

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES  
SIDI BEL ABBES  
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



**THESE**  
DE DOCTORAT EN SCIENCES  
Spécialité : **Génie civil**  
Option : **Structures et matériaux**

Présentée par :

**BOUTALEB Sabrina**

Thème :

**Contribution à l'analyse du comportement multi-échelle des structures épaisses**

Soutenue devant le jury composé de :

Mr. M. BENGUEDIAB	Pr	UDL-SBA	<b>Président</b>
Mr. A. TOUNSI	Pr	UDL-SBA	<b>Directeur de thèse</b>
Mr. K.H. BENRAHOU	Pr	UDL-SBA	<b>Co- Directeur de thèse</b>
Mr. M. ZIDOUR	Pr	U-TIARET	<b>Examineur</b>
Mr. T.H. DAOUADJI	Pr	U- TIARET	<b>Examineur</b>
Mr. K. BOUAKKAZ	MCA	U- TIARET	<b>Examineur</b>

Année universitaire: 2020-2021

---

---

# RESUME

---

---

# Résumé

---

*Dans le présent travail, l'analyse dynamique des nanoplaques rectangulaires de calibre fonctionnel est étudiée. La théorie de l'élasticité non locale basée sur la théorie quasi 3D de la déformation par cisaillement à haut cisaillement (HSDT quasi 3D) a été utilisée pour déterminer les fréquences propres de la plaque FG de taille nanométrique. Dans HSDT, une fonction cubique est utilisée en termes de coordonnée d'épaisseur pour introduire l'influence de la déformation par cisaillement transverse et de l'épaisseur d'étirement. La théorie de l'élasticité non locale est utilisée pour examiner l'impact de la petite échelle sur la fréquence naturelle de la nanoplaque rectangulaire FG. Les équations de mouvement sont déduites en appliquant le principe de Hamilton. Pour démontrer l'exactitude de la méthode proposée, les résultats calculés dans des cas spécifiques sont comparés et examinés avec les résultats disponibles dans la littérature et un bon accord entre les deux cas est observé. Enfin, l'influence des divers paramètres tels que le coefficient non local, les indices de matériau, le rapport de forme et le rapport épaisseur / longueur sur les propriétés dynamiques des nanoplaques FG est illustrée et discutée en détail.*

**Mots clés:** *Théorie de l'élasticité non locale; nanoplaque de FG; vibration libre; théorie raffinée; fondation élastique.*

# *Abstract*

---

*In the present work the dynamic analysis of the functionally graded rectangular nanoplates is studied. The theory of nonlocal elasticity based on the quasi 3D high shear deformation theory (quasi 3D HSDT) has been employed to determine the natural frequencies of the nanosize FG plate. In HSDT a cubic function is employed in terms of thickness coordinate to introduce the influence of transverse shear deformation and stretching thickness. The theory of nonlocal elasticity is utilized to examine the impact of the small scale on the natural frequency of the FG rectangular nanoplate. The equations of motion are deduced by implementing Hamilton's principle. To demonstrate the accuracy of the proposed method, the calculated results in specific cases are compared and examined with available results in the literature and a good agreement is observed. Finally, the influence of the various parameters such as the nonlocal coefficient, the material indexes, the aspect ratio, and the thickness to length ratio on the dynamic properties of the FG nanoplates is illustrated and discussed in detail.*

**Keywords:** *Nonlocal elasticity theory; FG nanoplate; Free vibration; Refined theory; Elastic foundation.*

## الملخص

في العمل الحالي تمت دراسة التحليل الديناميكي للصفائح النانوية المستطيلة المتدرجة وظيفياً. تم استخدام نظرية المرونة غير المحلية القائمة على نظرية تشوه القص العالي شبه ثلاثية الأبعاد (quasi 3D) لتحديد الترددات الطبيعية للوحة المتدرجة وظيفياً (FG) ذات الحجم النانوي. في نظرية تشوه القص العالي (HSDT)، يتم استخدام دالة تكعيبية من حيث إحدائيات السماكة لإدخال تأثير تشوه القص المستعرض وتمدد السمك. تُستخدم نظرية المرونة غير المحلية لدراسة تأثير المقياس الصغير على التردد الطبيعي للصفحة النانوية المستطيلة المتدرجة وظيفياً FG. يتم استخراج معادلات الحركة بتنفيذ مبدأ هاملتون. لإثبات دقة الطريقة المقترحة، تتم مقارنة النتائج المحسوبة في حالات محددة وفحصها مع النتائج الموجودة من قبل ويتم ملاحظة اتفاق جيد. أخيراً، تم توضيح ومناقشة تأثير العوامل المختلفة مثل المعامل غير المحلي، ومؤشرات المواد، ونسبة العرض إلى الارتفاع، ونسبة السمك إلى الطول على الخصائص الديناميكية للألواح النانوية المتدرجة وظيفياً FG بالتفصيل.

**الكلمات المفتاحية:** نظرية المرونة غير المحلية؛ صفائح نانوية متدرجة وظيفياً FG؛ اهتزاز حر؛ نظرية مكررة؛ أساس مرن.

---

---

**LISTES DES FIGURES  
TABLEAUX**

---

---

# Liste des figures

---

## Chapitre I

Fig. I.1	Type d'un matériau FGM en céramique et métal	.....	07
Fig. I.2	Caractéristiques de FGM	.....	09
Fig. I.3	Principe de la méthode coulage en bande	.....	12
Fig. I.4	Disposition du procédé frittage laser différentiel	.....	15
Fig. I.5	Schéma du procédé dépôt par centrifugation	.....	16
Fig. I.6	Géométrie d'une plaque en FGM	.....	16
Fig. I.7	Variation de la fraction volumique dans une plaque	.....	18
	P-FGM		
Fig. I.8	Variation de la fraction volumique dans une plaque	.....	19
	S-FGM		
Fig. I.9	Variation de la fraction volumique dans une plaque	.....	20
	E-FGM		

## Chapitre II

Fig. II. 1	Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire	.....	24
Fig. II. 2	Illusion de la plaque Love Kirchhoff	.....	25
Fig. II. 3	Illusion de la plaque Love Kirchhoff	.....	27
Fig. II.4	Illusion de la plaque d'ordre élevé	.....	28

## Chapitre IV

Fig. IV. 1	La géométrie d'une plaque FGM	.....	43
------------	-------------------------------	-------	----

## Chapitre V

Fig. V. 1	Les influences du rapport de dimension et le Paramètre d'échelle sur la fréquence non dimensionnelle	.....	62
Fig. V. 2	Les effets du rapport de dimension et le Paramètre non locale sur la fréquence non dimensionnelle	.....	62
Fig. V. 3	L'influence de l'indice de gradient ( $n$ ) et le paramètre D'échelle ( $\mu$ ) sur la fréquence adimensionnelle pour Une plaque FG carré simplement supporté avec $(a/h)=10$ . (a) première fréquence ; (b) deuxième Fréquence	.....	63

## Liste des tableaux

---

### Chapitre I

Tab. I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	.....	08
----------	--	-------	----

### Chapitre IV

Tab. IV.1	Propriétés matérielles de la plaque FG utilisée	.....	44
-----------	---	-------	----

### Chapitre V

Tab. V.1	Les variations de la fréquence non dimensionnelle ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ) et le rapport de fréquence (FR) pour la plaque non locale ( $m=1, n=1$ ). Les variations de la fréquence non dimensionnelle ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ) et le rapport de fréquence (FR) pour la plaque non locale ( $m=2, n=1$ ).	.....	56
Tab. V.2	Les variations de la fréquence non dimensionnelle ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ) et le rapport de fréquence (FR) pour la plaque non locale ( $m=2, n=2$ ).	.....	56
Tab. V.3	La comparaison du paramètre de fréquence naturelle ( $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_c h/E_c}$ ) pour AL/AL <sub>2</sub> O <sub>3</sub> plaques carrées ( $\eta=1$ ).	.....	57
Tab. V.4	La comparaison du paramètre de fréquence fondamentale ( $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ ) pour AL/ZrO <sub>2</sub> plaques carrées ( $\eta=1$ ).	.....	58
Tab. V.5	Le paramètre de fréquence ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho_c h/E_c}$ ) pour AL/ZrO <sub>2</sub> plaques ( $\delta=0.2, n=1$ ).	.....	59
Tab. V.6	L'effet du paramètre non local non dimensionnel $\zeta$ et l'indice de gradient $n$ sur les fréquences non dimensionnelles $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_c h/E_c}$ du rectangle FG	.....	59
Tab. V.7	nanoplaque (AL/AL <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ).	.....	60



# *Notations et Symboles*

$E$	<i>Module de Young</i>
$\mu$	<i>Coefficient de Poisson</i>
$G$	<i>Module de cisaillement</i>
$\tilde{\nabla}$	L'opérateur nabla
$t_{ij}, \varepsilon$	Déformations linéarités
$V_f$	<i>La fraction volumique du FGM</i>
$n$	<i>L'indice de gradient</i>
$V$	<i>Volume d'une région</i>
$X$	<i>Point du corps</i>
$f_i$	Les charges corporelles
$u_i$	Le vecteur du déplacement
$\nabla^2$	L'opérateur de Laplace
$a$	La longueur de la propriété interne
$e_0$	Constante matérielle
$h$	L'épaisseur de la plaque
$b$	Largeur
$E_c$	Le module de Young céramique
$E_m$	Le module de Young métallique
$\sigma_{ij}$	Le tenseur du contrainte classique
$k_1, k_2$	Les coefficients de la géométrie

$u_0(x, y)$	Fonction variable de déplacement de la surface médiane de la plaque
$v_0(x, y)$	Fonction variable de déplacement de la surface médiane de la plaque
$w_0(x, y)$	Fonction variable de déplacement de la surface médiane de la plaque
$\theta(x, y)$	Fonction variable de déplacement de la surface médiane de la plaque
$\varphi_z(x, y)$	Fonction variable de déplacement de la surface médiane de la plaque
$\delta$	L'opérateur de variation
$U$	L'énergie de déformation
$K$	L'énergie cinétique
$A$	La surface supérieure
$N$	Les forces
$M$	les moments
$\rho(z)$	la masse volumique
$I_0$	inertie de masse
$J_0$	inerties de masse
$I_1$	inerties de masse
$I_2$	inerties de masse
$J_1$	inerties de masse
$J_2$	inerties de masse

$K_2$	inerties de masse
$K_3$	inerties de masse
$U_{mn}$	Coefficient de Fourier inconnu
$V_{mn}$	Coefficient de Fourier inconnu
$W_{mn}$	Coefficient de Fourier inconnu
$X_{mn}$	Coefficient de Fourier inconnu
$Y_{mn}$	Coefficient de Fourier inconnu
$\eta$	Rapport de dimensions
$\zeta$	Paramètre d'échelle non dimensionnelle
$h/a$	le rapport épaisseur sur longueur
$\beta$	paramètre de fréquence naturelle
$D$	paramètre de fréquence naturelle
$\beta^{NL}$	le paramètre de la fréquence non locale non dimensionnelle
$\beta^L$	le paramètre de la fréquence non dimensionnel locale.
FR	rapport de fréquence

---

---

# **TABLES DES MATIERES**

---

---

# Table des matières

---

INTRODUCTION GENERALE .....	01
-----------------------------	----

---

## CHAPITRE I- GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

---

I-1	INTRODUCTION.....	06
I-2	APERCU HISTORIQUE SUR LE MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETE.....	06
I-3	CONCEPT DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES .....	08
I-4	PROGRES DE LA RECHERCHE SUR LES MATERIAUX FGM.....	09
I-5	LES METHODES DE FABRICATION DU MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETEFGM .....	10
I-5.1	Coulage en bande (Tape casting ou doctor blade).....	11
I-5.2	Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting).....	12
I-5.3	Dépôt par électrophorèse.....	13
I-5.4	Compaction sèche des poudres .....	13
I-5.5	Projection plasma.....	13
I-5.6	C. V. D et P. V. D.....	14
I-5.7	Frittage et infiltration.....	14
I-5.8	Frittage laser différentiel.....	14
I-5.9	Implantation ionique.....	15
I-5.10	Dépôt par centrifugation.....	15
I-6	LOIS REGISSANTES LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES DES PLAQUES FGM.....	16
I-6.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	17
I-6.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	18
I-6.3	Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	19
I-7	AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES FGMs.....	20
I-7.1	Les avantages de la FGM.....	20
I-7.2	Les inconvénients de la FGM.....	21
I-8	DOMAINES D'APPLICATIONS DES FGMs.....	21
I-9	CONCLUSION.....	22

---

## CHAPITRE II- THEORIE DES PLAQUES

---

II-1	INTRODUCTION .....	23
II-2	DEFINITION D'UNE PLAQUE .....	23
II-3	MODELES ANALYTIQUES DES PLAQUES FGM .....	24
II-3.1	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) .....	24
II-3.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	25

	<b>II-3.3</b>	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	27
<b>II-4</b>		LA THEORIE NON LOCALE .....	29
	<b>II-4.1</b>	Théories non locales à gradient .....	30
	<b>II-4.2</b>	Théories non locales intégrales .....	31
<b>II-5</b>		CONCLUSION.....	32

---

### CHAPITRE III- GENERALITES SUR LES NANOTECHNOLOGIES

---

<b>III-1</b>		INTRODUCTION .....	34
<b>III-2</b>		HISTORIQUE DES NANOTECHNOLOGIES .....	34
<b>III-3</b>		LA DIVERSITE DES NANOPARTICULES .....	28
	<b>III-3.1</b>	Les nanoparticules d'origine naturelle .....	35
	<b>III-3.2</b>	Les nanoparticules manufacturées provenant des nanotechnologies .....	37
<b>III-4</b>		FABRICATION DES NANOTECHNOLOGIE.....	37
<b>III-5</b>		LE ROLE DE LA NANOTECHNOLOGIE DANS LA CONSTRUCTION DE LA SOCIETE CIVILE .....	38
<b>III-6</b>		RISQUES LIES AUX NANOMATERIAUX.....	39
	<b>III-6.1</b>	Environnement .....	39
	<b>III-6.2</b>	Entreposage .....	39
	<b>III-6.3</b>	Risques pour la santé.....	40
<b>III-7</b>		LES AVANTAGES DE LA NANOTECHNOLOGIE.....	40
<b>III-8</b>		CONCLUSION.....	41

---

### CHAPITRE IV- FORMULATIONS THEORIQUES DES NANOPLAQUES

---

<b>IV-1</b>		INTRODUCTION .....	43
<b>IV-2</b>		GEOMETRIE DE LA PLAQUE FG .....	43
<b>IV-3</b>		LA THEORIE DE L'ELASTICITE NON LOCALE.....	44
<b>IV-4</b>		HYPOTHESES DE BASE.....	45
<b>IV-5</b>		LE MODELE D'ELASTICITE NON LOCALE DU NANO-PLAQUE FG .....	49
<b>IV-6</b>		PROCEDURE DE SOLUTION .....	52
<b>IV-7</b>		CONCLUSION .....	53

---

### CHAPITRE V- RESULTATS ET DISCUSSIONS

---

<b>V-1</b>		INTRODUCTION .....	55
<b>V-2</b>		NANO-PLAQUE RECTANGULAIRE ISOTROPE.....	55
<b>V-3</b>		PLAQUE EN FGM .....	57
<b>V-4</b>		CONCLUSION .....	64
		CONCLUSION GENERALE .....	66
		<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	67



---

## INTRODUCTION GENERALE

La découverte des nanotubes de carbone (NTC) a ouvert une nouvelle ère dans le monde des nanosciences (Iijima, 1991). Depuis lors, plusieurs études ont été menées sur le comportement physique, électrique, mécanique et chimique des nanostructures. Les principaux travaux démontrent que les propriétés mécaniques des nanostructures sont différentes de celles des autres matériaux bien utilisés (Miller et Shenoy, 2000; Bellifa et al., 2017a; Bensaid 2017; Ehyaei et al., 2017; Karami et al., 2017; Bouadi et al., 2018; Bensaid et al., 2018; Mehar et Panda, 2018; Bakhadda et al., 2018; Akbas 2018, Tang et Liu, 2018; Yazid et al., 2018; Youcef et al. 2018; Mokhtar et al., 2018; Kadari et al., 2018; Karami et al., 2018abcd; Cherif et al., 2018; Draoui et al., 2019; Adda Bedia et al., 2019; Karami et al. 2019ab; Semmah et al., 2019). Les propriétés importantes de telles structures ont favorisé leurs applications dans plusieurs domaines tels que les nanodispositifs, les nano-roulements, les nanooscillateurs, le stockage de l'hydrogène et les batteries électriques.

Les nanostructures sous forme de plaques, telles que les nanoplaques ou les feuilles à l'échelle nanométrique, sont des types très importants de nanostructures à formes 2D (Shahadat et al., 2018). Ils contiennent d'importantes propriétés mécaniques (Iijima, 1991; Miller et Shenoy, 2000; Shen et Zhang, 2010; Pradhan et Phadikar, 2009; Eltaher et al., 2012 et 2016; Ebrahimi et Salari, 2015; Khorshidi et al., 2015; Chemi et al., 2016; Akbaş, 2016; Ghorbanpour Arani et al., 2012; Janghorban, 2016; Wu et al., 2018) et avec ces caractéristiques uniques, ils deviennent des candidats idéaux pour de nombreux domaines de l'industrie de la nanotechnologie intégrant le stockage d'énergie (Ma et al., 2008), nano systèmes électromécaniques (Craighead, 2000), capteurs de contrainte, de masse et de pression (Sakhaee-Pour et al., 2008ab), cellules solaires (Aagesen et Sorensen, 2008), dégradation photocatalytique de colorant organique (Ye et al., 2006), matériaux composites (Rafiee et al., 2010) et ect.

La modélisation du continuum dépendant de la taille des nanostructures a retenu l'attention de la communauté scientifique car les expérimentations contrôlées en nanosize sont difficiles et que les simulations de dynamique moléculaire sont très coûteuses en calcul. Nous pouvons trouver dans la littérature divers modèles de continuum dépendant de la taille, tels que la théorie du stress de couple modifié (Koiter, 1969; Mindlin et Tiersten, 1962; Toupin,



---

1962), la théorie de l'élasticité du gradient de déformation (Nix et Gao, 1998; Lam et al., 2003) ; Aifantis, 1999; Li et al., 2016) et la théorie de l'élasticité non locale (Eringen, 1972). Parmi ces modèles, la théorie de l'élasticité non locale a été largement utilisée (Peddieson et al., 2003; Reddy, 2007; Reddy et Pang, 2008; Heireche et al., 2008; Murmu et Pradhan, 2009a, b; Wang, 2009). . Pour surmonter les faiblesses de la théorie classique de l'élasticité, Eringen et Edelen (1972) ont proposé le modèle d'élasticité non locale en 1972. Ils ont modifié la mécanique conventionnelle du continuum pour prendre en compte les influences à petite échelle. Il convient de noter que dans la théorie de l'élasticité non locale, le tenseur de la contrainte en un point quelconque du continuum du nanomatériau est lié non seulement au tenseur de la déformation en ce point, mais également au tenseur de la déformation en tous les autres points du continuum. Les données de simulation atomistique et les études expérimentales sur la dispersion des phonons ont indiqué l'exactitude de cette remarque (Eringen, 1983; Chen et al., 2004).

Les matériaux à calibrage fonctionnel (FGM) constituent la nouvelle génération de nouveaux matériaux composites de la famille des composites d'ingénierie, dont les caractéristiques changent en douceur entre deux surfaces et les avantages de cette combinaison conduisent à de nouvelles structures capables de supporter des charges mécaniques importantes dans un environnement à haute température (Ebrahimi et Rastgoo 2008a, b).

Présentant de nouvelles caractéristiques, les MGF ont également suscité de nombreux intérêts de recherche, qui portaient principalement sur les propriétés de flexion, de flambement et de dynamique des structures de FG (Ebrahimi et al. 2009a, b; Boudierba et al., 2013 et 2016; Hebali et al., 2014; Meziane et al., 2014; Houari et al., 2016; Boukhari et al., 2016; Bennoun et al., 2016; Bousahla et al., 2016; Bellifa et al, 2017b; Sekkal et al., 2017ab ; Benahmed et al., 2017; Atmane et al., 2017; Shahsavari et al., 2018; Benchohra et al., 2018; Younsi et al., 2018; Faleh et al., 2018ab, Bouazza et al., 2018; Zine et al., 2018; Bouhadra et al., 2018; Bourada et al., 2018; Boukhelif et al., 2019; Khiloun et al., 2019; Bourada et al., 2019; Zaoui et al., 2019).

De plus, des compléments structurels tels que des plaques, des poutres et des membranes de taille micrométrique ou nanométrique sont souvent utilisés en tant qu'éléments dans des systèmes micro / nano électromécaniques (MEMS / NEMS). Ainsi, la

---

compréhension des caractéristiques mécaniques et physiques des nanostructures est nécessaire pour ses utilisations pratiques.

Au cours des dernières décennies, la dynamique des MGF a été largement utilisée, Malekzadeh et Heydarpour (2012) ont étudié le comportement dynamique de coques cylindriques FG en rotation dans un environnement thermique en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement au premier ordre (FSDT) des coques. Ungbhakorn et wattanasakulpong (2013) ont examiné la réponse dynamique thermo-élastique de plaques FG portant une masse de patch répartie basée sur le HSDT. Kumar et Lal (2013) ont examiné les trois premières fréquences naturelles de la vibration axisymétrique libre des plaques annulaires 2D FG reposant sur la fondation de Winkler en utilisant la technique de quadrature différentielle et la méthode de collocation de Chabyshev. Sur la base de la théorie 3D de l'élasticité et considérant que les caractéristiques mécaniques des matériaux changeaient continuellement dans le sens de l'épaisseur, l'étude par vibration libre et forcée 3D de la plaque circulaire FG avec diverses conditions aux limites a été établie par Nie et Zhong (2007). Hung et al (2012) ont présenté la dynamique des plaques de MGF dans les fissures internes en utilisant la technique de Ritz.

La théorie de l'élasticité 3D a été utilisée de nouveaux ensembles de fonctions admissibles pour la cinématique ont été développés pour améliorer l'efficacité de la technique de Ritz dans la modélisation du comportement des plaques fissurées. Matsunaga (2008) a analysé les contraintes de flambement et les fréquences propres des plaques FG en prenant en compte les influences du cisaillement transverse et des déformations normales. Malekzadeh et Alibeygi (2010) ont présenté la réponse dynamique des plaques quadrilatérales rectilignes arbitraires FG soumises à l'environnement thermique et fondées sur la FSDT. Ke et al (2013) ont proposé un modèle de microplaque non conventionnel pour l'analyse dynamique non linéaire axisymétrique de microplaques FG annulaires en utilisant la théorie modifiée des contraintes de couple, la théorie FSDT et la non-linéarité géométrique de von Karman. Ke et al (2012) ont également étudié la flexion, la stabilité et la dynamique des microplaques annulaires FG en se basant sur la théorie de la contrainte de couple modifiée et la FSDT. Asghari et Taati (2013) ont utilisé une approche dépendante de la taille pour les investigations mécaniques des microplaques FG, basée sur la théorie modifiée de la contrainte de couple. Kocaturk et Akbas (2012) ont examiné l'influence thermique sur la réponse après le flambement des faisceaux de MGF sur la base de la théorie de Timoshenko et en utilisant une formulation à éléments finis. Les caractéristiques de vibration du faisceau avec graduation des

---

propriétés de la loi de puissance dans les directions transversale ou axiale ont été rapportées par Alshorbagy et al. (2011).

Récemment, Eltaher et al. (2012, 2013a) ont utilisé une approche par éléments finis pour l'investigation dynamique de faisceaux nanométriques FG basée sur la théorie de faisceaux non locale d'Euler-Bernoulli. Ils ont également discuté de la réponse en flexion-flambement dépendante de la taille des nanofaisceaux FG en utilisant la théorie du continuum non local (Eltaher et al. 2013b). Le comportement dynamique de faisceaux à l'échelle nanométrique Timoshenko FG simplement pris en charge a été étudié par Rahmani et Pedram (2014). Zemri et al. (2015) ont étudié la réponse mécanique d'un faisceau à l'échelle nanométrique du FG en utilisant une théorie du faisceau de la théorie de la déformation par cisaillement non locale affinée. Belkorissat et al. (2015) ont examiné les propriétés dynamiques du nano-plateau FG en utilisant une nouvelle théorie raffinée à quatre variables non locale. Ahouel et al. (2016) ont étudié le comportement mécanique dépendant de la taille de nanofaisceaux déformables par cisaillement trigonométrique FG incluant le concept de position de surface neutre. Bounouara et al. (2016) ont présenté une théorie de déformation par cisaillement d'ordre zéro non locale pour la vibration libre de plaques FG à l'échelle nanométrique reposant sur une base élastique. Khetir et al. (2017) ont développé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement trigonométrique non locale pour l'analyse du flambement thermique de plaques FG de taille réduite incorporées. Bouafia et al. (2017) ont proposé une théorie quasi 3D non locale pour les comportements de flexion et de flexion en flexion libre des nanofaisceaux FG. Besseghier et al. (2017) ont analysé la réponse dynamique de plaques FG nanosize intégrées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique non locale. Mouffoki et al. (2017) ont examiné la réponse dynamique de nanofaisceaux avancés non locaux dans un environnement hygro-thermique en utilisant une nouvelle théorie du faisceau de déformation sous cisaillement trigonométrique à deux inconnus. Karami et al. (2019c) ont étudié la propagation dans les ondes de nanoplaques anisotropes FG reposant sur la fondation Winkler-Pasternak.

Plusieurs auteurs ont récemment proposé des théories avancées plaque / faisceau pour étudier le comportement mécanique de nanostructures ou de macro-structures (Belabed et al., 2014; Hamidi et al., 2015; Kar et Panda, 2016ab; Bousahla et al., 2014; Beldjelili et al., 2016; Sahoo et al., 2016; Draiche et al., 2016; Bouazza et al., 2016; Mehar et Panda, 2016, Becheri et al., 2016; Katariya et al., 2017abc; El- Haina et al., 2017; Fahsi et al., 2017; Mehar et al., 2017; Ebrahimi et al., 2017; Chikh et al., 2017; Sahoo et al., 2017; Abdelaziz et al., 2017, Singh et

Panda, 2017; Hirwani et al., 2017; Katariya et Panda, 2018; Ellali et al., 2018; Mehar et al., 2018ab, Katariya et al., 2018ab, Kaci et al., 2018, Attia et al. , 2018; Dash et al., 2018; Belabed et al., 2018; Katariya et Panda, 2019; Katariya et al., 2019).

Dans les travaux actuels, la dynamique des plaques FG à l'échelle nanométrique est étudiée à partir de la théorie de la déformation sous cisaillement quasi cubique en 3D, en conjonction avec le modèle d'élasticité non locale.

En considérant le terme intégral dans la cinématique, on a réduit le nombre de variables et d'équations de mouvement. La solution Navier est utilisée pour étudier le comportement dynamique des nanoplaques FG. On considère que les caractéristiques du matériau varient dans l'épaisseur en fonction de la variation de la loi de puissance.

Les résultats numériques fournis sont destinés à servir de points de repère pour l'application et la conception de dispositifs nanoélectroniques et à nano-entraînement, de nano-oscillateurs et de nanocapteurs, dans lesquels les nanoplaques jouent le rôle d'éléments de base. Ils peuvent également être utiles en tant que sources précieuses pour la validation d'autres méthodes et formulations approximatives.

Notre travail se compose de cinq chapitres :

- Le premier chapitre donne un aperçu détaillé sur les matériaux fonctionnellement gradués appelés « FGM».
- Dans le deuxième chapitre, une attention particulière sera portée aux auteurs ayant travaillé sur les différentes théories des plaques.
- Le troisième chapitre sera consacré à la nanotechnologie.
- Le quatrième chapitre décrit la théorie des nanoplaques en se basant sur la relation constitutive non locale.
- Le cinquième chapitre sera consacré aux résultats obtenus par la nouvelle théorie proposée et seront comparés avec d'autres déjà publiés permettant ainsi la validation de résultats.
- Le travail s'achèvera avec une conclusion générale qui résumera notre travail incluant des perspectives pour des futurs travaux.

# CHAPITRE I

## GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENTS DE PROPRIETES

### I.1 INTRODUCTION

Le développement des matériaux composites a permis de leur associer des propriétés spécifiques au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution était donc d'utiliser des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

En effet, les FGMs sont une classe de composites particuliers caractérisée par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle dans le matériau, conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés (Nabil Ferguen et al, 2011). Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels.

Le potentiel des matériaux à gradient de propriétés est illustré pour les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et le génie civil (O. BOUAZIZ, 2011).

### I.2 APERÇU HISTORIQUE SUR LE MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETE

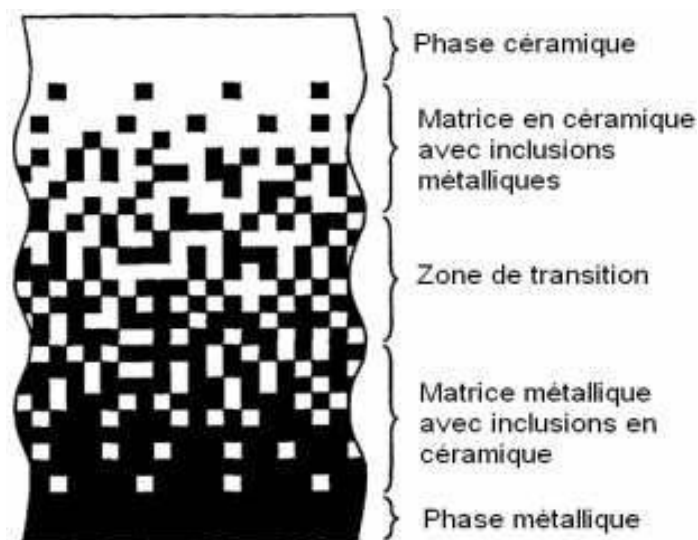
Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai.

Depuis, un effort a été suivi pour développer des matériaux à haute résistance basée sur les matériaux à gradient fonctionnel. Ces matériaux ont été initialement conçus comme des matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion. Ils sont maintenant développés pour un usage général en tant que composants structuraux dans un environnement de haute température.

C'est par la suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. La variation continue des propriétés mécaniques, confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil et trouvent également des applications biomédicales.

La structure des FGM est constituée d'une phase céramique d'un côté et d'une phase métallique dans l'autre côté, avec des régions intermédiaires constituées d'un mélange des deux constituants, variant selon une fraction volumique (Fig. I-1).



**Fig I-1** Type d'un matériau FGM en céramique et métal (Yin et al 2004)

Les propriétés mécaniques de ces deux composants sont illustrées dans le tableau I.1.

**Tableau I-1** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance thermique ;</li> <li>- Bonne résistance à l'oxydation ;</li> <li>- Faible conductivité thermique.</li> </ul>
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Élimination des problèmes de l'interface ;</li> <li>- Relaxer les contraintes thermiques.</li> </ul>
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance mécanique ;</li> <li>- Conductivité thermique élevée ;</li> <li>- Très bonne ténacité.</li> </ul>

### I.3 CONCEPT DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

Le concept du matériau à gradient de propriété (FGM) est proposé comme étant un matériau capable de résister à une température de surface de 2000 K et à une variation de température de 1000 K à travers une section inférieure à 10 mm. Les changements continus de la composition, de la microstructure, de la porosité de ces matériaux résultent des changements des propriétés telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique. Depuis 1984, les couches minces de FGM ont été largement recherchées, et sont presque une réalité commerciale.

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) représente un des derniers développements du 21ème siècle. Le concept de FGM a non seulement beaucoup d'importance dans la conception pratique des matériaux réfractaires mais également dans le développement de divers matériaux graduels.

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) dont lesquels la fraction volumique des fibres des constituants changent sans interruption en fonction de la position le long d'une direction. L'avantage du matériau à gradient de propriétés (FGM) est d'éviter la concentration des contraintes d'interfaces développées dans les matériaux composites conventionnels. La composition et la microstructure changent dans l'espace suivant une loi de distribution prédéfinie. Les matériaux composites offrent de nombreuses propriétés supérieures, comme la haute résistance et la rigidité élevée. Actuellement, aucun matériau industriel ne peut résister à de tels chargements thermomécaniques.

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure

distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I-2.

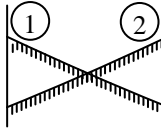
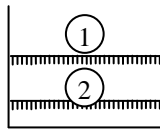
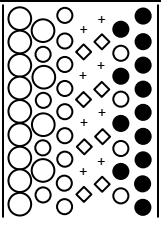
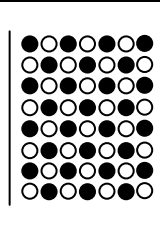
Fonction / propriété	① Force mécanique ② Conductivité thermique		
Structure / Texture	Eléments constitutifs Céramique (○) Métal (●) Fibre (◇+) Micropore (○)		
Matériaux	Exemple	FGM	Non FGM

Fig. I-2 Caractéristiques de FGM

#### I.4 PROGRES DE LA RECHERCHE SUR LES MATERIAUX FGM

Le concept des « Matériaux à gradients évalués » a été proposé par des scientifiques à Sendai en 1984. L'idée a été de réaliser des matériaux utilisés comme des barrières thermiques dans différents domaines.

En 1986, lancement d'une étude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA) ;

Entre 1987-1989, un projet de recherche nationale sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques (Partie I-phase 1). L'intérêt du projet était de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- ténacité du matériau côté basse température;



- relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique.

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

## **I.5 LES METHODES DE FABRICATION DU MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETE**

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange

graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable.

Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation.

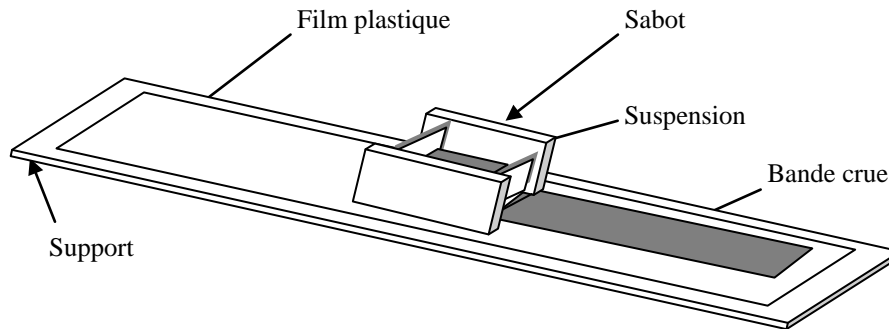
Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux. Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule (relation de Stokes). En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, nous citons ci-dessous quelques unes d'entre elles :

### **I.5.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor Blade)**

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (Doctor Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (Fig. I-3). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-

1000 $\mu$ m). Après un raffermisssement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Fig. I-3 :** Principe de la méthode coulage en bande.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défloculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés. Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type  $Al_2O_3$  et surtout pour les condensateurs à base de  $BaTiO_3$ . On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ( $BaTiO_3$  principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler, soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression.

### **I.5.2 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique;
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### **I.5.3 Dépôt par Electrophorèse**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux.

### **I.5.4 Compaction sèche des Poudres**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

### **I.5.5 Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique.

### **I.5.6 C. V. D. et P. V. D**

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

### **I.5.7 Frittage et infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. Dans la première on fabrique une matrice frittée d'un matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité et dans la seconde, on remplit ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Cette méthode peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

### **I.5.8 Frittage laser différentiel**

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

Yuki et al. ont utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure 4 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

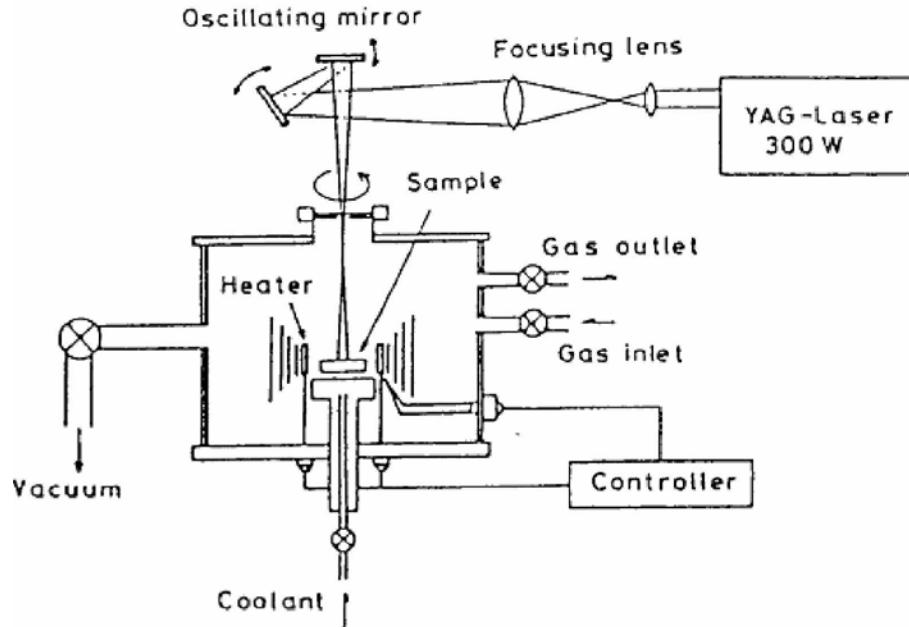


Fig. I-4 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

### I.5.9 Implantation ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé.

### I.5.10 Dépôt par centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Fig. I-5).

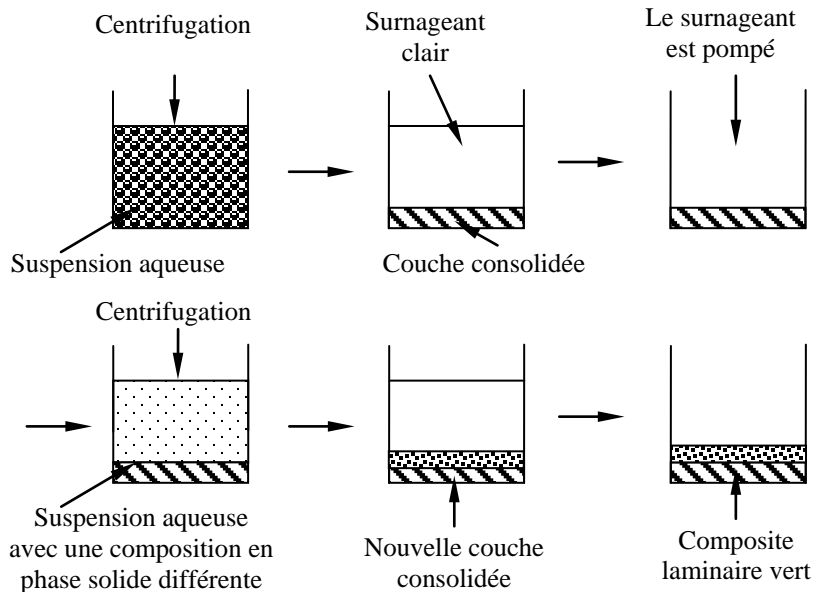


Fig. I-5 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation.

## I.6 LOIS REGISSANTES LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES DES PLAQUES FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » peut être produit en changeant sans interruption les constituants des matériaux multiphasés dans un profil prédéterminé. Les dispositifs les plus distincts d'un FGM sont les microstructures avec des macros –propriétés graduées sans interruption. Un **FGM** peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

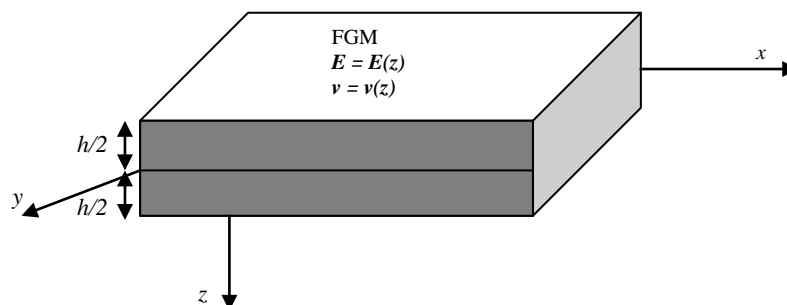


Fig. I-6 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées ( $x$ ) et ( $y$ ) définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe ( $z$ ) perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E = E(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.6.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P \quad (\text{I.1})$$

Où ( $P$ ) est un paramètre matériels et ( $h$ ) est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  à été définie, le module de Young de ces plaques est exprimé :

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.7, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $P < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $P > 1$ .



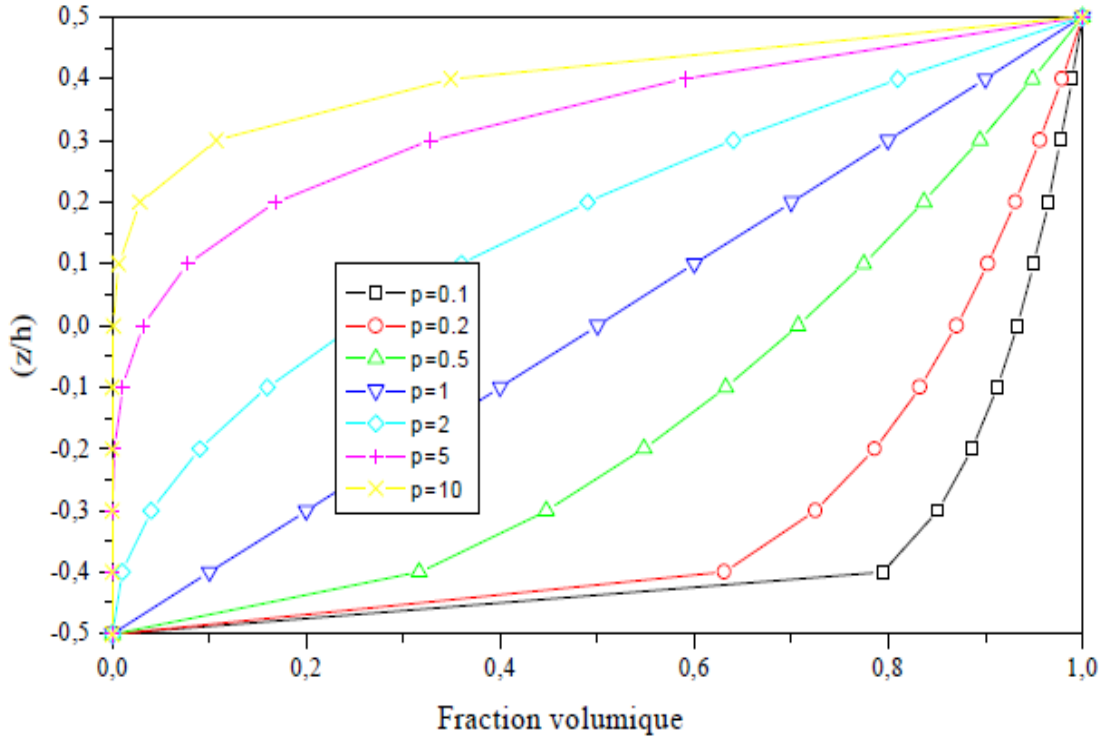


Fig. I-7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

### 1.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z + h/2}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I.3}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{I.4}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{I.5}$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{I.6}$$

La figure I.8 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.5) et (I.6) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

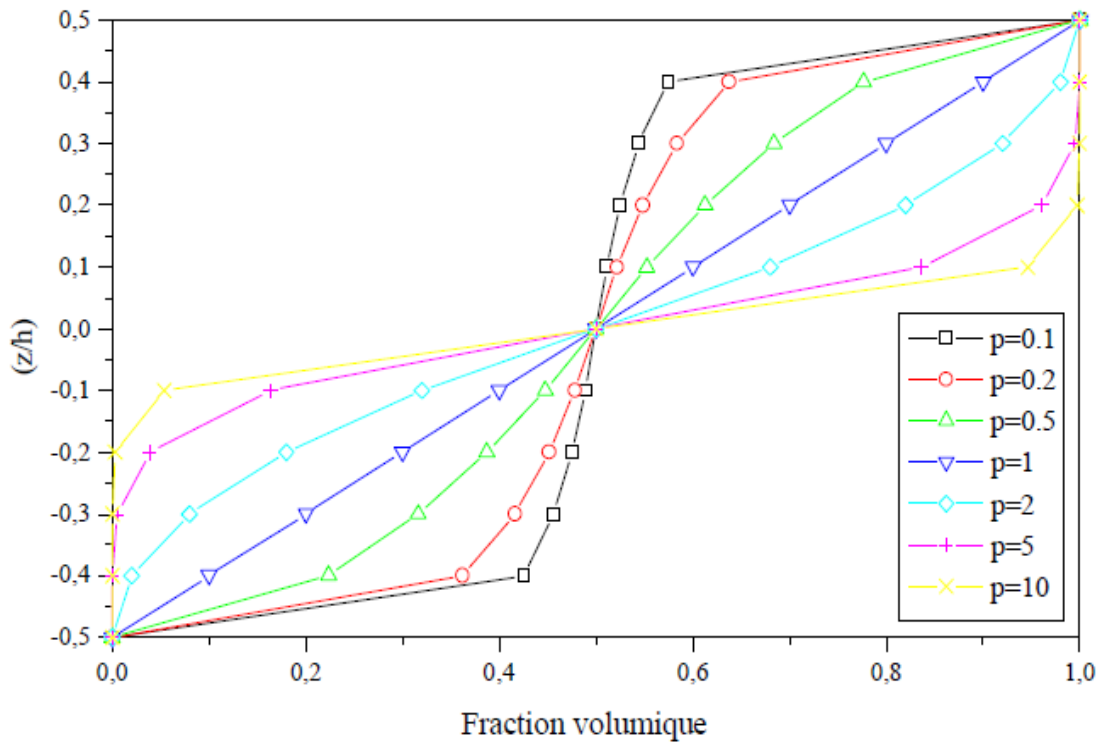


Fig. I-8: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.6.2 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

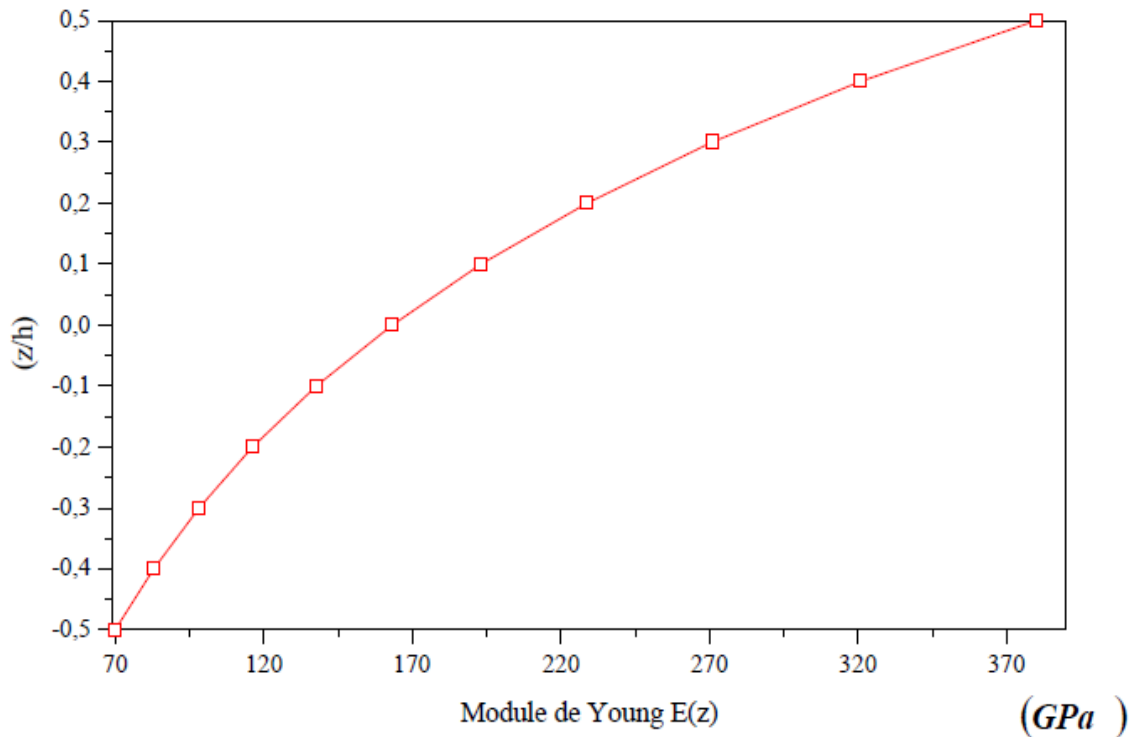
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \tag{I.7}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \tag{I.8}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.9.



**Fig. I-9 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

## I.7 AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES FGMs

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

### I.7.1 Les avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement (Narottam.P et al, 2011) et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique ;

- extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- suppression de délaminage ;
- augmentation de la ténacité à la rupture ;
- élimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

### **I.7.2 Les inconvénients de la FGM**

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T1) et une céramique avec une température de fusion (T2).

Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T1 \ll T2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses (Narottam.P et al, 2011).

## **I.8 DOMAINES D'APPLICATIONS DES FGM**

Il existe de nombreux domaines d'application pour les pièces FGM, les deux principaux sont les domaines aérospatial et biomédical. Dans le domaine aérospatial, où le concept de FGM fit son apparition, les pièces multi matériaux sont en majorité développées dans le but de résister à la fois à des sollicitations thermiques et mécaniques.

## I.9 CONCLUSION

Après avoir défini les matériaux FGM comme étant des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, nous avons évoqué les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles de ces derniers.

Nous avons aussi cité quelques procédés de leur fabrication ainsi que les domaines de leur application.

## CHAPITRE II

# THEORIE DES PLAQUES

### II.1 INTRODUCTION

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier l'aérospatial, l'industrie sous-marine, le domaine de l'énergie et le génie civil. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (fissure, endommagement, ...etc). En ingénierie ou en recherche, la plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement des plaques.

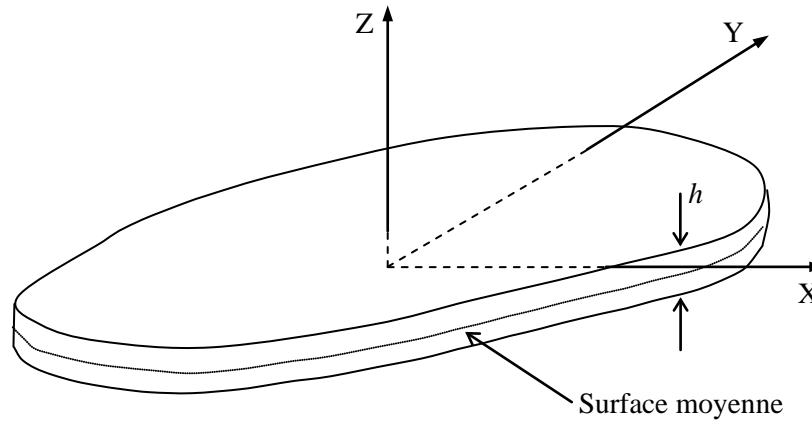
Dans ce chapitre, une attention particulière sera portée à différents modèles analytiques des plaques employées.

### II.2 DEFINITION D'UNE PLAQUE

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Figure II.1). On définit :

- le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan  $(O, x, y)$ , d'équation  $z = 0$  ;
- une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit  $(x, y)$  donné ; elle a pour direction  $(z)$ .

On appelle ( $h$ ) l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan ( $z = -h/2$ ) et le plan supérieur est le plan ( $z = h/2$ ).



**Fig. II.1 :** Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.

## II.3 MODELES ANALYTIQUES DES PLAQUES FGM

### II.3.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant (figure III.2). Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ). Elle suppose les hypothèses ci-après:

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée

( $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ). On admet dans ce cas que la déformation due à l'effort tranchant est nulle et ne participe pas à la rigidité.

- le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal ( $w$ ) des points du plan neutre ;

- l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ( $\sigma_z = 0$ );

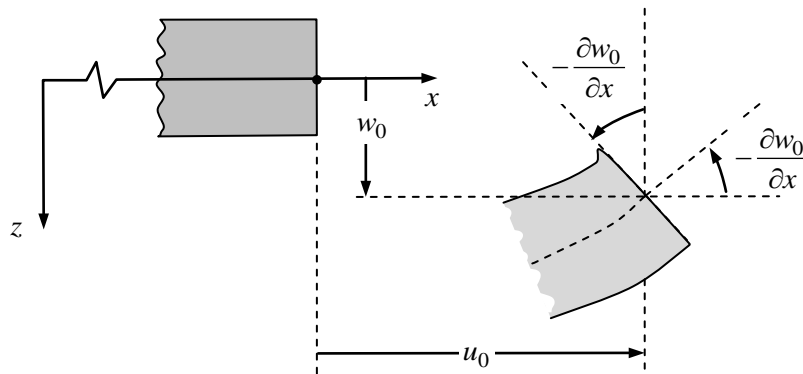
Le champ de déplacement s'écrit pour la théorie classique des plaques sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II-1})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II-2})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II-3})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



**Fig. II.2** : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

### II.3.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans la théorie classique des plaques, les hypothèses suivantes ont été établies par (Kirchhoff 1850) :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque;
- La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes;
- Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan moyen après déformation;
- L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.



La troisième hypothèse veut dire que la déformation due au cisaillement transversal est négligée. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation deviennent importants lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes plus élevés de vibration sont désirées. Wittrick a précisé qu'en excluant ces effets, l'erreur dans la théorie de plaque de Kirchhoff est proportionnelle à l'épaisseur. Si la théorie de plaque de Kirchhoff est employée, les fréquences obtenues sont au dessus de celles prévues. Une théorie plus sophistiquée de plaque est ainsi nécessaire pour l'analyse des plaques épaisses. Il y a eu beaucoup de théories de plaques épaisses prenant en compte l'effet de cisaillement transversal avec un objectif implicite de minimiser l'erreur le plus possible. Reissner a proposé la théorie de plaque épaisse la plus simple en introduisant l'effet de cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale. Mindlin a présenté un travail différent de Reissner, une théorie de premier ordre de plaques où il a expliqué la déformation de cisaillement en même temps qu'un facteur de correction de cisaillement. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de Kirchhoff sont maintenues. Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, la théorie détend l'hypothèse de normalité de sorte que :

- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur ( $k$ ) de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que :

- L'effet de l'inertie de rotation est inclu.

Dans la littérature, les vibrations des plaques fondées sur les hypothèses du premier ordre de cisaillement transversal sont largement mentionnées sous le nom de plaques de Mindlin, Reissner-Mindlin ou Hencky-Mindlin. Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement (Fig. III-3) est exprimé sous la forme :

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II-4})$$

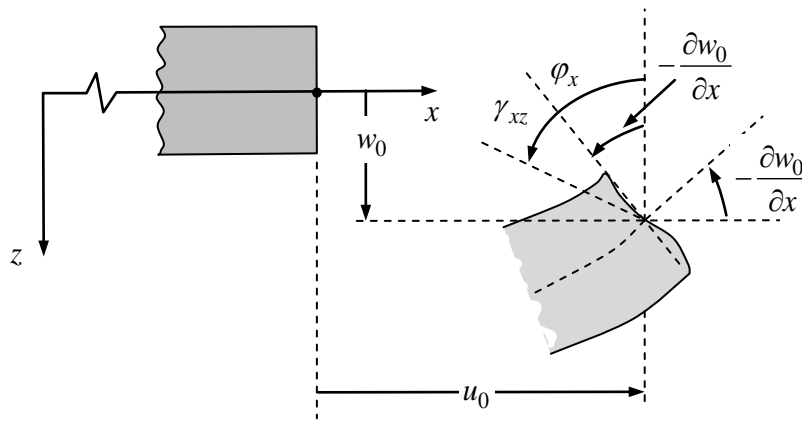
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II-5})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II-6})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $(y)$  et  $(x)$ , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II-7})$$



**Fig. II-3 :** Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Selon la théorie FSDT).

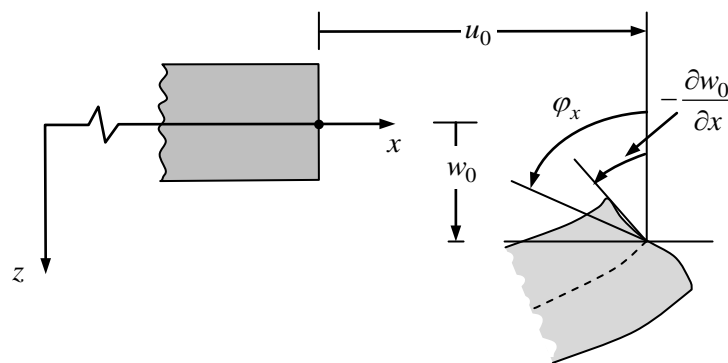
D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### II.3.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

A la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $(y)$  et  $(x)$  respectivement  $\left( \phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$ ,  $\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant  $\Psi(z)=0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(z) = z$ .



**Fig. II-4:** Illustration de la plaque d'ordre élevé.

Les déplacements de la théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) sont obtenus par :

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une

forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. est obtenue en prenant :

$$\psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II-8})$$

## II.4 LA THEORIE NON LOCALE

Comme le note Eringen dans la préface de son ouvrage « Nonlocal continuum theories » (2002), toutes les théories physiques possèdent un champ d'application en dehors duquel elles sont incapables de fournir des résultats précis et cohérents. Cela se traduit par des prédictions numériques qui divergent de façon notable par rapport aux résultats expérimentaux ou des résultats théoriques présentant des singularités mathématiques inacceptables.

La théorie classique de l'élasticité linéaire ne permet pas de rendre compte de « l'effet d'échelle », des conséquences physiques intervenant lorsqu'on modifie certaines dimensions d'un solide. Plusieurs études expérimentales ont permis de mettre en évidence ce phénomène sur des nanotubes de carbone ou des films minces. L'augmentation de la viscosité d'un fluide s'écoulant dans des canaux microscopiques relève aussi de « l'effet d'échelle ».

Pour expliquer les limites de la théorie classique de l'élasticité, la communauté scientifique avance plusieurs explications physiques (Di Paola et al. (2010)) parmi lesquelles l'influence croissante de l'énergie de surface aux petites échelles ou bien le rôle non négligeable de la microstructure interne du matériau. L'approche classique serait donc incapable de traiter des problèmes pour lesquels les événements se produisant à une échelle microscopique ou microstructurale ont une influence significative. Selon Eringen (1987, 2002), cette incapacité est liée à l'absence d'une longueur interne, caractéristique du matériau, dans le modèle de comportement élastique classique.

Dans ce contexte, l'approche non-locale se présente comme une alternative intéressante, à mi-chemin entre les théories atomiques et la mécanique classique. L'idée principale est d'utiliser un modèle de milieu continu capable de prendre en compte l'influence de la microstructure. Les théories non-locales sont une généralisation des théories classiques pour

lesquelles le comportement en un point matériel est influencé par l'état en chaque point du solide. Ce type d'approche, dont la formulation mathématique induit naturellement une longueur interne caractéristique du matériau, permet de décrire plus finement le comportement élastique par la prise en compte des interactions à longue distance.

On peut grossièrement classer les théories non-locales en deux catégories : les théories non locales à gradient et les théories non locales intégrales.

#### **II.4.1. Théories non-locales à gradient**

Il existe deux formulations légèrement différentes de cette théorie.

La première repose sur la philosophie suivante. Pour matérialiser l'influence de la microstructure interne, chaque point matériel du solide possède des degrés de liberté supplémentaires, qui correspondent à des microcontraintes et des microdéformations additionnelles. Les bases de la théorie ont été posées dans les années 60 par plusieurs auteurs (Toupin ,1963 ; Mindlin ,1963 ;Krumhanls ,1967 ; Kunin ,1967). Dès le début des années 1970, Eringen a lui aussi contribué à son développement (Eringen ,1972).

Cette théorie a permis d'étudier de nouveaux modèles de comportement, à travers, notamment, la définition des milieux micromorphes, microstretchs ou micropolaires (Eringen ,2002). Dans ce type de modèle, le solide est constitué d'un ensemble de particules matérielles qui sont susceptibles de se dilater, se contracter ou tourner sur elles-mêmes. Ces degrés de libertés supplémentaires engendrent des micro-contraintes qui viennent s'ajouter à la contrainte classique prévue par la théorie locale.

Sur ce sujet, citons aussi les travaux de Gao (1999-a, 1999-b) qui introduit dans les équations d'équilibre non-locales les moments liés aux rotations relatives des particules les unes par rapport aux autres.

La seconde formulation est basée sur l'introduction de gradients de la déformation dans l'équation de comportement élastique. Cette approche est apparue plus récemment dans les travaux de Aifantis (1992, 1994), Askes et Aifantis (2002) ou encore, Altan et al. (1997).

Ces auteurs remarquent que la singularité au voisinage de la pointe de fissure disparaît lorsqu'on utilise une loi de comportement dans laquelle les contraintes ne dépendent pas uniquement du tenseur de déformation, mais aussi de ses dérivées secondes. Selon ces

auteurs, l'introduction de gradients d'ordre supérieur permet de prendre en compte l'influence de la microstructure du matériau sur la loi de comportement.

Sous sa forme la plus simple, l'équation de comportement de la théorie des gradients s'écrit :

$$\sigma = C(\varepsilon - {}^2\nabla^2 \varepsilon) \quad (\text{II-9})$$

Où ( $\sigma$ ) et ( $\varepsilon$ ) correspondent respectivement au tenseur de contrainte de Cauchy et au tenseur de déformation linéarisé. Rappelons que l'opérateur nabla ( $\nabla$ ) a pour composantes en coordonnées cartésiennes,  $\nabla(\cdot) = (\partial \cdot / \partial x; \partial \cdot / \partial y; \partial \cdot / \partial z)$ .

#### II.4.2. Théories non-locales intégrales

Nous nous intéressons dans cette dernière partie à l'approche non-locale intégrale ou « théorie non-locale forte ».

Cette formulation a été développée initialement dans les années 1960 par Krumhansl (1963), Kroner (1967) et Kunin (1967). Ces auteurs partent du même constat : dans le cadre de l'élasticité classique, les forces de cohésion à l'intérieur d'un solide sont modélisées par des forces de contact dont la portée est nulle. Or, les forces de cohésion dans un matériau réel possèdent clairement une certaine portée et ont donc un rayon d'influence non nul.

Pour remédier à cette insuffisance, Kroner propose d'affiner la théorie des milieux continus élastiques en y introduisant des forces d'interaction à longue distance. De son côté, Krumhansl a travaillé sur la conversion de la théorie des réseaux en une théorie continue.

Une formulation améliorée de l'approche non-locale, qui précise les relations de comportement dans le cadre de la thermodynamique, est présentée par Eringen et Edelen (1972) au début des années 1970. Elle s'est ensuite enrichie des contributions plus récentes de Gao (1999) et Polizzotto (2001). Dans le cadre non-local, l'énergie interne en un point dépend du champ de déformation dans tout le solide.

De ce fait, le premier principe de la thermodynamique doit être intégré sur l'ensemble du domaine d'étude. Notons que plusieurs auteurs (Edelen et Laws, 1971 ; Edelen et al., 1971), ont proposé une formulation « locale » du premier principe dans laquelle apparaît un terme d'énergie résiduel supplémentaire. Ce résidu non-local représente l'énergie transmise en un point par tous les autres points du solide.

Pour le cas particulier d'un solide élastique non local, isotrope et linéaire, Eringen et Kim (1974) proposent une approche non-locale qui ne diffère de l'approche continue classique que par la relation entre les déformations et les contraintes. Dans ce cas, le champ de contrainte s'exprime le plus souvent comme une intégrale pondérée des déformations sur l'ensemble du domaine d'étude.

Le modèle de comportement fait par ailleurs intervenir un paramètre « $l$ » homogène à une longueur, qui définit la « portée » des interactions et permet de prendre en compte

l'influence de la microstructure du matériau.

La loi de comportement proposée par Eringen peut se mettre sous la forme suivante :

$$t_{ij}(x) = C_{ijkl} \int \alpha(|x' - x|) \varepsilon_{kl}(x') d\Omega(x') \quad (\text{II-10})$$

Où  $t$  et  $\varepsilon$  sont respectivement déformations linéarisés.

Plus cette distance est grande devant la longueur interne, plus la valeur de la fonction est faible. Au-delà d'un certain rayon,  $\alpha(|x' - x|)$  est quasi nulle. Cette propriété permet de prendre en compte l'atténuation des forces d'interaction dans le matériau. Les déformations aux points  $(x')$  éloignés du point  $(x)$  ont peu d'influence sur la valeur de la contrainte en ce point.

## II.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur la théorie des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. Enfin nous avons présenté différents types d'approches non-locales. Parmi celles-ci, la théorie non locale intégrale de l'élasticité est intéressante par le fait qu'elle ne nécessite pas l'introduction de conditions aux limites non conventionnelles pour la résolution d'un problème concret. Contrairement à l'élasticité classique, où la contrainte en un point dépend uniquement de la déformation au même point (loi de Hooke), le modèle de

comportement non-local relie la contrainte en un point aux déformations dans l'ensemble du solide.



---

## CHAPITRE III

# GENERALITES

# SUR LES NANOTECHNOLOGIES

### III-1 INTRODUCTION

La nanotechnologie est un terme générique qui décrit des applications dans de nombreux domaines scientifiques mais recouvre d'une manière générale la recherche sur les principes et propriétés existant à l'échelle nanométrique, c'est-à-dire au niveau des atomes et des molécules. L'objectif des nanotechnologies consiste à produire des objets ou matériaux à l'échelle nanométrique. A ce niveau, la matière présente des propriétés différentes et souvent étonnantes, et les frontières entre les disciplines scientifiques et techniques établies s'estompent. D'où la dimension interdisciplinaire forte associée à la nanotechnologie.

La nanotechnologie est souvent décrite comme potentiellement «perturbatrice» ou «révolutionnaire» en termes d'impact possible sur les méthodes de production industrielle. Elle apporte des solutions possibles à toute une série de problèmes actuels par le biais de matériaux, composants et systèmes plus petits, plus légers, plus rapides et plus efficaces. La nanotechnologie devrait également apporter une contribution essentielle à la résolution de problèmes mondiaux et environnementaux en réalisant des produits et des processus destinés à un usage plus spécifique, en économisant des ressources et en réduisant le volume des déchets et des émissions. Des progrès énormes sont aujourd'hui réalisés dans la course mondiale à la nanotechnologie.

### III-2 Historique des nanotechnologies

Le terme nanotechnologie fut utilisé, la première fois en 1974, par Norio Tanigushi. Il fut toutefois popularisé par K. Eric Drexler dans les années 80, lorsque celui-ci introduisit le Terme « manufacture moléculaire ». Richard Feynman a été le premier scientifique à avancer l'idée qu'il serait bientôt possible, pour l'homme, de transformer la matière au niveau atomique.

Le terme nano (du grec nanos qui signifie « nain ») est un préfixe, qui placé devant une unité la divise par le facteur  $10_n^{-9}$ .

Un nanomètre correspond donc à un milliardième de mètre ; en pratique, il indique une petitesse extrême à tel point d'ailleurs qu'une nanostructure doit être agrandie plus de 10 millions de fois avant que nous puissions apprécier aisément ses détails minutieux à l'œil nu.

Pour définir la notion de nanoparticules et/ou de nanomatériaux, il aura fallu attendre la terminologie pré-normative telle que définie par l'ISO publiée à la fin du mois de septembre 2008 sous le numéro ISO/TS27687 (« Nanotechnologies – Terminologie et définitions relatives aux nano-objets – Nanoparticule, nanofibre et nanoplat») à savoir :

- La définition nanométrique considère le domaine de dimension compris entre 1 et 100 nm.
- Les nano-objets sont des matériaux présentant une, deux ou trois dimensions extrêmes dans le domaine nanométrique. Parmi ces nano-objets, les nanoparticules comprennent leurs trois dimensions dans le domaine nanométrique, les nano-plaques ont une dimension nanométrique alors que les nano fibres sont des nano-objets présentant deux dimensions nanométriques, troisième dimension étant plus longue de façon significative.

En octobre 2010, la commission européenne lance une consultation sur la définition des nanomatériaux et, à cette occasion, propose une recommandation: « les états membres, les agences européennes et l'industrie ont invités à employer cette définition du terme nanomatériau lorsqu'ils adoptent et implémentent des réglementations ou des programmes concernant les produits issus des nanotechnologies ».

### **III-3 La diversité des nanoparticules**

Il existe une multitude de nanoparticules ; des nanoparticules naturelles et celles intentionnellement produites par l'homme, à cause de leurs multiples usages et de leur dégradation, on les retrouve dans l'environnement et même dans le corps humain.

#### **III-3.1 Les nanoparticules d'origine naturelle**

Elles se retrouvent mélangées dans l'atmosphère. Celles-ci, appelées en général particules ultrafines, proviennent de combustions diverses, la plupart d'origine anthropique ou de réactions entre composés gazeux (réactions gaz/solide) par exemple formation de chlorure d'ammonium (suite à la réaction entre l'acide chlorhydrique et l'ammoniac), de sulfates, de nitrates, de constituants organiques, etc. Les nanoparticules atmosphériques correspondent en général à un aérosol avec un spectre granulométrique étendu, qui déborde celui des nanoparticules, qui constituent la partie inférieure du spectre. Les virus qui se trouvent à

l'origine dans le domaine des nanoparticules, sont fixés sur d'autres particules en général plus grosses.

Le dépôt actif du radon (ou de gaz de fission) a fait l'objet de nombreuses études en liaison avec la radioprotection dans les mines d'uranium. Non fixé sur l'aérosol atmosphérique, il correspond à des particules d'environ 1,5 nm. La figure présente à titre de comparaison la dimension des différents types de nanoparticules (entre 1 et 100 nanomètres), tel que les virus qui ont des dimensions autour de 10 nm, et d'autres particules issues des combustions et transformations chimiques.

Les nanoparticules, appelées il y a encore quelques années particules ultra fines, constituent une grande partie de l'aérosol atmosphérique, lorsque la concentration est mesurée en nombre par unité de volume. Elles se forment lors des combustions, la proportion de nanoparticules dépendant de la nature et la qualité de la combustion.

Une combustion complète du carbone donne essentiellement du gaz carbonique. Les particules émises lors des combustions sont constituées de carbone non brûlé, mais aussi des impuretés du combustible. Les moteurs Diesel, la combustion de la biomasse, la fumée de cigarette ont ainsi une part importante, mais variable, des particules émises dans le domaine des nanoparticules.

Les réactions "gaz solide" qui sont des réactions chimiques ou photochimiques entre gaz, avec un produit des réactions sous forme particulaire, donnent majoritairement des particules dans le domaine des nanoparticules. Ces réactions se produisent dans l'atmosphère avec des gaz d'origine naturelle, comme les terpènes ou l'isoprène, des composés du soufre, etc., ou avec des gaz provenant des émissions anthropiques comme le dioxyde de soufre qui donne des sulfates, les oxydes d'azote des nitrates, etc.

On peut ajouter à cette catégorie le dépôt actif de gaz radioactif comme le radon qui, non fixé, donne des particules de l'ordre du nanomètre.

Les nanoparticules peuvent aussi se former par condensation d'une vapeur. La dimension des particules formées dépend de la super saturation de la vapeur. Des sels comme le chlorure de sodium, les métaux, des oxydes métalliques, chauffés à des températures de quelques centaines de degrés ont été largement utilisés comme générateurs d'aérosols ultrafins, avec des dimensions de particules recouvrant l'ensemble du domaine des nanoparticules, c'est-à-dire entre 1 et 100 nm.

Les nanoparticules ont aussi été obtenues par pulvérisation d'une solution liquide d'un sel puis évaporation du liquide des particules.

Les nanoparticules se forment donc de façon fréquente dans notre environnement, de façon naturelle ou consécutivement aux actions humaines. La fabrication de nanoparticules a été largement utilisée pour l'étude expérimentale des particules d'aérosol et la vérification des théories.

### **III-3.2 Les Nanoparticules manufacturées provenant des nanotechnologies**

Elles correspondent en général, au départ, à des particules dont le spectre est mono dispersé, c'est-à-dire centré sur une dimension avec une dispersion faible. Selon leur nature et leur forme on distingue différentes catégories de nanoparticules manufacturées :

- Nanoparticules manufacturées (ou intentionnelles) :

Nano objets de forme et taille contrôlées conçus pour remplir une fonction (ex : les dendrimères, polymère de structure bien définie).

- Métaux, semi-conducteurs, oxydes métalliques, carbone, polymères composites, céramiques, nanosphères, fils, aiguilles, tubes, enveloppes, anneaux, plaquettes (ex : nanotubes de carbone).

- Molécules (fullerènes) et complexes : Agrégats moléculaires ou atomiques nontraités ou enrobés (nanotechnologie appliquée à de nombreux produits : cosmétiques, médicaments, textiles, électronique, optique, afficheurs, etc...), matériaux nanostructures, matériaux mésoporeux (zéolites artificielles) ; nanomatériaux greffés ; nanomatériaux interactifs (ou intelligents).

Quelle que soit leur origine, les nanoparticules présentent des propriétés physiques communes qui dépendent notamment de leurs dimensions.

### **III-4 Fabrication des nanomatériaux**

La base de fabrications des nanomatériaux sont les nano-objets dont on peut distinguer trois grandes familles :

- a) Les nano particules ou particules ultrafines (PUF) dont aucune dimension n'est supérieur à 100 nanomètres.

- b) Les nano fibres ; nanotubes ; nano-filaments ; et les nano-batonets qui présente une section de quelques dizaines de nanomètres et une longueur qui varie de 500 et 10 000 nanomètres.
- c) Les nanofilms ; les nano-couches et les nano-revêtements, dont au moins deux de leur dimensions sont supérieur à 100 nanomètres.

Pour fabriquer ces nano-objets deux méthodes existent :

**1) Une méthode dite « ascendante » (ou bottom up) :**

Cette méthode permet l'assemblage ou le positionnement d'atome ou de molécules de façon précise permette ainsi la fabrication de matériaux dont la structure est parfaitement maîtrisée. Cette méthode fait appel à des procédés d'élaboration principalement physique et chimiques.

**2) Une méthode dite « descendante » (ou top down) :**

Cette méthode consiste à miniaturiser les systèmes actuel .Les structures sont ainsi graduellement sous dimensionnés jusqu'à atteindre des proportions nanométriques. Cette méthode fait appel à des procédés principalement mécaniques.

### **III-5 Le rôle de la nanotechnologie dans la construction de la société civile**

La nanotechnologie n'est pas seulement une révolution industrielle, mais également une voie permettant de résoudre beaucoup de problèmes de notre monde et aussi une voie permettant d'avoir une meilleure vie. De plus avec la nanotechnologie, l'élaboration de nombreux systèmes de transformations et de productions plus performants pourra permettre une meilleure utilisation des ressources naturelles.

Les produits de consommation issus des nanotechnologies sont parmi nous. Les nanotechnologies représentent un enjeu économique majeur et tous les pays développés y investissent des sommes de plus en plus importantes.

Chaque nation dispose d'une politique en matière de nanotechnologie : celles à faibles et moyens revenus n'ayant pas d'industries de pointe offrent un terrain encore vierge pour le développement de la nanotechnologie, sans les bouleversements économiques provoqués par le déplacement d'industries existantes dans les nations industrialisées. Le Brésil, l'Afrique du Sud, la Corée du Sud, la Chine, le Sri Lanka, l'Inde et la Thaïlande ont tous des programmes innovants en matière de nanotechnologie.

Contrairement aux industries plus anciennes, comme la production dans les régions industrielles en déclin, où les équipements obsolètes ont été abandonnés sans être remplacés par de nouveaux outils ou de nouveaux emplois pour les personnes laissées sur le carreau, la nanotechnologie continue d'attirer de nouveaux investissements malgré l'affaiblissement de l'économie mondiale.

## **III-6 Risques liés aux nanomatériaux**

### **III-6.1 Environnement**

Les nanomatériaux vont remplacer ceux qu'on utilise actuellement à cause de leurs propriétés mécaniques améliorées. Par exemple, dans le domaine de l'automobile, le fait d'avoir recours à des matériaux faits de composites polymériques pourrait se traduire par une utilisation accrue de pièces structurelles en plastique qu'on assemblerait pour former des parties importantes du véhicule. Ceci réduit donc le poids de la carrosserie par exemple, donc la consommation d'énergie, donc la pollution qui en résulte.

Par contre, il faut soulever aussi le point que le recyclage des polymères est plus ardu que celui du métal qu'on est en train de remplacer. Il faudra alors se doter de nouvelles méthodes de recyclage de ces nouveaux nanomatériaux avant de les lancer sur le marché.

### **III-6.2 Entreposage**

Toujours en raison de l'augmentation de la surface des particules qui entraîne une plus grande réactivité, l'entreposage des nanoparticules exige des soins particuliers. Elles peuvent comme on l'a vu précédemment s'oxyder facilement. De plus, elles cherchent souvent à s'agglomérer entre elles. Il faut donc les entreposer soit dans un gaz inerte, soit en les enrobant d'une couche protectrice constituée de polymères ou de sels.

Si l'on choisit des sels, il faudra en plus les enlever avant l'utilisation des particules. Par ailleurs, la taille des nanoparticules peut varier en cours de production, parfois de plusieurs nanomètres, de sorte qu'il faudra procéder à des transformations supplémentaires pour obtenir des nanoparticules de taille similaire. Leur production demeure alors encore complexe et souvent coûteuse.

### III-6.3 Risques pour la santé

Les risques pour la santé reliés aux nanotechnologies ont été le sujet de quelques études qui jusqu'à maintenant n'ont pas abouti à des résultats concluants mais n'éliminent pas la possibilité de dangers reliés aux nanomatériaux. En voici quelques exemples:

On sait déjà que sous certaines conditions, les nanoparticules peuvent pénétrer à l'intérieur des cellules. Sans avoir de données précises, on a constaté la tendance des nanoparticules de moins de 50nm à infiltrer les cellules. La question est alors de savoir où se dirigent ces nanoparticules et comment elles sont distribuées dans le corps. Apparemment, les particules de taille plus réduite circulent dans le corps de façon plus prolongée et peuvent dans certains cas franchir la barrière hémato-méningée, peuvent certainement sortir des vaisseaux sanguins et se retrouver dans les fluides intercellulaires. Les nanoparticules peuvent donc se rendre jusqu'aux parties du corps qu'aucune matière inorganique n'avait réussi à atteindre.

### III-7 Les avantages de la nanotechnologie

La nanotechnologie n'est pas seulement une révolution industrielle, mais également une voie permettant de résoudre beaucoup de problèmes de notre monde et aussi une voie permettant d'avoir une meilleure vie. De plus avec la nanotechnologie, l'élaboration de nombreux systèmes de transformations et de productions plus performants pourra permettre une meilleure utilisation des ressources naturelles.

Grâce à eux, certains matériaux nocifs pour l'environnement (ex: lubrifiants, engrais chimiques, pesticides...) pourraient être remplacés. On peut dire également qu'avec la nanotechnologie, la dépollution et la réparation des dégâts causés à l'environnement sont à notre portée. Prenons l'exemple de la dépollution avec l'élimination de la pollution des eaux industrielles et de l'air. Par la nanotechnologie, des nanoparticules comme les nanopoudres peuvent être utilisées pour dépolluer l'eau. Des études ont montrées que cette méthode peut être utilisée avec succès. De plus, cette méthode a un coût beaucoup plus petit que les méthodes qui nécessitent de pomper l'eau hors de la terre pour le traitement. Au niveau de l'air, une des applications de la nanotechnologie la plus répandue dans ce domaine est le pot catalytique. Grâce à celui-ci, tous les polluants (monoxyde de carbone, oxyde d'azote) peuvent être éliminés. Ensuite, la nanotechnologie permettra une grande avancée dans le domaine médical avec l'élaboration de nombreux médicaments permettant de vaincre certaines maladies, dans le domaine militaire avec l'amélioration des armes et dans le domaine

informatique avec la production de nouveaux ordinateurs, portables....etc. Pour conclure, les nanotechnologies ont le gros avantage de pouvoir résoudre certains problèmes inhérents aux conditions de la vie de l'homme.

### **III-8 Conclusion**

L'objectif de ce chapitre est de donner une idée générale sur les nano matériaux et leur utilisation dans les différents domaines. Le potentiel de la nanotechnologie pour faire le bien, ou du moins pour faire du profit, est immense. Avec les innovations de nombreux domaines d'application, la nanotechnologie affiche un potentiel commercial énorme. Les scientifiques et les hommes d'affaires sont unanimes: la nanotechnologie est bien plus qu'une nouvelle mode.



## CHAPITRE IV

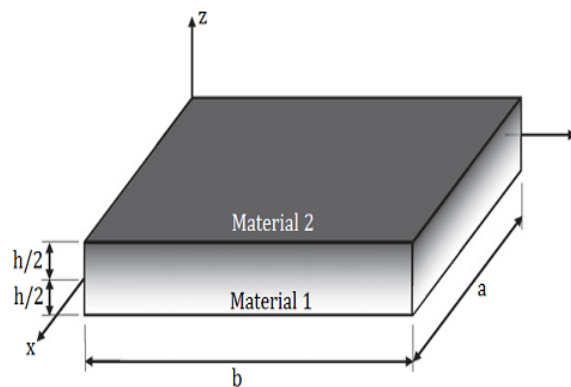
# FORMULATIONS THEORIQUES DES NANOPLAQUES

### IV.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi (3D) non locale pour l'analyse du comportement dynamique des nanoplaques fonctionnellement graduée est développée. Une panoplie des étapes du développement sera présentée en détaille.

### IV.2 GEOMETRIE DE LA PLAQUE FG

Considérons une plaque rectangulaire à l'échelle nanométrique de longueur ( $a$ ) de largeur ( $b$ ) et d'épaisseur totale ( $h$ ) et composée de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) dans l'épaisseur, comme illustré dans la figure 1.



**Fig.IV.1:**La géométrie d'une plaque FGM.

On considère que le module de Young et la densité varient continuellement dans l'épaisseur comme suit (Tounsi et al., 2013; Zidi et al., 2014; Khorshidi et al., 2015; Larbi Chaht et al., 2015; Mahi et al., 2015)., 2015; Menasria et al., 2017; Tlidji et al., 2019; Meksi et al., 2019; Chaabane et al., 2019).

$$E(z) = (E_c - E_m)V_f(z) + E_m \quad (\text{IV.1})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V_f(z) + \rho_m \quad (\text{IV.2})$$

où les indices (c) et (m) désignent les constituants céramique et métallique, respectivement, la fraction volumique du FGM est donnée par l'expression suivante:

$$V_f(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (\text{IV.3})$$

où (n) est l'indice de gradient et ne prend que des valeurs positives. Le coefficient de Poisson est le même pour tous les matériaux céramique / métal utilisés ici. Il est donc considéré comme constant et supposé égal à (0,3) tout au long de l'étude (Reddy, 2011). Les valeurs typiques pour les métaux utilisés dans la plaque à l'échelle nanométrique FG sont rapportées dans le tableau 1.

**Tableau IV.1:** Propriétés matérielles de la plaque FG utilisée.

Material	Properties		
	$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Aluminum (Al)	70	0.3	2702
Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	380	0.3	3800
Zirconia (ZrO <sub>2</sub> )	200	0.3	5700
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	348.43	0.3	2370
SUS304	201.04	0.3	8166

### IV.3 LA THEORIE DE L'ELASTICITE NON LOCALE

Dans la théorie non locale, le champ de contrainte à chaque corps ponctuel est fonction du champ de déformation. Donc, la contrainte joue donc un rôle considérable dans le modèle présenté par l'expression suivante (Khorshidi et al, 2015):

$$t_{ij} = \int_V \alpha(|X' - X|) \sigma_{ij}(X') dV' \quad (\text{IV.4})$$

où (X) est un point du corps sur lequel le tenseur de contraintes sur son efficacité, (X') peut être n'importe quel autre point du corps, (V) est le volume d'une région du corps dont l'intégrale est considérée, ( $\sigma_{ij}$  est le tenseur du contraintes classique, ( $\alpha(|X' - X|)$ ) est la fonction du noyau non locale liée à la longueur de la caractéristique interne. En ce qui concerne les caractéristiques de la fonction du noyau non locale ( $\alpha(|X' - X|)$ ) Eringen (1983) présente une fonction d'un opérateur différentiel linéaire,  $\mathfrak{L}$ , peut être défini comme suit,

$$\mathfrak{I}\alpha(|X' - X|) = \delta\alpha(|X' - X|) \quad (\text{IV.5})$$

En substituant l'Eq. (5) dans l'Eq. (4), la forme d'expression principale (1) de l'équation différentielle suivante est déterminée par

$$\mathfrak{I} t_{ij} = \sigma_{ij} \quad (\text{IV.6})$$

Pour les solides élastiques linéaires non locaux, les équations de mouvement ont la forme suivante (Narendar, 2011):

$$t_{ij,j} + f_i = \rho(z)\ddot{u}_i \quad (\text{IV.7})$$

Où  $\rho(z)$  est la masse volumique, ( $f_i$  les charges corporelles et ( $u_i$  le vecteur du déplacement.

En substituant l'Eq. (7) dans l'Eq. (6) donne la relation suivante:

$$\sigma_{ij} + \mathfrak{I}(f_i - \rho(z)\ddot{u}_i) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

La théorie non locale avec l'opérateur différentiel linéaire pour le cas 3D est présentée par l'expression suivante (Sakhaee-Pour et al., 2008a):

$$\mathfrak{I} = 1 - \mu^2 \nabla^2 \quad (\text{IV.9})$$

Où ( $\nabla^2$  est l'opérateur de Laplace, qui en coordonnées cartésiennes est défini par  $\nabla^2 = \partial^2 / x^2 + \partial^2 / y^2 + \partial^2 / z^2$  et  $\mu = e_0 a$ , ( $a$  est la longueur de la propriété interne et ( $e_0$  est la constante matérielle prédite par l'expérience. La valeur du paramètre non local est liée à la condition aux limites, à la chiralité, aux formes de mode et à la nature des mouvements (Hosseini-Hashemi et al., 2013a). Il n'y a pas de moyen précis de calculer ce paramètre, mais on considère que le facteur est obtenu en comparant les courbes de dispersion de l'élasticité non locale et de la dynamique du réseau de la structure cristalline des nanomatériaux (Hosseini-Hashemi et al., 2013a).

#### IV.4 HYPOTHESES DE BASE

1. Les composantes de déplacement ( $u$ ) et ( $v$ ) sont les déplacements axiaux du plan moyen dans les directions ( $x$ ) et ( $y$ ), respectivement, et ( $w$ ) est le déplacement vertical du plan moyen dans la direction  $z$ . L'amplitude du déplacement vertical n'est pas du même ordre que l'épaisseur de la plaque *het* elle est faible par rapport à l'épaisseur de la plaque.
2. Les déplacements axiaux, ( $u$ ) et ( $v$ ) intègrent trois parties:
  - ✚ Une partie de déplacement équivalente au déplacement utilisé dans la théorie des plaques classique (CPT).

- ✚ une composante de déplacement due à la déformation de cisaillement, incluse par l'intégrale indéterminée.
  - ✚ Les efforts de cisaillement dans la direction (z) sont nuls dans les faces inférieure et supérieure des plaques.
1. Le déplacement vertical (w) dans la direction (z) est considéré comme une fonction des coordonnées (y) et(x).
  2. La nanoplaque est soumise à la charge verticale uniquement.

Le champ de déplacement du modèle de déformation en cisaillement cubique est exprimé comme suit (Abualnour et al., 2018).

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{IV.10a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV.10b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (\text{IV.10c})$$

Les coefficients  $(k_1)$  et  $(k_2)$  dépendent de la géométrie. Dans ce travail, la fonction de forme est considérée en fonction de la fonction cubique donnée par

$$f(z) = \frac{5}{4} \left( z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \quad (\text{IV.11})$$

et  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$ ,  $\theta(x, y)$  et  $\varphi_z(x, y)$  sont les cinq fonctions variables de déplacement de la surface médiane de la plaque.

Avec la supposition linéaire de la déformation de von-Karman, le champ de déformation sera comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13a})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13b})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \varepsilon_z^0 = \varphi_z$$

Les intégrales présentées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier et peuvent être exprimées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (\text{IV.14})$$

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

où les coefficients ( $A'$  et  $B'$ ) sont exprimés en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas en utilisant Navier. Par conséquent,  $A'$  et  $B'$  sont écrits comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2} \quad B' = -\frac{1}{\beta^2} \quad k_1 = \alpha^2 \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV.15})$$

Le principe de Hamilton est utilisé pour déterminer l'équation du mouvement. Le principe de Hamilton en cas de forme locale est obtenu comme suit (Al-Basyouni et al., 2015; Bourada et al., 2015; Attia et al., 2015; Yahia et al., 2015; Bellifa et al., 2016 ; Benadouda et al., 2017; Zidi et al., 2017; Klouche et al., 2017; Hachemi et al., 2017; Fourn et al., 2018).

$$0 = \int_0^t \delta(U - K) dt \quad (\text{IV.16})$$

Où ( $\delta$  est l'opérateur de variation, ( $U$  est l'énergie de déformation et ( $K$ ) est l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \\ &= \int_A \left\{ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right\} dA\end{aligned}\quad (IV.17)$$

Où ( $A$  est la surface supérieure et les forces et moments résultants  $N$ ,  $M$ , et  $S$  sont exprimés par

$$\begin{aligned}(N_i, M_i^b, M_i^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz \quad (i = x, y, xy); \\ N_z &= \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz\end{aligned}\quad (IV.18a)$$

et

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (IV.18b)$$

La variation de l'énergie cinétique est exprimée par

$$\begin{aligned}\delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + J_1 \left( (k_1 A') \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left( \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left( (k_1 A')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - J_2 \left( (k_1 A') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) + J_0 (\dot{\phi}_z \delta \dot{w}_0) + K_3 (\dot{\phi}_z \delta \dot{\phi}_z) \right\} dA\end{aligned}\quad (IV.19)$$

où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps;  $\rho(z)$  est la masse volumique; et  $(I_0, J_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2, K_3)$  sont des inerties de masse exprimées par

$$(I_0, J_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, g(z), z, z^2) \rho(z) dz \quad (IV.20a)$$

$$(J_1, J_2, K_2, K_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (f(z), z f(z), f^2(z), g^2(z)) \rho(z) dz \quad (\text{IV.20b})$$

En substituant les expressions pour  $\delta U$  et  $\delta K$  de Eqs(18) et(19) dans l'Eq. (20) et en intégrant par parties et en collectant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \theta$ , et  $\delta \phi_z$ , les équations du mouvement de la plaque sont obtenues comme

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_0 \ddot{\phi}_z \\ \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} &+ k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = -J_1 \left( k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ &- K_2 \left( (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\ \delta \phi_z : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z &= J_0 \ddot{w}_0 + K_3 \ddot{\phi}_z \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

## IV.5. LE MODELE D'ELASTICITE NON LOCALE DU NANO-PLAQUE FG

Les relations constitutives de la théorie non locale pour une nano-plaque FG en utilisant l'équation (6) peut être écrite comme:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

où:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{E(z)(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} &= \frac{E(z)\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

L'Intégration de l'Eq. (20) sur la surface de la section transversale de la plaque, indique la force-déformation et le moment-déformation des nano-plaques FG non locales raffinées

comme suit:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{pmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{11} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{pmatrix} \quad (\text{IV.24a})$$

$$\begin{pmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{pmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{pmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \\ k_2 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.24b})$$

ou les rigidités transversales sont définies comme suit:

$$\left( A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s \right) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} \left( 1, g^2(z), z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) dz \quad (\text{IV.25a})$$

$$\left( X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij} \right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1, z, f(z), g'(z) \right) g'(z) C_{ij} dz \quad (\text{IV.25b})$$

Les équations non locales de mouvement des nano-plaques FG en termes de déplacement peuvent être obtenues en substituant des équations. (24), dans l'équations (21) comme suit:

$$\begin{aligned} A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 + X_{13} d_1 \theta_z - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 \\ + \left( B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{122} \theta + \left( B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2 \right) d_1 \theta = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_1 A' k_1 d_1 \ddot{\theta} \right), \end{aligned} \quad (\text{IV.26a})$$

$$\begin{aligned} A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + X_{23} d_2 \theta_z - B_{22} d_{222} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 \\ + \left( B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{112} \theta + \left( B_{22}^s k_2 + B_{12}^s k_1 \right) d_2 \theta = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + J_1 B' k_2 d_2 \ddot{\theta} \right), \end{aligned} \quad (\text{IV.26b})$$

$$\begin{aligned} B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 + Y_{13} d_{11} \varphi_z + Y_{23} d_{22} \varphi_z \\ - D_{11} d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 + \left( D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2 \right) d_{11} \theta \\ + 2 \left( D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{1122} \theta + \left( D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2 \right) d_{22} \theta \\ = (1 - \mu \nabla^2) \left( I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) + J_0 \ddot{\varphi}_z \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.26c})$$



$$\begin{aligned}
& -\left(B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2\right) d_1 u_0 - \left(B_{66}^s \left(k_1 A' + k_2 B'\right)\right) d_{122} u_0 - \left(B_{66}^s \left(k_1 A' + k_2 B'\right)\right) d_{112} v_0 - \left(B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2\right) d_2 v_0 - k_1 Y_{13}^s \varphi_z - k_2 Y_{23}^s \varphi_z \\
& + \left(D_{11}^s k_1 + D_{12}^s k_2\right) d_{11} w_0 + 2 \left(D_{66}^s \left(k_1 A' + k_2 B'\right)\right) d_{1122} w_0 + \left(D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2\right) d_{22} w_0 \\
& - H_{11}^s k_1^2 \theta - H_{22}^s k_2^2 \theta - 2 H_{12}^s k_1 k_2 \theta - \left(\left(k_1 A' + k_2 B'\right)^2 H_{66}^s\right) d_{1122} \theta + A_{44}^s \left(k_2 B'\right)^2 d_{22} \theta + A_{55}^s \left(k_1 A'\right)^2 d_{11} \theta \\
& + A_{44}^s \left(k_2 B'\right) d_{22} \varphi_z + A_{55}^s \left(k_1 A'\right) d_{11} \varphi_z \\
& = \left(1 - \mu \nabla^2\right) \left(-J_1 \left(k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0\right) + J_2 \left(k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0\right) - K_2 \left(\left(k_1 A'\right)^2 d_{11} \ddot{\theta} + \left(k_2 B'\right)^2 d_{22} \ddot{\theta}\right)\right)
\end{aligned} \tag{IV.26d}$$

$$\begin{aligned}
& X_{13} d_1 u_0 + X_{23} d_2 u_0 + Z_{33} \varphi_z + Y_{13} d_{11} w_0 + Y_{23} d_{22} w_0 \\
& A_{44}^s \left(k_2 B'\right) d_{22} \theta + A_{55}^s \left(k_1 A'\right) d_{11} \theta + A_{44}^s d_{22} \varphi_z + A_{55}^s d_{11} \varphi_z = \left(1 - \mu \nabla^2\right) \left(J_0 \ddot{\varphi}_z + K_3 \ddot{w}_0\right),
\end{aligned} \tag{IV.26e}$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m} \\
d_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i, j, l, m = 1, 2).
\end{aligned} \tag{IV.27}$$

## IV.6. PROCEDURE DE SOLUTION

Basée sur la procédure de type Navier, une solution analytique des équations de gouvernante de la dynamique d'une nanoplaque FG simplement supportée est présentée. Les fonctions de déplacement sont écrites sous la forme de produits de coefficients indéterminés et de fonctions trigonométriques connues afin de respecter les équations de mouvement et les conditions de  $x = 0$ ,  $a$  et  $y = 0, b$ . Les champs de déplacement suivants sont supposés être de la forme:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Y_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{IV.28}$$

Où  $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn})$  sont les coefficients de Fourier inconnus.

Avec

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b \quad (\text{IV.29})$$

Insertion Eq. (28) dans Eqs. (26), mène à

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{pmatrix} - \lambda \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & M_{14} & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & M_{35} & 0 & M_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

$$S_{11} = -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad S_{12} = -\alpha\beta (A_{12} + A_{66})$$

$$S_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2)$$

$$S_{14} = \alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2), \quad S_{15} = X_{13}\alpha$$

$$S_{22} = -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2)$$

$$S_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2)$$

$$S_{24} = \beta(k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2) \quad (\text{IV.31})$$

$$S_{25} = X_{23}\beta$$

$$S_{33} = -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4)$$

$$S_{34} = -k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2\beta^2 - k_2(D_{22}^s\beta^2 + D_{12}^s\alpha^2)$$

$$S_{35} = -(Y_{13})\alpha^2 - (Y_{23})\beta^2$$

$$S_{44} = -k_1(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2) - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \alpha^2\beta^2 - k_2(H_{12}^s k_1 + H_{22}^s k_2) - (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2 B')^2 A_{44}^s \beta^2$$

$$S_{45} = -(k_1 A') A_{55}^s \alpha^2 - (k_2 B') A_{44}^s \beta^2 + k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s$$

$$S_{55} = -(A_{55}^s)\alpha^2 - (A_{44}^s)\beta^2 - Z_{33}$$

$$M_{11} = -I_0, \quad M_{13} = \alpha I_1, \quad M_{14} = -k_1 J_1 A' \alpha$$

$$M_{15} = 0, \quad M_{22} = -I_0, \quad M_{23} = \beta I_1,$$

$$M_{24} = -k_2 B' \beta J_1, \quad M_{25} = 0$$

$$M_{33} = -I_0 - I_2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$M_{34} = J_2(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \quad M_{35} = -J_0,$$

$$M_{44} = -K_2 \left( (k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2 \right), \quad M_{45} = 0,$$

$$M_{55} = -K_3, \quad \lambda = (1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2))$$

## IV.7. CONCLUSION

Dans le présent chapitre, nous avons présenté les différentes étapes de l'étude analytique de la vibration libre des nano-plaque en FGM en utilisant une nouvelle théorie non locale quasi-3D à cinq variables, au lieu de six ou plus dans le cas des autres théories. Dans la présente théorie les déplacements de rotations sont remplacés par des termes en intégrale dans les champs de déplacement. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettant d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec ceux obtenus par les autres théories trouvées dans la littérature.

## CHAPITRE V

# RESULTATS ET DISCUSSIONS

### V.1 Introduction

Dans cette partie l'exactitude de la théorie développée Quasi-3D a seulement cinq variables inconnues, sera examiné. Pour ce but, deux parties distinctes sont considérées; dans la première partie, l'étude et la validation pour les nano-plaque rectangulaire isotrope, et dans la deuxième partie, sera pour les plaques en FGM.

### V.2 Nano-plaque rectangulaire isotrope

Il s'agit seulement une plaque homogène ( $n=0$ ) est employé dans cette partie pour la vérification.

Tableaux V.1-V.3 fournir les trois premiers rapports de fréquence non dimensionnels (FR) pour condition aux limites simplement avec les différentes valeurs du rapport de dimensions ( $\eta = b/a$ ), les valeurs spécifiées du paramètre d'échelle non dimensionnelle ( $\zeta = \mu/a$ ) et le rapport épaisseur sur longueur ( $h/a = 0.1$  des nano-plaques rectangulaires. Les paramètres de fréquence naturelle écrits sous la forme non dimensionnelle ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ) sont la rigidité flexionnelle. La nano-plaque est composée des propriétés matérielles suivantes: ( $E = 210$  GPa), ( $\nu = 0.3$  et ( $\rho = 7800$  (kg/m<sup>3</sup>)). Les fréquences calculées basées sur la théorie de déformation de cisaillement non locale cubique proposée sont comparées à ceux données par Hosseini-Hashemi et al. (2013b) basé sur la théorie de la plaque Mindlin (MPT) et ceux rapportés par Khorshidi et al. (2015) basé sur la théorie de déformation de cisaillement exponentielle. Aussi, l'expression du rapport de fréquence (FR) entre les fréquences non locale et locale non-dimensionnelle est donnée comme suit:

$$FR = \frac{\beta^{NL}}{\beta^L} \quad (V.1)$$

Où  $\beta^{NL}$  est le paramètre de la fréquence non locale non dimensionnelle, et  $\beta^L$  est le paramètre de la fréquence non-dimensionnel locale.

On peut le voir dans les tableaux V.1-V.3, que les valeurs obtenues du paramètre de fréquence non locale non dimensionnelle  $\beta^{NL}$  sont en bon accord avec ceux fournis par

Khorshidi et al. (2015) et Hosseini-Hashemi et al. (2013b). L'introduction de l'effet d'étirement de l'épaisseur rend la nano-plaque plus rigide.

**Tableau V. 1:** Les variations de la fréquence non dimensionnelle ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ) et le rapport de fréquence (FR) pour la plaque non locale (m=1, n=1).

	Méthode	$\beta^{NL}$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.4$	$\zeta = 0.6$	$\zeta = 0.8$
			FR	FR	FR	FR	FR
$\eta = 0.6$	Présent ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	35.0858	1.0000	0.6335	0.3789	0.2633	0.2005
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	35.0045	1.0000	0.6335	0.3789	0.2633	0.2005
	Khorshidi et al. (2015)	35.015	1.0000	0.6335	0.3789	0.2633	0.2005
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	35.0643	1.0000	0.6335	0.3789	0.2633	0.2005
$\eta = 0.8$	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	24.2431	1.0000	0.7051	0.4451	0.3146	0.2412
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	24.2034	1.0000	0.7051	0.4451	0.3146	0.2412
	Khorshidi et al. (2015)	24.2084	1.0000	0.7051	0.4451	0.3146	0.2412
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	24.2330	1.0000	0.7050	0.4451	0.3146	0.2412
$\eta = 1$	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	19.0902	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512	0.2708
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	19.0653	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512	0.2708
	Khorshidi et al. (2015)	19.0684	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512	0.2708
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	19.0840	1.0000	0.7475	0.4904	0.3512	0.2708

**Tableau V. 2:** Les variations de la fréquence non dimensionnelle ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ) et le rapport de fréquence (FR) pour la plaque non locale (m=2, n=1).

	Méthode	$\beta^{NL}$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.4$	$\zeta = 0.6$	$\zeta = 0.8$
			FR	FR	FR	FR	FR
$\eta = 0.6$	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	60.3530	1.0000	0.5216	0.2923	0.1997	0.1511
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	60.1243	1.0000	0.5216	0.2923	0.1997	0.1511
	Khorshidi et al. (2015)	60.1556	1.0000	0.5216	0.2923	0.1997	0.1511
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	60.2869	1.0000	0.5216	0.2923	0.1997	0.1511
$\eta = 0.8$	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	50.3554	1.0000	0.5594	0.3197	0.2194	0.1663
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	50.1930	1.0000	0.5594	0.3197	0.2194	0.1663
	Khorshidi et al. (2015)	50.2147	1.0000	0.5594	0.3197	0.2194	0.1663
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	50.3100	1.0000	0.5594	0.3197	0.2194	0.1664
$\eta = 1$	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	45.6216	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308	0.1752
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	45.4869	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308	0.1752
	Khorshidi et al. (2015)	45.5048	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308	0.1752
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	45.5845	1.0000	0.5799	0.3353	0.2308	0.1752

**Tableau V.3:** Les variations de la fréquence non dimensionnelle ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ) et le rapport de fréquence (FR) pour la plaque non locale ( $m=2, n=2$ ).

	Méthode		$\zeta = 0$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.4$	$\zeta = 0.6$	$\zeta = 0.8$
		$\beta^{NL}$	FR	FR	FR	FR	FR
$\eta = 0.6$	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	122.0595	1.0000	0.3789	0.2005	0.1352	0.1018
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	121.2246	1.0000	0.3789	0.2005	0.1352	0.1018
	Khorshidi et al. (2015)	121.356	1.0000	0.3789	0.2005	0.1352	0.1018
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	121.7770	1.0000	0.3789	0.2006	0.1352	0.1018
$\eta = 0.8$	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	87.3788	1.0000	0.4451	0.2412	0.1635	0.1233
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	86.9235	1.0000	0.4451	0.2412	0.1635	0.1233
	Khorshidi et al. (2015)	86.9898	1.0000	0.4451	0.2412	0.1635	0.1233
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	87.2357	1.0000	0.4451	0.2412	0.1635	0.1233
$\eta = 1$	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	70.1122	1.0000	0.4904	0.2708	0.1843	0.1393
	Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	69.8093	1.0000	0.4904	0.2708	0.1843	0.1393
	Khorshidi et al. (2015)	69.8517	1.0000	0.4904	0.2708	0.1843	0.1393
	Hosseini-Hashemi et al. (2013b)	70.0219	1.0000	0.4904	0.2708	0.1844	0.1393

### V.3 plaque en FGM

Dans cette deuxième section, l'étude de la vibration libre est consacré pour les plaque non-homogène.

Tableau V.4 présente une comparaison des paramètres de fréquence  $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$  pour les plaques carrés en AL/AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub> moyennement épaisses avec celles fournies par Hosseini-Hashemi et al. (2010), Zhao et al. (2009), Khorshidi et al. (2015) et Matsunaga (2008) quand  $n = 0, 0.5, 1, 4$  et  $10$ . De plus, les formes de mode correspondantes ( $m$ ) et ( $n$ ), représentant le nombre de demi-ondes dans les directions de ( $x$ ) et ( $y$ ), respectivement, sont données pour n'importe quel paramètre de fréquence  $\bar{\beta}$ .

**Tableau V. 4:**La comparaison du paramètre de fréquence naturelle ( $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_c h / E_c}$ ) pour les plaques carrées en  $AL/AL_2O_3$  avec ( $\eta = 1$ ).

$h/a$	$(m,n)$	Méthode	$n$					
			0	0.5	1	4	10	
0.05	(1,1)	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095	
		Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094	
		Khorshidi et al. (2015)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094	
		Hosseini-Hashemi et al. (2010)	0.0148	0.0128	0.0115	0.0101	0.0096	
		Zhao et al. (2009)	0.0146	0.0124	0.0112	0.0097	0.0093	
0.1	(1,1)	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368	
		Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364	
		Khorshidi et al. (2015)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364	
		Matsunaga (2008)	0.0577	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364	
		Hosseini-Hashemi et al. (2010)	0.0577	0.0492	0.0445	0.0383	0.0363	
		Zhao et al. (2009)	0.0568	0.0482	0.0435	0.0376	0.3592	
	(1,2)	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.1381	0.1184	0.1077	0.0923	0.0868	
		Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	0.1376	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856	
		Khorshidi et al. (2015)	0.1377	0.1174	0.1059	0.0902	0.0856	
		Matsunaga (2008)	0.1381	0.1180	0.1063	0.0904	0.0859	
		Zhao et al. (2009)	0.1354	0.1154	0.1042	-	0.085	
	(2,2)	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.2122	0.1825	0.1660	0.1409	0.1318	
		Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301	
		Khorshidi et al. (2015)	0.2114	0.1808	0.1632	0.1377	0.1300	
		Matsunaga (2008)	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306	
		Zhao et al. (2009)	0.2063	0.1764	0.1594	-	0.1289	
	0.2	(1,1)	Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.2122	0.1825	0.1660	0.1409	0.1318
			Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
Khorshidi et al. (2015)			0.2114	0.1808	0.1632	0.1377	0.1300	
Matsunaga (2008)			0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306	
Hosseini-Hashemi et al. (2010)			0.2112	0.1806	0.1650	0.1371	0.1304	
Zhao et al. (2009)			0.2055	0.1757	0.1587	0.1356	0.1284	
(1,2)		Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.4660	0.4042	0.3677	0.3047	0.2812	
		Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	0.4623	0.3987	0.3607	0.2980	0.2771	
		Khorshidi et al. (2015)	0.4629	0.3993	0.3611	0.2976	0.2772	
		Matsunaga (2008)	0.4658	0.4040	0.3644	0.3000	0.2790	
(2,2)		Present ( $\varepsilon_z \neq 0$ )	0.6760	0.5893	0.5365	0.4381	0.4009	
		Present ( $\varepsilon_z = 0$ )	0.6691	0.5807	0.5254	0.4284	0.3948	
		Khorshidi et al. (2015)	0.6691	0.5807	0.5254	0.4280	0.3947	
		Matsunaga (2008)	0.6753	0.5891	0.5444	0.4362	0.3981	

**Tableau V. 5:** La comparaison du paramètre de fréquence fondamentale ( $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ ) pour les plaques carrées en AL/ZrO<sub>2</sub> avec ( $\eta = 1$ ).

Méthode	n=0		n=1			δ=0.2		
	$\delta = \frac{1}{\sqrt{10}}$	δ=0.1	δ=0.05	δ=0.1	δ=0.2	n=2	n=3	n=5
Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.5424	0.0672	0.0160	0.0624	0.2300	0.2285	0.2290	0.2295
Present $\varepsilon_z = 0$	0.5380	0.0671	0.0158	0.0619	0.2277	0.2257	0.2263	0.2272
Khorshidi et al. (2015)	0.4629	0.0577	0.0158	0.0619	0.2278	0.2288	0.2301	0.2327
Matsunaga (2008)	0.4658	0.0577	0.0158	0.0619	0.2285	0.2264	0.2270	0.2281
Vel and Batra (2004)	0.4658	0.0577	0.0153	0.0596	0.2192	0.2197	0.2211	0.2225
HSDT <sup>(a)</sup>	0.4658	0.0578	0.0157	0.0613	0.2257	0.2237	0.2243	0.2253
FSDT <sup>(a)</sup>	0.4619	0.0577	0.0162	0.0633	0.2333	0.2325	0.2334	0.2334
Hosseini-Hashemi et al. (2010)	0.4618	0.0576	0.0158	0.0611	0.2270	0.2249	0.2254	0.2265

<sup>(a)</sup> Pradyumna et Bandyopadhyay (2008)

Dans Tableau V.5, une comparaison des résultats de ( $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ ) pour les plaques carrées en (AL/ZrO<sub>2</sub>) avec ceux de la HSDT 2D (Matsunaga, 2008), la théorie 3D en utilisant la procédure de série de puissance (Vel and Batra, 2004), la méthode des éléments fini HSDT (Pradyumna and Bandyopadhyay, 2008), la méthode des éléments fini FSDT (Hosseini-Hashemi et al., 2008), la solution analytique FSDT (Hosseini-Hashemi et al., 2010) et la solution HSDT démontré par Khorshidi et al. (2015). A partir des Tableaux V.5 et V.6, on peut confirmer qu'il existe un très bon accord entre les résultats, confirmant la grande précision de la formulation analytique proposée.

L'effet du rapporte de dimension  $\eta = b/a$  sur les paramètres de la fréquence  $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho_c h/E_c}$  d'une plaque rectangulaire en Al/ZrO<sub>2</sub> avec ( $\delta = h/a = 0.2, n=1$ ) est montré dans Tableau V.6.

**Tableau V. 6:** Le paramètre de fréquence ( $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho_c h/E_c}$ ) pour les plaques en AL/ZrO<sub>2</sub> Avec ( $\delta=0.2, n=1$ ).

$\frac{a}{b}$	2	1.5	1	2/3	0.5
Present $\varepsilon_z \neq 0$	3.2091	3.6702	4.9411	7.5878	10.9096
Present $\varepsilon_z = 0$	3.1796	3.6354	4.8909	7.5005	10.7682
Khorshidi et al. (2015)	3.1198	3.3720	4.9325	6.9551	9.9853



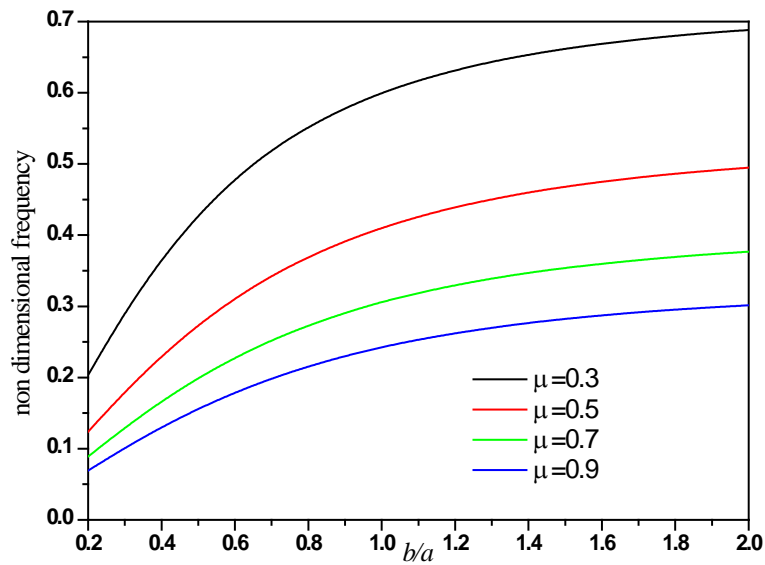
A partir du Tableau V.6, on peut déduire qu'avec une réduction du rapport de dimension, le paramètre de fréquence augmente en raison de l'augmentation de la rigidité de la plaque. On peut également observer que l'effet d'étirement augmente le paramètre de fréquence.

**Tableau V. 7:**L'effet du paramètre non local non dimensionnel  $\zeta$  et l'indice de gradient  $n$  sur les fréquences non dimensionnelles  $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_c h / E_c}$  d'une nano-plaque rectangulaire FG (AL/AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>).

$\zeta$	$\frac{a}{b}$	$\frac{h}{a}$	Méthode	gradient index		
				0	5	10
0.0	0.5	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.1381	0.0909	0.0868
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.1376	0.0891	0.0856
			Khorshidi et al. (2015)	0.2114	0.1357	0.0856
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0365	0.0244	0.0234
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0365	0.0239	0.0231
			Khorshidi et al. (2015)	0.0365	0.0239	0.0231
	1.0	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.2122	0.1386	0.1318
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.2113	0.1358	0.1301
			Khorshidi et al. (2015)	0.2310	0.1356	0.1300
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0578	0.0384	0.0368
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0577	0.0377	0.0364
			Khorshidi et al. (2015)	0.0577	0.0377	0.0364
0.1	0.5	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.1306	0.0858	0.0819
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.1299	0.0841	0.0808
			Khorshidi et al. (2015)	0.1299	0.1239	0.0808
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0345	0.0230	0.0221
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0345	0.0226	0.0218
			Khorshidi et al. (2015)	0.0345	0.0226	0.0218
	1.0	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.1939	0.1266	0.1205
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.1931	0.1241	0.1189
			Khorshidi et al. (2015)	0.1932	0.1239	0.1188
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0528	0.0351	0.0337
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0527	0.0344	0.0332
			Khorshidi et al. (2015)	0.0527	0.0344	0.0332
0.2	0.5	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.1130	0.0744	0.0710
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.1126	0.0730	0.0701
			Khorshidi et al. (2015)	0.1127	0.0728	0.0700
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0299	0.0199	0.0191
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0299	0.0196	0.0189

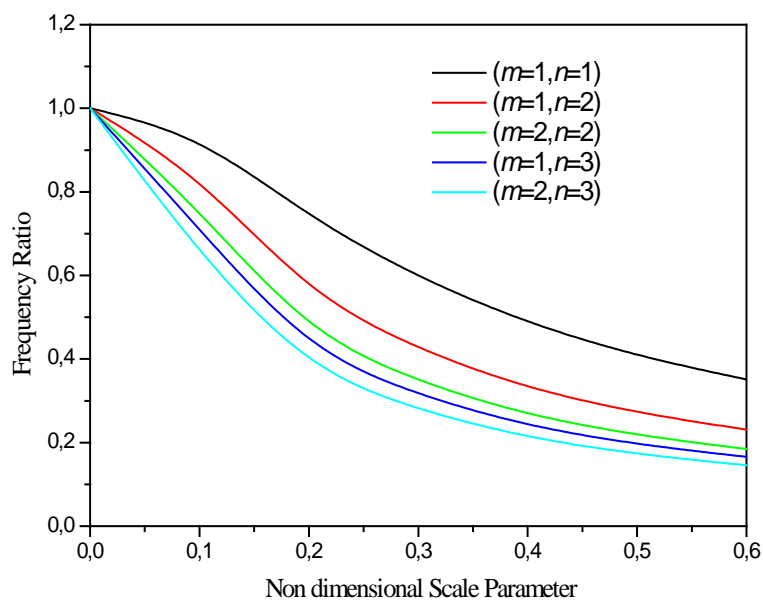
			Khorshidi et al. (2015)	0.0299	0.0196	0.0189
	1.0	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.1586	0.1036	0.0985
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.1579	0.1015	0.0972
			Khorshidi et al. (2015)	0.1580	0.1014	0.0972
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0432	0.0287	0.0275
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0431	0.0282	0.0272
			Khorshidi et al. (2015)	0.0431	0.0282	0.0272
0.3	0.5	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0950	0.0626	0.0597
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0948	0.0613	0.0589
			Khorshidi et al. (2015)	0.0948	0.0613	0.0589
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0252	0.0168	0.0161
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0251	0.0165	0.0159
			Khorshidi et al. (2015)	0.0251	0.0165	0.0159
	1.0	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.1273	0.0831	0.0791
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.1268	0.0815	0.0781
			Khorshidi et al. (2015)	0.1269	0.0814	0.0780
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0347	0.0231	0.0221
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0346	0.0226	0.0218
			Khorshidi et al. (2015)	0.0346	0.0226	0.0218
0.4	0.5	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0801	0.0527	0.0503
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0798	0.0517	0.0497
			Khorshidi et al. (2015)	0.0798	0.0516	0.0496
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0212	0.0142	0.0136
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0212	0.0139	0.0134
			Khorshidi et al. (2015)	0.0212	0.0139	0.0134
	1.0	0.2	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.1040	0.0679	0.0646
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.1036	0.0666	0.0638
			Khorshidi et al. (2015)	0.1037	0.0665	0.0638
		0.1	Present $\varepsilon_z \neq 0$	0.0283	0.0189	0.0181
			Present $\varepsilon_z = 0$	0.0283	0.0185	0.0178
			Khorshidi et al. (2015)	0.0283	0.0185	0.0178

Dans le tableau V.7, les influences de différents paramètres sur les fréquences non dimensionnelles d'une nano-plaqueFG sont présentées. À partir des résultats, on constate qu'en augmentant le paramètre d'échelle, le taux de variation des fréquences non dimensionnelles diminue, car en augmentant le paramètre d'échelle, l'énergie de déformation diminue et entraîne une réduction de la rigidité des plaques.



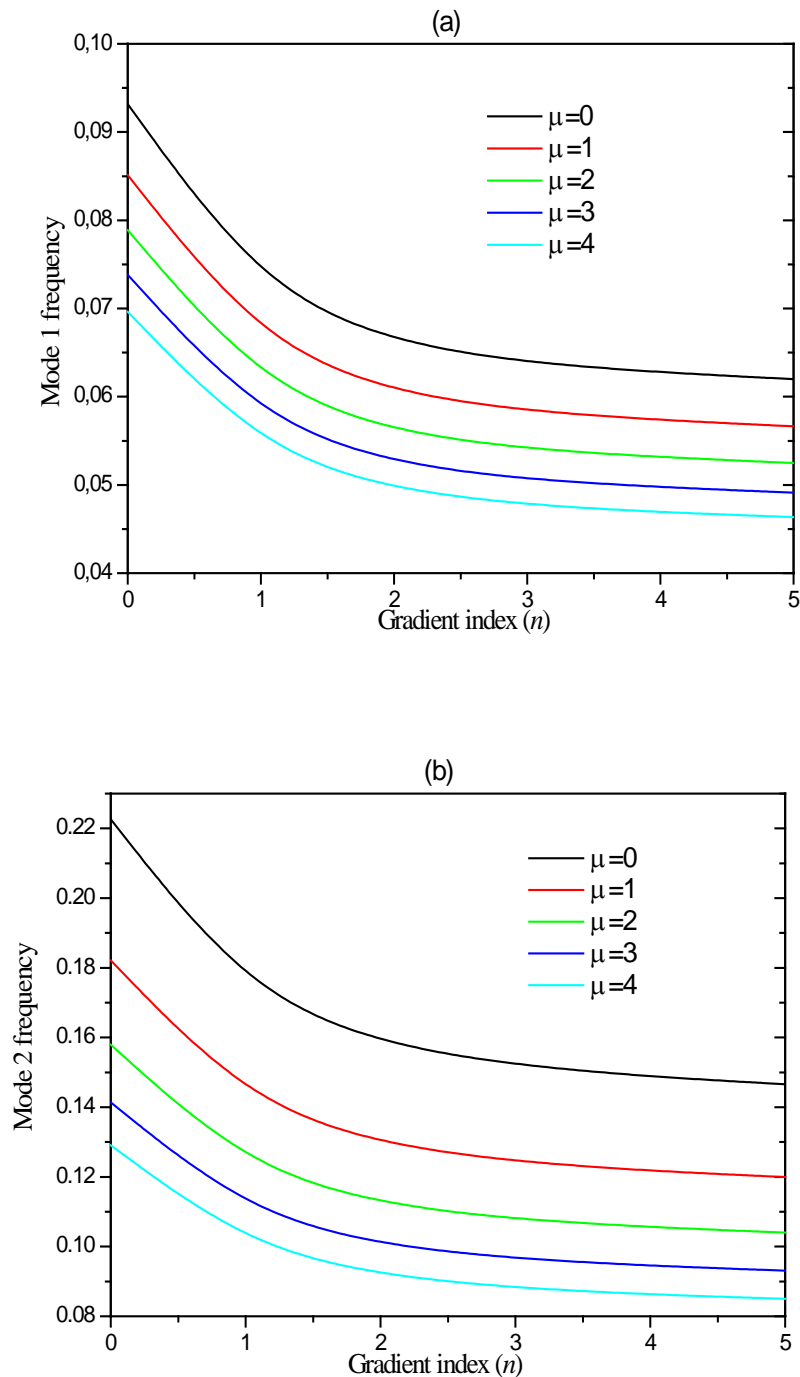
**Figure V.1 :** Les influences du rapport de dimension et le paramètre d'échelle sur la fréquence non dimensionnelle.

Dans la figure V.1, les influences du rapport de dimension et le paramètre d'échelle sur la fréquence non dimensionnelle des plaques nanométriques rectangulaires sont illustrées. Il est démontré qu'avec une augmentation du rapport ( $b/a$ ), la fréquence non dimensionnelle augmente. On observe que pour les faibles rapports de ( $b/a$ ), l'effet des paramètres d'échelle diminue.



**Figure V.2 :** Les effets du rapport de dimension et le paramètre non local sur la fréquence non dimensionnelle.

La figure V.2 illustre l'influence du paramètre d'échelle sur le rapport de fréquence des nano-plaques pour différents modes de vibration. D'après ces résultats, il semble que les rapports de fréquence pour les modes inférieurs soient supérieurs à ceux des modes supérieurs.



**Figure V.3 :** L'influence de l'indice de gradient ( $n$ ) et le paramètre d'échelle ( $\mu$ ) sur la fréquence adimensionnelle pour une plaque FG carré simplement supporté avec ( $a/h = 10$ ):  
(a) première fréquence; (b) deuxième fréquence.

La figure V.3 démontre l'influence de l'indice de gradient sur les deux premières fréquences adimensionnelles des nano-plaques FG(SUS304/  $\text{Si}_3\text{N}_4$ ) avec ( $a/h=10$ ) pour différentes valeurs du paramètre de petite échelle. On peut observer que la fréquence adimensionnelle diminue à mesure que l'indice de gradient augmente. Ceci est dû au fait qu'une augmentation de l'indice de gradient entraîne une diminution de la rigidité de la nano-plaque FG.

#### V.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement vibratoire des nano-plaques en FGM en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D à cinq variables. Cette théorie a été développée dans le chapitre précédent. Tous les résultats obtenus de la fréquence adimensionnelle sont en bon accord avec ceux de la littérature. Par conséquent, on peut conclure que la théorie proposée est précise pour résoudre le problème de la vibration libre des nano-plaques simplement appuyées.

## CONCLUSION GENERALE

*Les propriétés dynamiques dépendantes de la taille de nano-plaque FG sont étudiées analytiquement en utilisant un modèle de plaque raffiné cubique simple basé sur les relations constitutives différentielles non locales d'Eringen. La cinématique de la présente théorie est modifiée en considérant des termes entiers indéterminés dans des déplacements dans le plan, ce qui entraîne un nombre réduit de variables par rapport à d'autres HSDT du même ordre. La comparaison des résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature pour les nano-plaques FG démontrent une stabilité et une précision élevées de la solution actuelle. Ce qui est présenté ici démontre l'influence des variations du paramètre d'échelle, le rapport entre l'épaisseur et la longueur, les indices de gradient et le rapport de longueur sur les valeurs de fréquence d'une nano-plaque FG. Il est démontré que le rapport de fréquence diminue avec l'augmentation du nombre de modes et de la valeur du paramètre d'échelle, et que l'augmentation de l'indice de gradient entraîne également la diminution des fréquences non dimensionnelles.*

*Finalement, nous pouvons dire que model actuel est exacte pour résoudre les problèmes de la vibration libre des nano-plaque en matériaux fonctionnellement graduées.*

*Le travail présenté dans le cadre de cette thèse de doctorat peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le présent modèle pour l'étude statique et la stabilité des différentes formes de micro et nano structures.*

## *Références Bibliographiques*

- Aagesen, M., Sorensen, C., (2008), “Nanoplates and their suitability for use as solar cells”, *Proceedings of Clean Technol*, 109- 112.
- Abdelaziz, H.H., Meziane, M.A.A, Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabli, A.S. (2017), “An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions”, *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704.
- Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2018), “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates”, *Compos.Struct.*, **184**, 688-697.
- Adda Bedia, W., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Saeed, T., Alhodaly, M.S. (2019), “A new hyperbolic two-unknown beam model for bending and buckling analysis of a nonlocal strain gradient nanobeams”, *Journal of Nano Research*, 57, 175-191.
- Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2016), “Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel Compos. Struct.*, **20**(5), 963-981.
- Aifantis, E. (1999), "Strain gradient interpretation of size effects", *International Journal of Fracture*, 95, 299-314.
- Akbaş, Ş.D. (2016), “Forced vibration analysis of viscoelastic nanobeams embedded in an elastic medium”, *Smart Structures & Systems*, 18(6), 1125-1143.
- Akbas, S.D. (2018), “Forced vibration analysis of cracked functionally graded microbeams”, *Advances in Nano Research*, **6**(1), 39-55.
- Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos. Struct.*, **125**, 621-630.
- Alshorbagy, A.E., Eltahir, M.A. and Mahmoud, F.F. (2011), “Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method”, *Applied Mathematical Modelling*, 35(1), 412-425.
- Asghari, M, Taati, E. (2013), "A size-dependent model for functionally graded micro-plates for mechanical analyses", *J. Vib. Cont*, 19, 1614-1632.
- Atmane, H.A., Tounsi, A., Bernard, F. (2017), “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, **13**(1), 71-84.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel Compos. Struct.*, **18**(1), 187-212.

Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S. (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations", *Struct. Eng. Mech.*, **65**(4), 453-464.

Bakhadda, B., Bachir Bouiadjra, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "Dynamic and bending analysis of carbon nanotube-reinforced composite plates with elastic foundation", *Wind and Structures*, **27**(5), 311-324.

Becheri, T., Amara, K., Bouazza, M and Benseddiq, N. (2016), "Buckling of symmetrically laminated plates using nth-order shear deformation theory with curvature effects", *Steel Comp. Struct.*, **21**(6), 1347-1368.

Belabed, Z., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate", *Earthquakes and Structures*, **14**(2), 103-115.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Bég, O.A. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B*, **60**, 274-283.

Beldjelili, Y., Tounsi, A., & Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Structures and Systems*, **18**(4), 755-786.

Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel Compos. Struct.*, **18**(4), 1063-1081.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017a), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams", *Struct. Eng. Mech.*, **62**(6), 695-702.

Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017b), "An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates", *Steel Compos. Struct.*, **25**(3), 257-270.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position", *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265-275.

Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2017), "An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities", *Earthquakes and Structures*, **13**(3), 255-265.



Benahmed, A., Houari, M.S.A, Benyoucef, S, Belakhdar, K, Tounsi, A. (2017), “A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”, *Geomechanics and Engineering*, **12**(1), 9-34.

Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2018), “A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **65**(1), 19-31.

Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater.Struct.*, **23**(4), 423 - 431.

Bensaid, I. (2017), “A refined nonlocal hyperbolic shear deformation beam model for bending and dynamic analysis of nanoscale beams”, *Advances in Nano Research*, **5**(2), 113-126.

Bensaid, I., Bekhadda, A., & Kerboua, B. (2018), “Dynamic analysis of higher order shear-deformable nanobeams resting on elastic foundation based on nonlocal strain gradient theory”, *Advances in Nano Research*, **6**(3), 279-298.

Besseghier, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Mahmoud, S. R. (2017), "Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory", *Smart Structures and Systems.*, **19**(6), 601-614.

Bouadi, A., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Heireche, H., Tounsi, A. (2018), "A new nonlocal HSDT for analysis of stability of single layer graphene sheet”, *Advances in Nano Research*, **6**(2), 147-162.

Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M. S. A., Benzair, A., Tounsi, A. (2017), "A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams", *Smart Structures and Systems.*, **19**(2), 115-126.

Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct.*, **14**(1), 85-104.

Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, Int. J., **58**(3), 397- 422.

Bouazza, M, Lairedj, A, Benseddiq, N, Khalki, S. (2016), “A refined hyperbolic shear deformation theory for thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates”, *Mech Res Commun*, **73**, 117–126.

Bouazza, M, Zenkour, A.M., Benseddiq, N. (2018), “Closed-form solutions for thermal buckling analyses of advanced nanoplates according to a hyperbolic four-variable refined theory with small-scale effects”, *Acta Mech*, **229**(5), 2251-2265.

Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Mahmoud, S.R. (2018), “Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **66**(1), 61-73.

Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **57**(5), 837-859.

- Boukhlif, Z., Bouremana, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Tounsi, A., Al-Osta, M.A. (2019), "A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, (Accepted).
- Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation", *Steel Compos. Struct.*, **20**(2), 227-249.
- Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Azzaz, A., Zinata, A., Tounsi, A. (2019), "Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory", *Wind and Structures*, **28**(1), 19-30.
- Bourada, F., Amara, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates", *Structural Engineering and Mechanics*, **68**(6), 661-675.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 409-423.
- Bousahla, A.A., Benyoucef, S. Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **60**(2), 313-335.
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *Int. J. Comput. Meth.*, **11**(6), 1350082.
- Chaabane, L.A., Bourada, F., Sekkal, M., Zerouati, S., Zaoui, F.Z., Tounsi, A., Derras, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2019), "Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation", *Structural Engineering and Mechanics*, (Accepted).
- Cherif, R.H., Meradjah, M., Zidour, M., Tounsi, A., Belmahi, H., Bensattalah, T. (2018), "Vibration analysis of nano beam using differential transform method including thermal effect", *Journal of Nano Research*, **54**, 1-14.
- Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Struct. Syst.*, **19**(3), 289-297.
- Chemi, A., Heireche, H., Zidour, M., Rakrak, K., Bousahla, A.A. (2015), "Critical buckling load of chiral double-walled carbon nanotube using non-local theory elasticity", *Advances in Nano Research*, **3**(4), 193-206.
- Chen, Y, Lee, JD, Eskandarian, A. (2004), "Atomistic viewpoint of the applicability of microcontinuum theories", *Int J Sol Struct*, **41**, 2085-2097.
- Dash, S., Sharma, N., Mahapatra, T.R., Panda, S K., Sahu, P. (2018), "Free vibration analysis of functionally graded sandwich flat panel", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, **377**, 012140.
- Draiche, K., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates", *Geomech. Eng.*, **11**(5), 671-690.

Draoui, A., Zidour, M., Tounsi, A., Adim, B. (2019), "Static and dynamic behavior of nanotubes-reinforced sandwich plates using (FSDT)", *Journal of Nano Research*, 57, 117-135.

Ebrahimi, F., Mahmoodi, F., Barati, M.R. (2017), "Thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded micro/nanoscale beams with porosities based on modified couple stress theory", *Advances in Materials Research*, 6(3), 279-301.

Ebrahimi, F., &Salari, E. (2015), "Size-dependent thermo-electrical buckling analysis of functionally graded piezoelectric nanobeams", *Smart Materials and Structures*, 24(12), 125007.

Ebrahimi, F., Rastgoo, A. (2008a), "Free vibration analysis of smart annular FGM plates integrated with piezoelectric layers", *Smart Materials and Structures*, 17(1), 015044.

Ebrahimi, F., Rastgo, A. (2008b), "An analytical study on the free vibration of smart circular thin FGM plate based on classical plate theory", *Thin-Walled Structures*, 46(12), 1402-1408.

Ebrahimi, F., Rastgoo, A. and Atai, A.A. (2009a), "A theoretical analysis of smart moderately thick shear deformable annular functionally graded plate", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(5), 962-973.

Ebrahimi, F., Naei, M.H. and Rastgoo, A. (2009b), "Geometrically nonlinear vibration analysis of piezoelectrically actuated FGM plate with an initial large deformation", *Journal of mechanical science and technology*, 23(8), 2107-2124.

Ehyaei, J., Akbarshahi, A., & Shafiei, N. (2017), "Influence of porosity and axial preload on vibration behavior of rotating FG nanobeam", *Advances in Nano Research*, 5(2), 141-169.

El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates", *Struct. Eng. Mech.*, 63(5), 585-595.

Ellali, M, Amara, K, Bouazza, M, Bourada, F. (2018), "The buckling of piezoelectric plates on Pasternak elastic foundation using higher order shear deformation plate theories", *Smart Struct. Syst.*, 21(1), 113-122.

Eltaher, M.A., Emam, S.A., Mahmoud, F.F. (2012), "Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams", *Applied Mathematics and Computation*, 218, 7406–7420.

Eltaher, M.A., Khater, M.E., Park, S., Abdel-Rahman, E., Yavuz, M. (2016), "On the static stability of nonlocal nanobeams using higher-order beam theories", *Advances in Nano Research*, 4(1), 51-64.

Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E. and Mahmoud, F.F. (2013a), "Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams", *Composite Structures*, 99, 193-201.

Eltaher, M.A., Emam, S.A. and Mahmoud, F.F. (2013b), "Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams", *Composite Structures*, 96, 82-88.

Eringen, AC. (1972), "Nonlocal polar elastic continua", *International Journal of engineering science*, 10, 1-16.

Eringen, AC, Edelen, D. (1972), "On nonlocal elasticity", *International Journal of engineering science*, 10, 233-248.

Eringen, AC, (1983), "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *J Appl Phys*, 54, 4703-4710.

Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Geomech. Eng.*, **13**(3), 385-410.

Faleh, N.M., Ahmed, R.A., Fenjan, R.M. (2018a), "On vibrations of porous FG nanoshells", *International Journal of Engineering Science*, 133, 1-14.

Faleh, N.M., Fenjan, R.M., Ahmed, R.A. (2018b), "Dynamic analysis of graded small-scale shells with porosity distributions under transverse dynamic loads", *Eur. Phys. J. Plus*, 133, 348.

Fourn, H., Ait Atmane, H., Bourada, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates", *Steel and Composite Structures*, **27**(1), 109-122.

GhorbanpourArani,A.,Kolahchi,R.,Vossough, H. (2012),“Buckling analysis and smart control of SLGS using elastically coupled PVDF nanoplate based on the nonlocal Mindlin plate theory”, *Physica B: Condensed Matter*, 407(22), 4458 – 4465.

Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M.S.A., Bourada, A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, **25**(6), 717-726.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.,Int. J.*, **18**(1), 235-253.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Eng. Mech.*, **140**, 374-383.

Heireche, H, et al. (2008), "Sound wave propagation in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity", *Phys E*, 40, 2791-2799.

Hirwani, C.K., Panda, S.K., Mahapatra, T.R., Mahapatra, S.S. (2017), "Numerical study and experimental validation of dynamic characteristics of delaminated composite flat and curved shallow shell structure", *Journal of Aerospace Engineering*, 30(5), 04017045.

Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel. Compos.Struct.*,**22**(2), 257-276.

Hosseini-Hashemi, S, Bedroud, M., Nazemnezhad, R. (2013a), "An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity", *Compos Struct*, 103, 108-118.

Hosseini-Hashemi, S, Zare M, Nazemnezhad, R. (2013b), "An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nanoplates via nonlocal elasticity", *Compos Struct*, 100, 290-299.

Hosseini-Hashemi, S, et al. (2010), "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory", *Appl Math Model*, 34, 1276-1291.

Huang, C, Yang, P, Chang, M. (2012), "Threedimensional vibration analyses of functionally graded material rectangular plates with through internal cracks", *Compos Struct*, 94, 2764-2776.

Iijima, S. (1991), "Helical microtubules of graphitic carbon", *Nature*, 354, 56-58.

Janghorban, M. (2016), "Static analysis of functionally graded rectangular nanoplates based on nonlocal third order shear deformation theory", *International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS)*, 8(2), 87 – 100.

Kaci, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "Post-buckling analysis of shear-deformable composite beams using a novel simple two-unknown beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **65**(5), 621-631.

Kadari, B., Bessaim, A., Tounsi, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A. (2018), "Buckling analysis of orthotropic nanoscale plates resting on elastic foundations", *Journal of Nano Research*, **55**, 42-56.

Kar, V.R., Panda, S.K. (2016a), "Geometrical nonlinear free vibration analysis of FGM spherical panel under nonlinear thermal loading with TD and TID properties", *Journal of Thermal Stresses*, 39(8), 942-959.

Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., Tounsi, A. (2019a), "Resonance behavior of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with grapheme nanoplatelets", *International Journal of Mechanical Sciences*, 156, 94-105.

Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2019b), "On exact wave propagation analysis of triclinic material using three dimensional bi-Helmholtz gradient plate model", *Structural Engineering and Mechanics*, **69**(5), 487-497.

Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2019c), "Wave propagation of functionally graded anisotropic nanoplates resting on Winkler-Pasternak foundation", *Structural Engineering and Mechanics*, 7(1), 55-66.

Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018a), "Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory", *Thin-Walled Structures*, **129**, 251–264.

Karami, B., Janghorban, M., Shahsavari, D., Tounsi, A. (2018b), "A size-dependent quasi-3D model for wave dispersion analysis of FG nanoplates", *Steel and Composite Structures*, **28**(1), 99-110.

Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018c), "Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles", *Steel and Composite Structures*, **27**(2), 201-216.

Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2018d), "Galerkin's approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions", *Engineering with Computers*, (In press).

Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2017), "Effects of triaxial magnetic field on the anisotropic nanoplates", *Steel and Composite Structures*, **25**(3), 361-374.

Kar, V.R., Panda, S.K. (2016b), "Nonlinear thermomechanical deformation behaviour of P-FGM shallow spherical shell panel", *Chinese Journal of Aeronautics*, 29(1), 173-183.

Katariya, P.V., Panda, S.K., Mahapatra, T.R. (2017a), "Prediction of nonlinear eigenfrequency of laminated curved sandwich structure using higher-order equivalent single-layer theory", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, (In press).

Katariya, P.V., Panda, S.K., Hirwani, C.K., Mehar, K., Thakare, O. (2017b), "Enhancement of thermal buckling strength of laminated sandwich composite panel structure embedded with shape memory alloy fibre", *Smart Structures and Systems*, 20(5), 595-605.

Katariya, P.V., Panda, S.K., Mahapatra, T.R. (2017c), "Nonlinear thermal buckling behaviour of laminated composite panel structure including the stretching effect and higher-order finite element", *Advances in materials Research*, 6(4), 349-361.

Katariya, P.V., Panda, S.K. (2018), "Numerical evaluation of transient deflection and frequency responses of sandwich shell structure using higher order theory and different mechanical loadings", *Engineering with Computers*, (In press).

Katariya, P.V., Das, A., Panda, S.K. (2018a), "Buckling analysis of SMA bonded sandwich structure – using FEM", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 338, 012035.

Katariya, P.V., Panda, S.K., Mahapatra, T.R. (2018b) "Bending and vibration analysis of skew sandwich plate", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 90(6), 885-895.

Katariya, P.V., Panda, S.K. (2019), "Frequency and deflection responses of shear deformable skew sandwich curved shell panel: A Finite Element Approach", *Arabian Journal for Science and Engineering*, 44(2), 1631-1648.

Katariya, P.V., Hirwani, C.K., Panda, S.K. (2019), "Geometrically nonlinear deflection and stress analysis of skew sandwich shell panel using higher-order theory", *Engineering with Computers*, 35(2), 467-485.

Ke, L, et al. (2013), "Axisymmetric nonlinear free vibration of size-dependent functionally graded annular microplates", *Compos Part B: Engineering*, 53, 207-217.

Ke, LL, et al. (2012), "Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates", *Compos struct*, 94, 3250-3257.

Khetir, H., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **64**(4), 391-402.

Khiloun, M., Bousahla, A.A., Kaci, A., Bessaim, A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2019), "Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT", *Engineering with Computers*, (In press).

Khorshidi, K., Asgari, T., Fallah, A. (2015), "Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates based on nonlocal exponential shear deformation theory", *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 2, 79-93.

Klouche, F., Darcherif, L., Sekkal, M., Tounsi, A., and Mahmoud, S.R. (2017), "An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates", *Structural Engineering and Mechanics*, 63(4), 439-446.

Kocaturk, T. and Akbas, S.D. (2012), "Post-buckling analysis of Timoshenko beams made of functionally graded material under thermal loading", *Structural Engineering and Mechanics*, 41(6), 775-789.

Koiter, WT. (1969), "Couple-stresses in the theory of elasticity, I & II", *Journal of the Philosophical transactions of the royal society of London B*, 67, 17-44.

Kumar, Y, Lal, R. (2013), "Prediction of frequencies of free axisymmetric vibration of twodirectional functionally graded annular plates on Winkler foundation", *Eur J Mech A Solid*, 42, 219-228.

Lam, DCC, Yang, F, Chong, ACM, Tong, P. (2003), "Experiments and theory in strain gradient elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51, 1477-1508.

Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel. Compos.Struct.*, 18(2), 425-442.

Li, L, Li, X., Hu, Y. (2016), "Free vibration analysis of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material", *International Journal of Engineering Science*, 102, 77-92.

Ma, M, et al. (2008), "Electrochemical performance of ZnO nanoplates as anode materials for Ni/Zn secondary batteries", *J Power Sources*, 179, 395-400.

Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Appl. Math. Model.*, 39, 2489-2508.

Malekzadeh, P, Heydarpour, Y. (2012), "Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment", *Compos Struct*, 94, 2971-2981.

Malekzadeh, P, Beni, AA. (2010), "Free vibration of functionally graded arbitrary straight-sided quadrilateral plates in thermal environment", *Compos Struct*, 92, 2758-2767.

Matsunaga, H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Compos struct*, 82, 499-512.

Mehar, K., Panda, S.K. (2016), "Geometrical nonlinear free vibration analysis of FG-CNT reinforced composite flat panel under uniform thermal field", *Composite Structures*, 143, 336-346.

Mehar, K., Panda, S.K., Patle, B.K. (2017), "Thermoelastic vibration and flexural behavior of FG-CNT reinforced composite curved panel", *International Journal of Applied Mechanics*, 9(4), 1750046.

Mehar, K., Panda, S.K., Patle, B.K. (2018a), "Stress, deflection, and frequency analysis of CNT reinforced graded sandwich plate under uniform and linear thermal environment: A finite element approach", *Polymer Composites*, 39(10), 3792-3809.

Mehar, K., Mahapatra, T.R, Panda, S.K., Katariya, P.V., Tompe, U.K. (2018b), "Finite-element solution to nonlocal elasticity and scale effect on frequency behavior of shear deformable nanoplate structure", *Journal of Engineering Mechanics*, 144(9), 04018094.

Mehar, K., Panda, S.K. (2018), "Nonlinear finite element solutions of thermoelastic flexural strength and stress values of temperature dependent graded CNT-reinforced sandwich shallow shell structure", *Structural Engineering & Mechanics*, 67(6), 565-578.

Meksi, R, Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2019), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw. Struct.Mater.*,**21**(2), 727-757.

Menasria, A., Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates", *Steel Compos. Struct.*,**25**(2), 157-175.

Meziane, M.A.A, Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw.Struct.Mater.*,**16**(3), 293-318.

Miller, R.E, Shenoy, V.B. (2000), "Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements", *Nanotechnology*, 11, 139.

Mindlin, R, Tiersten, H. (1962), "Effects of couple-stresses in linear elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11, 415-448.

Mokhtar, Y., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel shear deformation theory for buckling analysis of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity theory", *Smart Structures Systems*, **21**(4), 397-405.

Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory", *Smart Structures Systems*, **20**(3), 369-383.

Murmu, T, Pradhan, S. (2009a), "Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM", *Phys E*, 41, 1232-1239.

Murmu, T, Pradhan, S. (2009b), "Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory", *Comput Mater Sci*, 46, 854-859.



Narendar, S. (2011), "Buckling analysis of micro-/nano-scale plates based on two-variable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects", *Compos Struct*, 93, 3093-3103.

Nie, G, Zhong, Z. (2007), "Semi-analytical solution for three-dimensional vibration of functionally graded circular plates", *Comput Method Appl M*, 196, 4901-4910.

Nix, WD, Gao, H. (1998), "Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46, 411-425.

Peddiesson, J, Buchanan, GR, McNitt, RP. (2003), "Application of nonlocal continuum models to nanotechnology", *Int J Eng Sci*, 41, 305-312.

Pradhan; S, Phadikar, J. (2009), "Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models", *Phys Lett A*, 373, 1062-1069.

Pradyumna, S, Bandyopadhyay, J. (2008), "Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finiteelement formulation", *J Sound Vibration*, 318, 176-192.

Rahmani, O. and Pedram, O. (2014), "Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory", *International Journal of Engineering Science*, 77, 55-70.

Rafiee, MA, et al. (2010), "Fracture and fatigue in graphene nanocomposites", *small*, 6, 179-183.

Reddy, J. (2007), "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams", *Int J Eng Sci*, 45, 288-307.

Reddy, J., Pang, S. (2008), "Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes", *J App Phys*, 103, 023511.

Reddy, J. (2011), "Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams", *J Mech Phys of Solids*, 59, 2382-2399.

Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017a), "A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate", *Steel and Composite Structures*, 25(4), 389-401.

Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017b), "A new quasi-3D HSDT for buckling and vibration of FG plate", *Structural Engineering and Mechanics*, 64(6), 737-749.

Semmah, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2019), "Thermal buckling analysis of SWBNNT on Winkler foundation by non local FSDT", *Advances in Nano Research*, 7(2), 89-98.

Sahoo, S.S., Panda, S.K., Sen, D. (2016), "Effect of delamination on static and dynamic behavior of laminated composite plate", *AIAA Journal*, 54(8), 2530-2544.

Sahoo, S.S., Panda, S.K., Singh, V.K. (2017), "Experimental and numerical investigation of static and free vibration responses of woven glass/epoxy laminated composite plate", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 231(5), 463-478.

Sakhaee-Pour, A, Ahmadian, M, Vafai, A. (2008a), "Applications of single-layered graphene sheets as mass sensors and atomistic dust detectors", *Solid State Commun*, 145, 168-172.

Sakhaee-Pour, A, Ahmadian, M, Vafai, A. (2008b), "Potential application of single-layered graphene sheet as strain sensor", *Solid State Commun*, 147, 336-340.

Shahadat, MRB, Alam, MF, Mandal, MNA, Ali, MM. (2018), "Thermal transportation behaviour prediction of defective graphene sheet at various temperature: A Molecular Dynamics Study", *American Journal of Nanomaterials*, 6(1), 34-40.

Shahsavari, D., Karami, B., Li, L. (2018), "A high-order gradient model for wavepropagation analysis of porous FG nanoplates", *Steel and Composite Structures*, 29(1), 53-66.

Shen, HS., Zhang, CL. (2010), "Torsional buckling and postbuckling of double-walled carbon nanotubes by nonlocal shear deformable shell model", *Compos Struct*, 92, 1073- 1084.

Singh, V.K., Panda, S.K. (2017), "Geometrical nonlinear free vibration analysis of laminated composite doubly curved shell panels embedded with piezoelectric layers", *Journal of Vibration and Control*, 23(13), 2078-2093.

Tang, Y., Liu, Y. (2018), "Effect of van der Waals force on wave propagation in viscoelastic double-walled carbon nanotubes", *Modern Physics Letters B*, 32(24), 1850291.

Tlidji, Y., Zidour, M., Draiche, K., Safa, A., Bourada, M., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R. (2019), "Vibration analysis of different material distributions of functionally graded microbeam", *Structural Engineering and Mechanics*, 69(6), 637-649.

Toupin, RA. (1962), "Elastic materials with couple-stresses", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11, 385-414.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerospace Sci. Tech.*, 24, 209-220.

Ungbhakorn, V, Wattanasakulpong, N. (2013), "Thermo-elastic vibration analysis of third order shear deformable functionally graded plates with distributed patch mass under thermal environment", *Appl Acoust*, 74, 1045-1059.

Vel, S.S, Batra, R. (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J Sound Vibration*, 272, 703-730.

Wang, L. (2009), "Dynamical behaviors of double walled carbon nanotubes conveying fluid accounting for the role of small length scale", *Comput Mater Sci*, 45, 584-588.

Wu, C.P., Chen, Y.H., Hong, Z.L., Lin, C.H. (2018), "Nonlinear vibration analysis of an embedded multi-walled carbon nanotube", *Advances in Nano Research*, 6(2), 163-182.

Yahia, S.A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct. Eng. Mech.*, 53(6), 1143-1165.

Yazid, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A. (2018), "A novel nonlocal refined plate theory for stability response of orthotropic single-layer graphene sheet resting on elastic medium", *Smart Structures and Systems.*, 21(1), 15-25.

- Ye, C, et al. (2006), "Thickness-dependent photocatalytic performance of ZnO nanoplatelets", *J Phys Chem B*, **110**, 15146-15151.
- Youcef, D.O., Kaci, A., Benzair, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2018), "Dynamic analysis of nanoscale beams including surface stress effects", *Smart Structures and Systems.*, **21**(1), 65-74.
- Younsi, A., Tounsi, A, Zaoui, F.Z., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R. (2018), "Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates", *Geomechanics and Engineering*, **14**(6), 519-532.
- Zaoui, F.Z., Ouinas, D., Tounsi, A. (2019), "New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations", *Compos. Part B*, **159**, 231-247.
- Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **54**(4), 693-710.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bég, O.A. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerospace Sci. Tech.*, **34**, 24-34.
- Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", *Struct. Eng. Mech.*, **64**(2), 145-153.
- Zine, A., Tounsi, A., Draiche, K., Sekkal, M., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells", *Steel and Composite Structures*, **26**(2), 125-137.
- Zhao, X, Lee, Y, Liew, KM. (2009), "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", *J sound Vibration*, **319**, 918-939.