

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS
LABORATOIRE DES MATERIAUX & HYDROLOGIE



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

SPECIALITE : GENIE CIVIL

OPTION : MATERIAUX ET STRUCTURES

PRESENTEE PAR :

BEKKAYE TAHAR HACEN LAMINE

Intitulé de la thèse :

**DEVELOPPEMENT D'UNE NOUVELLE
THEORIE D'ORDRE ELEVE POUR L'ANALYSE
DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES
PLAQUES COMPOSITES EPAISSES**

Soutenu le : / /2021

Composition du jury :

Mr. BOURADA Mohamed	Pr	Président	U.D.L SBA
Mr. FAHSI Bouazza	Pr	Directeur de thèse	U.D.L SBA
Mr. TOUNSI Abdelouahed	Pr	Co-Directeur de thèse	U.D.L SBA
Mr. ZIDOUR Mohamed	Pr	Examineur	U de Tiaret
Mr. TLIDJI Youcef	MCA	Examineur	U de Tiaret
Mr. BENSATALLAH Tayeb	MCA	Examineur	U de Tiaret
Mr. BENYOUCEF Samir	Pr	Invité	U.D.L SBA

2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicace

A mes parents, et à toute la famille.

Remerciements

En premier, remerciement infini et absolu à Allah le tout puissant pour m'avoir donné la force d'achever ce travail, et de m'avoir lié à des gens qui m'ont aidé à réaliser cette thèse.

Mes sincères remerciements sont à mon directeur de thèse, Monsieur **FAHSI Bouazza**, pour son immense aide, son support, ses conseils et sa patience tout au long de ces années. Je le remercie énormément et je ne peux exprimer à quel point j'apprécie sa disponibilité, et le plaisir d'avoir travaillé avec lui.

Comme je remercie profondément, Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, d'avoir accepté d'être mon co-directeur de thèse et pour son chaleureux accueil dès le premier jour au laboratoire des matériaux et hydrologie de l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes et je le remercie vivement pour toute son aide.

Mes remerciements vont également à Monsieur **BOURADA Mohamed**, qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse. Aussi je tiens à remercier les membres du jury : Monsieur **ZIDOUR Mohamed**, Monsieur **TLIDJI Youcef**, Monsieur **BENSATALLAH Tayeb**, ainsi que Monsieur **BENYOUCEF Samir** pour avoir accepté à participer au jury de thèse.

Je remercie chaleureusement, l'ensemble de mes collègues au laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, notamment Monsieur **BOURADA Fouad**, pour son aide immense et sa disponibilité, et aussi Monsieur **YOUNSI Abderahman** pour son aide et ses conseils.

A titre personnel, je remercie Monsieur **BADAoui Mohamed**, pour avoir été un ami, un guide et un support réel et continu. Je le remercie infiniment pour tous ses efforts le long du chemin de mes études.

ملخص

في هذه البحث، قمنا بعرض بدراسة تحليلية حول انحناء و التواء صفيحة ذات مسامية متدرجة وظيفيا (FG) ، تحت تأثير حمولة ميكانيكية. خصائص هذه الصفيحة المتدرجة وظيفيا تتغير تدريجيا على طول سمكها تبعا لدالة ذات قانون قوة و دالة أسية. النقص (عدم الكمال) في المادة يعتبر متغيرا وفقا لدالة لوغاريتمية. تمت نمذجة الصفيحة عن طريق نظرية مثلثية محسنة للتشوه بالقص حيث أن استخدام عامل التصحيح للقص غير ضروري.

يتم حل معادلات التحكم في الصفيحة المتدرجة وظيفيا انطلاقا من مبدأ العمل الافتراضي و يتم تحديدها بواسطة معادلات نافير. تمت التأكد من دقة النموذج الحالي عن طريق مقارنة النتائج المتحصل عليها مع تلك الموجودة في الكتابات. تم أيضا، و بشكل مفصل، فحص و مناقشة مختلف الظواهر المؤثرة على الضغوط و الإزاحات و حمولات الثني الحرجة للصفيحة.

كلمات دلالية: تحليل سكوني، نقص هندسي (مسامية)، صفيحة متدرجة وظيفيا، معادلات نافير، مبدأ العمل الافتراضي.

Abstract

In this research, bending and buckling analyses of porous functionally graded (FG) plate under mechanical load are presented. The properties of the FG plate vary gradually across the thickness according to power-law and exponential functions. The material imperfection is considered to vary depending to a logarithmic function. The plate is modeled by a refined trigonometric shear deformation theory where the use of the shear correction factor is unnecessary. The governing equations of the FG plate are derived via virtual work principle and resolved via Navier solutions. The accuracy of the present model is checked by comparing the obtained results with those found in the literature. The various effects influencing the stresses, displacements and critical buckling loads of the plate are also examined and discussed in detail.

Key Words: Static analysis, geometric imperfection (Porosity), FG-plate, Navier solutions, principle of virtual work.

Résumé

Dans le présent travail, les analyses de flexion et flambement d'une plaque fonctionnellement graduée (FG) poreuse sous une charge mécanique sont présentées. Les propriétés de la plaque FG varient graduellement à travers l'épaisseur selon une fonction de loi de puissance et une fonction exponentielle. L'imperfection du matériau est considérée variable suivant une fonction logarithmique. La plaque est modélisée par une théorie trigonométrique raffinée de déformation en cisaillement où l'utilisation du facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. Les équations régissant la plaque FG sont résolues à partir du principe du travail virtuel et déterminées avec les solutions de Navier. La précision du présent modèle est vérifiée par la comparaison des résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature. Les différents effets influençant les contraintes, déplacements et charges critiques de flambement de la plaque sont aussi examinés et discutés en détail.

Mots clés : Analyse statique, imperfection géométrique (porosité), plaque FG, Solution Navier, Principe des travaux virtuels.

Table des matières

<i>Dédicace</i>	I
ملخص.....	I
Abstract	II
Résumé	III
Table des matières	IV
Liste des notations	VI
Table des figures	VIII
Table des tableaux	X
Introduction générale	1
Chapitre I Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	6
I.1 Introduction	7
I.2 Définition d'un matériau à propriétés fonctionnellement gradués (FGM)	7
I.3 Historique des matériaux FGM	8
I.4 Différences entre les matériaux FGM et matériaux composites traditionnels.....	9
I.5 Méthodes de fabrication des matériaux FGM.....	11
I.5.1 Métallurgie des poudres.....	11
I.5.2 Coulage centrifuge.....	12
I.5.3 Coulage en bande (Tape casting).....	12
I.5.4 Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting).....	13
I.5.5 Projection plasma.....	14
I.5.6 Processus de stéréolithographie	15
I.6 Domaines d'application des matériaux FGM	16
I.6.a. Applications aéronautiques.....	17
I.6.b. Applications énergétiques.....	19
I.6.c. Applications automobiles.....	20
I.6.d. Applications médicales	21
I.6.e. Applications électroniques.....	22
I.6.f. Applications en défense.....	22
I.6.g. Applications industrielles	23
I.7 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....	23
I.7.1 La loi exponentielle	23

I.7.2 La loi de puissance.....	24
I.7.3 La fonction sigmoïde.....	25
I.8 Conclusion :	26
Chapitre II Théorie des plaques	27
II.1 Introduction.....	28
II.2 Définition des plaques.....	28
II.3 La théorie des plaques.....	30
II.4 Aperçu sur le développement de la théorie des plaques.....	30
II.5 Les modèles des plaques FGM.....	31
II.5.1 La théorie classique des plaques (théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff) (CPT).....	31
II.5.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	32
II.5.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	34
II.5.4 La théorie raffinée de déformation des plaques	36
II.6 Conclusion.....	37
Chapitre III Formulation Théorique	38
III.1. Introduction.....	39
III.2. Equations et formulation théorique.....	39
III.2.1 Formulations du matériau fonctionnellement gradué.....	39
III.2.2 Théorie raffinée de déformation en cisaillement trigonométrique.....	40
III.2.3 Relations constitutives des plaques FG.....	41
III.2.4 Equations régissantes	42
III.3. Solution analytique des plaques simplement appuyées	44
III.4. Conclusion :	46
Chapitre IV Résultats et discussions	47
IV.1. Introduction :	48
IV.2. Analyse des résultats :.....	48
IV.2.1. Analyse de la flexion :	48
IV.2.2. Analyse du flambement :	52
IV.3. Conclusion	56
Conclusion générale	58
Références Bibliographie	61

Liste des notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
$V(z)$	Fraction volumique locale
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
w_b	Déplacement transversal dû a la flexion
w_s	Déplacement transversal dû au cisaillement
w_x^b	rotation dû a la flexion suivant x
w_x^s	rotation dû au cisaillement suivant x
G	Module de cisaillement
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z ,
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$f(z)$	Fonction de cisaillement transverse
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel

γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments supplémentaires dûs à la flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment de cisaillement transverse
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire dûs au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
ξ	Facteur de porosité
n	Nombre de modes suivant y
m	Nombre de modes suivant x
D	Coefficient de rigidité

Table des figures

Figure I.1: Caractéristiques des matériaux FGM (Koizumi 1997).....	8
Figure I.2: Plaque carrée de 300mm en FGM (Koizumi, 1996)	9
Figure I.3: Schéma de distribution des différents matériaux dans (a) matériau FGM et (b) matériau composite traditionnel (Mahamood et al. 2017)	10
Figure I.4: Organigramme de préparation du matériau FGM suivant la méthode de métallurgie des poudres, (Udupa et al, 2014)	11
Figure I.5: Méthode de coulage centrifuge. (A) schéma de processus, (B) Gradient de composition chimique d'un FGM cylindrique résultant. . (Naebe et al. 2016)	12
Figure I.6: Schéma du principe de la méthode Coulage en bande (tape casting)	13
Figure I.7: Schéma du méthode de fabrication des fgm suivant la méthode du coulage séquentiel en barbotine (slip casting) (Marple 1997)	14
Figure I.8: Schéma du procédure de la méthode de projection plasma (Saleh et al. 2020).....	15
Figure I.9: Formes de méthode de stereolithographie de fabrication des FGM, (a)Méthode de coté droit, (b)Méthode Upside-down (Saleh B., 2020)	16
Figure I.10: Domaines d'applications des matériaux FGM (Saleh et al. 2020)	17
Figure I.11: Exemple d'une pièce dans le domaine d'aéronautique avec des propriétés FGM (Saleh et al. 2020)	18
Figure I.12: Aube de turbine.....	18
Figure I.13: Mur intérieur d'un réacteur nucléaire en matériaux FGM (Wazery et al. 2015).....	19
Figure I.14: Plaquettes de frein en FGM (Rajan et al. 2014)	20
Figure I.15: Pièces en FGM: a chemises de cylindre et engrenage, b disques de frein, c piston. (Rajan et al. 2014)	20
Figure I.16: Pièce orthopédique en FGM pour paralysie cérébrale.....	21
Figure I.17: Os artificiel en FGM.....	21
Figure I.18: Différentes applications des matériaux FGM dans le domaine de la défense.....	22
Figure I.19: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.	24

Figure I.20: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	25
Figure I.21: La variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	26
Figure II.1: Géométries courantes en mécanique des structures (Drapier 2016)	29
Figure II.2: La plaque de Love-Kirchhoff (Reddy 2004)	32
Figure II.3: Plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 2004)	33
Figure II.4: Plaque d'ordre élevé (HSDT)	34
Figure II.5: Distribution des contraintes de cisaillement xz selon trois théories (Tafla 2007)...	37
Figure III.1: Géométrie d'une plaque poreuse fonctionnellement graduée.....	40
Figure IV.1: Variation des déplacements et contraintes à travers l'épaisseur de la plaque P-FG carrée en Al/SiC (a/h=10 et p=2)	52
Figure IV.2 Effet d'indice de loi de puissance (p) et rapport cote/épaisseur (a/h) sur la charge de flambement critique (\overline{N}_{cr}) des plaques rectangulaires en Al / ZrO ₂ (a / b = 1, $\xi = 0.2$ et p = 2)	56

Table des tableaux

Tableau I.1 : Comparaison entre la céramique et le métal	8
Tableau II.1 : Fonctions de cisaillement relatives aux différentes théories de plaque d'ordre élevé HSDT	35
Tableau III.1 : Propriétés du matériau de la céramique et du métal	40
Tableau IV.1 : Comparaison des contraintes adimensionnelles et déplacements des plaques carrées ($a/h=10$) en Al/Al_2O_3	49
Tableau IV.2 : Comparaison de déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaques carrées en Al/Al_2O_3 avec distribution de matériau suivant une forme exponentielle	50
Tableau IV.3 : Les effets de paramètre de porosité (ξ) sur le déflexion adimensionnelle (\bar{w}) de la plaque P-FG en Al/Al_2O_3 simplement appuyée avec ($p=2$)	51
Tableau IV.4 : Comparaison de charge de flambement critique (\hat{N}_{cr}) des plaques carrées en Al/SiC ($a/h=10$)	53
Tableau IV.5 : Comparaison de charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) des plaques en Al/Al_2O_3	54
Tableau IV.6 : Effet de paramètre de porosité (ξ) sur la charge de flambement critique adimensionnelle (\hat{N}_{cr}) de la plaque P-FG en Al/SiC simplement appuyées ($p=5, a/b=1$ et $a/h=10$)	55

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux Fonctionnellement gradués sont considérés comme une nouvelle classe de matériaux, au contraire des composites classiques, Les FGMs éliminent le problème de concentration de contraintes sur les interfaces avec leurs variations graduées et la continuité de leurs caractéristiques (Koizumi 1993). Pour cet avantage, les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) sont largement utilisés dans plusieurs secteurs : Fabrication des robots, aéronautique, défense, applications d'énergie, véhicules d'espace et génie civil (Efraim and Eisenberger 2007, Ghannadpour et al. 2012, Fazzolari 2016, Kumar et al. 2018). Plusieurs chercheurs scientifiques ont été intéressés par l'étude de cette nouvelle classe des matériaux (Dai et al. 2004, Bhangale and Ganesan 2006, Lanhe et al. 2007, Jomehzadeh et al. 2009, Sahraee 2009, Singha et al. 2011, Ashjari and Khoshravan 2014, Duc and Cong 2015, Kar and Panda 2015ab and 2017, Akavci 2016, Jung et al. 2016, Burlayenko et al. 2016, Do et al. 2017, Ebrahimi and Barati 2017, Mehar et al. 2019a, Avcar 2019, Hamed et al. 2019, Ramteke et al. 2019, Zouatnia and hadji 2019, Cuong et al. 2020, Thanh et al. 2020, Fenjan et al. 2020, Abdulrazzaq et al. 2020, Ahmed et al. 2020, Abdulrazzaq et al. 2020, Forsat et al. 2020). Pour bien étudier le comportement des structures FG, il est nécessaire de choisir la théorie appropriée qui décrit exactement ce comportement, pour cela beaucoup de théories sont proposées pour analyser les comportements statique et dynamique des structures FG. Yang and Shen (2001) ont étudiés la réponse vibratoire d'une plaque mince rectangulaire P-FG avec une contrainte initiale basée sur la théorie classique des plaques minces à petite déformation. Nguyen et al. (2008) ont proposés de nouveaux modèles de plaque de déformation en cisaillement du premier ordre pour l'analyse statique d'une plaque sandwich carrée et cylindrique. En se basant sur la théorie de plaque de Mindlin, Ebrahimi et al. (2009) ont étudiés le comportement dynamique d'une plaque FG annulaire déformable par cisaillement relativement épaisse associée avec des couches piézoélectriques. Singha et al. (2011) ont examinés les comportements non-linéaires des plaques P-FG sous une charge transverse répartie par l'application d'élément fini de flexion d'une plaque à haute précision. L'analyse de stabilité d'une plaque P-FG sous une charge électrique et mécanique est étudiée par Jadhav et Bajoria (2012) en utilisant la méthode des éléments finis basée sur le modèle FSDT. La réponse en flexion d'une plaque P-FG est examinée par Xiang and Kang (2013) en utilisant la

méthode sans maillages de type collocation globale et la théorie des plaques de déformation en cisaillement du $n^{\text{ième}}$ degré. Se basant sur les théories des plaques, classique et de déformation en cisaillement, Akbarzadeh et al. 2015 ont examinés l'effet de modèles micromécanique sur le comportement macroscopique d'une plaque. F. Kumar et al. (2016) ont analysés l'instabilité vibrationnelle linéaire et non-linéaire d'une plaque P-FG sous une charge non-uniforme en utilisant la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé et le modèle de von-Kármán. En se basant sur la théorie de coque de déformation en cisaillement du troisième ordre de Reddy, Khoa et al. (2017) ont étudiés l'instabilité non-linéaire des S-FGM piézoélectriques imparfaites dans un environnement thermique. Zhao et al. (2019) ont présentés une nouvelle solution tridimensionnelle exacte pour examiner le comportement dynamique des plaques FG du secteur annulaire avec différentes conditions de limites. Trabelsi et al. (2019) ont développés un élément fini de coque à quatre nœuds basé sur FSDT modifié pour examiner la stabilité thermique des plaques FG et coques cylindriques. Récemment, beaucoup de travaux de recherche sur le comportement statique (flexion et flambement) des structures FG ont été publiés comme (Kar and Panda 2015cd and 2016a, Kar et al. 2016 and 2017, Babaei et al. 2019, Dash et al. 2019, Li et al. 2019, Moita et al. 2019, Safa et al. 2019, Monge et Mantari 2020, Yuan et al. 2020, Do et al. 2020, Hassan et al. 2020, Ramteke et al. 2020ab, Hadji 2020, Rachedi et al. 2020, Merzoug et al. 2020, That et al. 2020).

Dans la fabrication des FGMs, des porosités peuvent apparaitre dans les matériaux au cours du processus de frottement. Cette porosité diminue la performance du matériau composite et provoque une certaine fatigue du matériau. L'effet de cette fatigue a attiré beaucoup d'attention, comme il a été prouvé par le grand nombre des études réalisées sur ce sujet. Wattanasakulpong et al. (2012) ont présentés un travail sur les porosités qui se produisent dans les échantillons du FGM fabriqués par une méthode d'infiltration séquentielle à plusieurs étapes. Wattanasakulpong and Ungbhakor (2014) ont examinés les problèmes dynamiques linéaires et non-linéaires des poutres FG poreuses. Ebrahimi and Zia (2015) ont étudié la vibration non-linéaire des poutres Timoshenko FG avec porosités. Hamed et al. (2019) ont discutés les influences des modèles de porosités sur le comportement statique d'une poutre fonctionnellement graduée dépendante de volume. Avcar (2019) a présenté un travail original sur le comportement dynamique des poutres fonctionnellement graduées à loi de puissance et sigmoïde imparfait. Forsat et al. (2020) ont étudiés les effets à petites échelles sur

vibrations transitoires des nano-coques cylindriques FG poreuses basées sur une théorie du gradient de déformation non-locale. Gafour et al. (2020) ont examinés l'analyse de vibration libre dépendante de porosité d'une nano-poutre FG en utilisant un principe d'énergie et déformation en cisaillement non-locale

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de la porosité sur les comportements statiques (flexion et flambement) des plaques FG simplement appuyées sous des charges mécaniques. La plaque est modélisée par une théorie raffinée de déformation en cisaillement trigonométrique d'ordre élevée. Les micro-vides sont distribués logarithmiquement à travers l'épaisseur ; les équations régissant du système sont dérivées par le principe du travail virtuel. Plusieurs études paramétriques sont présentes pour illustrer l'influence de la porosité sur les contraintes et les déplacements et la charge de flambement critique de la plaque FG.

Notre thèse est composée de quatre chapitres structurés comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

Dans le deuxième chapitre, on a étalé les différents modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques ou une revue des différentes théories qui permettent la modélisation des plaques à savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

Le troisième chapitre, a pour but de présenter les formulations théoriques pour l'étude de l'effet de la porosité sur les comportements statiques (flexion et flambement) des plaques FG simplement appuyées sous des charges mécaniques. La plaque est modélisée par une théorie raffinée de déformation en cisaillement trigonométrique

d'ordre élevée. Les micro-vides sont distribués logarithmiquement à travers l'épaisseur ; les équations régissant le système sont dérivées par le principe du travail virtuel.

Dans le dernier chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques des études analytiques présentées dans le troisième chapitre et leur comparaison avec ceux trouvés dans la littérature.

Le manuscrit se termine par une conclusion générale permettant de mettre l'accent sur les différents résultats originaux de ce travail et des perspectives.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

I.1 Introduction

Le progrès accéléré des industries pendant ce dernier siècle et aussi l'évolution incroyable des sciences pour répondre aux besoins croissants de ces industries été derrière la plupart des découvertes et inventions dans tous les domaines. L'une de ces inventions c'est la fabrication des matériaux composites qui possèdent des propriétés qui n'existent pas dans les matériaux existants dans la nature. Ces matériaux qui ont pris le nom en anglais (Functionally graded materials) ou brièvement FGM.

Les FGM sont des matériaux connus pour leur haute performance face à différentes contraintes, leur haute résistance thermique, leur durabilité, leur résistance à la corrosion et leur aptitude d'avoir des caractéristiques contraire comme la conductivité thermique et la résistance thermique, et malgré que la première utilisation de ces matériaux était dans le domaine de l'aéronautique mais ces propriétés ont ouvert les portes d'application dans d'autres nouveaux domaines ce qui a augmenté l'utilisation des FGM et par conséquent la demande et le besoin de nouvelles méthodes qui baissent le cout de fabrication et prend moins de temps en réalisation.

I.2 Définition d'un matériau à propriétés fonctionnellement gradués (FGM)

Un matériau à propriétés fonctionnellement graduées (functionally graded materials FGM) est l'un des types des matériaux composites, qui est composé de deux ou plusieurs matériaux dans le but d'avoir les caractéristiques et par conséquent les avantages de tous ces matériaux à la fois. Au contraire des matériaux composites qui sont un mélange homogène, les propriétés de ces matériaux varient graduellement d'une façon parfaite et suivant une fonction le long de la direction de cette graduation. Malgré qu'un matériau FGM peut être composé de plusieurs matériaux mais le plus souvent, un matériau FGM est composé de deux matériaux avec des caractéristiques hétérogènes : céramique et métal ; la céramique qui a une haute résistance thermique et le métal qui a une résistance mécanique forte comme illustré sur la figure I.1.

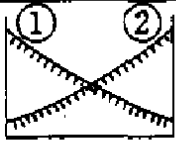
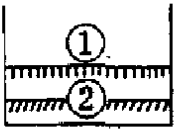
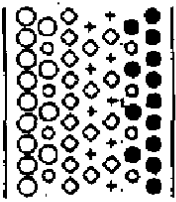
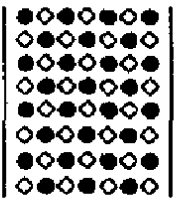
Propriété	① Résistance mécanique ② Conductivité thermique		
Structure	Constituent Elements: Céramique (○) Metal (●) Fibre (◇+) Micropore (○)		
Matériaux	Exemple	FGM	non-FGM

Figure I.1: Caractéristiques des matériaux FGM (Koizumi 1997)

Les matériaux composants des FGM et leurs propriétés sont représentés sur le tableau suivant :

Couches	Matériau	Caractéristiques
Face à haute température	Céramique	- bonne résistance thermique - bonne résistance à l'oxydation - faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couche intermédiaire »	Céramique-métal	- Elimination des problèmes de l'interface - Relaxation des contraintes thermique
Face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - conductivité thermique élevée - très bonne ténacité

Tableau I.1: Comparaison entre la céramique et le métal

I.3 Historique des matériaux FGM

L'apparition du concept du matériau FGM pour la première fois, eu lieu au Japon les années 1980 dans le laboratoire national d'aérospatial dans la région de Sendai, quand un groupe de chercheur (Niino et al. 1984) et dans le but de développer des matériaux pour la construction des barrières thermiques qui peuvent résister aux grandes températures qui peuvent atteindre 2100K et aussi qui répondent bien à la grande différence thermique entre l'intérieur et l'extérieur dans ces structures. En 1987, un autre projet national a été lancé par l'agence de science et technologie du Japon (STA) sous le titre « Recherche dans la technologie de base pour le développement des matériaux fonctionnellement gradué pour la relaxation de contrainte thermique » et qui est aussi connu sous le nom 'FGM part1', ce

programme a duré jusqu'à 1992, ou ils ont réussi à préparer des pièces carrées de 300mm (figure I.2), et autres en forme de bol hémisphérique avec un diamètre de 50mm (Koizumi 1996).



Figure I.2: plaque carrée de 300mm en FGM (Koizumi, 1996)

Suivant cet achèvement, et même avant, plusieurs projets, symposiums et études ont été lancées avec la participation et les efforts de plusieurs labos dans différents pays en incluant le Japon, l'Allemagne, les Etats Unies, la Suisse, la Russie, l'Ukraine, etc. en citant le premier symposium international sur les FGM était en Sendai, Japon en Octobre 1990, suivi par un autre à San Francisco en 1992 et un troisième à Lausanne en 1994 et ainsi de suite jusqu'au 15eme symposium international à Kitakyushu, Japon en 2018, et il est prévu le 16eme symposium international sur les matériaux fonctionnellement gradués à Connecticut, les Etats unies du 8 au 11 Aout 2021.

I.4 Différences entre les matériaux FGM et matériaux composites traditionnels

Le changement gradué des propriétés d'un matériau à un autre a donné les matériaux FGM leurs avantages devant les matériaux composites traditionnels (laminaires), ces derniers sont avec leurs discontinuité des caractéristiques des matériaux ainsi que l'existence des contraintes à l'intérieur des interfaces ont illustré une très faible performance face aux

différents sollicitations qui peuvent être appliqué sur eux, à cause de leur incorrect adhésion aux différents couches des matériaux composants, et leurs interfaces aigus y compris les propriétés dépareillées des deux matériaux.

Face à ce problème, le matériau FGM a éliminé le facteur de concentration de haute contrainte, sa combinaison métal-céramique assure une bonne résistance aux très hautes températures, le matériau céramique résiste à la haute température alors que la part métallique fourni la résistance mécanique nécessaire, et ça améliore la performance et réduit fortement le risque de délaminage. (Mahamood et al. 2017)

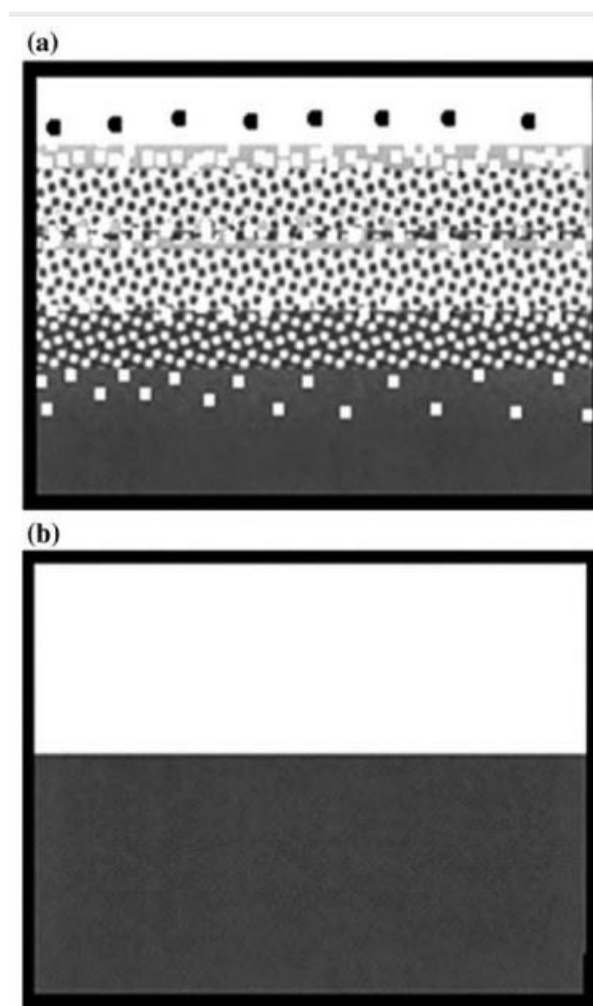


Figure I.3: Schéma de distribution des différents matériaux dans (a) matériau FGM et (b) matériau composite traditionnel (Mahamood et al. 2017)

I.5 Méthodes de fabrication des matériaux FGM

Les chercheurs du domaine des matériaux fonctionnellement gradués, ont proposés beaucoup de méthodes pour la fabrication des matériaux FGM tout dépend de la combinaison des matériaux utilisés, le matériel utilisé et la technologie nécessaire pour cette fabrication, l'utilisation de ce matériaux FGM, le niveau de performance demandé, etc. et tout ça était la cause de naissance de différentes méthodes qui différent en terme de cout, de qualité, et facilité de réalisation ou de difficulté. Certains chercheurs parlent de l'existence de 15 différentes méthodes pour l'élaboration de ces matériaux, qui varient en termes de variabilité de fonction de transition, de type de FGM, de versatilité de contenu de phase et en souplesse de géométrie ; mais toujours le but c'est d'assurer la composition nécessaire, la microstructure doit être distribué suivant la conception pour achever la performance exigé. (Udupa et al. 2014).

Parmi ces méthodes on cite les méthodes suivantes :

I.5.1 Métallurgie des poudres

Cette méthode est l'une des célèbres méthodes dans ce domaine, et on peut dire qu'elle est composée de quatre phases comme illustré dans la figure suivante : Premièrement, matériau A et matériau B sont pesés et mixés, ensuite, ces poudres pré-mixés seront empilé conformément à une distribution spatiale prédéfini, après c'est la phase de pression et damage de ces poudres pré-mélangés, et enfin c'est le frittage, là on parle de frittage par étincelle de plasma (SPS Spark Plasma Sintering), aussi connu sous le nom Frittage flash.

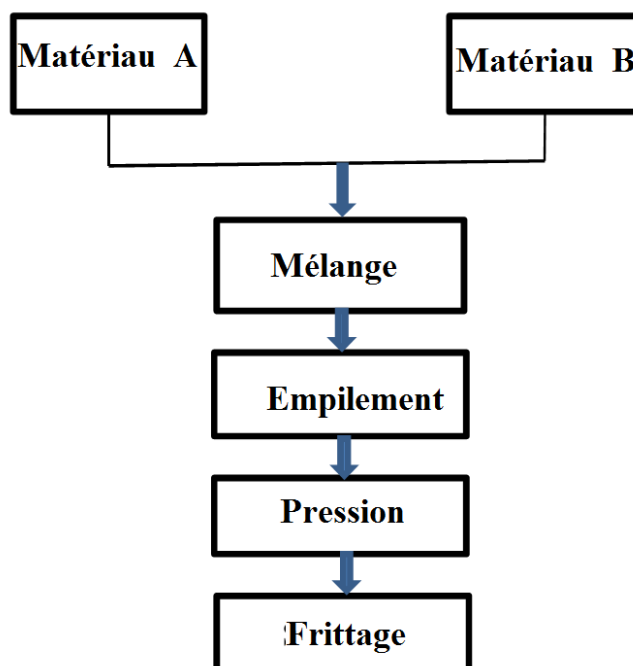


Figure I.4: organigramme de préparation du matériau FGM suivant la méthode de métallurgie des poudres, (Udupa et al, 2014).

I.5.2 Coulage centrifuge

Dans cette méthode de production du matériau FGM, on utilise la force de gravité durant la rotation de notre moule pour fabriquer des matériaux FGM en masse sous la forme d'anneau ou tube métallique. Dans cette méthode les particules de renforcement sont versées dans le métal fondu pour créer un mélange uniforme, ensuite et à travers la ségrégation des particules de renforcement par les forces gravitationnelles, un gradient de la composition chimique est créé et maintenu par le contrôle de processus de solidification.

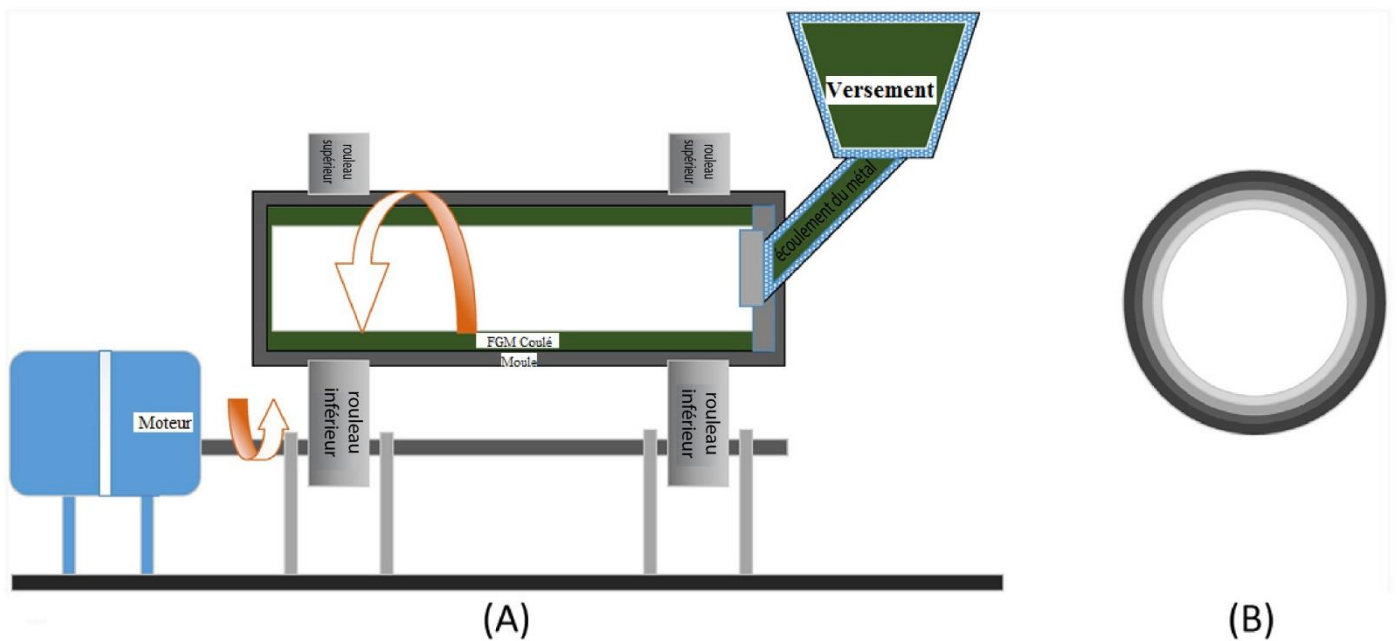


Figure I.5: méthode de coulage centrifuge. (A) schéma de processus, (B) Gradient de composition chimique d'un FGM cylindrique résultant. . (Naebe et al. 2016)

I.5.3 Coulage en bande (Tape casting)

Le coulage en bande est une méthode utilisée souvent pour la production des substrats en céramique multicouches à grand échelle ; dans cette technique plusieurs matériaux ont été coulés sur un substrat ou l'épaisseur varie entre 100 à 300 μ m (Naebe et al. 2016) sous la forme de barbotine de poudres en suspension sur un support ; l'étalement de chaque bande c'est par déplacement du support sous la lame (Coulage continu) et c'est le cas généralement dans la fabrication industrielle ; ou bien par le mouvement du sabot sur un support fixe et c'est la méthode du coulage utilisée dans le labo. Un schéma du montage utilisé pour cette méthode est montré sur la figure suivante.

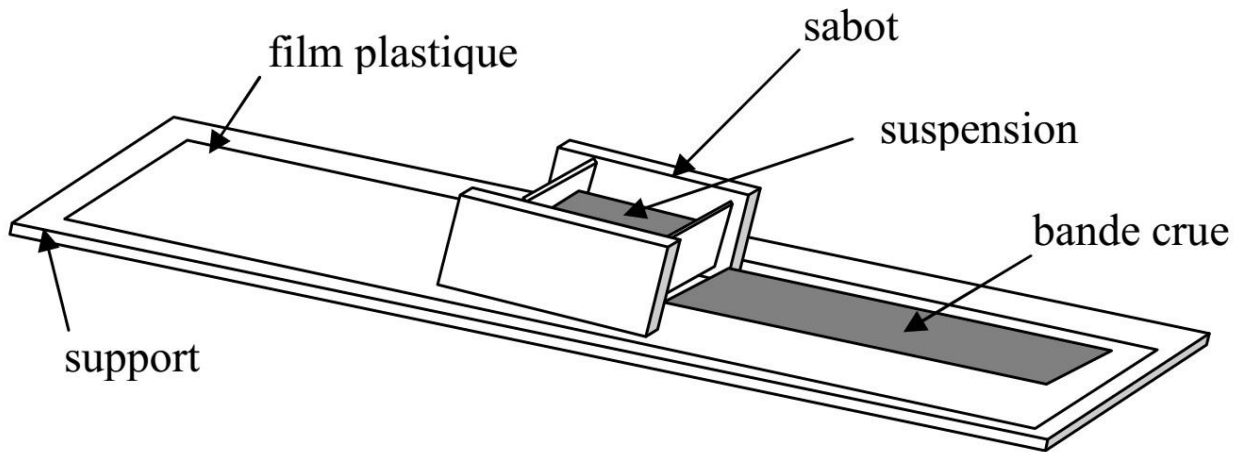


Figure I.6: Schéma du principe de la méthode Coulage en bande (tape casting)

I.5.4 Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting)

La méthode du coulage séquentiel en barbotine c'est la mise d'une suspension des particules de céramique dans une matrice liquide avec des grains fins. La surface est versée à travers une action capillaire dans un moule perméable, ou la matrice est drainée. Le liquide sera drainé en dehors du moule après l'atteint d'épaisseur approprié. Le coulage est enlevé du moule quand il est séché. Les avantages du coulage séquentiel est utilisé pour la fabrication du FGM comme l'aptitude à produire des formes complexes est l'aptitude à la graduation continue (Saleh et al. 2020). La répétition de coulage en boues de compositions différentes peut être utilisée pour produire des MGF stratifiés. Un schéma de coulée à gradient dans laquelle un feuillet circule continuellement à travers le moule pendant l'étape de coulée est représenté sur la figure I.7 (Marple et al. 1997), d'autres configurations sont également proposées par (Marple et al. 1996).

L'élément commun est la présence de plusieurs réservoirs contenant des suspensions de matériaux et d'être jeté. La composition de la barbotine introduite dans le moule est commandée pour correspondre à la composition souhaitée des piles étant déposé. Le glissement est diffusé en continu à travers le moule, et les suspensions des réservoirs sont ajoutées par des pompes de flux à des débits contrôlés par l'ordinateur. Le mélange des suspensions est amélioré par l'utilisation des mélangeurs fixes, en forme de spirale pour créer une turbulence pendant l'écoulement à travers les tubes d'alimentation.

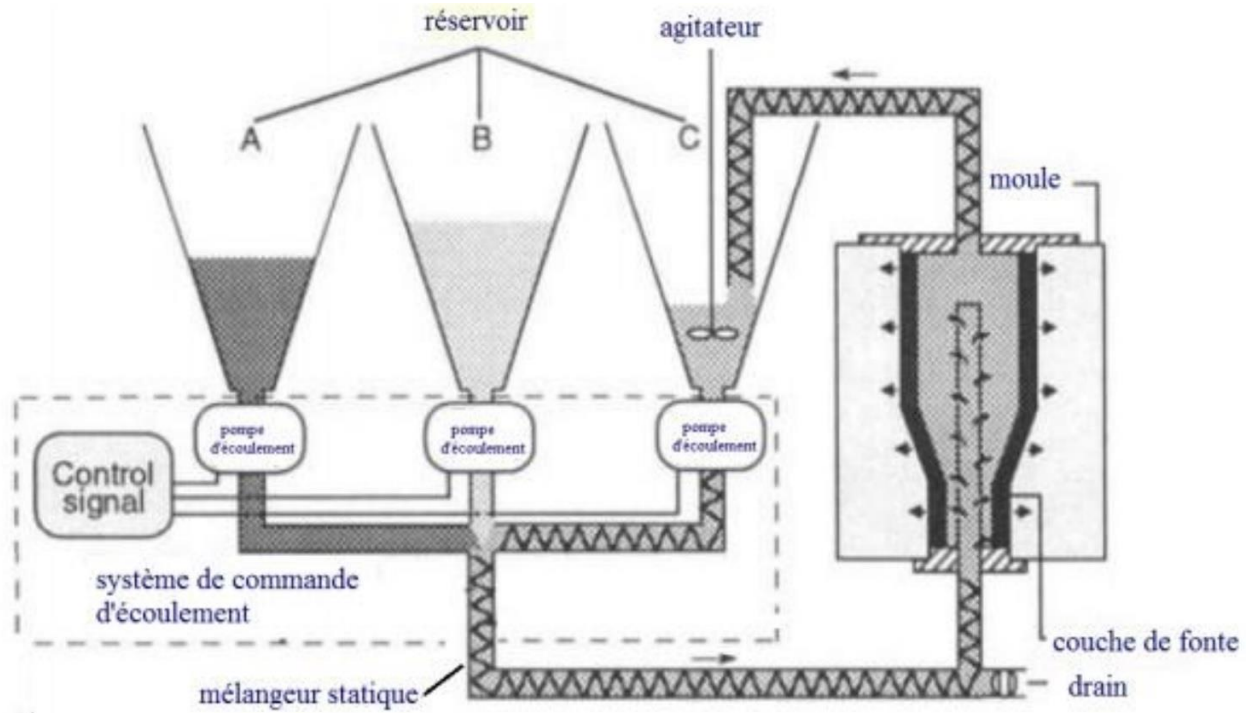


Figure I.7: Schéma du méthode de fabrication des FGM suivant la méthode du coulée séquentiel en barbotine (slip casting) (Marple et al. 1997).

I.5.5 Projection plasma

La méthode de projection plasma est une méthode de pulvérisation thermique utilisée dans la production des FGM pour créer un enrobage de surface avec des dimensions minces à travers le processus de projection (Saleh et al. 2020). Au début de ce processus, la source thermique est utilisée pour faire fondre la matière première pour l'enrobage, après, et par traitement du gaz et sa projection sur la matière première, les matériaux fondus seront poussés jusqu'à ce qu'ils sont solides et forment une couche.

Cette méthode est devenue très célèbre grâce à de son équipement relativement simple, la facilité de projection et donc la fabrication des FGM sur des éléments à géométrie compliquée et aussi la haute performance des surfaces traités (Steffens et al. 1990).

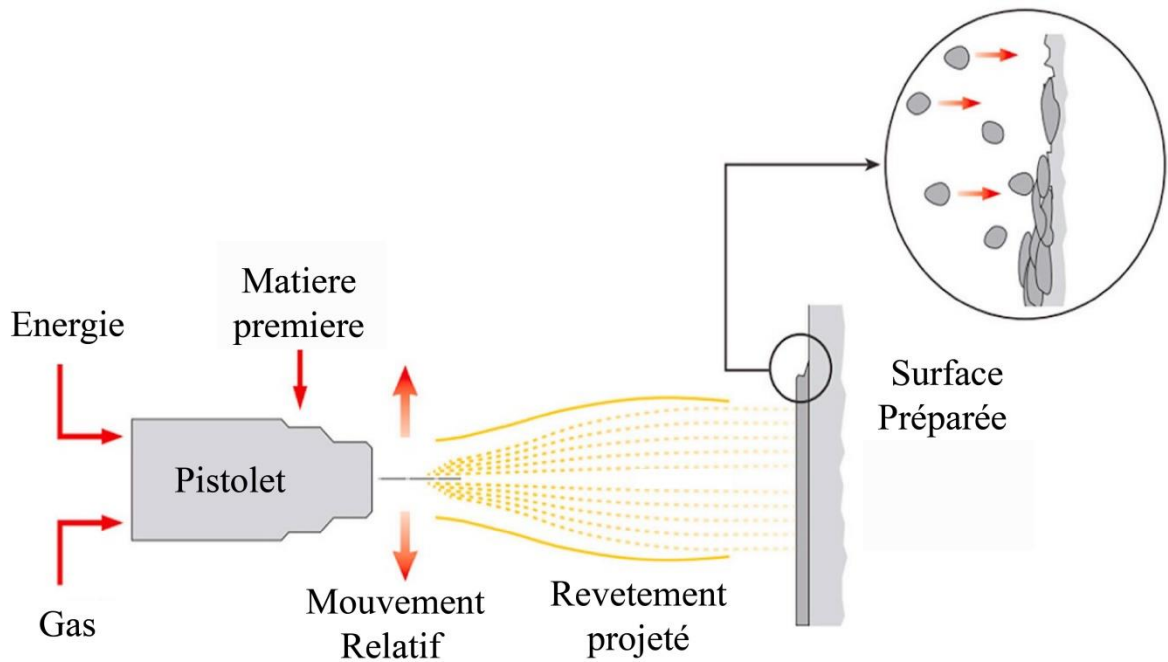


Figure I.8: Schéma de la procédure de la méthode de projection plasma (Saleh et al. 2020)

I.5.6 Processus de stéréolithographie

Cette méthode aussi connu par (SLA) est basée sur le phénomène de photopolymérisation qui consiste à utiliser une source de lumière pour la liaison de deux résines durcissables combinés avec d'autres matériaux pour la production des composants composites solides. Dans cette méthode il y a deux formes de SLA, ce sont la méthode côté droit (right-side) et la méthode inverse (upside-down), cette dernière était la première à utiliser mais elle est couteuse car elle exige un réservoir de résine plus grand et un site plus vaste, mais elle est aussi utile pour la production des éléments plus large ce qu'il la rend plus industrielle ; tandis que la méthode Upside-down a vraiment changé tout à cause de son petit volume, son besoin à petit réservoir de résine et son cout abordable qui permet à beaucoup plus de sociétés de les utiliser sans abandonner la haute qualité de production de cette machine.

La figure suivante présente un schéma qui explique le principe de travail des deux méthodes de processus de stéréolithographie.

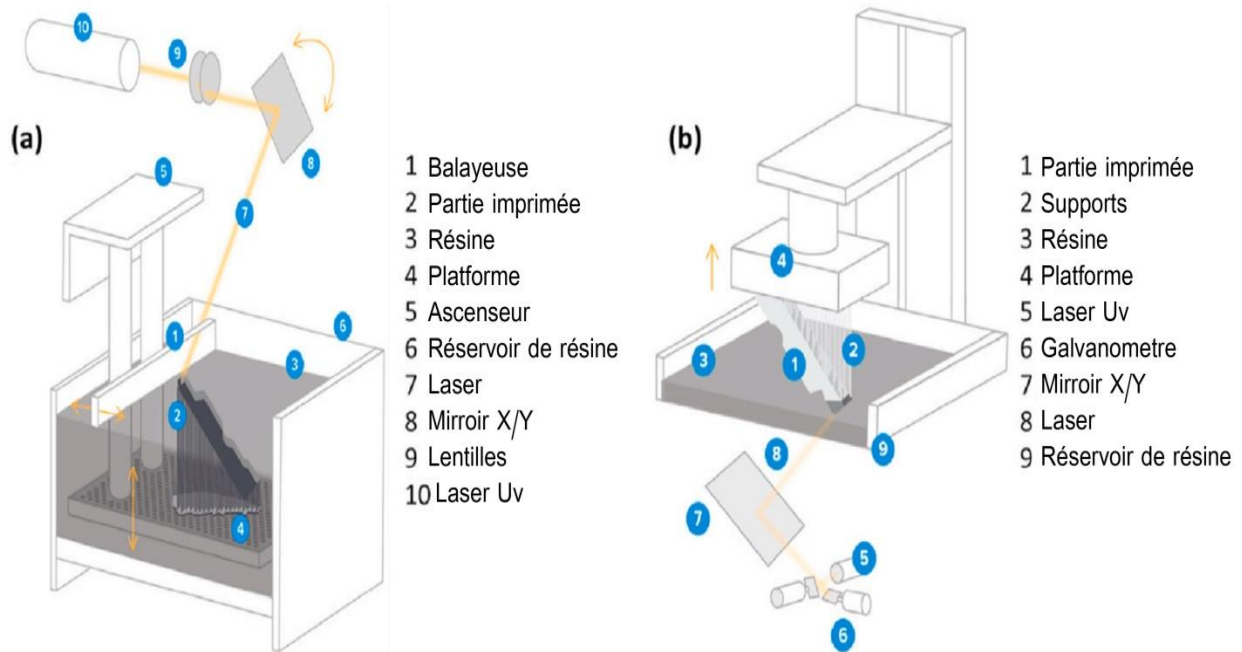


Figure I.9: Formes de méthode de stereolithographie de fabrication des FGM, (a)Méthode de coté droit, (b)Méthode Upside-down (Saleh et al. 2020)

I.6 Domaines d'application des matériaux FGM

La première utilisation des matériaux FGM a été dans le domaine aéronautique, mais avec le développement des méthodes de fabrication, et devant les avantages immenses de ces matériaux, leur haute performance, leur facilité de fabrication surtout pour des géométries complexes, leur légèreté, durabilité, résistance, etc. tout ça les a rendus des matériaux très prisés dans plusieurs domaines. Parmi ces domaines on cite les suivants :

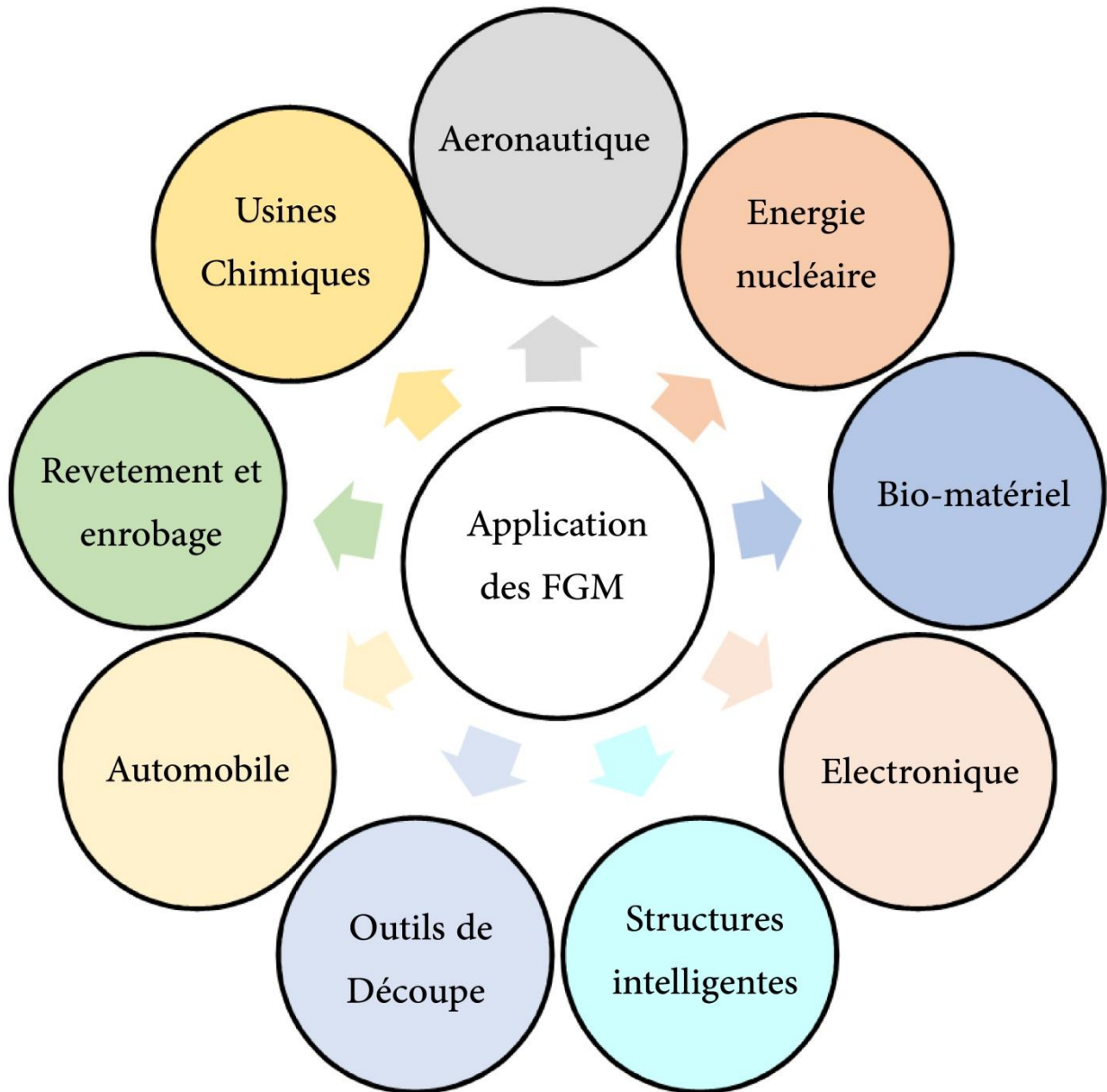


Figure I.10: Domaines d'applications des matériaux FGM (Saleh et al. 2020)

I.6.a. Applications aéronautiques

Le début des matériaux FGM était dans le domaine de l'aéronautique pour la réduction des contraintes thermiques entre l'extérieur et l'intérieur, mais maintenant ces matériaux sont utilisés pour beaucoup d'autres applications. Maintenant la plupart des pièces d'aéronautique utilisent des FGM, comme le moteur de fusée, les structures des engins spatiaux, les plaques d'échanges thermiques, et autres structures comme les panneaux solaires, roues des turbines, revêtements des lames des turbines, buses de fusées et ça surtout pour les propriétés excellentes de résistances thermique, et contre la corrosion des matériaux FGM. (Saleh et al. 2020).

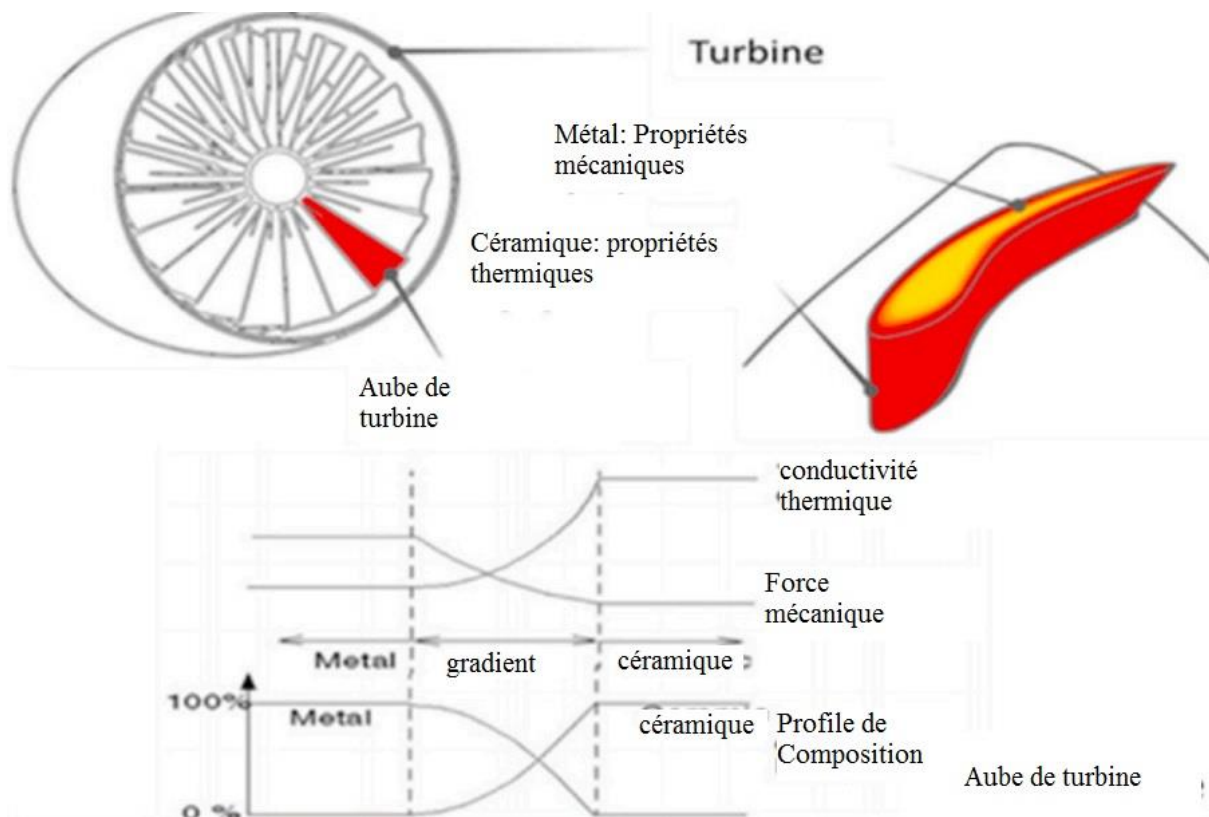


Figure I.11: exemple d'une pièce dans le domaine d'aéronautique avec des propriétés FGM (Saleh et al. 2020)



Figure I.12: Aube de turbine

I.6.b. Applications énergétiques

Les matériaux FGM sont utilisés dans le domaine d'énergie surtout dans les systèmes de génération d'énergie comme les générateurs d'énergie thermique, les composants d'énergie solaire et les dispositifs de conversion d'énergie

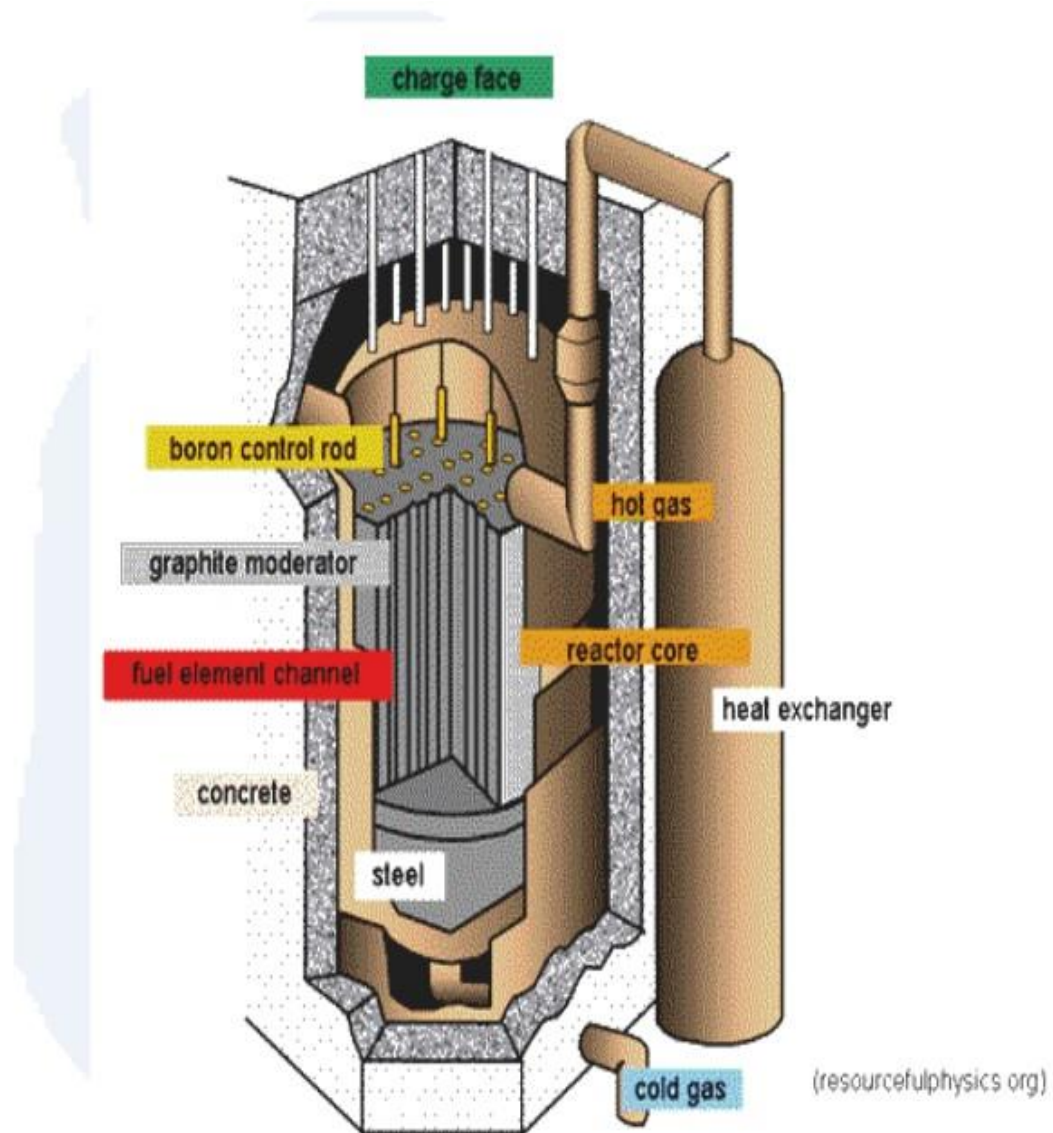


Figure I.13: Mur intérieur d'un réacteur nucléaire en matériaux FGM (Wazery et al. 2015)

I.6.c. Applications automobiles

L'utilisation des matériaux FGM dans le domaine d'automobile est très vaste, les FGM sont utilisés comme des volumes ou comme revêtements, soit sur le revêtement de la tôle ou dans le système d'amortissement, ou dans le moteur comme les pistons des moteurs diesel et les chemises des pistons et aussi les chambres de combustion, et tout ça pour améliorer leurs performances face aux chaleur, pression et différentes contraintes (Saleh et al. 2020)



Figure I.14: plaquettes de frein en FGM (Rajan et al. 2014)

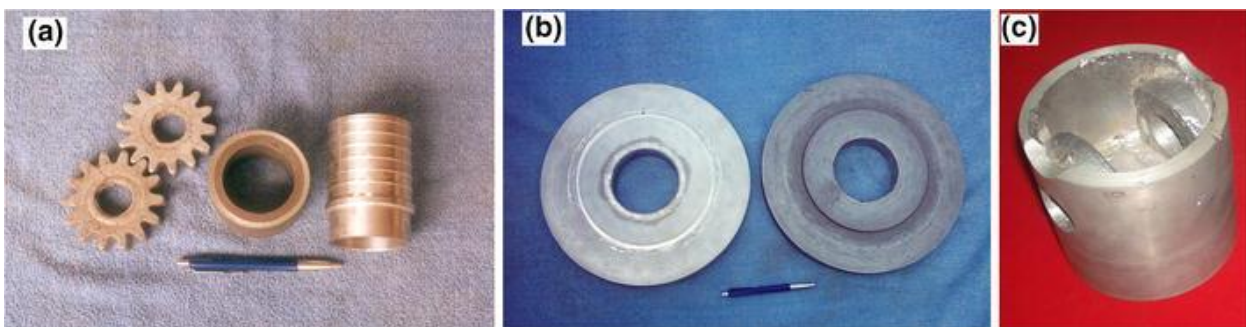


Figure I.15: pièces en FGM: a chemises de cylindre et engrenage, b disques de frein, c piston. (Rajan et al. 2014)

I.6.d. Applications médicales

Une dent ou un os est un élément à une structure fonctionnellement graduée de nature, ce que les rend très ressemblants aux matériaux FGM en terme de composition structurale, en plus, les matériaux FGM sont célèbres par leurs caractéristiques physiques et mécaniques qui les rendent résistants à la corrosion et à l'abrasion, pour cela les matériaux FGM entrent dans la fabrication des prothèses dentaires, des prothèses orthopédiques et d'implants différents.



Figure I.16: pièce orthopédique en FGM pour paralysie cérébrale



Figure I.17: Os artificiel en FGM

I.6.e. Applications électroniques

Dans le domaine de l'électronique, les matériaux FGM sont utilisés dans un nombre infini de pièces et dispositifs comme les capteurs, les puces intégrées, les batteries, les semi-conducteurs (transistors, diodes et dispositifs optoélectroniques) et circuits intégrés (Saleh et al. 2020).

I.6.f. Applications en défense

L'application des matériaux FGM dans le domaine de défense pour baisser le poids des machines et armes de défense, bien sûr l'autre avantage c'est la résistance des matériaux FGM à la propagation des fissures, et par conséquent la résistance à la pénétration ce qui est nécessaire à la fabrication des plaques d'armure et gilets pare balles.



Figure I.18: différentes applications des matériaux FGM dans le domaine de la défense

I.6.g. Applications industrielles

Pour un matériau FGM, il est très facile d'améliorer la résistance des différents composants dans l'industrie à la corrosion ; la résistance thermique, et différents contraintes et différents facteurs de détérioration. Pour cette cause les FGM sont présents dans les outils de découpe, dans la fabrication des moules, et dans la composition des pièces des engins et des moteurs.

I.7 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

I.7.1 La loi exponentielle

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGMs est très répandue dans les études de mécanique de la rupture. Pour une structure faite de FGM avec 'h' une épaisseur uniforme, les propriétés typiques des matériaux $E(z)$ à tout point situé à une distance "z" de la surface de référence est donné par :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.1a})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.1b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure I.19

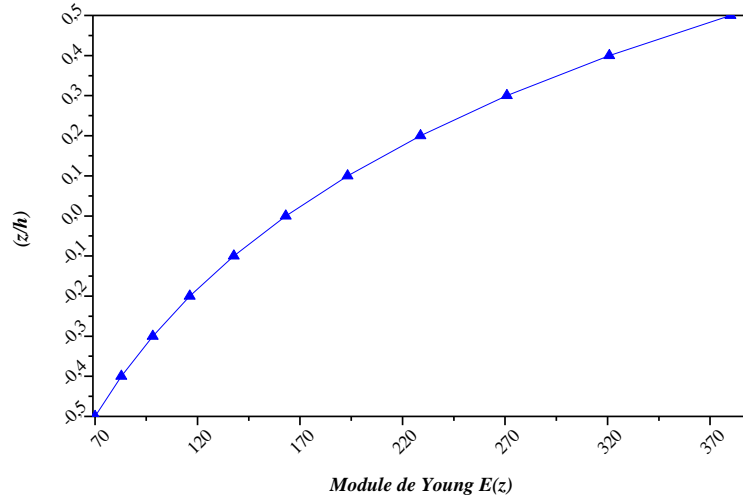


Figure I.19: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

I.7.2 La loi de puissance

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.2a)$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2b)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du moule de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.20, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

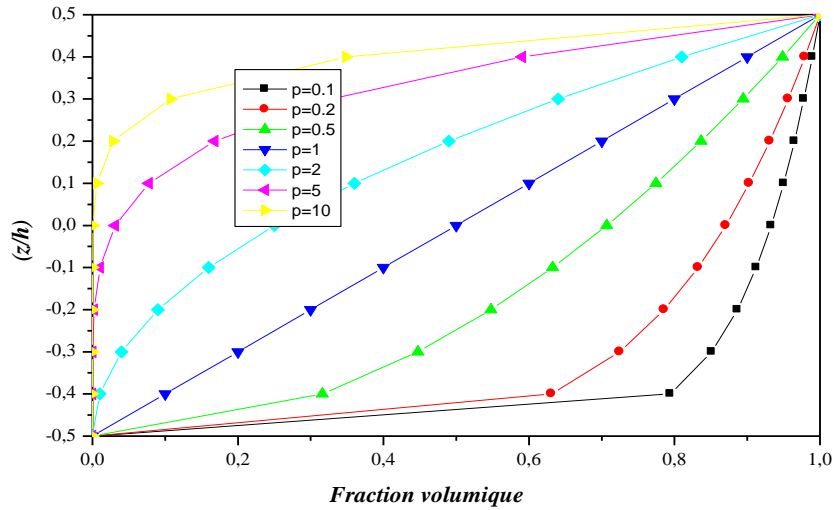


Figure I.20: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.7.3 La fonction sigmoïde

Cette fonction, c'est quand on ajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche ; là, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. La fraction de volume de la plaque FGM par conséquent, a été définie par (Chi et al. 2003) en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3b})$$

Le module de Young de la plaque S-FGM, et par utilisation de la loi des mélanges, peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_c + [1 - V_1(z)]E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_c + [1 - V_2(z)]E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

Sur la Figure I.21, on peut voir que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4a) et (I.4b) représente les distributions sigmoïdes, ce type de plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

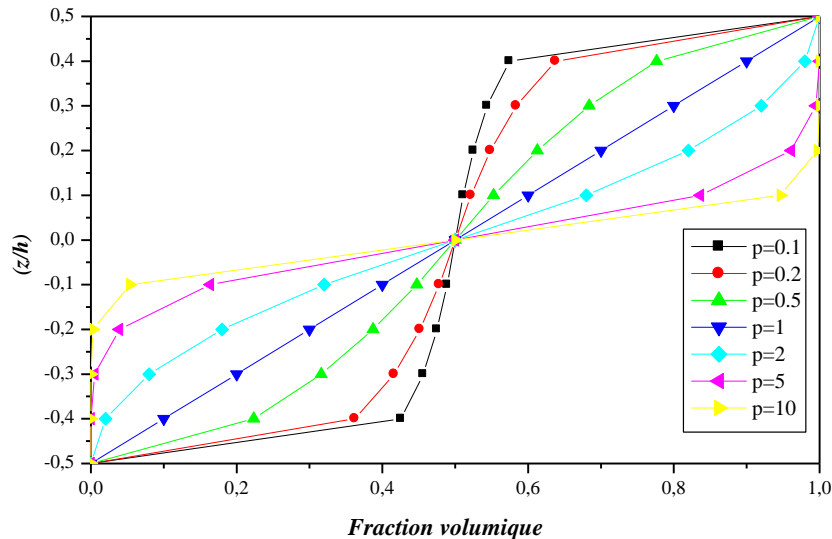


Figure I.21: La variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.8 Conclusion :

Ce chapitre avait pour objectif d'introduire Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) et leur concept, et aussi parler de leur historique et leur évolution. Ces matériaux sont aujourd'hui des matériaux de plus en plus répandus dans plusieurs domaines ; on a parlé d'une façon générale de ces domaines et leurs applications, et on a cité également des méthodes de fabrication des matériaux FGM qu'on a jugé importantes .

Ce développement dans le domaine de production des matériaux FGM propose l'idée d'introduire ces matériaux comme des concurrents aux matériaux traditionnels utilisés dans la construction, l'industrie, la médecine, etc. mais il nous met en face au cout très élevé, aux difficultés de modélisation et de réalisation des géométries complexes, et a une durée longue de fabrication de ces matériaux relativement aux matériaux traditionnels, qui est de nouveau un défi à battre pour les chercheurs dans ce domaine.

Chapitre II

Théorie des plaques

II.1 Introduction

Dès son apparition, la théorie classique des plaques minces n'a cessé de se développer et a préparé le terrain à d'autres théories de plaques. Dans ce chapitre on va parler des différentes théories des plaques, leurs historiques et évolution, leurs hypothèses, leurs champs de déplacement, et leurs différents composants pour bien comprendre ces théories et aussi pour mieux choisir la théorie appropriée pour notre modèle et notre étude.

On va commencer par la théorie des plaques minces qui est la théorie classique de plaque basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, ensuite la théorie des plaques semi-épaisses également appelée la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre basée sur les hypothèses du Reissner-Mindlin, et après les différentes théories des plaques épaisses appelées les théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé, enfin, on va voir la théorie raffinée des plaques et ses avantages.

II.2 Définition des plaques

On trouve dans la littérature que la plaque est définie comme étant un solide délimité par deux plans parallèles appelés faces et dont l'épaisseur h est petite par rapport aux deux autres dimensions. Les plaques sont généralement employées pour modéliser des structures minces, car seule une dimension est faible par rapport aux deux autres. Par contre, si la structure présente une courbure géométrique, ce sont les éléments de coque qui sont privilégiés plutôt que les éléments de plaque qui sont plans. Autrement dit, si l'élément n'est pas plan au repos, nous parlons de coque plutôt que de plaque (Zara 2017), et là on doit savoir que les éléments de coque sont des éléments courbes alors que les éléments de plaques sont plans, et la variation de métrique de la géométrie (c'est à dire son rayon de courbure) en fonction de son épaisseur est prise en compte pour les éléments de coques mais pas pour les éléments de plaques (Desroches 2009). Après, et suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, on introduit les termes mince ou épais aux plaques et coques. Pour cela, on distingue différents types de plaques qui sont disponibles, ou différents hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique de leurs comportements :

- a) Les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée, et la on parle d'une plaque où la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.
- b) Les plaques minces avec de grandes flèches (Karman) ;
- c) plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

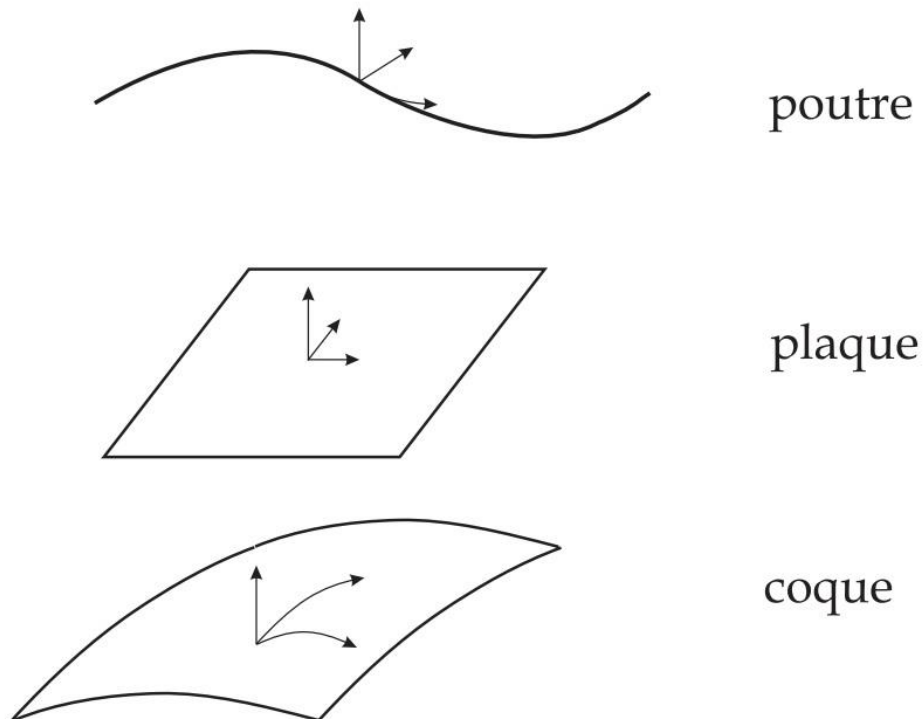


Figure III: Géométries courantes en mécanique des structures (Drapier 2016)

II.3 La théorie des plaques

La théorie des plaques est la description mathématique de la mécanique des plaques, c'est la théorie qui nous permette de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres, et dans un modèle de mécanique des solides on distingue quatre équations :

- Les équations du mouvement,
- Relations déformations-déplacements,
- Loi de comportement, les relations de contrainte-déformation,
- Et les équations de compatibilité.

On compte plusieurs théories de plaques développées par plusieurs chercheurs mais on distingue trois principaux modèles :

- La théorie classique des plaques minces
- La théorie du premier ordre des plaques semi épaisses
- Les théories d'ordre élevé des plaques épaisses.

II.4 Aperçu sur le développement de la théorie des plaques

C'est en 1750 quand Leonhard Euler a publié sa théorie des poutres, où la fibre moyenne déforme en flexion sans contraction ni compression.

En 1764, encore une fois, Euler a énoncé une équation différentielle du second ordre décrivant la vibration des tambours assimilés à une membrane élastique.

En 1808, Ernst Chladni, a exposé ses expériences sur la résonance des plaques à l'académie des sciences, montrant qu'elles donnent des formes régulières.

En 1812, Sophie Germain qui a déjà exposée une équation de la déformée en ajoutant un terme à l'équation d'Euler, cette année elle obtient la déformation d'une plaque en tenant compte des hypothèses de Laplace.

En 1818, Fourier, en reprenant les travaux de Germain, il a trouvé une solution particulière de l'équation des plaques en utilisant les séries de Fourier.

En 1821, Navier présente le Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques

En 1888, Love a fondé la théorie des plaques minces en utilisant les hypothèses de Kirchhoff qui sont inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres.

Les années suivantes, ont vu l'apparition de plusieurs travaux : Rayleigh en 1877, Timoshenko en 1921, Reissner en 1945 et Uflyand en 1948. Ces travaux-là ont frayés la voie à l'apparition de la théorie des plaques épaisses de Raymond Mindlin.

II.5 Les modèles des plaques FGM

Les théories des plaques diffèrent selon l'épaisseur de la plaque, le nombre de variables et surtout leurs applications. Parmi ces théories on cite ci-dessous les modèles les plus célèbres :

II.5.1 La théorie classique des plaques (théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff) (CPT)

La théorie classique des plaques dite en anglais **Classical Plate Theory** (CPT), est la théorie la plus simple parmi les théories des plaques. Elle est appelée la théorie des plaques minces, et on parle d'une plaque mince lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque, elle est aussi connue sous le nom de «Théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff » car elle se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff ou :

- Le plan moyen est initialement plan, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de courbure ;
- Le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan, c'est-à-dire que nous ne considérons que le déplacement transversal (noté w) des points du feuillet moyen ;
- Les sections normales du feuillet moyen restent normales lors de la déformation, c'est à-dire que nous pouvons négliger le cisaillement ;
- L'épaisseur de la plaque est faible, c'est-à-dire que dans la direction de l'épaisseur, la déformation est nulle impliquant que les contraintes dans cette direction peuvent être négligées ;
- Et nous nous plaçons en petites déformations. (Zara, 2017)

En se basant sur ces hypothèses, le champ de déplacement (équation II.1) est écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen ($z=0$).

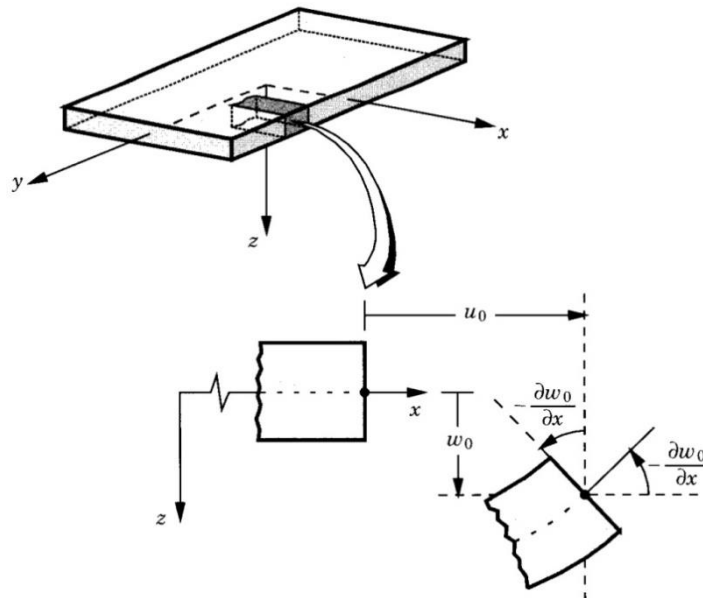


Figure II.2: La plaque de Love-Kirchhoff (Reddy 2004)

Cette théorie reste utile pour les plaques minces mais pour les plaques épaisses cette méthode donne des résultats imprécis car elle ne tient pas en compte de l'effet de cisaillement.

II.5.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, en Anglais **First order Shear Deformation Theory** (FSDT), et aussi appelée Théorie de Reissner-Mindlin ; est une extension des travaux de Timoshenko (Timoshenko et al. 1959), elle est considérée comme amélioration de la théorie classique en tenant compte de la déformation en cisaillement, en considérant que les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la

plaque, où après application des charges, les fibres normales au plan moyen restent droites mais pas forcément normales au plan moyen déformé, de plus la longueur d'une fibre transverse varie peu au cours de la déformation (Reissner 1944) (Mindlin 1951)

Dans cette théorie, le champ de déplacement (équation II.2) est écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{II.2}$$

Où : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont respectivement les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen ($z=0$), et les rotations autour des axes y et x (Figure II.3), et le champ de déplacement défini dans l'expression (II.2) permet de reprendre la théorie classique en remplaçant $\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

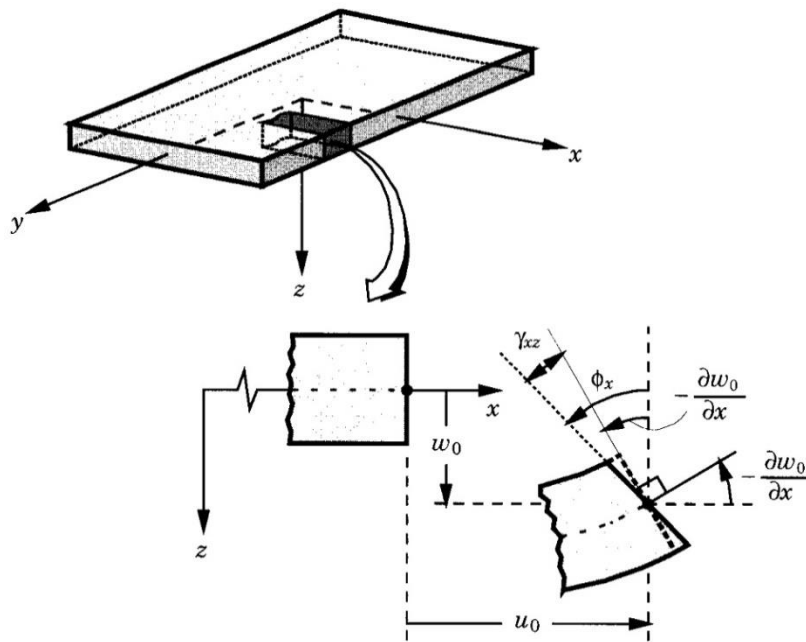


Figure II.3: Plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 2004)

Cette théorie nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement K , et par conséquent les résultats obtenus dépendent du choix de ce facteur, et des erreurs pouvant toujours être introduit. La section suivante explique le principe de la théorie de cisaillement d'ordre élevée afin d'éviter l'introduction du facteur de correction.

II.5.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Afin d'éviter l'utilisation d'un facteur de correction et dépasser les restrictions de la théorie classique et la théorie de déformation du premier ordre (FSDT), plusieurs théories d'ordre élevée ont été développées. Les hypothèses sur lesquelles ces théories se basent sont les mêmes que les théories (CPT) et (FSDT), sauf que la section droite et perpendiculaire au plan moyen avant déformation, ne reste pas droite après déformation et peut présenter un gauchissement.

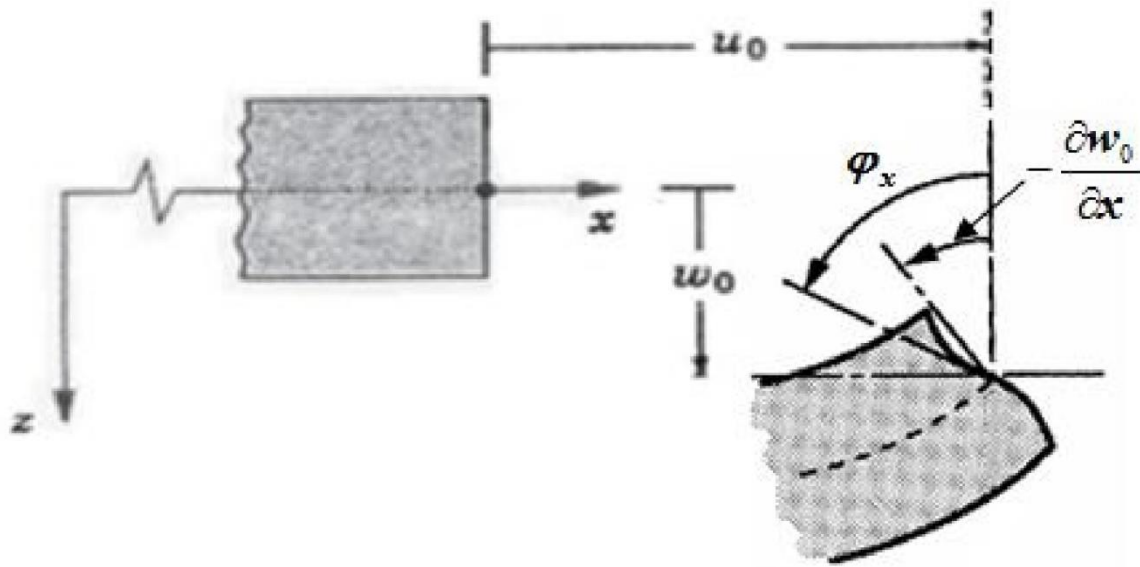


Figure 4: Plaque d'ordre élevé (HSDT)

Le champ de déplacement de la plupart des théories des plaques d'ordre élevé est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.3}$$

Avec: (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont respectivement les composantes du champ de déplacement

en membrane et les rotations autour x et y. Où : $\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$ et $\varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$

$f(z)$ Est la fonction de cisaillement transversal correspondante à la théorie appliquée, où dans le cas de la théorie classique, $f(z)=0$, et dans le cas de la théorie du premier ordre $f(z)=z$. Pour d'autres théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé, la fonction $f(z)$ est montrée sur le tableau suivant:

Tableau II.1: Fonctions de cisaillement relatives aux différentes théories de plaque d'ordre élevé HSDT

Théorie	Fonction $f(z)$
(Reissner 1975)	$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right)$
(Touratier 1991)	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
(Soldatos et al. 1993)	$f(z) = h \sin\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$
(Reddy 1997)	$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right)$
(Karama et al. 2003)	$f(z) = z e^{-2(z/h)^2}$
(Nguyen et al. 2007)	$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z \left(\frac{6}{h\sqrt{13}}\right)$
(Aydogdu 2009)	$f(z) = z \alpha^{\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$
(Ait Atmane et al 2010)	$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]}$
(Benachour et al. 2011)	$f(z) = z_{ns} + C - \sin\left(\frac{\pi(z_{ns} + C)}{h}\right)$
(El Meiche et al. 2011)	$f(z) = \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} - z$
(Mantari et al. 2012)	$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right)$
(Mantari et al. 2014)	$f(z) = \frac{h}{m} \tan\left(\frac{mz}{h}\right) + z^3$

II.5.4 La théorie raffinée de déformation des plaques

Dans l'objectif de réduire le nombre des variables de la théorie d'ordre élevé en comparant avec les autres théories HSDT, un modèle raffiné a été développé en 2002 par Shimpi pour une plaque isotrope.

La théorie raffinée de déformation et en plus de son nombre de variables réduit, elle ne nécessite pas un facteur de correction de cisaillement, et sa fiabilité a été démontrée par plusieurs chercheurs comme : (Ait Atmane et al. 2010) , (Kim et al. 2009) , (Thai et al. 2011) et (Hadji et al. 2011).

Le champ de déplacement de la théorie raffinée de déformation est écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

Où: (u_0, v_0) sont les composantes de champ de déplacement dans les directions x et y,

(w_b, w_s) sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal,

Et $f(z)$ est la fonction de cisaillement transverse.

Sur la figure suivante (Tafla 2007) a représenté la différence dans la distribution des contraintes de cisaillement xz selon trois théories de déformations en cisaillement: théorie des plaques du premier ordre, théorie des plaques d'ordre élevé et théorie des plaques d'ordre élevé raffinée.

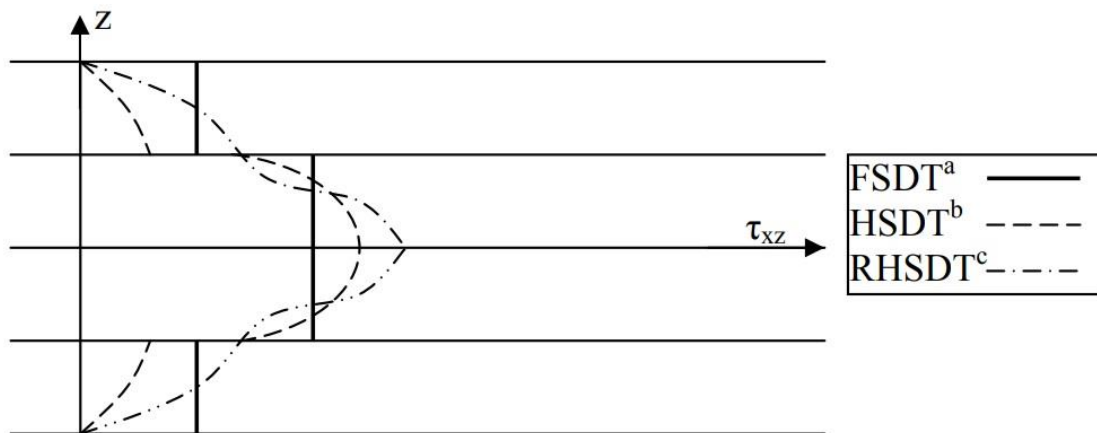


Figure II5: distribution des contraintes de cisaillement xz selon trois théories (Tafla 2007)

a : FSDT (First order shear deformation theory) ;

b : HSDT (High order shear deformation theory) ;

c : RHSDT (Refined high order shear deformation theory)

II.4 Conclusion

Dans les études du comportement de plaque, le choix de la théorie est critique pour avoir les meilleurs résultats. On a parlé dans ce chapitre des plus célèbres théories des plaques en commençant par la théorie classique des plaques CPT (Love-Kierchoff), ensuite, la théorie des plaques de premier ordre FSDT (Reissner-Mindlin), et après, la théorie des plaques d'ordre élevé HSDT en citant quelques différentes théories de ce type qui dépendent de leurs différentes fonctions de cisaillement transversale, et enfin la théorie raffinée de plaque, cette dernière a été développée en vue de la réduction du nombre de variables ainsi que pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, et c'est pour cela que ce type de théorie est considéré comme le plus intéressant surtout pour sa simple formulation par rapport à exactitude et pour le temps de calcul.

Chapitre III

Formulation Théorique

III.1. Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de la porosité sur les comportements statiques (flexion et flambement) des plaques FG simplement appuyées sous des charges mécaniques. La plaque est modélisée par une théorie raffinée de déformation en cisaillement trigonométrique d'ordre élevée. Les micro-vides sont distribués logarithmiquement à travers l'épaisseur ; les équations régissant le système sont dérivées par le principe du travail virtuel. Plusieurs études paramétriques sont présentes pour illustrer l'influence de la porosité sur les contraintes et les déplacements et la charge de flambement critique de la plaque FG.

III.2. Equations et formulation théorique

III.2.1 Formulations du matériau fonctionnellement gradué

Dans ce travail, la plaque FG poreuse simplement appuyée avec dimensions $(a \times b \times h)$ est considérée (voir Figure III.1). La plaque est composée de deux matériaux, céramique et métal. Les propriétés de la plaque FG sont calculées selon des fonctions de loi de puissance et exponentielle comme :

- **Plaque P-FGM poreuse**

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m, \quad (\text{III.1})$$

Où " E_c " et " E_m " sont respectivement les module de Young de la céramique et du métal, et " V_c " est la fraction volumique du matériau céramique, est écrite comme suit:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \quad (\text{III.2})$$

Après certaines modifications, les propriétés efficaces prennent la nouvelle forme où la porosité est prise en compte comme (Gupta et al. 2017)

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p - \log \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) + E_m \quad (\text{III.3})$$

Où ξ est le paramètre de porosité. Le coefficient de Poisson est supposé constant (Wattanasakulpong et al. 2014, Ebrahimi et al. 2015, Gafour et al. 2020).

• **Plaque E-FGM**

$$E(z) = E_0 e^{p(z/h+0.5)}$$

Dans cette étude E_0 est pris $E_0 = E_c$

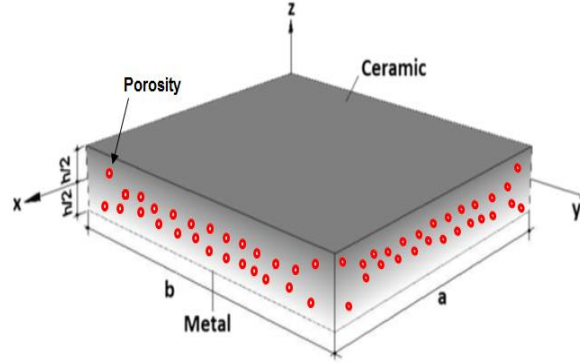


Figure III.1: Géométrie d'une plaque poreuse fonctionnellement graduée

Les propriétés de matériau du métal et céramique sont présentés dans le tableau N° III.1 :

Tableau III.1 : Propriétés du matériau de la céramique et du metal

Matériau	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson
Aluminium (Al)	70	0.3
Alumine (Al ₂ O ₃)	380	0.3
Zircone (ZrO ₂)	151	0.3
Carbure de silicium (SiC)	420	0.3

III.2.2 Théorie raffinée de déformation en cisaillement trigonométrique

Les hypothèses du modèle HSDT sont considérées avec répartition de flexion en composantes de flexion et de cisaillement. Le déplacement axial varie suivant une nouvelle fonction trigonométrique comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - \left(z - z \left(\frac{\pi + 2 \cos(\pi z / h)}{2 + \pi} \right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - \left(z - z \left(\frac{\pi + 2 \cos(\pi z / h)}{2 + \pi} \right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.4}$$

Où l'indice "b" et "s" correspondent aux déplacements de flexion et de cisaillement. u_0, v_0, w_b et w_s , sont les déplacements sur le plan moyen de la plaque.

Les équations de déformation associées au modèle actuel à l'équation (III.4) sont obtenues comme :

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + z k^b + f k^s, \gamma = g \gamma^s \quad (\text{III.5})$$

Où:

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, K^b = \begin{Bmatrix} k_{xx}^b \\ k_{yy}^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.6a})$$

$$K^s = \begin{Bmatrix} k_{xx}^s \\ k_{yy}^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \gamma^s = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.6b})$$

$$f = z - z \left(\frac{\pi + 2 \cos(\pi z / h)}{2 + \pi} \right), g = 1 - df / dz$$

III.2.3 Relations constitutives des plaques FG

Les relations constitutives des plaques P-FG et E-FG correspondantes à la relation de Hooke sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où

$$\begin{aligned} C_{11}(z) &= C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ C_{12}(z) &= \nu C_{11}(z) \\ C_{44}(z) &= C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

III.2.4 Equations régissantes

Le principe du travail virtuel est utilisé pour dériver les équations régissantes la Plaque FG simplement appuyée sous des charges mécaniques, transversales et normales. Le principe peut être écrit dans la forme mathématique par

$$\int_V (\delta U + \delta V) dV = 0 \quad (III.9)$$

Avec

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} \right) dA dz \quad (III.10a)$$

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta (w_b + w_s) dA - \int_A q \delta (w_b + w_s) dA \quad (III.10b)$$

Où

$$\bar{N} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 \delta (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2}$$

Les termes δU et δV sont respectivement la variation d'énergie de déformation et du travail des charges mécaniques transversale et normale.

En remplaçant Eq. (5) et (6) dans Eq. (10a). la variation d'énergie de déformation correspond au modèle actuel est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} &= \int_A \left[N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_{xx}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \right. \\ &- M_{yy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_{yy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \\ &\left. - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_x \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right] dA \end{aligned} \quad (III.11)$$

Les termes N , M et Q apparaissant dans l'équation précédente sont les résultantes des contraintes. Ces dernières sont exprimées comme ci-après :

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (III.12a)$$

$$(M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (III.12b)$$

$$(M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{III.12c})$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (\text{III.12d})$$

En introduisant les expressions des équations (III.10b) et (III.11) dans le principe du travail virtuel (III. 9), intégrant par parties et collectant les coefficients des déplacements $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s , on obtient les équations régissantes suivantes:

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 &= \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b &= \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^b}{\partial y^2} + \bar{N} + q = 0 \\ \delta w_s &= \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \bar{N} + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

En Substituant l'équation (III.7) dans (III.12). Les contraintes résultantes sont obtenues en fonction des déformations comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ K^b \\ K^s \end{Bmatrix} \quad \text{And } Q = A^s \gamma^s \quad (\text{III.14})$$

Où A, B, D, B^s, D^s, H^s sont les rigidités de la plaque FG définies par l'expression :

$$(A, B, D, B^s, D^s, H^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, f^2) C_{ij}(z) dz, \quad (\text{III.15a})$$

$$A^s = \int_{h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g^2 dz \quad (\text{III.15b})$$

En remplaçant les résultantes des contraintes de l'équation (III.12) dans les équations régissantes (III.13) on obtient :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\
 & - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0 \\
 & A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\
 & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = 0 \\
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{N} + q = 0 \\
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \\
 & A_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12} + 2H_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \bar{N} + q = 0
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

III.3. Solution analytique des plaques simplement appuyées

Pour assurer automatiquement les conditions de limites de la plaque FG simplement appuyée, les solutions analytiques de Navier sont utilisées où les termes de déplacement sont présentés dans les séries doubles de Fourier comme (Akgoz et Civalek 2015, Hadji et al. 2019) :

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y), \\
 v(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y), \\
 w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \\
 w_s(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y),
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

Où les coefficients α et β sont donnés par :

$$\alpha = m\pi / a, \text{ et } \beta = n\pi / b \tag{III.18}$$

La charge mécanique transversale q est développée dans la série sinus double de Fourier comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y, \quad (\text{III.19})$$

Où $Q_{mn} = q_0$ pour la distribution de charge sinusoïdale.

Les solutions analytiques du comportement statique de la plaque FG simplement appuyée sont obtenues par la substitution de l'équation (III.17) dans l'équation. (III.16). Les solutions sont obtenues dans la forme de matrice comme :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} + \kappa & K_{34} + \kappa \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} + \kappa & K_{44} + \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{mn}^0 \\ v_{mn}^0 \\ w_{bmn}^0 \\ w_{smn}^0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ Q_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Où:

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad K_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta, \\ K_{13} &= -B_{11}\alpha^2 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 \\ K_{14} &= -B_{11}^s\alpha^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha\beta^2, \\ K_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\ K_{23} &= -B_{22}\beta^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta, \\ K_{24} &= -B_{22}^s\beta^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2\beta \\ K_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \\ K_{34} &= D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 \\ K_{44} &= H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 \\ &\quad + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2 \\ \kappa &= N_{cr}(\alpha^2 + \gamma\beta^2) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

L'équation (III.20) est une forme générale des analyses de flexion et stabilité des plaques FG sous charges normale et transversale. Dans le but de résoudre le problème de flexion, la charge normale compressive N_{cr} est mise égale à zéro. La charge critique de flambement (N_{cr}) peut être obtenue par le problème de stabilité $|K_{ij}| = 0$.

En appliquant l'approche de condensation statique, on obtient l'expression de charge de flambement, donnée par :

$$N_{cr} = \frac{1}{\alpha^2 + \gamma\beta^2} \frac{\overline{K}_{34}\overline{K}_{43} - \overline{K}_{33}\overline{K}_{44}}{\overline{K}_{33} + \overline{K}_{44} - \overline{K}_{34} - \overline{K}_{43}} \quad (\text{III.22})$$

Où

$$\bar{K}_{33} = K_{33} - K_{13} \frac{b_1}{b_0} - K_{23} \frac{b_2}{b_0}, \quad \bar{K}_{34} = K_{34} - K_{14} \frac{b_1}{b_0} - K_{24} \frac{b_2}{b_0} \quad (\text{III.23a})$$

$$\bar{K}_{43} = K_{43} - K_{13} \frac{b_3}{b_0} - K_{23} \frac{b_4}{b_0}, \quad \bar{K}_{44} = K_{44} - K_{14} \frac{b_3}{b_0} - K_{24} \frac{b_4}{b_0} \quad (\text{III.23b})$$

Avec

$$b_0 = K_{11}K_{12} - K_{12}^2, \quad b_1 = K_{13}K_{22} - K_{12}K_{23}, \quad b_2 = K_{11}K_{23} - K_{12}K_{13} \quad (\text{III.23c})$$

$$b_3 = K_{14}K_{22} - K_{12}K_{24}, \quad b_4 = K_{11}K_{24} - K_{12}K_{14} \quad (\text{III.23d})$$

III.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté l'effet de la porosité sur les comportements statiques (flexion et flambement) des plaques FG simplement appuyées sous des charges mécaniques en une théorie raffinée de déformation en cisaillement trigonométrique d'ordre élevée. Les micro-vides sont supposés distribués à travers l'épaisseur ; les équations régissant le système sont dérivées par le principe du travail virtuel.

Les études paramétriques présentées dans le chapitre suivant permettront d'apprécier clairement l'apport de la présente théorie en le comparant avec les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1. Introduction :

Dans cette section, plusieurs résultats numériques des études analytiques présentées dans le chapitre précédent sont présentés et comparés avec ceux trouvés dans la littérature pour montrer la précision du modèle actuel.

En premier lieu, nous nous intéressons aux résultats numériques et leurs interprétations concernant le volet relatif à l'étude de l'analyse de la flexion de la plaque FG parfaite et poreuse simplement appuyée.

Plus loin, nous nous focalisons sur la présentation des résultats obtenus relatifs à l'analyse du flambement de la plaque FG parfaite et poreuse et par conséquent commenter les charges de flambement critiques obtenus par le présent modèle.

IV.2. Analyse des résultats :

IV.2.1. Analyse de la flexion :

Dans cette partie, les résultats de l'analyse de flexion de la plaque FG parfaite et poreuse simplement appuyée sont présentés.

Tous les résultats d'analyse de flexion sont dans la forme adimensionnelle

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{100E_c h^3}{q_0 a^4} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy}(0, 0, z) \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Tableau IV.1: Comparaison des contraintes adimensionnelles et déplacements des plaques carrées ($a/h=10$) en Al/Al_2O_3

p	Théorie	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
1	SSDT Zenkour (2006)	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HSDT Mantari et al. (2012a)	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	TSDT Wu and Li (2010)	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2599
	HSDT Thai and Kim (2013)	0.6414	0.5891	1.4898	0.6111	0.2608
	HSDT Nguyen (2014)	0.6401	0.5883	1.4892	0.6110	0.2552
	Présent	0.6407	0.5888	1.4891	0.6110	0.2627
2	SSDT Zenkour (2006)	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	HSDT Mantari et al. (2012a)	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	TSDT Wu and Li (2010)	0.8984	0.7573	1.3960	0.54420	0.2721
	HSDT Thai and Kim (2013)	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2721
	HSDT Nguyen (2014)	0.8961	0.7567	1.3947	0.5439	0.2721
	Présent	0.8972	0.7573	1.3949	0.5440	0.2778
4	SSDT Zenkour (2006)	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.2580
	HSDT Mantari et al. (2012a)	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	TSDT Wu and Li (2010)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2519
	HSDT Thai and Kim (2013)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
	HSDT Nguyen (2014)	1.0466	0.8818	1.1766	0.5664	0.2593
	Présent	1,0484	0,8820	1,1775	0,5666	0,2611
8	SSDT Zenkour (2006)	1.1340	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121
	HSDT Mantari et al. (2012a)	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	TSDT Wu and Li (2010)	1.0763	0.9747	0.9477	0.5858	0.2087
	HSDT Thai and Kim (2013)	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088
	HSDT Nguyen (2014)	1.0719	0.9744	0.9444	0.5852	0.2117
	Présent	1.0741	0.9751	0.9456	0.5854	0.2143

Le tableau IV.1 montre les déflexions centrales adimensionnelles (\bar{w}), déplacement axial (\bar{u}), normale ($\bar{\sigma}_x$) et contraintes de déformation transversale ($\bar{\tau}_{xy}$), ($\bar{\tau}_{xz}$) des plaques P-FG en Al/Al_2O_3 sous des charges sinusoïdales, les résultats obtenues sont comparés avec celles données par (Zenkour 2006, Wu and Li 2010, Mantari et al. 2012a, Thai and Kim 2013 et Nguyen 2014) en utilisant les différentes théories de déformation en cisaillement. De cette comparaison, un bon accord est observé entre les résultats des déflexions centrales (\bar{w}), déplacement axial (\bar{u}), transversale ($\bar{\tau}_{xy}$), normale ($\bar{\sigma}_x$) et contraintes de cisaillement transverses ($\bar{\tau}_{xz}$) calculés par la présente théorie trigonométrique raffinée de déformation en cisaillement, et celles trouvées dans la littérature. On peut voir à partir de ces résultats que les déflexions centrales adimensionnelles (\bar{w}) et le déplacement axial (\bar{u}) sont en relation de corrélation directe avec l'indice du matériau (p).

Tableau IV.2: Comparaison de déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaques en Al/Al_2O_3 avec distribution de matériau suivant une forme exponentielle

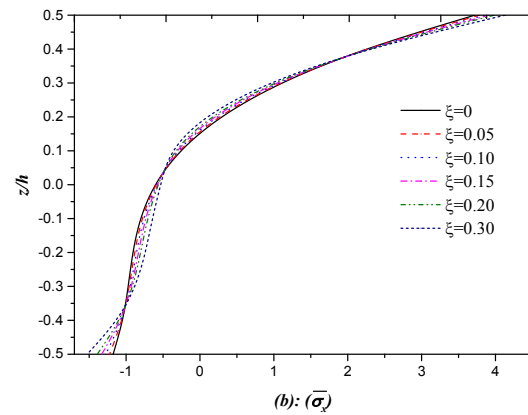
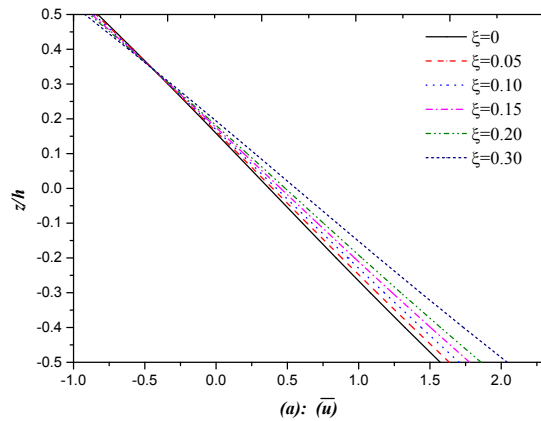
a/h	b/a	Théories	p					
			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
1		HSDT Mantari et al. (2012b)	0.6363	0.5752	0.5195	0.4687	0.4018	0.3079
		HSDT Thai and Kim (2013)	0.6362	0.5751	0.5194	0.4687	0.4011	0.3079
		HSDT Nguyen (2014)	0.6211	0.5615	0.5073	0.4579	0.3921	0.3014
		Présent	0.6315	0.5709	0.5157	0.4654	0.3984	0.3061
2	2	HSDT Mantari et al. (2012b)	1.2776	1.1553	1.0441	0.9431	0.8093	0.6238
		HSDT Thai and Kim (2013)	1.2775	1.1553	1.0441	0.9431	0.8086	0.6238
		HSDT Nguyen (2014)	1.2569	1.1367	1.0275	0.9284	0.7965	0.6153
		Présent	1.2717	1.1500	1.0394	0.9390	0.8053	0.6217
3		HSDT Mantari et al. (2012b)	1.5341	1.3874	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506
		HSDT Thai and Kim (2013)	1.5340	1.3873	1.2540	1.1329	0.9719	0.7506
		HSDT Nguyen (2014)	1.5115	1.3671	1.2360	1.1169	0.9587	0.7414
		Présent	1.5277	1.3817	1.2490	1.1286	0.9684	0.7484
1		HSDT Mantari et al. (2012b)	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
		HSDT Thai and Kim (2013)	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
		HSDT Nguyen (2014)	0.3575	0.3235	0.2927	0.2649	0.2280	0.1775
		Présent	0.3595	0.3253	0.2943	0.2663	0.2292	0.1784
4	2	HSDT Mantari et al. (2012b)	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
		HSDT Thai and Kim (2013)	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
		HSDT Nguyen (2014)	0.8285	0.7498	0.6787	0.6145	0.5296	0.4135
		Présent	0.8315	0.7525	0.6812	0.6167	0.5314	0.4148
3		HSDT Mantari et al. (2012b)	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
		HSDT Thai and Kim (2013)	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
		HSDT Nguyen (2014)	1.0281	0.9305	0.8424	0.7628	0.6576	0.5137
		Présent	1.0315	0.9336	0.8451	0.7652	0.6596	0.5151

Le tableau IV.2 présente la comparaison de la flexion adimensionnelle (\bar{w}) de la plaque E-FG simplement appuyée sous une charge mécanique sinusoïdale (q). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux donnés par (Mantari al. 2012b, Thai and Kim 2013, et Nguyen 2014). A partir du tableau, il est aussi confirmé que les résultats actuels sont en bon accord avec ceux dans la littérature. On peut aussi noter que la flexion adimensionnelle (\bar{w}) est en relation inverse avec le rapport de géométrie (a/h) et l'indice (p). L'augmentation dans les valeurs du rapport d'aspect (b/a) conduit à une augmentation dans les valeurs de flexion adimensionnelle (\bar{w}).

Tableau IV.3: Les effets de paramètre de porosité (ξ) sur la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) de la plaque P-FG en Al / Al_2O_3 simplement appuyée avec ($p = 2$)

a/h	b/a	paramètre de porosité (ξ)			
		0	0.05	0.1	0.2
2	1	1.6135	1.6774	1.7457	1.8984
	2	3.2883	3.4123	3.5449	3.8408
	3	3.9619	4.1095	4.2672	4.6188
4	1	0.9485	0.9811	1.0158	1.0928
	2	2.2104	2.2833	2.3609	2.5329
	3	2.7463	2.8361	2.9317	3.1435

Les effets de paramètre de porosité (ξ), rapports d'aspect (b/a) et géométrie (a/h) sur la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) sur la plaque P-FG simplement appuyée en Al / Al_2O_3 sous une charge sinusoïdale (q) sont résumés dans le tableau IV.3. A partir des résultats obtenus, on peut clairement voir que l'augmentation du paramètre de porosité (ξ) mène à augmenter les valeurs de la flexion adimensionnelle (\bar{w}) et cela donne des valeurs plus que parfaites pour une plaque FG et ça est confirmé pour des différentes valeurs des rapports de géométrie (b/a) et géométrie (a/h).



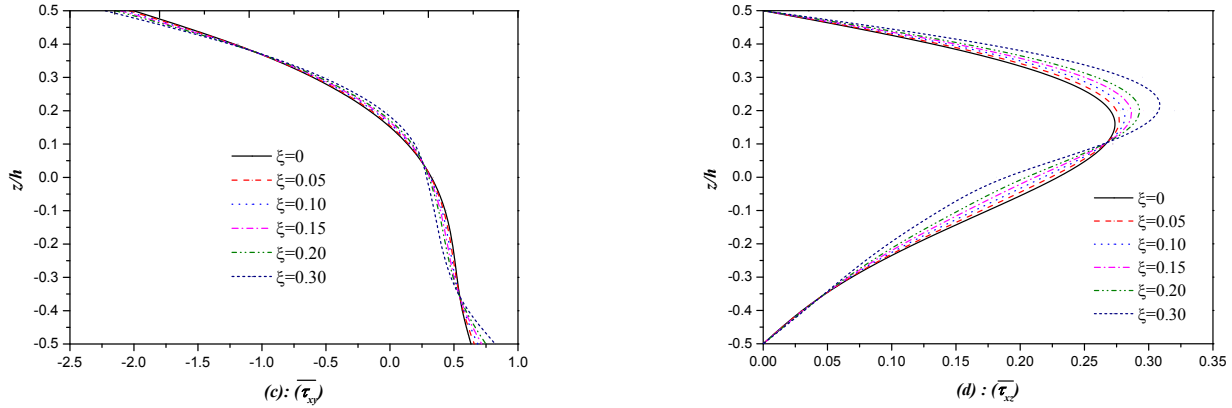


Figure 1: Variation des déplacements et contraintes à travers l'épaisseur de la plaque P-FG carrée en Al/SiC (a/h=10 et p=2)

La figure IV.1 illustre les variations de la flexion adimensionnelle (\bar{w}) et contraintes (axial, bi-axial et transverses) à travers l'épaisseur de la plaque P-FG carrée en *Al/SiC* parfaite et poreuse en fonction du paramètre de porosité (ξ). Il ressort clairement des graphes tracés que l'augmentation dans les valeurs des paramètres (ξ) conduit en augmentation des valeurs de la flexion adimensionnelle (\bar{w}), contraintes axial, sur-plan et transverse ($\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}$ and $\bar{\tau}_{xz}$) qui montre le rôle important de la présence de porosité dans les plaques FG.

IV.2.2. Analyse du flambement :

Dans la deuxième partie, les résultats d'analyse de flambement de plaque FG parfaite et poreuse sont présentées dans des tables et graphes claires.

Les charges de flambement critiques obtenues par le modèle actuel sont présentées dans la forme adimensionnelle comme :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}b^2}{\pi^2 D}, \bar{N}_{cr} = \frac{Na^2}{E_m h^3}$$

Tableau IV.4: Comparaison de charge de flambement critique (\hat{N}_{cr}) des plaques carrées en Al/SiC ($a/h=10$)

γ	Théorie	p					
		0	0.5	1	2	5	10
0	FSDT Mohammadi et al. (2010)	37.3708	-	37.7132	37.7089	-	-
	HSDT Bodaghi and Saidi (2010)	37.3714	-	37.7172	37.5765	-	-
	HSDT Thai and Choi (2012)	37.3721	-	37.7143	37.6042	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	37.4215	37.6650	37.7560	37.6327	36.8862	36.5934
	Présent	37.3831	37.6400	37.7236	37.6056	36.8843	36.5506
1	FSDT Mohammadi et al. (2010)	18.6854	-	18.8566	18.8545	-	-
	HSDT Bodaghi and Saidi (2010)	18.6860	-	18.8571	18.8020	-	-
	HSDT Thai and Choi (2012)	18.6861	-	18.8572	18.8021	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	18.7107	18.8325	18.8780	18.8163	18.4431	18.2967
	Présent	18.6915	18.8200	18.8618	18.8028	18.4422	18.2753
-1	FSDT Mohammadi et al. (2010)	72.0834	-	73.6307	73.6112	-	-
	HSDT Bodaghi and Saidi (2010)	72.2275	-	73.6645	73.1587	-	-
	HSDT Thai and Choi (2012)	72.0983	-	73.6437	73.1436	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	72.3281	73.4526	73.8426	73.2827	69.9876	68.7244
	Présent	72.1513	73.3078	73.6896	73.1544	69.9707	68.5492

Le tableau IV.4 présente les comparaisons des charges de flambement critiques (\hat{N}_{cr}) des plaques P-FG carrées en Al/SiC simplement appuyées. Les résultats calculés par la théorie trigonométrique raffinée de déformation en cisaillement actuelle sont en bon accord avec celles obtenues par Mohammadi et al (2010) utilisant la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre et ceux donnés par Bodaghi et Saidi (2010), Thai et Choi (2012) et Nguyen (2014) par utilisation des modèles HSDTs.

On peut observer sur ce tableau que la charge de flambement critique (\hat{N}_{cr}) est en relation inverse avec l'indice de puissance (p), parce que la plaque FG devient flexible quand l'indice (p) augmente. Ce dernier est validé pour le chargement mécanique uni-axial et bi-axial

Tableau IV.5: Comparaison de charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) des plaques en Al / Al_2O_3

γ	a/b	a/h	Théories	p						
				0	0.5	1	2	5	10	
0	0.5	5	HSDT Thai and Choi (2012)	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213	
			HSDT Nguyen (2014)	6.7417	4.4343	3.4257	2.6503	2.1459	1.9260	
			Présent	6.7252	4.4264	3.4185	2.6455	2.1447	1.9207	
		10	HSDT Thai and Choi (2012)	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896	
			HSDT Nguyen (2014)	7.4115	4.8225	3.7137	2.8911	2.4155	2.1911	
			Présent	7.4067	4.8214	3.7117	2.8897	2.4152	2.1893	
	20	HSDT Thai and Choi (2012)	7.5993	4.9315	3.7930	2.9382	2.4944	2.2690		
		HSDT Nguyen (2014)	7.6009	4.9307	3.7937	2.9585	2.4942	2.2695		
		Présent	7.5996	4.9317	3.7932	2.9582	2.4941	2.2689		
	1	0.5	5	HSDT Thai and Choi (2012)	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807
				HSDT Nguyen (2014)	16.1003	10.6670	8.2597	6.3631	5.0459	4.4981
				Présent	16.0399	10.6367	8.2329	6.3453	5.0411	4.4795
10			HSDT Thai and Choi (2012)	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	
			HSDT Nguyen (2014)	18.6030	12.1317	9.3496	7.2687	6.0316	5.4587	
			Présent	18.5840	12.1261	9.3414	7.2634	6.0305	5.4519	
20		HSDT Thai and Choi (2012)	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668		
		HSDT Nguyen (2014)	19.3593	1.25652	9.6702	7.5386	6.3437	5.7689		
		Présent	19.3542	12.5676	9.6681	7.5372	6.3434	5.7665		
1		0.5	5	HSDT Thai and Choi (2012)	5.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
				HSDT Nguyen (2014)	5.3934	3.5475	2.7406	2.1202	1.7167	1.5408
				Présent	5.3802	3.5411	2.7348	2.1164	1.7158	1.5366
	10		HSDT Thai and Choi (2012)	5.9243	3.8565	2.7689	2.3117	1.9332	1.7517	
			HSDT Nguyen (2014)	5.9292	3.8580	2.9710	2.3129	1.9324	1.7529	
			Présent	5.9253	3.8571	2.9693	2.3118	1.9322	1.7515	
	20	HSDT Thai and Choi (2012)	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152		
		HSDT Nguyen (2014)	6.0807	3.9445	3.0350	2.3668	1.9953	1.8156		
		Présent	6.0797	3.9453	3.0345	2.3665	1.9953	1.8151		
	1	0.5	5	HSDT Thai and Choi (2012)	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403
				HSDT Nguyen (2014)	8.0501	5.3335	4.1299	3.1815	2.5230	2.2491
				Présent	8.0200	5.3183	4.1165	3.1726	2.5205	2.2397
10			HSDT Thai and Choi (2012)	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264	
			HSDT Nguyen (2014)	9.3015	6.0659	4.6748	3.6344	3.0158	2.7293	
			Présent	9.2920	6.0631	4.6707	3.6317	3.0153	2.7259	
20		HSDT Thai and Choi (2012)	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834		
		HSDT Nguyen (2014)	9.6796	6.2826	4.8351	3.7693	3.1718	2.8844		
		Présent	9.6771	6.2838	4.8340	3.7686	3.1717	2.8833		
-1		0.5	5	HSDT Thai and Choi (2012)	8.9604	5.8980	4.5551	3.5268	2.8646	2.5617
				HSDT Nguyen (2014)	8.9890	5.9124	4.5676	3.5337	2.8612	2.5679
				Présent	8,9670	5,9019	4,5580	3,5274	2,8597	2,5610
	10		HSDT Thai and Choi (2012)	9.8738	6.4275	4.9481	3.8529	3.2219	2.9195	
			HSDT Nguyen (2014)	9.8820	6.4299	4.9516	3.8548	3.2206	2.9214	
			Présent	9.8756	6.4286	4.9489	3.8530	3.2203	2.9191	
	20	HSDT Thai and Choi (2012)	10.1324	6.5753	5.0574	3.9442	3.3259	3.0253		
		HSDT Nguyen (2014)	10.1345	6.5742	5.0583	3.9447	3.3255	3.0260		
		Présent	10.1328	6.5756	5.0576	3.9442	3.3255	3.0252		
	1	0.5	5	HSDT Thai and Choi (2012)	26.2058	17.7704	13.8486	10.5589	16.9590	6.8970
				HSDT Nguyen (2014)	24.4999	17.9424	13.9872	10.6421	7.9571	6.9626
				Présent	26.2833	17.8183	13.8852	10.5733	7.9321	6.9013
10			HSDT Thai and Choi (2012)	35.8416	23.5920	18.2206	14.1073	11.4583	10.2468	
			HSDT Nguyen (2014)	35.9559	23.6497	18.2704	14.1349	11.4447	10.2717	
			Présent	35.8680	23.6076	18.2321	14.1095	11.4386	10.2439	
20		HSDT Thai and Choi (2012)	39.4951	25.7100	19.7925	15.4115	12.8878	11.6779		
		HSDT Nguyen (2014)	39.5280	25.7197	19.8065	15.4190	12.8824	11.6857		
		Présent	39.5023	25.7143	19.7956	15.4119	12.8811	11.6765		

Le tableau IV.5 montre les valeurs de la charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) de la plaque en Al/Al_2O_3 par rapport au rapport de côté par épaisseur (a/h), indice de puissance (p) et rapport d'aspect (a/b). De cette table, il est confirmé encore que les résultats présents sont en bon agrément avec ceux calculés par HSDTs de Thai and Choi (2012) et Nguyen (2014). On note aussi que les valeurs de charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) s'accroissent avec l'augmentation des rapports d'aspect et de géométrie (a/h et a/b) et elles diminuent avec l'augmentation d'indice de matériau (p).

Tableau IV.6: Effet de paramètre de porosité (ξ) sur la charge de flambement critique adimensionnelle (\hat{N}_{cr}) de la plaque P-FG en Al/SiC simplement appuyées ($p = 5, a/b = 1$ et $a/h = 10$)

ξ	Theory	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = -1$
0	Présent	52.4780	41.9824	69.9707
0.05	Présent	52.0982	41.3349	69.4643
0.1	Présent	51.6687	41.3349	68.8916
0.15	Présent	51.1769	40.9415	68.2359
0.20	Présent	50.6053	40.4843	67.4738
0.25	Présent	49.9285	39.9428	66.5713
0.3	Présent	49.1076	39.2861	65.4769

Les effets du paramètre de porosité (ξ) sur la charge de flambement critique adimensionnelle (\hat{N}_{cr}) de la plaque P-FG en Al/SiC simplement appuyée sous des charges uni-axiales et bi-axiales sont résumés dans le tableau IV.6. De ce tableau, on peut observer que l'augmentation dans les valeurs du paramètre de porosité (ξ) mène à diminuer les valeurs de charge de flambement critique adimensionnelle (\hat{N}_{cr}) et donne des valeurs plus basses que la plaque parfaite et cela est confirmé pour tous les types de charges (uni-axiales et bi-axiales).

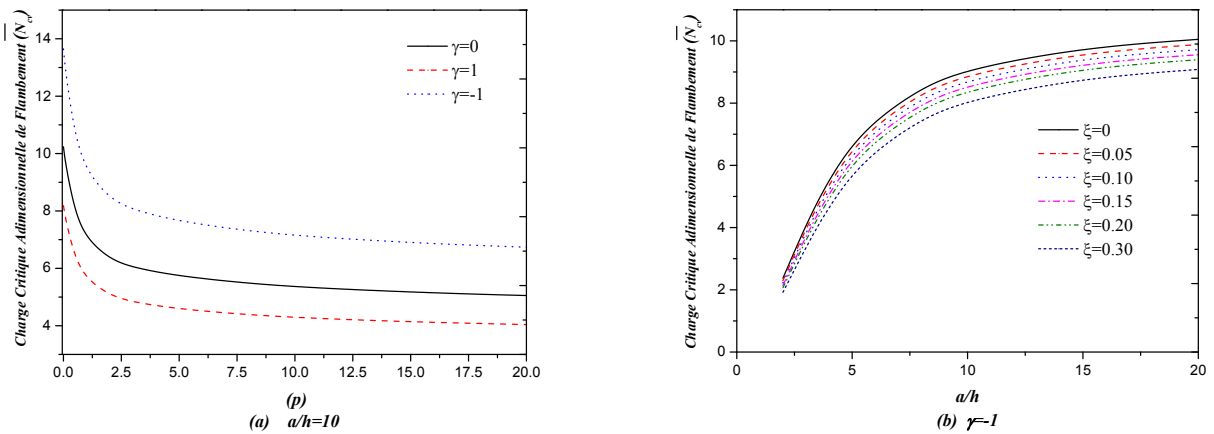


Figure IV.2: Effet d'indice de loi de puissance (p) et rapport cote/épaisseur (a/h) sur la charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) des plaques rectangulaires en Al/ZrO_2 ($a/b = 1, \xi = 0.2$ et $p = 2$)

La figure IV.2 montre les variations de charge de flambement critique adimensionnelle (\bar{N}_{cr}) de la plaque carrée en Al/ZrO_2 contre le rapport coté/épaisseur (a/h), paramètre de porosité (ξ), indice de puissance (p) et type de charge extérieure (γ). À partir de la courbe tracée, on peut voir que la charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) diminue l'accroissement des valeurs de (p) car la plaque devient flexible. Les plus petites valeurs de la charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) sont obtenues pour la plaque sous une charge compressive bi-axiale ($\gamma = 1$). On peut voir aussi que la charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) augmente avec l'accroissement du rapport (a/h) parce que la plaque devient épaisse. On peut confirmer encore que les valeurs de la charge de flambement critique (\bar{N}_{cr}) sont en relation inverse avec le paramètre de porosité (ξ).

IV.3. Conclusion

Dans cette étude, une théorie trigonométrique raffinée de la déformation des plaques par cisaillement a été développée pour analyser les comportements mécaniques de la plaque FG simplement appuyée, parfaite et poreuse.

Le paramètre de porosité a été introduit dans la formule de module de Young de la plaque P-FG. La distribution des micro-vides est variée suivant une fonction logarithmique. La solution analytique des paramètres de flexion et de flambement sont déterminés par le

principe des travaux virtuels et l'approche de Navier. Les résultats obtenus des analyses de flexion et de flambement montrent un bon accord avec ceux disponibles dans la littérature.

L'effet du paramètre de porosité sur les contraintes et le déplacement et la charge de flambement critique de la plaque FG a été aussi examiné et discuté. Effectivement, on a observé que l'augmentation de la porosité conduit à la réduction de la charge de flambement critique adimensionnelle et au contraire, la déflexion adimensionnelle devient importante.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses. Actuellement les FGM sont développés pour une utilisation générale comme des éléments structurels dans les environnements à température extrêmement élevée et des applications différentes. Ainsi, la conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités et matérielles.

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans une suite de travaux précédents menés au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'UDL de Sidi Bel Abbes. L'effet de la porosité sur les comportements statiques (flexion et flambement) des plaques FG simplement appuyées sous des charges mécaniques ont été étudiés. La plaque est modélisée par une théorie raffinée de déformation en cisaillement trigonométrique d'ordre élevée. Les micro-vides sont distribués logarithmiquement à travers l'épaisseur ; les équations régissant le système sont dérivées par le principe du travail virtuel. Plusieurs études paramétriques sont présentes pour illustrer l'influence de la porosité sur les contraintes et les déplacements et la charge de flambement critique de la plaque FG.

Plusieurs résultats numériques des études analytiques présentées dans le chapitre précédent sont présentés et comparés avec ceux trouvés dans la littérature pour montrer la précision du modèle actuel.

En premier lieu, nous nous intéressons aux résultats numériques et leurs interprétations concernant le volet relatif à l'étude de l'analyse de la flexion de la plaque FG parfaite et poreuse simplement appuyée.

Plus loin, nous nous focalisons sur la présentation des résultats obtenus relatifs à l'analyse du flambement de la plaque FG parfaite et poreuse et par conséquent commenter les charges de flambement critiques obtenus par le présent modèle.

L'effet du paramètre de porosité sur les contraintes et le déplacement et la charge de flambement critique de la plaque FG a été aussi examiné et discuté. Effectivement, on a observé que l'augmentation de la porosité conduit à la réduction de la charge de flambement critique adimensionnelle et au contraire, la déflexion adimensionnelle devient importante.

Les résultats obtenus des analyses de flexion et de flambement montrent un bon accord avec ceux disponibles dans la littérature.

Une amélioration de la formulation actuelle sera prise en compte dans les travaux futurs pour considérer d'autres types de matériaux (Kar and Panda 2014 and 2016b, Mehar et al. 2015, 2017ab, 2018ab, 2019 and 2020, Arani and Kolahchi 2016, Mehar and Panda 2016, 2017, 2018 and 2019, Chandra et al. 2018, Belmahi et al. 2018, Othman and Fekry 2018, Panjehpour et al. 2018, Selmi 2019, Al-Osta 2019, Hamad et al. 2019, Karami and Janghorban 2019, Timesli 2019 and 2020ab, Boulal et al. 2020, Tayeb et al. 2020, Nejadi and Mohammadimehr 2020).

Références Bibliographie

Références bibliographiques

-
- (Abdulrazzaq & al. 2020) Abdulrazzaq, M.A., Fenjan, R.M., Ahmed, R.A., Faleh, N.M. (2020), "Thermal buckling of nonlocal clamped exponentially graded plate according to a secant function based refined theory", *Steel and Composite Structures*, **35**(1), 147-157.
DOI: <https://doi.org/10.12989/scs.2020.35.1.147>
-
- (Ahmed et al. 2019) Ahmed, R.A., Fenjan, R.M., Faleh, N.M. (2019), "Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections", *Geomechanics and Engineering*, **17**(2), 175-180.
<https://doi.org/10.12989/gae.2019.17.2.175>
-
- (Ait Atmane et al. 2010) Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E. (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 113-121.
DOI: 10.1007/s10999-010-9110-x
-
- (Akavci 2016) Akavci, S. S. (2016). "Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation", *Composites Part B: Engineering.*, **96**, 136–152.
[doi:10.1016/j.compositesb.2016.04.035](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.04.035)
-
- (Akbarzadeh et al. 2015) Akbarzadeh, A. H., Abedini, A., & Chen, Z. T. (2015). "Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates", *Composite Structures.*, **119**, 598–609.
[doi:10.1016/j.compstruct.2014.09.031](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.031)
-
- (Akgoz et al. 2015) Akgoz, B. and Civalek, O. (2015), "A microstructure-dependent sinusoidal plate model based on the strain gradient elasticity theory", *Acta Mechanica.*, **226**, 2277-2294.
<https://doi.org/10.1007/s00707-015-1308-4>
-
- (Al-Osta 2019) Al-Osta, M.A. (2019), "Shear behaviour of RC beams retrofitted using UHPFRC panels epoxied to the sides", *Computers and*
-

Concrete, **24**(1), 37-49.

DOI: <https://doi.org/10.12989/cac.2019.24.1.037>

-
- (Arani et al. 2016) Arani, A.J., and Kolahchi, R. (2016). “Buckling analysis of embedded concrete columns armed with carbon nanotubes”, *Computers and Concrete.*, **17**(5), 567-578.
<http://dx.doi.org/10.12989/cac.2016.17.5.567>.
-
- (Ashjari et al. 2014) Ashjari, M., & Khoshravan, M. R. (2014). “Mass optimization of functionally graded plate for mechanical loading in the presence of deflection and stress constraints”, *Composite Structures.*, **110**, 118–132.
[doi:10.1016/j.compstruct.2013.11.025](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.025).
-
- (Avcar 2019) Avcar, M. (2019), "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, **30**(6), 603-615.
-
- (Aydogdu 2009) Aydogdu M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*, 94-101.
[doi:10.1016/j.compstruct.2008.07.008](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.07.008)
-
- (Babaei et al. 2019) Babaei, H., Kiani, Y., & Reza Eslami, M. (2019). “Thermal Buckling and Post-buckling Analysis of Geometrically Imperfect FGM Clamped Tubes on Nonlinear Elastic Foundation”, *Applied Mathematical Modelling.*,
[doi:10.1016/j.apm.2019.02.009](https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.009).
-
- (Benachour et al. 2011) Benachour A., Tahar H.D., Ait Atmane H., Tounsi A., Sid Ahmed M. (2011). “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”. *Composites: Part B*, 1386-1394.
[doi:10.1016/j.compositesb.2011.05.032](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.05.032)
-
- (Belmahi et al. 2018) Belmahi, S., Zidour, M., Meradjah, M., Bensattalah, T., & Dihaj, A. (2018), “Analysis of boundary conditions effects on vibration of nanobeam in a polymeric matrix”, *Structural*
-

-
- Engineering and Mechanics.*, **67**(5), 517-525.
DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2018.67.5.517>.
-
- (Bhangale et al. 2006) Bhangale, R. K., & Ganesan, N. (2006). “Static analysis of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates”, *International Journal of Solids and Structures.*, **43**(10), 3230–3253.
[doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.05.030](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.030).
-
- (Bodaghi et al. 2010) Bodaghi, M., & Saidi, A. R. (2010). “Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory”, *Applied Mathematical Modelling.*, **34**(11), 3659–3673.
[doi:10.1016/j.apm.2010.03.016](https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.016).
-
- (Boulal et al. 2020) Boulal, A., Bensattalah, T., Karas, A., Zidour, M., Heireche, H., & Adda Bedia, E. A. (2020), “Buckling of carbon nanotube reinforced composite plates supported by Kerr foundation using Hamilton's energy principle”, *Structural Engineering and Mechanics.*, **73**(2), 209-223.
DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2020.73.2.209>.
-
- (Burlayenko et al. 2016) Burlayenko, V. N., Altenbach, H., Sadowski, T., & Dimitrova, S. D. (2016). “Computational simulations of thermal shock cracking by the virtual crack closure technique in a functionally graded plate”, *Computational Materials Science.*, **116**, 11–21.
[doi:10.1016/j.commatsci.2015.08.038](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2015.08.038).
-
- (Chandra et al. 2018) Chandra, B.M., K, Ramji, K., Kar, V. R., Panda, S. K., Lalepalli, K.A., & Pandey, H. K. (2018), “Numerical study of temperature dependent eigenfrequency responses of tilted functionally graded shallow shell structures”, *Structural Engineering and Mechanics.*, **68**(5), 527–536.
<https://doi.org/10.12989/SEM.2018.68.5.527>.
-
- (Chi et al. 2003) Chi S., Chung Y. (2003) “Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings”, *Engineering fracture*
-

- mechanics, 70, 1227-1243.
doi:10.1016/S0013-7944(02)00114-5
-
- (Cuong-Le et al. 2020) Cuong-Le, T., Nguyen, K. D., Nguyen-Trong, N., Khatir, S., Nguyen-Xuan, H., & Abdel-Wahab, M. (2020), “A three-dimensional solution for free vibration and buckling of annular plate, conical, cylinder and cylindrical shell of FG porous-cellular materials using IGA”, *Composite Structures.*, 113216.
doi:10.1016/j.compstruct.2020.113216.
-
- (Dai et al. 2004) Dai, K. Y., Liu, G. R., Lim, K. M., Han, X., & Du, S. Y. (2004), “A meshfree radial point interpolation method for analysis of functionally graded material (FGM) plates”, *Computational Mechanics.*, **34**(3).
doi:10.1007/s00466-004-0566-0.
-
- (Dash et al. 2019) Dash, S., Mehar, K., Sharma, N., Mahapatra, T. R., & Panda, S. K. (2019), “Finite element solution of stress and flexural strength of functionally graded doubly curved sandwich shell panel”, *Earthquakes and Structures*, **16**(1), 55–67.
<https://doi.org/10.12989/EAS.2019.16.1.055>.
-
- (Desroches 2009) Desroches X. (2009), “Notice d’utilisation des éléments plaques, coques et coques volumiques SHB”, Code Aster.
-
- (Do et al. 2017) Do, T. V., Bui, T. Q., Yu, T. T., Pham, D. T., & Nguyen, C. T. (2017). “Role of material combination and new results of mechanical behavior for FG sandwich plates in thermal environment”, *Journal of Computational Science.*, **21**, 164–181.
doi:10.1016/j.jocs.2017.06.015.
-
- (Do et al. 2020) Do, V. T., Pham, V. V., & Nguyen, H. N. (2020). “On the Development of Refined Plate Theory for Static Bending Behavior of Functionally Graded Plates”, *Mathematical Problems in Engineering.*, 1–13.
doi:10.1155/2020/2836763.
-
- (Drapier 2016) Drapier S.(2016), “Mécanique des structures et approximations numériques”, Ecole nationale supérieure des mines de Saint-étienne.

-
- (Duc et al. 2015) Duc, N.D and P.H. Cong, (2015), “Nonlinear dynamic response of imperfect symmetric thin sigmoid-functionally graded material plate with metal-ceramic-metal layers on elastic foundation”, *J. Vib. Control.*, **21**, 637-646.
<https://doi.org/10.1177/1077546313489717>.
-
- (Ebrahimi et al. 2017) Ebrahimi, F., & Barati, M. R. (2017). “Buckling analysis of nonlocal strain gradient axially functionally graded nanobeams resting on variable elastic medium”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.*, 232(11), 2067–2078.
[doi:10.1177/0954406217713518](https://doi.org/10.1177/0954406217713518).
-
- (Ebrahimi et al. 2009) Ebrahimi, F., Rastgoo, A., & Atai, A. A. (2009). “A theoretical analysis of smart moderately thick shear deformable annular functionally graded plate”, *European Journal of Mechanics - A/Solids.*, **28**(5), 962–973.
[Doi:10.1016/j.euromechsol.2008.12.008](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.12.008).
-
- (Ebrahimi et al. 2015) Ebrahimi, F., Zia, M. (2015), "Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with porosities", *Acta Astronaut.*, **116**, 117–125.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.06.014>
-
- (Efraim et al. 2007) Efraim, E., Eisenberger, M. (2007), “Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates”. *J Sound Vib.*, **299**(4-5),720-738.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.068>.
-
- (El Meiche et al. 2011) El Meiche N., Tounsi A., Ziane N., Mechab I., Adda Bedia E. (2011). “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”. *International journal of Mechanical sciences*, 237-247.
[doi:10.1016/j.ijmecsci.2011.01.004](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.01.004)
-
- (Fazzolari 2016) Fazzolari, F. A. (2016). “Stability analysis of FGM sandwich plates by using variable-kinematics Ritz models”, *Mechanics of Advanced*
-

Materials and Structures., **23**(9), 1104–1113.

[Doi:10.1080/15376494.2015.1121559](https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1121559).

(Fenjan et al. 2020) Fenjan, N.M., Moustafa, N.M., Faleh, N.M. (2020), “Scale-dependent thermal vibration analysis of FG beams having porosities based on DQM”, *Advances in Nano Research.*, **8**(4), 283-292. DOI: <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.4.283>.

(Forsat et al. 2020) Forsat, M., Badnava, S., Mirjavadi, S.S., Barati.M.R. and Hamouda, A. (2020). “Small scale effects on transient vibrations of porous FG cylindrical nanoshells based on nonlocal strain gradient theory”, *Eur. Phys. J. Plus.*, **135**, 81.

<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-019-00042-x>.

(Gafour et al 2020) Gafour, Y., Hamidi, A., Benahmed, A., Zidour, M., Bensattalah, T. (2020), “Porosity-dependent free vibration analysis of FG nanobeam using non-local shear deformation and energy principle”, *Advances in Nano Research*, **8**(1), 49-58.

<https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.1.049>

(Ghannadpour et al. 2012) Ghannadpour, S.A.M., Ovesy, H.R. and Nassirnia, M. (2012), “Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method”, *Comput. Struct.*, **108**-109, 93-99.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.02.011>.

(Gupta et al. 2017) Gupta, A., & Talha, M. (2017). “Influence of porosity on the flexural and vibration response of gradient plate using nonpolynomial higher-order shear and normal deformation theory”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design.*, **14**(2), 277–296.

[doi:10.1007/s10999-017-9369-2](https://doi.org/10.1007/s10999-017-9369-2).

(Hadji et al. 2011) Hadji L., Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia A.E. (2011). Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variale refined plate theory. *applied mathematics and mechanics*, 925-942.

<https://doi.org/10.1007/s10483-011-1470-9>.

-
- (Hadji 2020) Hadji, L., (2020), “Influence of the distribution shape of porosity on the bending of FGM beam using a new higher order shear deformation model”, *Smart Structures and Systems.*, **26**(2), 253-262.
<https://doi.org/10.12989/sss.2020.26.2.253>.
-
- (Hadji et al. 2019) Hadji, L., Zouatnia, N., and Bernard, F., (2019), “An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities: Effect of the micromechanical models”, *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal.*, **69**(2), 231-241.
<https://doi.org/10.12989/sem.2019.69.2.231>.
-
- (Hamad et al. 2019) Hamad, L.B., Khalaf, B.S., Faleh, N.M. (2019), “Analysis of static and dynamic characteristics of strain gradient shell structures made of porous nano-crystalline materials”, *Advances in Materials Research*, **8**(3), 179-196.
DOI: <https://doi.org/10.12989/amr.2019.8.3.179>
-
- (Hamed et al. 2019) Hamed, M. A., Sadoun, A. M., & Eltaher, M. A. (2019), “Effects of porosity models on static behavior of size dependent functionally graded beam”, *Structural Engineering and Mechanics*, **71**(1), 89-98. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2019.71.1.089>
-
- (Hassan et al. 2020) Hassan, A., & Kurgan, N. (2020). “Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method”, *Engineering Science and Technology, an International Journal.*,
[doi:10.1016/j.jestch.2020.03.009](https://doi.org/10.1016/j.jestch.2020.03.009).
-
- (Jadhav et al. 2012) Jadhav, P. A., & Bajoria, K. M. (2012). “Buckling of piezoelectric functionally graded plate subjected to electro-mechanical loading”, *Smart Materials and Structures.*, **21**(10), 105005.
[doi:10.1088/0964-1726/21/10/105005](https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/10/105005).
-
- (Jomehzadeh et al. 2009) Jomehzadeh, E., Saidi, A. R., & Atashipour, S. R. (2009). “An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates”, *Materials & Design.*, **30**(9), 3679–3685.
[doi:10.1016/j.matdes.2009.02.011](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.02.011).
-

-
- (Jung et al. 2016) Jung, W.Y., Han, S.C. and Park, W.T. (2016), “Four-variable refined plate theory for forced vibration analysis of sigmoid functionally graded plates on elastic foundation”, *J. Mech. Sci.*, **111**, 73-87.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.03.001>.
-
- (Kar et al. 2017) Kar, V. R., Mahapatra, T. R., & Panda, S. K. (2017), “Effect of different temperature load on thermal postbuckling behaviour of functionally graded shallow curved shell panels”, *Composite Structures.*, **160**, 1236–1247.
[doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.125](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.125).
-
- (Kar et al. 2014) Kar, V. R., & Panda, S. K. (2014), “Nonlinear free vibration of functionally graded doubly curved shear deformable panels using finite element method”, *Journal of Vibration and Control.*, **22**(7), 1935–1949.
[doi:10.1177/1077546314545102](https://doi.org/10.1177/1077546314545102).
-
- (Kar et al. 2015a) Kar, V. R., & Panda, S. K. (2015a), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel and Composite Structures.*, **18**(3), 693–709.
<https://doi.org/10.12989/SCS.2015.18.3.693>.
-
- (Kar et al. 2015b) Kar, V. R., & Panda, S. K. (2015b), “Free vibration responses of temperature dependent functionally graded curved panels under thermal environment”, *Latin American Journal of Solids and Structures.*, **12**(11), 2006–2024.
[doi:10.1590/1679-78251691](https://doi.org/10.1590/1679-78251691).
-
- (Kar et al. 2015c) Kar, V. R. & Panda, S. K. (2015c), “Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM”, *Structural Engineering and Mechanics.*, **53**(4), 661–679.
<https://doi.org/10.12989/SEM.2015.53.4.661>.
-
- (Kar et al. 2015d) Kar, V. R., & Panda, S. K. (2015d), “Thermoelastic analysis of functionally graded doubly curved shell panels using nonlinear finite element method”, *Composite Structures.*, **129**, 202–212.
[doi:10.1016/j.compstruct.2015.04.006](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.006).
-
- (Kar et al. 2016a) Kar, V. R., & Panda, S. K. (2016a), “Post-buckling behaviour of shear deformable functionally graded curved shell panel under edge
-

- compression”, *International Journal of Mechanical Sciences.*, **115-116**, 318–324.
[doi:10.1016/j.ijmecsci.2016.07.014](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.07.014).
-
- (Kar et al. 2016b) Kar, V. R., & Panda, S. K. (2016b), “Nonlinear Thermomechanical Behavior of Functionally Graded Material Cylindrical/Hyperbolic/Elliptical Shell Panel With Temperature-Dependent and Temperature-Independent Properties”, *Journal of Pressure Vessel Technology.*, **138**(6), 061202.
[doi:10.1115/1.4033701](https://doi.org/10.1115/1.4033701).
-
- (Kar et al. 2017) Kar, V. R., & Panda, S. K. (2017), “Large-Amplitude Vibration of Functionally Graded Doubly-Curved Panels Under Heat Conduction”, *AIAA Journal.*, **55**(12), 4376–4386.
[doi:10.2514/1.j055878](https://doi.org/10.2514/1.j055878).
-
- (Kar et al. 2016) Kar, V. R., Panda, S. K., & Mahapatra, T. R. (2016), “Thermal buckling behaviour of shear deformable functionally graded single/doubly curved shell panel with TD and TID properties”, *Advances in Materials Research.*, **5**(4), 205–221.
<https://doi.org/10.12989/AMR.2016.5.4.205>.
-
- (Karama et al. 2003) M. Karama, K. A. (2003). “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”. *Solid and structures*, 1525-1546.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00647-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00647-9)
-
- (Karami et al. 2019) Karami, B., Janghorban, M. (2019), “On the dynamics of porous nanotubes with variable material properties and variable thickness”, *International Journal of Engineering Science*, **136**, 53-66.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.01.002>
-
- (Khoa et al. 2017) Khoa, N. D., Thiem, H. T., & Duc, N. D. (2017). “Nonlinear buckling and postbuckling of imperfect piezoelectric S-FGM circular cylindrical shells with metal–ceramic–metal layers in thermal environment using Reddy’s third-order shear deformation shell theory”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1-12. [doi:10.1080/15376494.2017.1341583](https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1341583).
-

-
- (Kim et al. 2009) Kim S., Thai H., Lee J. (2009). “buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory”. *Thin-Walled Structures*, 455-462.
[doi:10.1016/j.tws.2008.08.002](https://doi.org/10.1016/j.tws.2008.08.002)
-
- (Koizumi 1996) Koizumi, M.(1996). “FGM activities in Japan”, *composites part B: engineering*,1-4
[https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9).
-
- (Kumar et al. 2016) Kumar, R., Dutta, S. C., & Panda, S. K. (2016). “Linear and non-linear dynamic instability of functionally graded plate subjected to non-uniform loading”, *Composite Structures.*, **154**, 219–230.
[doi:10.1016/j.compstruct.2016.07.050](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.050).
-
- (Kumar et al. 2019) Kumar, R., Lal, A., Singh, B. N., & Singh, J. (2019). “New transverse shear deformation theory for bending analysis of fgm plate under patch load”, *Composite Structures.*, 91-100.
[doi:10.1016/j.compstruct.2018.10.014](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.014).
-
- (Lanhe et al. 2007) Lanhe, W., Hongjun, W., & Daobin, W. (2007). “Dynamic stability analysis of FGM plates by the moving least squares differential quadrature method”, *Composite Structures.*, **77**(3), 383–394.
[doi:10.1016/j.compstruct.2005.07.011](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.07.011).
-
- (Li et al. 2019) Li, Z., Zheng, J., Sun, Q., & He, H. (2019). “Nonlinear structural stability performance of pressurized thin-walled FGM arches under temperature variation field”, *International Journal of Non-Linear Mechanics.*, **113**, 86–102.
[doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2019.03.016](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.03.016).
-
- (Mahamood et al. 2017) Mahamood, R. M., & Akinlabi, E. T. (2017). Types of Functionally Graded Materials and Their Areas of Application. *Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*, 9–21.
[doi:10.1007/978-3-319-53756-6_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-53756-6_2)
-
- (Marple et al. 1996) Marple B.R., Boulanger J.(1996), “Slip casting process and apparatus for producing graded materials”. *Us. Patent*. 1996, Vol. 5, 498-383
-
- (Marple et al. 1997) Marple B.R., Tuffe S. 1997. “Graded casting for producing smoothly varying gradients in materials”, *Functionally Graded Materials*
-

-
- 1996 Proceedings of the 4th International Symposium on Functionally Graded Materials, AIST Tsukuba Research Center, Tsukuba, Japan, October 21–24, 1996, 1997 Pages 159-166
<https://doi.org/10.1016/B978-044482548-3/50027-5>
-
- (Mantari et al. 2012b) Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2012b). “Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory”, *Composite Structures.*, **94**(6), 1991–2000.
[doi:10.1016/j.compstruct.2012.01.005.](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.01.005)
-
- (Mantari et al. 2012a) Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012a). “Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory”, *Composite Structures.*, **94**(2), 714–723.
[doi:10.1016/j.compstruct.2011.09.007.](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.007)
-
- (Mantari et al. 2014) Mantari J.L., Guedes Soares C. (2014). “Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates”, *Compos. Struct.*, 231-239.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.10.047>
-
- (Mehar et al. 2020) Mehar, K., Mishra, P. K., & Panda, S. K. (2020), « Numerical investigation of thermal frequency responses of graded hybrid smart nanocomposite (CNT-SMA-Epoxy) structure”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures.*, 1–13.
[doi:10.1080/15376494.2020.1725193.](https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1725193)
-
- (Mehar et al. 2016) Mehar, K., & Panda, S. K. (2016), “Geometrical nonlinear free vibration analysis of FG-CNT reinforced composite flat panel under uniform thermal field”, *Composite Structures.*, **143**, 336–346.
[doi:10.1016/j.compstruct.2016.02.038.](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.02.038)
-
- (Mehar et al. 2017) Mehar, K., & Panda, S. K. (2017), “Numerical investigation of nonlinear thermomechanical deflection of functionally graded CNT reinforced doubly curved composite shell panel under different mechanical loads”, *Composite Structures.*, **161**, 287–298.
[doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.135.](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.135)
-
- (Mehar et al. 2018) Mehar, K., & Panda, S. K. (2018), “Nonlinear finite element solutions of thermoelastic flexural strength and stress values of
-

-
- temperature dependent graded CNT-reinforced sandwich shallow shell structure”, *Structural Engineering and Mechanics.*, **67**(6), 565–578. <https://doi.org/10.12989/SEM.2018.67.6.565>.
-
- (Mehar et al. 2020) Mehar, K., & Panda, S. K. (2020), “Nonlinear deformation and stress responses of a graded carbon nanotube sandwich plate structure under thermoelastic loading”, *Acta Mechanica.*, **231** (3), 1105-1123. [doi:10.1007/s00707-019-02579-5](https://doi.org/10.1007/s00707-019-02579-5).
-
- (Mehar et al. 2019) Mehar, K., Panda, S.K., Devarajan, Y., & Choubey, G. (2019), “Numerical Buckling Analysis of Graded CNT-reinforced Composite Sandwich Shell Structure under Thermal Loading”, *Composite Structures.*, **216**, 406-414, [doi:10.1016/j.compstruct.2019.03.002](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.03.002).
-
- (Mehar et al. 2017a) Mehar, K., Panda, S. K., & Mahapatra, T. R. (2017a), “Thermoelastic nonlinear frequency analysis of CNT reinforced functionally graded sandwich structure”, *European Journal of Mechanics - A/Solids.*, **65**, 384–396. [doi:10.1016/j.euromechsol.2017.05.005](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.05.005).
-
- (Mehar et al. 2018a) Mehar, K., Panda, S. K., & Mahapatra, T. R. (2018a), “Nonlinear Frequency Responses of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Sandwich Curved Panel Under Uniform Temperature Field”, *International Journal of Applied Mechanics.*, **10**(03), 1850028. [doi:10.1142/s175882511850028x](https://doi.org/10.1142/s175882511850028x).
-
- (Mehar et al. 2018b) Mehar, K., Panda, S. K., & Patle, B. K. (2018b), “Stress, deflection, and frequency analysis of CNT reinforced graded sandwich plate under uniform and linear thermal environment: A finite element approach”, *Polymer Composites.*, **39** (10), 3792-3809. [doi:10.1002/pc.24409](https://doi.org/10.1002/pc.24409).
-
- (Mehar et al. 2017b) Mehar, K., Panda, S. K., Bui, T. Q., & Mahapatra, T. R. (2017b), “Nonlinear thermoelastic frequency analysis of functionally graded CNT-reinforced single/doubly curved shallow shell panels by FEM”, *Journal of Thermal Stresses.*, **40**(7), 899–916.
-

[doi:10.1080/01495739.2017.1318689](https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1318689).

- (Mehar et al. 2015) Mehar, K., Panda, S. K., Dehengia, A., & Kar, V. R. (2015), “Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate in thermal environment”, *Journal of Sandwich Structures & Materials.*, **18**(2), 151–173.

[doi:10.1177/1099636215613324](https://doi.org/10.1177/1099636215613324).

- (Mehar et al. 2019a) Mehar, K., Panda, S.K., Devarajan, Y., Choubey, G. (2019a), “Numerical buckling analysis of graded CNT-reinforced composite sandwich shell structure under thermal loading”, *Composite Structures*, 216, 406-414.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.03.002>

- (Merzoug et al. 2020) Merzoug, M., Bourada, M., Sekkal, M., Abir, A. C., Chahrazed, B., Benyoucef, S., & Benachour, A. (2020), “2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models”, *Geomechanics and Engineering.*, **22**(4), 361–374.

<https://doi.org/10.12989/GAE.2020.22.4.361>.

- (Mindlin 1951) Mindlin, R. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of applied mechanics*, 31-38.

DOI:10.1007/978-1-4613-8865-4_29

- (Mohammadi et al. 2010) Mohammadi, M., Saidi, A. R., & Jomehzadeh, E. (2010). “A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.*, **224**(9), 1831–1841.

[doi:10.1243/09544062jmes1804](https://doi.org/10.1243/09544062jmes1804).

- (Moita et al. 2019) Moita, J. S., Araújo, A. L., Correia, V. F., Mota Soares, C. M., & Herskovits, J. (2019). “Buckling behavior of composite and functionally graded material plates”, *European Journal of Mechanics - A/Solids.*, 103921.

[doi:10.1016/j.euromechsol.2019.103921](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103921).

-
- (Monge et al. 2020) Monge, J. C., & Mantari, J. L. (2020). "3D elasticity numerical solution for the static behavior of FGM shells", *Engineering Structures.*, **208**, 110159.
[doi:10.1016/j.engstruct.2019.110159](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.110159).
-
- (Naebe et al. 2016) Naebe M., Shirvanimoghaddam K. (2016). "Functionally graded materials: a review of fabrication and properties". *Applied materials today*. 223-245.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
-
- (Nejadi et al. 2020) Nejadi, M.M. and Mohammadimehr, M. (2020), "Analysis of a functionally graded nanocomposite sandwich beam considering porosity distribution on variable elastic foundation using DQM: Buckling and vibration behaviors", *Computers and Concrete*, **25**(3), 215-224.
DOI: <https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.3.215>
-
- (Nguyen 2014) Nguyen, T.-K. (2014). "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials", *International Journal of Mechanics and Materials in Design.*, **11**(2), 203–219.
[doi:10.1007/s10999-014-9260-3](https://doi.org/10.1007/s10999-014-9260-3).
-
- (Nguyen et al. 2008) Nguyen, T.-K., Sab, K., & Bonnet, G. (2008). "First-order shear deformation plate models for functionally graded materials", *Composite Structures.*, **83**(1), 25–36.
[doi:10.1016/j.compstruct.2007.03.004](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.03.004).
-
- (Nguyen et al. 2007) Nguyen T. K., Sab K., Bonnet G. (2007). "Shear correction factors for functionally graded plates". *Mech. Advanced Mater. Struct.*, 567-575.
<https://hal-upec-upem.archives-ouvertes.fr/hal-00691061>
-
- (Othman et al. 2018) Othman, M. and Fekry, M. (2018), "Effect of rotation and gravity on generalized thermo-viscoelastic medium with voids", *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, **14**(2), 322-338.
DOI: [10.1108/MMMS-08-2017-0082](https://doi.org/10.1108/MMMS-08-2017-0082)
-

-
- (Panjehpour et al. 2018) Panjehpour, M., Eric Woo Kee Loh, Deepak T.J. (2018), “Structural Insulated Panels: State-of-the-Art”, *Trends in civil Engineering and its architecture*, **3**(1) 336-340.
[DOI: 10.32474/TCEIA.2018.03.000151](https://doi.org/10.32474/TCEIA.2018.03.000151)
-
- (Rachedi et al. 2020) Rachedi, M. A., Benyoucef, S., Bouhadra, A., Bouiadjra, R. B., Sekkal, M., & Benachour, A. (2020), “Impact of the homogenization models on the thermoelastic response of FG plates on variable elastic foundation”, *Geomechanics and Engineering*. **22**(1), 65–80.
<https://doi.org/10.12989/GAE.2020.22.1.065>.
-
- (Rajan et al. 2014) Rajan T.P.D., Pai B.C. (2014), “Developments in processing of functionally gradient metals and metal-ceramic composites: A review”, *Acta metallurgica sinica (English letters)*, 825-838.
DOI 10.1007/s40195-014-0142-3
-
- (Ramteke et al. 2020a) Ramteke, P. M., Mahapatra, B. P., Panda, S. K., & Sharma, N. (2020), “Static deflection simulation study of 2D Functionally graded porous structure”, *Materials Today: Proceedings*.
[doi:10.1016/j.matpr.2020.03.537](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.03.537).
-
- (Ramteke et al. 2020b) Ramteke, P. M., Mehar, K., Sharma, N., Panda, S. (2020), “Numerical Prediction of Deflection and Stress Responses of Functionally Graded Structure for Grading Patterns (Power-Law, Sigmoid and Exponential) and Variable Porosity (Even/Uneven)”, *Scientia Iranica*.
[doi: 10.24200/sci.2020.55581.4290](https://doi.org/10.24200/sci.2020.55581.4290).
-
- (Ramteke et al. 2019) Ramteke, P. M., Panda, S. K., & Sharma, N. (2019), “Effect of grading pattern and porosity on the eigen characteristics of porous functionally graded structure”, *Steel and Composite Structures*., **33**(6), 865–875.
<https://doi.org/10.12989/SCS.2019.33.6.865>.
-
- (Reddy 2004) Reddy J.N. (2004), *Mechanics of laminated composites plates: theory and analysis*. Boca raton: CRC Press.
ISBN 9780849315923
-

-
- (Reissner 1944) Reissner, E. (1944). "On the theory of bending of elastic plates". *Journale of mathematics and physics*, 184-191.
<https://doi.org/10.1002/sapm1944231184>
-
- (Reissner 1975) Reissner E. (1975). "On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation". *Solids Struct.*, 569-573.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90030-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90030-X)
-
- (Soldatos et al. 1993) Soldatos K.P., Timarci T. (1993). A unified formulation of laminated composite, shear deformable, fivedegrees-of-freedom cylindrical shell theories. *composite structures*, 165-171.
[https://doi.org/10.1016/0263-8223\(93\)90162-J](https://doi.org/10.1016/0263-8223(93)90162-J)
-
- (Safa et al. 2019) Safa, A., Hadji, L., Bourada, M., and Zouatnia, N., (2019), "Thermal vibration analysis of FGM beams Using an efficient shear deformation beam theory", *Earthquakes and Structures, An Int'l Journal.*, **17**(3), 329-336.
<https://doi.org/10.12989/eas.2019.17.3.329>.
-
- (Sahraee 2009) Sahraee, S. (2009). "Bending analysis of functionally graded sectorial plates using Levinson plate theory", *Composite Structures.*, **88**(4), 548–557.
[doi:10.1016/j.compstruct.2008.05.014](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.05.014).
-
- (Saleh et al. 2020) Saleh B., Jiang J., Fathi R., Al-hababi T., Xu Q., Wang L., Song D., Ma A. (2020). "30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing", *Composites part B*.
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
-
- (Selmi 2019) Selmi, A. (2019), "Effectiveness of SWNT in reducing the crack effect on the dynamic behavior of aluminium alloy", *Advances in Nano Research*, **7**(5), 365-377. DOI:
<https://doi.org/10.12989/anr.2019.7.5.365>.
-
- (Singha et al. 2011) Singha, M. K., Prakash, T., & Ganapathi, M, (2011), "Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load", *Finite Elements in Analysis and Design.*, **47**(4), 453–460.
[doi:10.1016/j.finel.2010.12.001](https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.12.001).
-
- (Steffens 1990) Steffens, H.D., Dvorak M., Wewel M. (1990). "Sprayed functionally gradient materials processing and applications", *Proceeding of the*
-

first international symposium on functionally gradient materials-FGM90-Sendai-Japan.

-
- (Tafla 2007) Tafla A.(2007), “Eléments finis mixtes hybrides naturels sans facteurs correctifs su cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches”, thèse de doctorat de l’université de Reims Champagne-Ardenne.
-
- (Tayeb et al. 2020) Tayeb, T. S., Zidour, M., Bensattalah, T., Heireche, H., Benahmed, A., & Bedia, E. A. (2020), “Mechanical buckling of FG-CNTs reinforced composite plate with parabolic distribution using Hamilton's energy principle”, *Advances in nano research.*, **8**(2), 135-148. DOI : <https://doi.org/10.12989/anr.2020.8.2.135>.
-
- (Thai et al. 2011) Thai H., Kim S. (2011). “Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory”, *Composite structures*, 1738-1746.
doi:10.1016/j.compstruct.2011.01.012
-
- (Thai et al. 2012) Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2012). “An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Applied Mathematical Modelling.*, **36**(3), 1008–1022.
doi:10.1016/j.apm.2011.07.062.
-
- (Thai et al. 2013) Thai, H.-T., & Kim, S.-E. (2013). “A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Composite Structures.*, **96**, 165–173.
doi:10.1016/j.compstruct.2012.08.025.
-
- (Thanh et al. 2020) Thanh, C. L., Nguyen, T. N., Vu, T. H., Khatir, S., & Abdel Wahab, M. (2020), “A geometrically nonlinear size-dependent hypothesis for porous functionally graded micro-plate”, *Engineering with Computers.*,
doi:10.1007/s00366-020-01154-0.
-
- (That et al. 2020) That, H.L.T., Nguyen-Van, H., Chau-Dinh, T. (2020), “Nonlinear Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using SQ4T Elements based on Twice Interpolation Strategy”, *J. Appl. Comput. Mech.*, 6(1) (2020) 125-136.
DOI: 10.22055/JACM.2019.29270.1577.
-

-
- (Timesli 2019) Timesli, A. (2019), “An efficient approach for prediction of the nonlocal critical buckling load of double-walled carbon nanotubes using the nonlocal Donnell shell theory”, *SN Appl. Sci.*, **2**, 407.
<https://doi.org/10.1007/s42452-020-2182-9>
-
- (Timesli 2020a) Timesli, A. (2020a), “Prediction of the critical buckling load of SWCNT reinforced concrete cylindrical shell embedded in an elastic foundation”, *Computers and Concrete*, **26**(1), 53-62.
DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/cac.2020.26.1.053>
-
- (Timesli 2020b) Timesli, A. (2020b), “Buckling analysis of double walled carbon nanotubes embedded in Kerr elastic medium under axial compression using the nonlocal Donnell shell theory”, *Advances in Nano Research*, **9**(2), 69-82.
<https://doi.org/10.1007/s42452-020-2182-9>
-
- (Timoshenko et al. 1959) Timoshenko S., Woinowsjy-kreiger S. (1959). Theory of plates and shells. McGraw-Hill book company.
ISBN: 0-07-064779-8
-
- (Touratier 1991) Touratier M. (1991). “An efficient standard plate theory”. *International journal of Engineering Science*, 901-916.
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y)
-
- (Trabelsi et al. 2019) Trabelsi, S., Frikha, A., Zghal, S., & Dammak, F. (2019), “A modified FSDT-based four nodes finite shell element for thermal buckling analysis of functionally graded plates and cylindrical shells”, *Engineering Structures.*, **178**, 444–459.
[doi:10.1016/j.engstruct.2018.10.047](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.10.047).
-
- (Udupa et al. 2014) Udupa G., Rao S. S., Gangadharan K.V. (2014), “Functionally graded composite materials: an overview”, *Procedia materials science* 5, 1291-1299.
doi: 10.1016/j.mspro.2014.07.442
-
- (Wattanasakulpong et al. 2012) Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W., Hoffman, M. (2012), "Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation", *Mater. Des.*, **36**, 182–190.
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.10.049>
-

-
- (Wattanasakulpong et al. 2014) Wattanasakulpong, N., Ungbhakor, V. (2014), “Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities”, *Aerosp.Sci.Technol.*, **32**, 111–120.
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.12.002>
-
- (Wazery et al. 2015) Wazery M. S., Desouky A. R. (2015), “A review on functionally graded ceramic-metal materials”, *Mater. Environ. Sci.*, 1369-1376.
ISSN : 2028-2508, CODEN : JMESCN
-
- (Wu et al. 2010) Wu, C.-P., & Li, H.-Y. (2010). “An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates”, *Composite Structures.*, **92**(10), 2591–2605.
[doi:10.1016/j.compstruct.2010.01.022](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.01.022).
-
- (Xiang et al. 2013) Xiang, S., & Kang, G. (2013). “A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates”, *European Journal of Mechanics - A/Solids.*, **37**, 336–343.
[doi:10.1016/j.euromechsol.2012.08.005](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.08.005).
-
- (Yang et al. 2001) Yang, J., & Shen, H.-S. (2001). “Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates”, *Composite Structures.*, **54**(4), 497–508.
[doi:10.1016/s0263-8223\(01\)00122-2](https://doi.org/10.1016/s0263-8223(01)00122-2).
-
- (Yuan et al. 2020) Yuan, Y., Zhao, K., Sahmani, S. and Safaei, B. (2020). “Size-dependent shear buckling response of FGM skew nanoplates modeled via different homogenization schemes”, *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.*, **41**, 587–604.
<https://doi.org/10.1007/s10483-020-2600-6>.
-
- (Zara 2017) Zara, F. (2017). *Modèle mécanique d'une plaque mince*. 9. France: HAL.archives-ouvertes.fr/cel-01520287.
-
- (Zenkour 2006) Zenkour, A. M. (2006). “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Applied Mathematical Modelling.*, **30**(1), 67–84.
[doi:10.1016/j.apm.2005.03.009](https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.03.009).
-
- (Zhao et al. 2019) Zhao, J., Zhang, Y., Choe, K., Qu, X., Wang, A., & Wang, Q. (2019). “Three-dimensional exact solution for the free vibration of thick functionally graded annular sector plates with arbitrary boundary
-

conditions”, *Composites Part B: Engineering.*, **159**, 418-436.
[doi:10.1016/j.compositesb.2018.09.107](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.107).

(Zouatnia et al. 2019) Zouatnia, N., and Hadji, L. (2019), “Static and free vibration behavior of functionally graded sandwich plates using a simple higher order shear deformation theory”, *Advances in Materials Research, An Int'l Journal.*, **8**(4), 313-335.
<https://doi.org/10.12989/amr.2019.8.4.313>.
