

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES
Laboratoire des Matériaux & Hydrologie

FACULTE DE TECHNOLOGIE
Département de Génie Civil et travaux publics



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et matériaux

Présentée par : MOHAMED Rabhi

Contribution à l'étude dynamique des structures en FGM dans un environnement thermique par l'utilisation d'une théorie à ordre élevé

Soutenue le / / devant la commission d'examen :

Dr. TOUNSI Abdelouahed	Pr.	Président	U. D. L. Sidi Bel Abbès
Dr. BENRAHOU Kouider Halim	Pr.	Directeur de thèse	U. D. L. Sidi Bel Abbès
Dr. YEGHNEM Redha	Pr.	Co-Directeur de thèse	U-SAIDA
Dr. CHIKH Abdelbaki	MC.A	Examineur	U-TIARET
Dr. BELLIFA Hichem	MC.A	Examineur	U. D. L. Sidi Bel Abbès
Dr. BENGUEDIAB Soumia	MC.A	Examineur	U-SAIDA
Dr. KACI Abdelhakim	Pr.	Invité	U-SAIDA

Année Universitaire 2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

À la mémoire de mon père, ma sœur et son fils

À ma mère, mes frères, mes sœurs, ma femme et mes enfants

Remerciements

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans le soutien de Monsieur BENRAHOU Kouider Halim, Professeur à l'U.D.L de Sidi Bel Abbés, qui m'a fait l'honneur d'être mon directeur de thèse. En cette occasion, je tiens à le remercier vivement tant d'un point de vue professionnel que personnel.

Un Grand Merci que j'adresse à mon collègue Monsieur YEGHNEM Redha. Je le remercie vivement pour son aide à réaliser ce travail et pour ses précieux conseils et sa très grande disponibilité.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur TOUNSI Abdelouahed d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, pour son aide, ses conseils et son accueil au laboratoire des matériaux et hydrologie (LM&H) à l'université de Sidi Bel –Abbés.

Mes remerciements aussi à mon collègue Monsieur KACI Abdelhakim pour son aide afin de réaliser ce travail et sans oublier toute l'équipe du laboratoire LM&H.

Un Grand merci que j'adresse à Messieurs BELLIFA Hichem et CHIKH Abdelbaki ainsi que Madame BENGUEDIAB Soumia pour avoir acceptés d'évaluer et examiner ce travail.

Ces remerciements ne seraient pas complets, si je ne cite pas les personnes qui ont eu à supporter tous les hauts et les bas qui se sont succédé tout au long de mon travail. Je pense surtout à ma mère, mes sœurs et mes frères, sans oublié ma femme et mes enfants.

Je veux saisir cette occasion aussi pour remercier mon ami et mon frère BELLIA Zohir pour son soutien.

Sommaire

Sommaire	1
Liste des figures.....	4
Liste des tableaux	9
Résumé.....	12
Introduction générale	13
Chapitre I : Généralités sur les matériaux a gradient de propriétés (FGM)	15
I.1 Introduction.....	15
I.2 Histoire des matériaux à gradient de propriétés	15
I.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	17
I.4 Différents types de FGM.....	19
I.4.1 FGM à gradient de composition.....	20
I.4.2 FGM à gradient de porosité.....	21
I.4.3 FGM à gradient microstructural.....	21
I.5 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	22
I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	23
I.6.1 La loi des mélanges.....	23
I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	24
I.6.3 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	25
I.6.4 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	26
I.7 Les propriétés thermiques des plaques FGM	27
I.7.1 Variation constante et linéaire.....	27
I.7.2 Equation de conduction thermique.....	28
I.7.3 Distribution polynomiale	28
I.8 Conclusion	29
Chapitre II : Théories des plaques.....	30
II.1 Introduction.....	30

II.2 Phénomène de cisaillement transverse.....	30
II.3 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	30
II.4 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (Reissner-Mindlin) (FSDT)	32
II.5 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	33
II.6 Les différentes fonctions raffinées de cisaillement transverse.....	34
II.7 Conclusion	37
Chapitre III : Recherches bibliographiques sur les structures en matériaux a gradient de propriétés (FGM)	39
III.1 Introduction	39
III.2 Analyse des vibrations des structures en FGM	39
III.3 Analyses de flambement des plaques FGM sous chargement mécanique et thermomécanique	51
III.3.1 Chargement mécanique	52
III.3.2 Chargement thermomécanique	58
III.4 Conclusion.....	67
Chapitre IV : Étude du flambement et de la vibration libre des plaques sandwich en utilisant la théorie d'ordre élevé.....	68
IV.1 Introduction.....	68
IV.2 Description du problème et équations de base	68
IV.2.1 Configuration géométrique et propriétés des matériaux	68
IV.2.2 Relations constitutives.....	69
IV.2.3 Cinématique	70
IV.2.4 Équations de mouvement	71
IV.3 Solutions analytiques.....	76
IV.4 Conclusion.....	78
Chapitre V : Résultats et discussions	80
V.1 Introduction	80
V.2 Résultats numériques.....	80
V.2.1 Résultats de la vibration libre de la plaque sandwich FG.....	81

V.2.2 Stabilité de la plaque sandwich FG	86
V.3 Conclusions	92
Conclusion générale et perspectives.....	94
Références bibliographiques.....	96

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1: Structures et propriétés de matériau composite ordinaire et de FGM (Yoshikazu Shinohara, 2013)	17
Figure I.2: Gradation globale : (a) structure continue ; (b) structure discontinue.....	18
Figure I.3 : Gradation locale : (a) surface ; (b) joint	19
Figure I.4. : Différent types de FGM basé sur le gradient : (a) fraction volumique ; (b) forme ; (c) orientation ; (d) taille du matériau (Neubrand, 2001).....	19
Figure I.5 : Différents types de gradient FGM (Mahmoud D, Elbestawi M., 2017).....	20
Figure I.6 : Les principaux domaines d'application des FGM (Miyamoto Y., 1999).....	22
Figure I.7 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	24
Figure I.8 : La variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	25
Figure I.9: La variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	26
Figure I.10 : La variation du module de Young de la plaque E-FGM	27

Chapitre II

Figure II.1 : Déformation d'une normale transversale selon la théorie classique des plaques .	31
Figure II.2 : Déformation d'une normale transversale selon la théorie du premier ordre des plaques.....	33
Figure II.3 : Déformation d'une normale transversale selon la théorie d'ordre élevé des plaques	34
Figure II.4 : Evolution des fonctions de cisaillement transverse	37

Chapitre III

Figure III.1 : Effet de la température et du flux thermique sur la fréquence fondamentale des plaques carrées FGM ($a = 0,2$ m ; $a/h = 10$) : (a) élévation de température uniforme; (b) condition thermique-I avec $\Delta T_L = 0$ K; (c) condition thermique-II avec $\Delta T_L = 0$ K (Kim Y. W. 2005) (Kim Y. W. 2005)	40
---	----

Liste des figures

- Figure III.2 : L'amplitude centrale des vibrations en fonction de la fréquence fondamentale pour quatre plaques carrées aluminium-zircone simplement appuyées (Woo J. et al. 2006)..... 41
- Figure III.3 : L'amplitude centrale des vibrations par rapport à la fréquence fondamentale pour quatre plaques carrées aluminium-zircone simplement supportées et l'effet des champs de température (Woo J. et al. 2006) 42
- Figure III.4 : Contraintes de flambement en fonction du rapport d'aspect (a/b) des plaques FG. ($a/h = 2, 5, 10$; $s = 1$) (Matsunaga H. 2008) 43
- Figure III.5 : Courbes fréquences propres (Ω) en fonction de la contrainte axiale initiale (Λ) pour les plaques FG ($a/h=2.5$; $r=s=1$) (Matsunaga H. 2008) 44
- Figure III.6 : Les fréquences propres des plaques FG carré (SSSS) en Al/ZrO₂ avec l'indice de la loi de puissance (p) pour différentes valeurs de (a/h) ; $V_c = 0$; $m=n=1$ et (a) pour $V_c = 1$ (b) pour $V_c = 0.3$ (Fares M.E. et al. 2009) 45
- Figure III.7 : Variation d'épaisseur des déplacements normalisés hors plan $w(0.5a; 0.5b; z)$ pour une plaque FG carrée, $\nu = 0.3$; $a = 3h$, (a) plaque FG avec $E_1/E_0 = 10$, (b) plaque homogène et (c) plaque FG avec $E_1/E_0 = 0.1$ (Fares M.E. et al. 2009) 46
- Figure III.8 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport (a/h) et l'indice (p_1): (a) pour $a/b = 0,5$ et (b) pour $a/b = 2$ (Benachour A. et al. 2011) 47
- Figure III.9 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport (a/h) et l'indice (p_2) : (a) pour ($a/b = 0,5$) et (b) pour ($a/b = 2$) (Benachour A. et al. 2011) 47
- Figure III.10 : Variation du paramètre de fréquence avec un rapport a/b et un indice (p_1) : (a) pour $a/h = 2$ et (b) pour $a/h = 5$ (Benachour A. et al. 2011) 48
- Figure III.11 : Variation du paramètre de fréquence avec un rapport (a/b) et un indice p_2 : (a) pour $a/h = 2$ et (b) pour $a/h = 5$ (Benachour A. et al. 2011) 48
- Figure III.12 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport E_c/E_m et l'indice p pour (a) $\rho_c/\rho_m = 1$ et (b) $\rho_c/\rho_m = E_c/E_m$ ($= 2, 5, 10, 20, 40$), ($a/h = 20$, $a/b = 0,5$, ESDPT) (Uymaz B. et al. 2012) 49
- Figure III.13 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport E_c/E_m et l'indice p pour (a) $\rho_c/\rho_m = 1$ et (b) $\rho_c/\rho_m = E_c/E_m$ ($= 2, 5, 10, 20, 40$), ($a/h = 20$, $a/b = 0,5$, ESDPT) (Uymaz B. et al. 2012) 49
- Figure III.14 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport (E_c/E_m) et l'indice p pour (a) $\rho_c/\rho_m = 1$ et (b) $\rho_c/\rho_m = E_c/E_m$ ($= 2, 5, 10, 20, 40$), ($a/h = 20$, $a/b = 0,5$, ESDPT) (Uymaz B. et al. 2012) 50

Figure III.15 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport (ρ_c/ρ_m) et le rapport (E_c/E_m) pour différentes conditions aux limites ($a/h = 20$, $a/b = 0,5$, $p = 0,5$, ESDPT) (Uymaz B. et al. 2012)..... 50

Figure III.16 : Charge de flambement (P) en fonction du rapport côté / épaisseur (b/h) de plaques sandwich FGM symétriques et non symétriques utilisant diverses théories des plaques ($b = 2a$, $k = 2$) : (a) La plaque sandwich FGM (2-1-2) et (b) la plaque sandwich FGM (2-1-1) (Zenkour A.M. 2005) 52

Figure III.17 : Charge de flambement critique non dimensionnelle (N) en fonction du rapport côté / épaisseur (b/h) des plaques sandwich FGM (2-1-2) pour différentes valeurs de p . Plaques soumises à (a) une charge de compression uniaxiale ($\gamma = 0$) et (b) une charge de compression biaxiale ($\gamma = 1$) (Meiche NE. et al. 2011) 53

Figure III.18 : Charge de flambement critique non dimensionnelle (N) en fonction du rapport côté / épaisseur (b/h) des plaques sandwich FGM (2-1-1) pour différentes valeurs de p . Plaques soumises à (a) une charge de compression uniaxiale ($\gamma = 0$) et (b) une charge de compression biaxiale ($\gamma = 1$) (Meiche NE. et al. 2011) 53

Figure III.19 : L'effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge critique de flambement non dimensionnelle (N) d'une plaque carrée ($a = b = 10h$) sous compression biaxiale ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = -1$) (Thai H.T. et Choi D.H. 2012) 54

Figure III.20 : L'effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge critique de flambement non dimensionnelle (N) d'une plaque carrée simplement supportée ($a = b = 10h$) dans différentes conditions de chargement (Thai H.T. et Choi D.H. 2012) 55

Figure III.21 : L'effet du rapport de module en fonction de la charge critique de flambement non dimensionnelle N d'une plaque carrée simplement appuyée ($a = b = 10h$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = 0$) (Thai H.T. et Choi D.H. 2012) 55

Figure III.22 : L'effet du rapport d'épaisseur sur la charge de flambement critique non dimensionnelle (N) d'une plaque carrée simplement appuyée ($a = b$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = 0$) (Thai H.T. et Choi D.H. 2012) 56

Figure III.23 : L'effet du rapport d'aspect sur la charge critique de flambement non dimensionnelle N d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a = 10h$) sous compression uniaxiale le long de l'axe y ($\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 = -1$) (Thai H.T. et Choi D.H. 2012) 57

Figure III.24 : L'effet du rapport d'aspect sur la charge de flambement critique non dimensionnelle N d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a = 10h$) sous compression biaxiale ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = -1$) (Thai H.T. et Choi D.H. 2012) 57

Figure III.25 : Température de flambement critique de la plaque FGM sous l'élévation de la température uniforme par rapport au rapport d'aspect de la plaque. (Lanhe W. 2004). 58

Figure III.26 : Différence température de flambement critique de la plaque épaisse FGM due à une élévation de température non linéaire sur toute l'épaisseur (Lanhe W. 2004)..... 59

Figure III.27 : Températures critiques Λ_{cr} des plaques FG. ($a/h = 2, 5, 10$; $a/b = 1, 2, 3$; $r = s = 1$) (Matsunaga H. 2009) 60

Figure III.28 : Différence de température critique de flambement T_{cr} par rapport à l'indice de loi de puissance k pour différents types de plaques carrées sandwich FGM ; ($a/h = 10$) (Zenkour A.M. et Sobhy M. 2010) 61

Figure III.29 : Différence de température critique de flambement T_{cr} par rapport au rapport d'aspect de la plaque (b/a) pour deux types de plaques sandwich FGM ; ($k = 1, a/h = 10$) (Zenkour A.M. et Sobhy M. 2010)..... 62

Figure III.30 : Différence de température critique de flambement T_{cr} par rapport au rapport côté/épaisseur (a/h) et au rapport d'aspect (b/a) de la plaque sandwich non symétrique (Zenkour A.M. et Sobhy M. 2010) 63

Figure III.31 : Charge de flambement critique des plaques FG sous compression uniaxiale ($R = 0$), biaxiale ($R = 1$) et biaxiale et traction ($R = -1$) en fonction du rapport d'aspect, basée sur la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre (Shariat B.A.S et Eslami M.R 2007)..... 64

Figure III.32 : Changement critique de température de flambement des plaques FG sous élévation de température uniforme et changement de température non linéaire sur toute l'épaisseur, en fonction du rapport d'aspect, basé sur(TSDT) (Shariat B.A.S et Eslami M.R 2007)..... 65

Figure III.33 : Variations des valeurs de changement de température critique pour les plaques métalliques, céramiques et FGM en fonction du rapport h/a , avec tous les profils de composition, sous élévation de température uniforme (Bouazza M. et al. 2010). 66

Figure III.34 : Variations des valeurs de changement de température critique pour les plaques métalliques, céramiques et FGM en fonction du rapport h/a , avec tous les profils de composition sous élévation linéaire de température (Bouazza M. et al. 2010). 66

Chapitre IV

Figure IV.1 : Géométrie de la plaque sandwich à gradation exponentielle reposant sur des fondations élastiques 69

Chapitre V

Figure V.1a : Fréquence adimensionnelle « ω^* » par rapport au rapport « a / h » pour diverses valeurs du paramètre d'inhomogénéité « k » et divers types de plaques carrées sandwich EGM (1-1-1) simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques « $K_0=J_0=100$ » 83

Figure V.1b : Fréquence adimensionnelle « ω^* » par rapport au rapport « a/h » pour diverses valeurs du paramètre d'inhomogénéité « k » et divers types de plaques carrées sandwich EGM (2-1-2) simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques « $K_0=J_0=100$ »..... 84

Figure V.2 : Fréquence adimensionnelle en fonction du rapport (a/h) des plaques carrées sandwich E-FG (2-1-2) reposant sur la fondation élastique de Winkler avec diverses conditions aux limites ($K_0 = 100, k = 2$). 85

Figure V.3 : Fréquence adimensionnelle « ω^* » par rapport au rapport d'aspect (b/a) de la plaque sandwich E-FG simplement appuyée et encastrée (1-2-1) pour différentes valeurs de rigidité de la fondation (K_0) et (J_0) ($a/h = 10, k = 2$) 86

Figure V.4a : Charge critique de flambement « N » en fonction du rapport (a/h) pour différentes valeurs du paramètre d'inhomogénéité (k) et différents types de plaques carrées sandwich EGM (1-1-1) simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques ($K_0 = J_0 = 10, \xi = 1, a = b$) 89

Figure V.4b : Charge critique de flambement « N » en fonction du rapport (a/h) pour différentes valeurs du paramètre d'inhomogénéité (k) et différents types de plaques carrées sandwich EGM (2-1-2) simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques ($K_0 = J_0 = 10, \xi = 1, a = b$)..... 89

Figure V.5 : Charge critique de flambement « N » en fonction du rapport (a/h) des plaques carrées sandwich EGM (2-1-2) reposant sur la fondation élastique de Winkler avec diverses conditions aux limites ($K_0 = 100, k = 2, \xi = 1$) 90

Figure V.6 : Charge critique de flambement « N » en fonction du rapport d'aspect (b/a) de la plaque sandwich E-FG simplement appuyée et encastrée (1-1-1) pour différentes valeurs de rigidité de la fondation « K_0 » et « J_0 » ($a/h = 10, k = 2, \xi = 1$) 91

Figure V.7 : Charge critique de flambement « N » par rapport au rapport « a/h » de la plaque carrée sandwich E-FG simplement appuyée et encastrée (1-2-1) pour différentes valeurs de « ξ » ($K_0 = J_0 = 10, k = 2$) 92

Liste des tableaux

Chapitre IV

Tableau IV-1: Les fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$	76
--	----

Chapitre V

Tableau V-1: Propriétés matérielles du métal et de la céramique	80
---	----

Tableau V-2: Comparaison de la fréquence adimensionnelle « ω^* » des plaques carrées sandwich EGM simplement appuyées « $k=1,5$ » reposant sur les fondations élastiques de Pasternak	81
--	----

Tableau V-3: Comparaison de la fréquence adimensionnelle « ω^* » des plaques sandwich EGM (1-1-1) avec diverses conditions aux limites ($b/a = 2$, $K_0 = J_0 = 10$)	82
--	----

Tableau V-4: Comparaison de la charge critique de flambement « N » de plaques carrées sandwich EGM simplement appuyées « $k = 0,5$ » reposant sur les fondations élastiques de Pasternak « $\xi = 1$ »	87
--	----

Tableau V-5: Comparaison de la charge critique de flambement « N » de plaques sandwich EGM (1-1-1) avec diverses conditions aux limites ($b/a = 2$, $K_0 = J_0 = 10$)	88
--	----

ملخص

في هذه الدراسة، تم اقتراح نظرية جديدة مثلثية مبتكرة للتشوه بواسطة القص بثلاثة مجاهيل وذلك لاستجابات الالتواء واهتزاز الصفائح الساندويش المتدرجة الأسيية المرتكزة على الوسائط المرنة في ظل ظروف حدية مختلفة. بالإضافة إلى ذلك، السمة الأساسية لهذه الصيغة النظرية هي الأخذ بعين الاعتبار التشوه بالقص، إنها تشمل على ثلاثة مجاهيل فقط في مجال الانتفال كما في حالة النظرية الكلاسيكية للصفائح (CPT)، على عكس خمسة كما في نظرية التشوه بالقص من الدرجة الأولى (FSDT) ونظرية التشوه بالقص من الدرجة الأعلى (HSDT).

نعتبر أن خصائص المواد الخاصة بوجوده صفيحة الساندويش تختلف في اتجاه السماكة بواسطة قانون التوزيع الأسي تبعاً لأجزاء الحجم للمكونات. يتم الحصول على معادلات الحركة باستخدام مبدأ هاملتون. تم الحصول على نتائج عددية لتحليل الالتواء والاهتزاز الحر لصفائح الساندويش المتدرجة بشكل كبير في ظل ظروف حدية مختلفة ومناقشتها. أكدت الدراسات والتحقق أن النظرية الحالية للتشوه بواسطة القص بثلاثة مجاهيل يمكن مقارنتها بنظريات التشوه بواسطة القص ذات الدرجة الأعلى والتي تحتوي على عدد أكبر من المجاهيل.

الكلمات المفتاحية:

مواد متدرجة وظيفياً، صفيحة الساندويش، نظرية ذات 3 مجاهيل، ظروف حدية مختلفة، أسس مرنة، اهتزاز حر، شحنة الانحناء.

Abstract

In this study, a new innovative three unknown's trigonometric shear deformation theory is proposed for the buckling and free vibration responses of exponentially graded sandwich plates resting on elastic mediums, Winkler-Pasternak type, under various boundary conditions.

The key feature of this theoretical formulation is that, in addition to considering shear deformation effect, it has only three unknowns in the displacement field as in the case of the classical plate theory (CPT), contrary to five as in the first shear deformation theory (FSDT) and higher-order shear deformation theory (HSDT).

Material characteristics of the sandwich plate faces are considered to vary within the thickness direction via an exponential law distribution as a function of the volume fractions of the constituents. Equations of motion are obtained by employing Hamilton's principle.

Numerical results for buckling and free vibration analysis of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions are obtained and discussed.

As a result of this research, it was confirmed that the present three -unknown shear deformation theory is comparable with higher-order shear deformation theories which containing a greater number of unknowns.

Keywords:

Functionally graded materials, sandwich plates, a 3-unknown theory, various boundary conditions, elastic foundations, free vibration, buckling loads.

Résumé

Dans cette étude, une nouvelle théorie innovante de déformation de cisaillement trigonométrique à trois inconnus est proposée pour les réponses de flambement et de la vibration libre des plaques sandwich à gradation exponentielle reposant sur des assises élastiques, de type Winkler-Pasternak, pour diverses conditions aux limites.

La caractéristique essentielle de cette formulation théorique est que, en plus de considérer l'effet de déformation de cisaillement, elle ne comporte que trois inconnus dans le champ de déplacement comme dans le cas de la théorie classique des plaques (CPT), contrairement à cinq inconnus utilisés dans la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

On considère que les caractéristiques des matériaux des faces de la plaque sandwich varient dans la direction de l'épaisseur par une loi de distribution exponentielle en fonction des fractions volumiques des constituants. Les équations de mouvement sont obtenues en employant le principe de Hamilton.

Des résultats numériques pour l'analyse de flambement et de la vibration libre des plaques sandwich à gradation exponentielle, pour diverses conditions aux limites, sont obtenus, comparés et discutés.

A l'issue de cette recherche, on a confirmé que les résultats fournis par la présente théorie de déformation de cisaillement à trois inconnus sont comparables avec les résultats donnés par les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur contenant un grand nombre d'inconnus.

Mots clés :

Matériaux fonctionnellement gradués, plaque sandwich, une théorie à 3 inconnus, diverses conditions aux limites, fondations élastiques, vibration libre, charges de flambement.

Introduction générale

Les structures sandwichs dont l'utilisation a continué d'augmenter depuis un demi-siècle, sont les composites les plus utilisés en tant que pièces de structures résistantes, grâce à des propriétés de flexion supérieures à celles des composites monolithiques ou stratifiés.

A l'origine, les sandwichs étaient considérés comme des matériaux haute technologie (high-tech) réservés aux secteurs de pointe comme l'industrie aéronautique où ils ont été introduits dès la seconde guerre mondiale.

Leurs propriétés mécaniques exceptionnelles de flexion viennent de leur géométrie particulière en « sandwich ». Ces structures sont composées de deux peaux (ou semelles) qui enserrent une âme (ou cœur) définie par une couche de matériau plus épaisse.

Cependant, les composites sandwichs présentent quelques inconvénients. Ils sont sujets aux problèmes d'endommagement par décohésion qui constituent leur principal point faible.

Pour augmenter la résistance des plaques sandwich, le concept d'un matériau fonctionnellement gradué (FGM) est activement exploré dans la conception des plaques sandwich. Le FGM fait référence à un matériau composite hétérogène avec une variation de composition en gradient des constituants d'une surface du matériau à l'autre, ce qui se traduit par une variation continue des propriétés du matériau.

Actuellement, c'est la meilleure manière pour combiner deux matériaux, en conservant leurs propriétés. Elle consiste à les assembler d'un pourcentage variable sur la section transversale, appelée matériau à gradation fonctionnelle (FGM). Il est accepté comme un meilleur moyen de collage plutôt que de les déposer directement sans gradation.

Par cette technique, les deux matériaux préservent leurs meilleures propriétés, comme la haute résistance, la rigidité élevée, la résistance à haute température, la faible densité de la céramique, la ténacité et la malléabilité de l'acier.

Ces dernières années, plusieurs études ont été menées et appliquées au domaine de l'ingénierie afin d'analyser les comportements statiques et dynamiques des plaques FG. Cette

analyse a conduit au développement de diverses théories sur ce type de plaques.

Dans ce contexte, nous présenterons un travail pour étudier le comportement dynamique et en flambement des plaques sandwichs fonctionnellement graduées (FGM), fondées sur des assises élastiques. Une théorie trigonométrique de déformation de cisaillement à trois variables a été utilisée contrairement à d'autres théories rencontrées dans la littérature, employant quatre variables ou plus. Plusieurs conditions aux limites ont été prises en compte. Les caractéristiques de la plaque sandwich sont considérées variées suivant l'épaisseur par une loi de distribution exponentielle. Les équations de mouvement ont été obtenues par le principe d'Hamilton.

Ce travail s'articule autour de cinq chapitres :

Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés (FGM), l'historique de leur développement, les différents types et leurs caractéristiques ainsi que leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre comporte une analyse bibliographique sur les différents travaux de littérature consacrés à l'analyse des structures en FGM sous différents types de chargement.

Le troisième chapitre sera consacré à diverses théories des plaques développées dans la littérature pour l'amélioration du champ de déplacement à travers l'épaisseur des plaques.

Le quatrième chapitre est réservé à l'étude analytique du flambement et de la vibration libre des plaques sandwichs à gradation exponentielle reposant sur des fondations élastiques dans diverses conditions aux limites.

Dans le cinquième chapitre nous présenterons les différents résultats obtenus dans le but de déterminer les fréquences propres de vibration des plaques FG. Ces résultats présentés dans des tableaux et sur des graphes ont été commentés comparés et discutés. Ils ont été validés avec des résultats fournis par d'autres recherches rencontrées dans la littérature.

Enfin, la thèse est clôturée par une conclusion générale rassemblant les principaux points à retenir à l'issue de ce travail de recherche. Des perspectives des travaux futurs seront données à la fin de ce travail.

Chapitre I : Généralités sur les matériaux a gradient de propriétés (FGM)

I.1 Introduction

Le matériau à gradient de propriétés FGM est un type de matériaux composites classé selon leur structure graduée. Plus précisément, les FGM sont caractérisés par le changement progressif de la composition ou de la structure du matériau. L'intention d'avoir une variation dans les propriétés du matériau, ainsi que le changement de la composition et la direction structurelle. Il s'agit d'un changement progressif des propriétés chimiques, de la structure, de la taille des grains, de la densité et d'autres propriétés physiques d'une couche à une autre.

Les FGM ont une interface graduée plutôt qu'une interface pointue entre les deux matériaux différents. Aucun changement évident ne peut avoir lieu dans leur composition chimique si la transition est progressive. Les écarts dans la propriété d'un point du matériau à un autre seront limités.

L'objectif de l'utilisation de FGM est d'éliminer la limite macroscopique dans les matériaux tels que : les propriétés mécaniques, physiques et chimiques du matériau changent et ne présentent aucune discontinuité dans le matériau. Ainsi, ces matériaux présentent des propriétés mécaniques supérieures par rapport aux matériaux basiques (monolithiques) et composites.

I.2 Histoire des matériaux à gradient de propriétés

L'idée du gradient de composition et de structure dans la microstructure des matériaux a été proposée pour la première fois pour les composites et les matériaux polymères en 1972 (Bohidar SK et al.,2014).

En 1972 Bever a étudié divers composites à gradient, il a investigué sur les propriétés globales des matériaux et il a examiné les applications potentielles des composites gradués.

(M. Shen et M. B. Bever, 1972) ont rapporté que la gradation du matériau polymère pourrait être induite par la variation de la nature chimique des monomères, la constitution moléculaire des polymères et la structure ou la morphologie supramoléculaire des polymères. Mais la conception, la fabrication et l'évaluation de cette structure graduée n'ont pas été

étudiées.

Jusqu'à 1985 au Japon, l'objectif était de fabriquer un matériau ayant une résistance thermique et des propriétés mécaniques améliorées en changeant progressivement les compositions pour résister à une forte température. Le concept de ce type de matériau composite a été proposé, afin de réduire les contraintes thermiques dans les revêtements céramiques (Koizumi M., Niino M., 1995 ; Shanmugavel, P. et al., 2012 ; Atai, A.A. et al., 2012 ;).

En 1987, le fameux plan de recherche sur les FGM, «études fondamentales sur la relaxation des contraintes thermiques en adaptant des structures graduées» a été lancé dans la barrière thermique d'un avion spatial au Japon. Les capacités de la résistance à une température de surface de 1700°C et d'un gradient de température de 1000°C sur une section de 10 mm seulement ont été obtenues par les FGM en tant que barrière thermique. Les résultats et le développement de ce projet de recherche ont été diffusés dans le monde entier via des articles, des médias et des conférences internationales.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont été conçus comme des matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion. Maintenant, ils sont également considérés comme des matériaux structurels potentiels pour les futurs engins spatiaux à grande vitesse et, récemment, sont de plus en plus pris en compte de nombreuses structures d'ingénierie.

En raison de leurs propriétés de matériaux classées uniques, les FGM ont attiré une grande attention des chercheurs dans plusieurs domaines : en biomécanique, technologie de capteur, optique et dans diverses constructions au cours des dernières décennies (Okamura 1991).

Le concept des FGM à l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations des futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques.

A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à

s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

I.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés

Le concept général des matériaux fonctionnellement gradués est celui des matériaux avec des fonctions graduées à l'intérieur. Les FGM d'origine étaient des matériaux mono-corps dans lesquels leur coefficient de dilatation thermique était progressivement modifié entre les faces avant et arrière. Ceci a été réalisé en changeant leur composition du métal à la céramique.

Le but des FGM était de relâcher la contrainte thermique interne pour les températures élevées. La (figure I.1) montre la différence de compositions et de propriétés entre un matériau composite ordinaire et le FGM.

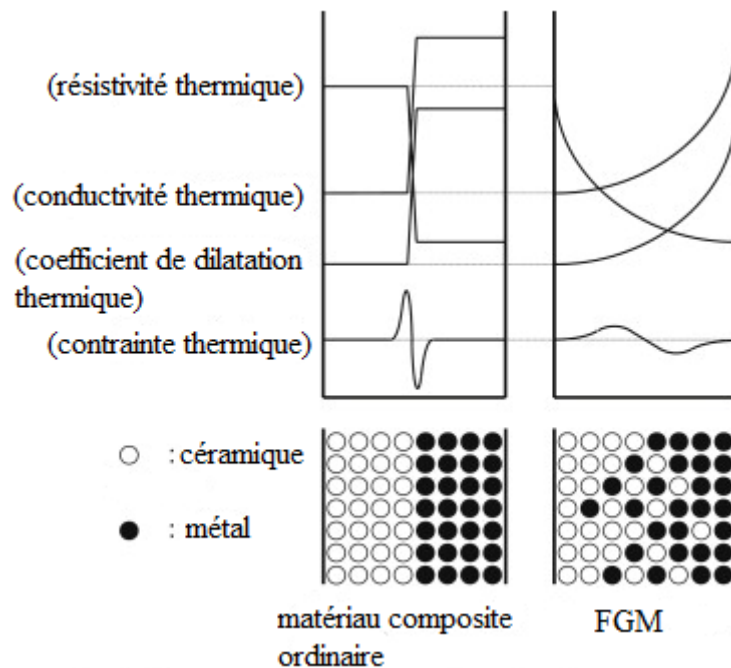


Figure I.1: Structures et propriétés de matériau composite ordinaire et de FGM (Yoshikazu Shinohara, 2013)

Il existe une interface distincte entre les métaux et les céramiques dans un matériau composite ordinaire, mais pas dans un matériau FGM. Cette différence correspond à la répartition des propriétés telles que le coefficient de dilatation thermique, la conductivité thermique et la résistance thermique.

Un matériau composite ordinaire contient un changement brusque de propriétés à l'interface, tandis qu'un FGM présente un changement progressif à l'intérieur. La différence des coefficients de dilatation thermique à l'interface provoque des contraintes thermiques internes

pour les températures élevées, conduisant parfois à la destruction des interfaces. Un FGM réduit la contrainte thermique près de 30% et peut empêcher la destruction de l'interface.

Les FGM ont couvert non seulement les matériaux résistants à la chaleur, mais également les matériaux de structure, les biomatériaux, les semi-conducteurs et les matériaux d'électrodes.

Les FGM possèdent une microstructure, une composition chimique ou un ordre atomique dépendant de la position, cela peut entraîner une variation continue des propriétés du matériau avec la position (Neubrand, 2001), telles que les propriétés mécaniques, électriques et thermiques.

Les deux structures de base de la gradation sont illustrées sur la (figure I.2). Pour la structure à gradation continue, deux phases de matériau différentes changent progressivement d'un côté à l'autre (figure I.2(a)), tandis que dans la (figure I.2(b)), les phases du matériau changent de manière discontinue. La gradation spatiale peut apparaître à un niveau global ou local.

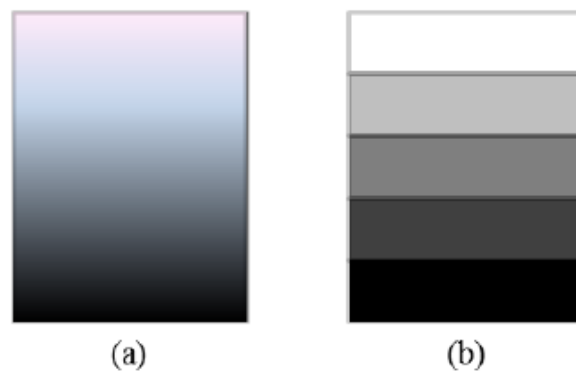


Figure I.2: Gradation globale : (a) structure continue ; (b) structure discontinue

Dans une gradation globale (Figure I.2), la variation des propriétés s'étend sur la majeure partie du matériau. Au contraire, la gradation locale est limitée à un emplacement spécifique dans le matériau, tel que le revêtement sur la surface ou le joint dans la région interfaciale comme le montre la (figure I.3) (Miyamoto et al., 1999).

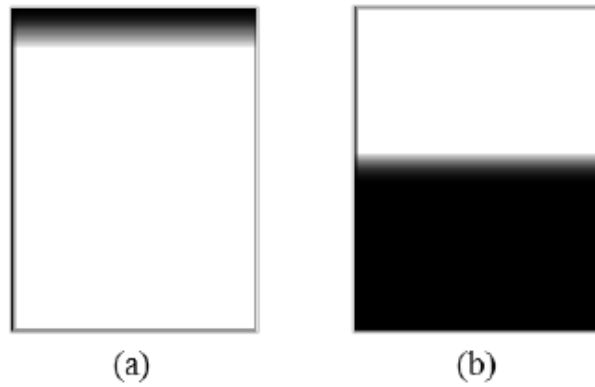


Figure I.3 : Gradation locale : (a) surface ; (b) joint

En termes de microstructures, il existe quatre types généraux de gradation : fraction volumique, forme, orientation et taille du matériau, comme illustré à la (figure I.4). La gradation du matériau pourrait être décrite comme une fonction de transition, cette dernière est la relation entre la position spatiale et l'état de gradation.

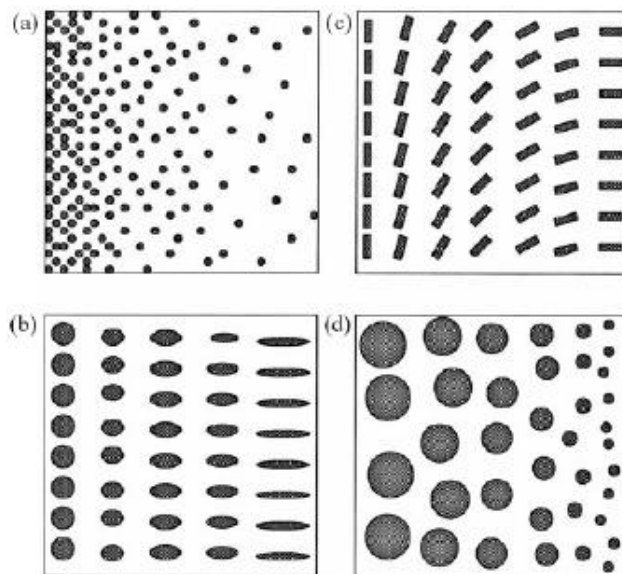


Figure I.4. : Différent types de FGM basé sur le gradient : (a) fraction volumique ; (b) forme ; (c) orientation ; (d) taille du matériau (Neubrand, 2001)

I.4 Différents types de FGM

Les FGM peuvent généralement être classés en trois groupes différents de gradient : composition, microstructure et porosité comme le montre la figure I.5 (Mahmoud D, Elbestawi M., 2017).

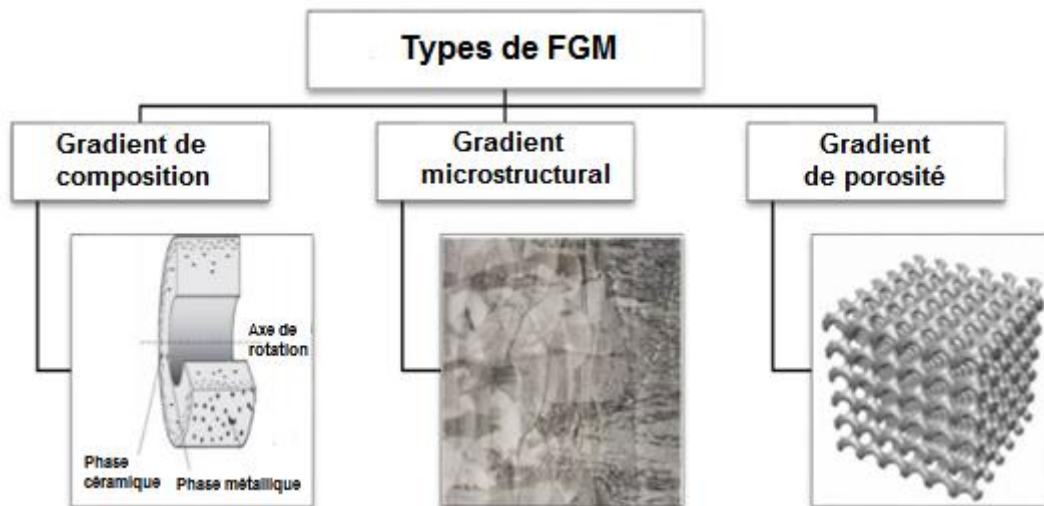


Figure I.5 : Différents types de gradient FGM (Mahmoud D, Elbestawi M., 2017)

I.4.1 FGM à gradient de composition

C'est le type de FGM, où la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multiphasé. Un FGM monophasé est conçu lorsque le composite est produit à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase à l'autre. Cela se produit généralement pendant le processus de frittage (Bharti, I. et al., 2013). Le changement progressif dans la distribution des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation d'un matériau fonctionnellement gradué.

Les types les plus couramment utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multiphase (Mahamood, R.M.et al.,2012 ; 2015). Les phases et la composition chimique sont amenées à varier dans le volume en vrac du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à un autre, il en résultera différentes phases avec des compositions chimiques différentes qui aideraient à atteindre l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçu.

Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production du FGM consiste à mettre la composition de poudre requise couche par couche, suivi par un compactage de la poudre et ensuite d'un frittage. Pendant le processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Celles-ci varieraient en fonction de la position spatiale dans le FGM.

I.4.2 FGM à gradient de porosité

Le FGM à gradient de porosité est caractérisé par les changements de localisation spatiale dans le matériau en vrac. La porosité du matériau est amenée à changer avec le changement de position spatiale dans le matériau en vrac (Mota AF, Loja MAR, 2019). La forme et la taille des pores sont conçues et variées en fonction des propriétés requises du FGM.

Les tailles de particules de la poudre peuvent être mesurées en faisant varier les tailles de particules de pores utilisées pendant la gradation à différentes positions dans le matériau en vrac (Gabbrielli R. et al. 2008).

Ce type de matériau fonctionnellement gradué est très important pour les applications biomédicales. Les matériaux naturels qu'ils ont l'intention de remplacer, consiste en une porosité fonctionnellement graduée. La porosité graduée aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant, et elle contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés.

Le gradient de porosité dans un FGM a également un effet sur la résistance à la traction et le module d'Young du matériau. Un certain nombre de FGM à gradient de porosité ont été rapportées dans la littérature pour une application biomédicale (Thieme, M. et al., 2001 ; Suk, M.J. et al., 2003 ; Li, R. et al., 2010)

I.4.3 FGM à gradient microstructural

Le concept de ce type de FGM est de fabriquer un matériau composite de deux ou plusieurs phases constitutives, en faisant varier la microstructure d'un matériau à un autre avec un gradient spécifique finit. Le produit final porte les meilleures propriétés des deux matériaux parents (Suresh S et al., 1998).

Une gradation microstructurale peut être obtenue pendant le processus de solidification. La surface du matériau s'éteigne. Dans ce type, le noyau du même matériau peut se refroidir lentement, cela permet de générer différentes microstructures en surface à l'intérieur du matériau (Popovich VA et al., 2016 ; Zhang X et al., 2018).

La transition douce pour ce type de FGM peut être mesurée à partir de la variation de la dureté, de la ténacité à la rupture, et de l'adhérence cellulaire sur la section transversale.

I.5 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la (figure I.6). Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau.

Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables. Elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, les matériaux de conversion d'énergie, le nucléaire et les semi-conducteurs.

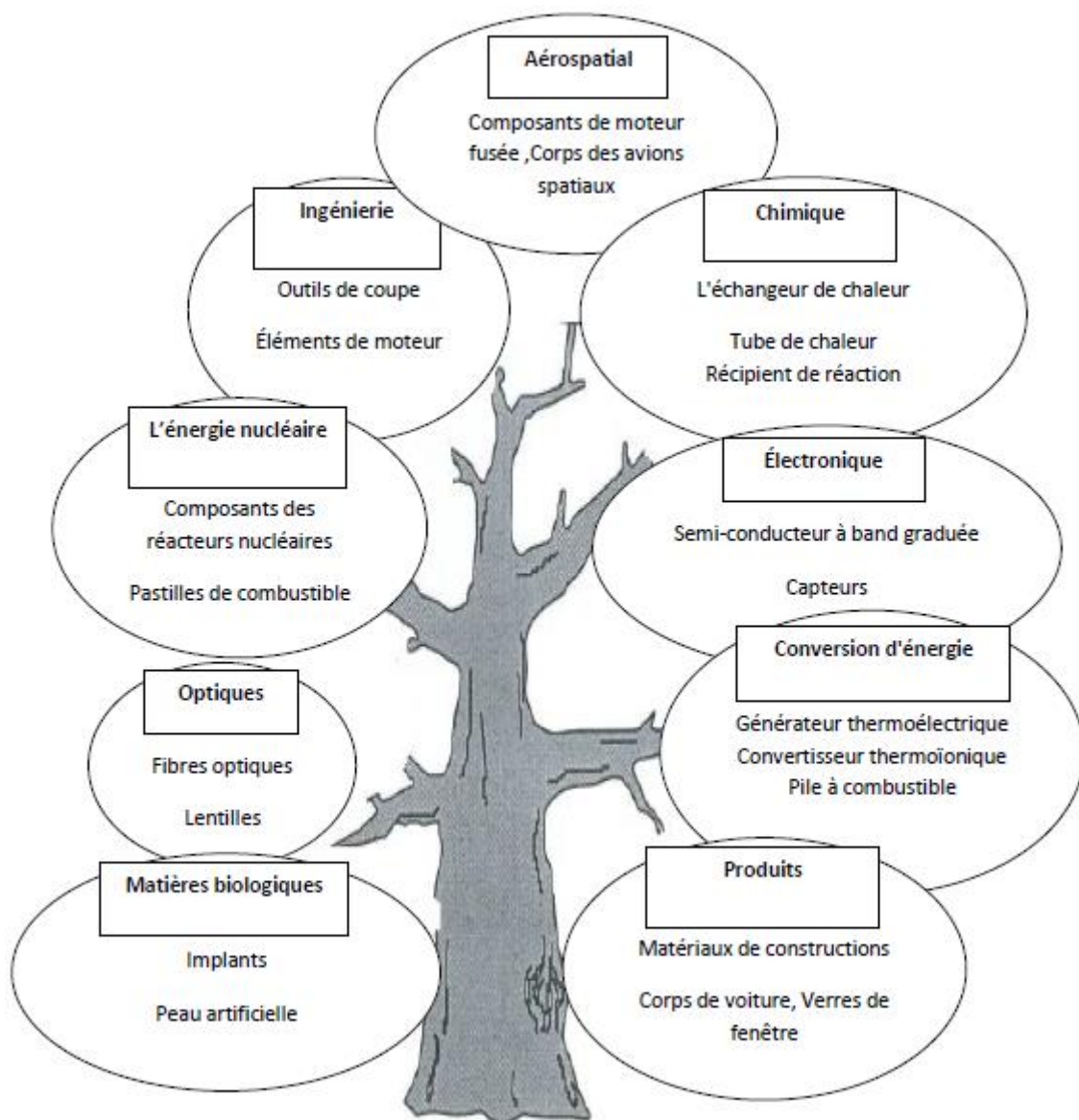


Figure I.6 : Les principaux domaines d'application des FGM (Miyamoto Y., 1999)

I.6 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués sont généralement composés de deux matériaux, avec des propriétés structurales et fonctionnelles différentes. Les caractéristiques du matériau sont indisponibles tel que la forme, la taille et la distribution. Le module d'élasticité est évalué sur la base de la forme et de la distribution de la fraction volumique.

À cet effet, des modèles micromécaniques sont apparues dans le but de définir les propriétés des matériaux macroscopiquement homogènes. Les modèles d'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM les plus souvent utilisés dans la littérature sont le modèle de (Mori et Tanaka, 1973), le modèle cohérent d'Hill (Hill, R. 1965) et l'approche de la loi de mélanges (Markworth et al. 1995).

I.6.1 La loi des mélanges

Une des propriétés des matériaux fonctionnellement gradués est déterminée par le paramètre (P), ce dernier varie le long d'une direction en fonction des fractions volumiques et des propriétés des matériaux qui le composent.

Dans les plaques FGM la direction est variable suivant le sens de l'épaisseur. (P) est représenté par le module d'élasticité, la masse volumique et le coefficient de Poisson. (P) se présente sous la formule suivante :

$$P(z) = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (\text{I.1a})$$

(P_1, P_2) et (V_1, V_2) sont les propriétés du matériau et les fractions volumiques, la somme des fractions volumiques est égale à 1 :

La fraction volumique (V_1) a une distribution de la loi de puissance suivante (Markworth et al, 1995) :

$$V_1 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{I.1b})$$

Puisque $V_1 + V_2 = 1$, donc :

$$V_2 = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{I.1c})$$

Avec : h est l'épaisseur de la plaque et (n) est l'indice de loi de puissance.

Si en prend par exemple la (figure I.7), dont les matériaux (V_1) et (V_2) sont de la céramique et du métal. La couche de céramique représente la surface supérieure ($z = h/2$). La couche du métal représente la surface inférieure de la plaque ($z = -h/2$).

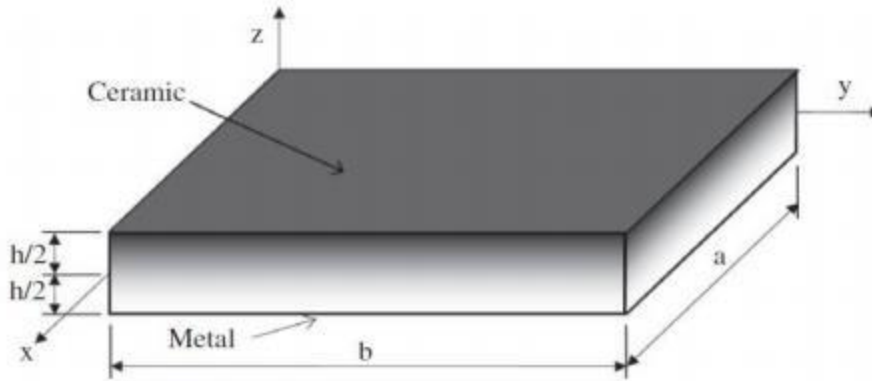


Figure I.7 : Géométrie d'une plaque en FGM

Le plan de la plaque est défini par les coordonnées (x) et (y). L'axe (z) est perpendiculaire au plan moyen de la plaque, dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés des matériaux : le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents.

Le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption suivant la direction de d'épaisseur, $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$, $\nu = \nu(z)$. L'effet du coefficient de Poisson sur la déformation, est beaucoup moins important que celui du module de Young (Delale et Erdogan,1983). On suppose que le coefficient de Poisson de la plaque FGM est constant dans tous les points de la plaque.

Le module de Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM. Cette variation suit une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou une fonction sigmoïde (S-FGM).

I.6.2 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM obéit à une loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.2})$$

Où (k) est un paramètre du matériau et (h) est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction

de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = V(z).E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (I.3)$$

Où (E_1) et (E_2) sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation de la fraction volumique dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure I.8).

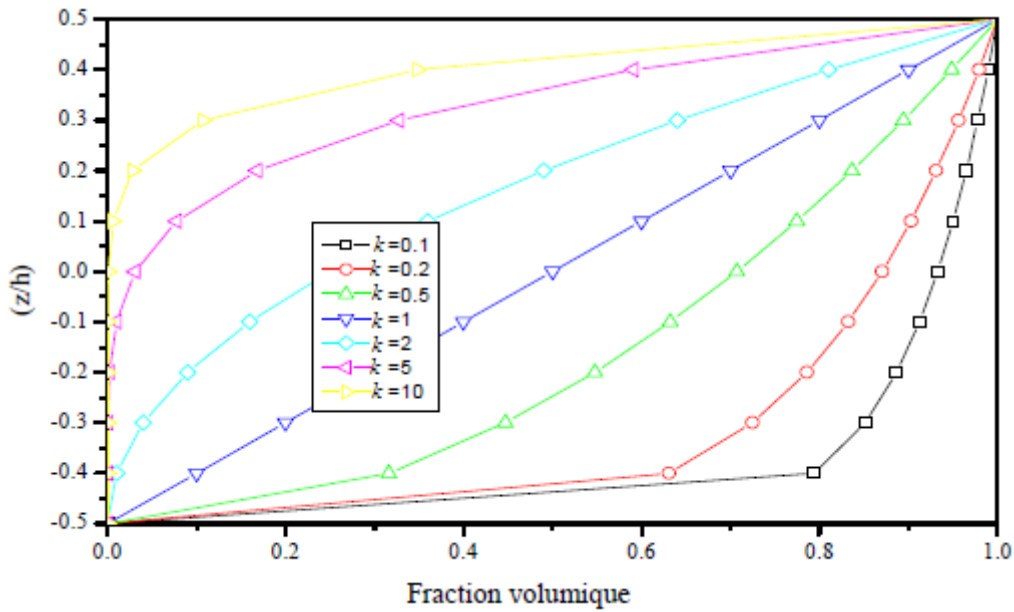


Figure I.8 : La variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.6.3 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Si on ajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. (Chi et chung 2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.4a)$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.4b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5b})$$

La (figure I.9) montre la variation de la fraction volumique selon les équations (I.5a) et (I.5b) avec des distributions sigmoïdes de la plaque S-FGM.

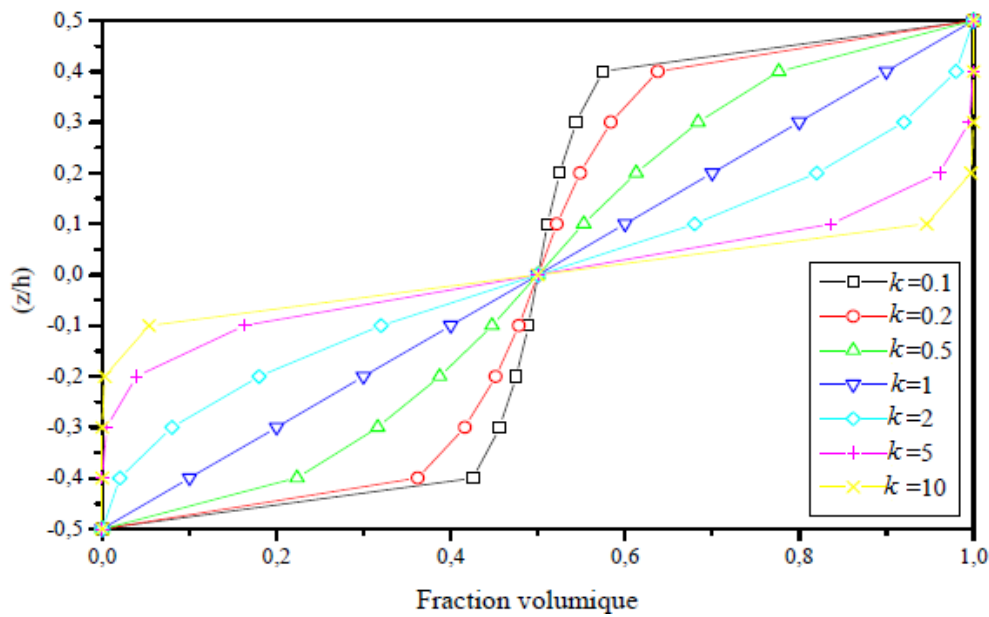


Figure I.9: La variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.6.4 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM. La fonction exponentielle est donnée par (Delale 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{I.6a})$$

Avec ;

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.6b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la (figure I.10).

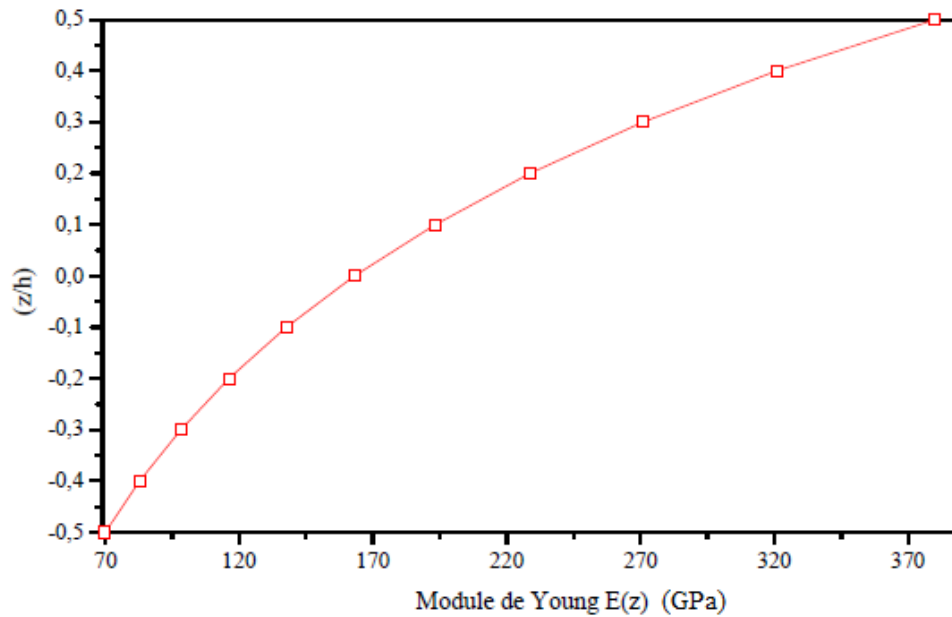


Figure I.10 : La variation du module de Young de la plaque E-FGM

I.7 Les propriétés thermiques des plaques FGM

L'analyse thermique des plaques fonctionnellement graduées peut être effectuée par modélisation appropriée de la distribution de la température. Généralement, les propriétés du matériau dans les FGM varient à travers l'épaisseur de la plaque tandis que dans le plan elles seront homogènes. Par conséquent, on suppose que les variations de température ne se produisent que dans le sens de l'épaisseur et sont évaluées de différentes manières. Certaines des méthodes les plus utilisées dans la littérature seront discutées dans le (chapitre III).

I.7.1 Variation constante et linéaire

Ce type de répartition de la température a été utilisé par plusieurs chercheurs pour l'analyse des plaques FGM et des coques. On suppose que la température au sommet (T_1) et du bas (T_0) était la même dans la distribution constante, La distribution linéaire était différente en fonction de la variation d'épaisseur, la température peut être exprimée comme suit :

$$T(x, y, z) = T_0(x, y) + (T_1(x, y) - T_0(x, y)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (I.7)$$

Où, $T(x, y, z)$ est la température en tout point de l'épaisseur de la plaque dans la direction de coordonnées z .

I.7.2 Equation de conduction thermique

La variation non linéaire de la température est habituellement obtenue à partir de la solution de l'équation de conduction thermique.

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.8)$$

Où q est la source de chaleur interne ou le flux de chaleur, k (W/m^3) est la conductivité des matériaux et α (m^2/s) est la diffusivité thermique des matériaux. L'analyse statique (avec ou sans flux thermique, q) peut être effectuée en négligeant la vitesse de changement de température par rapport au temps ($\partial T/\partial t$).

La plupart des études thermoélastiques bidimensionnelles ont été réalisées en utilisant une équation de conduction thermique unidimensionnelle (Noda N. 1999 ; Noda N. et al. 2012 ; Jin, Z. H., 2002). Ceci est dû à l'hypothèse d'homogénéité du matériau dans le plan de la plaque qui ne varie que dans le sens de l'épaisseur.

L'équation statique à chaleur sans flux thermique est donnée par :

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (I.9)$$

I.7.3 Distribution polynomiale

Grace à des études récentes, le profil de température $T(x, y, z)$ dans le sens de l'épaisseur a été défini en fonction de la description graduelle du champ de déplacement. Les termes d'ordre élevé du champ de déplacement sont également inclus pour saisir l'effet de la distribution non linéaire.

La forme polynomiale de la variation de température à travers l'épaisseur de la plaque peut être exprimée par :

$$T(z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{f(z)}{h} T_3(x, y) \quad (I.10)$$

Où (T_1) , (T_2) et (T_3) sont les termes de charge thermique à travers l'épaisseur de la plaque et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse, qui peut être supposée nul pour les modèles basés sur la théorie de la déformation au cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie classique des plaques (CPT).

(Akbarzadeh A.H. et al. 2012) a considéré la forme polynomiale du champ de température avec quatre variables de charge thermique basé sur la théorie de déformation de

cisaillement de troisième ordre (TSDT) sous la forme suivante :

$$T(z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \left(\frac{z}{h}\right)^2 T_3(x, y) + \left(\frac{z}{h}\right)^3 T_4(x, y) \quad (\text{I.11})$$

I.8 Conclusion

Il en résulte de ce chapitre, que la principale limitation de l'utilisation d'un matériau FGM dans un certain nombre d'industries est en raison du coût élevé de production de ce matériau. Le domaine d'application du FGM pourrait être augmenté si le processus de fabrication pouvait être simplifié et le coût de fabrication pourrait être réduit.

Les différentes lois qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau (module de Young et coefficient de poisson, masse volumique et la distribution de la température) suivant l'épaisseur d'une plaque, sont des lois de type : puissances, exponentielles, sigmoïde et la loi de la conduction thermique.

Chapitre II : Théories des plaques

II.1 Introduction

Les plaques sont des éléments porteurs de charges, souvent soumises à des forces de compression et/ou de cisaillement importantes dans le plan. Diverses théories sont disponibles pour décrire le comportement statique et dynamique des plaques.

En fonction de la géométrie de la plaque et des propriétés du matériau, il est intéressant d'utiliser une théorie des plaques plutôt qu'une autre. Comprendre les différences entre les théories et leur application intéresse à la fois les chercheurs travaillant au développement de nouvelles connaissances sur les plaques.

II.2 Phénomène de cisaillement transverse

Le cisaillement transverse est un phénomène propre aux matériaux présentant des propriétés mécaniques anisotropes. Ainsi, plus l'anisotropie est élevée, plus les effets du cisaillement transverse sont importants. Ce phénomène est provoqué lors de fortes sollicitations engendrant des contraintes de cisaillement prépondérantes dans la structure. Un de ces effets est le gauchissement des sections induit par des contraintes de cisaillement transverse importantes.

Le gauchissement des sections entraîne une augmentation de l'amplitude des déplacements dans la structure, et peut entraîner une rupture mécanique anticipée. Ainsi, en fonction de la sollicitation considérée, il peut s'avérer indispensable de prendre en compte le cisaillement transverse dans le dimensionnement mécanique de pièces composites. Dans cette optique, plusieurs théories ont été développées pour la prise en compte du cisaillement transverse, sur la base de la cinématique issue de la théorie des plaques. Celles-ci sont présentées dans les sections suivantes.

II.3 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie de la petite déformation de la flexion des plaques minces est connue sous le nom de (CPT) et est basée sur des hypothèses similaires à celles utilisées dans la théorie d'Euler – Bernoulli (ou théorie classique des poutres).

Les hypothèses fondamentales adoptées du Kirchhoff – Love ou (CPT), dans lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. La déformation de la

plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan ; ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces (Ashton et Whitney (1970), Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959)).

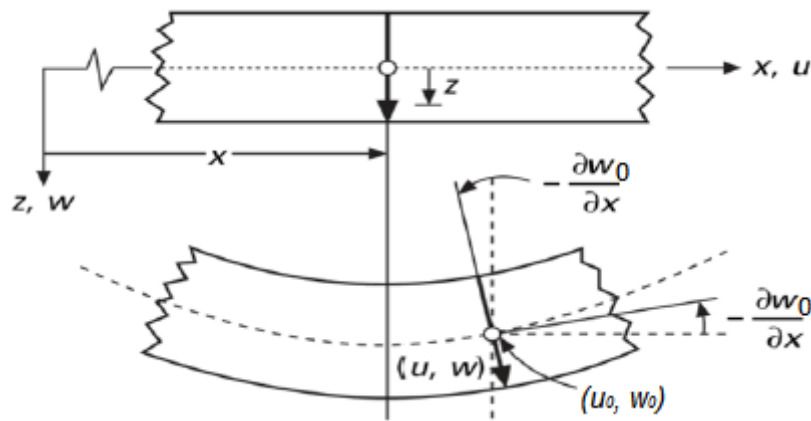


Figure II.1 : Déformation d'une normale transversale selon la théorie classique des plaques

Ces hypothèses donnent des résultats qui ne diffèrent pas significativement de ceux obtenus en utilisant la théorie tridimensionnelle de l'élasticité pour une grande majorité des problèmes de plaques minces.

La théorie des plaques de Kirchhoff (CPT) est basée sur le champ de déplacement :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{II.1c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$) (figure II.1).

Plusieurs études ont été réalisées et appliquées au domaine de l'ingénierie pour analyser le bon comportement en flexion des plaques composites en utilisant la théorie classique des plaques (CPT). La (CPT) néglige l'effet de la déformation de cisaillement transverse et fournit

des résultats acceptables pour les structures minces fonctionnelles graduées (FG) (Abrate 2008; Mohammadi et al. 2010).

II.4 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (Reissner-Mindlin) (FSDT)

Une théorie des plaques de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) a été développée par (Reissner 1945) et (Mindlin 1951), en supprimant la condition dans laquelle les normales transversales restent perpendiculaires à la surface médiane après déformation. On prend en compte l'effet de la déformation transversale de cisaillement pour l'analyse des plaques FG épaisses et moyennement épaisses.

La FSDT nécessite un facteur de correction du cisaillement approprié afin de satisfaire la condition de la nullité de la contrainte de cisaillement aux bords libres de la plaque (Ferreira et al. 2009).

Les facteurs de correction de cisaillement dépendent non seulement des paramètres géométriques, mais également des charges appliquées et des conditions aux limites de la plaque.

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \quad (\text{II.2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \quad (\text{II.2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{II.2c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$) ; ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale de la section transversale par rapport aux axes (x) et (y) respectivement (figure II.2).

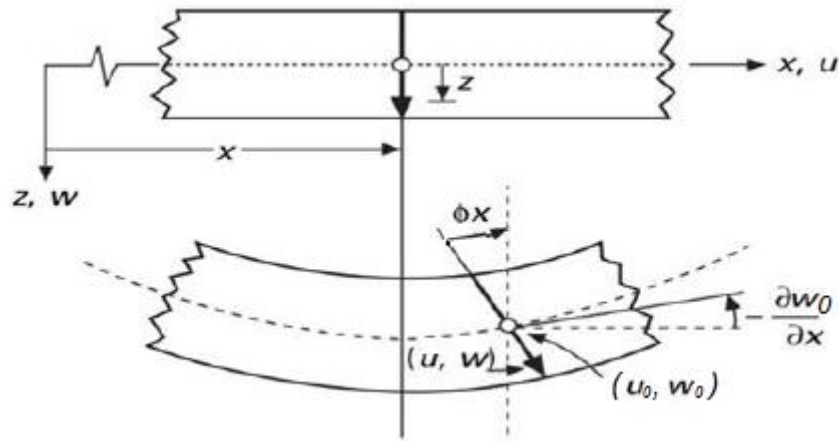


Figure II.2 : Déformation d'une normale transversale selon la théorie du premier ordre des plaques

Pour les plaques minces, les fonctions de rotation ϕ_x et ϕ_y sont écrites sous la forme :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

II.5 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élève (HSDT)

La théorie d'ordre élève (HSDT) est basée sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, contrairement aux théories (CPT et FSDT) qui sont basées sur une distribution linéaire des champs de déplacement suivant l'épaisseur.

La (HSDT) tient compte des effets de déformation de cisaillement et satisfont les contraintes de cisaillement transversales nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, par conséquent, un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

La théorie d'ordre élève (HSDT) est basée sur le champ de déplacement

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \quad (\text{II.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \quad (\text{II.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes (x) et (y) , respectivement (figure II.3).

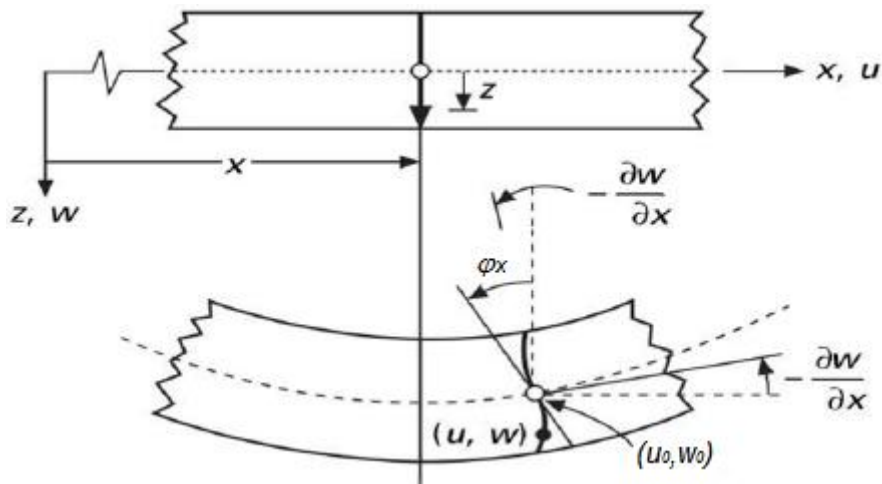


Figure II.3 : Déformation d'une normale transversale selon la théorie d'ordre élevé des plaques

Notez que ;

$$\varphi_x = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varphi_y = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

Notez qu'en fixant $f(z) = 0$, nous récupérons le champ de déplacement du (CPT), alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Les fonctions de cisaillement transversal $f(z)$ qui est déterminé par l'exigence que la déformation de cisaillement transversale disparaisse sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Le choix particulier pour le champ de déplacement, permet une distorsion du troisième ordre des normales au plan médian de la plaque non déformée, voir (figure II.3). Cette théorie raffinée prédit avec précision les déplacements et les fréquences propres pour les plaques avec un rapport d'aspect (a/b) jusqu'à $(0,2)$.

Bien qu'une variation cubique du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur soit prise en compte, le champ de déplacement contient le même nombre de variables indépendantes que dans la théorie de la déformation du premier ordre.

II.6 Les différentes fonctions raffinées de cisaillement transverse

Dans l'optique d'une prise en compte du cisaillement transverse la plus précise possible, de nombreux modèles ont été développés et sont encore développés aujourd'hui.

Il est intéressant de noter que la majorité de ces différentes fonctions de cisaillement transverse, permettant de considérer un gauchissement des sections, sont basées sur un modèle de développement polynomial, de puissances impaires, de la fonction $f(z)$ de la forme suivante :

$$f(z) = a_1 \cdot z - a_3 \cdot \left(\frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{z^3}{h^2} \right) + a_5 \cdot \left(\frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{z^5}{h^4} \right) + \dots + (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot a_n \cdot \left(\frac{\pi^{(n-1)}}{n!} \cdot \frac{z^n}{h^{(n-1)}} \right) \quad (\text{II. 4})$$

La construction des fonctions $f(z)$ s'établit alors par le choix des coefficients (a_n) induits par l'ordre choisi pour le développement. On retrouve donc dans cette formulation générale de la fonction de cisaillement transverse la théorie classique, où les coefficients (a_n) sont tous égaux à 0, ainsi que la théorie naturelle où le coefficient $(a_1 = 1)$ et $(a_n = 0)$ quand $n > 1$.

Il existe un certain nombre d'études dans la littérature, chacune proposant une théorie différente. Parmi ces travaux, on distinguera d'une part l'utilisation de fonctions polynomiales (Kaczkowski 1968 ; Reissner 1975 ; Panc, 1975), approfondies plus récemment avec des termes d'ordre supérieur (Reddy et Liu 1985 ; Murthy 1981).

La théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy (1984 et 1999) est définie par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.5})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

L'utilisation de fonctions trigonométriques a également été traitée par certains auteurs dans le but d'identifier des fonctions mathématiques connues, et donc facilement exploitables (Soldatos 1992 ; Touratier 1991 ; Mantari J.L et al. 2011ab ; Mantari J.L, Soares C.G. 2012).

(Touratier, 1991) propose le modèle "sinus" (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur.

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.6})$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (Reddy 1984).

(Karama. M. et al. 2003) proposent un modèle exponentiel ESDPT (modèle KAM), la fonction de cisaillement transverse est donnée par :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.7})$$

(Mantari J.L et al. 2011a) qui a récemment proposé une théorie basée sur l'utilisation du sinus et de l'exponentielle, la fonction de cisaillement transverse est donnée par :

$$f(z) = \left(\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{\pi}{2h} z \right) (h/\pi) \quad (\text{II.8})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDPT) est développée par (Ait Atmane et al, 2010), la fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{II.9})$$

La différence entre les différentes fonctions raffinées de cisaillement transverse et la CPT ainsi que la FSDT est présentée sur la (figure II.4) ci-dessous.

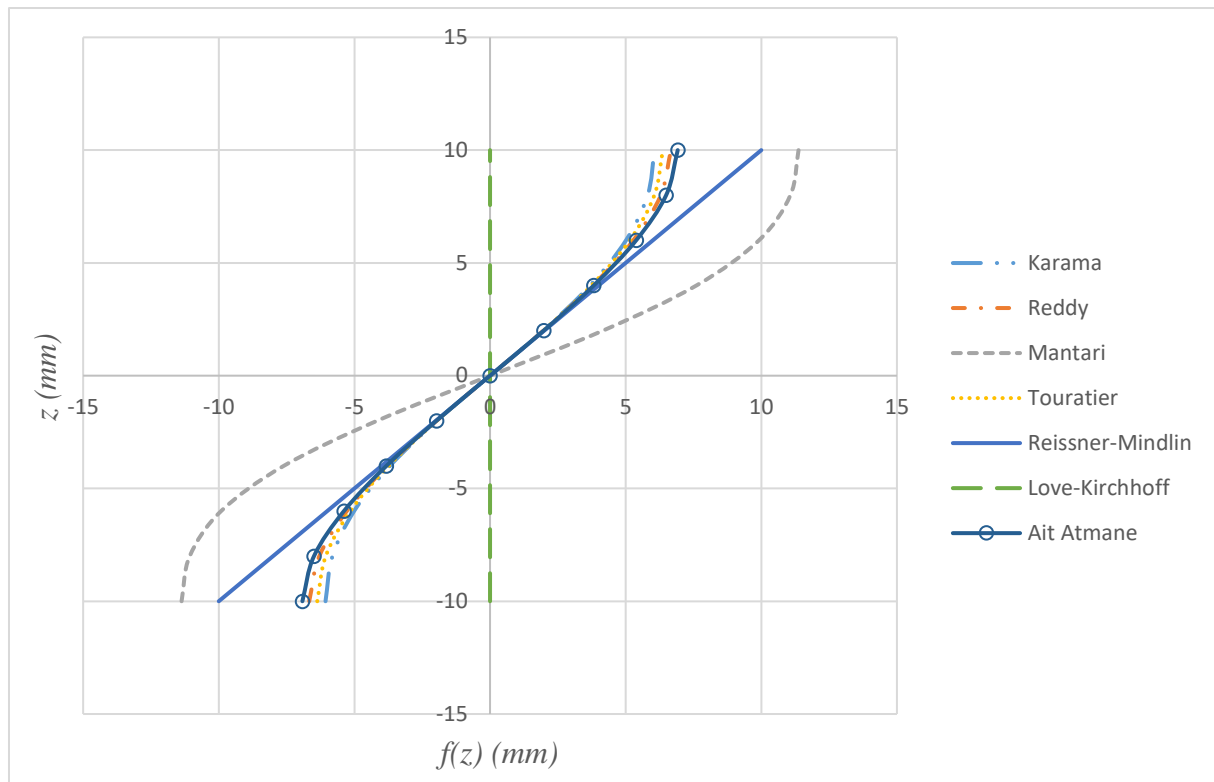


Figure II.4 : Evolution des fonctions de cisaillement transverse

La (figure II.4) montre l'évolution de ces différents modèles pour une épaisseur de pièce de 20mm. Cette figure permet d'apprécier l'aptitude des développements à accentuer le phénomène de gauchissement de la section sollicitée. En effet, il apparaît clairement que la théorie de Mantari (plus récente) propose une amplitude du gauchissement nettement supérieure à celle proposée par les théories d'ordre supérieur précédentes.

II.7 Conclusion

Cette partie est consacrée à un bref aperçu des théories des plaques élastiques les plus courantes, à partir des théories classiques de Kirchhoff et de déformation de cisaillement. Il est bien connu que ces modèles structurels reposent sur des hypothèses concernant la cinématique de déformation ou la contrainte à travers l'épaisseur de la plaque.

En général, ces hypothèses permettent de réduire un problème tridimensionnel (3D) à un problème bidimensionnel (2D). Ainsi, ces théories conviennent pour décrire le comportement de plaques minces et /ou moyennement épaisses. Étant donné que les plaques à gradation fonctionnelle (FG) peuvent avoir une épaisseur importante, les théories bidimensionnelles peuvent s'avérer inadéquates.

Contrairement aux théories 2D, les théories 3D telle que la théorie d'élasticité ne

contient pas ces hypothèses simplifiées.

Par conséquent, l'application de solutions 3D serait plus précise que celles obtenues par les théories 2D. Ainsi, pour éliminer le manque de théories 2D dans le traitement des plaques épaisses, les solutions 3D fournissent non seulement des résultats réalistes et précis, mais permettent également des informations physiques supplémentaires, qui ne peuvent autrement être estimées par les théories des plaques 2D.

Chapitre III : Recherches bibliographiques sur les structures en matériaux a gradient de propriétés (FGM)

III.1 Introduction

Il n'est pas toujours possible d'obtenir la solution analytique pour les équations d'élasticité 3D. En particulier, la solution devient difficile et fastidieuse lorsqu'une loi de puissance est utilisée pour la gradation des propriétés des matériaux. De plus, les problèmes de valeur limite et de valeur propre des équations d'élasticité 3D sont difficiles à résoudre. Ainsi, la théorie de l'élasticité 3D est simplifiée en problèmes 2D en adoptant certaines hypothèses basées sur la cinématique de déformation et le comportement constitutif.

Diverses méthodes ont été employées jusqu'à présent pour l'analyse statique et dynamique des structures en FGM, ces méthodes sont analytiques et numériques. Dans ce contexte, une synthèse bibliographique sur les comportements statique et dynamique des structures en FGM est présentée. Cependant, seules les théories analytiques des plaques seront présentées.

III.2 Analyse des vibrations des structures en FGM

Diverses méthodes ont été employées jusqu'à présent pour l'analyse des vibrations des structures en FGM, notamment les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

L'analyse vibratoire des plaques FGM implique principalement la résolution de problèmes de valeurs propres. La solution des problèmes de valeurs propres à l'aide des théories d'élasticité 3D est difficile à obtenir, en particulier lorsque les propriétés du matériau sont évaluées à l'aide du paramètre de loi de puissance. Ainsi, les théories des plaques 2D basées sur le champ de déplacement et la fonction de contrainte sont développées et utilisées efficacement pour l'analyse des plaques.

Une procédure de Rayleigh-Ritz a été employée par (Kim Y. W. 2005) afin de développer une méthode théorique pour étudier les caractéristiques vibratoires des plaques FGM. Initialement ces plaques sont sollicitées dans un environnement thermique basé sur le TSdT.

Deux types de charges thermiques ont été considérées. Dans le premier type, la

température a été imposée sur la surface supérieure et l'autre valeur sur la surface inférieure. Dans le second type, les flux de chaleur de la surface supérieure à la surface inférieure sont maintenus à une température prescrite.

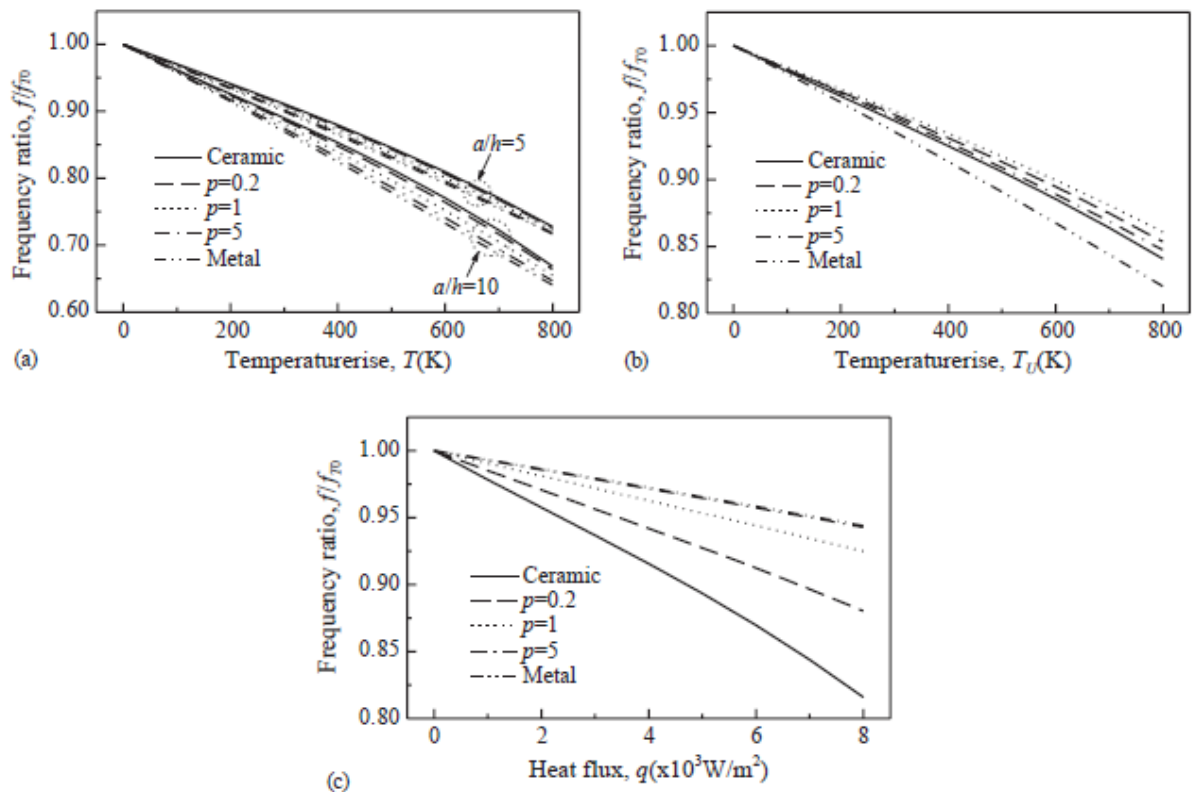


Figure III.1 : Effet de la température et du flux thermique sur la fréquence fondamentale des plaques carrées FGM ($a = 0,2 \text{ m}$; $a/h = 10$) : (a) élévation de température uniforme; (b) condition thermique-I avec $\Delta T_L = 0 \text{ K}$; (c) condition thermique-II avec $\Delta T_L = 0 \text{ K}$ (Kim Y. W. 2005) (Kim Y. W. 2005)

La (figure III.1) nous montre l'effet de la température et du flux de chaleur sur la fréquence fondamentale. La (figure III.1(a)) montre le rapport de fréquence ($f = f_{T0}$) pour les plaques carrées de ($a/h = 5$ et 10) sur l'élévation de température uniforme, où (f_{T0} et f) sont les fréquences fondamentales des plaques à température ambiante et à d'autres températures.

L'effet de la température pour la plaque de ($a/h = 10$) est supérieur à celui de ($a/h = 5$) car la réduction de rigidité par élévation de température pour ($a/h = 5$) est plus faible que celle pour ($a/h = 10$). L'effet de la température devient haut lorsque la plaque devient riche en métal.

Les (figures III.1(b) et (c)) présentent l'effet de la température et du flux thermique sur les fréquences fondamentales dans les conditions thermiques I et II. Sur la condition thermique-I, l'effet de la température est le plus élevé pour la plaque métallique et le plus faible pour la

plaque FGM avec ($p = 1$). L'effet de la plaque FGM riche en métal est plus élevé que celui des plaques FGM riches en céramique.

L'effet du flux thermique devient élevé lorsqu'une plaque FGM devient riche en céramique parce que la distribution de la température due au flux thermique devient élevée lorsque la plaque devient riche en céramique.

(Woo J. et al. 2006) ont présenté une solution en termes de séries de Fourier mixtes pour étudier le comportement de vibration libre non linéaire des plaques FGM basée sur la théorie classique des plaques et la non-linéarité de Von-Karman pour les grandes déflexions transversales. Il a été démontré que les effets de couplage non linéaires jouent un rôle majeur dans la détermination de la fréquence fondamentale des plaques FGM.

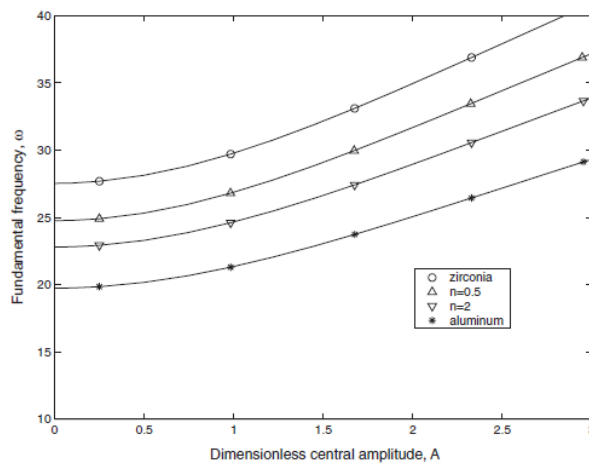


Figure III.2 : L'amplitude centrale des vibrations en fonction de la fréquence fondamentale pour quatre plaques carrées aluminium-zircone simplement appuyées (Woo J. et al. 2006)

La (figure III.2) montre la relation entre l'amplitude centrale des vibrations et la fréquence fondamentale pour quatre plaques carrées d'aluminium-zircone simplement appuyées. On constate que la fréquence fondamentale de la plaque augmente avec l'amplitude des vibrations.

Ceci est dû au fait que la force axiale dans le plan de la plaque contribue à la raideur latérale résultant d'un couplage non linéaire. Cela indique que la fréquence fondamentale dépend de l'amplitude des vibrations, qui est significativement différente de la réponse dynamique linéaire.

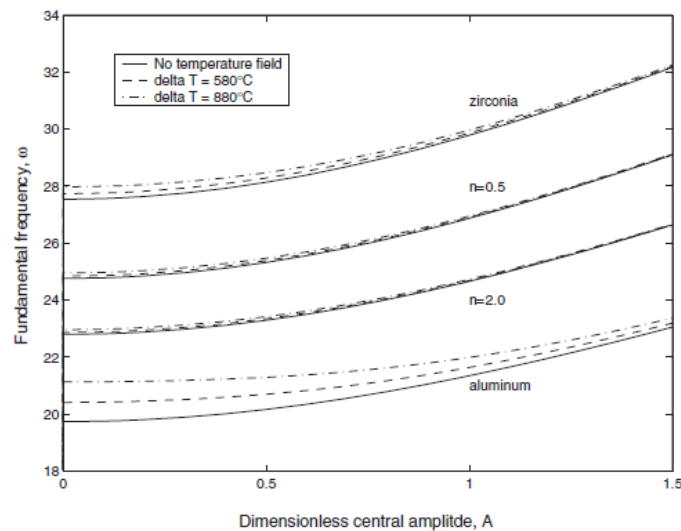


Figure III.3 : L'amplitude centrale des vibrations par rapport à la fréquence fondamentale pour quatre plaques carrées aluminium-zircone simplement supportées et l'effet des champs de température (Woo J. et al. 2006)

Une relation entre l'amplitude centrale de vibration et la fréquence fondamentale pour quatre plaques carrées d'aluminium-zircone simplement appuyées soumises au champ de température prescrit est représentée sur la (figure III.3).

L'existence de la température augmente la fréquence fondamentale des plaques. Cela est dû à la déflexion thermique des plaques. Cependant, l'influence de cette déflexion diminue rapidement avec l'augmentation de l'amplitude des vibrations. L'effet du champ de température sur la fréquence fondamentale des plaques d'aluminium pur et de zircone est plus prononcé que celui des plaques d'aluminium-zircone.

Comme on peut le voir sur la figure, la variation maximale de la fréquence fondamentale due au champ de température pour les plaques FG s'est avérée être seulement de 0,8%. En tant que tel, on peut maintenir que l'existence du champ de température ne joue pas un rôle majeur dans une telle situation.

(Batra R.C 2007) a dérivé une théorie des plaques de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale pour les plaques FGM incompressibles linéairement élastiques. Il a été constaté que les fréquences des plaques de FGM rectangulaires appuyées simplement, est calculées à partir de la théorie des plaques d'ordre zéro concordent avec celles trouvées à partir de la solution analytique, mais les deux formes de mode correspondantes ne doivent pas nécessairement correspondre l'une à l'autre.

La méthode d'expansion en série de puissance des composants de déplacement ainsi que le principe de Hamilton ont été utilisés par (Matsunaga H. 2008) pour étudier la vibration libre et le comportement de stabilité des plaques FGM rectangulaires. Elles sont peu profondes sur la base d'une théorie 2D d'ordre supérieur qui tient pleinement compte de cisaillement transversal, de la déformation normale et du changement d'épaisseur. Les équations principales ont été résolues à l'aide de la technique de résolution de Navier.

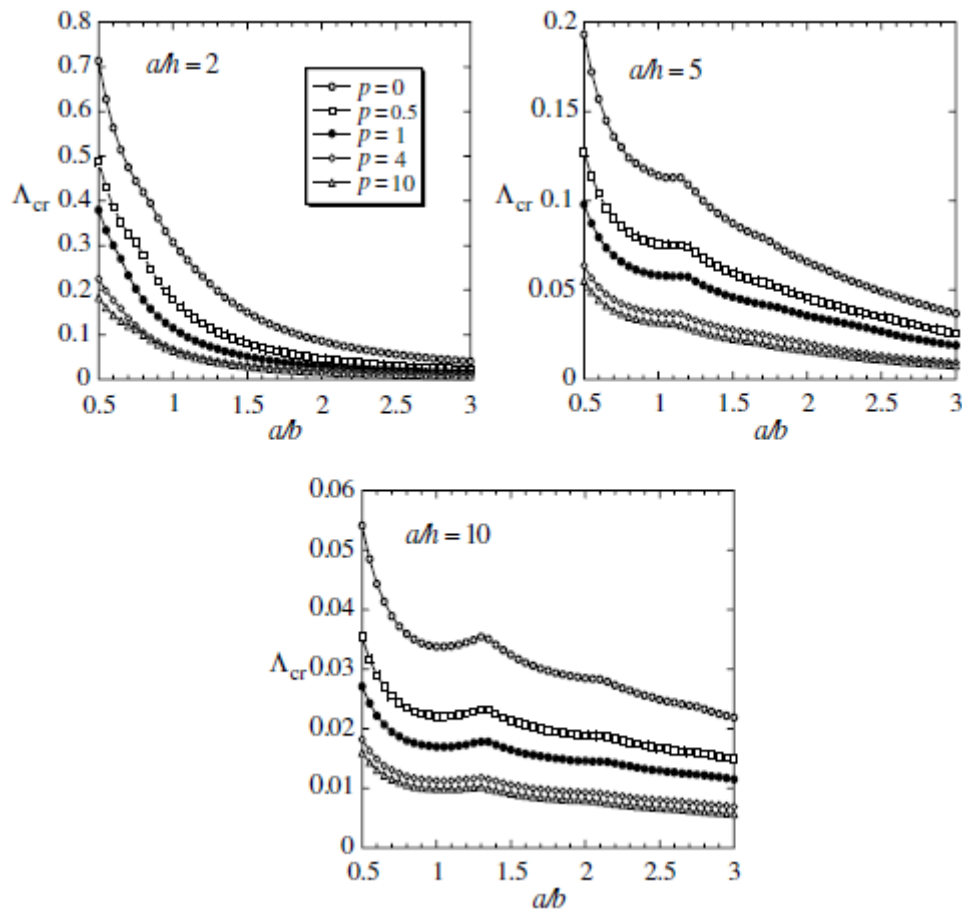


Figure III.4 : Contraintes de flambement en fonction du rapport d'aspect (a/b) des plaques FG. ($a/h = 2, 5, 10; s = 1$) (Matsunaga H. 2008)

Les contrainte uniaxiale dans le plan dans la direction (x), les contraintes de flambement critiques (Λ_{cr}) des plaques FG sont tracées par rapport au rapport d'aspect (a/b) sur la (figure III.4). Les courbes sont tracées pour plusieurs nombres de l'indice des lois de puissance (p).

Pour ($s = 1$), la valeur du mode de flambement critique (r) dépend du rapport d'aspect (a/b) et change lorsque le rapport d'aspect est augmenté. Les contraintes de flambement critiques pour des valeurs plus petites du rapport d'aspect apparaissent sous le premier mode de déplacement ($r = 1$), tandis que des modes de déplacement plus élevés apparaîtront pour des

valeurs plus grandes du rapport d'aspect.

Il est à noter que le mode de déplacement le plus bas donne la contrainte de flambement critique pour les plaques minces. Cependant, une caractéristique intéressante est que les contraintes critiques de flambement pour les plaques épaisses se produisent à des modes de déplacement plus élevés.

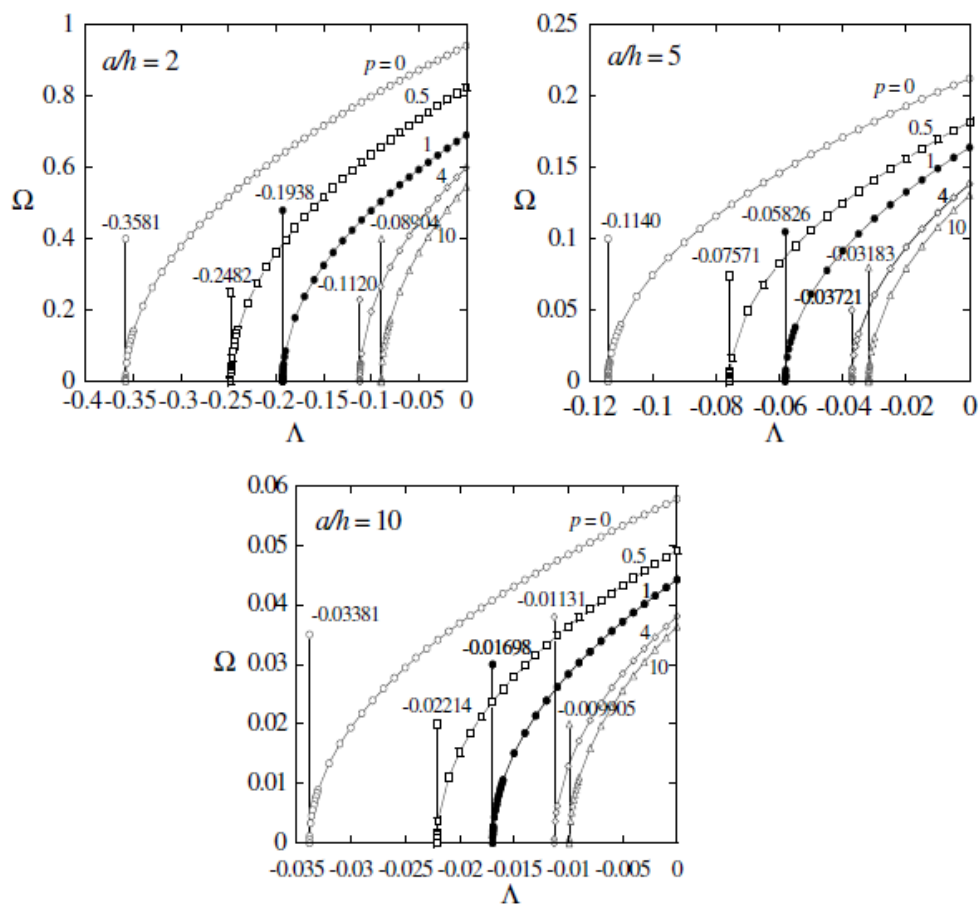


Figure III.5 : Courbes fréquences propres (Ω) en fonction de la contrainte axiale initiale (Λ) pour les plaques FG ($a/h=2.5$; $r=s=1$) (Matsunaga H. 2008)

Les fréquences propres les plus basses des plaques carrées FG soumises à la contrainte uniaxiale dans le plan dans la direction (x) sont tracées par rapport à la contrainte initiale dans le plan (Λ) sur la (figure III.5). Les courbes de fréquence sont tracées pour le mode de déplacement fondamental ($r = s = 1$) et plusieurs nombres de l'indice de loi de puissance (p). Les courbes diminueront rapidement avant le flambement et la fréquence disparaîtra au flambement critique (Λ_{cr}).

(Fares M.E. et al. 2009) ont présenté une théorie monocouche équivalente raffinée utilisant l'approche variationnelle mixte pour les analyses de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM. La théorie ne nécessite aucun facteur de correction de cisaillement, car elle tient compte à la fois du cisaillement transversal et de la déformation normale pour être en parfaite cohérence avec les conditions aux limites en haut et en bas de la plaque.

La (figure III.6) contient des graphiques de fréquences propres non dimensionnelles ($\bar{\omega}_{11}^1$) pour les plaques FG (Al/ZrO₂) simplement appuyée (SSSS) par rapport au paramètre (p).

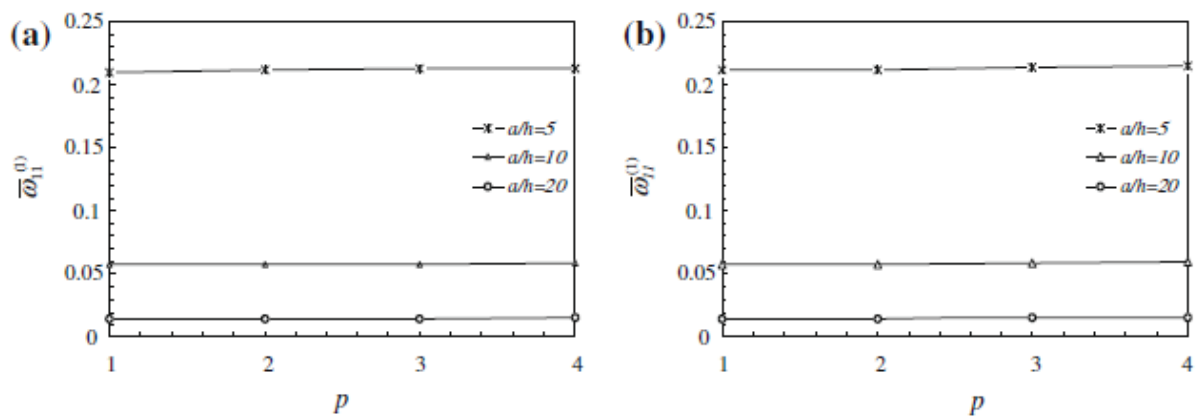


Figure III.6 : Les fréquences propres des plaques FG carré (SSSS) en Al/ZrO₂ avec l'indice de la loi de puissance (p) pour différentes valeurs de (a/h) ; $V_c^- = 0$; $m=n=1$ et (a) pour $V_c^+ = 1$ (b) pour $V_c^+ = 0.3$ (Fares M.E. et al. 2009)

Ces courbes montrent que le profil de fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque a un léger effet sur les vibrations libres pour des plaques minces et moyennement épaisses. De plus, les courbes de fréquence sont plus sensibles à la variation d'épaisseur et de la variation de l'indice de puissance (p).

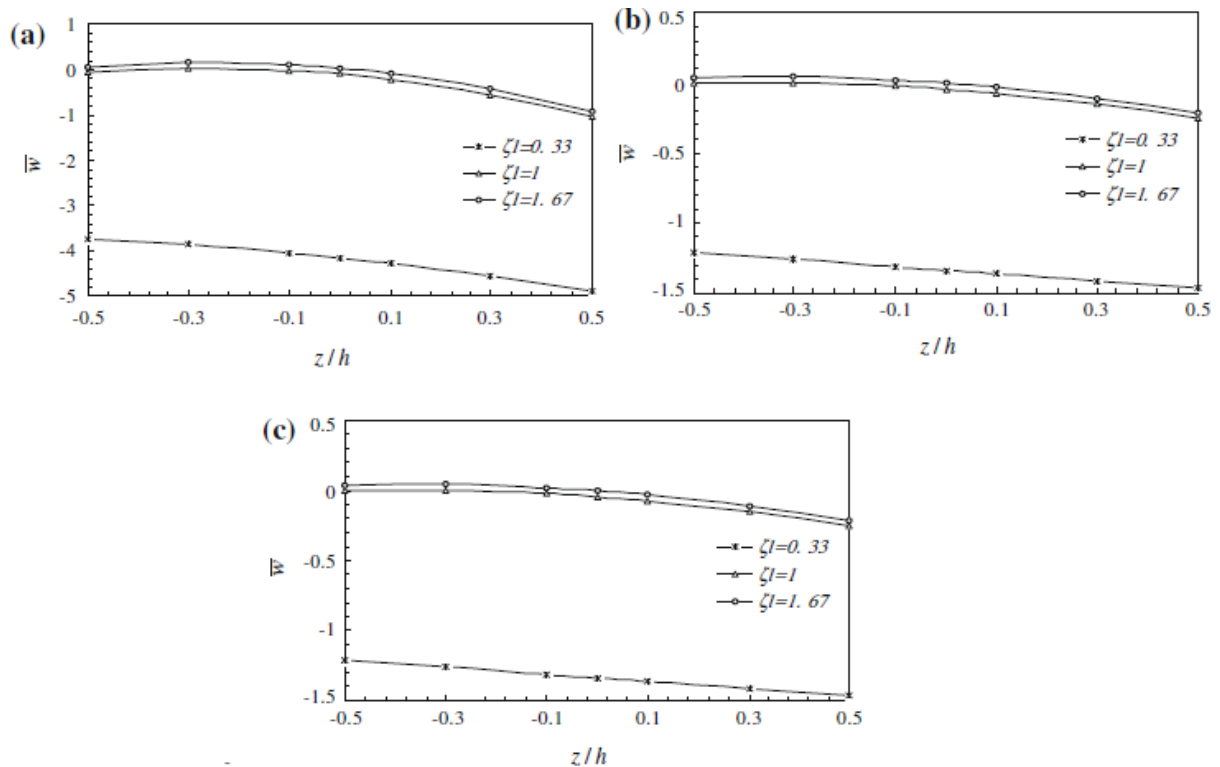


Figure III.7 : Variation d'épaisseur des déplacements normalisés hors plan $\bar{w}(0.5a; 0.5b; z)$ pour une plaque FG carrée, $\nu=0.3$; $a = 3h$, (a) plaque FG avec $E_1/E_0 = 10$, (b) plaque homogène et (c) plaque FG avec $E_1/E_0 = 0.1$ (Fares M.E. et al. 2009)

La (figure III.7) montre la variation d'épaisseur des déplacements normalisés (\bar{w}) dans des plaques FG avec différents types de gradient de rigidité et des plaques isotropes non homogènes ($\xi_1=\xi_2$), avec ($\xi_1 = m.h/a$ et $\xi_2 = n.h/b$). On constate que le comportement des déformations hors plan (comportement de flexion) dans les plaques FG est similaire à celui des plaques homogènes.

(Benachour A. et al. 2011) ont présenté l'analyse des vibrations libres de plaques FGM à gradient arbitraire basé sur une théorie des plaques raffinées à quatre variables utilisant la technique de résolution de Navier et la méthode de Ritz. La théorie peut prendre en compte les effets de cisaillement transverse et la distribution parabolique des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, elle n'a donc pas besoin de facteurs de correction de cisaillement contrairement au FSDT. Les résultats obtenus ont été validés par comparaison avec ceux obtenus avec FSDT et TSDT.

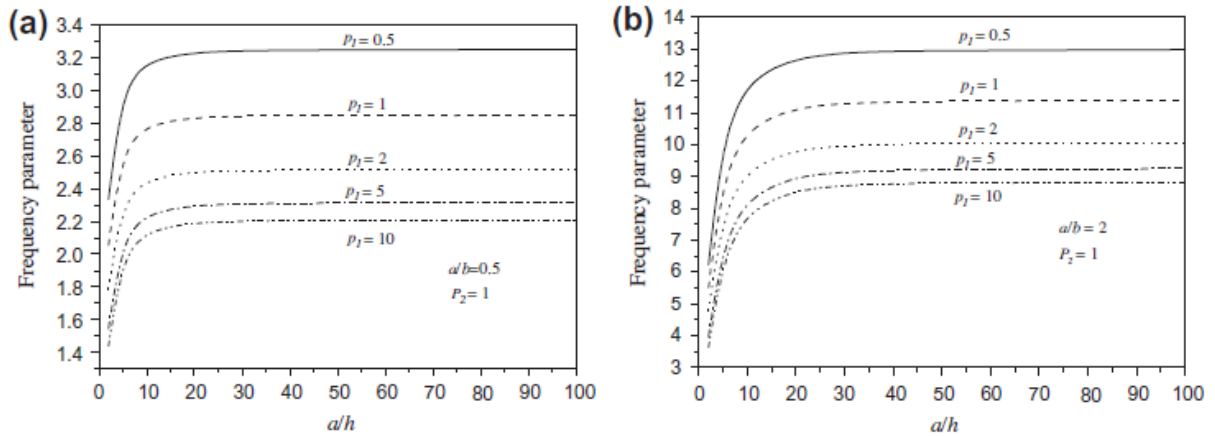


Figure III.8 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport (a/h) et l'indice (p_1): (a) pour $a/b = 0,5$ et (b) pour $a/b = 2$ (Benachour A. et al. 2011)

Dans les (Figure III.8 et III.9), la variation du paramètre de fréquence avec le rapport (a/h) et l'indice p_i ($i = 1, 2$) est donnée pour ($a/b = 0,5 ; 2$), respectivement ; (p_i) est l'indice de la loi de puissance lié respectivement au module de Young et la densité de masse du matériau. Selon ces figures, le paramètre de fréquence augmente avec l'augmentation du rapport (a/h) pour ($a/h < 20$). Le paramètre de fréquence est approximativement insensible au rapport (a/h) après ($a/h > 50$).

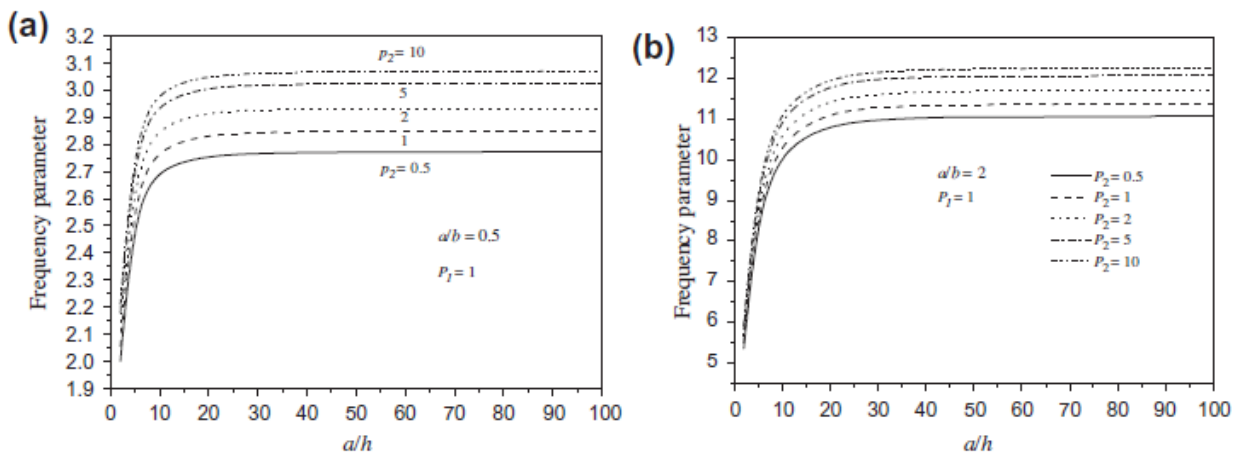


Figure III.9 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport (a/h) et l'indice (p_2): (a) pour ($a/b = 0,5$) et (b) pour ($a/b = 2$) (Benachour A. et al. 2011)

On observe ; de la (figure III.8) que, avec (p_1) croissant, le paramètre de fréquence diminue. Cependant, le paramètre de fréquence est augmenté avec l'augmentation de l'indice de gradient (p_2) comme on le voit sur la (figure III.9).

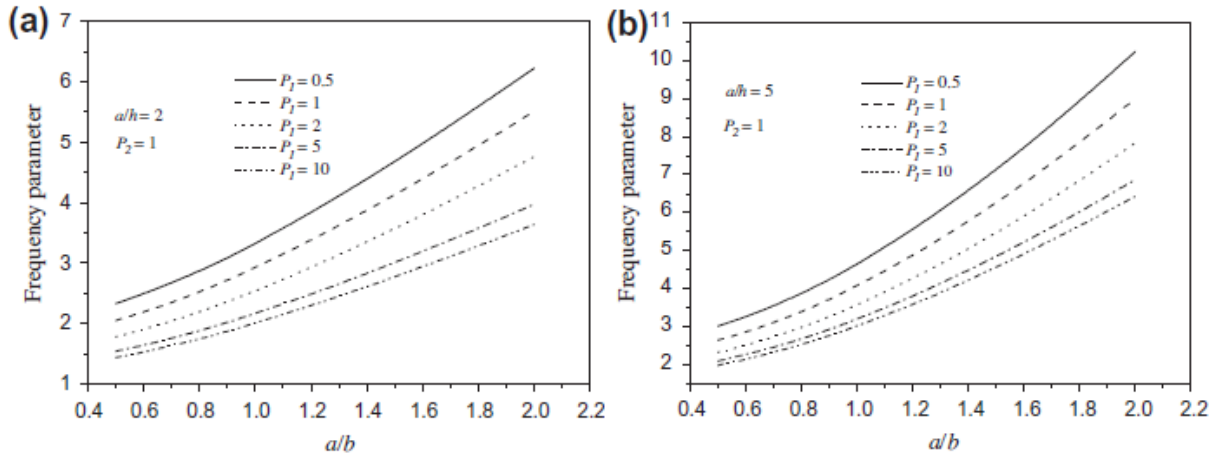


Figure III.10 : Variation du paramètre de fréquence avec un rapport a/b et un indice (p_1) : (a) pour $a/h = 2$ et (b) pour $a/h = 5$ (Benachour A. et al. 2011)

La variation du paramètre de fréquence avec le rapport (a/b) et l'indice p_i ($i = 1, 2$) est donnée sur les (figure III.10 et III.11) pour ($a/h = 2$ et 5), respectivement. On observe que le paramètre de fréquence augmente pour les plaques avec un rapport d'aspect plus élevé, (a/b).

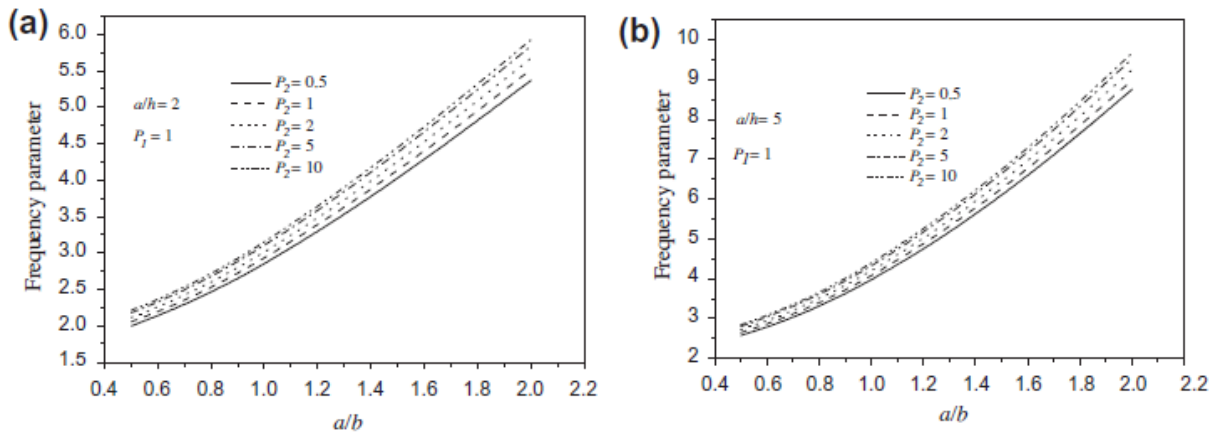


Figure III.11 : Variation du paramètre de fréquence avec un rapport (a/b) et un indice p_2 : (a) pour $a/h = 2$ et (b) pour $a/h = 5$ (Benachour A. et al. 2011)

On voit d'après les résultats que le paramètre de fréquence diminue avec l'augmentation de p_1 et augmente avec l'augmentation de (p_2).

(Uymaz B. et al. 2012) ont utilisé la méthode de Ritz et supposé des fonctions de déplacement sous la forme des polynômes de Chebyshev pour l'analyse des vibrations libres des plaques FGM avec inhomogénéité du matériau dans le plan basée sur la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur avec cinq degrés de liberté.

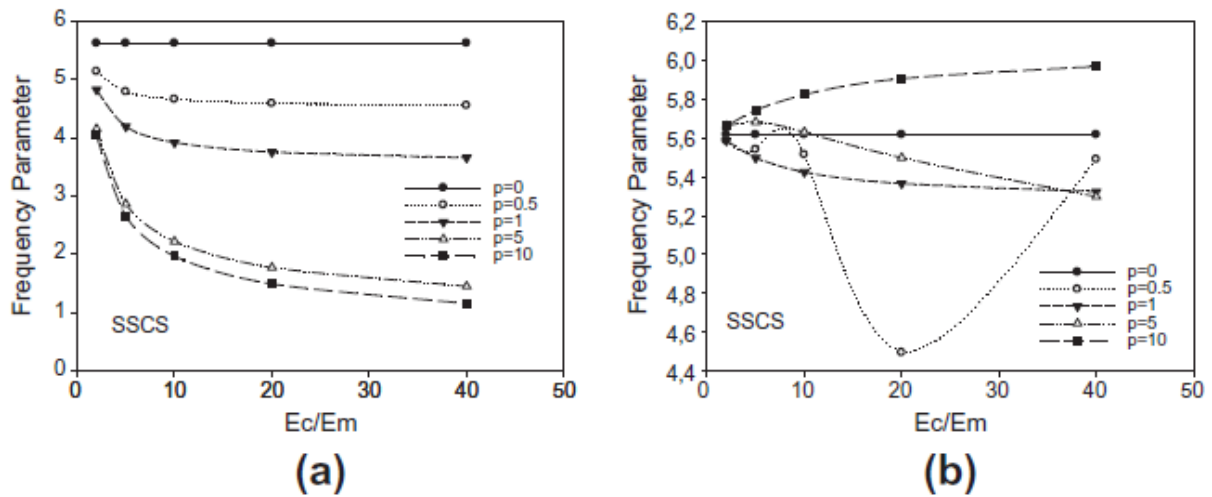


Figure III.12 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport E_c/E_m et l'indice p pour (a) $\rho_c/\rho_m = 1$ et (b) $\rho_c/\rho_m = E_c/E_m (= 2, 5, 10, 20, 40)$, ($a/h = 20$, $a/b = 0,5$, ESDPT) (Uymaz B. et al. 2012)

Dans les (figures III.12–III.14), l'effet du rapport constant et variable (ρ_c/ρ_m) et du rapport sur les paramètres de fréquence est étudié. Dans la première situation (rapport ρ_c/ρ_m constant), le paramètre de fréquence diminue à mesure que (E_c/E_m) et (p) augmentent. Dans la deuxième situation (rapport variable ρ_c/ρ_m), le paramètre de fréquence diminue à mesure que (E_c/E_m) est augmenté pour ($p < 5$) et augmente lorsque (E_c/E_m) est augmenté pour ($p > 5$).

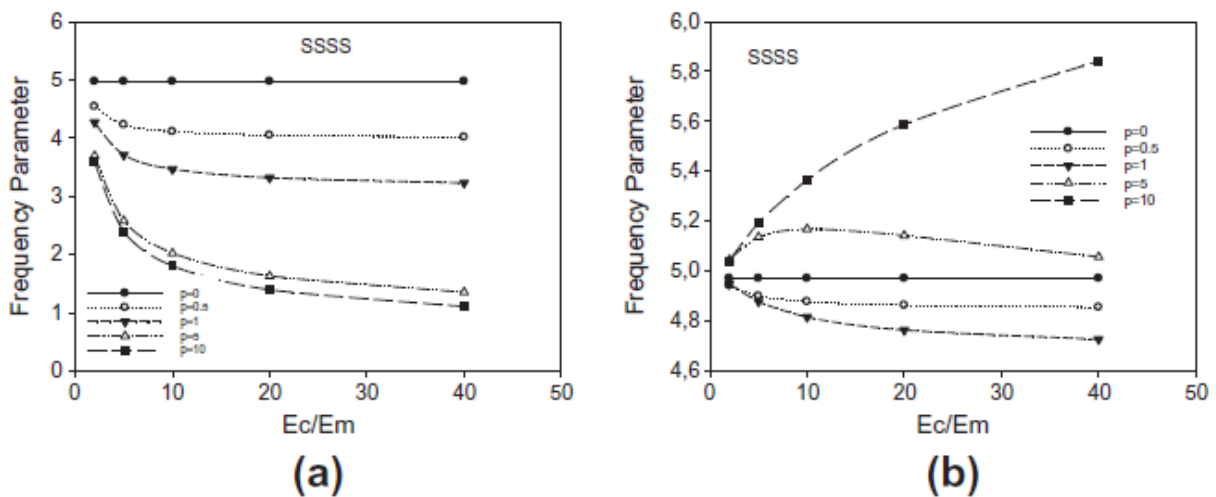


Figure III.13 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport E_c/E_m et l'indice p pour (a) $\rho_c/\rho_m = 1$ et (b) $\rho_c/\rho_m = E_c/E_m (= 2, 5, 10, 20, 40)$, ($a/h = 20$, $a/b = 0,5$, ESDPT) (Uymaz B. et al. 2012)

Avec le même rapport (E_c/E_m), le paramètre de fréquence diminue à mesure que l'indice

(p) est augmenté pour ($p < 5$) et le paramètre de fréquence augmente lorsque l'indice (p) est augmenté pour ($p > 5$). Dans tous les cas considérés, on observe que la valeur de (5) pour l'indice p est une valeur critique.

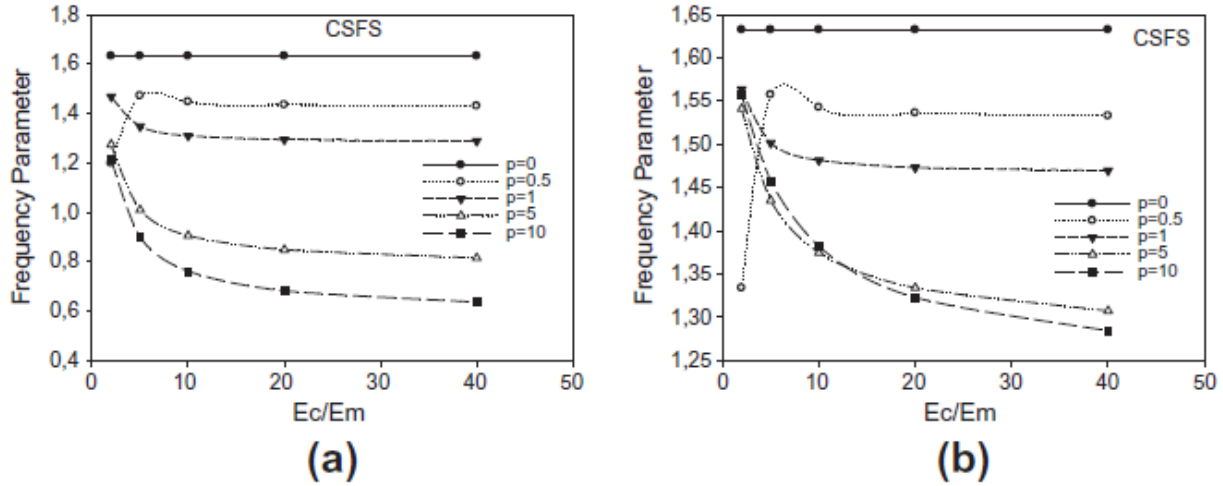


Figure III.14 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport (E_c/E_m) et l'indice p pour (a) $\rho_c/\rho_m = 1$ et (b) $\rho_c/\rho_m = E_c/E_m$ ($= 2, 5, 10, 20, 40$), ($a/h = 20, a/b = 0,5, ESDPT$) (Uymaz B. et al. 2012)

De plus, l'effet du rapport (ρ_c/ρ_m) sur le paramètre de fréquence avec le rapport E_c/E_m et c'est selon la (figure III.15), le paramètre de fréquence augmente pour les plaques avec un rapport (ρ_c/ρ_m) et un rapport (E_c/E_m) croissants et le plus net une augmentation est observée pour la valeur du rapport (ρ_c/ρ_m) est de ($1 \leq \rho_c/\rho_m \leq 10$) (voir figure III.15).

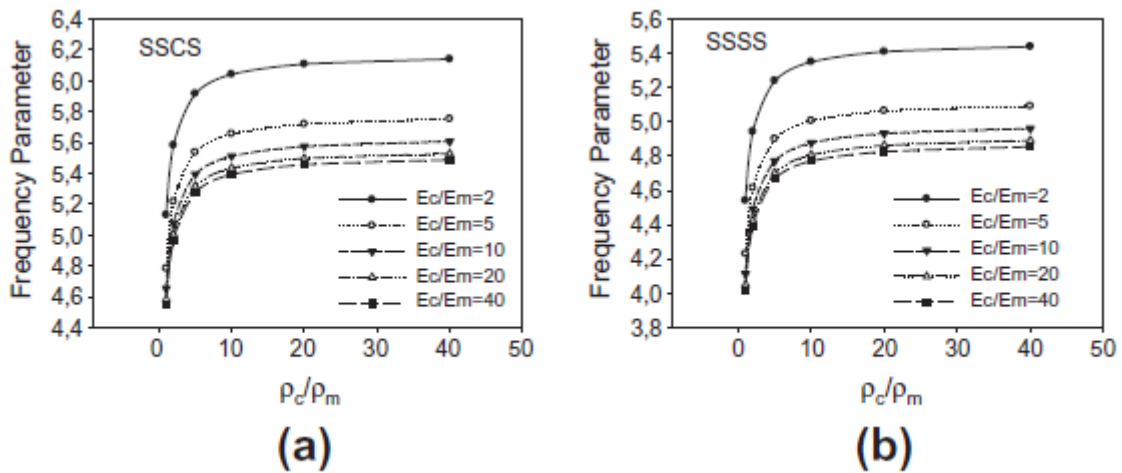


Figure III.15 : Variation du paramètre de fréquence avec le rapport (ρ_c/ρ_m) et le rapport (E_c/E_m) pour différentes conditions aux limites ($a/h = 20, a/b = 0,5, p = 0,5, ESDPT$) (Uymaz B. et al. 2012)

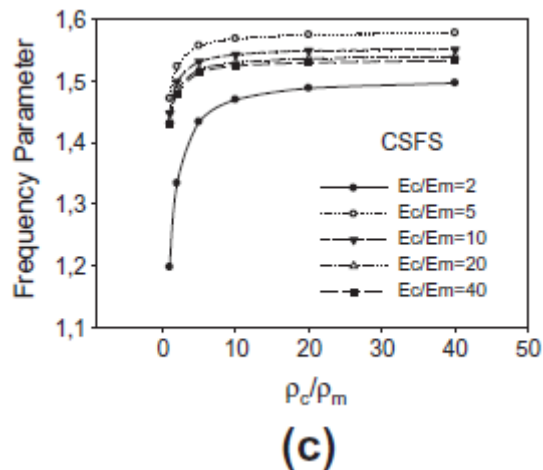


Figure III.15 : (suite)

III.3 Analyses de flambement des plaques FGM sous chargement mécanique et thermomécanique

Lorsqu'une charge de compression de bord est appliquée à une plaque plate le long de son plan médian. La plaque est déformée, mais reste plate tant que les forces de bord sont suffisamment petites et qu'il n'y a pas d'imperfection initiale dans la géométrie de la plaque. Au fur et à mesure que la charge augmente, un état instable atteint à la suite de quoi la plaque se plie légèrement. La charge de compression de bord la plus minimale requise juste pour déclencher une telle instabilité est appelée charge de flambement critique.

Des études approfondies ont été menées pour l'analyse du flambement des plaques FGM afin de prédire les charges critiques de flambement dans diverses conditions aux limites et de chargement.

Afin d'obtenir le problème de valeur propre de la charge de flambement critique, il faut résoudre le problème. Malheureusement, l'analyse de flambage des plaques FGM en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle qui est une méthode d'analyse très précise jusqu'ici non encore rapportée dans la littérature.

Diverses théories bidimensionnelles des plaques utilisées par de nombreux chercheurs pour obtenir la charge de flambement critique pour les plaques FGM et les plaques sandwich FGM dans diverses conditions aux limites sont discutées séparément en fonction de la charge appliquée : cas de charge mécanique et cas de charge thermomécanique.

III.3.1 Chargement mécanique

(Birman V. 1995) a été la première personne à tenter de résoudre le problème de flambement des plaques composites hybrides FGM. Le problème a été formulé à partir du modèle multicellulaire proposé par (Chamis C.C. 1983) et (Hopkiins D.A. et Chamis C.C. 1985).

(Zenkour A.M. 2005) a utilisé le SSDT pour étudier le flambage et la vibration libre de plaques sandwich FGM simplement appuyées. Les résultats obtenus ont été validés par comparaison avec ceux obtenus avec CPT, FSDT et TSDT. La charge de flambement critique obtenue à l'aide de plaques FGM non symétriques s'est avérée plus élevée que celles homologues symétriques.

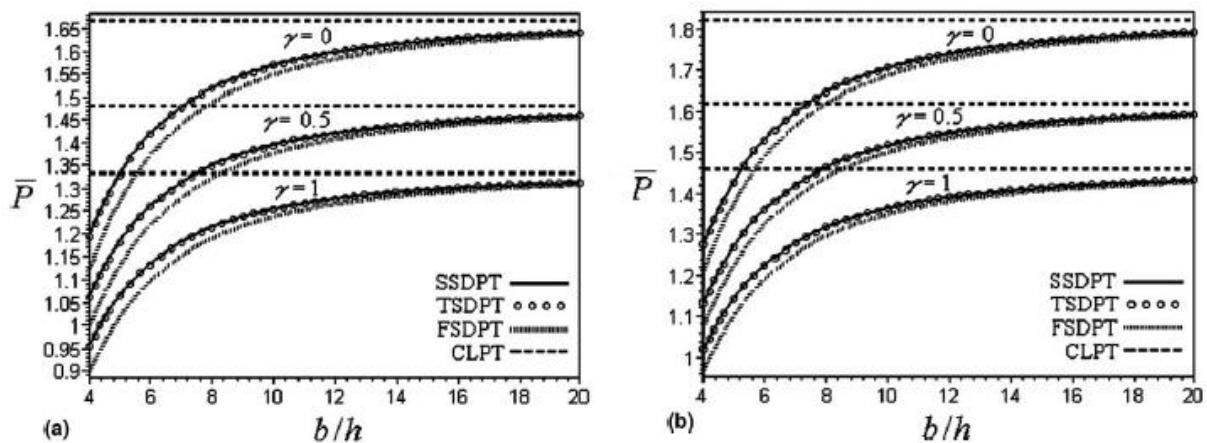


Figure III.16 : Charge de flambement (\bar{P}) en fonction du rapport côté / épaisseur (b/h) de plaques sandwich FGM symétriques et non symétriques utilisant diverses théories des plaques ($b = 2a$, $k = 2$) : (a) La plaque sandwich FGM (2-1-2) et (b) la plaque sandwich FGM (2-1-1) (Zenkour A.M. 2005)

La (figure III.16) montre, les charges critiques de flambement du CLPT sont indépendantes du rapport (b/h). Les charges critiques de flambement diminuent à mesure que (γ) augmente (avec γ est le rapport donné entre les forces réparties P_{22}/P_{11}). Les résultats de la plaque non symétrique sont supérieurs à ceux correspondants pour la plaque symétrique et cela dépend de l'épaisseur de la couche centrale.

Une nouvelle théorie raffinée de la déformation par cisaillement hyperbolique a été présentée par (Meiche NE. et al. 2011) utilisant la technique de la solution de Navier pour les analyses de flambage et de vibration libre des plaques sandwich FGM. Les résultats obtenus

Chapitre III Recherches bibliographiques sur les structures en matériaux a gradient de propriétés (FGM)

ont été validés par comparaison avec ceux obtenus en utilisant CPT, FSDT, SSDT et la théorie de la déformation par cisaillement parabolique (PSDT).

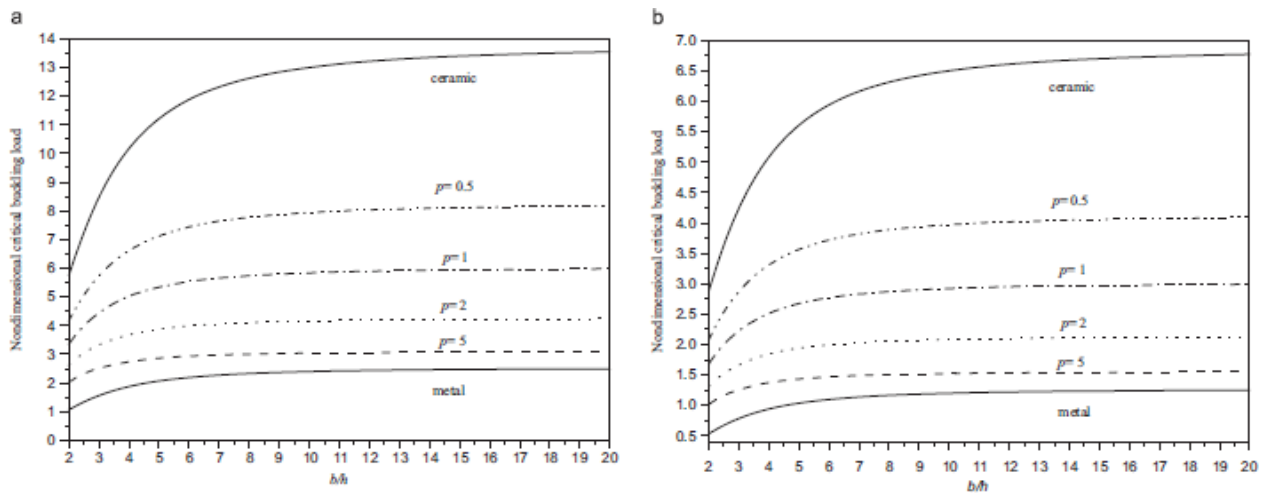


Figure III.17 : Charge de flambement critique non dimensionnelle (\bar{N}) en fonction du rapport côté / épaisseur (b/h) des plaques sandwich FGM (2–1–2) pour différentes valeurs de p . Plaques soumises à (a) une charge de compression uniaxiale ($\gamma=0$) et (b) une charge de compression biaxiale ($\gamma=1$) (Meiche NE. et al. 2011)

Les (figures III.17 et III.18) décrivent les charges critiques de flambement des types symétriques (1–2–1) et non symétriques (2–2–1) de plaques carrées FG et sandwich, face à l'épaisseur en tenant compte de la nouvelle théorie raffinée. Les résultats sont le maximum pour les plaques céramiques et le minimum pour les plaques métalliques. On voit que les résultats augmentent progressivement à mesure que la quantité de céramique dans la plaque sandwich augmente.

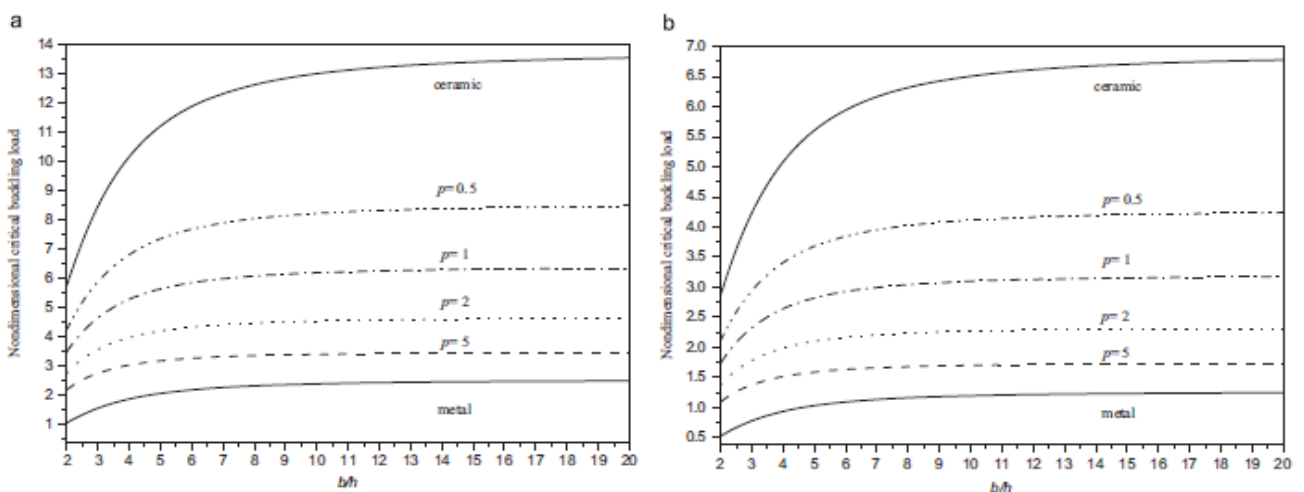


Figure III.18 : Charge de flambement critique non dimensionnelle (\bar{N}) en fonction du rapport côté / épaisseur (b/h) des plaques sandwich FGM (2–1–1) pour différentes valeurs de p . Plaques soumises à (a) une charge de compression uniaxiale ($\gamma=0$) et (b) une charge de compression biaxiale ($\gamma=1$) (Meiche NE. et al. 2011)

(Thai H.T.et Choi D.H. 2012) ont étendu la théorie raffinée proposée par (Shimpi R.P. 2002) pour l'analyse de flambement de plaques FGM soumises à un chargement dans le plan. La théorie s'est avérée avoir une forte similitude avec le CPT dans de nombreux aspects, ce qui peut expliquer la variation quadratique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. La précision des résultats obtenus a été démontrée en les comparants à ceux des CPT, FSDT et TSDT

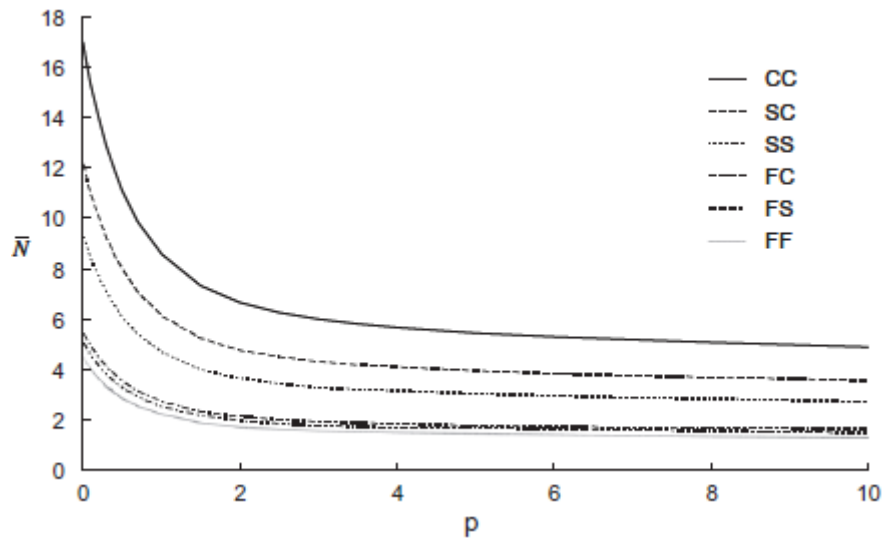


Figure III.19 : L'effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge critique de flambement non dimensionnelle (\bar{N}) d'une plaque carrée ($a = b = 10h$) sous compression biaxiale ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = -1$) (Thai H.T.et Choi D.H. 2012)

La (figure III.19) illustre la variation de la charge de flambement critique non dimensionnelle de plaques carrées avec différentes conditions aux limites sous compression biaxiale ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = -1$) en fonction de l'indice de loi de puissance p (avec γ_1 et γ_2 est le rapport donné entre la force de pré-flambage et la charge critique de flambement (N_x^0/N_{cr} et N_y^0/N_{cr}) respectivement. Le rapport d'épaisseur (a/h) est supposé égal à (10).

On peut voir que la charge critique de flambement non dimensionnelle diminue à mesure que l'indice de loi de puissance augmente, et que la variation de la charge de flambement critique non dimensionnelle est considérable lorsque l'indice de loi de puissance est petit. Cela est dû au fait que des valeurs plus élevées de l'indice de loi de puissance correspondent à une portion élevée de métal par rapport à la pièce en céramique.

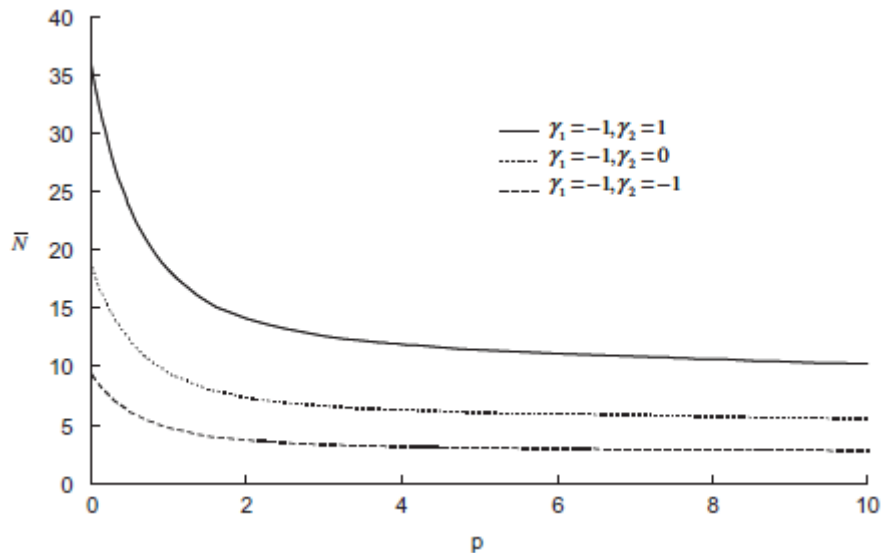


Figure III.20 : L'effet de l'indice de loi de puissance p sur la charge critique de flambement non dimensionnelle (\bar{N}) d'une plaque carrée simplement supportée ($a = b = 10h$) dans différentes conditions de chargement (Thai H.T.et Choi D.H. 2012)

De plus, la charge critique de flambement non dimensionnelle de la plaque sous compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = 0$) est supérieure à celle sous compression biaxiale ($\gamma_1 = \gamma_2 = -1$) et inférieure à celle sous compression et traction biaxiales ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = 1$) comme illustré à la (figure III.20)

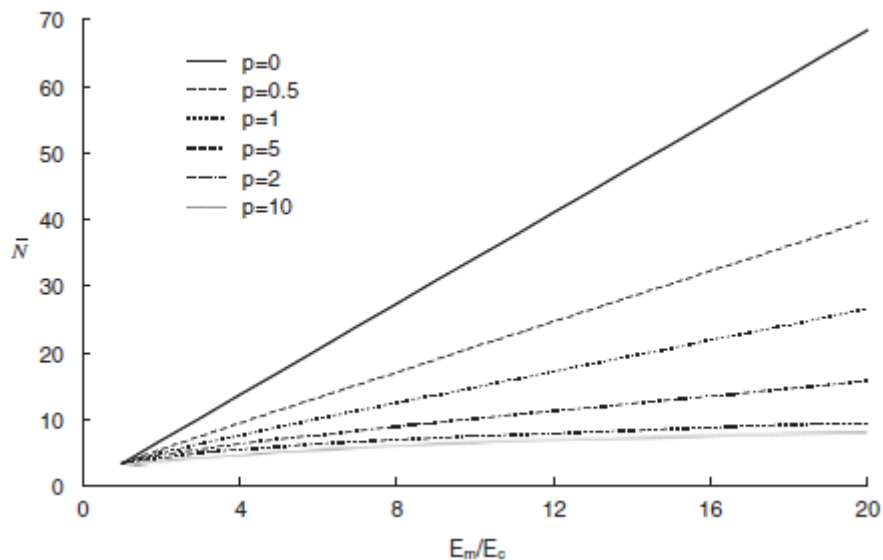


Figure III.21 : L'effet du rapport de module en fonction de la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque carrée simplement appuyée ($a = b = 10h$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = 0$) (Thai H.T.et Choi D.H. 2012)

La (figure III.21) montre la variation de la charge de flambement critique non dimensionnelle de la plaque carrée FGM en fonction du rapport de module (E_m/E_c) (c'est-à-dire différents mélanges céramique-métal) pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance.

Le rapport d'épaisseur (a/h) est supposé égal à (10). On peut voir que la charge critique de flambage non dimensionnelle augmente lorsque le rapport de module métal sur céramique augmente, et diminue lorsque l'indice de loi de puissance augmente.

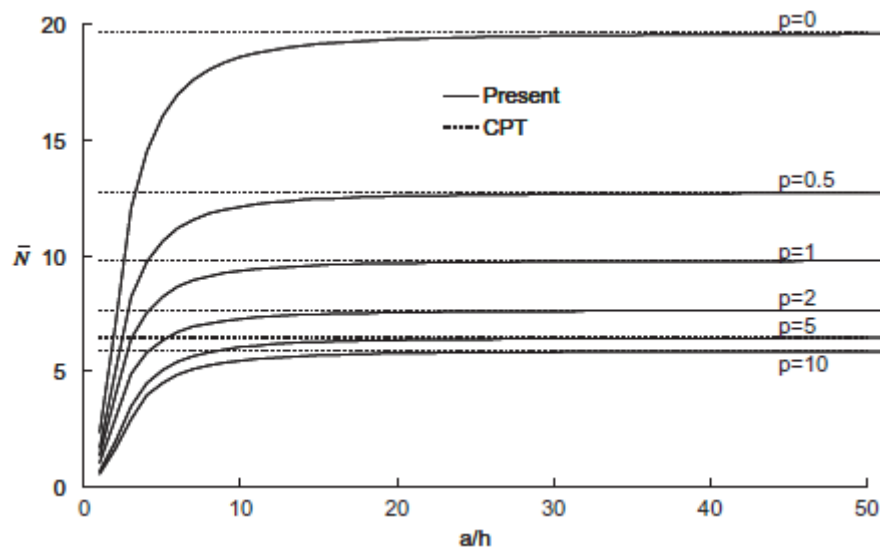


Figure III.22 : L'effet du rapport d'épaisseur sur la charge de flambement critique non dimensionnelle (\bar{N}) d'une plaque carrée simplement appuyée ($a = b$) sous compression uniaxiale le long de l'axe x ($\gamma_1 = -1$; $\gamma_2 = 0$) (Thai H.T. et Choi D.H. 2012)

La variation de la charge critique de flambement non dimensionnelle de la plaque en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) est démontrée sur la (figure III.22) en utilisant la théorie raffinée et le CPT.

Étant donné que les effets de déformation par cisaillement transversal de la plaque ne sont pas pris en compte dans le CPT, les valeurs de la charge critique de flambement non dimensionnelle prédite par le CPT sont indépendantes du rapport d'épaisseur. Alors que les valeurs de la charge critique de flambement non dimensionnelle prédites par la théorie actuelle, qui tient compte des effets de déformation de cisaillement transversal, dépendent du rapport d'épaisseur.

On observe que la charge de flambement critique non dimensionnelle augmente par l'augmentation du rapport d'épaisseur (a/h), tandis que le CPT surestime la charge de flambement critique non dimensionnelle de la plaque FG. La différence entre deux théories est considérable pour les plaques épaisses ($a/h < 10$), et négligeable pour les plaques minces.

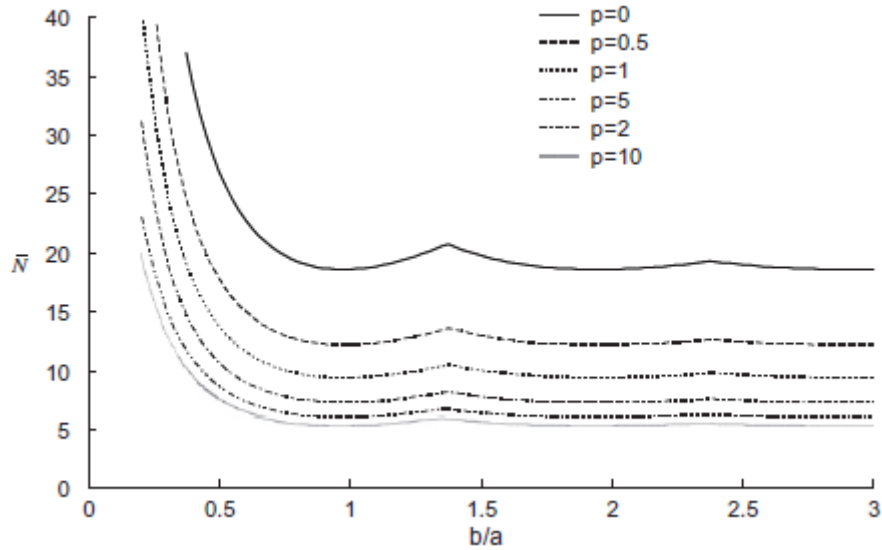


Figure III.23 : L'effet du rapport d'aspect sur la charge critique de flambement non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a = 10h$) sous compression uniaxiale le long de l'axe y ($\gamma_1 = 0 ; \gamma_2 = -1$) (Thai H.T.et Choi D.H. 2012)

Les effets du rapport d'aspect (b/a) sur la charge de flambement critique non dimensionnelle d'une plaque simplement appuyée sous compression uniaxiale et compression biaxiale sont représentés sur les (figures III.23 et III.24), respectivement. Le rapport d'épaisseur (a/h) est supposé égal à 10. Il est montré que la charge critique de flambement non dimensionnelle diminue généralement par l'augmentation du rapport d'aspect (b/a). Dans le cas d'une compression uniaxiale comme le montre la (figure III.23), le graphique n'est pas lisse en raison du changement de mode de flambement critique lorsque le rapport d'aspect augmente.

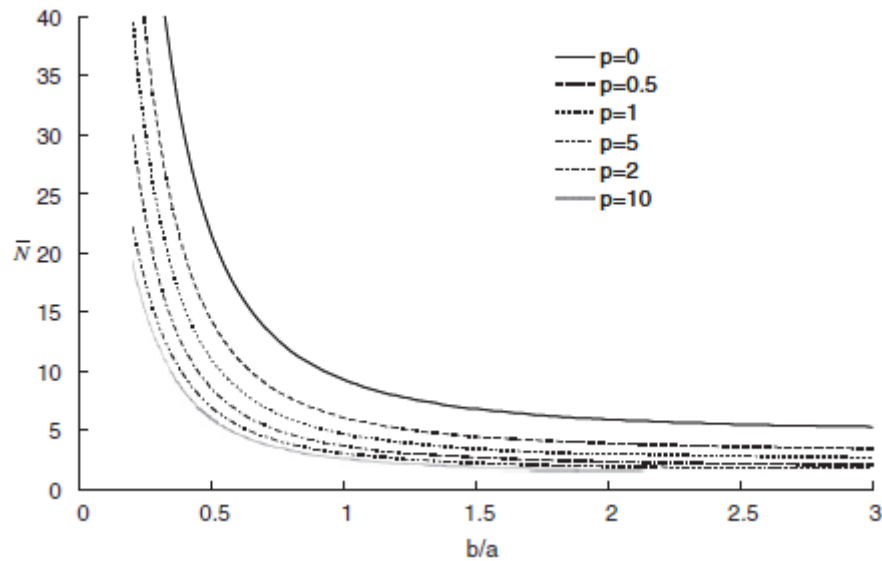


Figure III.24 : L'effet du rapport d'aspect sur la charge de flambement critique non dimensionnelle \bar{N} d'une plaque rectangulaire simplement appuyée ($a = 10h$) sous compression biaxiale ($\gamma_1 = -1 ; \gamma_2 = -1$) (Thai H.T.et Choi D.H. 2012)

Alors que le graphique dans le cas de la compression biaxiale comme montré sur la (figure III.24) est lisse en raison de l'existence d'un seul mode de flambement critique quel que soit le rapport d'aspect (b/a).

On observe que dans le cas d'une plaque soumise à une compression biaxiale, un seul mode de flambement critique existe quels que soient le rapport d'aspect, le rapport d'épaisseur et l'indice de loi de puissance.

(Latifi M. et al. 2013) ont utilisé le CPT basé sur une surface physique neutre avec une double expansion en série de Fourier des fonctions de déplacement pour étudier le comportement de flambement des plaques FGM soumises à des charges compressives biaxiales proportionnelles avec des supports de bord arbitraires.

III.3.2 Chargement thermomécanique

La technique de solution de Navier a été employée par (Lanhe W. 2004) pour étudier le flambage thermique de plaques FGM rectangulaires moyennement épaisses, simplement appuyées, basées sur le FSDT et soumises à deux types de champs de température ; élévation et gradient de température uniformes et non linéaire sur toute l'épaisseur de la plaque.

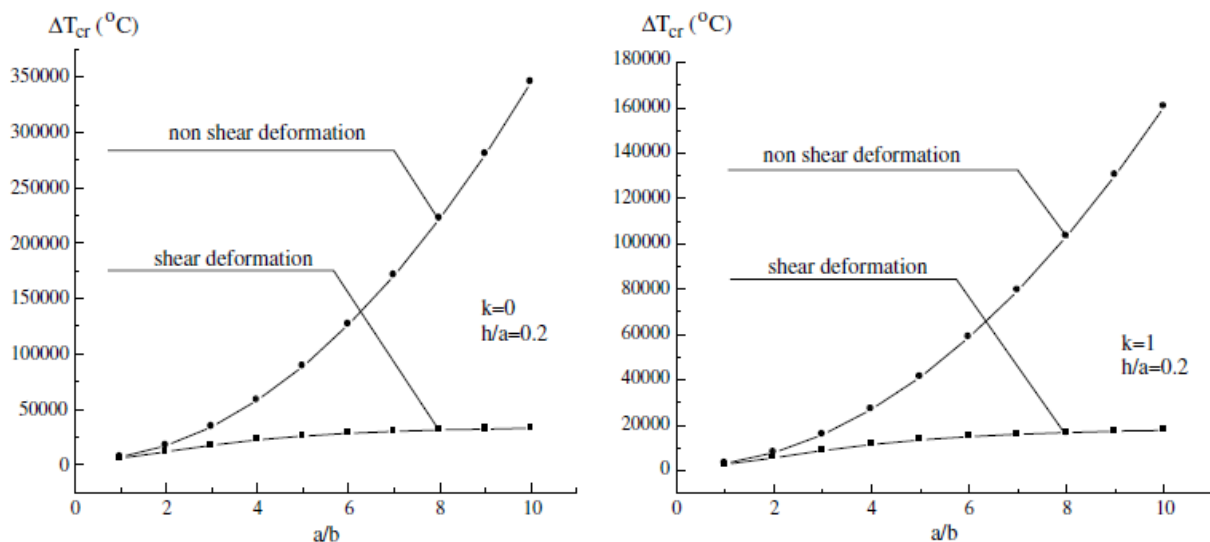


Figure III.25 : Température de flambement critique de la plaque FGM sous l'élévation de la température uniforme par rapport au rapport d'aspect de la plaque. (Lanhe W. 2004).

La (figure III.25) montre la tendance de variation de la différence de température critique par rapport au rapport d'aspect de la plaque (a/b) pour différentes valeurs de l'indice de gradient de matériau (k). L'épaisseur relative de la plaque est définie comme ($h/a = 0.2$). On

observe qu'en augmentant le rapport d'aspect de la plaque (a/b) de 1 à 10, la différence de température critique de flambage augmente également régulièrement, quel que soit l'indice de gradient de matériau k .

On constate également que la déformation transversale par cisaillement a un certain effet sur la différence de température de flambement. Lorsque le rapport d'aspect de la plaque augmente, la différence de température critique augmente lentement lorsque le cisaillement transversal est pris en compte.

Cependant, elle augmente très rapidement si la déformation par cisaillement est négligée. Cela signifie que plus le rapport d'aspect de la plaque est grand, plus l'influence de la déformation de cisaillement sur la température de flambage sera importante.

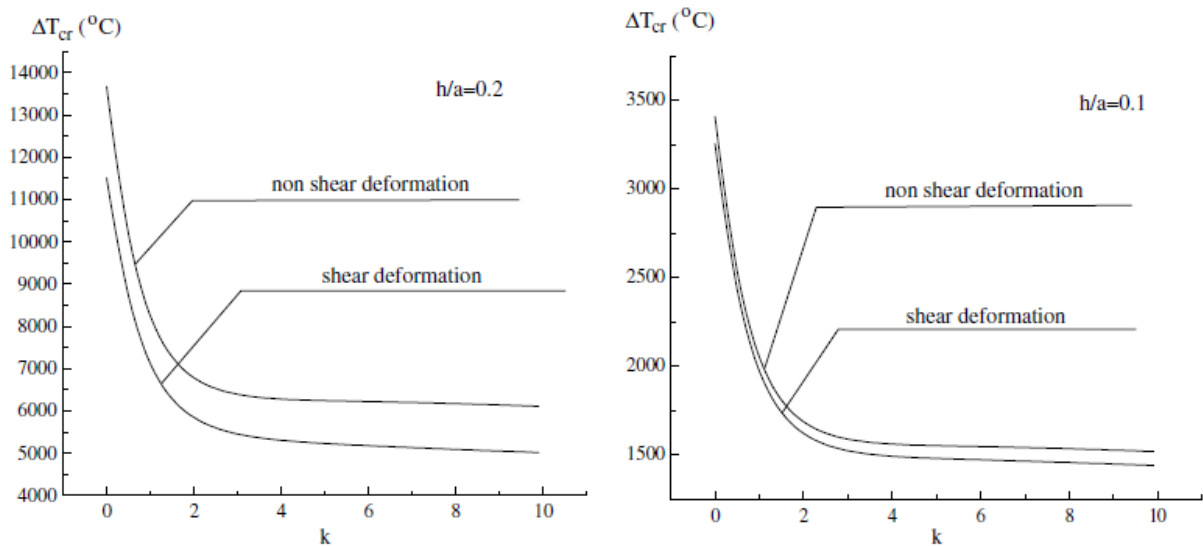


Figure III.26 : Différence température de flambement critique de la plaque épaisse FGM due à une élévation de température non linéaire sur toute l'épaisseur (Lanhe W. 2004).

La (figure III.26) montre la différence de température critique par rapport à l'indice de gradient de matériau pour une plaque à gradation fonctionnelle sous une élévation de température non uniforme sur toute l'épaisseur. Comme dans le cas où la température augmente uniformément, la différence de température critique de flambement diminue à mesure que l'indice gradué (k) augmente. Lorsque l'indice de gradient de matériau (k) est supérieur à 2, (ΔT_{cr}) diminue très lentement.

(Matsunaga H. 2009) a utilisé une théorie bidimensionnelle globale de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour étudier le comportement au flambement des plaques FGM soumises à des charges thermiques. La technique de résolution de Navier ainsi que plusieurs

ensembles de théories approximatives ont été utilisées pour obtenir la solution du problème des valeurs propres.

La variation des températures critiques des plaques FG avec des bords simplement appuyés et soumises à une température uniformément répartie est représentée sur la (figure III.27) par rapport à l'indice de loi de puissance p pour plusieurs valeurs du rapport côté/épaisseur (a/h), le rapport d'aspect (a/b) et pour les modes de déformation de ($r = s = 1$).

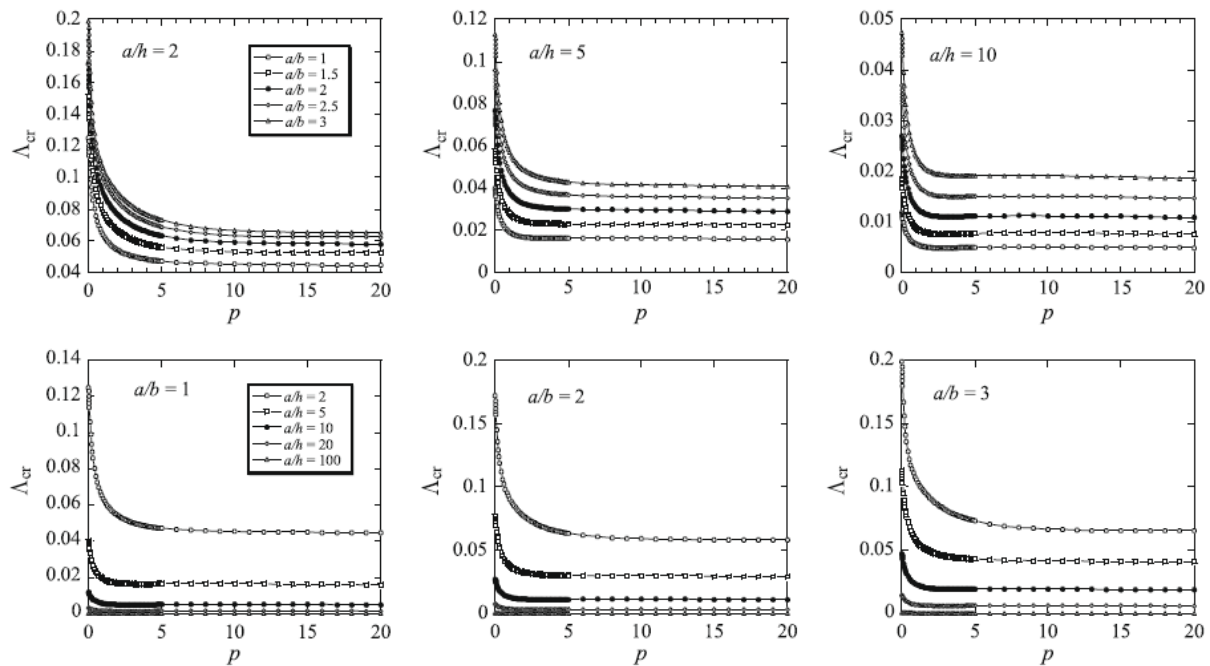


Figure III.27 : Températures critiques Λ_{cr} des plaques FG. ($a/h = 2, 5, 10$; $a/b = 1, 2, 3$; $r = s = 1$) (Matsunaga H. 2009)

Pour ces propriétés de matériau, les températures critiques diminuent rapidement dans la gamme de ($p = 0$) (riche en céramique) à ($p = 5$). Lorsque (p) devient plus grand, toutes les températures critiques se rapprochent lentement des valeurs de ($p = 1$) (riche en métal).

(Zenkour A.M. et Sobhy M. 2010) ont présenté une solution analytique pour trouver la différence de température critique de flambement de diverses plaques sandwich FGM symétriques simplement appuyées, basées sur la non-linéarité SSDT et von-Kármán. Trois types de charges thermiques ont été considérés, à savoir la distribution uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur.

Les résultats obtenus ont été comparés à ceux des CPT, TSDT et FSDT. Il a été constaté

que les résultats obtenus étaient supérieurs à ceux attendus en utilisant le reste des théories de déformation par cisaillement.

La (figure III.28) montre l'effet du paramètre d'inhomogénéité k sur la température critique de flambement T_{cr} pour différents types de plaques sandwich sous un changement de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur en utilisant le HPT.

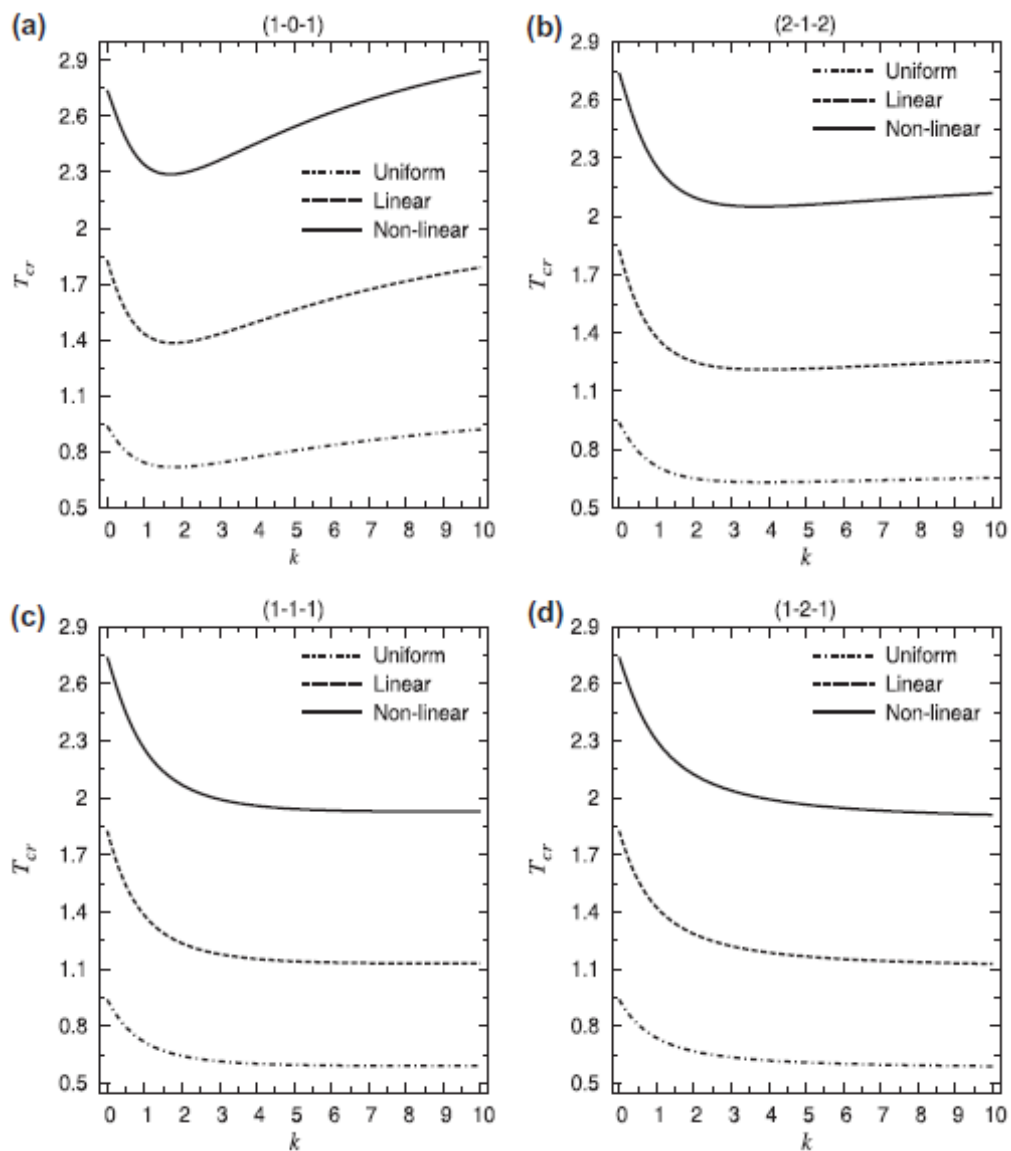


Figure III.28 : Différence de température critique de flambement T_{cr} par rapport à l'indice de loi de puissance k pour différents types de plaques carrées sandwich FGM ; ($a/h = 10$) (Zenkour A.M. et Sobhy M. 2010)

Il est clair que la température critique de flambement (T_{cr}) pour les plaques sous un changement de température non linéaire est plus élevée que pour les plaques sous un changement de température uniforme. Alors que (T_{cr}) pour les plaques sous changement de

température linéaire est intermédiaire aux deux précédents cas de chargement thermique.

On observe en outre que, pour la plaque sans noyau ou l'âme de la plaque fait la moitié de l'épaisseur de la face, le flambement critique (T_{cr}) diminue de façon enragée pour atteindre les valeurs minimales puis augmente progressivement à mesure que le paramètre d'inhomogénéité (k) augmente comme le montre la (Fig. III.28a et b). Cependant, pour les plaques sandwich FGM (1-1-1) et (1-2-1), (T_{cr}) diminue progressivement à mesure que (k) augmente (voir Fig. III.28c et d).

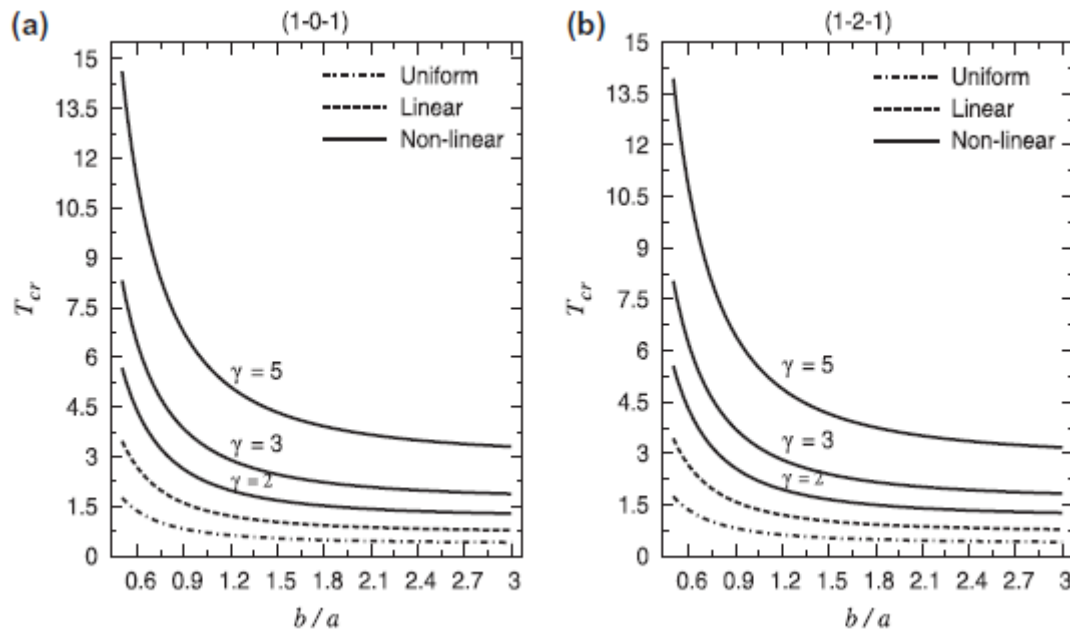


Figure III.29 : Différence de température critique de flambement T_{cr} par rapport au rapport d'aspect de la plaque (b/a) pour deux types de plaques sandwich FGM ; ($k = 1, a/h = 10$) (Zenkour A.M. et Sobhy M. 2010)

Le changement de température critique de flambement (T_{cr}) en fonction du rapport d'aspect (b/a) des plaques sandwich FGM sous divers types de charge thermique est présenté sur la (figure III.29). On peut observer qu'avec l'augmentation du rapport d'aspect de la plaque (b/a), le flambement critique (T_{cr}) diminue progressivement quel que soit le type de chargement. On remarque également à partir de la (figure III.29) que la (T_{cr}) augmente avec l'augmentation du paramètre de non-linéarité (γ).

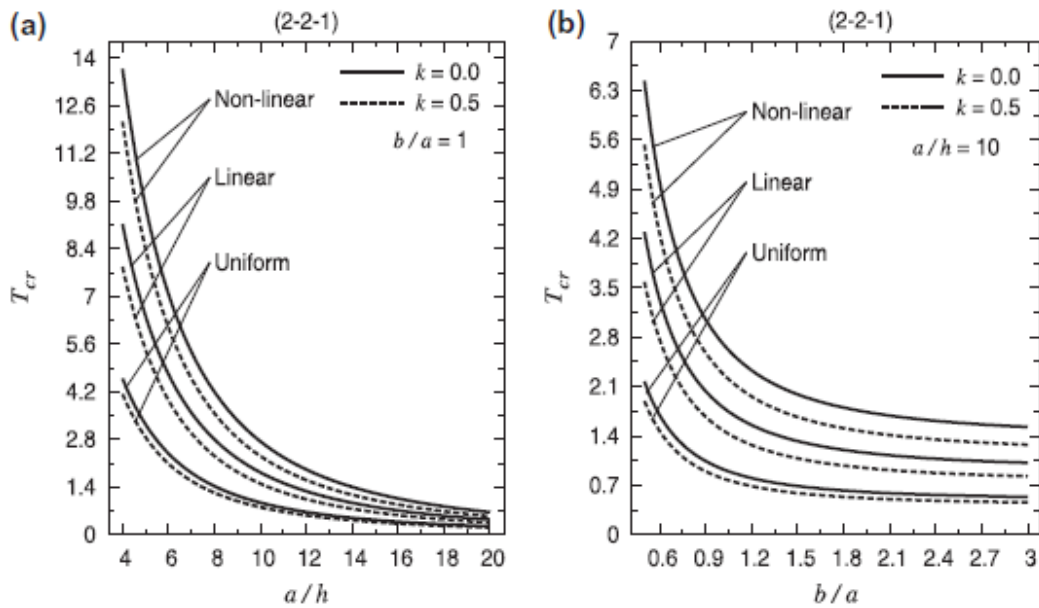


Figure III.30 : Différence de température critique de flambement T_{cr} par rapport au rapport côté/épaisseur (a/h) et au rapport d'aspect (b/a) de la plaque sandwich non symétrique (Zenkour A.M. et Sobhy M. 2010)

De plus, les résultats de la plaque sandwich FGM non symétrique sont affichés sur la (figure III.30). On peut voir sur cette figure que, quels que soient le type de chargement et l'indice de loi de puissance (k), la différence de température critique de flambement (T_{cr}) diminue à mesure que, le rapport d'épaisseur (a/h) et le rapport d'aspect (b/a) augmentent.

La température critique de flambement de la plaque céramique est plus élevée que celle de la plaque sandwich FGM. C'est parce que la plaque en céramique est plus solide que l'autre. Les différences entre les types de chargement diminuent avec l'augmentation de (a/h) car la plaque devient mince.

(Kettaf F.Z. et al. 2013) ont utilisé le nouveau modèle de déplacement hyperbolique à quatre inconnues pour étudier le comportement de flambage thermique de plaques sandwich constituées de plaques frontales FGM et d'un noyau homogène en céramique isotrope.

(Shariat B.A.S et Eslami M.R 2007) ont proposé une solution de forme fermée pour l'analyse de flambage de plaques FGM rectangulaires épaisses basée sur le TSDT sous charges mécaniques et thermiques. Trois types de charges mécaniques ont été considérés à savoir ; compression uniaxiale, compression biaxiale ainsi compression et traction biaxiales avec deux types de charges thermiques à savoir, élévation de température uniforme et élévation de température non uniforme à travers l'épaisseur.

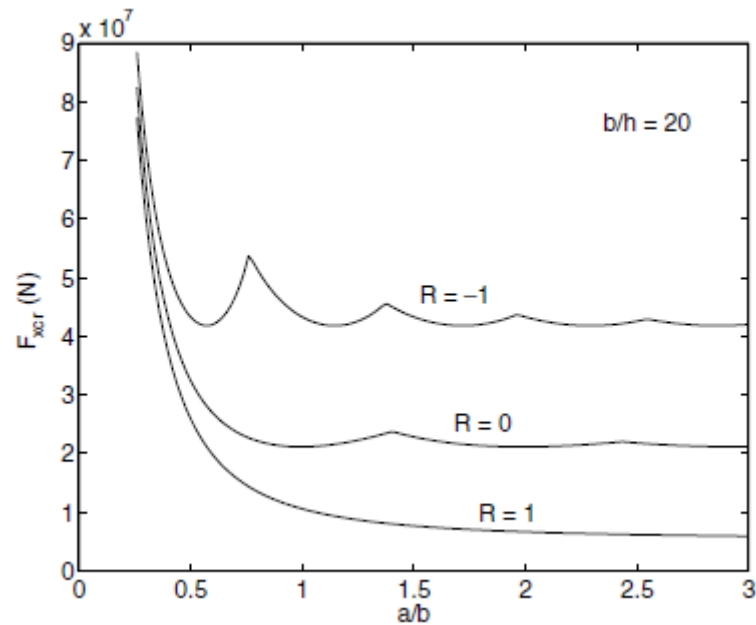


Figure III.31 : Charge de flambement critique des plaques FG sous compression uniaxiale ($R = 0$), biaxiale ($R = 1$) et biaxiale et traction ($R = -1$) en fonction du rapport d'aspect, basée sur la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre (Shariat B.A.S et Eslami M.R 2007)

La (figure III.31) illustre la variation de la charge de flambement critique des plaques FG en fonction du rapport d'aspect (a/b), sous différents types de charge mécanique dans le plan. Il est montré que la charge de flambement diminue généralement par l'augmentation du rapport d'aspect (a/b).

Dans le cas de la compression biaxiale ($R = 1$), le graphique est lisse, ce qui est dû au mode de flambement inchangé. Comme prévu, la charge de flambement de la plaque sous compression uniaxiale est supérieure à celle sous compression biaxiale et inférieure à celle sous compression et traction biaxiales.

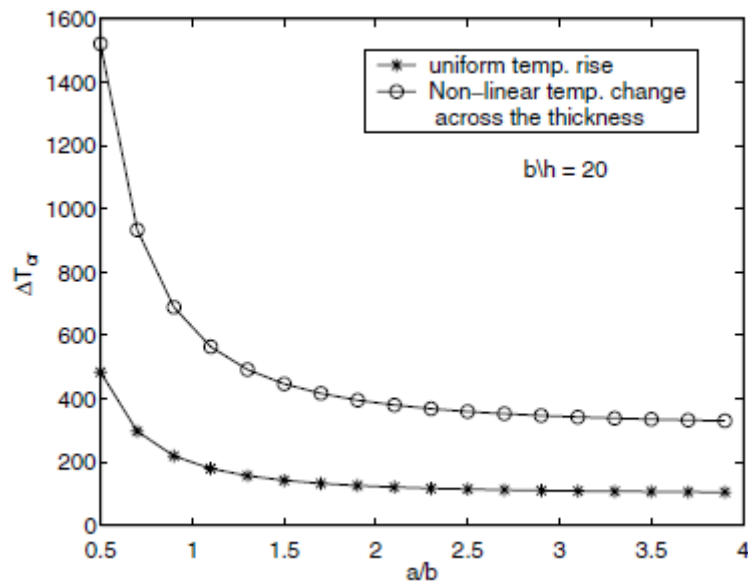


Figure III.32 : Changement critique de température de flambement des plaques FG sous élévation de température uniforme et changement de température non linéaire sur toute l'épaisseur, en fonction du rapport d'aspect, basé sur(TSDT) (Shariat B.A.S et Eslami M.R 2007)

La (figure III.32) représente la variation de (ΔT_{cr}) en fonction du rapport d'aspect (a/b), pour que la plaque soumise séparément à deux types de chargement thermique. La plaque se déforme au premier mode pour tous les rapports d'aspect. La plaque sous gradient de température dans le sens de l'épaisseur se déforme à des variations de température plus élevées par rapport à une élévation de température uniforme.

La technique de résolution de Navier a été présentée par (Bouazza M. et al. 2010) pour l'analyse de stabilité de plaques FGM simplement appuyées soumises à une élévation de température uniforme et linéaire sur l'épaisseur basée sur le FSDT.

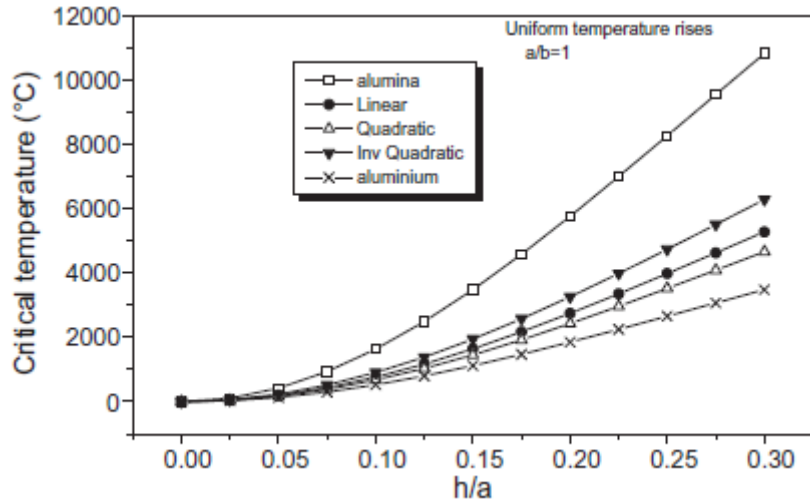


Figure III.33 : Variations des valeurs de changement de température critique pour les plaques métalliques, céramiques et FGM en fonction du rapport h/a , avec tous les profils de composition, sous élévation de température uniforme (Bouazza M. et al. 2010).

La variation de la température critique (ΔT_{cr}) des plaques FGM aluminium-alumine sous une élévation de température uniforme et une élévation de température linéaire, pour différents paramètres géométriques et les différentes fractions volumiques (V_c) suivant des lois de puissance simples sont tracées sur les (figures III.33 et 34), respectivement.

Les boîtiers en alumine et aluminium isotropes correspondent respectivement à des plaques entièrement céramiques et des plaques entièrement métalliques. Tandis que les autres cas, le profil compositionnel ont linéaire, quadratique, quadratique inverse, sont pour les plaques graduées avec deux matériaux constitutifs.

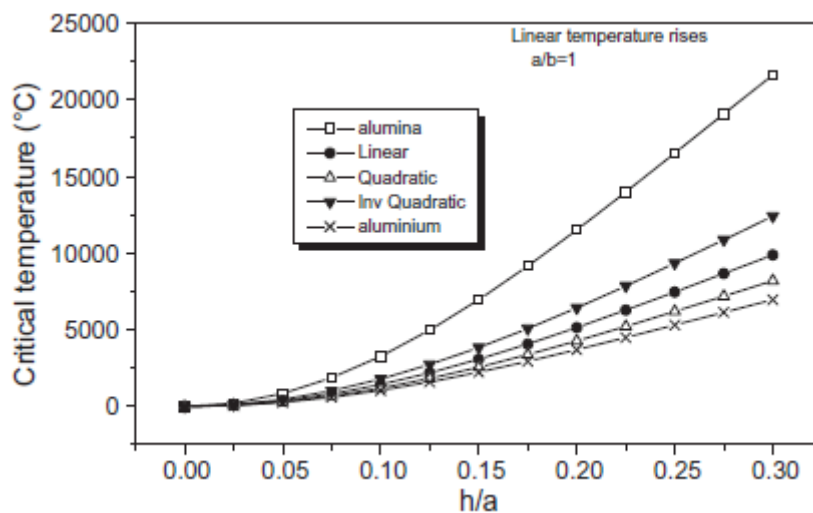


Figure III.34 : Variations des valeurs de changement de température critique pour les plaques métalliques, céramiques et FGM en fonction du rapport h/a , avec tous les profils de composition sous élévation linéaire de température (Bouazza M. et al. 2010).

Dans les (figures III.33 et 34), on constate que le changement de température critique des plaques FGM est supérieur à celui des plaques entièrement métalliques mais inférieur à celui des plaques entièrement céramiques, la température critique obtenue à partir du profil de composition a un quadratique inverse, supérieur au linéaire, cubique et les cas quadratiques.

Dans tous les cas de matériels, le changement de température critique augmente, lorsque le paramètre géométrique (h/a) est augmenté. En comparant la (figure III.33) et (figure III.34), les réponses sont très similaires ; cependant, le gradient de température critique sous élévation linéaire de température est supérieur à celui sous élévation uniforme de température.

Un examen complet des diverses méthodes utilisées pour étudier les comportements statiques, dynamiques et de stabilité des plaques fonctionnellement graduées peut être trouvé dans les travaux de (Swaminathan, K. et al., 2015).

III.4 Conclusion

La détermination du comportement précis des FGM dépend en grande partie de la théorie utilisée pour modéliser la structure car dans ces derniers, les propriétés des matériaux varient en permanence en fonction de la position dans la direction préférée.

Les FGM typiques sont composés de matériaux céramiques et métalliques. La céramique offre une résistance aux températures élevées tandis que les métaux ont une ténacité élevée. Ainsi, les FGM sont généralement utilisés dans la fabrication de composants structurels résistants à la chaleur tels que les fuselages d'avion ou les parois des usines de réaction nucléaire...etc.

Chapitre IV : Étude du flambement et de la vibration libre des plaques sandwich en utilisant la théorie d'ordre élevé

IV.1 Introduction

Étant donné que l'influence de la déformation de cisaillement est considérablement importante dans les plaques épaisses ou les plaques fabriquées à partir de FGM, les théories de la déformation de cisaillement telles que la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) et les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) devraient être utilisées pour étudier les réponses mécaniques des plaques FG.

Dans le présent chapitre, une formulation efficace et simple est développée. Elle sert à analyser le flambement et la vibration des plaques sandwich à gradation exponentielle. Ces plaques reposent sur des fondations élastiques dans diverses conditions aux limites. Le point fort de cette nouvelle formulation est que, en plus d'incorporer l'effet de déformation de cisaillement, elle exprime les composantes de déplacement avec seulement trois inconnus comme la théorie classique des plaques (CPT). Cette théorie est encore inférieure à la (FSDT) et ne nécessite pas de paramètre de correction de cisaillement. La plaque sandwich est fondée sur des fondations élastiques à deux paramètres isotropes ou orthotropes. Les équations de mouvement de plaques sandwich à gradation exponentielle (EGM) reposant sur des fondations élastiques sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Ces équations de mouvement pour la plaque sandwich dans diverses conditions aux limites sont ensuite résolues.

IV.2 Description du problème et équations de base

IV.2.1 Configuration géométrique et propriétés des matériaux

Considérons une plaque sandwich avec trois couches comme illustré sur la (figure IV.1). Deux feuilles de face FG sont synthétisées d'un mélange de métal et de céramique, tandis que le noyau est fabriqué à partir d'un matériau homogène isotrope. On suppose qu'elle est posée sur une base élastique de type Winkler-Pasternak, avec une rigidité de Winkler (k_w) et une rigidité de cisaillement (k_s). Les propriétés matérielles de la plaque sont supposées variables continuellement suivant l'épaisseur de la plaque par une loi de distribution exponentielle comme (Sobhy 2013) :

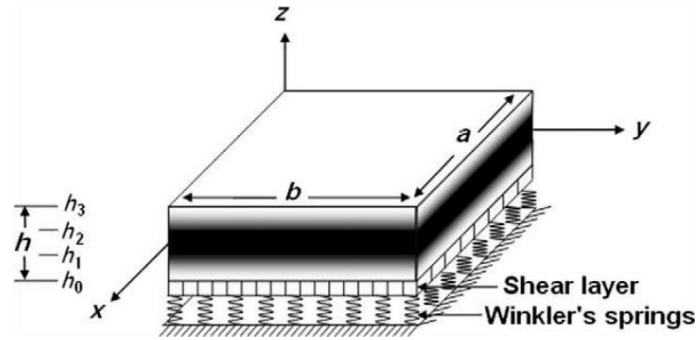


Figure IV.1 : Géométrie de la plaque sandwich à gradation exponentielle reposant sur des fondations élastiques

$$\bar{P}^{(n)}(z) = \bar{P}_m \exp(\beta V^{(n)}), \quad \beta = \ln\left(\frac{\bar{P}_c}{\bar{P}_m}\right), \quad (n = 1,2,3) \quad (\text{IV. 1})$$

\bar{P} : présente les propriétés matérielles tel que le module de Young (E) et la masse volumique (ρ), les indices (m) et (c) font référence au métal et à la céramique respectivement,

La fraction volumique $V^{(n)}$ de chaque couche est donnée par :

$$V^{(1)} = \left(\frac{2\bar{z}+1}{2\bar{h}_1+1}\right)^k, \quad -\frac{1}{2} \leq \bar{z} \leq \bar{h}_1 \quad (\text{IV. 2a})$$

$$V^{(2)} = 1, \quad \bar{h}_1 \leq \bar{z} \leq \bar{h}_2 \quad (\text{IV. 2b})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{2\bar{z}-1}{2\bar{h}_2-1}\right)^k, \quad \bar{h}_2 \leq \bar{z} \leq 1/2 \quad (\text{IV. 2c})$$

Où ($\bar{z} = z/h$), ($\bar{h}_i = h_i/h$) avec ($i = 1,2$) et (k) est le paramètre d'inhomogénéité qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. On note que le noyau est indépendant de la valeur de (k) qui est entièrement céramique.

IV.2.2 Relations constitutives

Pour les plaques sandwich à gradation exponentielle (EGM), les relations constitutives linéaires peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont respectivement les composantes de la contrainte et de la déformation. Les constantes élastiques (C_{ij}) sont définies comme :

$$C_{11}^{(n)} = C_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1 - \nu^2}, C_{12}^{(n)} = \nu C_{11}^{(n)}, \quad (\text{IV.4})$$

$$C_{44}^{(n)} = C_{55}^{(n)} = C_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)}$$

IV.2.3 Cinématique

Le champ de déplacement satisfaisant aux conditions des contraintes transversales de cisaillement (et donc des déformations) qui s'annule aux points $(x, y, \pm h/2)$ sur les surfaces haute (supérieure) et base (inférieure) de la plaque, est donné comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (\text{IV.5a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \beta f(z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \quad (\text{IV.5b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{IV.5c})$$

Où $(u_0, v_0$ et $w_0)$ sont trois fonctions de déplacement inconnues de la surface médiane de la plaque et (β) est un paramètre du présent modèle de déplacement. $f(z)$ est une fonction de forme représentant la distribution des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, est donnée comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{IV.6})$$

Les déformations linéaires non nulles associées au champ de déplacement dans l'Eq. (IV.5) sont

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \beta f(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (IV.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \beta g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (IV.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ -\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ -\frac{\partial^2 (\nabla^2 w_0)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \end{Bmatrix}$$

Et

$$g(z) = f'(z), \quad \nabla^2 w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (IV.9)$$

IV.2.4 Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour déterminer les équations de mouvement. Le principe peut être énoncé sous une forme analytique comme suit (Ebrahimi et Barati 2017, Eltahir et al.2018, Hadji et al.2019, Sahouane et al.2019, Fenjan et al.2019ab, Safa et al.2019, Mirjavadi et al. 2019, Hamed et al.2020, Eltahir et Mohamed 2020):

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (IV.10)$$

Où (δU) est la variation de l'énergie de la déformation ; (δV) est la variation du travail

induite par les forces extérieures ; et (δK) est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x \delta k_x + M_y \delta k_y + M_{xy} \delta k_{xy} \\ &+ \beta (s_x \delta \eta_x + s_y \delta \eta_y + s_{xy} \delta \eta_{xy} + Q_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0)] dA = 0 \end{aligned} \quad (IV.11)$$

Où A est la surface supérieure et les résultantes de contrainte N , M , S et Q sont définies par :

$$(N_i, M_i, S_i) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1, z, \beta f) (\sigma_i) dz, (i = x, y, xy) \text{ et} \quad (IV.12)$$

$$Q_i = \sum_{n=1}^3 (\tau_i) \beta g(z) dz, (i = xz, yz)$$

La variation du travail effectué par les charges appliquées peut être exprimée comme

$$\delta V = - \int_A (P - f_e) \delta (w_0 + w_0) dA \quad (IV.13)$$

Où (f_e) est la densité de la force de réaction de la fondation.

Pour le modèle de fondation Pasternak :

$$f_e = K_W w - K_{S1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{S2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (IV.14)$$

Où (K_W) est le module de réaction de la fondation (coefficient élastique de la fondation) et (K_{S1}) et (K_{S2}) sont les modules de cisaillement de la plate-forme (rigidité de la fondation de la couche de cisaillement). Si la fondation est homogène et isotrope, nous obtiendrons $(K_{S1} = K_{S2} = K_S)$.

Si la rigidité de la fondation de la couche de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient une fondation Winkler avec :

$$P = \left[P_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2P_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (\text{IV. 15})$$

La variation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_V \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \right. \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad - J_1 \beta \left(\dot{u}_0 \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial y^3} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \\ &\quad + K_2 \beta^2 \left(\frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial y^3} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial y^3} \right) \\ &\quad \left. + J_2 \beta \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial x^3} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial^3 \delta \dot{w}_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \dot{w}_0}{\partial y^3} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{IV. 16})$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps (t) ; $\rho(z)$ est la masse volumique ; et ($I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2$) sont des inerties de masse définies comme

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{IV. 17})$$

En utilisant les expressions pour ($\delta U, \delta V$ et δK) des équations (IV.11), (IV.14) et (IV.16) dans l'équation (IV.10) et en intégrant par parties, et en collectant les coefficients de ($\delta u_0, \delta v_0$ et δw_0), les équations de mouvement de la plaque sont exprimées par :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0: \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3} \\
 \delta v_0: \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial y^3} \\
 \delta w_0: \quad & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\
 & + \beta \left(\frac{\partial^4 S_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 S_{xy}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 S_{xy}}{\partial y^3 \partial x} + \frac{\partial^4 S_y}{\partial y^4} - \frac{\partial^3 Q_{xz}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 Q_{yz}}{\partial y^3} \right) \\
 & - P - f_e = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + \beta J_1 \left(\frac{\partial^3 \ddot{u}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \ddot{v}_0}{\partial y^3} \right) - 2\beta J_2 \left(\frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial y^4} \right) - \beta^2 K_2 \left(\frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial y^6} \right)
 \end{aligned} \tag{IV. 18}$$

En remplaçant l'Eq. (7) dans l'Eq. (3) et les résultats ultérieurs en Eq. (12), les contraintes résultantes de la plaque FG sont liées à la déformation totale par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & \beta B_{11}^s & \beta B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & \beta B_{12}^s & \beta B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & \beta B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & \beta D_{11}^s & \beta D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & \beta D_{12}^s & \beta D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & \beta D_{66}^s \\ \beta B_{11}^s & \beta B_{12}^s & 0 & \beta D_{11}^s & \beta D_{12}^s & 0 & \beta^2 H_{11}^s & \beta^2 H_{12}^s & 0 \\ \beta B_{12}^s & \beta B_{22}^s & 0 & \beta D_{12}^s & \beta D_{22}^s & 0 & \beta^2 H_{12}^s & \beta^2 H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & \beta B_{66}^s & 0 & 0 & \beta D_{66}^s & 0 & 0 & \beta^2 H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{yz} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \tag{IV. 19a}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \tag{IV. 19b}$$

Où

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} \\
 & = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ v \\ 1-v \\ 2 \end{Bmatrix} dz
 \end{aligned} \tag{IV. 20a}$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \tag{IV. 20b}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{44}[g(z)]^2 dz, \tag{IV. 20c}$$

Les équations de mouvement de la théorie actuelle de la déformation de cisaillement trigonométrique à trois inconnus peuvent être écrites en termes de déplacements (u_0 , v_0 et w_0) en substituant l'équation (IV.8) aux équations. (IV.19) et les résultats ultérieurs dans l'Eq. (IV.18)

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \beta \left(B_{66}^s \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial y^4} + B_{11}^s \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \right) \quad (IV.21a)$$

$$= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3}$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \beta \left(B_{66}^s \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \right) \quad (IV.21b)$$

$$= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - \beta J_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial y^3}$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \beta \left[B_{11}^s \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^5 u_0}{\partial x \partial y^4} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^5 v_0}{\partial x^4 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^5 v_0}{\partial y^5} + B_{66}^s \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^3 \partial y^2} + B_{66}^s \frac{\partial^5 v_0}{\partial x^2 \partial y^3} - 2D_{11}^s \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^2 \partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^4 \partial y^2} - 2D_{22}^s \frac{\partial^6 w_0}{\partial y^6} \right] \quad (IV.21 c)$$

$$- \beta^2 \left[H_{11}^s \frac{\partial^8 w_0}{\partial x^8} + 2(H_{12}^s + H_{66}^s) \frac{\partial^8 w_0}{\partial x^4 \partial y^4} + H_{66}^s \frac{\partial^8 w_0}{\partial x^6 \partial y^2} + H_{66}^s \frac{\partial^8 w_0}{\partial x^2 \partial y^6} \right.$$

$$\left. + H_{22}^s \frac{\partial^8 w_0}{\partial y^8} - A_{44}^s \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} - A_{55}^s \frac{\partial^6 w_0}{\partial y^6} \right] - P - f_e$$

$$= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + \beta J_1 \left(\frac{\partial^3 \ddot{u}_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \ddot{v}_0}{\partial y^3} \right)$$

$$- 2\beta J_2 \left(\frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial y^4} \right) - \beta^2 K_2 \left(\frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 \ddot{w}_0}{\partial y^6} \right)$$

IV.3 Solutions analytiques

La solution analytique de l'Eq. (21) peut être déterminée pour des plaques sandwich EGM dans diverses conditions aux limites en employant les expansions suivantes de déplacements généralisés :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{mn} \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} e^{i\omega t} \\ W_{mn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \end{pmatrix} \quad (IV.22)$$

Où ($i = \sqrt{-1}$), (U_{mn} , V_{mn} , W_{mn}) sont des coefficients, et ($\omega = \omega_{mn}$) désigne la fréquence propre associée à (m , n) ème mode propre. Les fonctions ($X_m(x)$ et $Y_n(y)$) sont suggérées par (Sobhy 2013) pour satisfaire les diverses conditions aux limites, et elles sont listées dans le (tableau IV-1) en notant que ($\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$).

La plaque est supposée avoir des bords simplement appuyés (S), encastées (C) ou libres (F) ou avoir des combinaisons de ceux-ci, et ils sont donnés comme suit :

Tableau IV-1: Les fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$

	Conditions aux limites		Les fonctions X_m et Y_n	
	à $x = 0, a$	à $y = 0, b$	X_m	Y_n
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
	$X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CSSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$	$\sin(\mu y)$
	$X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CSCS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$	$\sin(\mu x)[\cos(\mu x) - 1]$
	$X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CCSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
	$X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CCCC	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
	$X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
FFCC	$X_m''(0) = X_m'''(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$	$\cos^2(\lambda x)[\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin^2(\mu y)$
	$X_m''(a) = X_m'''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$		

()' Désigne la dérivée par rapport aux coordonnées correspondantes

En substituant Eq. (IV.22) dans les équations (IV.21) et en multipliant chaque équation par la fonction propre correspondante puis en intégrant sur le domaine de solution, on peut obtenir les solutions analytiques comme suit :

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV. 23})$$

Les termes S_{ij} sont donnés par :

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_{11}\alpha_{12} + A_{66}\alpha_8 \\ S_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_8 \\ S_{13} &= -B_{11}\alpha_{12} - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_8 \\ &\quad - \beta(B_{11}^s\alpha_{15} + (B_{12}^s + B_{66}^s)\alpha_{14} + B_{66}^s\alpha_{28}) \\ S_{21} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_{10} \\ S_{22} &= A_{22}\alpha_4 + A_{66}\alpha_{10} \\ S_{23} &= -B_{11}\alpha_4 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{10} \\ &\quad - \beta(B_{22}^s\alpha_{17} + (B_{12}^s + B_{66}^s)\alpha_{33} + B_{66}^s\alpha_{16}) \\ S_{31} &= B_{11}\alpha_{13} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} \\ &\quad - \beta(B_{11}^s\alpha_{18} + (B_{12}^s + B_{66}^s)\alpha_{19} + B_{66}^s\alpha_{26}) \\ S_{32} &= B_{22}\alpha_5 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} \\ &\quad - \beta(B_{22}^s\alpha_{27} + (B_{12}^s + B_{66}^s)\alpha_{26} + B_{66}^s\alpha_{19}) \\ S_{33} &= -D_{11}\alpha_{13} - 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_{11} - D_{22}\alpha_5 - \beta D_{11}^s\alpha_{18} \\ &\quad - \beta D_{22}^s\alpha_{27} - 2\beta((D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{19} + (D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{26}) - \\ &\quad \beta^2 \left(H_{11}^s\alpha_7 + 2(H_{12}^s + H_{66}^s)\alpha_{21} + H_{66}^s(\alpha_{20} + \alpha_{22}) \right. \\ &\quad \left. + H_{22}^s\alpha_{23} + A_{44}^s\alpha_{18} + A_{55}^s\alpha_{27} \right) \\ &\quad + K_{S1}\alpha_9 + K_{S2}\alpha_3 - K_W\alpha_1 - P_x^0\alpha_9 - P_y^0\alpha_3 \end{aligned} \quad (\text{IV. 24})$$

Et les termes m_{ij} sont définis par :

$$\begin{aligned} m_{11} &= -I_0\alpha_6 \\ m_{13} &= I_1\alpha_6 + J_1\alpha_{12} \\ m_{22} &= -I_0\alpha_2 \\ m_{23} &= I_1\alpha_2 + J_1\alpha_4 \\ m_{31} &= -I_1\alpha_{31} + \beta J_1\alpha_{13} \\ m_{32} &= -I_1\alpha_{31} + \beta J_1\alpha_5 \\ m_{33} &= -I_0\alpha_1 + I_2(\alpha_3 + \alpha_9) + 2\beta J_2(\alpha_{11} + \alpha_5) + \beta^2 K_2(\alpha_{27} + \alpha_{18}) \end{aligned} \quad (\text{IV. 25})$$

Avec

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_m, X_m Y'', X_m Y_m^{(IV)}) X_m Y_n dx dy \\
 (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{10}, \alpha_{33}, \alpha_{16}, \alpha_{17}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n', X_m Y_n''', X_m'' Y_n', X_m^{(IV)} Y_n', X_m'' Y_n''', X_m Y_n^{(V)}) X_m Y_n' dx dy \\
 (\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{12}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n, X_m' Y_n'', X_m''' Y_n) X_m' Y_n dx dy \\
 (\alpha_{28}, \alpha_{14}, \alpha_{15}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m''' Y_n'', X_m' Y_n^{(IV)}, X_m^{(V)} Y_n) X_m' Y_n dx dy \tag{IV.26} \\
 (\alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}, \alpha_{18}, \alpha_{19}, \alpha_{20}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m^{(VIII)} Y_n, X_m'' Y_n, X_m'' Y_n'', X_m^{(IV)} Y_n, X_m^{(VI)} Y_n, X_m'' Y_n^{(IV)}, X_m^{(VI)} Y_n'') X_m Y_n dx dy \\
 (\alpha_{27}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{26}, \alpha_{31}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_m^{(VI)}, X_m^{(IV)} Y_m^{(IV)}, X_m'' Y_m^{(VI)}, X_m Y_m^{(VIII)}, X_m^{(IV)} Y''', X_m' Y_n) X_m Y_n dx dy
 \end{aligned}$$

La solution non triviale est déterminée lorsque le déterminant de l'Eq. (IV.23) vaut zéro. Pour le problème des vibrations libres, nous avons ($P_x^0 = P_y^0 = P_{xy}^0 = 0$). Alors que pour l'analyse de flambement, nous mettons ($\omega = P_{xy}^0 = 0$; $P_x^0 = \bar{P}$) et ($P_y^0 = \xi \bar{P}$) c'est-à-dire ($\xi = P_y^0 / P_x^0$).

Il est à noter que la solution actuelle dépend du choix du paramètre (β) de la théorie proposée. Dans cette étude, la valeur adéquate est considérée comme une solution du problème des valeurs propres $[[S] - \omega^2[M]] = 0$.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement en flambement et en vibration libre des plaques sandwich en matériaux à gradation exponentielle (EGM) en utilisant une nouvelle théorie simple d'ordre élevé à trois inconnus.

Les performances de la présente formulation sont vérifiées en la comparant aux solutions HSDT disponibles dans la littérature.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement

Chapitre IV Etude de flambement et de vibration des plaques sandwich en utilisant la théorie d'ordre élevé

l'apport de cette nouvelle théorie en les comparants avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Chapitre V : Résultats et discussions

V.1 Introduction

Ce chapitre traite l'efficacité de la théorie développée pour l'analyse de la vibration libre et du flambement des plaques sandwich en matériau à gradation exponentielle (EGM) reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak, pour différentes conditions aux limites. La présente théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé comporte un champ de déplacement à trois inconnus seulement. Dans ladite théorie, une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur a été utilisée. La solution analytique du présent travail est comparée à celle d'autres théories.

V.2 Résultats numériques

Pour vérifier l'exactitude du modèle développé, plusieurs comparaisons et études paramétriques sont présentées. Les résultats présentés sont sous forme adimensionnelle, définis comme suit :

$$\omega^* = \frac{\omega a^2}{h}; \bar{N} = \frac{\bar{P} a^2}{100h^3}; K_0 = \frac{a^4 K_W}{D}; J_0 = \frac{a^2 K_{S1}}{D} = \frac{b^2 K_{S2}}{D}; D = \frac{h^3 E_C}{12(1 - \nu^2)} \quad (V.1)$$

La plaque sandwich FG est composée de deux combinaisons de matériaux en métal et céramique, les propriétés correspondantes des matériaux sont données dans le (tableau V-1).

Tableau V-1: Propriétés matérielles du métal et de la céramique

Propriétés	Métal (aluminium, Al)	Céramique (Alumine, Al ₂ O ₃)
Module de Young E (GPa)	70	380
Module de Poisson ν	0,3	0,3
Masse volumique ρ (kg/m ³)	2707	3800

Les configurations (1-0-1, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1) sont les rapports des épaisseurs des couches définis comme suit :

1-0-1 la plaque est constituée de deux couches d'épaisseur égale sans noyau.

1-1-1 la plaque a les mêmes épaisseurs des couches (noyau et feuilles de face).

1-2-1 la plaque a une épaisseur du noyau qui est le double de l'épaisseur des feuilles de face.

1-3-1 la plaque a une épaisseur du noyau qui est trois fois l'épaisseur des feuilles de face.

V.2.1 Résultats de la vibration libre de la plaque sandwich FG

Dans cette section, plusieurs résultats numériques de l'analyse en vibration libre de la plaque sandwich FG, avec et sans fondation élastique calculés par la présente théorie de déformation de cisaillement à trois inconnus, sont présentés sous forme de tableaux et de graphiques explicites.

Pour vérifier l'exactitude du modèle actuel, les résultats obtenus de l'analyse en vibration libre de la plaque sandwich E-FG simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques sont comparés aux modèles existant dans la littérature (Ait Amar Meziane et al.2014).

A partir des résultats de la fréquence fondamentale de la plaque sandwich E-FG donnés dans le (tableau V-2), on peut voir que le présent modèle est en bon accord avec les deux modèles développés par Ait Amar Meziane et al. (2014).

On peut noter d'après les résultats que la plaque sandwich épaisse E-FG donne la plus petite valeur des fréquences fondamentales. De plus, il est clair que la configuration (1-3-1) donne les plus grandes valeurs de la fréquence fondamentale.

Tableau V-2: Comparaison de la fréquence adimensionnelle « ω^ » des plaques carrées sandwich EGM simplement appuyées « $k=1,5$ » reposant sur les fondations élastiques de Pasternak*

Schéma	Théorie	$K_0 = J_0 = 0$			$K_0 = 100, J_0 = 0$			$K_0 = 100, J_0 = 100$		
		$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$
1-0-1	Modèle 1 (a)	0.9655	1.0200	1.0356	1.4125	1.4633	1.4781	4.7808	4.8854	4.9135
	Modèle 2 (a)	0.9647	1.0198	1.0356	1.4121	1.4632	1.4781	4.7808	4.8854	4.9136
	Présent	0.9656	1.0201	1.0357	1.4129	1.4633	1.4782	4.7956	4.8857	4.9136
1-1-1	Modèle 1 (a)	1.0811	1.1396	1.1563	1.4697	1.5248	1.5407	4.6537	4.7517	4.7789
	Modèle 2 (a)	1.0807	1.1395	1.1563	1.4695	1.5247	1.5407	4.6537	4.7517	4.7789
	Présent	1.0812	1.1396	1.1563	1.4700	1.5248	1.5407	4.6629	4.7519	4.7789
1-2-1	Modèle 1 (a)	1.1872	1.2578	1.2781	1.5392	1.6045	1.6236	4.6099	4.7076	4.7357
	Modèle 2 (a)	1.1872	1.2578	1.2781	1.5392	1.6045	1.6236	4.6100	4.7076	4.7357
	Présent	1.1873	1.2578	1.2781	1.5395	1.6045	1.6236	4.6180	4.7078	4.7357
1-3-1	Modèle 1 (a)	1.2663	1.3479	1.3716	1.5954	1.6703	1.6924	4.5910	4.6901	4.7192
	Modèle 2 (a)	1.2666	1.3480	1.3716	1.5956	1.6704	1.6924	4.5911	4.6901	4.7192
	Présent	1.2665	1.3479	1.3716	1.5957	1.6703	1.6924	4.5987	4.6902	4.7192

^(a)D'après Ait Amar Meziane et al. (2014)

Le (tableau V-3) montre la comparaison de la fréquence fondamentale de la plaque sandwich E-FG rectangulaire (1-1-1) sur la fondation élastique de type Winkler-Pasternak par rapport à l'indice de matériau et au rapport de la géométrie avec diverses conditions aux limites (FFCC, CCCC, CSCS, CCSS, CSSS et SSSS). D'après la comparaison faite dans le (tableau V-3), il est clair que les résultats actuels obtenus en utilisant la théorie actuelle de déformation de cisaillement à trois inconnus sont en bon accord avec ceux calculés par Ait Amar Meziane et al. (2014) utilisant un modèle de déformation de cisaillement raffiné à quatre variables.

À partir du tableau, nous pouvons constater que l'augmentation des valeurs de l'indice de matériau conduit à diminuer les fréquences fondamentales pour différentes conditions aux limites.

On peut également conclure que la plaque sandwich FG avec deux bords libres et deux bords encastés opposés (FFCC) donne les plus grandes valeurs de la fréquence " ω^* ".

Tableau V-3: Comparaison de la fréquence adimensionnelle « ω^* » des plaques sandwich EGM (1-1-1) avec diverses conditions aux limites ($b/a = 2, K_0 = J_0 = 10$)

B.C	Théorie	$k = 0$			$k = 0.5$			$k = 3.5$		
		$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$
FFCC	Modèle 1 (a)	2.4747	2.8519	2.9944	2.1360	2.3371	2.4055	1.8894	1.9923	2.0248
	Modèle 2 (a)	2.4736	2.8516	2.9943	2.1352	2.3368	2.4054	1.8880	1.9918	2.0247
	Présent	2.4229	2.7793	2.9660	2.0792	2.2983	2.3926	1.8507	1.9742	2.0194
CCCC	Modèle 1 (a)	2.3473	2.6053	2.6953	2.0305	2.1658	2.2093	1.8189	1.8906	1.9124
	Modèle 2 (a)	2.3467	2.6052	2.6952	2.0301	2.1657	2.2093	1.8182	1.8904	1.9123
	Présent	2.3448	2.6035	2.6947	2.0285	2.1649	2.2091	1.8178	1.8902	1.9123
CSCS	Modèle 1 (a)	2.3349	2.5270	2.5906	2.0360	2.1399	2.1722	1.8539	1.9148	1.9328
	Modèle 2 (a)	2.3345	2.5269	2.5906	2.0358	2.1398	2.1721	1.8535	1.9146	1.9328
	Présent	2.3123	2.5164	2.5875	2.0227	2.1351	2.1708	1.8474	1.9128	1.9323
CCSS	Modèle 1 (a)	2.2746	2.5175	2.6015	1.9691	2.0959	2.1364	1.7665	1.8334	1.8536
	Modèle 2 (a)	2.2740	2.5173	2.6014	1.9687	2.0957	2.1363	1.7658	1.8331	1.8535
	Présent	2.2644	2.5133	2.6003	1.9636	2.0940	2.1358	1.7640	1.8326	1.8534
CSSS	Modèle 1 (a)	2.2207	2.3931	2.4496	1.9408	2.0334	2.0619	1.7729	1.8270	1.8429
	Modèle 2 (a)	2.2204	2.3930	2.4495	1.9406	2.0334	2.0619	1.7725	1.8269	1.8429
	Présent	2.1906	2.3803	2.4458	1.9245	2.0278	2.0604	1.7653	1.8247	1.8423

SSSS	Modèle 1 (a)	1.5388	1.5947	1.6113	1.3990	1.4310	1.4401	1.3376	1.3594	1.3655
	Modèle 2 (a)	1.5387	1.5948	1.6113	1.3990	1.4310	1.4401	1.3375	1.3594	1.3655
	Présent	1.5438	1.5963	1.6117	1.4010	1.4316	1.4403	1.3384	1.3597	1.3655

^(a)D'après Ait Amar Meziane et al. (2014)

La variation des fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω^* " de la plaque sandwich E-FG simplement appuyée reposant sur des fondations élastiques en fonction du rapport de la géométrie (a/h) et de l'indice « k » est représentée sur la (figure V.1) Le rapport d'aspect est pris ($a/b = 1$). À partir des graphiques, on peut voir que les fréquences fondamentales non dimensionnelles " ω^* " sont en relation de corrélation directe avec les deux rapports d'indice « k » et « a/h » et c'est la même chose pour la plaque FG (1-1-1 et 2-1-2). On peut à nouveau confirmer que les résultats sont en bon accord avec ceux donnés dans la littérature (Ait Amar Meziane et al. 2014).

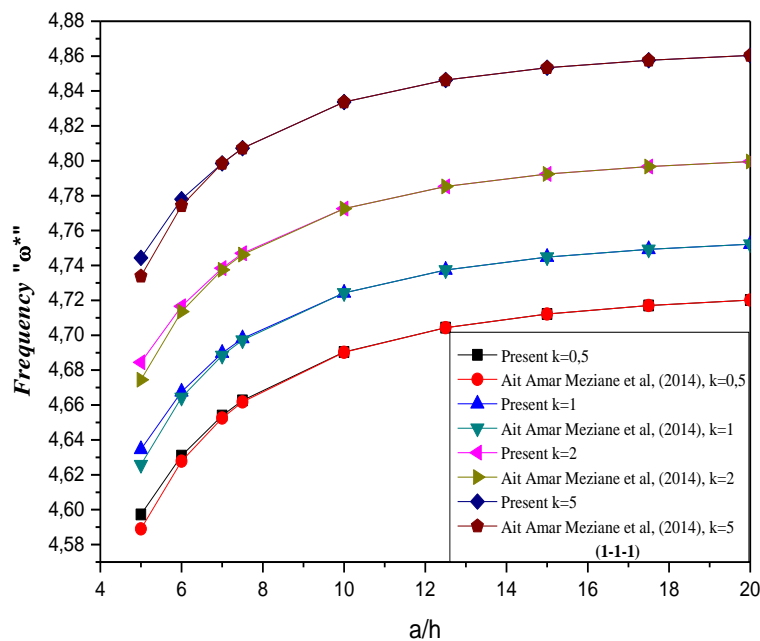


Figure V.1a : Fréquence adimensionnelle « ω^* » par rapport au rapport « a / h » pour diverses valeurs du paramètre d'inhomogénéité « k » et divers types de plaques carrées sandwich EGM (1-1-1) simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques « $K_0=J_0=100$ »

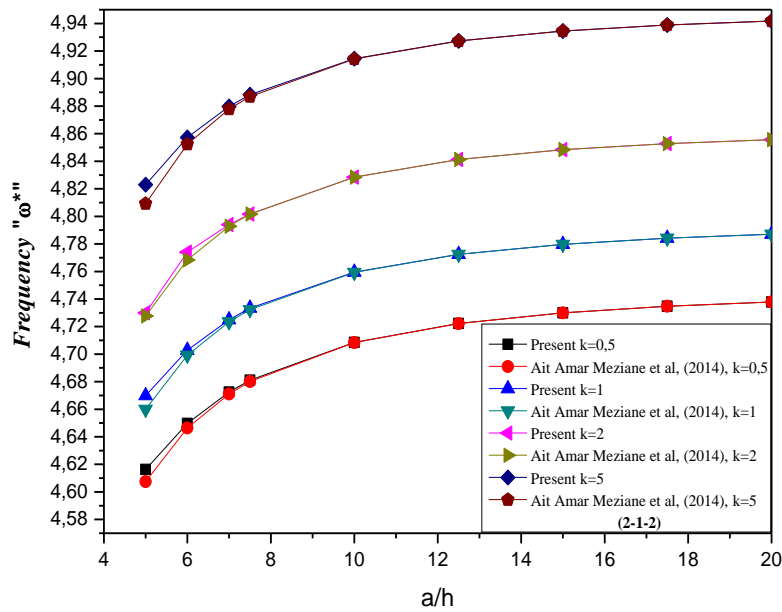


Figure V.1b : Fréquence adimensionnelle « ω^* » par rapport au rapport « a/h » pour diverses valeurs du paramètre d'inhomogénéité « k » et divers types de plaques carrées sandwich EGM (1-2-1) simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques « $K_0=J_0=100$ »

La (figure V.2) montre la fréquence non dimensionnelle " ω^* " d'une plaque sandwich FG (2-1-2) sur fondations élastiques avec ($K_0 = 100, k = 2$) en fonction du type de conditions aux limites et du rapport de la géométrie (a/h). Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par Ait Amar Meziane et al. (2014). Un bon accord est confirmé entre les résultats actuels et ceux calculés par Ait Amar Meziane et al. (2014).

À partir des courbes tracées, on peut noter que la condition aux limites a un rôle important sur la fréquence non dimensionnelle " ω^* " il ressort clairement des graphiques que les plus grandes valeurs de la fréquence non dimensionnelle " ω^* " sont obtenues pour la plaque FG-sandwich (FFCC). Il est confirmé à nouveau que la fréquence non dimensionnelle " ω^* " augmente avec l'augmentation des valeurs de (a/h).

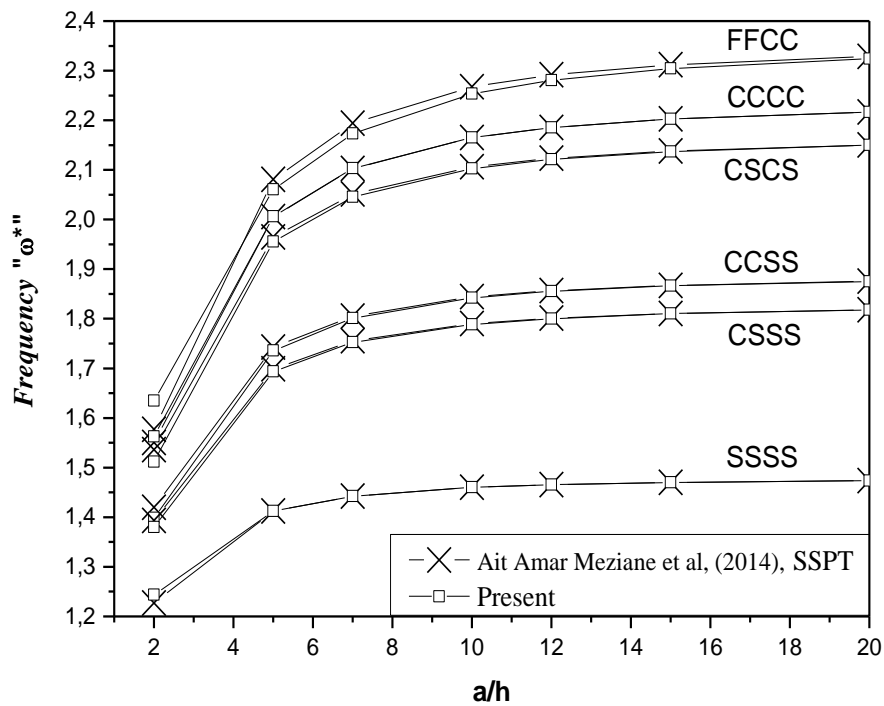


Figure V.2 : Fréquence adimensionnelle en fonction du rapport (a/h) des plaques carrées sandwich E-FG (2-1-2) reposant sur la fondation élastique de Winkler avec diverses conditions aux limites ($K_0 = 100, k = 2$).

La (figure V.3) donne la variation des fréquences " ω^* " en fonction du rapport d'aspect (b/a), des conditions aux limites et des paramètres de fondations « K_0, J_0 » de la plaque sandwich (1-2-1) E-FG avec « $a/h = 10, k = 2$ ».

À partir des graphiques tracés, nous pouvons voir clairement que la plaque FG à quatre bords encastrés donne les valeurs plus grandes des fréquences " ω^* " que la plaque FG simplement appuyée. On peut observer également que les plus petites valeurs de la fréquence " ω^* " sont obtenues de la plaque avec des paramètres de fondations ($K_0, J_0 = 100$).

On observe également une relation inverse entre le rapport d'aspect et la fréquence " ω^* ".

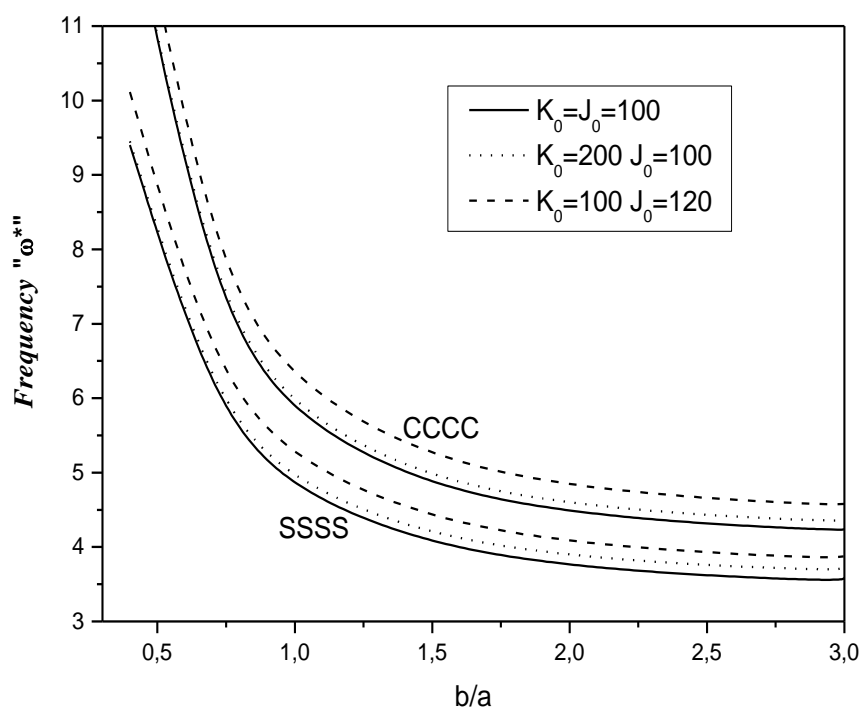


Figure V.3 : Fréquence adimensionnelle « ω^* » par rapport au rapport d'aspect (b/a) de la plaque sandwich E-FG simplement appuyée et encastrée (1-2-1) pour différentes valeurs de rigidité de la fondation (K_0) et (J_0) ($a/h = 10$, $k = 2$)

V.2.2 Stabilité de la plaque sandwich FG

Cette partie de l'étude est réservée aux résultats numériques de l'analyse de flambement de la plaque sandwich E-FG avec et sans fondation élastique avec différentes conditions aux limites.

Le (tableau V-4) présente une comparaison de la charge critique de flambement des plaques carrées sandwich E-FG simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak.

A partir des résultats obtenus, on constate que le modèle actuel donne des charges critiques de flambement presque identiques à celles obtenues par Ait Amar Meziane et al. (2014) pour différents types de plaques sandwich FG simplement appuyées (1-0-1, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1). On peut observer à partir des résultats que la présence des fondations élastiques Winkler-Pasternak conduit à une augmentation de la charge critique de flambement de la plaque sandwich FG. D'après la comparaison des différents types de plaque sandwich FG, il est clair que la plaque FG (1-3-1) donne les valeurs les plus élevées de la charge critique de flambement.

Tableau V-4: Comparaison de la charge critique de flambement « \bar{N} » de plaques carrées sandwich EGM simplement appuyées « $k = 0,5$ » reposant sur les fondations élastiques de Pasternak « $\xi = 1$ »

Schéma	Théorie	$K_0 = J_0 = 0$			$K_0 = 100, J_0 = 0$			$K_0 = 100, J_0 = 100$		
		$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$
1-0-1	Modèle 1 (a)	2.5618	2.8127	2.8834	4.3247	4.5756	4.6463	39.1232	39.3741	39.4449
	Modèle 2 (a)	2.5592	2.8120	2.8833	4.3221	4.5749	4.6462	39.1206	39.3734	39.4447
	Présent	2.5618	2.8127	2.8835	4.3247	4.5757	4.6464	39.1233	39.3742	39.4449
1-1-1	Modèle 1 (a)	3.1030	3.4156	3.5040	4.8659	5.1785	5.2669	39.6644	39.9770	40.0655
	Modèle 2 (a)	3.1015	3.4152	3.5039	4.8644	5.1781	5.2668	39.6629	39.9766	40.0654
	Présent	3.1030	3.4156	3.5040	4.8659	5.1785	5.2670	39.6645	39.9771	40.0655
1-2-1	Modèle 1 (a)	3.5165	3.9026	4.0129	5.2795	5.6655	5.7758	40.0780	40.4640	40.5744
	Modèle 2 (a)	3.5166	3.9027	4.0130	5.2795	5.6656	5.7759	40.0780	40.4641	40.5744
	Présent	3.5166	3.9026	4.0129	5.2795	5.6655	5.7759	40.0780	40.4641	40.5744
1-3-1	Modèle 1 (a)	3.8243	4.2743	4.4030	5.5872	6.0364	6.1659	40.3857	40.8349	40.9644
	Modèle 2 (a)	3.8253	4.2738	4.4031	5.5882	6.0368	6.1660	40.3868	40.8353	40.9646
	Présent	3.8243	4.2735	4.4030	5.5872	6.0364	6.1659	40.3858	40.8349	40.9645

^(a)D'après Ait Amar Meziane et al. (2014)

Le (tableau V-5) montre la comparaison de la charge critique de flambement « \bar{N} » de la plaque sandwich E-FG rectangulaire (1-1-1) sur la fondation élastique « $K_0 = J_0 = 10$ » en fonction des paramètres « k » et « a/h » avec différentes conditions aux limites (FFCC, CCCC, CSCS, CCSS, CSSS et SSSS).

D'après le tableau, on peut à nouveau confirmer que le modèle actuel avec seulement trois inconnues donne presque les mêmes résultats de la charge critique de flambement « \bar{N} » de la plaque sandwich FG que ceux calculés par Ait Amar Meziane et al. (2014) avec le modèle RPT.

A partir des résultats, nous pouvons observer que la charge critique de flambement « \bar{N} » est en relation inverse avec l'indice de matériau « k » pour différentes conditions aux limites. On peut également conclure que les plus petites valeurs de la charge critique de flambement « \bar{N} » sont données par une plaque sandwich FG simplement appuyée.

Tableau V-5: Comparaison de la charge critique de flambement « \bar{N} » de plaques sandwich EGM (1-1-1) avec diverses conditions aux limites ($b/a = 2$, $K_0 = J_0 = 10$)

B.C	Théorie	$k = 0$			$k = 0.5$			$k = 3.5$		
		$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$
FFCC	Modèle 1 (a)	15.7316	20.6940	22.6679	10.9709	12.9380	13.6121	7.8557	8.5665	8.7850
	Modèle 2 (a)	15.7165	20.6896	22.6667	10.9609	12.9346	13.6112	7.8423	8.5621	8.7838
	Présent	15.2671	19.6685	22.2406	10.4701	12.5168	13.4665	7.5660	8.4128	8.7379
CCCC	Modèle 1 (a)	13.0716	15.8553	16.8365	9.1520	10.1974	10.5257	6.7161	7.0785	7.1835
	Modèle 2 (a)	13.0640	15.8532	16.8360	9.1467	10.1958	10.5252	6.7091	7.0764	7.1829
	Présent	13.0641	15.8351	16.8293	9.1407	10.1897	10.5233	6.7099	7.0759	7.1827
CSCS	Modèle 1 (a)	10.9052	12.4673	12.9712	7.7552	8.3183	8.4846	5.8764	6.0659	6.1185
	Modèle 2 (a)	10.9012	12.4662	12.9709	7.7523	8.3175	8.4843	5.8726	6.0648	6.1182
	Présent	10.7534	12.3673	12.9397	7.6747	8.2825	8.4742	5.8427	6.0539	6.1152
CCSS	Modèle 1 (a)	12.9080	15.5750	16.5080	9.0485	10.0467	10.3584	6.6581	7.0033	7.1028
	Modèle 2 (a)	12.9010	15.5729	16.5074	9.0435	10.0451	10.3580	6.6514	7.0013	7.1023
	Présent	12.8160	15.5259	16.4928	9.0059	10.0293	10.3535	6.6412	6.9975	7.1013
CSSS	Modèle 1 (a)	10.6425	12.0761	12.5336	7.5981	8.1123	8.2630	5.7919	5.9643	6.0120
	Modèle 2 (a)	10.6389	12.0752	12.5334	7.5955	8.1116	8.2628	5.7885	5.9633	6.0117
	Présent	10.4029	11.9501	12.4954	7.4871	8.0681	8.2505	5.7483	5.9497	6.0080
SSSS	Modèle 1 (a)	7.5261	7.9091	8.0175	5.7942	5.9239	5.9590	4.8267	4.8685	4.8795
	Modèle 2 (a)	7.5253	7.9089	8.0175	5.7936	5.9238	5.9590	4.8259	4.8684	4.8795
	Présent	7.5804	7.9249	8.0217	5.8129	5.9291	5.9604	4.8328	4.8702	4.8799

^(a)D'après Ait Amar Meziane et al. (2014)

La charge critique de flambement « \bar{N} » en fonction du rapport « a/h » et du paramètre d'inhomogénéité « k » de plaques sandwich EFG simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques avec ($K_0 = J_0 = 10$, $\zeta = 1$, $a = b$) est illustrée dans (figureV.4).

A partir des courbes tracées, on peut noter que les résultats actuels sont presque les mêmes que ceux donnés par (Ait Amar Meziane et al. 2014). On observe également que l'augmentation du rapport « a/h » conduit à une augmentation de la charge critique de flambement « \bar{N} ». Mais ce dernier décroît lorsque le paramètre d'inhomogénéité « k » augmente.

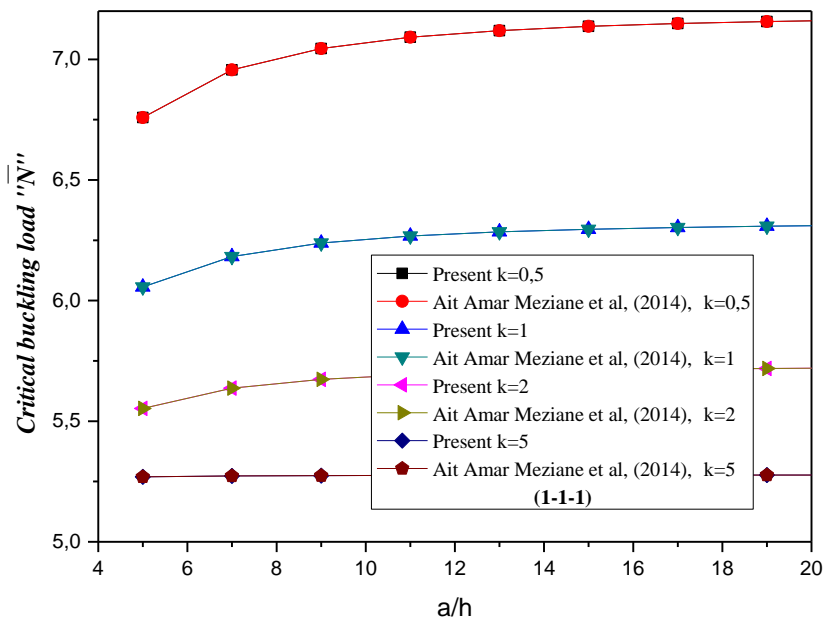


Figure V.4a : Charge critique de flambement « \bar{N} » en fonction du rapport (a/h) pour différentes valeurs du paramètre d'inhomogénéité (k) et différents types de plaques carrées sandwich EGM (1-1-1) simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques ($K_0 = J_0 = 10, \zeta = 1, a = b$)

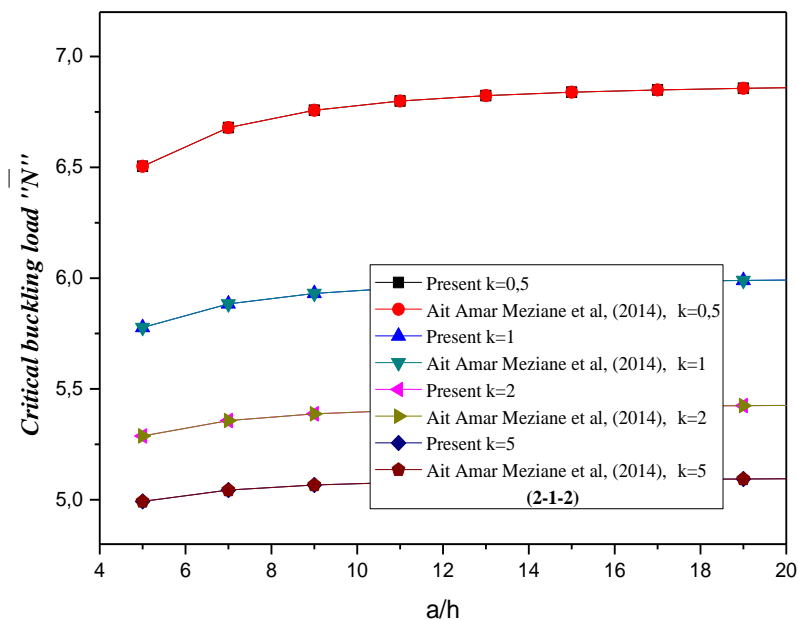


Figure V.4b : Charge critique de flambement « \bar{N} » en fonction du rapport (a/h) pour différentes valeurs du paramètre d'inhomogénéité (k) et différents types de plaques carrées sandwich EGM (2-1-2) simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques ($K_0 = J_0 = 10, \zeta = 1, a = b$)

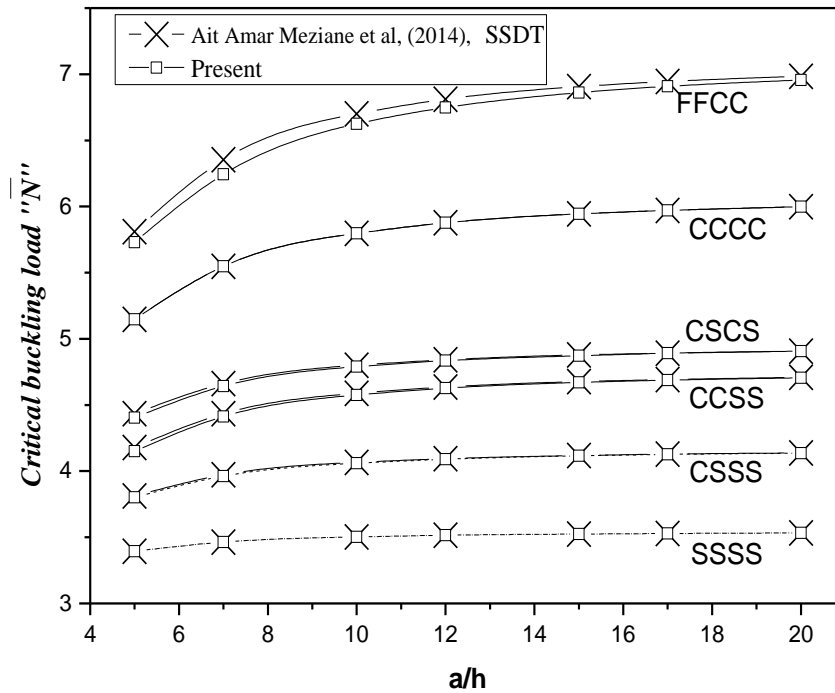


Figure V.5 : Charge critique de flambement « \bar{N} » en fonction du rapport (a/h) des plaques carrées sandwich EGM (2-1-2) reposant sur la fondation élastique de Winkler avec diverses conditions aux limites ($K_0 = 100, k = 2, \xi = 1$)

La (figure V.5) illustre la variation de la charge critique de flambement « \bar{N} » de la fondation élastique à la base de la plaque sandwich FG (2-1-2) avec ($K_0 = 100, k = 2$) pour diverses conditions aux limites (FFCC, CCCC, CSCS, CCSS, CSSS et SSSS). La plaque sandwich FG est supposée sous charges compressives biaxiales ($\xi = 1$).

Les résultats actuels de la charge critique de flambement « \bar{N} » sont en bon accord avec ceux donnés par Ait Amar Meziane et al. (2014).

À partir des graphiques, on peut observer que des valeurs plus faibles de la charge critique de flambement « \bar{N} » sont obtenues pour la plaque sandwich FG (SSSS).

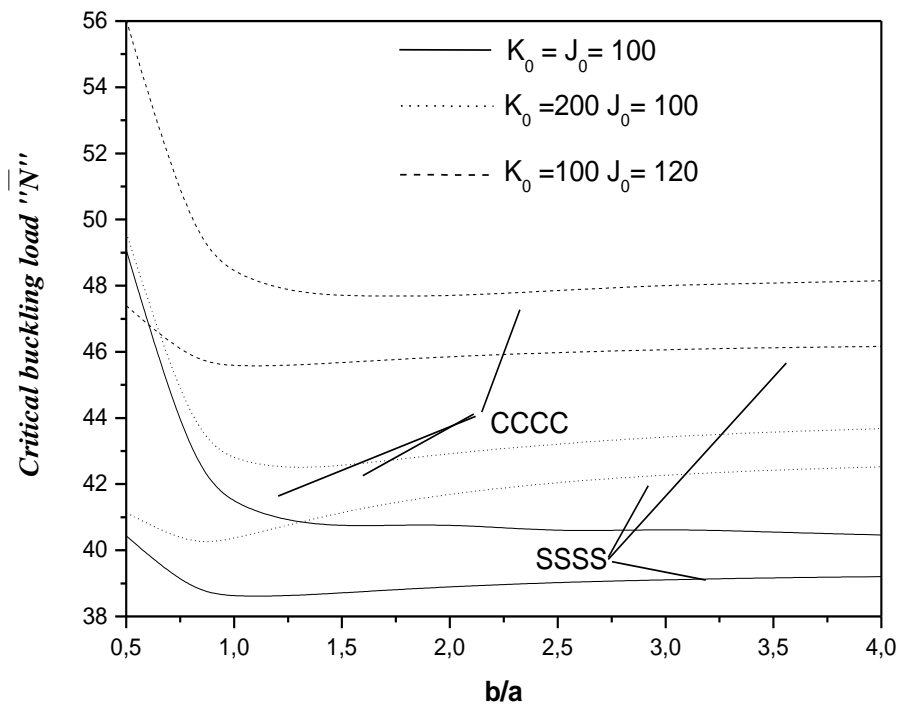


Figure V.6 : Charge critique de flambement « \bar{N} » en fonction du rapport d'aspect (b/a) de la plaque sandwich E-FG simplement appuyée et encastrée (1-1-1) pour différentes valeurs de rigidité de la fondation « K_0 » et « J_0 » ($a/h = 10, k = 2, \xi = 1$)

La (figure V.6) présente la variation de la charge critique de flambement « \bar{N} » de la plaque sandwich E-FG (1-1-1) encastrée et simplement appuyée avec ($a/h = 10, k = 2$) comme paramètres de fondation (K_0, J_0). A partir des graphiques obtenus, on peut noter que les plus grandes valeurs de la charge critique de flambement « \bar{N} » sont obtenues pour les paramètres ($K_0 = 100, J_0 = 120$) et ceci est confirmé pour les conditions aux limites (SSSS) et (CCCC).

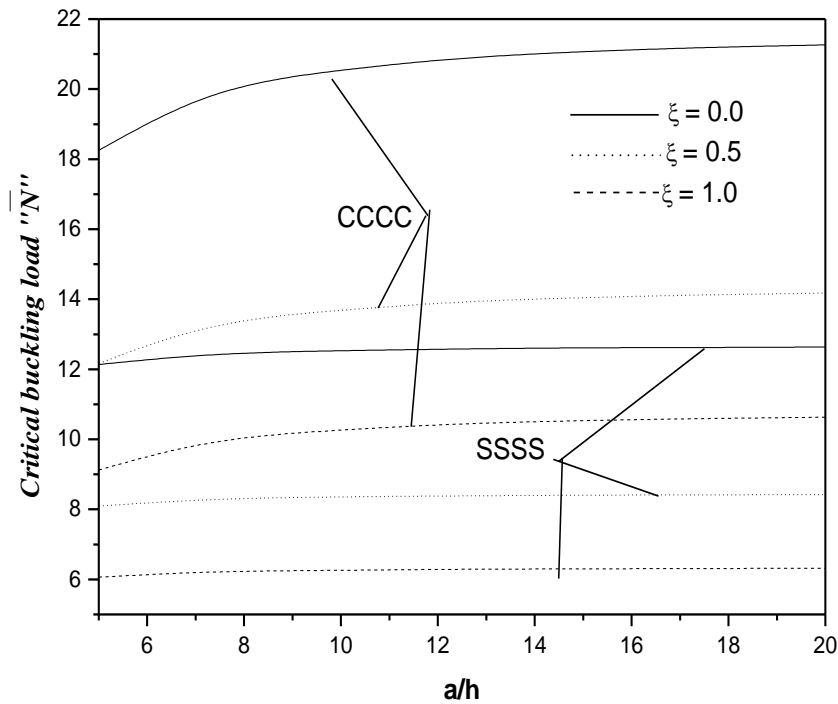


Figure V.7 : Charge critique de flambement « \bar{N} » par rapport au rapport « a/h » de la plaque carrée sandwich E-FG simplement appuyée et encastrée (1-2-1) pour différentes valeurs de « ξ » ($K_0 = J_0 = 10, k = 2$)

Les variations de la charge critique de flambement « \bar{N} » de la plaque sandwich FG (1-2-1) sur une fondation élastique en fonction du rapport des charges (ξ) sont illustrées sur la (figure V.7). À partir des courbes tracées, on peut noter que les plus petites valeurs de la charge critique de flambement « \bar{N} » sont obtenues pour un E-FG simplement appuyé avec une charge de compression biaxiale ($\xi = 1$). Mais les valeurs les plus élevées sont obtenues pour une plaque sandwich FG encastrée sous une charge de compression uniaxiale le long de l'axe (x).

V.3 Conclusions

Dans le présent chapitre, nous avons étudié une analyse en flambement et en vibration libre de la plaque sandwich à gradation exponentielle E-FG reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak à deux paramètres avec diverses conditions aux limites. On a utilisé une nouvelle théorie des plaques de déformation de cisaillement d'ordre élevé trigonométrique, dite raffinée avec seulement trois variables inconnus.

Les équations de mouvement des plaques sandwich sont obtenues en utilisant le

principe d'Hamilton. Après développement mathématique, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles de vibration sont déterminées en résolvant le problème aux valeurs propres. L'exactitude et l'efficacité de la présente formulation sont vérifiées en comparant les résultats obtenus à ceux des solutions HSDT disponibles dans la littérature. Plusieurs études paramétriques ont été examinées et discutées pour montrer les différents paramètres influençant la fréquence fondamentale et la charge critique de flambement de la plaque sandwich EGM.

Enfin, on peut conclure que la présente théorie est aussi précise que d'autres HSDT, et peut améliorer le calcul numérique en raison de leurs degrés de liberté réduits. D'autre part, elle peut être utilisée pour étudier d'autres structures constituées de différents types de matériaux (Sedighi et Shirazi 2013, Avcar, M. 2014, Sedighi et al. 2015, Panjehpour et al.2018, Othman et Fekry 2018, Dihaj et al.2018, Belmahi, et al. 2018, Yaylaci et al. 2019, Al- Maliki et al. 2020, López-Chavarría et al.2019, Nikkhoo et al.2019, Kossakowski et Uzarska 2019, Zouatnia et Hadji 2019, Bakhshi et Taheri-Behrooz 2019, Belmahi et al.2019, Fládr et al.2019, Hamad et al.2019, Mohamed et al.2019, Jothi Saravanan et al. 2019, Khater et al.2020, Singh et Kumari 2020, Rezaiee-Pajand et Karimipour2020, Ghadimi 2020, Shokrieh et Kondori 2020, Ghannadpour et Mehrparvar 2020, Lee et al.2020, Yüksel et Akbaş 2019, Karami et Janghorban 2019, Selmi 2019, Al-Basyouni et al.2020, Safarpour et al.2020, Kunche et al.2019, Eltaher et al.2020, Motezaker et al.2020, Ghabussi et al. 2020, Timesli 2020).

Conclusion générale et perspectives

À l'issue de ce travail, il serait utile de résumer les principales sections de cette thèse, comportant dans son premier volet :

- Une recherche bibliographique sur les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) à savoir l'historique de leur développement, leurs types, conception et propriétés et leurs domaines d'application.
- Un aperçu des recherches sur les structures en matériaux à gradient de propriétés (FGM), notamment le transfert de chaleur dans les (FGM), analyse de contraintes et de déformations sous différents chargements et l'analyse des vibrations des structures en (FGM).
- Théories des plaques, à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie des plaques de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et les théories des plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

Dans le deuxième volet de la thèse, nous avons proposé une nouvelle théorie innovante de la déformation de cisaillement trigonométrique à trois inconnus pour l'étude du flambement et de la vibration libre de plaques sandwich à gradation exponentielle (EGM) reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, pour diverses conditions aux limites.

La caractéristique essentielle de cette formulation théorique est que, en plus de considérer l'effet de déformation de cisaillement, elle ne comporte que trois inconnus dans le champ de déplacement, qui est identique pour le cas de la théorie classique des plaques (CPT), contrairement à cinq utilisés dans la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). On considère que les caractéristiques des matériaux des faces de la plaque sandwich varient dans la direction de l'épaisseur par une loi de distribution exponentielle en fonction des fractions volumiques des constituants.

Les équations du mouvement ont été obtenues à partir du principe d'Hamilton. De plus, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles de vibration ont été déterminées en résolvant le problème aux valeurs propres.

Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux d'Ait Amar Meziane et al. (2014). On a pu constater que la théorie proposée est précise pour l'analyse du flambement et de la vibration libre de plaques sandwich à gradation exponentielle (EGM) pour diverses conditions aux limites.

Une étude paramétrique détaillée a été menée et discutée pour montrer l'influence des différents paramètres sur la fréquence fondamentale de vibration et la charge critique de flambement de la plaque.

Suivant les résultats obtenus, on peut constater que la présente méthode est précise que d'autres HSDT avec un nombre plus élevé d'inconnus et mérite donc une attention particulière.

En perspective, on prévoit d'élargir l'application du nouveau modèle d'ordre élevé à trois variables pour le calcul des différentes formes de structures FGM sous la combinaison des divers types de chargement (mécanique, thermique, thermodynamique ...etc.) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutifs dû à la température.

Références bibliographiques

- Abrate, S.**, (2008). Functionally graded plates behave like homogeneous plates. *Compos. Part*
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A.** (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A.** (2010). “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on winkler-pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *int.j.mech.mater.design*;6(2):113-121.
- Akbarzadeh A.H., Abbasi M., Eslami M.R.** (2012) Coupled thermoelasticity of functionally graded plates based on the third-order shear deformation theory. *Thin-Walled Struct*;53: 141–55.
- Al-Basyouni, K.S., Ghandourah, E., Mostafa, H.M. and Algarni, A.** (2020), “Effect of the rotation on the thermal stress wave propagation in non-homogeneous viscoelastic body”, *Geomech. Eng.*, 21(1), 1-9.
- Al-Maliki, A.F.H., Ahmed, R.A., Moustafa, N.M. and Faleh, N.M.** (2020), “Finite element based modeling and thermal dynamic analysis of functionally graded graphene reinforced beams”, *Adv. Comput. Des.*, 5(2), 177-193.
- Atai, A.A., Nikranjbar, A., Kasiri, R.** (2012), Buckling and post-buckling Behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 226, pp. 607– 614
- Avcar, M.** (2014), “Free vibration analysis of beams considering different geometric characteristics and boundary conditions”, *Int. J. Mech. Appl.*, 4(3), 94-100.
- Bakhshi, N. and Taheri-Behrooz, F.** (2019), “Length effect on the stress concentration factor of a perforated orthotropic composite plate under in-plane loading”, *Compos. Mater. Eng.*, 1(1),71-90.
- Batra RC.** (2007) Higher-order shear and normal deformable theory for functionally graded incompressible linear elastic plates. *Thin-Walled Struct*;45(12):974–982.
- Belmahi, S., Zidour, M. and Meradjah, M.** (2019), “Small-scale effect on the forced vibration of a nano beam embedded an elastic medium using nonlocal elasticity theory”, *Adv. Aircraft Spacecraft Sci.*, 6(1), 1-18.
- Belmahi, S., Zidour, M., Meradjah, M., Bensattalah, T. and Dihaj, A.** (2018), “Analysis of boundary conditions effects on vibration of nanobeam in a polymeric matrix”, *Struct. Eng. Mech.*, 67(5), 517-525.
- Benachour A., Tahar, H.D., Ait Atmane, H., Tounsi,A., Meftah,S.A** (2011). "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient. «Composites: PART B.,42,1386–1394.

- Bharti, I., Gupta, N., Gupta, K.M.** (2013), Novel applications of functionally graded nano, opto-electronic and thermo-electric materials. *Int. J. Mater. Mech. Manuf.* 1, 221–224
- Birman V.** (1995) Stability of functionally graded hybrid composite plates. *Compos Eng* ;5(7):913–921.
- Bohidar SK, Sharma R, Mishra PR** (2014) Functionally graded materials: a critical review. *Int J Sci Footpr* 2:18–29.
- Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia E.A., Megueni A.** (2010) Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. *Comput Mater Sci*;49(4):865–870.
- Chamis C.C.** (1983) Simplified composite micromechanics equations for hygral, thermal and mechanical properties. NASA TM 83320.
- Chi, S.-H. and Chung, Y.L.** (2003), “Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”, *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227-1243.
- Delale, F., Erdogan, F.** (1983) “The crack problem for a non homogeneous plane”, *Journal of Applied Mechanics*, 50(6), 609-614.
- Dihaj, A., Zidour, M., Meradjah, M., Rakrak, K., Heireche, H. and Chemi, A.** (2018), “Free vibration analysis of chiral double-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium using non-local elasticity theory and Euler Bernoulli beam model”, *Struct. Eng. Mech.*, 65(3), 335-342.
- Ebrahimi, F. and Barati, M.R.** (2017), “Buckling analysis of nonlocal strain gradient axially functionally graded nanobeams resting on variable elastic medium”, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, 232(11), 2067-2078.
- Eltaher, M.A. and Mohamed, S.A.** (2020), “Buckling and stability analysis of sandwich beams subjected to varying axial loads”, *Steel Compos. Struct.*, 34(2), 241-260.
- Eltaher, M.A., Agwa, M. and Kabeel, A.** (2018), “Vibration analysis of material size-dependent CNTs using energy equivalent model”, *J. Appl. Comput. Mech.*, 4(2), 75-86.
- Eltaher, M.A., Mohamed, S.A. and Melaibari, A.** (2020), “Static stability of a unified composite beams under varying axial loads”, *Thin Walled Struct.*, 147, 106488.
- Fahsi B, Kaci A., Tounsi A., Adda Bedia E.A.** (2013) A four variable refined plate theory for nonlinear cylindrical bending analysis of functionally graded plates under thermomechanical loadings. *J Mech Sci Technol*;26(12):4073–4079
- Fares M.E., Elmarghany M.K., Atta D.,** (2009) An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates. *Compos Struct*;91(3):296–305.
- Fenjan, R.M., Ahmed, R.A. and Faleh, N.M.** (2019b), “Investigating dynamic stability of metal foam nanoplates under periodic in-plane loads via a three-unknown plate theory”, *Adv. Aircraft Spacecraft Sci.*, 6(4), 297-314.

- Fenjan, R.M., Ahmed, R.A., Alasadi, A.A. and Faleh, N.M.** (2019a), “Nonlocal strain gradient thermal vibration analysis of double-coupled metal foam plate system with uniform and non-uniform porosities”, *Coupled Syst. Mech.*, 8(3), 247-257.
- Fládr, J., Bílý, P. and Broukalová, I.** (2019), “Evaluation of steel fiber distribution in concrete by computer aided image analysis”, *Compos. Mater. Eng.*, 1(1), 49-70.
- Gabbrielli R, Turner IG, Bowen CR** (2008) Development of modeling methods for materials to be used as bone substitutes. *Key Eng Mater* 363:903–906.
- Ghabussi, A., Habibi, M., Arani, O.N., Shavalipour, A., Moayedi, H. and Safarpour, H.** (2020), “Frequency characteristics of a viscoelastic graphene nanoplatelet-reinforced composite circular microplate”, *J. Vib. Control*, In Press.
- Ghadimi, M.G.** (2020), “Buckling of non-sway Euler composite frame with semi-rigid connection”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 13-24.
- Ghannadpour, S.A.M. and Mehrparvar, M.** (2020), “Modeling and evaluation of rectangular hole effect on nonlinear behavior of imperfect composite plates by an effective simulation technique”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 25-41.
- Hadji L., Zouatnia, N. and Bernard, F.** (2019), “An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities: Effect of the micromechanical models”, *Struct. Eng. Mech.*, 69(2), 231-241.
- Hamad, L.B., Khalaf, B.S. and Faleh, N.M.** (2019), “Analysis of static and dynamic characteristics of strain gradient shell structures made of porous nano-crystalline materials”, *Adv. Mater. Res.*, 8(3), 179-196.
- Hamed, M.A., Mohamed, S.A. and Eltaher, M.A.** (2020), “Buckling analysis of sandwich beam rested on elastic foundation and subjected to varying axial in-plane loads”, *Steel Compos. Struct.*, 34(1), 75-89.
- Hill, R.** (1965), "A self-consistent mechanics of composite materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 (4), 213-222.
- Jin, Z.-H.**, (2002), “An Asymptotic Solution of Temperature Field in a Strip of a Functionally Graded Material,” *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 29, pp. 887–895.
- Jothi Saravanan, T., Gopalakrishnan, N. and Karthick Hari, B.** (2019), “Damage identification in structural elements through curvature mode shapes and nonlinear energy operator”, *Compos. Mater. Eng.*, 1(1), 33-48.
- Karama. M., Afaq. K.S., Mistou, S.** (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- Karami, B. and Janghorban, M.** (2019), “On the dynamics of porous nanotubes with variable material properties and variable thickness”, *Int. J. Eng. Sci.*, 136, 53-66.

- Kettaf F.Z., Houari M.S.A., Benguediab M., Tounsi A.** (2013) Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model. *Steel Compos* ;15(4):399–423.
- Khater, H.M., El Nagar, A.M., Ezzat, M. and Lottfy, M.** (2020), “Fabrication of sustainable geopolymer mortar incorporating granite waste”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 1-12.
- Kim Y.W.** (2005) Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib*;284(3-5):531–549.
- Koizumi M., Niino M.** (1995), Overview of FGM research in Japan. *MRS Bull.* 20(1995), 19–24.
- Kossakowski, P.G. and Uzarska, I.** (2019), “Numerical modeling of an orthotropic RC slab band system using the Barcelona model”, *Adv. Comput. Des.*, 4(3), 211-221.
- Kunche, M.C., Mishra, P.K., Nallala, H.B., Hirwani, C.K., Katariya, P.V., Panda, S. and Panda, S.K.** (2019), “Theoretical and experimental modal responses of adhesive bonded T-joints”, *Wind Struct.*, 29(5), 361-369.
- Lanhe W.** (2004) Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Compos Struct*; 64(2):211–218.
- Latifi M., Farhatnia F, Kadkhodaei M.** (2013) Buckling analysis of rectangular functionally graded plates under various edge conditions using Fourier series expansion. *Eur J Mech - A/Solids*;41:16–27.
- Lee, N.J., Lai, G.S., Lau, W.J. and Ismail, A.F.** (2020), “Effect of poly(ethylene glycol) on the properties of mixed matrix membranes for improved filtration of highly concentrated oily solution”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 43-51.
- Li, R., Liu, J., Shi, Y., Du, M., Xie, Z.** (2010), 316L Stainless steel with gradient porosity fabricated by selective laser melting. *J. Mater. Eng. Perform.* 19(5), 666–671
- López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A., Medina-Elizondo, M., Sandoval-Rivas, R. and Velázquez-Santillán, F.** (2019), “Optimal design for the reinforced concrete circular isolated footings”, *Adv. Comput. Des.*, 4(3), 273-294.
- M. Shen and M. B. Bever** (1972), “Gradients in polymeric materials” *Journal of Materials science*, July, Volume 7, Issue 7, pp 741-746.
- Mahamood RM, Akinlabi ET** (2015) Effect of laser power and powder flow rate on the wear resistance behaviour of laser metal deposited TiC/Ti6Al4V composites. *Mater Today Proc* 2:2679–2686.
- Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T., Shukla M., Pityana, S.** (2012), Functionally graded material: An overview. In: *Proceedings of the world congress on engineering WCE 2012*, vol. 3, pp. 1593– 1597

- Mahmoud D, Elbestawi M.** (2017), Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: a review. *J Manuf Mater Process*.
- Mantari J.L, Oktem AS, Soares C.G.** (2011a) A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Compos Part B Eng*;43(3):1489–1499.
- Mantari J.L, Oktem AS, Soares C.G.** (2011b) Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Compos Struct*;94(2):714–723.
- Mantari J.L, Soares C.G.** (2012) Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Compos Struct*;94(6):1991–2000.
- Markworth, Alan. J. Saunders, James. H.** (1995), "A model of structure optimization for a functionally graded material". *Materials Letters*, 22 (1–2), 103-107.
- Matsunaga H.** (2008) Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos Struct*;82(4):499–512.
- Matsunaga H.** (2009) Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher order deformation theory. *Compos Struct*;90(1):76–86.
- Meiche NE., Tounsi A., Ziane N., Mechab I., Adda.Bedia E.A.** (2011) A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *Int J Mech Sci*;53(4):237–247.
- Mirjavadi, S.S., Forsat, M., Nikookar, M., Barati, M.R. and Hamouda, A.M.S.** (2019), "Nonlinear forced vibrations of sandwich smart nanobeams with two-phase piezo-magnetic face sheets", *Eur. Phys. J. Plus*, 134, 508.
- Miyamoto, Y., Kaysser, W., Rabin, B., Kawasaki, A., Ford, R.,** (1999), *Functionally graded materials: design, processing and applications*. Kluwer Academic Publishers. MLPG method with radial basis functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 197, 979–987.
- Mohamed, N., Mohamed A. Eltaher, M.A., Mohamed, S.A and Seddek. L.F.** (2019), "Energy equivalent model in analysis of postbuckling of imperfect carbon nanotubes resting on nonlinear elastic foundation", *Struct. Eng. Mech.*, 70(6), 737-750.
- Mohammadi M., Saidi A, Jomehzadeh E.** (2010) Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Appl Compos Mater*;17(2):81–93.
- Mori, T. Tanaka, K.** (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions". *Acta Metallurgica*, 21 (5), 571-574.
- Mota AF, Loja MAR** (2019), Mechanical behavior of porous functionally graded nanocomposite materials. *J Carbon*

- Motezaker, M., Jamali, M. and Kolahchi, R.** (2020), “Application of differential cubature method for nonlocal vibration, buckling and bending response of annular nanoplates integrated by
- Neubrand, A.**, (2001), Functionally graded materials. In: Editors-in Chief:, K. H. J. B., Robert, W. C., Merton, C. F., Bernard, I., Edward, J. K., Subhash, M., Patrick, V. (Eds.), *Encyclopedia of Materials: Science and Technology* (Second Edition). Elsevier, Oxford, pp. 3407_3413.
- Nikkhoo, A., Asili, S., Sadigh, S., Hajirasouliha, I. and Karegar, H.** (2019), “A low computational cost method for vibration analysis of rectangular plates subjected to moving sprung masses”, *Adv. Comput. Des.*, 4(3), 307-326.
- Noda N.** (1999) Thermal stresses in functionally graded materials. *J Therm Stress*; 22:477–512.
- Noda N., Ootao Y., Tanigawa Y.** (2012) Transient thermoelastic analysis for a functionally graded circular disk with piecewise power law. *J Theor Appl Mech*; 50:831–9.
- Okamura, H.** (1991), “State of the art of material design projects for severe service applications”, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2), 3-9.
- Othman, M. and Fekry, M.** (2018), “Effect of rotation and gravity on generalized thermo-viscoelastic medium with voids”, *Multidisciplin. Model. Mater. Struct.*, 14(2), 322-338.
- Panjehpour, M., Loh, E.W.K. and Deepak, T.J.** (2018), “Structural Insulated Panels: State-of-the-Art”, *Trends Civ. Eng. Architect.*, 3(1) 336-340.
- Popovich VA, Borisov EV, Popovich AA, Suffiarov VS, Masaylo DV, Alzina L** (2016) Functionally graded Inconel 718 processed by additive manufacturing: crystallographic texture, anisotropy of microstructure and mechanical properties. *JMADE* 114:441–449.
- Reddy, J. N., & Liu, C. F.** (1985). A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 23(3), 319–330.
- Reddy, J. N., Wang, C. M., and Kitipornchai, S.**, (1999), “Axysymmetric Bending of Functionally Graded Circular and Annular Plates,” *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18, pp. 185–199.
- Reddy, J.N.**, (1984), A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids Struct.* 20 (9/10), 881–896.
- Rezaiee-Pajand, M. and Karimipour, A.** (2020), “Two rectangular elements based on analytical functions”, *Adv. Comput. Des.*, 5(2), 147-175.
- Safa, A., Hadji, L., Bourada, M. and Zouatnia, N.** (2019), “Thermal vibration analysis of FGM beams using an efficient shear deformation beam theory”, *Earthq. Struct.*, 17(3), 329-336.

- Safarpour, M., Ghabussi, A., Ebrahimi, F., Habibi, M. and Safarpour, H.** (2020), “Frequency characteristics of FG-GPLRC viscoelastic thick annular plate with the aid of GDQM”, *Thin-Walled Struct.*, 150, 106683.
- Sahouane, A., Hadji, L. and Bourada, M.** (2019), “Numerical analysis for free vibration of functionally graded beams using an original HSDBT”, *Earthq. Struct.*, 17(1), 31-37.
- Sedighi, H.M. and Shirazi, K.H.** (2013), “Vibrations of micro-beams actuated by an electric field via parameter expansion method”, *Acta Astronautica.*, 85, 19-24.
- Sedighi, H.M., Keivani, M. and Abadyan, M.** (2015), “Modified continuum model for stability analysis of asymmetric FGM double-sided NEMS: Corrections due to finite conductivity, surface energy and nonlocal effect”, *Compos. Part B Eng.*, 83, 117-133.
- Selmi, A.** (2019), “Effectiveness of SWNT in reducing the crack effect on the dynamic behavior of aluminium alloy”, *Adv. Nano Res.*, 7(5), 365-377.
- Shanmugavel, P., Bhaskar, G.B., Chandrasekaran, M., Mani, P.S.** (2012), **Srinivasan, S.P.:** An overview of fracture analysis in functionally graded materials. *Eur. J. Sci. Res.* 68(3), 412– 39.
- Shariat B.A.S., Eslami M.R.** (2007) Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Compos Struct*;78(3):433–439.
- Shimpi R.P.** (2002) Refined plate theory and its variants, *AIAA J*;40 (1):137–146.
- Shokrieh, M.M. and Kondori, M.S.** (2020), “Effects of adding graphene nanoparticles in decreasing of residual stresses of carbon/epoxy laminated composites”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 53-64.
- Singh, A. and Kumari, P.** (2020), “Analytical free vibration solution for angle-ply piezolaminated plate under cylindrical bending: A piezo-elasticity approach”, *Adv. Comput. Des.*, 5(1), 55-89.
- Sobhy, M.** (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos. Struct.*, 99, 76-87.
- Suk, M.J., Choi, S.I., Kim, J.S., Kim, Y.D., Kwon, Y.S.** (2003), Fabrication of a porous material with a porosity gradient by a pulsed electric-current sintering process. *Met. Mater. Int.* 9, 599–603
- Suresh S and Mortensen A.** (1998), *Fundamentals of functionally graded materials.* London: Maney Publishing.
- Swaminathan, K., Naveenkumar, D.T., Zenkour, A.M., Carrera, E.** (2015). Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates - A state-of-the-art review. *Composite Structures.* 120, 10–31.

- Thai H.T. and Choi D.H.** (2012) An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model*;36(3):1008–1022.
- Thieme, M., Wieters, K.P., Bergner, F., Scharnweber, D., Worch, H., Ndop, J., Kim, T.J., Grill, W.** (2001), Titanium-powder sintering for preparation of a porous functionally graded material destined for orthopaedic implants. *J. Mater. Sci.* 12, 225–231
- Timesli, A.** (2020), “An efficient approach for prediction of the nonlocal critical buckling load of double-walled carbon nanotubes using the nonlocal Donnell shell theory”, *SN Appl. Sci.*, 2, 407.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S.**, (1959), *Theory of Plates and Shells*, second ed. McGraw-Hill, Singapore.
- Touratier, M.** (1991), “An efficient standard plate theory”, *Engng Sci*, vol. 29(8), 901-916.
- Uymaz B., Aydogdu M., Filiz S.** (2012) Vibration analyses of FGM plates with in-plane material inhomogeneity by Ritz method. *Compos Struct*;94(4):1398–1405.
- Woo J., Meguid S.A., Ong L.S.** (2006) Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J Sound Vib*;289(3):595–611.
- Yaylaci, M., Terzi, C. and Avcar, M.** (2019), “Numerical analysis of the receding contact problem of two bonded layers resting on an elastic half plane”, *Struct. Eng. Mech.*, 72(6), 775-783.
- Yoshikazu Shinohara**, (2013), in *Handbook of Advanced Ceramics (Second Edition)*, Wosko, M., Paszkiewicz, B., Piasecki, T., Szyszka, A., Paszkiewicz, R., Tlaczala, M.:
- Yüksel, Y.Z. and Akbaş, Ş.D.** (2019), “Buckling analysis of a fiber reinforced laminated composite plate with porosity”, *J. Comput. Appl. Mech.*, 50(2), 375-380.
- Zenkour, A. M.**, (2005), “A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part 2—Buckling and Free Vibration,” *Int. J. Solids Struct.*, 42, pp. 5243–5258.
- Zenkour A.M., Sobhy M.** (2010) Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Compos Struct*;93(1):93–102.
- Zhang X, Fang G, Leeflang S, Zadpoor AA, Zhou J** (2018) Topological design, permeability and mechanical behavior of additively manufactured functionally graded porous metallic biomaterials. *Acta Biomater.*
- Zouatnia, N. and Hadji, L.** (2019), “Effect of the micromechanical models on the bending of FGM beam using a new hyperbolic shear deformation theory”, *Earthq. Struct.*, 16(2), 177-183.