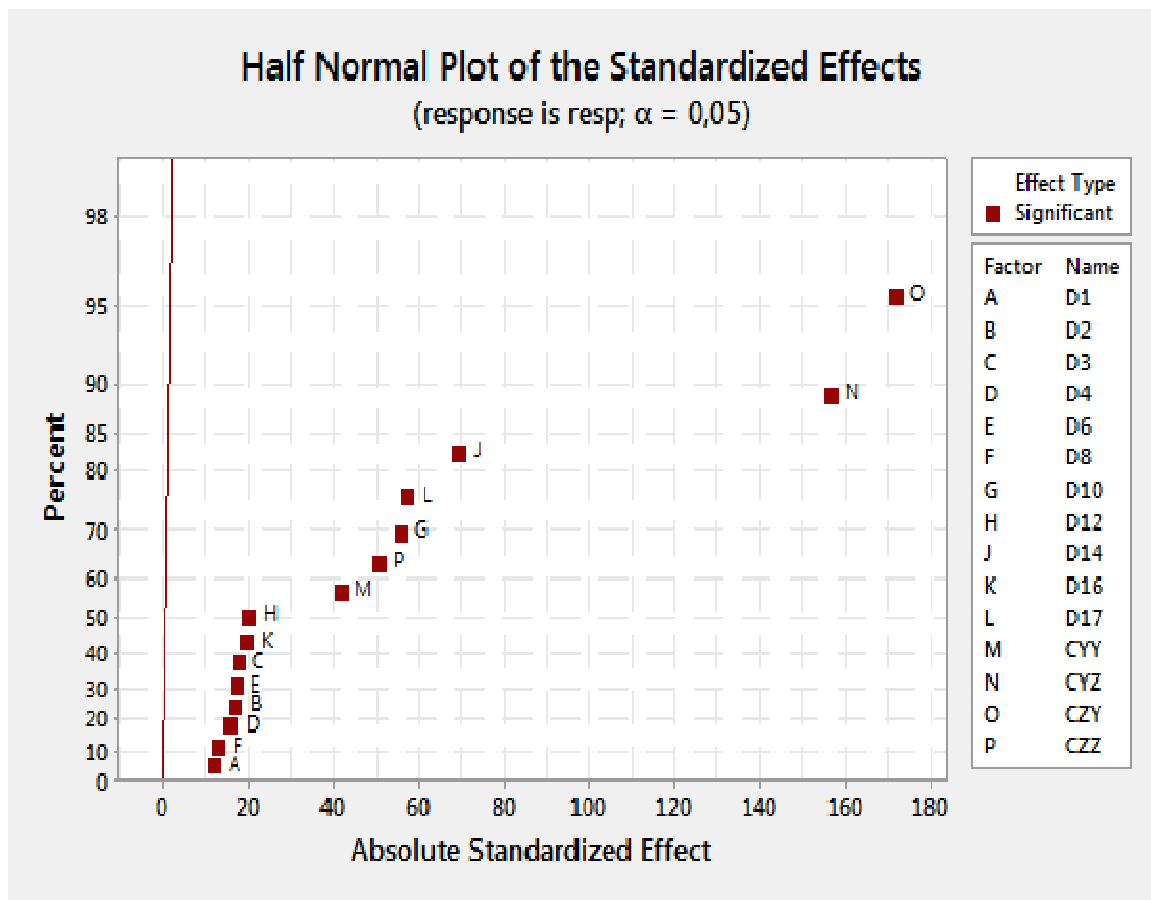


Figure V.7: Diagramme Demi Droite-normal des effets.

### c. Diagrammes des effets principaux

La (figure V.8), ci-dessous montre les principales lignes d'influence des différents paramètres et indique l'effet de chaque facteur sur la fréquence propre observée. Les coefficients d'amortissement C<sub>zy</sub>, C<sub>yy</sub>, C<sub>zz</sub>, diamètres, D17, D12 et D10 ont des effets importants sur la marge de fréquence, le sens de la variation est le même par la réponse, c'est-à-dire lorsqu'ils augmentent, la fréquence propre augmente. Les résultats du graphique indiquaient que le coefficient d'amortissement C<sub>zy</sub> avait un effet fondamental sur la fréquence par rapport à C<sub>yy</sub>, C<sub>zz</sub> et C<sub>yz</sub>, et que le diamètre D17 avait un effet fondamental sur la marge de la fréquence par rapport à D12, D10 et D14. La totalité du facteur (diamètres D1, D2, D4, D6, D8 et D16) n'a pas d'effet significatif sur la fréquence propre. De plus, les principaux effets ne peuvent être expliqués sans tenir compte des effets des réactions.

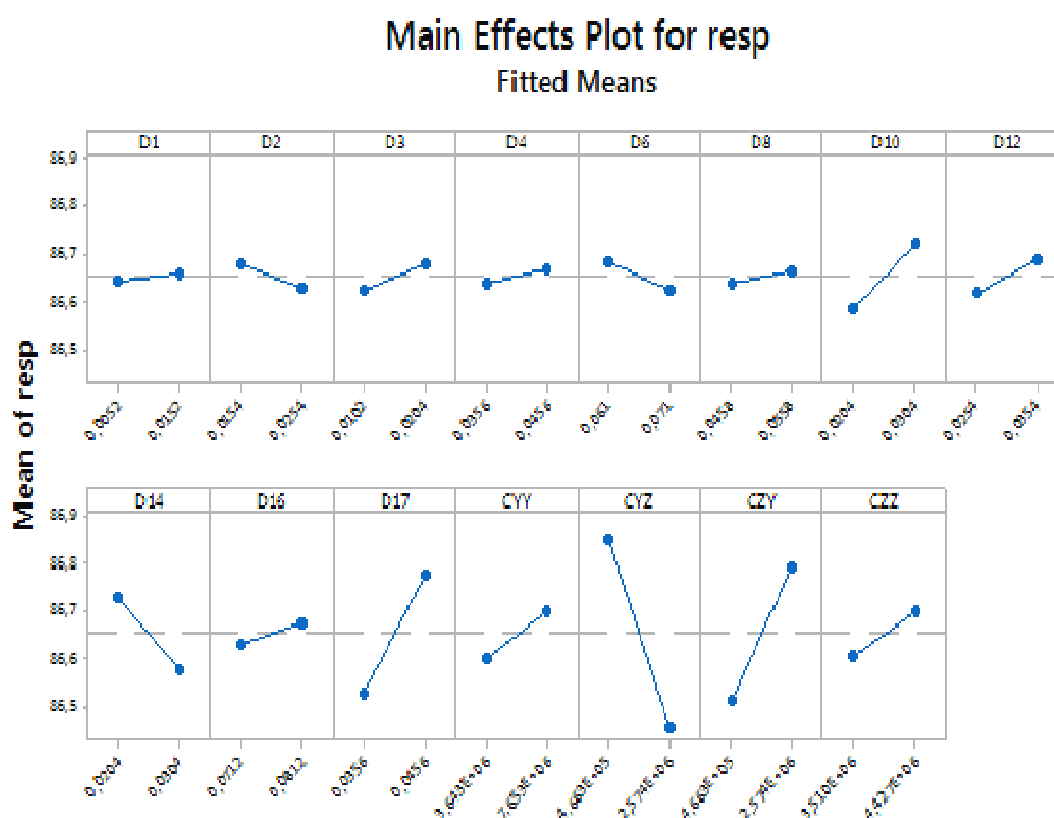


Figure V.8: Diagramme des effets principaux de différents paramètres sur la fréquence

### d. Diagrammes des interactions des facteurs

Les (figures V.9 et V.10) montrent les interactions entre les facteurs étudiés, indiquant que l'interaction de C<sub>yz</sub> \* C<sub>yy</sub> et qu'à la valeur de C<sub>yz</sub> ( 4,6634E+05), la

marge de la fréquence propre due à l'influence de niveau bas de Cyy (3, 6434E + 06)est plus élevée, en comparant avec son niveau haut. L'interaction Czy \* Cyy montre qu'à la valeur de Czy (4,6634E+05),la marge de la fréquence augmente légèrement avec le niveau haut Cyy. Par contre, avec la valeur de Czy ( 2,5740E+06) la marge de la fréquence propre augmente fortement avec le niveau bas de Cyy. De plus, l'interaction Czz \* Cyy montre qu'à la valeur Czz (3,510E+06), augmente la marge de la fréquence propre avec le niveau haut de Cyy, et que Czz (4,427E+06) augmente la marge de la fréquence propre pour le niveau bas de Cyy. Pour l'interaction Cyy \* Cyz, montre que la fréquence augmente avec le niveau haut Cyz. Par contre Pour L'interaction Cyy \* Czy la fréquence augmente avec le niveau bas . Les autres facteurs et interactions ne sont pas importants, car il n'y a pas d'interactions significatives.

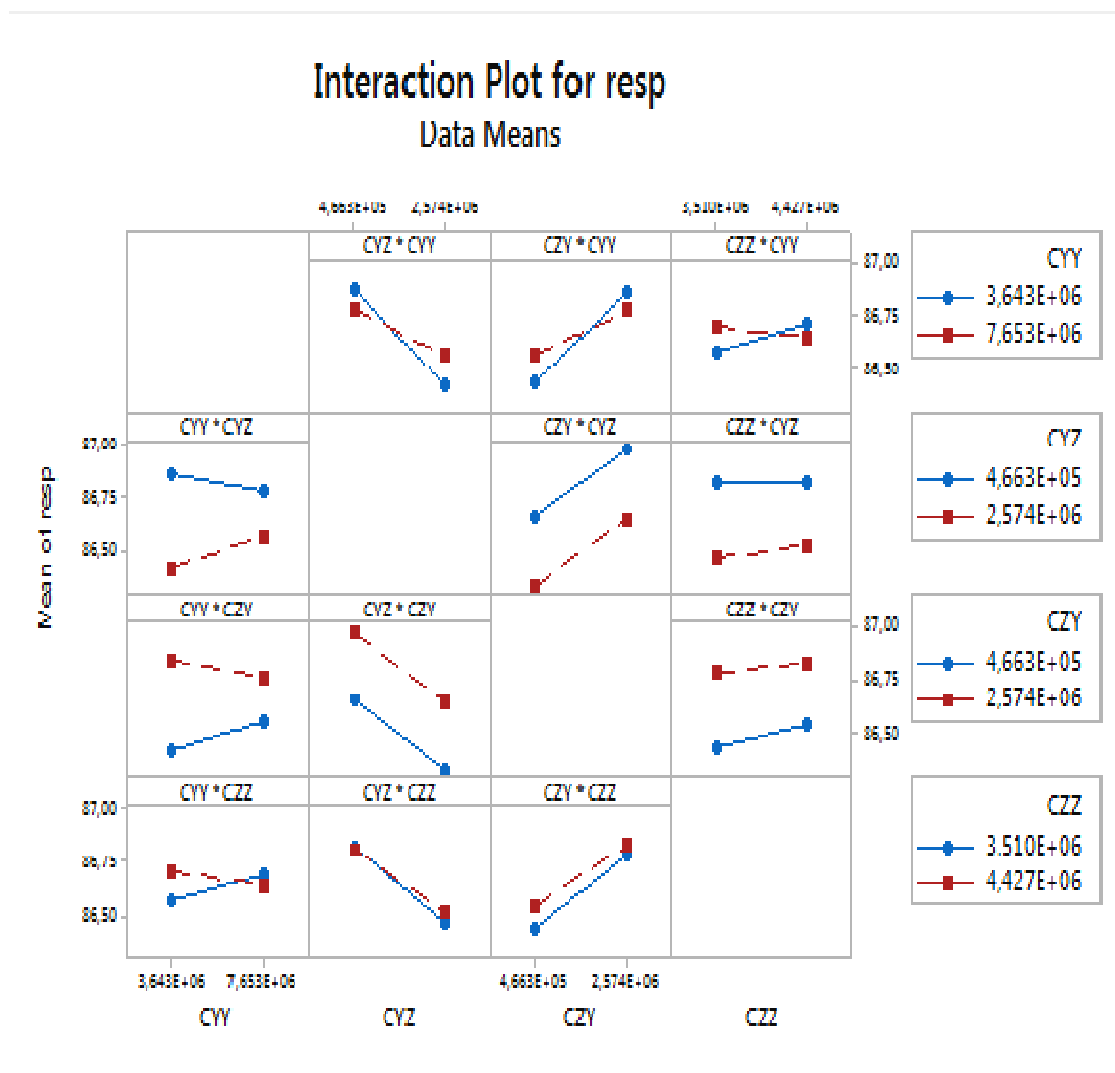


Figure V.9:Graphe d'interaction pour la réponse et les coefficients d'amortissements

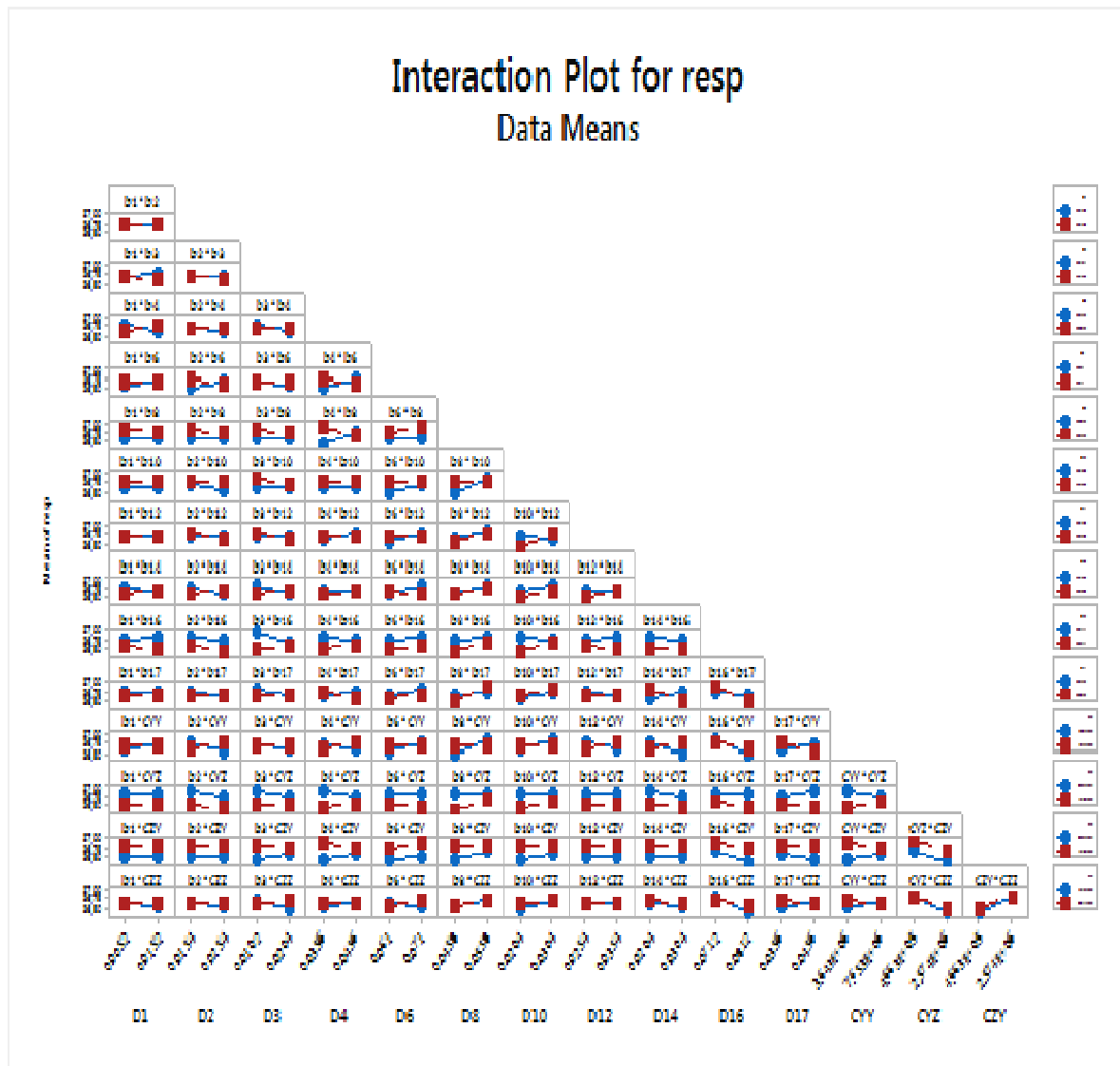
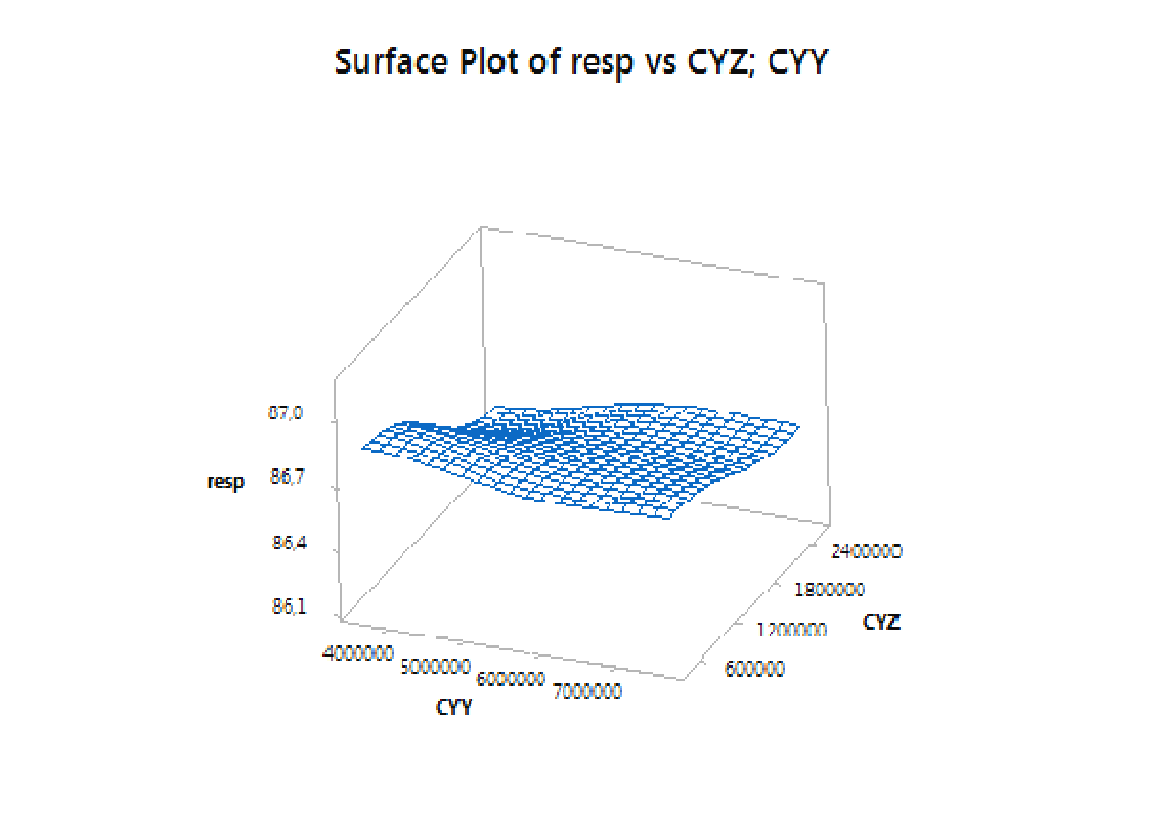


Figure V.10:Diagramme d'interaction globale afin de visualiser les interactions possibles

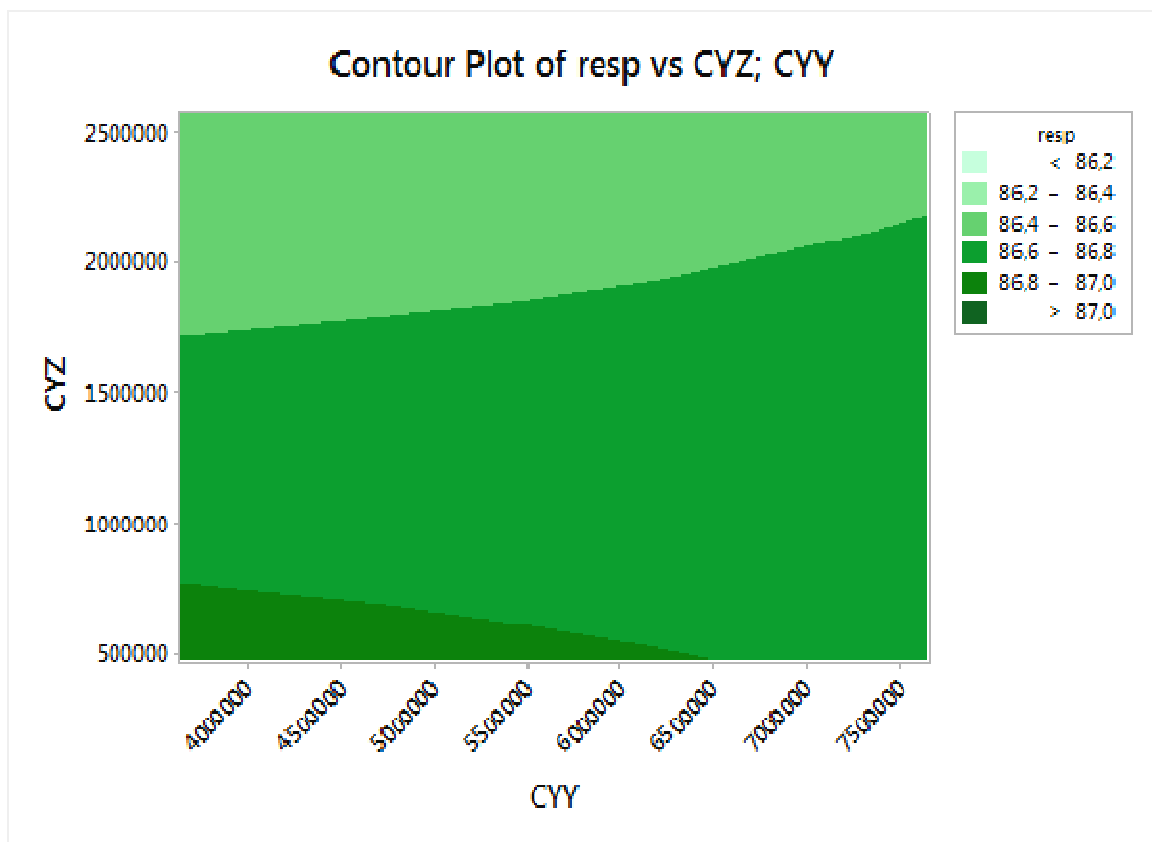
### e. Courbes et surfaces de réponse

Les surfaces plots et les courbes plots sont obtenus par minitab<sup>17</sup> montrant les interactions entre paire de facteurs permettant de déterminer la plage des meilleurs résultats entre deux variables ,sont illustrées dans les figures ci-dessous .

La (figure V.11).présente que si la valeur de Cyz passe de  $4,6634E+05$  à  $2,5740E+06$  la fréquence propre diminue et que le changement de Cyy de  $3,6434E+06$  à  $7,6527E+06$  La fréquence diminue où la zone vert clair représente l'intervalle de valeurs entre Cyz et Cyy où la fréquence propre la plus basse ( $<86,2$ ) à des niveaux élevés, la zone vert foncé représente la plage de valeurs entre Cyz et Cyy où nous trouvons la plus grande zone ( $> 87,0$ ), ce qui signifie une fréquence propre élevée. Cet intervalle est à de faibles niveaux de Cyz et Cyy.



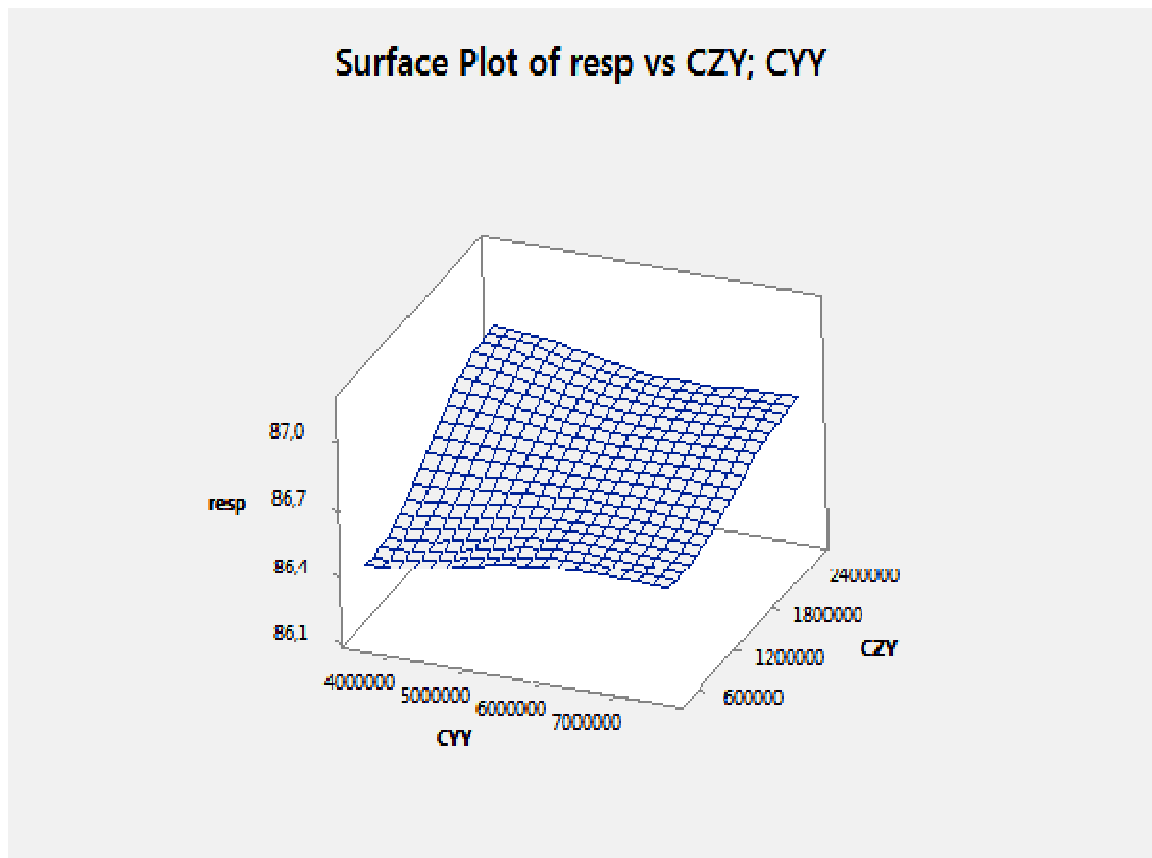
(11a) surface plot



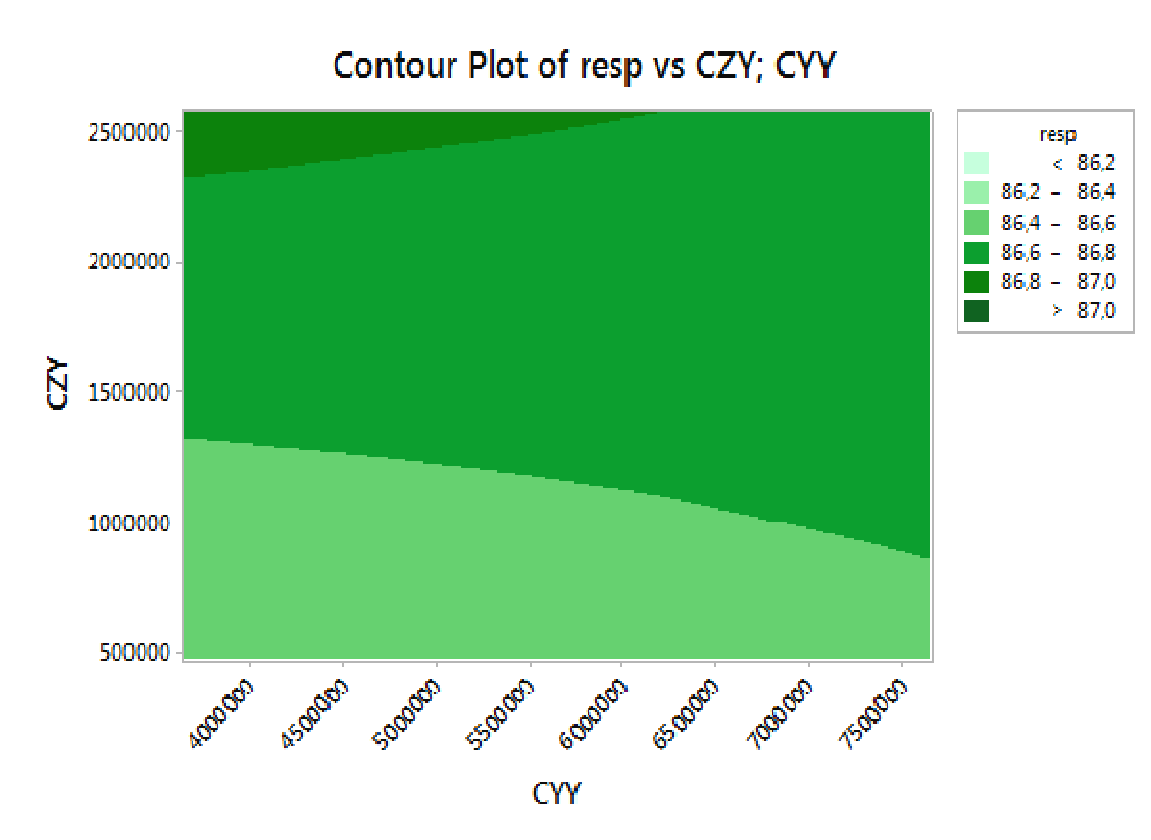
(11b) Contour plot

Figure V.11: Courbe et surface (Cyz, Cyy) correspondant à la fréquence propre

La (figure V.12). montre que lorsque les valeurs Czy passent de  $4,6634E+05$  à  $2,5740E+06$ , la fréquence augmente, la zone vert foncé représente les valeurs entre Czy et Cyy où l'on trouve la région la plus importante ( $> 87,0$ ) qui signifie haute fréquence propre. Cette région de séparation est située dans des niveaux élevés Czy. et que lorsque les valeurs Cyy passent de  $3,6434E + 06$  à  $7,6527E + 06$ , la fréquence propre diminue ,la zone vert clair représente l'intervalle de valeurs entre Czy et Cyy où nous trouvons la zone avec la fréquence propre la plus basse ( $<86,2$ ), et cette région est à de faibles niveaux de Cyz et Cyy.



(12a) surface plot



(12a) Contour plot

**Figure V.12:** Courbe et surface (Czy, Cyy) correspondant à la fréquence propre. Mêmes analyses pour les autres interactions.

### V.7. Optimisation de la réponse

L'étape consiste à trouver les valeurs de facteur qui donnent la réponse optimale. À partir du modèle validé, en combinant les deux facteurs, les contours 2D et les surfaces 3D des (figures V.13 et V.14) permettent de rechercher des solutions optimales plus souhaitables en utilisant la fonction "Désir" du programme. Les contours et les surfaces ci-dessous permettent de visualiser les régions de variation de fréquence propre optimal en fonction de divers facteurs; les zones en vert représentent les emplacements du maximum pour cette réponse tandis que les zones en bleu représentent les valeurs les plus basses. Quant aux coordonnées optimales, selon l'interprétation des diagrammes de contour, où obtenir les valeurs les plus élevées de la réponse lors de la spécification des facteurs avec des valeurs plus élevées. L'examen de tous les graphiques a permis de choisir les coordonnées optimales coefficients d'amortissements, à savoir (Hold values : valeurs fixées):  $Cyy = 5,64805E06$ ,  $Cyz = 1,52017E06$ ,  $Czy = 1,52017E06$ ,  $Czz = 3,9687E06$

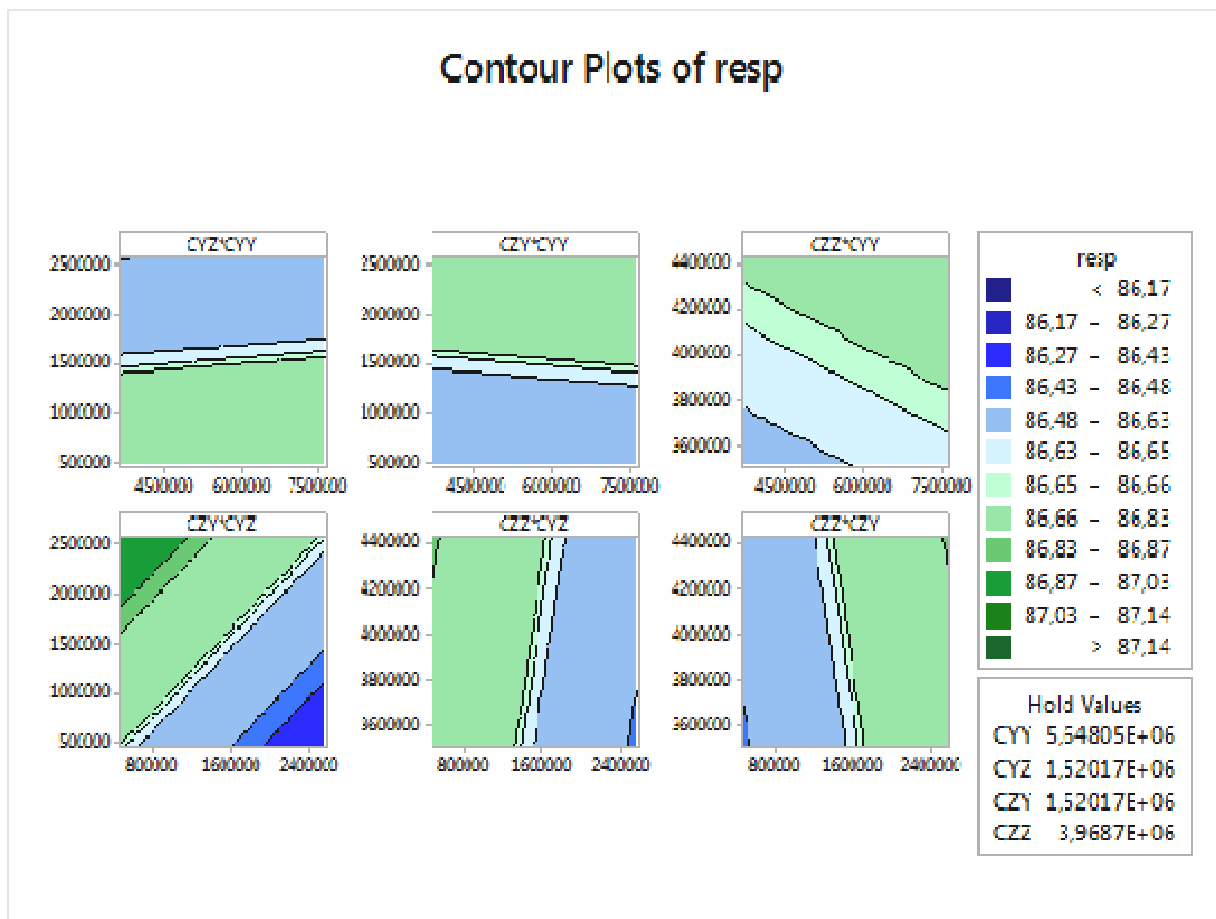


Figure V.13 : Diagramme de contours présentant les effets des différents facteurs sur la réponse.

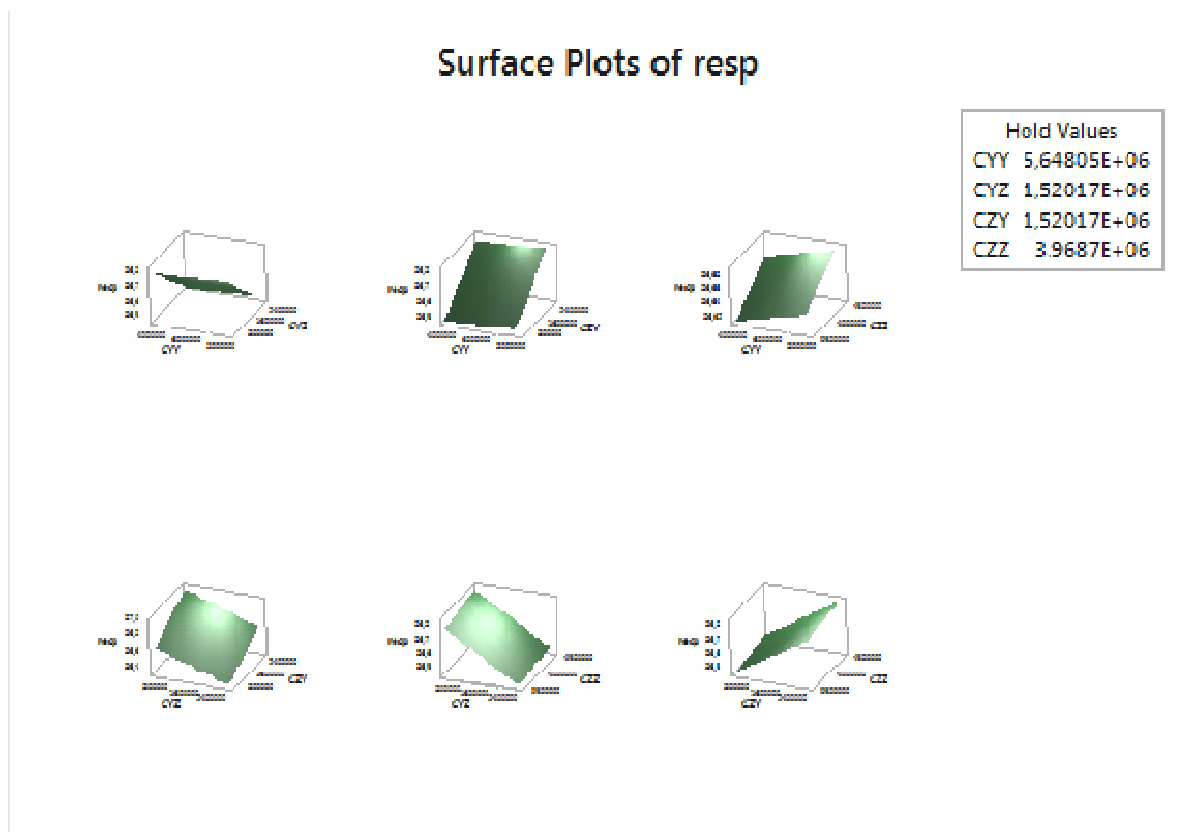


Figure V.14 : Diagramme de surface présentant les effets des différents facteurs sur la réponse.



Le diagramme optimal de la (figure V.15) montre l'effet de chaque facteur (colonnes) sur la réponse (lignes). Les lignes rouges verticales sur le diagramme représentent les facteurs. Les nombres en haut de la colonne indiquent les niveaux de facteur et les paramètres optimaux (en rouge). Les lignes horizontales bleues représentent les réponses par rapport au niveau du facteur tandis que les courbes montrent les effets de la réponse. Pour tous les optimisations, la désirabilité composite était de 1, indiquant que les paramètres donnent des résultats positifs pour toutes les réponses dans leur ensemble. On remarque que: Les paramètres optimaux pour  $C_{yy}$ ,  $C_{zy}$ ,  $C_{zz}$  sont à leur niveau maximum. Alors que  $C_{zy}$  est au niveau le plus bas pendant l'expérience. On note également que les valeurs des diamètres optimaux sont à leurs valeurs maximales pour:  $D_{10}$ ,  $D_{17}$  aussi que  $D_{14}$  à la valeur minimale, tandis que les autres diamètres n'ont pas d'effet. Cela donne une réponse de (87,5239rad/s).

Optimal		D1	D2	D3	D4	D6	D8	D10	D12	D14	D16	D17	CY	CYZ	CZY	CZZ
D: 1,000	High	0,0152	0,0254	0,0204	0,0456	0,0710	0,0558	0,0304	0,0354	0,0304	0,0812	0,0456	7652700,0	2574000,0	2574000,0	4427200,0
	Cur	[0,0152]	[0,0154]	[0,0204]	[0,0456]	[0,0610]	[0,0558]	[0,0304]	[0,0354]	[0,0204]	[0,0812]	[0,0456]	[7652700,0]	[466340,0]	[2574000,0]	[4427200,0]
Predict	Low	0,0052	0,0154	0,0102	0,0356	0,0610	0,0458	0,0204	0,0254	0,0204	0,0712	0,0356	3643400,0	466340,0	466340,0	3510200,0

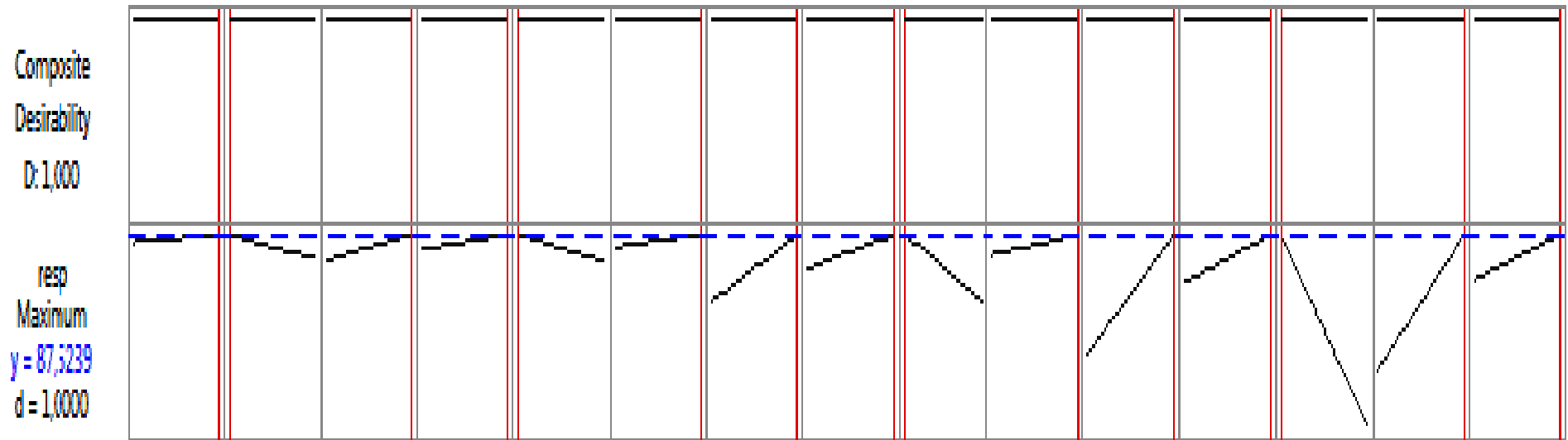


Figure V.15: Solution optimale par la fonction « Désirabilité » .

## Diagramme de Campbell

Ce diagramme (figure V.16) est obtenu par un calcul dynamique du rotor en utilisant les données proposées par le modèle de la (figure V.15).

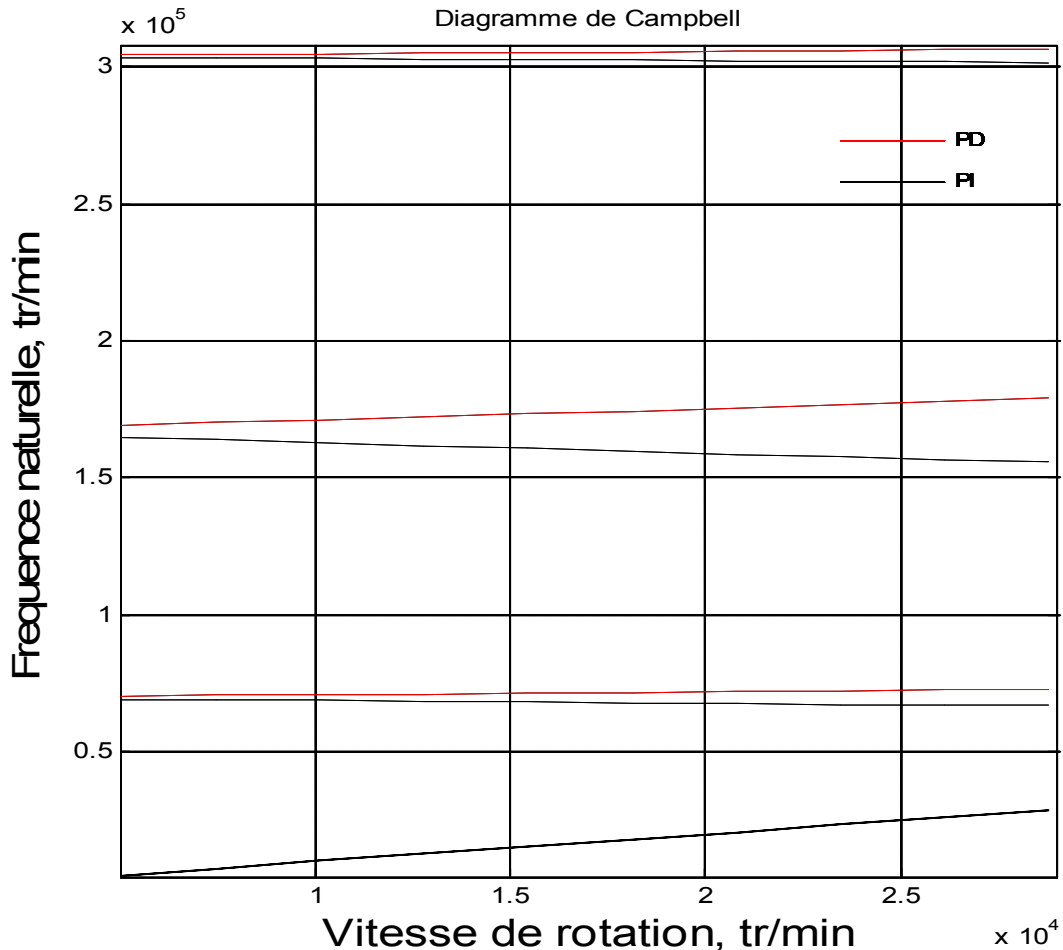
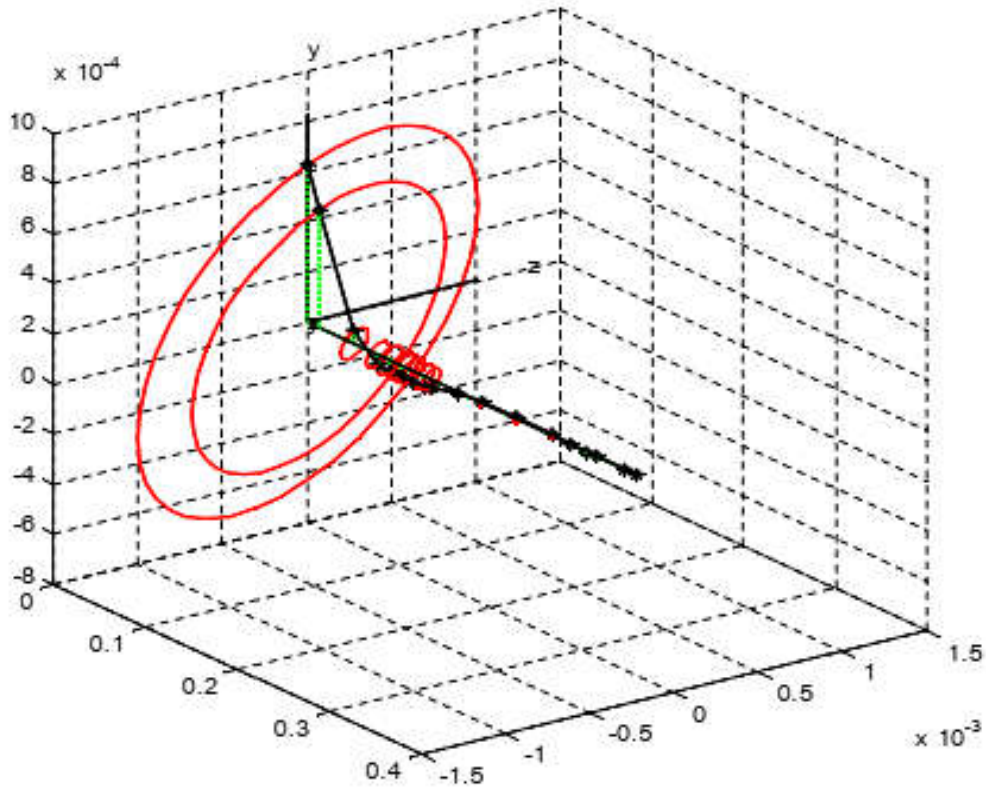


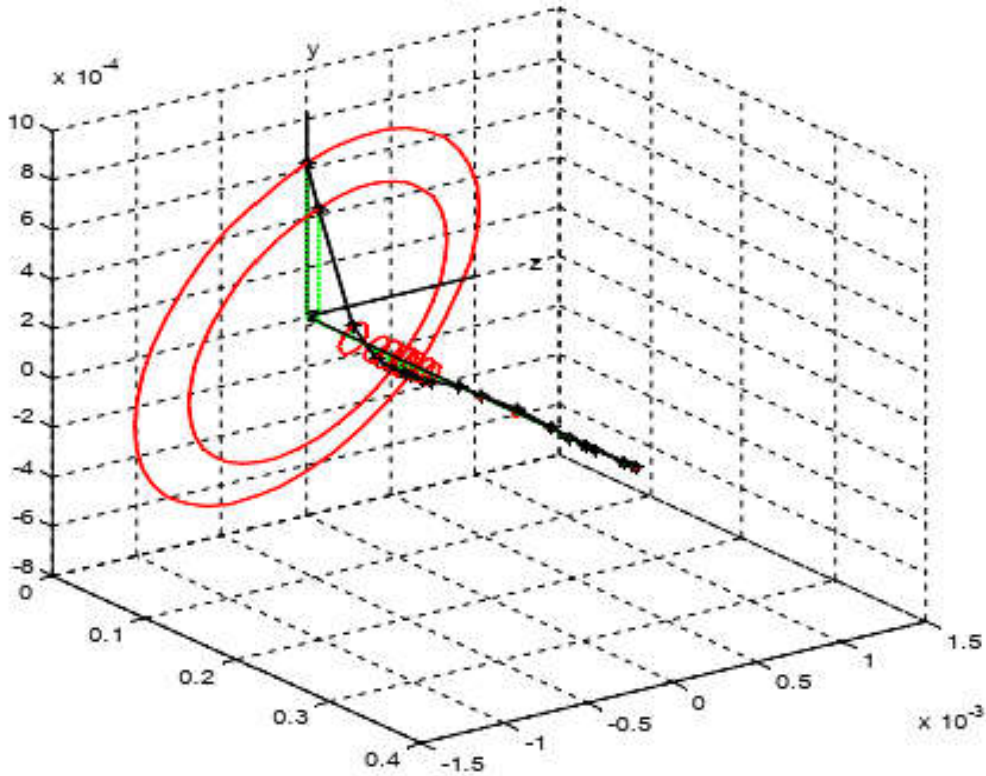
Figure V.16: Diagramme de Campbell du rotor avec des paliers hydrodynamiques.

Ainsi que la (figure V.17), présente la forme modale des deux premières fréquences fondamentales pour la vitesse de rotation minimale (4800 tr/min) et pour la vitesse maximale (28800 tr/min).

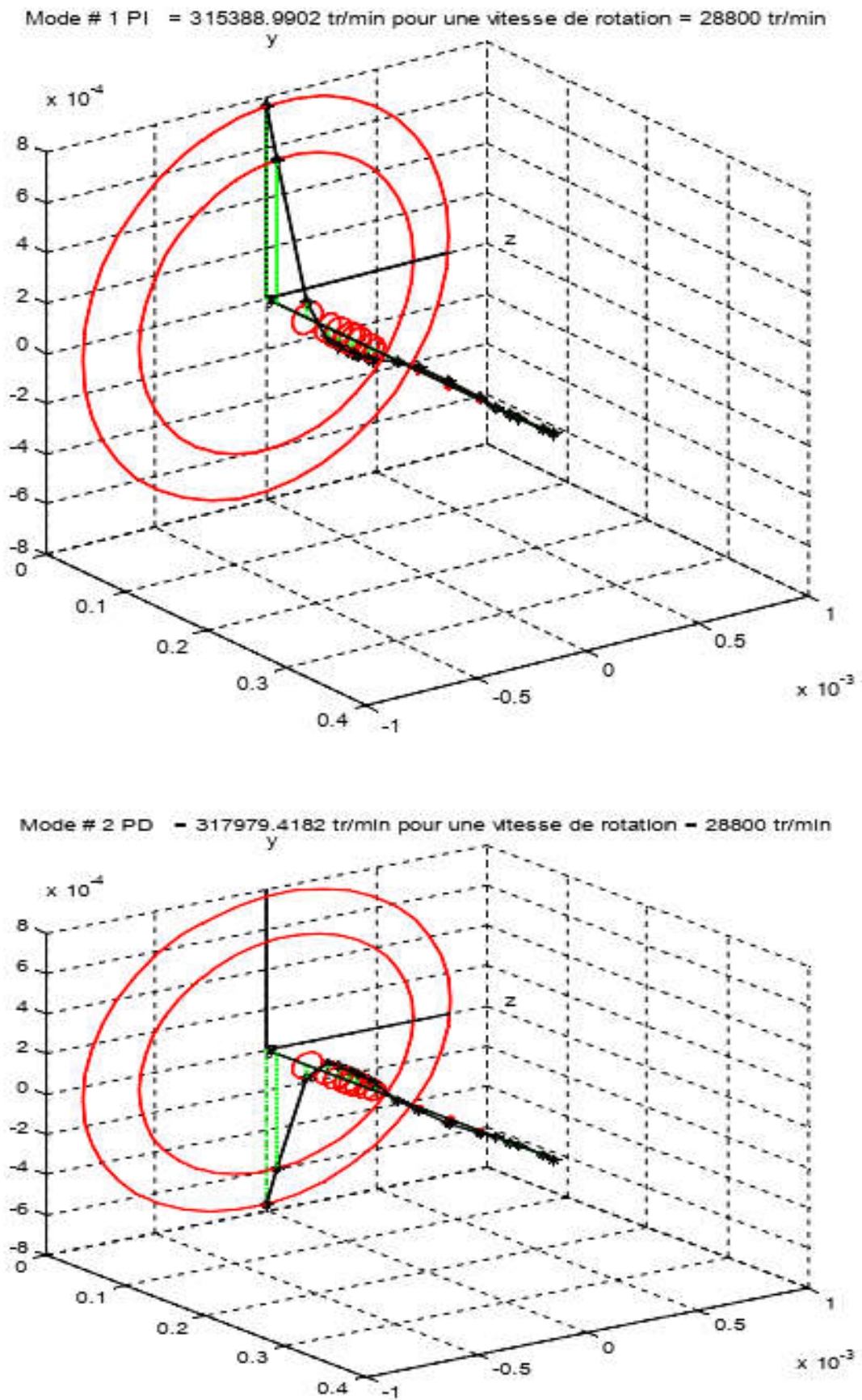
Mode # 1 PI = 316451.507 tr/min pour une vitesse de rotation = 4800 tr/min



Mode # 2 PD = 316917.3552 tr/min pour une vitesse de rotation = 4800 tr/min



(a) modes 1PI et 2 PD à 4800tr/min



(b) modes 1PIet 2PD à 28800tr/min

Figure V.17 : Formes modales du rotor correspondant au diagramme de Campbell.

## **V.8. Conclusion**

Le plan de Plackett- Burman est utilisé afin d'identifier les facteurs les plus influents sur la fréquence propre du système, Les résultats du criblage font apparaître selon l'analyse statistique des effets principaux , les graphiques d'effets de Pareto, l'analyse de variance ANOVA et les graphiques d'effets principaux que le coefficient d'amortissement  $C_{zy}$  et les diamètres D10 et D17 ont un effet significatifs sur la fréquence. La réponse optimale est obtenue en appliquant les valeurs optimales obtenues par une valeur élevée. La meilleure valeur de fréquence est 87. 5239rad/s. Les résultats obtenus mettent en évidence l'importance des plans d'expériences dans l'analyse des phénomènes instables en turbomachines.

**Conclusion générale**

Ce travail a pour objectif de faire une contribution à l'étude de la stabilité des paliers hydrodynamiques et de percevoir les paramètres dynamique en particulier les coefficients d'amortissement qui influent sur la stabilité des turbomachines. Une étude bibliographique, nous a permis de présenter des différents travaux menés par des chercheurs pour situer les besoins et affiner les objectifs. Ainsi des généralités sur les différents types de paliers hydrodynamiques et leur lubrification et mode de guidage. Par la suite une analyse théorique établissant les équations de base de la lubrification hydrodynamique. Dans le troisième chapitre, on a développer et présenter de façon détaillée les équations de base et les relations permettant de calculer les paramètres de stabilité, tel que les valeurs propres, dans le même chapitre on a consacré une partie de l'étude de stabilité d'un modèle rotor. Par la suite nous avons rédigé un aperçu sur les plans d'expériences, afin de rassembler la théorie nécessaire pour ce présent travail. Enfin, le cinquième chapitre met en œuvre l'ensemble de ces développements, en appliquant l'optimisation par plans d'expériences à l'étude de la stabilité d'un palier hydrodynamique, afin de prédire les paramètres qui influent directement sur la stabilité. Le plan de Plackett- Burman est utilisé afin d'identifier les facteurs les plus influents sur la marge de la fréquence propre du système .

## Conclusion et perspectives

L'étude des paliers hydrodynamiques a été réalisée par des chercheurs depuis le premier développement théorique. Plusieurs méthodes ont été retenues du point de vue de la simplification du problème de calcul utilisé. Une étude bibliographique nous a permis de connaître les différents travaux qui ont été réalisés dans ce cadre. Notre travail est basé sur l'étude de la stabilité des paliers hydrodynamiques et en particulier la mise en évidence de l'influence des paramètres d'amortissement. Deux programmes, Matlab et Minitab17, ont été utilisés pour étudier l'effet des coefficients d'amortissement du palier hydrodynamique en utilisant la méthode d'optimisation de conception des expériences(DOE).

Le plan de Plackett-Burman est exécuté afin de déterminer les facteurs les plus influents à la marge de la réponse. Parmi les différents facteurs étudiés figurent les diamètres et les coefficients d'amortissement. Ces facteurs sont ensuite examinés par matlab pour en déduire la stabilité du système.

À partir de l'analyse de la variance: Les diagrammes d'effet et de Pareto ont montré que C<sub>zy</sub> a le plus grand effet positif sur la fréquence par rapport à C<sub>yz</sub> qui a un effet négatif sur la fréquence, comme le confirme l'effet graphiques et résultats d'analyses statistiques. De plus, le diamètre D17et D10 est responsable de la production de l'effet haute fréquence. L'étude statistique permet de conclure que :

- Le modèle obtenu est  $P = 0,00 (<0,05)$ .
- Une corrélation satisfaisante existe entre les valeurs mesurées et les valeurs ajustées  $R^2 = 100\%$  et  $R^2_{ajus} = 99,96\%$ .

La recherche de valeurs optimales, réalisée par l'analyse de graphes de surfaces et de lignes de réponse, a permis de déterminer la valeur optimale de la réponse. Ces résultats démontrent que l'inclusion des coefficients d'amortissements dans l'analyse dynamique des machines tournantes supportées par des paliers hydrodynamiques jouent un rôle important dans la détermination de la réponse au déséquilibre des rotors.

- La réponse optimale est obtenue en appliquant les valeurs optimales obtenues par une valeur élevée. La meilleure valeur de fréquence est 87. 5239 rad/s.



En perspective, une étude plus approfondie peut prendre en compte d'autres facteurs pour connaître l'étendue de l'influence, tels que les paramètres géométriques, le matériau ... etc, sur l'équilibre et la stabilité des machines tournantes. Des travaux futurs pourraient être effectués sur l'application de la méthode des plans d'expériences pour améliorer d'autres processus dans les industries.

## Références Bibliographiques

- [1] GURUDATT. B, S. S, P. S. S et Vikram K, (2010). “Implementation, of Ansys Parametric Design Language for the Determination of Critical Speeds of a Fluid Film Bearing Supported Multi Sectioned Rotor with Residual Unbalance Through Modal and Out Of Balance Response Analysis”. Proceedings of the World Congress on Engineering Vol II.
- [2] KHONSARI M.M., Chang Y.J. (1993) “Stability boundary of non-linear orbits within clearance circle of journal bearings”. ASME Journal of Vibration and Acoustics, vol. 115, n° 3, pp. 303-307.<https://doi.org/10.1115/1.2930349>
- [3] VILLA C, Sinou JJ, Thouverez F.al. (2008). “Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system.”. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 13(4): 804–821.<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.06.012>
- [4] WHALLEY et Abdul-Ameer(2009). “Contoured shaft and rotor dynamics”. Mechanism and Machine Theory. 44(4): 772–783.<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.04.010>
- [5] ZHENG T., Hasebe N. (2000) “Nonlinear dynamic behaviors of a complex rotor-bearing system”. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 67, n° 3, pp. 485-495.
- [6] GASCH R. (2008).. “Dynamic behavior of the Laval rotor with a transverse crack”. Mech Systems and Signal Processing, 22(4), 790-804.<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2007.11.023>
- [7] ZHOU. J, Di L, Cheng CG, Xu YP, Lin ZL. (2016) “A rotor unbalance response based approach to the identification of the closed-loop stiffness and damping coefficients of active magnetic bearings”. Mech Syst Signal Process ,66–67:665–78  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.06.008>.
- [8] LU Y.J., Zhang Y.F., Dai R., Liu H., Yu L., Hei D., Wang Y. (2008) “Non-linear analysis of a flexible rotor system with multi-span bearing supports”. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, vol. 222, n° 2, pp. 87-95.<https://doi.org/10.1243/13506501JET308>
- [9] QIU .Z.L, Tieu AK.( 1997) “Identification of sixteen force coefficients of two journal bearings from impulse responses”. Wear ,212:206-1.[http://dx.doi.org/10.1016/S0043-1648\(97\)00154-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0043-1648(97)00154-3)
- [10] NEWKIRK B. L, Lewis J.F. (1925) “Shaft whipping due to oil action in journal bearings”, General Electric Review, pp. 559-568.
- [11] NEWKIRK B. L. (1930) “Whirling balance shafts”, 3rd ICAM, Stockholm, Proc. 3, 1931, pp. 105-110
- [12] VAZQUEZ, J.A., Barrett, L.E., Flack, R.D. (2001).“A flexible rotor on flexible bearing supports: Stability and unbalance response. Journal of Vibration and Acoustics”, 123(2): 137-144.<https://doi.org/10.1115/1.1355244>

- [13] JIANG GD, Hu H, Xu W, Jin ZW, Xie YB.(1997) "Identification of oil film coefficients of large journal bearings on a full scale journal bearing test rig", Tribol Int. 30(11):789–93. [http://dx.doi.org/10.1016/S0301-679X\(97\)00040-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0301-679X(97)00040-6).
- [14] HAHN.A.C.(1975) "The excitability of flexible rotors in short sleeve Bearings", Journal of Lubrication technology, Trans. ASME, Ser F, V 97, pp. 105-115.
- [15] HORI .Y. (2006) "Hydrodynamic Lubrication.", Springer, Tokyo, <http://dx.doi.org/10.1007/4-431-27901-6>
- [16] HOLMES .R. (1960) "The vibration of rigid shaft in short sleeve bearings", J. Mech. Eng. Sci. Vol. 2 , pp. 337-341.
- [17] STOKES V.K. (1966) "Couple stresses in fluid", The physics of fluids, , pp. 1709-1715.
- [18] LUND J. W.(1974) "Stability and Damped Critical Speedsof a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings ", j. eng. ind, J. may, 96(2): 509-517.<https://doi.org/10.1115/1.3438358>
- [19] STERNLICHT .B. (1959) "Elastic and damping properties of cylindrical journal bearings", J. Basic Eng., Vol. 81, , p. 101.
- [20] TIWARI. R, Lees AW, Friswell MI. (2004) "Identification of dynamic bearing parameters". a review. Shock Vib Dig 36(2):99–124.<http://dx.doi.org/10.1177/0583102404040173>
- [21] RITESH. F, Vimal Patel, R.S. Nehete, B.M. Bhandarkar (2014) "Unbalanced Response of Rotor Using Ansys Parametric Design For Different Bearings". International Journal of Engineering Sciences & Emerging Technologies, ISSN: 22316604 Volume 7, Issue 1, pp: 506-515 ©IJESET.
- [22] ISMAHENE Kaidi et A. Kabouche.(2018) " Analysis of unbalance defect in a hydrodynamic bearing". Rev. Sci. Technol., Syntheses 36: 87-102.
- [23] CHOUKSEY, M., Dutt, J.K., Modak, S.V. (2011). "Modal analysis of rotor-shaft system under the influence of rotor-shaft material damping and fluid film forces". Mechanism and Machine Theory, 48(1): 81-93<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2011.09.001>
- [24] BONNEAU.D.(1989)"Comportement Statique et Dynamique des Lignes d'Arbres Montées sur Paliers Fluides -Influence des Caractéristiques des Paliers". Thèse de doctorat d'université, Poitier (France).
- [25] BONNEAU.D, A. Fatu, and D. Souchet .(2011)"Paliers hydrodynamiques : Tome 1, Equations modèles numériques isothermes et lubrification mixte". Lavoisier.
- [26] NELSON .H.D.(1980)"A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory". Journal of Mech Des, 102:793–803.<http://dx.doi.org/10.1115/1.3254824>
- [27] LUND. J. W, Thomsen. K. K.(1978) "A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil lubricated J. bearings , Topics in Fluid bearing and rotor bearing system", New York, pp. 1-28.

- [28] MERUANE V, Pascual R. (2008) "Identification of nonlinear dynamic coefficients in plain journal bearings", *Tribol Int*, 41:743–54 <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2008.01.002>.
- [29] KUZNETSOV. E, Glavatskih.S.B.(2008) "Dynamics characteristics of a 2 axial groove journal bearing whit a PTFE lining", *Proceedings of the 16th international colloquim Tribology, Germany*.
- [30] MATTHIEU CHA, Evengy. K. (2013) "A comparative linear and nonlinear dynamic analysis of compliant cylindrical journal bearings" .*Journal of mechanism and machine theory*.V64 ,pp.80 – 92,<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2013.01.008>
- [31] KABOUYA. A, Lahmar.M, Bousaid.B.(2007) "Etude des paliers lisse mésalignés lubrifiés par des fluides à couple de contrainte". *revue de mécanique et industrie* . V19, N°8, pp.577–595
- [32] DAKEL.M ,S.Baguet , R.Dufour (2013) "Vibration non linéaires d'un rotor embarqué monté sur paliers hydrodynamiques",21<sup>ème</sup> Congrès français de mécanique, Bordeaux.
- [33] WANG WM, Li QH, Gao JJ, Yao JF, Allaire P .(2016 )"An identification method for damping ratio rotor systems", *Mech Syst Signal Process*;68–69:536 54.<http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.05.023>.
- [34] EHRICHF. F., Ed, (1992) "Handbook of Rotordynamics", McGraw-Hill, New York, NY, USA.
- [35] FRENE J., Nicolas D., Degueurce B. et al. (1990) "Lubrification hydrodynamique : Paliers et butes". Eyrolles, Paris.
- [36] L. LIGIER . (1997)"Lubrification des paliers moteurs". Edition technique de l'ingénieur.
- [37] MASSEY. B.S. (1989) "Mechanics of Fluids". Van Nostrand Reinhold (International).
- [38] J. BOZET. (1970)"L'alimentation en fluide sous pression des paliers lisses dans le cas de la rainure circonférentielle", *revu. Univers. Mines Belge.*, tome 113, n°2, p. 82-92.
- [39] MARTIN. F. A. (1964) "Minimum allowable oil film thickness ins steadily loaded journal bearings", *Proceedings Lubrication and Wear Convention*, , Vol. 178, Pt. 3N, p. 161. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_CONF\\_1963\\_178\\_384\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_CONF_1963_178_384_02)
- [40] MARTIN F. A, Garner, D. R, (1973) "Plain journal bearings under steady loads design guidance for safe operation", 1<sup>st</sup> European Tribology Congress, paper C313/73, *Proceedings IME*, p. 449.
- [41] CHRISTOPHERSON.D. G (1941) "A new mathematical method for the solution of film lubrication problems". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 146(1) :126–135, [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1941\\_146\\_027\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1941_146_027_02)
- [42] B.L.NEWKRIK, Grobel.L.P "Oil-film whirl-A non-whirling bearing".*Am.Soc.Mech.Engrs*, 59,6047,193

- [43] M. CHERABI Bilal . (2017) “Réduction de modèle par PGD dans les problèmes d'élasto-hydrodynamiques liés aux paliers lisses“ thèse doctorat UMBB.
- [44] OSBOME Reynolds. (1886) “On the theory of lubrication and its application to m. beau champ tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil”. Proceedings of the Royal Society of London, 40 (242-245) :191- 203  
<https://doi.org/10.1098/rstl.1886.0005>
- [45] P. GERMAIN. (1986)“Mécanique”. Ecole Polytechnique ; Edition Marketing, Palaiseau, Paris.
- [46] J FRENE, D.nicolas, B. degueurce, D. berthe, and M. godet. (1997) “hydrodynamic lubrication : bearings and thrust bearings”, volume 33 elsevier.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8922\(97\)80061-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8922(97)80061-2).
- [47] D. BONNEAU, A. FATU, and D. SOUCHET.(2011) “Paliers hydrodynamiques : Tome 1, Equations, modèles numériques isothermes et lubrification mixte”. Lavoisier.
- [48] J. FRENE. (1990)“ Lubrification hydrodynamique”. Eyrolles, Paris.
- [49] GEORGE. B .Dubois et W .Ocvirk. (1953) “Analytical derivation and experimental evaluation of short-bearing approximation for full journal bearings”. US Gouvernement Printing Office Washington.
- [50] AGM Michel.( 1929) “Progress in fluid-film lubrication”. Trans. ASME, 51(2) : 153–163.
- [51] SOMMERFELD . A . (1904) “Zur hydrodynamischen theorie des chmiermittelreibung”. Z. Math. Phys, 50(97) :155,.<https://www.jstor.org/stable/768813>
- [52] D. SFYRIS and A.Chasalevris. “An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing lubrication”. Tribology International, 55 :46–58, 2012.  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2012.05.013>
- [53] A. CHASALEVRIS et D.Sfyris. (2013) “Evaluation of the finite journal bearing characteristics, using the exact analytical solution of the Reynolds equation”. Tribology International, 57 :216–234.<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2012.08.011>
- [54] J.F BOOKER and KH Huebner. (1972) “Application of finite element methods to lubrication : an engineering approach”. Journal of Tribology, 94(4) :313–323.  
<https://doi.org/10.1115/1.3451719>
- [55] P.E ALLAIRE, JC Nicholas, and EJ Gunter. (1977) “Systems of finite elements for finite bearings”. Journal of Tribology, 99(2) :187–194.<https://doi.org/10.1115/1.3453016>
- [56] DARA. W Childs. (1993) “Turbo machinery rotor dynamics : phenomena, modeling, and analysis”. John Wiley& Sons.
- [57] ARTO. Sorsimo, Mika J, Rolf Stenberg, and J.Videman. (2012) “Finite element analysis of the Reynolds lubrication equation with cavitation”. J. Struct. Mech, 45(4) :188–200.

- [58] RAGHAVENDRA.N, MC Math, and Pramod R Sharma. (2015) “Finite element method analysis of hydrodynamic journal bearing”. *European Journal of Advances in Engineering and Technology*, 2(2) :92–101.
- [59] KP GERTZOS, PG Nikolakopoulos, and CA Papadopoulos. (2008) “Cfd analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by bingham lubricant”. *Tribology International*, 41(12) :1190–1204.<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.03.002>
- [60] A. MUSZYNSKA, (2011) “Whirl and whip—rotor/bearing stability problems”. *Journal of Sound and Engineering*, 31(5) :811–819.[http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(86\)80146-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(86)80146-8).
- [61] SOMMERFELD A. (1904) “hydrodynamics theory”, volume 50. *Z. angew. Math. Phys.*,
- [62] GUMBEL L. (1921) “Vergleich der Ergebnisse der rechnerischen Behandlung des lagerschmierungsproblem mit neuen Versuchsergebnissen, Monatsblätter ”, d. Berlin, Bezirk V.D.I., 125-8,.
- [63] HERBERT WALKER SWIFT. (1932) “The stability of lubricating films in journal bearings”.(includes appendix). In *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, volume 233, pages 267–288. ThomasTelford-ICE Virtual Library .  
<https://doi.org/10.1680/imotp.1932.13239>
- [64] D.BONCOMPAIN. (1984)“Les Paliers Lisses en Régime Thermo hydrodynamiques-Aspects Théoriques et Expérimentaux”. Thèse de doctorat en sciences, Université de Poitier (FRANCE).
- [65] FRANÇOISE G. et Michel . L (1985) “Amortissement”: (CEA-DMT) in "Génie Parasismique " Ouvrage collectif - Presses de l'E.N.P.C.
- [66] Forum IPSI “Amortissement dans les calculs de structures” : Forum IPSI - 2 AS Volume XVIII N°2 (Juin 1994 Théorie du réacteur et notions scientifiques fondamentales – Équipement mécanique Groupe de formation technique 2003.
- [67] F. LAKIS A.A., Ostiguy. G. (2001) “Investigation of the stability and steady state response of asymmetric rotors, using finite element formulation”. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 245, n° 2, pp. 303-328.<https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3570>
- [68] ALLAIRE, P. E., Parsell, J. K., and Barrett, L. E. (1981) “A Pad Perturbation Method for Tilting Pad Journal Bearing Dynamic Coefficients,”. *Wear*, 72(1), pp. 29-44, January, [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(81\)90281-7](https://doi.org/10.1016/0043-1648(81)90281-7)
- [69] K.H.HUBNER .(1975) “The finite element method for Engineers”. J.W. and sons.
- [70] LUND, J. W.( 1979) “Evaluation of Stiffness and Damping Coefficients for Fluid-Film Bearings”, *Shock and Vibration Digest*, 11(1), pp. 5-10.
- [71] S.S.RAO. (1982) “The Finite Element Method in Engineering”. Pergamon Press.
- [72] EHRICH, F. F. (ed.) (1992) “Handbook of Rotor dynamics”. McGraw Hill, New York.

- [73] MARCEAU Rades (2009) "Dynamics of Machinery" Edition printech.
- [74] Zhao SX, Dai XD, Meng G, Zhu J.( 2005) "An experimental study of non linear oil-film forces of a journal bearing",J Sound Vib;287:827–3<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2004.11.034>
- [75] JD. W. CHILDS. (1993) "Turbo machinery Rotor dynamics : Phenomena, Modeling, and Analysis". John Wiley & Sons, April 1993.
- [76] R.BIGRET. (1997) "Stabilité des machines tournantes et des systèmes". Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM).Paris.
- [77] MUSZYNSKA, A. (2005) "Rotordynamics."Taylor & Francis Group, Boca Raton .
- [78] RAO, J. S. (1983) "Rotor Dynamics", Wiley Eastern Ltd., New Delhi.
- [79] STERNLICHT, B. and Rieger, N. F. (1967) "Rotor stability, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers.", vol.182, Pt.3A, 1967-1968, pp 82-99.
- [80] FRITZEN, C. P., and N, R. (1982) "Influence of parameter changes to stability behavior of rotors, Rotor dynamic Instability Problems in High-Performance Turbo machinery", NASA CP 2250, 1982, pp 284-306.
- [81] G.E.P. BOX, W.G. Hunter, J.S. Hunter.(1978) "Statistics for Experimenters, An introduction to design, Data analysis, and Model Building", Wiley, Ed. New York.
- [82] YATES. (1937) "The Design and Analysis of Factorial Experiments", Bulletin 35, Imperial Bureau of Soil Sciences, Harpenden Macmillan.
- [83] G.TAGUCHI, S. KONISHI, (1987) "Taguchi Methods- Orthogonal Arrays and Linear Graphs", American Supplier Institute Inc. Dearborn, U.S.A.
- [84] SCHIMMERLING P., Sisson J.C. et al. (1998) "Pratique des plans d'expériences".
- [85] GOUPY J. (1999) "Plans d'expériences pour surface de réponse".
- [86] D. C. MONTGOMERY, (2001) "Design and Analysis of Experiments", 5th edition, John Wiley and Sons, Inc. New York,.
- [87] J. K. TELFORD, "A Brief Introduction to Design of Experiments". Johns Hopkins APL Technical Digest, vol. 27, no. 3, pp. 224-232, 2007.
- [88] PILLET .M. (1992) " Introduction aux plans expériences par la méthode Taguchi", Les Éditions d'organisation, Paris.
- [89] GOUPY Jacques. (2000)"Plans d'expériences : les mélanges". Dunod. Paris. 285 pages. ISBN 2 10 004218 1.
- [90] MONTGOMERY D.C. (1984) "Design and Analysis of Experiments", John Wiley, New York.
- [91] F. ROTELLA et P. Borne(19 95) "Théorie et pratique du calcul matriciel", éditions Technip,
- [92] G. BLONDET .( 2017)" Système à base de connaissances pour le processus de plan

- d'expériences numériques”. These de Doctorat de l'UTC juin 2017.
- [93] PLAKETT R.L, BURMAN J.p. (1946) “The design of optimum multi factorial experiments”. *Biometrika* , n° 33, <https://doi.org/10.2307/2332195>
- [94] D. BENOIST, Y. Tourbier, S. G-T, (1994)“Plans d'expériences : construction et analyse ”Technique& documentation- Lavoisier, Ed.Paris,
- [95] W.TINSSON. (2000)“Plans d'expériences : constructions et analyses statistiques”, Ed Springer.
- [96] J. GOUPY. (2005)“Pratiquer les plans d'expériences, ”Ed : DUNOD, France.
- [97] VIGIER Michel G. (1988)"Pratique des plans d'expériences, Méthodologie TAGUCHI” Les Editions d'organisation. Paris.
- [98] COCHRAN WO., COX G. (1966) “Experimental design” John Wiley and Sons .
- [99] D. BENOIST, Y. Tourbier, S. Germain.(1994) “Plans ’expériences : construction et analyse”, Technique & documentation- Lavoisier, Ed.Paris.
- [100] FISHER, R. A. (1926). “The arrangement of field experiments”, *J. Ministry. Agric.* 33, 503-513.
- [101] FISHER, R. A. (1925). “Statistical methods for research workers”, Edinburgh, Oliver and Boyd, 239 p.
- [102] J. DEMONSANT.(1996) “comprendre et mener des plans d'expériences”, Ed. AFNOR.
- [103] GOUPY. J. (2001)“Introduction aux Plans d'expériences”. Dunod. Paris. 303 pages.
- [104] BOX G.E. P. , Hunter W G. , Hunter. J. (2005)”Stuart Statistics for Experimenters ”2<sup>ème</sup> Edition. John Wiley and Sons. New-York. 633 pages.
- [105] W.TINSSON. (2000)“Plans d'expériences : constructions et analyses statistiques”, Ed Springer.
- [106] FISHER, R. A. (1925). “Statistical methods for research workers”, Edinburgh, Oliver and Boyd, 239 p.
- [107] GOUPY, J. “Plans d'expériences ”PE 230 P1-26.
- [108] JOBLET, E. et Delarminat, E. (1989). “Méthodologie Taguchi appliquée à une étude de surface de réponse”, *Revue statistique appliquée*, 37 (2), 103-116.
- [109] LOUVET. Fet Delplanque L. (2005). “Les plans d'expériences par la méthode Taguchi, Expérimentée”.
- [110] SAPORTA, G. (2006). “Probabilités, analyse des données statistique”, Edition TECHNIP
- [111] ULMO, J. et P flugfelder, B. (1979). “Méthode d'exploration de la surface de réponse pour l'optimisation d'une variable dépendante dans le cas de facteurs contrôlés quantitatifs”, *revue statistique appliquée*, 27 (4), 23-36.



- [112] REKAB. K and Shaikh, M. (2005). “Statistical Design of experiments with Engineering applications”, CRC Press.
- [113] KHURI, A. L. and Cornell, J. A. (1996). “Response surface, Designs and Analyses”, CRC Press
- [114] POIRIER Jacques . (1993)“Analyse de la variance et de la régression. Plans d'expériences” Techniques de l'ingénieur. Traité Mesures et contrôle, R260, p. 1-23.
- [115] A.A RAIMONDI and John Boyd. (1958) “A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design ” I. ASLE Transactions, 1(1) :159-174.<https://doi.org/10.1080/0569819580897233>
- [116] RITESH. F, Vimal. P (2013) “Unbalanced Response and Design Optimization of Rotor by ANSYS and Design Of Experiments”, International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 7, July-2013 ISSN 2229-5518
- [117] NELSON HD.( 2005) “The dynamics of rotor bearing system using finite elements”. ASME Journal of Engineering for Industry 98(2): 593-60 Journal of Rotating Machinery.  
<https://doi.org/10.1115/1.3438942>
- [118] A. W. LEES and M. I. Friswell, (1997) “The Evaluation of Rotor Imbalance in Flexibly Mounted Machines”, Journal of Sound and Vibration, vol. 208, no. 5, pp. 671–683.<https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1260>
- [119] KARAM.S. (2004)“Application de la méthodologie des plans d’expériences et de l’analyse de données à l’optimisation des processus de dépôt” ThèseN39-2004 université de limoges.
- [120] VENKATA Sivareddy, D., Vamsi krishn, P., V Gopal, A., P Raz, C.L. (2018). “Parameter optimisation in vibration assisted turning of Ti6Al4V alloy using ANOVA and grey relational analysis”. International Journal of Automotive and Mechanical Engineering, 15(3): 5400-5420,<https://doi.org/10.15282/ijame.15.3.2018.1.0416>

