

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABESSIDI BEL ABBES



FACULTE DES TECHNOLOGIES
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
& TRAVAUX PUBLICS

THESE

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT 3^{ème} Cycle LMD

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structure**

Soutenue par
SAHLA Meriem

Sujet de thèse :

**Proposition d'une nouvelle cinématique pour l'étude du
comportement mécanique des structures composites
épaisses renforcées par des fibres**

Soutenue le : 08/06/2021, Devant le Jury composé de :

TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL. SBA	Président
SAIDI Hayat	MCA	UDL. SBA	Directrice de thèse
BOURADA Mohamed	Professeur	UDL. SBA	Examinateur
BENYOUCEF Samir	Professeur	UDL. SBA	Examinateur
SADOUN Mohamed	MCA	U. Mascara	Examinateur
ATTIA Amina	MCA	U. Ain Temouchent	Examinatrice

Année universitaire : 2020-2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

DEDICACE

Je dédie ce travail à la

*À la mémoire de mon très cher père
J'espère qu'ils reposent en paix à jamais.*

*À ma très chère mère
Faible témoignage de ma reconnaissance infinie*

À mes frères et mes sœurs

À toutes ma famille

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Remerciements

Mes sincères remerciements sont adressés à ma directrice de thèse, **Madame SAIDI Hayat**, pour son encadrement scientifique, son aide précieuse, ses encouragements, sa patience ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années pour l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements tous les membres du jury, à **Mr. TOUNSI Abdelwahed**, Professeur à l'université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury, **Mr. BOURADA Mohamed** Professeur à l'université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes, , **Mr. BENYOUCEF Samir** Professeur à l'université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes, **Mr. SADOUN Mohamed**, maître de conférences à l'université de Mascara, **Mme ATTIA Amina**, maître de conférences à l'université d'Ain Temouchent, de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite remercier en particulier **Mr. DRAICHE Kada** pour son aide, a permis l'aboutissement de nombreux calculs.

Je voudrais remercier tous les membres du laboratoire L.M.H et aux personnels du département de Génie Civil et de travaux publics de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes, sans exception, qui m'ont encouragé de près ou de loin.

Je n'oublie pas ma famille, pour le soutien continu qu'elle m'a apporté tout au long de ces années d'études.

ملخص

في هذا العمل، تم تطبيق نموذج بسيط لتشوه القص ذو أربع متغيرات يتضمن مصطلحات تكامل غير محددة للنظر في تأثير تشوه القص العرضي لأجل التحليل الديناميكي للصفائح المركبة الغير المتناظرة متعددة الطبقات والسندويتشات بلب مرن. على عكس نظريات ذات الترتيب العالي الموجودة، تحتوي النظرية الحالية على أربعة مجاهيل فقط. يتم الحصول على معادلات الحركة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي. يتم تحديد النتائج التحليلية من خلال حل إشكالية القيم الذاتية. يتم تقييم تأثير كل من الخصائص الهندسية وعامل ثابت المرونة وزاوية الألياف لمختلف مشاكل الصفائح المركبة ذات طبقات والسندويتشات. الترددات الطبيعية التي تم الحصول عليها باستخدام النظرية الحالية يتم التحقق منها من خلال مقارنة النتائج مع تلك الخاصة بنظريات أخرى ومع نتائج حل المرونة الدقيق، إن وجد.

الكلمات المفتاحية: تشوه القص، الغير المتناظرة، الصفائح ذات الطبقات، السندويتش، الترددات الطبيعية.

Résumé

Dans ce travail, un modèle simple de déformation trigonométrique de cisaillement à quatre variables avec des termes intégraux indéterminés pour examiner l'influence de la déformation transversale de cisaillement est appliquée pour l'analyse dynamique des plaques composites antisymétriques stratifiées et des plaques sandwichs à âme souple. Contrairement aux théories d'ordre supérieur existantes, la théorie actuelle ne comporte que quatre inconnues. Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel. La solution analytique est déterminée par la résolution du problème des valeurs propres. Les influences du rapport géométrique, du rapport modulaire et de l'angle des fibres sont évaluées de manière critique pour des différents problèmes des plaques composites stratifiées et sandwichs. Les fréquences propres obtenues à l'aide de la théorie actuelle sont vérifiées en comparant les résultats avec ceux d'autres théories et avec la solution d'élasticité exacte, le cas échéant.

Mots clés : déformation de cisaillement, antisymétrique, stratifié, sandwich, fréquences propres.

Abstract

In this work, a simple four-variable trigonometric shear deformation model with undetermined integral terms to consider the influences of transverse shear deformation is applied for the dynamic analysis of anti-symmetric laminated composite and soft-core sandwich plates. Unlike the existing higher order theories, the current one contains only four unknowns. The equations of motion are obtained using the principle of virtual work. The analytical solution is determined by solving the eigenvalue problem. The influences of geometric ratio, modular ratio and fibre angle are critically evaluated for different problems of laminated composite and sandwich plates. The eigenfrequencies obtained using the current theory are verified by comparing the results with those of other theories and with the exact elasticity solution, if any.

Keywords: Shear deformation, antisymmetric, laminated, sandwich, natural frequencies

Liste des notations

Liste des notations

a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
h_k	Epaisseur de la k ^{ème} couche
G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E_1	Module d'élasticité longitudinal
E_2	Module d'élasticité transversal
ν_{ij}	Coefficient de Poisson
Q_{ij}	Constantes de rigidités
\bar{Q}_{ij}	Constantes de la matrice de rigidité réduite
u_0, v_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y et z
$\partial w_{0,x}, \partial w_{0,y}$	Rotation due à la flexion (sans cisaillement)
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	Dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations normales dans les directions x, y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations de distorsion
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0$	Composantes de la Déformation des déplacements en membrane
k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b	Composantes de la Déformation des déplacement dû à la flexion
k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s	Composantes de la Déformation des déplacements dû au cisaillement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	Variation du travail effectué par des charges externes
δK	Variation de l'énergie cinétique
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{yz}^s, S_{xz}^s	Effort de cisaillement
δ	Dérivée partielle
N	Nombre de couche
i, j	Nombres naturels

A	La surface supérieure de la plaque
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage membrane/ flexion
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
$B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s, A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2$	Composantes de moment d'inertie
ρ	Densité du matériau
θ_k	Angles des couches
ω	Fréquence propre
$\bar{\omega}$	Fréquence propre adimensionnelle
$[S_{ij}]$	Matrice de rigidité
$[M_{ij}]$	Matrice masse
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice

Listes des figures

Listes des figures

Chapitre I

Figure I.1: Composition générique d'un matériau composite	7
Figure I.2: Les différents types de renfort	7
Figure I.3: Les structures géométriques des composites : (a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules	8
Figure I.4: Une nappe unidirectionnelle	11
Figure I.5: Armures pour un renfort tissé 2D. (a) Taffetas (b) Sergé 3x1 et (c) Satin de 8... 12	
Figure I.6: L'influence de l'Orientation des fibres (Essai de traction)	13
Figure I.7: Différents types de matrices utilisées dans les composites	14
Figure I.8: Représentation de quelques matériaux composites (a) Schéma d'un composite multicouche (b) Empilement d'un matériau composite à âme en nid d'abeille (NIDA) (c) Photographie d'un tressage en fibres de carbone	17
Figure I.9: Composite monocouches.....	18
Figure I.10: Exemple d'empilement symétrique $[90/45/0]_s$	19
Figure I.11: Schema d'un sandwich.....	20
Figure I.12: Les différents constituants de structure sandwich, a) âme pleine b) âme creuse	21

Chapitre II

Figure II.1: Modélisation schématique d'un stratifié par le modèle ESL et LW	24
Figure II.2: Description de la déformation linéaire et non linéaire de la section des approches : a) ESL b) LW	24
Figure II.3: La CPT, Théorie classique de Kirchhoff	25
Figure II.4: La FSDT, Cinématique de Reissner-Mindlin	27
Figure II.5: Approximation des cisaillements transversales : constantes (théorie du premier ordre) et quadratiques (ordre supérieur).....	28
Figure II.6: La HSDT, Cinématique de théorie de troisième ordre.....	29
Figure II.7: Comparaison de la théorie d'ordre élevé HSDT avec CLPT et FSDT	31
Figure II.8: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	32

Figure II.9: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	33
Figure II.10: Description au principe l'approche par couche)	34
Figure II.11: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique)	35
Figure II.12: Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique	35
Figure II.13: Champ de déplacement dans le modèle zig-zag du premier ordre	36
Figure II.14: Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur	37

Chapitre III

Figure III.1: Géométrie de la plaque et système de numérotation des couches	45
--	-----------

Listes des tableaux

Listes des tableaux

Chapitre I

Tableau I.1: Les Caractéristiques de fibres de verre	9
Tableau I.2: Avantages et inconvénients des fibres de carbone.....	10
Tableau I.3: Propriétés des matrices TP et TD.....	15

Chapitre IV

Tableau IV.1: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée multicouches antisymétrique $(0/90)_n$ ($a/h=5$, matériau 1).....	57
Tableau IV.2: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée multicouches antisymétrique $(0/90)_n$ (matériau 2)	58
Tableau IV.3: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique $(45^\circ/-45^\circ)$ (matériau 1)	60
Tableau IV.4: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique $(\theta/-\theta)$ (matériau 2)	61
Tableau IV.5: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique $(\theta/-\theta)$ (matériau 1)	62
Tableau IV.6: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique à quatre couches $(45^\circ/-45^\circ)_2$ (matériau 3).....	63
Tableau IV.7: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique à dix couches $(45^\circ/-45^\circ)_5$ (matériau 4)	64
Tableau IV.8: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich rectangulaire symétrique à trois couches $(0^\circ / \hat{a}me / 0^\circ)$ (matériau 5 et 6)	65
Tableau IV.9: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich rectangulaire symétrique à cinq couches $(0^\circ / 90^\circ / \hat{a}me / 90^\circ / 0^\circ)$ (matériau 6 et 7)	66
Tableau IV.10: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich carrée antisymétrique à cinq couches $(0^\circ / 90^\circ / \hat{a}me / 0^\circ / 90^\circ)$ (matériau 8 et 9 , $t_c/t_f = 10$),	67
Tableau IV.11: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich carrée antisymétrique de cinq couches $(0^\circ / 90^\circ / \hat{a}me / 0^\circ / 90^\circ)$ (matériau 8 et 9 , $t_c/t_f = 10$),	67

Tableau IV.12: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich rectangulaire antisymétrique à cinq couches ($0^\circ / 90^\circ / \hat{a}me / 0^\circ / 90^\circ$) (matériau 8 et 9 $t_c / t_f = 10, a / h = 10$) 68

Tableau IV.13: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich carrée antisymétrique à cinq couches ($\theta / -\theta / \hat{a}me / \theta / -\theta$) (matériau 8 et 9) 69

Table des matières

Table des matières

<i>ملخص</i>	<i>i</i>
<i>Résumé</i>	<i>ii</i>
<i>Abstract</i>	<i>iii</i>
<i>Listes des des notations</i>	<i>iv</i>
<i>Listes des figures</i>	<i>vi</i>
<i>Listes des tableaux</i>	<i>viii</i>
Introduction générale	
1. Introduction	1
2. Problématique et objectifs.....	1
3. Méthodologie et organisation de la thèse.....	3
Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites	
I.1 Introduction.....	5
I.2 Définition d'un matériau composite	5
a) Les composites à grande diffusion (GD).....	6
b) Les composites hautes performances (HP)	6
I.3 Constituants des matériaux composites	7
I.3.1 Les renforts (fibres et tissus) : différents types, propriétés	7
I.3.1.1 Principaux renforts.....	8
I.3.1.2 Caractéristiques des fibres et renforts	11
I.3.1.3 Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation.....	13
I.3.2 Matrices : différents types, propriétés	13
I.3.2.1 Matrices organiques	14
I.3.2.2 Matrices minérales	16
I.3.3 Les charges (additifs des résines).....	16
I.4 Architecture des matériaux composites	17
I.4.1 Monocouches	18
I.4.2 Stratifiés	18
I.4.3 Structures composites sandwichs	20
I.4.3.1 Les constituants d'une structure sandwich.....	20
I.5 Conclusion	21

Chapitre II: Aperçu sur l'évolution des théories des plaques composites

II.1 Introduction	23
II.2 Evolution de la Théories de plaques	23
II.2.1 Modèles de plaques bidimensionnelles (2D)	23
II.2.1.1 Approche monocouche équivalente (approximation globale ESL).....	24
a) Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (Classical plate theory CPT)..	25
b) Théorie des plaques du premier ordre (First Order Shear Plate Theory FSDT) ...	26
c) Théorie des plaques d'ordre supérieur (Higher Order Shear Plate Theory HSPT)	29
II.2.1.2 Approche par couche (layer wise)	33
a) Les modèles zig-zag	35
b) Les modèles couches discrètes	37
II.2.2 Théorie d'élasticité tridimensionnelles (Élasticité 3D).....	38
II.2.3 Approches quasi-tridimensionnelles (quasi-3D).....	39
II.3 Vibration et réponse dynamique des plaques composites	40
II.4 Conclusion	44

Chapitre III: Analyse de vibration libre des plaques composites stratifiées équilibrées et sandwichs à l'âme souple

III.1 Introduction	45
III.2 Formulation mathématique	45
III.3 Équations du mouvement	48
III.4 Solutions analytiques pour les plaques composites stratifiées antisymétriques.....	51
III.5 Conclusion.....	53

Chapitre IV: Résultats et discussions

IV.1 Introduction	55
IV.2 Résultats numériques et discussions	55
IV.2.1 Analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées antisymétriques ...	56
IV.2.2 Analyse de la vibration libre des plaques sandwichs	64
IV.3 Conclusion	70
Conclusion générale	71
Références bibliographie	72

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction

Les matériaux composites stratifiés sont largement utilisés dans le domaine aérospatial, génie civil, maritime et autres. Grâce à leur "module spécifique" élevé, leur " grande résistance spécifique " et leur adaptabilité aux applications spécifiques, les composites laminés offrent des avantages indéniables par rapport aux matériaux classiques tels que le métal. Chaque couche est constituée de fibres de " module élevé " et de "grande résistance " dans un matériau à matrice métallique, céramique ou polymère. Avec le développement continu de l'industrie de la haute technologie", la demande de matériaux innovants a conduit au développement de produits alternatifs aux "matériaux d'ingénierie" traditionnels tels que l'aluminium, l'acier, bois, béton, etc. (Panjehpour et al. 2018) .

2. Problématique et objectifs

Par conséquent, il est toujours souhaitable de trouver une nouvelle méthodologie pour étudier le comportement de ces matériaux. Parmi les récents modèles mathématiques sophistiqués pour étudier la flexion, la dynamique, le flambage, etc., plusieurs théories classiques ont été développées pour étudier les plaques composites stratifiées.

La théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), qui ne tient pas compte des effets du cisaillement transversal, garantit des résultats raisonnables pour les plaques minces (Fadodun et al. 2017). Cependant, il sous-estime les déformations et surestime les fréquences ainsi que les charges de flambement pour les plaques moyennement épaisses. Plusieurs "théories de déformation de cisaillement" qui prennent en compte les influences du cisaillement transversal ont été proposées pour résoudre ce problème.

En conséquence, une amélioration de la FSDT et du HSDT (théorie de la déformation par cisaillement à ordre élevé) a été développée. La FSDT est basée sur (Reissner 1945) et (Mindlin 1951) et prend en compte les effets de cisaillement transversaux en supposant une variation linéaire des déplacements sur l'épaisseur. Puisque la FSDT viole les conditions d'équilibre sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, des facteurs de correction de cisaillement sont nécessaires pour corriger la variation irréaliste de la déformation en cisaillement /contrainte à travers l'épaisseur.

De nombreuses études ont été réalisées à l'aide de la FSDT pour l'analyse mécanique libre des structures ((Yang et al. 1966), (Whitney 1969), (Bert et Chen 1978), (Reddy 1979), (Noor et Burton 1989),(Kant et Swaminathan 2001a; b), (Naserian-Nik et Tahani 2010), (Eltaher et al. 2014), (Akbaş 2016, 2018), (Avcar 2019), (Draiche et al. 2019). Des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) sont développées pour éviter les problèmes rencontrés dans les CPT et FSDT et pour fournir une meilleure modélisation du comportement statique et dynamique des plaques composites laminées. Parmi les différentes théories des plaques d'ordre supérieur, la théorie de Reddy de la déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) (Reddy 1984) est la plus connue et utilisée par de nombreux chercheurs dans leurs travaux. (Carrera 1999) a étudié l'influence du cisaillement transversal et des déformations normales sur la dynamique des plaques multicouches. (Ashour 2003) a examiné le flambement et les vibrations de plaques composites stratifiées symétriques avec des bords retenus élastiquement. (Ghugal et Pawar 2011) ont utilisé le modèle de déformation de cisaillement hyperbolique de (Soldatos 1992) pour l'étude dynamique des plaques orthotropes. (Karama et al. 2009) proposaient un modèle de déformation de cisaillement exponentiel pour la flexion, le flambement et la réponse dynamique des "plaques composites stratifiées". (Liu et Zhao 2007) ont examiné l'influence de l'âme souple en nid d'abeille sur la dynamique du panneau sandwich à travers des modèles de déformation en cisaillement d'ordre inférieur et supérieur.

La stabilité et la dynamique des plaques composites stratifiées équilibrées ont été étudiées par (Matsunaga 2001) . Des solutions analytiques ont été proposées par (Rao et Desai 2004) et (Rao et al. 2004) pour l'étude dynamique des "plaques composites stratifiées et sandwichs". (Kant et Swaminathan 2001a; b) ont effectué une analyse de vibration libre de plaques composites à couches croisées et de plaques sandwichs à l'aide de la méthode des éléments finis et la "théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et déformation normale ". (Aagaah et al. 2006) ont proposé une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre pour l'analyse dynamique des "plaques composites stratifiées" en tenant compte de différentes conditions aux limites. Une analyse de la vibration libre des "plaques sandwichs à âme souple" a été présentée par (Chalak et al. 2013). (Afsharmanesh et al. 2014) ont étudié le flambement et les vibrations d'une plaque circulaire composite laminée sur une fondation de type Winkler. (Draiche et al. 2016) ont développé une théorie raffinée avec effet d'étirement pour l'analyse de la flexion des plaques composites stratifiées. (Chikh et al. 2017) ont proposé une simple HSDT pour l'analyse du flambement thermique des plaques stratifiées à couches croisées.

Une approche numérique de la réponse à la vibration des plaques composites annulaires et circulaires a été présentée par (Baltacioğlu et Civalek 2018). (Javed et al. 2018) ont étudié la vibration libre des plaques stratifiées croisées basées sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur.

D'autres théories HSDT peuvent être consultés dans la revue de la littérature, telles que ((Benferhat et al. 2016), (Kar et Panda 2016), (Kolahchi 2017), (Selmi et Bisharat 2018), (Belkacem et al. 2018), (Sahouane et al. 2019), (Karami et Karami 2019)).

Dans ce travail, une simple théorie HSDT est appliquée pour l'analyse dynamique des "composites laminés" antisymétriques et des "plaques sandwichs" à âme souple. Contrairement aux HSDT existants, la théorie actuelle ne comporte que quatre inconnues. Par conséquent, la théorie actuelle est un simple modèle de calcul dans la classe des théories équivalentes de monocouche. Le champ de déplacement de la théorie actuelle est beaucoup plus riche que les autres HSDT en raison de l'utilisation de fonctions trigonométriques en termes d'épaisseur de coordonnée z pour le calcul des déformations de cisaillement hors plan. Les fréquences propres de diverses plaques composites stratifiées à couches croisées, équilibrées et plaques sandwichs sont calculées et comparées à la littérature existante en tenant compte des influences du rapport géométrique (a/h), du " rapport modulaire " (E_1/E_2) et de "l'angle de la fibre " (θ).

3. Méthodologie et organisation de la thèse

La thèse débute par une introduction générale, structuré ensuite autour de quatre chapitres et s'achève par une conclusion générale et des perspectives.

Dans le **premier chapitre**, nous apportons une description générale des matériaux composites, ses différentes composantes, elles que, les matrices, les différents types de renforts et les diverses âmes pour les matériaux sandwichs.

Le **deuxième chapitre** sera dédié à un rappel sur les différentes théories des plaques stratifiées majoritairement employées pour les modéliser, leur historique de développement et les hypothèses sur lesquelles sont fondées, suivie par quelques travaux réalisés sur l'étude dynamique des plaques composites

Ensuite, au **troisième chapitre**, une simple théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables, a été décrite en détail, dédiée pour analyse dynamique des plaques

composites stratifiées antisymétriques et des plaques sandwichs à âme souple et le calcul des fréquences de la vibration libre de ces plaques.

Le **dernier chapitre**, on va procéder à la validation, la discussion et l'évaluation des résultats obtenus par la présente théorie, et la comparaison entre les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature en analyse dynamique des plaques stratifiées antisymétriques à plis croisés, équilibrées et sandwichs avec différent matériaux utilisé ; en plus, une étude paramétrique sera faite pour étudier l'effet des différents facteurs mis en jeu, tel que l'orientation des fibres, l'épaisseur, ainsi que son module d'Young...etc. pour observer leurs effets sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées.

Le présent travail se termine par une conclusion générale relative à ce travail de recherche ainsi que par des perspectives envisagées pour des futurs travaux.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites

I.1 Introduction

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'une des avancées technologiques la plus prometteuse, de nos jours, dans le domaine des matériaux sont les "matériaux composites".

En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante, grande adaptabilité aux fonctions que requière une structure et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont vu une expansion extraordinaire. Par conséquent, leur utilisation prend, de jour en jour, de l'ampleur vis-à-vis des matériaux traditionnels, dans pratiquement tous les domaines industriels, en l'occurrence : l'aéronautique, l'aérospatial, les constructions automobiles et navales, génie civil, etc.

Aujourd'hui, le marché des composites est en pleine expansion, En 2019, le marché mondial des composites a atteint 17,7 mégatonnes en volume pour une valeur de 86 milliards de dollars. Dans pratiquement toutes les régions du monde et tous les secteurs d'applications, les marchés des composites sont en hausse, que ce soit en volumes ou en valeurs (ex : La Chine (28%) et l'Amérique du Nord (26%) restent les principaux marchés en volumes devant l'Europe (21%) et le reste de l'Asie (19%)), selon une étude du groupe JEC (JEC GROUP, KNOWLEDGE 2020).

I.2 Définition d'un matériau composite

Par définition, selon la norme ASTM D3878 (American Standards of Technical Material), les composites sont des matériaux structuraux qui se composent de deux ou plusieurs constituants non miscibles combinés au niveau macroscopique. Le but de ce mélange est d'avoir un matériau dont les performances sont meilleures que celles de ces composants pris séparément. L'un des constituants est appelé "**renfort**" et celui qui l'enveloppe est appelé "**matrice**". La phase de renfort fourni la majorité de la résistance et de la rigidité du composite, elle peut être en forme de fibres, de particules ou d'écaïlle. La matrice représente, en général, la matière de liaison, qui soutient et protège la phase de renfort (Ounis 2015).

Selon leur taux d'utilisation, Il existe deux types de matériaux composites :

a) Les composites à grande diffusion (GD)

Les plus courants, Ils représentent actuellement les plus gros volumes d'emploi (représentent 95% des composites utilisés) avec un bon compromis performance/coût voisin du coût du matériau de base. En général, ce sont des plastiques armés ou des plastiques renforcés dont le taux volumique de renfort avoisine 30 %, l'anisotropie n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters avec des fibres de verre.

b) Les composites hautes performances (HP)

Ils sont principalement utilisés dans l'aéronautique et sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues dont le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des matériaux conventionnels (ex. : métaux),

Un matériau composite est alors un matériau formé de plusieurs constituants de natures différentes, généralement à deux :

- Renfort,
- Matrice.

D'autres constituants qui peuvent également être trouvés sont des agents de couplage, des revêtements et des charges. Des agents de couplage et des revêtements sont appliqués sur les fibres pour améliorer leur mouillage avec la matrice ainsi que pour favoriser la liaison à travers l'interface fibre-matrice. Les deux favorisent à leur tour un meilleur transfert de charge entre les fibres et la matrice. Les charges sont utilisées avec certaines matrices polymères principalement pour réduire les coûts et améliorer leur stabilité dimensionnelle (Mallick 2007).

La maîtrise de l'élaboration de matériaux composites nécessite la connaissance des propriétés individuelles des constituants de base des matériaux (*cf. Figure I.1*) :

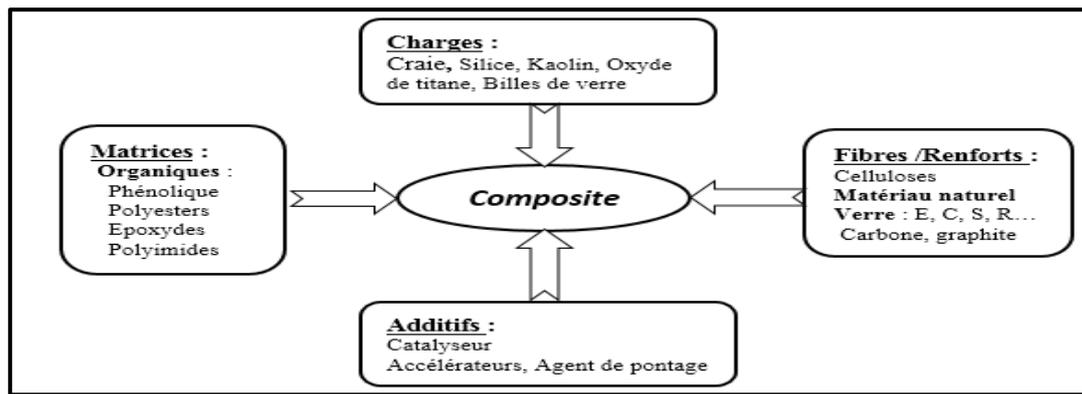


Figure I.1: Composition générique d'un matériau composite (Bahlouli 2009)

I.3 Constituants des matériaux composites

I.3.1 Les renforts (fibres et tissus) : différents types, propriétés

Le renfort joue le rôle de squelette ou d'armature. Le but des renforts dans les matériaux composites est essentiellement d'accroître leurs propriétés mécaniques (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.) et d'améliorer des propriétés physiques, tels les comportements au feu et à l'abrasion, la tenue en température (conservation des caractéristiques mécaniques à haute température) ou les propriétés électriques. Les caractéristiques recherchées dans les renforts sont une masse volumique faible, une compatibilité avec les matrices et une facilité de mise en œuvre (Ly 2008).

En fonction de leur utilisation, les renforts peuvent être d'origines diverses, comme indiqué sur la *figure I.2*.

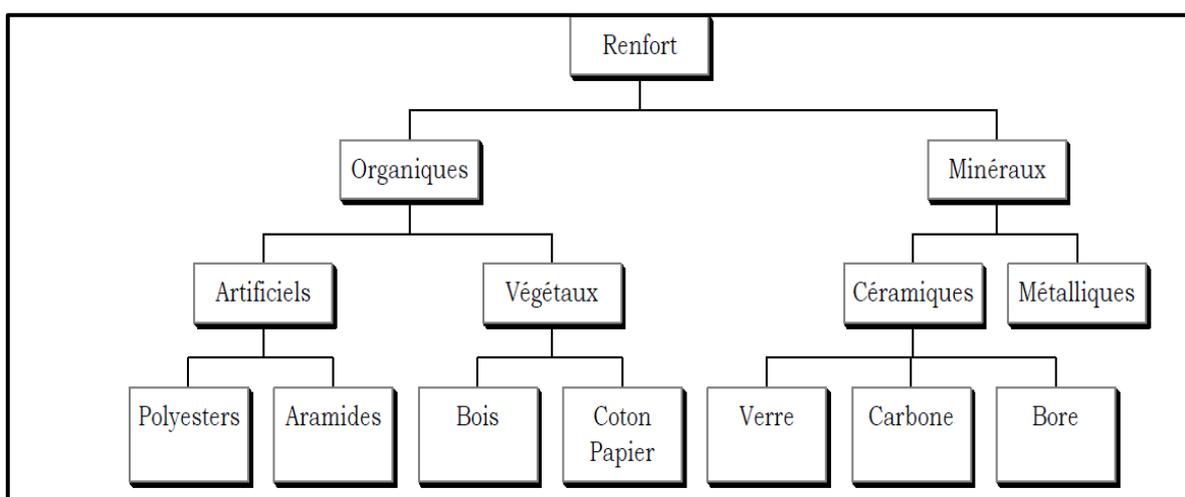


Figure I.2: Les différents types de renfort (Jao Jules 2001)

D'un point de vue géométrique, on peut distinguer trois grands types de renforts (*Figure I.3*) :

- a) Les fibres longues (longueur comparable aux dimensions de la pièce),
- b) Les fibres courtes (de longueur faible devant les dimensions de la pièce),
- c) Les particules, ou charges renforçantes.

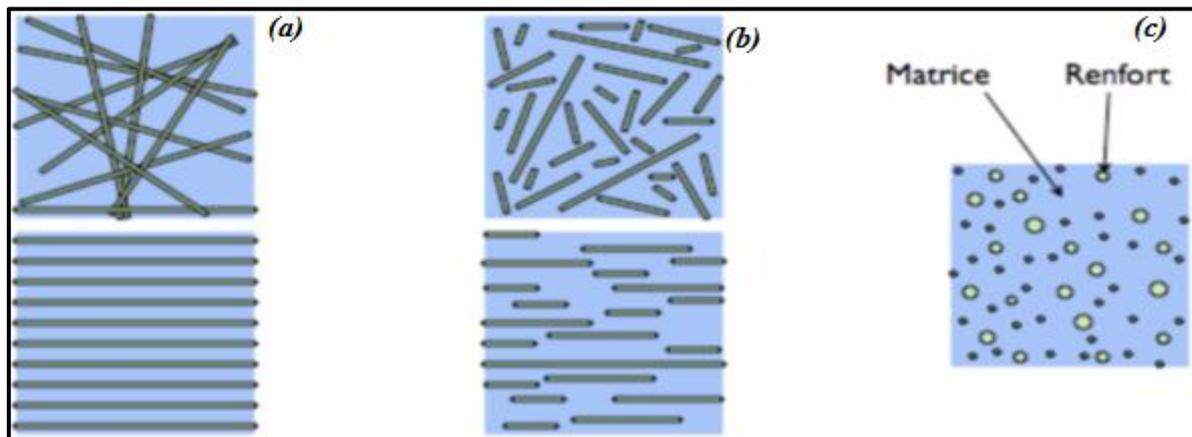


Figure I.3: Les structures géométriques des composites : (a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules (Gendre 2011)

I.3.1.1 Principaux renforts

Les renforts les plus utilisés dans les composites industriels sont les fibres de verre et les fibres de carbone. Ces fibres produites industriellement entrent maintenant en concurrence avec des fibres issues de matériaux naturels (fibre de lin, de chanvre. . .) qui bénéficient d'une meilleure acceptation sociétale. Cependant, les performances aujourd'hui atteintes par les fibres naturelles ne sont pas suffisantes pour concurrencer les composites renforcés par des fibres de verre ou de carbone (Chaabani 2017).

Parmi les fibres les plus utilisées dans l'industrie on a :

a. Les fibres de verre

Les fibres de verre, appelées aussi fibres de verre textile, sont des filaments obtenus à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore, fluor, oxyde de sodium, oxyde de potassium, oxyde de zirconium, oxyde de fer, oxyde de titane) (Berthereau et Dallies 2008) . Actuellement, c'est de loin le renfort le plus utilisé dans les matériaux composites en raison du rapport performance mécanique/prix.

Généralement différents types de verre, notamment le verre « **E** » qui rassemble presque l'ensemble de la production du composite de grande diffusion (~ 98%) ; le reste étant réparti entre les verres **A**, **C**, **D**, **R** et **S** qui sont utilisés pour des applications spécifiques.

Tableau I.1: Les Caractéristiques de fibres de verre (Ly 2008)

Type	Caractéristiques générales
A	Haute teneur en alcali
C	Bonne résistance chimique
D	Hautes propriétés diélectriques
E	A usage général ; bonne propriétés électriques
R, S	Haute résistance mécanique

Les fibres de verre offrent, pour un prix raisonnable :

- Une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- De bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- Des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par :

- Une **rigidité** insuffisante pour certaines applications (pièces de structure primaire en aéronautique),
- Un **vieillessement** accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevée (Issad 2018).

b. Les fibres de carbone

Les fibres de carbone sont des fibres synthétiques, de la famille des fibres minérales artificielles (FMA) non siliceuses. Elles sont produites à très haute température (1200°C) par trois types de procédés : carbonisation de rayonne (cellulose régénérée), de brai (goudron de houille ou résidu de pétrole) ou, le plus souvent, de polyacrylonitrile (PAN).

Les fibres de carbone se différencient par leur taux de carbone plus ou moins élevé qui modifie les allongements et les contraintes à la rupture et les modules d'élasticité (Afsset 2010).

Les fibres de carbone commercialisées peuvent être classées selon leurs propriétés en traction. On distingue :

- Les fibres d'usage général ou d'application thermique (UG) : $E < 200 \text{ GPa}$;
- Les fibres haute résistance (HR) : $200 \text{ GPa} < E < 250 \text{ GPa}$;
- Les fibres à module intermédiaires (IM) : $250 \text{ GPa} < E < 350 \text{ GPa}$;
- Les fibres haut module (HM) : $350 \text{ GPa} < E < 550 \text{ GPa}$;
- Les fibres de très haut module (THM) : $E > 550 \text{ GPa}$ (Nguyen 2015).

Les fibres de carbone présentent plusieurs atouts et quelques inconvénients qui sont résumés dans le **tableau I.2**.

Tableau I.2: Avantages et inconvénients des fibres de carbone (Chaabani 2017)

Avantages	Inconvénients
Légèreté	Coût de fabrication élevé
Haute performance	Tenue faible au choc et à l'abrasion
Grande résistance à la fatigue	Bobinage difficile (raideur élevée)
Stabilité thermique	
Transparence aux rayons X	
Résistance et rigidité élevées	
Faible dilatation thermique	

c. Les fibres d'aramides (kevlar)

La fibre aramide est obtenue à partir des polyamides aromatiques (ou polyaramide) par synthèse chimique à basse température ; ses propriétés diffèrent de celles des polyamides aliphatiques classiques (type PA 6-6, dit « Nylon ») ; on la nomme souvent « Kevlar », qui est la marque de son créateur Dupont de Nemours. Les composites renforcés de fibres d'aramide possèdent une résistance spécifique en traction (résistance/densité) très importante et supérieure à la plupart des autres fibres pour ce type de sollicitation, et offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- D'une adhérence moyenne entre matrice et fibres,
- D'un prix encore trop élevé
- La faible tenue en compression par rapport à la traction : La contrainte de compression d'une fibre d'aramide est cinq fois inférieure à sa contrainte de traction. C'est une limitation importante pour l'utilisation de composites sollicités en flexion (combinaison traction/compression) qui seront dimensionnés avec la condition la plus défavorable à savoir la résistance en compression (Perrot 2006) ,(Merad 2010).

I.3.1.2 Caractéristiques des fibres et renforts

a. Architecture des renforts

Afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques des structures en composites, il est nécessaire de jouer sur la texture des renforts (leur architecture) pour créer une charpente résistante adaptée aux contraintes mécaniques. En fonction des propriétés recherchées, Il existe plusieurs architectures de renforcements :

a.1 Les unidirectionnels (UD)

Les fibres sont toutes orientées dans la même direction et confèrent au pli de très bonnes propriétés mécaniques axiales (Perrot 2006) .Ils sont assemblés parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère (Taux de déséquilibre très grand) (Zombre 2019).

Les fibres peuvent se présenter sous deux formes :

- Sans liaison particulière (roving). ;
- Reliées par un fil (nappes) (Merad 2010).

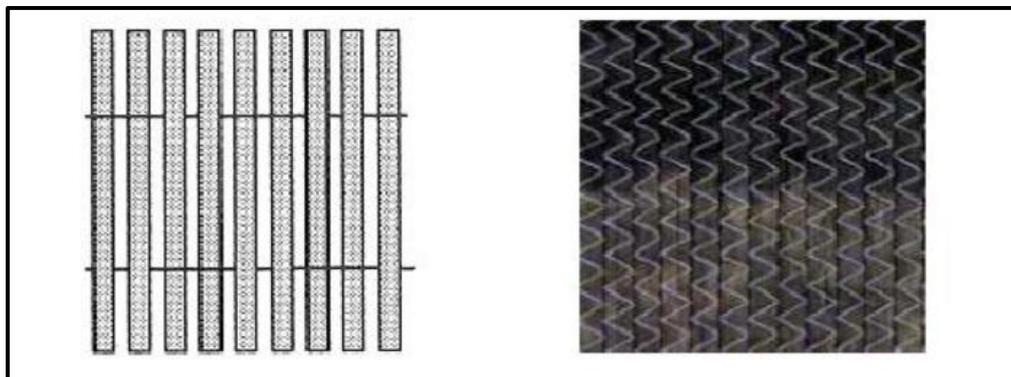


Figure I.4: Une nappe unidirectionnelle (Vilfayeau 2014)

a.2 Les tissus

Ce type de renfort est obtenu par entrelacement perpendiculaire de mèches. On appelle chaîne le fil placé dans le sens de la longueur du tissu, et trame celui entraîné transversalement par la navette pour former le motif du tissage. Leurs motifs ou armures de tissage sont très variables (Tephany 2014) (*Figure I.5*).

- **Toile ou taffetas** : Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative

rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.

- **Satin taille $n \times n$** : Chaque fil de chaîne passe au-dessus de plusieurs ($n-1$) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ils sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissu présente une forte masse spécifique.

- **Sergé $m \times n$** : Chaque fil de chaîne passe au-dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au-dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils (CARMA 2006).

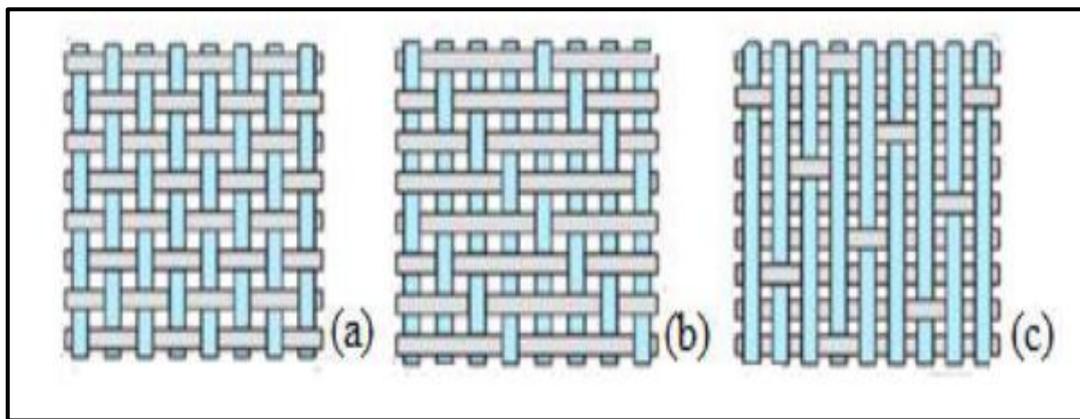


Figure 1.5: Armures pour un renfort tissé 2D. (a) Taffetas (b) Sergé 3x1 et (c) Satin de 8 (Tephany 2014)

b. Ensimage

Les renforts destinés à la fabrication des composites reçoivent un ensimage. L'ensimage est spécifique pour une résine et un procédé donné. L'ensimage est une dispersion aqueuse spécifique comportant un agent collant, un agent pontant et des antistatiques, permettant d'assurer différents rôles :

- Compatibilité de la liaison fibre - matrice ;
- Cohésion interfilamentaire (raideur du fil) pour qu'il soit manipulable ;
- Protection contre l'abrasion générée par la mise en œuvre (frottement contre pièces métalliques) ;
- Elimination des charges électrostatiques dues aux frottements ;
- Augmentation du mouillage de la fibre au cours de l'imprégnation (Bourega Remaoun 2014).

I.3.1.3 Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation

L'orientation de la fibre est choisie de façon adaptable avec les directions d'efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu'elles résistent aux efforts de traction et de compression.

Pour résister aussi à l'effet de cisaillement, on met deux fibres orthogonales de façon à ce que l'une d'elle supporte l'effet de compression ou traction et l'autre l'effet de cisaillement (*Figure I.6*) (Brek 2012).

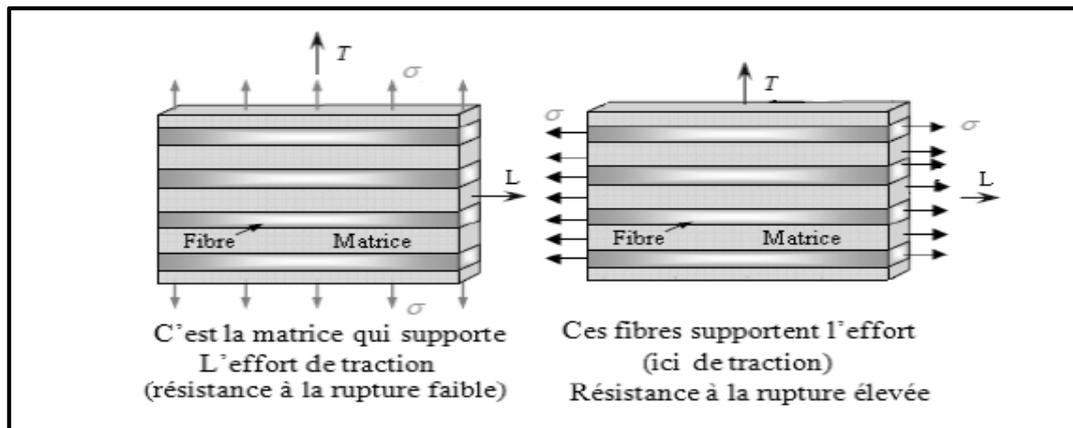


Figure I.6: L'influence de l'Orientation des fibres (Essai de traction)

(Brek 2012)

I.3.2 Matrices : différents types, propriétés

La matrice permet de garantir des fonctions essentielles telles que :

- Assurer la géométrie de la pièce (donner la forme souhaitée au produit réalisé).
- Assurer la cohésion des renforts au sein de la structure pour une meilleure homogénéisation de l'ensemble.
- Transmission les efforts mécaniques vers les renforts.
- Protéger le renfort vis-à-vis des environnements (Vilfayeu 2014),(Hami 2018).

Elles doivent être en outre assez déformable et présenter une certaine compatibilité avec le renfort pour pouvoir apporter aux matériaux composites des propriétés mécaniques assez élevées (Boudjema 2016).

Il existe aujourd'hui un grand nombre de matériaux composites que l'on classe généralement en 2 familles en fonction de la nature de la matrice.

- **Les composites à matrices organiques (CMO)**, dont la composition chimique comprend au moins une liaison Carbone-Hydrogène.

On distingue essentiellement 3 groupes que sont les composites :

- A matrice thermodurcissable,
- A matrice thermoplastique,
- A matrice élastomère.

- **Les composites à matrices minérales (CMMi)**, dont la composition chimique ne contient aucune liaison C-H, parmi lesquels on distingue les composites :

- A matrice céramique,
- A matrice métallique, (Zombre 2019).

On distingue plusieurs familles décrites dans la *figure I.7*:

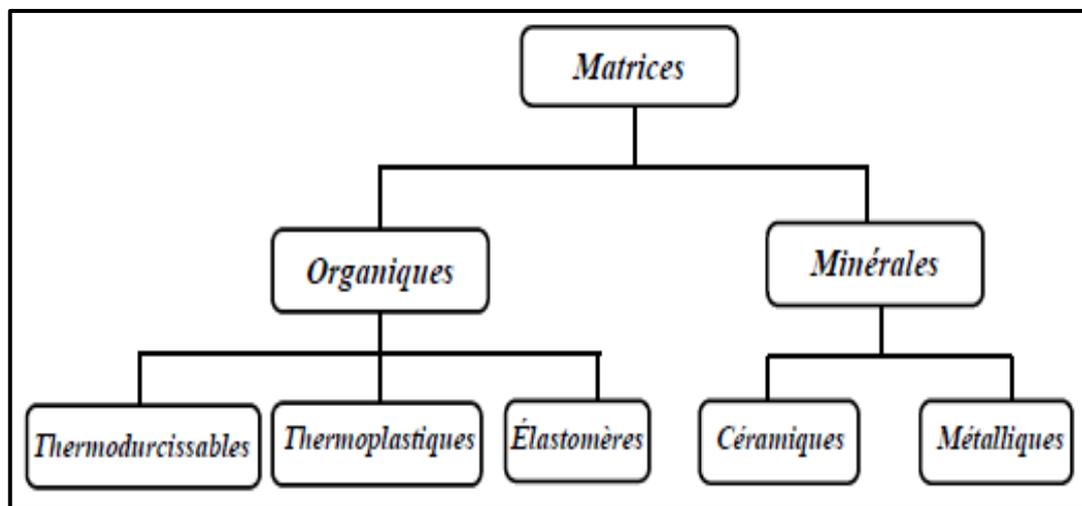


Figure I.7: Différents types de matrices utilisées dans les composites

(Bourahli 2014)

I.3.2.1 Matrices organiques

Ces matériaux possèdent de bonnes propriétés mécaniques et une faible masse volumique. Les résines les plus employées dans les matériaux composites sont les résines thermodurcissables et les résines thermoplastiques.

a. Les thermodurcissables (TD)

Les deux principales résines utilisées sont les polyesters (environ 70%) et les époxy (25%). D'autres familles comme les résines phénoliques, les polyuréthanes ou les polyimides sont également rencontrées. Ces matrices se présentent sous forme d'une résine initialement à l'état de liquide visqueux, composée de molécules longues et indépendantes. Ces molécules établissent alors des liaisons, et ces réactions sont

déclenchées le plus souvent grâce à l'action conjointe d'un durcisseur et de la température.

Il se forme ainsi une structure solide tridimensionnelle. Cette réaction est irréversible.

Les principaux avantages de ces résines sont leur facilité de mise en œuvre, leur réticulation rapide sans élimination de produits secondaires, leurs bonnes propriétés mécaniques et leur résistance chimique. En revanche, elles ont un retrait important et un mauvais comportement au feu (Thomas 2011).

b. Les thermoplastiques (TP)

Ce sont des polymères qui se présentent sous forme solide (granulés, plaques...) et nécessitent une transformation à très haute température (Boudjema 2016). Les matrices thermoplastiques possèdent de faibles propriétés mécaniques. Leur renforcement (le plus souvent par des fibres courtes) confère une meilleure résistance mécanique, une bonne stabilité dimensionnelle, ainsi qu'un accroissement de la tenue en température (Hami 2018).

Les plus courantes sont les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes PE, polypropylène PP, polycarbonate PC, polyamide PA sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Leur recyclabilité et leur thermo-réversibilité constituent des avantages très importants (Ly 2008).

Le *tableau I.3* souligne les différences entre les propriétés des thermodurcissables (TD) et des thermoplastiques (TP).

Tableau I.3: Propriétés des matrices TP et TD (Reyne 2006)

Critères/ Matrices	Thermoplastiques TP	Thermodurcissables TD
État de base	Solide-prêt à l'emploi	Liquide visqueux
Assemblage	Facilité	Assemblage par collage délicat
Stockage	Illimité	Temps réduit (précautions à prendre)
Mouillabilité des renforts	Difficile	Aisée
Moulage	Chauffage (fusion +Refroidissement de fixation)	Chauffage continu
Tenue au choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite	Bonne
Chutes et déchets	Recyclable	Perdus ou utilisés comme charges
Conditions de travail	Propreté	Emanation de Composés Organiques Volatils (COV) au cours de la mise en œuvre

I.3.2.2 Matrices minérales

a. Matrices métalliques

Pour les applications à très hautes températures, on fait appel aux composites à matrice métallique (C.M.M.) jusqu'à 600 °C. Les métaux ou alliages métalliques, utilisées dans la fabrication des (C.M.M.), sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé ainsi, l'aluminium, le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utiliser, les (C.M.M.) présentent de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en températures et aux chocs thermiques (Merazi 2015).

b. Les matrices céramiques

Sont composées d'un ou plusieurs métaux combinés à un élément dont le plus courant est l'oxygène comme par exemple Al_2O_3 (Alumine), SiO_2 (Silice), MgO (Magnésie).

Beaucoup moins répandus que leurs homologues à matrice organique en raison d'un coût élevé, les CMC s'adressent aux applications à très hautes températures. Ils sont principalement utilisés dans l'industrie spatiale et l'aéronautique militaire, ainsi que pour la conception d'organes haut de gamme comme des disques ou plaquettes de freins.

Les céramiques possèdent de nombreux atouts pour de telles applications : elles peuvent résister à des températures très élevées, sont plus légères que de nombreux métaux, et présentent une bonne stabilité chimique. Le point faible des céramiques, leur grande fragilité à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction limite fortement leur domaine d'utilisation (Tekili 2017).

I.3.3 Les charges (additifs des résines)

On désigne sous le nom général de charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques, d'améliorer l'aspect de surface ou bien, simplement, de réduire le prix de revient du matériau transformé (CARMA 2006). À l'inverse des matières thermoplastiques, les matières thermodurcissables ont toujours contenu des charges de nature et de formes variées, à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse. Pour un polymère donné, le choix d'une charge est déterminé en fonction des modifications

recherchées pour l'objet fini. Mais, d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matières plastiques devront d'abord satisfaire à un certain nombre d'exigences :

- Compatibilité avec la résine de base ;
- Mouillabilité ;
- Uniformité de qualité et de granulométrie ;
- Faible action abrasive ;
- Bas prix de revient (Benarbia 2018).

I.4 Architecture des matériaux composites

Les matériaux composites existent sous divers aspects (*Figure I.8*), allant du simple empilement de couches primaires, on parle alors de composite multicouche, à des géométries plus complexes comme les structures en nid d'abeille (NIDA) ou les composites tissés.

Une réflexion approfondie sur les matériaux utilisés et le design de ces structures permet de leur induire des propriétés particulières afin de répondre à divers besoins dans des domaines variés (orthotrope mécanique, amortissement vibratoire, conduction thermique, isolation électrique) parfois inconciliables à partir de matériaux classiques (Wassereau 2016) .

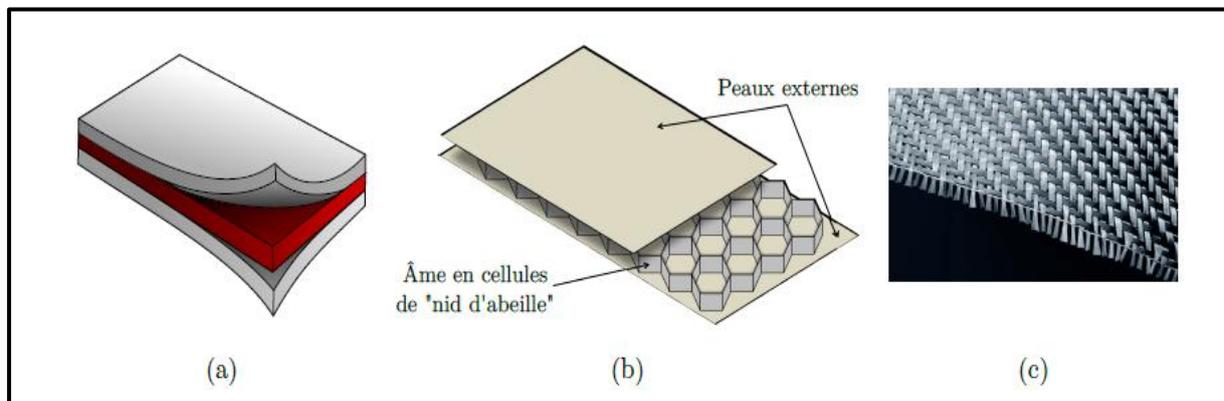


Figure I.8: Représentation de quelques matériaux composites (a) Schéma d'un composite multicouche (b) Empilement d'un matériau composite à âme en nid d'abeille (NIDA) (c) Photographie d'un tissage en fibres de carbone (Wassereau 2016)

Les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches
- Les stratifiés
- Les sandwiches

I.4.1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes (Bourega Remaoun 2014).

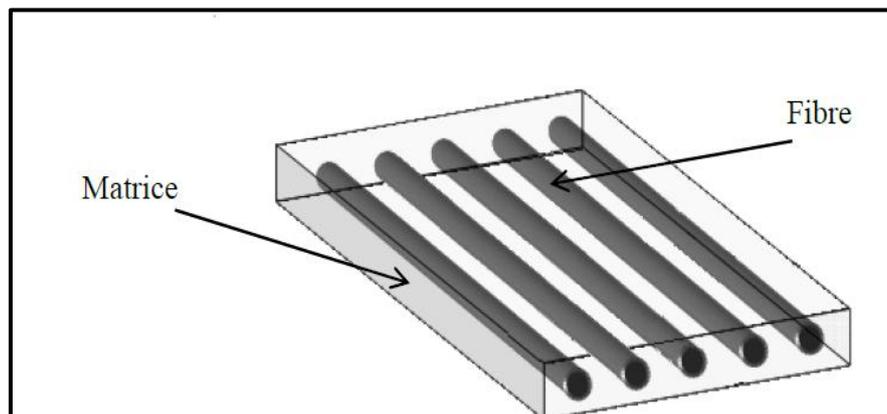


Figure I.9: Composite monocouches (Younsi 2018)

I.4.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié (Jao Jules 2001).

L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure (Bakhti 2017).

Les principaux inconvénients des stratifiés en matériaux composites renforcés par des fibres sont leurs coûts parfois prohibitifs (temps, coûts, étude et mise en œuvre), le délaminage et le décollement des fibres.

La délamination est causée par l'incompatibilité des propriétés du matériau entre les couches, ce qui produit des contraintes de cisaillement entre les couches « contraintes d'interfaces », en particulier aux bords d'un stratifié. Le décollement de la fibre est causé par l'incompatibilité des propriétés des matériaux entre la matrice et la fibre. De même, lors de la fabrication de stratifiés, des défauts de matériau tels que des vides inter laminaire, une délamination, une orientation incorrecte, des fibres endommagées et des variations d'épaisseur peuvent être introduites (Benbakhti 2017) .

a) Nomenclature des stratifiés

On désigne les stratifiés par l'orientation des fibres de chaque pli par rapport à un repère global arbitraire (x, y, z) , l'axe x (correspondant le plus souvent à la direction du chargement).

Un pli orienté à 0° présente des fibres dirigées selon l'axe x et un pli orienté à 90° des fibres selon y . Un stratifié quelconque de N plis est ainsi désigné par le N-uplet des orientations de ses plis dans le sens des z croissants. Pour condenser l'écriture, on note sous forme d'indice le nombre de plis adjacents de même orientation ainsi que le nombre de répétitions d'une même séquence de plis. L'indice « s », correspond à un stratifié symétrique pour lequel on ne renseigne que la moitié de l'empilement, de la surface au plan de symétrie miroir. La **figure I.10** présente l'exemple d'un empilement symétrique (Slimani 2015).

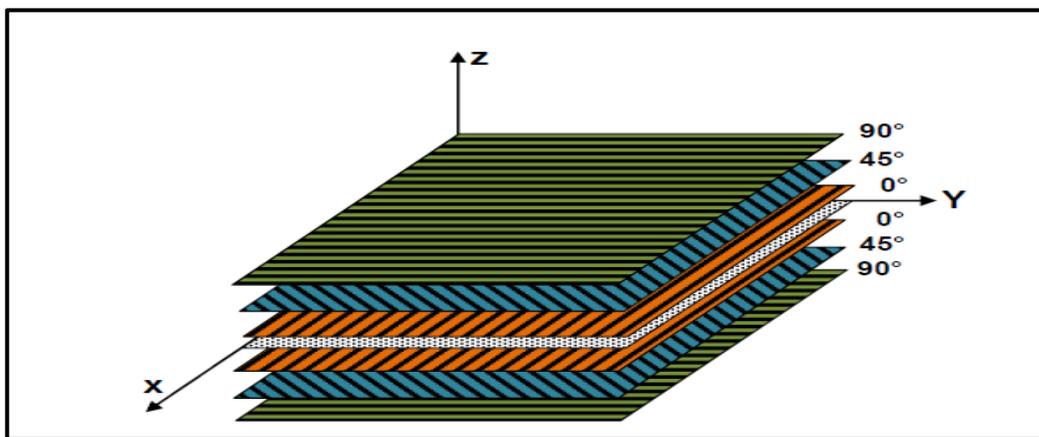


Figure I.10: Exemple d'empilement symétrique $[90/45/0]_s$ (Slimani 2015)

b) Différents types de stratifiés

Les stratifiés peuvent être de quatre principaux types :

- **Stratifié Unidirectionnel** : l'orientation des fibres est la même dans tous les plis.
Exemple : un stratifié unidirectionnel à 0° , $\theta=0^\circ$ dans les différents plis.
- **Stratifié à plis orientés $\pm\theta$ (équilibré)** : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $(+\theta/-\theta)$, avec θ différent de 0° ou de 90° .
- **Stratifié à plis croisés (cross ply)** : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $0/90^\circ/0/90^\circ$.
- **Stratifié symétrique** : l'orientation des fibres est symétrique par rapport à la ligne centrale du stratifié, c.à.d. pour chaque pli à angle θ au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté du plan médian, $\theta(z)=\theta(-z)$ (Ben Henni 2019).

I.4.3 Structures composites sandwich

Le concept du sandwich est une technique bien établie de construction qui combine le poids avec la rigidité et la force (Saidani 2014). Ces structures caractérisées par une grande rigidité en flexion et un excellent isolant thermique (Hachemi 2018).

I.4.3.1 Les constituants d'une structure sandwich

Une structure sandwich est formée généralement de trois composants possédant des propriétés différentes, mais complémentaires : les peaux, l'âme et l'adhésif.

Les différents éléments constitutifs d'un matériau composite en construction sandwich sont présente dans la *figure I.11* (Aguib 2014). Chaque élément dans un sandwich a sa fonction particulière.

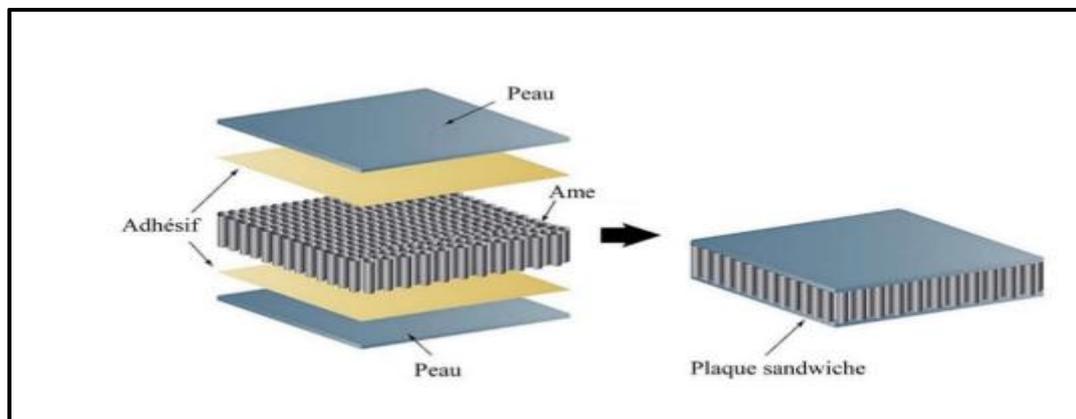


Figure I.11: Schema d'un sandwich (Daikh 2018)

a. Les peaux

Dans les sandwiches, les peaux sont souvent identiques en matériaux et épaisseur. Ces structures sont appelées des sandwiches symétriques. Cependant dans certain cas spéciaux les deux peaux peuvent avoir deux épaisseurs ou deux matériaux différents, ils sont variés suivant les conditions des chargements ou l'environnement du travail. Ces structures sont appelées des sandwiches antisymétriques (Djemai 2017).

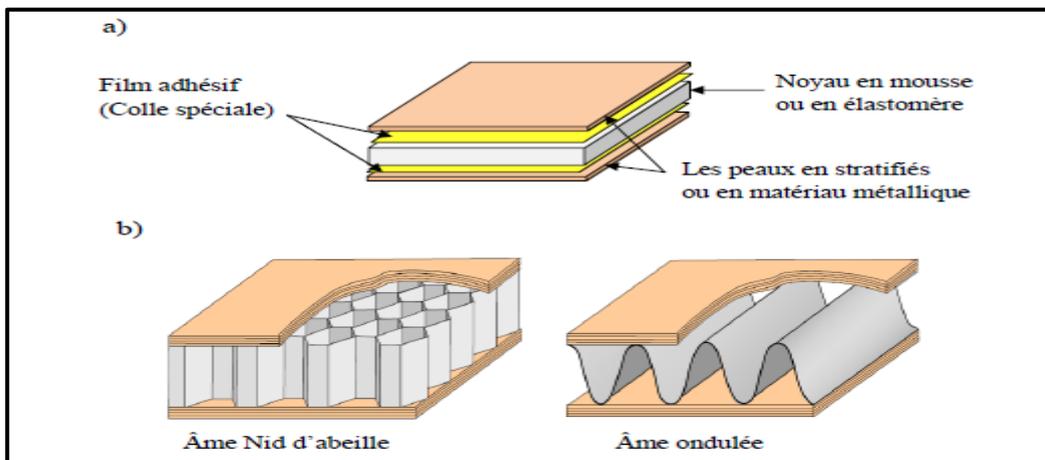
Les peaux (ou semelles) doivent résister aux moments de flexion. Elles peuvent être de plusieurs natures : en métal, en stratifié, en bois (contreplaqué) ou encore en plaque thermoplastique. Le choix de la nature de la peau s'effectue principalement en fonction des performances mécaniques exigées. Mais généralement, une rigidité élevée et une excellente résistance à la compression et à la tension sont les principales qualités recherchées (Saidani 2014).

b. L'âme

L'âme, l'élément central d'une structure sandwich, est généralement un matériau ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Elle a pour rôle de résister aux contraintes de cisaillement engendrées suite au mouvement de glissement des peaux sous charge et de maintenir leur écartement (Daikh 2018). L'âme est souvent épaisse et de faible masse volumique. L'épaisseur élevée de l'âme a pour but d'accroître le moment d'inertie du panneau sans augmenter la masse volumique (*Figure I.12*). Les types d'âmes les plus communs dans le secteur industriel sont : le bois de balsa, les nids d'abeilles et les mousses en polymères rigides (Aguib 2014).

c. Le film adhésif

L'élément final, dont l'importance est jugée également cruciale, est le film adhésif. Ce film forme la liaison entre l'âme et les peaux. Cette liaison doit être continue, sans porosité et d'épaisseur constante. Par ailleurs, une capacité suffisante pour s'opposer à la déformation est nécessaire afin de transmettre des sollicitations mécaniques. Mais, aussi elle doit être suffisamment élastique pour absorber et atténuer les impacts (Saidani 2014).



*Figure I.12: Les différents constituants de structure sandwich, a) âme pleine
b) âme creuse (Aguib 2014)*

I.5 Conclusion

Avec de nombreuses applications structurales, les matériaux composites apparaissent comme de réels concurrents des métaux du fait principalement de leur légèreté qui permet un gain de poids, de leur insensibilité à la corrosion, la résistance à l'oxydation et enfin l'isolation thermique et électrique.

Du fait de leur importance, dans ce premier chapitre, on a fait un aperçu général et appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques ainsi que les différents types de ce matériau

Chapitre II

***Aperçu sur l'évolution des théories des
plaques composites***

Chapitre II: Aperçu sur l'évolution des théories des plaques composites

II.1 Introduction

L'utilisation des matériaux composites, nos jours, est devenue de plus en plus fréquente et ce dans plusieurs domaines industriels, grâce à leurs légèretés, leur résistance, leur rigidité et leurs propriétés mécaniques ajustables dans de grandes proportions. Du fait de l'importance de l'utilisation de ces matériaux dans la conception des structures, elles nécessitent de mettre en place des outils efficaces de modélisation afin d'analyser et de comprendre leurs comportements.

Dans ce contexte, pour mieux connaître et décrire le comportement statique et dynamique complexes avec précision, plusieurs approches théories ont été proposées, et prennent un axe important dans la mécanique des structures composites multicouches stratifiées et sandwichs.

Ce chapitre expose les principales et les différentes approches et théories des plaques capable de donner une bonne description de la distribution de la déformation et contrainte du cisaillement à travers leurs épaisseurs et notamment aux interfaces, tels que, les théories d'élasticité tridimensionnelle (3D), bidimensionnelle (2D) et les théories Quasi-dimensionnelles (quasi-3D).

II.2 Evolution de la Théories de plaques

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. On distingue quatre équations, dans un modèle de mécanique des solides, comportant :

- ✓ Les équations du mouvement ;
- ✓ Relations déformations-déplacements (et rotations) ;
- ✓ Loi de comportement, les relations de contrainte-déformations ;
- ✓ Et les équations de compatibilité (Benahmed 2018).

II.2.1 Modèles de plaques bidimensionnelles (2D)

Les plaques composites stratifiées sont considérées comme un élément de structure qui possède une dimension (l'épaisseur) plus faible relativement par rapport aux deux autres

dimensions. Ce type de géométrie permet de simplifier le problème tridimensionnel (3D) à un problème bidimensionnel (2D).

Par conséquent, de nombreuses approches bidimensionnelles (2D), ont été développées pour l'analyse des structures multicouches tenant en compte l'effet de cisaillement transversal. Parmi lesquelles (**Figure II.1**) :

- Approche monocouche équivalente (Equivalent Single Layer Approach ESL) ;
- Approche par-couche (Layer-Wise Approach LW) (Belkaid 2016).

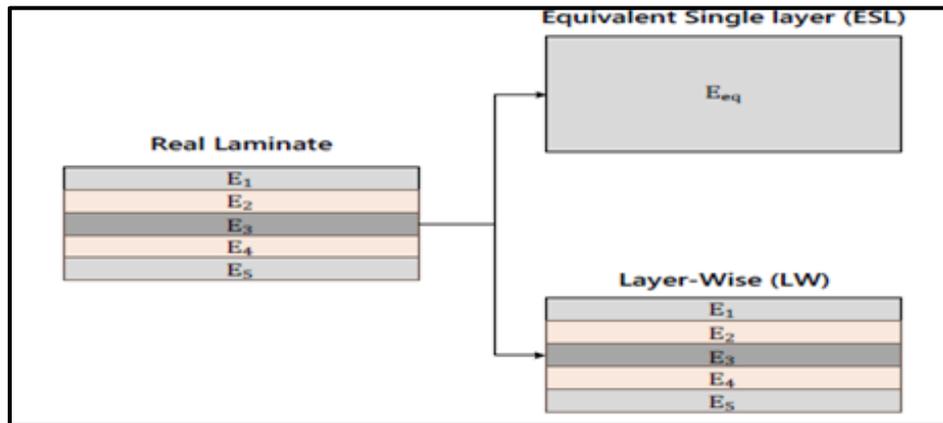


Figure II.1: Modélisation schématique d'un stratifié par le modèle ESL et LW (Rahmane 2018)

La différence entre eux réside dans la description de l'approximation de la déformation globale et locale dans la section de la plaque (**Figure II.2**) ;

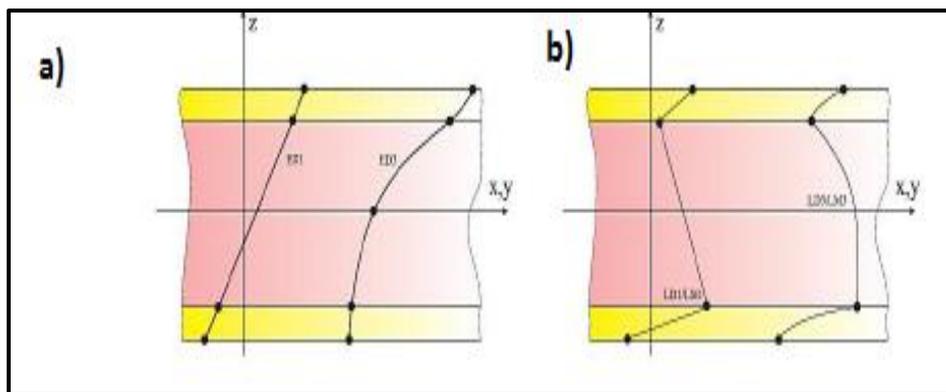


Figure II.2: Description de la déformation linéaire et non linéaire de la section des approches : a) ESL b) LW (Belarbi 2015)

II.2.1.1 Approche monocouche équivalente (approximation globale ESL)

Dans l'approche monocouche équivalente, qui est l'une des approches la plus adoptée par les chercheurs, la plaque multicouche hétérogène est considérée comme une seule couche homogène équivalente ayant le comportement de l'ensemble des couches.

Les théories du modèle **ESL** fournissent une description suffisamment précise de la réponse globale du stratifié (**i.e.** la flèche transversale, la fréquence fondamentale de vibration, la charge critique du flambement et le moment résultant) d'après (Reddy 1993).

L'avantage le plus important d'**ESL** réside dans son faible coût en termes de temps de calcul et sa simplicité ainsi que les variables sont introduites pour toute la plaque, cela va conduire à un nombre de degrés de libertés indépendant par rapport au nombre de couches (Belarbi 2015).

Dans cette section nous exposons les trois catégories de théories qui sont les plus connus dans la littérature en adoptant l'approche de monocouche équivalente, il s'agit de :

- 1) Théorie classique des plaques (CLPT) ;
- 2) Théorie de premier ordre des plaques (FSDT) ;
- 3) Les théories de cisaillement d'ordre supérieur des plaques (HSDT).

a) Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (Classical plate theory CPT)

Le modèle CPT se fonde sur les hypothèses de Love- Kirchhoff (Kirchhoff 1850), avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur ; selon lesquelles la droite perpendiculaire à la surface moyenne avant déformation, reste droite après déformation (Messaoudi 2018) (**Figure II.3**). L'hypothèse de love-Kirchhoff implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) et les déformations/ contraintes normales ($\varepsilon_z = \sigma_z = 0$).

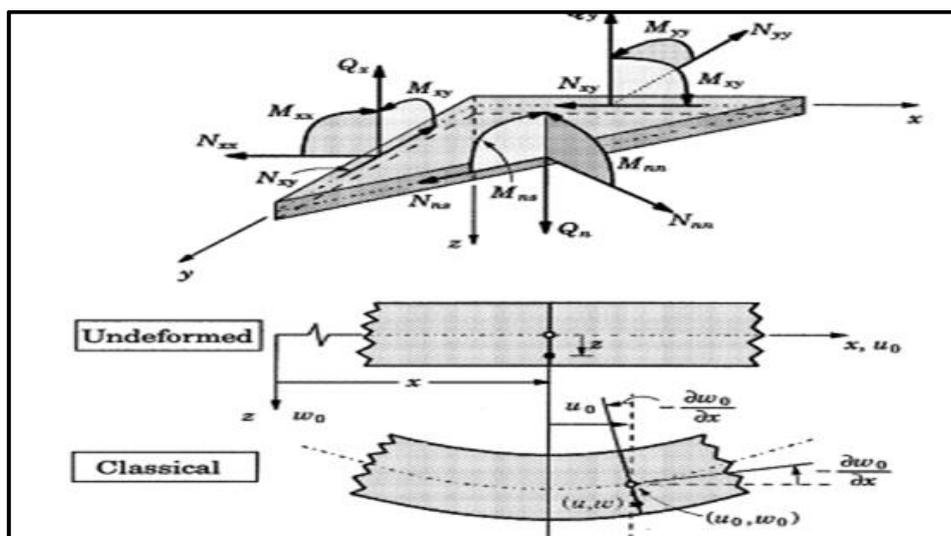


Figure II.3: La CPT, Théorie classique de Kirchhoff (Reddy et al. 2001)

Une description détaillée de modèle actuel peut être trouvée dans (Timoshenko et Woinowsky-Kreiger 1959), (Reddy 1997, 1999)

La cinématique de cette théorie peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1c})$$

Avec :

u_0, v_0 : sont les déplacements de membrane dans les directions x et y ,

w_0 : la flèche de la plaque,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$: sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement) dans les directions x, y .

Le plan principal de la plaque est le plan x, y , et l'épaisseur h est orienté selon l'axe $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right]$

Puisque l'effet de cisaillement transverse ne tient pas en compte dans ce modèle, la précision de la théorie CPT n'est adéquate que dans l'étude des plaques minces. En plus, la théorie classique des plaques sous-estime la flèche et surestime les fréquences propres ainsi que les charges critiques de flambement des plaques modérément épaisses (Belabed 2015).

b) Théorie des plaques du premier ordre (First Order Shear Plate Theory FSDT)

(Reissner 1945) et (Mindlin 1951) ont été développé la théorie du premier ordre de déformations de cisaillement FSDT. Cette théorie est une extension celle de Kirchhoff-Love CPT, en tenant compte de l'effet de cisaillement transversal, néanmoins, la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne dans la configuration déformée (due à l'effet de cisaillement transversal), Ils ont également supposé que la contrainte de cisaillement σ_z soit négligeable (l'hypothèse de déformation plane) (Rahmane 2018).

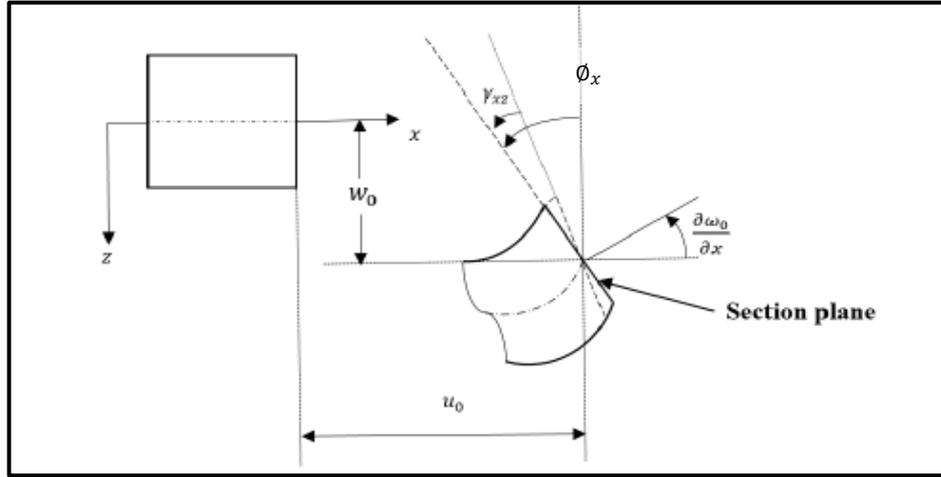


Figure II.4: La FSDT, Cinématique de Reissner-Mindlin
(Hachemi 2018)

La FSDT est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.2a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.2c})$$

Avec :

u_0, v_0, w_0 : sont les déplacements de membrane

ϕ_x et ϕ_y : représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y , respectivement, de tel sorte que :

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \gamma_{xz} \quad \text{et} \quad \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \gamma_{yz} \quad (\text{II.3})$$

γ_{xz} et γ_{yz} : les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

Dans ce cas, les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction du facteur de correction de cisaillement k_s pour assurer la distribution parabolique de contrainte de cisaillement le long de l'épaisseur de la plaque (La nullité des contraintes de cisaillement transversal, à la surface supérieure et inférieure) (**Figure II.5**), ce facteur de correction pour les composites stratifiés et sandwichs dépendent essentiellement des propriétés mécaniques du matériau (module d'Young, coefficient de poisson,...etc.), les formes et les orientations des fibres ainsi que, la géométrie du stratifié, le nombre de couches et les conditions aux limites (Ochoa et Reddy 1992), ce qui rend ces facteurs difficiles à déterminer.

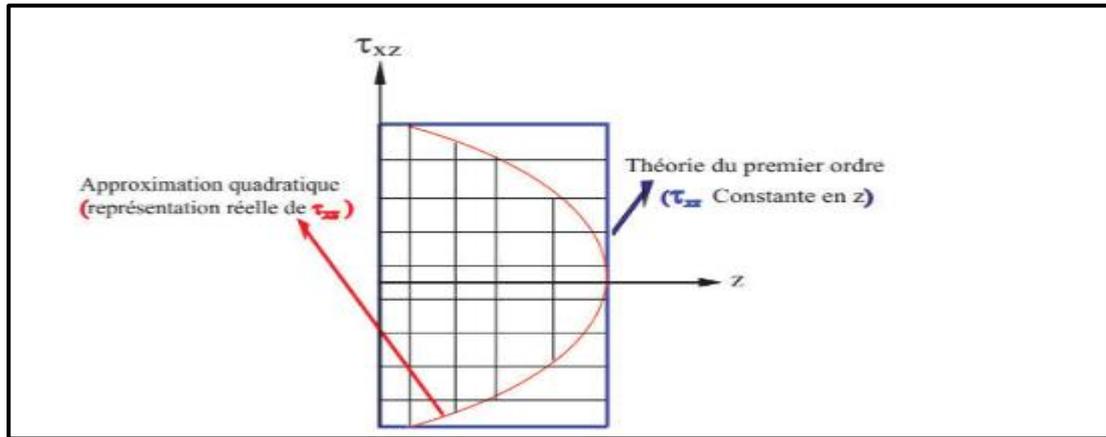


Figure II.5: Approximation des cisaillements transversales : constantes (théorie du premier ordre) et quadratiques (ordre supérieur) (Messaoudi 2018)

Les valeurs couramment utilisées de ce facteur, sont $ks=5/6$ par (Reissner 1945) et $ks= \pi^2/12$ par (Mindlin 1951). Ces facteurs sont introduits comme des paramètres dans les relations constitutives entre les forces de cisaillement transversal et les déformations de cisaillement transversal (Rahmane 2018)

Dans ce contexte, plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer les facteurs de correction de cisaillement. La méthodologie la plus courante est basée sur la comparaison de certaines réponses (l'énergie de déformation, la vitesse de propagation d'une onde de flexion, la fréquence propre du mode de vibration, etc.) prédite par la théorie du premier ordre et celles obtenues par la théorie d'élasticité tridimensionnelle (Dong et Tso 1972), (Whitney 1973), (Bert 1973).

Une première approche : est basée sur le principe d'équivalence énergétique, on fait notamment, déduire le facteur de correction de cisaillement à partir de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle par l'analogie avec le modèle de plaque correspondante. On peut citer notamment les travaux de (Mena et al. 2012), (Nguyen et al. 2008), ils ont proposé des expressions analytiques pour déterminer le facteur de correction de cisaillement dans le cas des plaques.

Une deuxième approche basée sur l'équivalence de fréquences propres obtenues par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle et la théorie de premier ordre. (Chow 1971), (Hosseini-Hashemi et al. 2010), présentent des informations additionnelles sur la procédure pour l'obtention de facteur de correction de cisaillement à travers l'épaisseur, basant sur des considérations dynamiques.

(Tanov et Tabiei 2000) et (Fares et Elmarghany 2008) ont présenté des études en vue

d'améliorer le champ de contraintes de cisaillement, en comparant les contraintes tangentielles avec celles adoptés par la théorie de Reddy. Pour tenir en compte une distribution quadratique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur et de satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque.

c) Théorie des plaques d'ordre supérieur (Higher Order Shear Plate Theory HSPT)

Contrairement, aux théories de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de répartition linéaire de déplacement à travers l'épaisseur, Les modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSPT) sont basés sur une distribution non linéaire de champ de déplacement à travers l'épaisseur (**Figure II.6**), et qui permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Messaoudi 2018). Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Nombreux auteurs proposent des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé, on peut citer : (Reddy 1984), (Touratier 1991), (Kant et Swaminathan 2002).

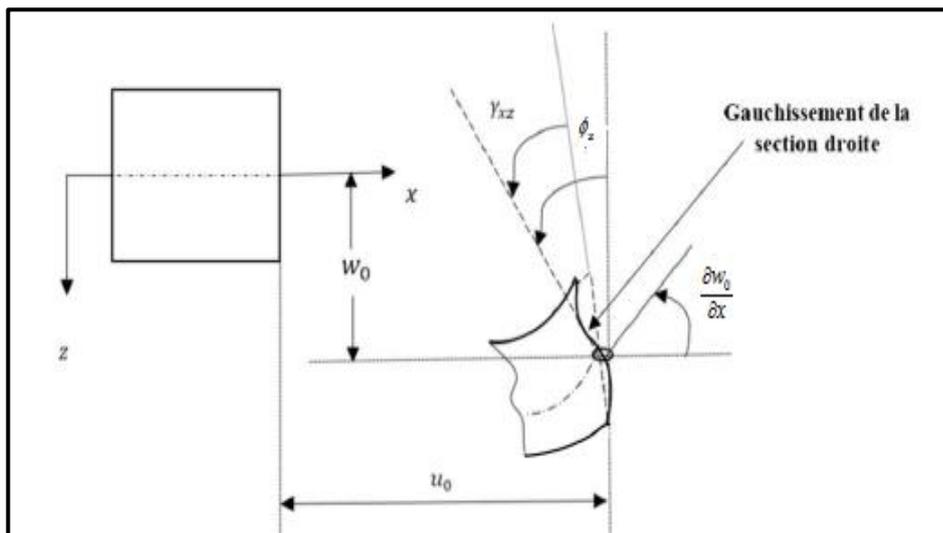


Figure II.6: La HSPT, Cinématique de théorie de troisième ordre
(Hachemi 2018)

D'une façon générale, La cinématique des théories d'ordre supérieur sont basées sur le développement de série de Taylor, d'une manière générale, elles s'expriment :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^{(0)}(x_1, x_2) + z\phi_i^{(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{(3)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.4})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3^{ème} ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité.

La valeur de $\phi_i^{(j)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_i^{(j)} = 0$ pour $j=2, 3, 4$.

Cependant, afin d'augmenter la précision de la théorie, une croissance dans le degré du polynôme de l'équation (II.4) peut être une alternative, c'est-à-dire avec le nombre d'inconnus supplémentaires. Dans ce contexte plusieurs simplifications ont été proposées afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement (Bachiri 2019). Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement" (Benyoucef et al. 2010).

Le champ de déplacement est généralement écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y) \quad (\text{II.5a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y) \quad (\text{II.5b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.5c})$$

Avec :

(u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) : sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement.

$f(z)$: est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

On trouve les mêmes parties : le déplacement de la membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire.

Donc, on remplace le « z » pour la théorie FSDT par une fonction $f(z)$ qu'on l'appelle « fonction de gauchissement » ou « fonction de forme ». Cette dernière représente l'allure de la déformation de la section transversale, c'est ce qu'on appelle « le gauchissement ». La fonction $f(z)$ doit aussi satisfaire les conditions aux limites de la nullité des contraintes tangentielles aux surfaces supérieur et inférieur de la plaque (Mahmoudi 2019).

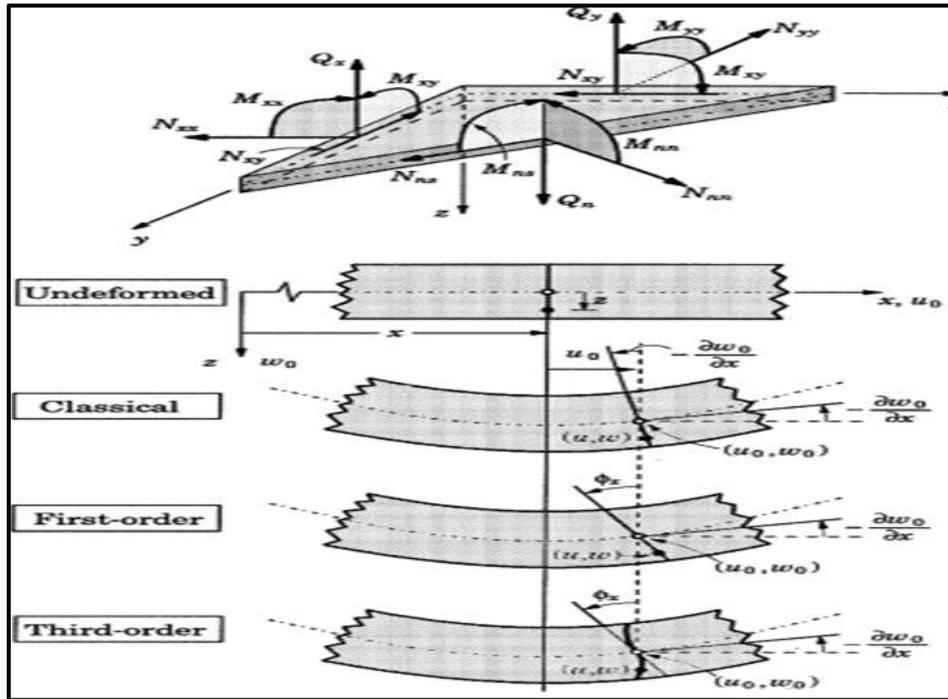


Figure II.7: Comparaison de la théorie d'ordre élevé HSDT avec CLPT et FSDT (Reddy et al. 2001)

Les expressions les plus importantes considérées dans la littérature pour cette fonction sont les suivantes:

- (Ambartsumian 1958a) avec:

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \tag{II.6}$$

- (Kaczkowski 1968), (Panc 1975) et (Reissner 1975), avec:

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \tag{II.7}$$

(Reddy 1997, 1999) (TSDT) avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \tag{II.8}$$

Dans le modèle de Reddy (TSDT third-order shear deformation plate theory), le champ de déplacement membranaire est cubique, ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur, les conditions aux limites sur les surfaces libres supérieur et inférieur sont satisfaites (Benbakhti 2017).

- (Touratier 1991) (SSDT) avec:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.9})$$

Touratier a proposé le modèle trigonométrique sinus (SSDT the sinusoidal shear deformation plate theory), pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur qui utilise des fonctions polynomiales. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie TSDT de Reddy (Younsi 2018).

- (Soldatos 1992) avec :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.10})$$

- (Karama et al. 2003) (ESDT the exponential shear deformation plate theory) avec:

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.11})$$

- (Ait Atmane et al. 2010) (HSDPT the hyperbolic shear deformation plate theory) avec:

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{h}{\pi} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad (\text{II.12})$$

Avec h : l'épaisseur de la plaque.

Les figures suivantes présentent la variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur et leur dérivée $f'(z)$, en fonction de l'épaisseur de la plaque.

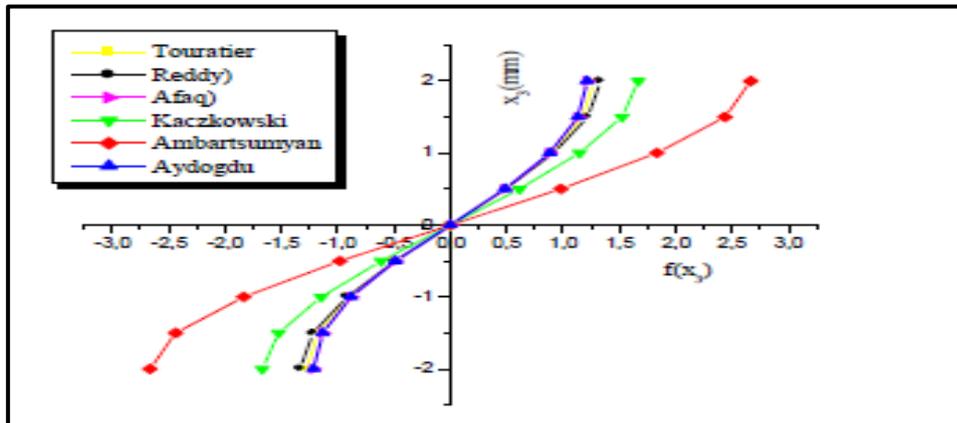


Figure II.8: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur (Issad 2018)

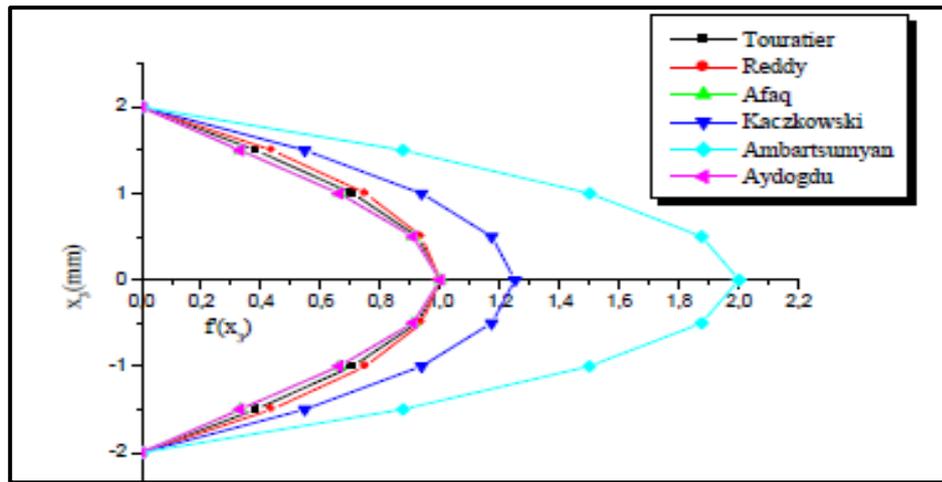


Figure II.9: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur (Issad 2018)

En fonction des **figures II.8** et **II.9** on observe que les deux approches d' (Ambartsumian 1958a) et celle de (Kaczowski 1968) sont notablement loin des autres fonctions de forme ; elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

On remarque que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .) (Issad 2018).

II.2.1.2 Approche par couche (layer-wise)

Les modèles basés sur l'approche monocouche équivalente donnent relativement une bonne approximation du comportement de la structure multicouche à l'échelle globale. Ils se distinguent par l'indépendance du nombre d'inconnus du nombre des couches.

Des hypothèses fortes et simplifiées considérées dans les modèles ESL entraînent une perte importante d'information et une imprécision notable au niveau local (discontinuité des contraintes transversales aux interfaces, non-satisfaction des conditions aux limites,...). Pour les multicouches minces, l'erreur due à la discontinuité des contraintes interlaminaires peut être négligeable. En revanche, pour les structures multicouches épaisses, les modèles de type monocouche équivalente peuvent aboutir à des résultats inacceptables.

Pour franchir les limites des modèles de ce type, les approches par couche (layer-wise) ont été proposées. Dans ces approches, chaque couche est considérée comme une plaque indépendante. En effet, la forme des champs inconnus et les équations sont écrites pour chaque couche séparément de la structure multicouche, le nombre d'équations du modèle dépend du nombre des couches. A noter que les champs inconnus sont indépendants dans chaque couche mais les continuités des déplacements et des contraintes transversales doivent être satisfaites aux interfaces entre deux couches adjacentes (Saeedi 2012) (*Figure II.10*).

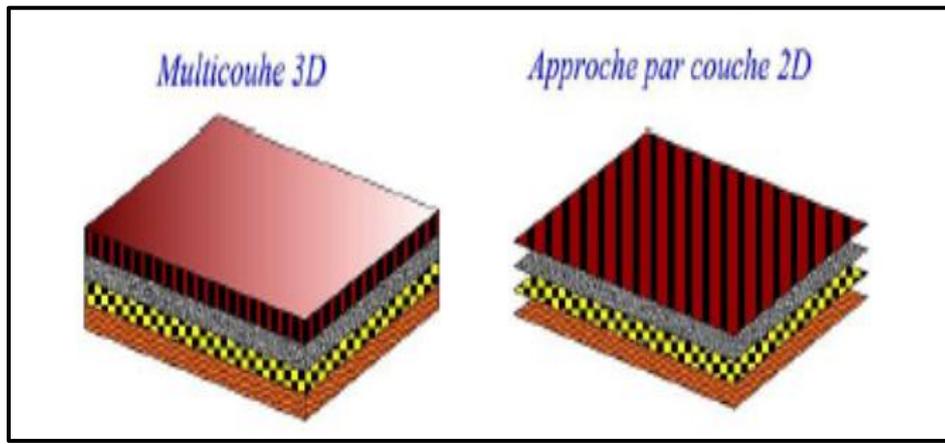


Figure II.10: Description au principe l'approche par couche (Saeedi 2012)

Ce type est relativement coûteux en termes de temps et la complexité de calcul (l'ordre des équations de comportement qui dépend du nombre de couches).

Les différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Carrera 2000), (Di Sciuva 1987). D'une manière générale, ces modèles peuvent être classés en deux catégories :

- Les modèles couches discrètes, qui considère chaque couche comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (*Figures II.11 et II.12*).

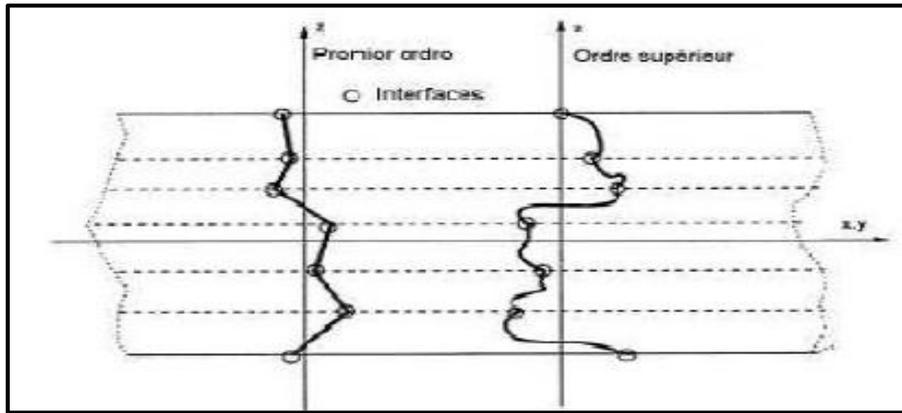


Figure II.11: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique (Nguyen 2004)

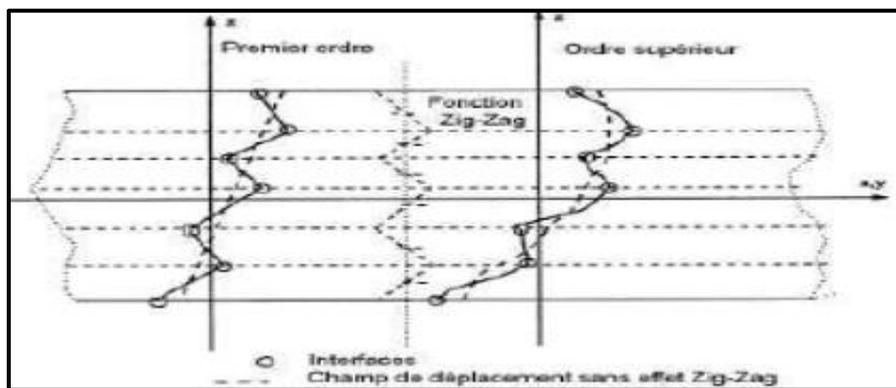


Figure II.12: Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen 2004)

a) Les modèles zig-zag

Le nom de ces modèles provient de la forme zig-zag du déplacement dans l'épaisseur des structures multicouches.

Le concept des modèles zig-zag consiste à supposer la variation des déplacements et des contraintes qui sont individuellement au niveau de chaque couche de la plaque assurant la continuité au niveau d'interfaces afin de réduire le nombre des variables inconnus (Belkaid 2016). Cependant, la pente de la fonction de déplacement de chaque couche est différente. Ce changement en forme de zig-zag entre deux couches adjacentes parfaitement collées prétend rendre compte de la différence des couches (Nedri 2015).

La première théorie zig-zag a été proposée par (Lekhnitskii 1935) pour l'analyse des poutres composites. (Ren 1986a; b) a développé cette théorie qui basée sur une approche en contrainte pour les plaques multicouches.

(Ambartsumian 1958b, 1962) a développé une théorie zig-zag pour la géométrie de plaque et coque. Cette théorie a été utilisée et développée par (Whitney 1969), (Rath et Das 1973)

Une autre manière de formuler des théories zig-zag a été présentée par Reissner (Murakami 1986) propose un nouveau modèle, a utilisé la théorie variationnelle de (Reissner 1984, 1986). Il a introduit dans le modèle de plaque de Reissner-Mindlin une fonction de type zig-zag. En effet, dans ce modèle, les déplacements, sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global de la plaque de Reissner-Mindlin FSDT avec celui de type zig-zag dans l'épaisseur.

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x + M(z)u^{zz}(x, y) \tag{II.13a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y + M(z)v^{zz}(x, y) \tag{II.13b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{II.13c}$$

La fonction $M(z)$ Murakami est une fonction de z qui génère l'effet zig-zag suivant l'épaisseur.

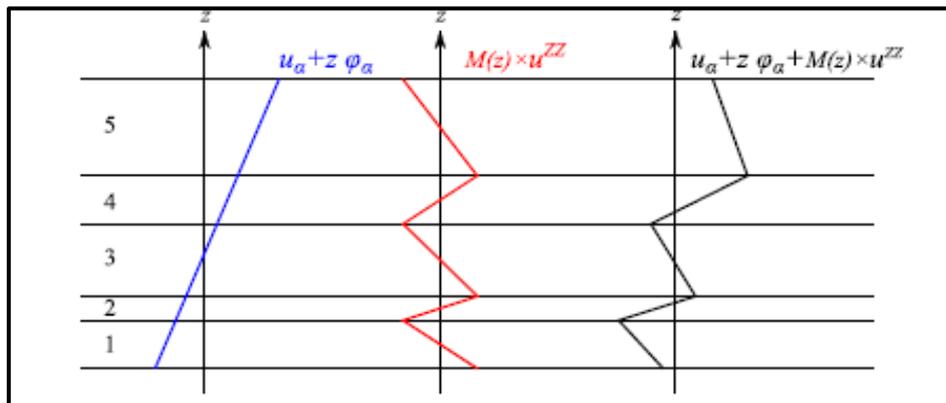


Figure II.13: Champ de déplacement dans le modèle zig-zag du premier ordre (Saeedi 2012)

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité (Nguyen 2004).

Par la suite, plusieurs auteurs ont proposé des contributions significatives sur le modèle zig-zag, ((Toledano et Murakami 1987), (Cho et Parmerter 1993), (Carrera

1995, 2004), (Di Sciuva et Gherlone 2003)). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (*Figure II.14*). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres (Tafla 2007).

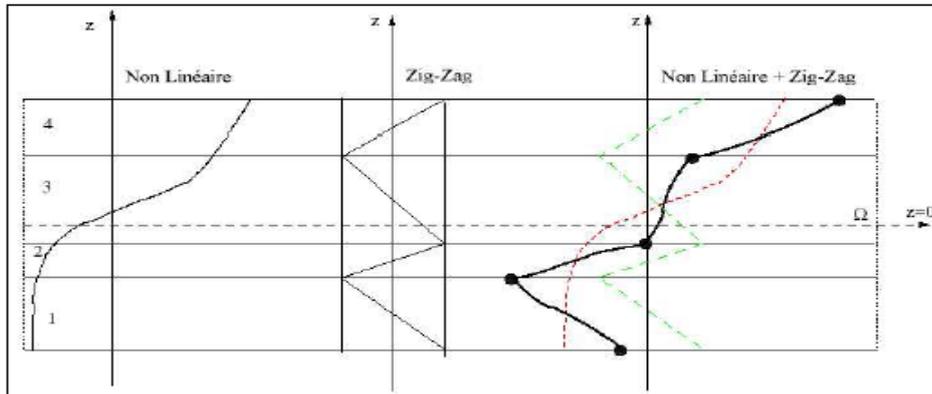


Figure II.14: Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Nguyen 2004)

b) Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs à travers l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques 2D couplés par des efforts d'interface, de manière que conditions de continuité aux interfaces sont assurées, avec un nombre d'équations qui dépend du nombre de couches de la plaque composite multicouche (Meksi 2018)

Plusieurs modèles basés sur l'approche des couches discrètes ont été proposés dans la littérature en adoptant des théories de premier ordre et d'ordre supérieur de la déformation en cisaillement. Par exemple, (Srinivas 1973), (Reddy 1987), (Tahani et Nosier 2003). Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

Des modèles en contraintes basés sur l'approche de la couche discrète pour l'analyse interlaminaires des structures multicouches ont été proposées dans la littérature, tel que, (Srinivas 1973) a présenté une théorie du stratifié discrète pour l'analyse des plaques multicouches, ou les composantes de déplacements plans sont considérées linéaires

pour chaque couche et le déplacement transversal est supposé constant sur l'épaisseur de la plaque. (Sun et Whitney 1973) ont utilisé la même idée dans une autre procédure pour l'obtention de la réponse dynamique des plaques stratifiées. Ils ont considéré la cinématique de la théorie FSDT pour chaque couche séparément.

Par la suite, (Ren 1986a) utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal quadratique par couche et les déplacements étant considérés cubiques par couche en assurant la continuité aux interfaces. (Kassapoglou et Lagace 1986, 1987) ont proposé un champ de contrainte construit sous forme d'un produit de fonctions des variables séparées par couche à partir des équations d'équilibre des forces et moments en supposant que les contraintes planes sont constantes à travers l'épaisseur, de plus dans (Yin 1994), les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires, les contraintes sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

(Cho et al. 1991) ont appliqué la théorie d'ordre supérieur en adoptant l'approche de la couche discrètes afin de déterminer les fréquences propres et les contraintes et les déformations relatives distribuées à travers l'épaisseur des plaques rectangulaires simplement appuyés où elle a pu satisfaire la continuité au niveau des interfaces entre les couches adjacentes.

II.2.2 Théorie d'élasticité tridimensionnelles (Élasticité 3D)

Dans les études du comportement des plaques épaisses, le challenge est de décrire de façon précise le champ de contraintes à travers l'épaisseur, surtout les contraintes de cisaillement évitant les omissions dues à l'application des théories classiques et mêmes de premier ordre. Malgré que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, mais il faut remarquer que la déformation normale transverse est négligée dont elle a un impact important sur la précision souhaitée. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc plus en plus nécessaire, les principales idées pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs des contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations.

Les équations différentielles régissent la flexion dans le cas tridimensionnelle sont tirées de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_1 = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (\text{II.14a})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_2 = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (\text{II.14b})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_3 = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\text{II.14c})$$

Pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, seules les méthodes numériques permettant d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que les conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives, offrent des avantages et des potentialités primordiales, ces outils, dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent une informatique puissante pour obtenir des résultats avec la précision désirée et satisfaisante (Bachiri 2019).

Elle intéresse à donner des résultats plus précis, utilisés notamment comme référence, cependant, la méthode de calcul 3D nécessite un coût cher de termes de temps de calcul et en capacité de mémoire pour le stockage de la base des données requise qui est plus importante que celle dans l'analyse bi-dimensionnelle, ((Pagano 1969, 1970), (Srinivas et Rao 1971), (Noor et Burton 1990), (Noor et al. 1994) et (Kant et Swaminathan 2002).

En raison de la complexité relative à la formulation 3-D, peu d'articles l'utilisant ont été publiés dans le domaine des vibrations libres.

II.2.3 Approches quasi-tridimensionnelles (quasi-3D)

L'approche quasi-tridimensionnelle est devenue une alternative importante en introduisant l'effet de déformation normale transverse, afin de définir un état de contraintes correct, ou en divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et en prenant en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque (stretching effect). De façon générale, toutes les contributions et les recherches sur cette approche basée sur la jonction d'une fonction non-linéaire de la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte

que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en $g(z)$, alors la cinématique devient (Belabed 2015):

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II.15a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II.15b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y) \quad (\text{II.15c})$$

Où :

u_0, v_0 : sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque

w_b, w_s : sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire, qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse

Avec :

$$g(z) = 1 - f'(z)$$

(Thai et Kim 2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), (Tounsi et al. 2013), (Thai et al. 2014), ont proposée à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D.

II.3 Vibration et réponse dynamique des plaques composites

Parmi les phénomènes qui agissent sur les structures pendant leur durée de vie le phénomène des vibrations. Le calcul des fréquences propres d'une plaque permet de déterminer la réponse intrinsèque à la structure, c'est à dire qui ne dépend pas des sollicitations extérieures, et qui définit le spectre des fréquences et déformées (modes) qu'il faudra éviter de solliciter si l'on veut que la structure n'ait pas un comportement critique. Lorsque le spectre des fréquences propres est connu on peut, en modifiant la géométrie ou la masse volumique des sections (Daikh 2018).

Donc, la compréhension vibratoire de plaque connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à de différents niveaux d'excitations importants.

Pour assurer le contrôle des vibrations dans les plaques stratifiées, la détermination des caractéristiques dynamiques des plaques composites est indispensable. Plusieurs travaux ont été réalisés pour étudier le comportement vibratoire des plaques, (Bert et Mayberry 1969), (Whitney 1970), (Whitney et Leissa 1970), (Noor 1973).

(Hearmon 1959) a appliqué la méthode Rayleigh-Ritz pour l'analyse des vibrations des plaques stratifiées orthotropes simplement appuyées ou encastree, en négligeant le cisaillement transverse, et les déformations d'inertie de rotation.

Des solutions d'élasticité 3D exacte son développé par (Srinivas et Rao 1970), (Srinivas et al. 1970), (Noor 1973) , pour étudier la vibration de plaques laminées isotropes, orthotropes et anisotropes simplement appuyée. (Reddy et Khdeir 1989) ont étudier le flambement et de vibration libre des plaques composites stratifiées croisées dans diverses conditions limite, ils ont développé des solutions exactes et des éléments finis utilisant les théories classiques, du premier et du troisième ordre.

Certains travaux de recherche ont été menés sur l'analyse des vibrations libres dans les plaques composites à l'aide de la FSDT. La stabilité dynamique de plaques rectangulaires équilibrées antisymétriques simplement appuyées, en tenant compte de l'effet de la déformation de cisaillement, est étudiée par (Bert et Birman 1987). La vibration libre des plaques composites stratifiées symétriques épaisses avec diverses conditions aux limites a été étudiée par (Liew 1996), en utilisant la théorie des plaques Reissner / Mindlin et la méthode P-RITZ .

(Topal et Uzman 2007) ont étudié, avec la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la vibration libre des plaques composites stratifiées simplement appuyées. L'étude paramétrique est faite pour déterminer l'effet du rapport largeur/épaisseur, du degré d'orthotrope, de l'orientation des fibres sur les fréquences propres adimensionnelle pour les plaques composites laminées.

(Thai et Choi 2013) ont proposé une simple FSDT pour analyser la vibration des plaques composites stratifiées. (Mantari et Ore 2015) ont également reformulé une FSDT simplifié pour l'étude dynamique des plaques composites stratifiées et sandwiches, cette théorie a un champ de

déplacement qui comprend des termes intégraux indéterminés et ne contient que quatre inconnues.

En se basant sur la solution généralisée de Levy et la théorie du deuxième ordre, (Khdeir et Reddy 1999) ont présenté l'analyse de comportement en vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques.

En utilisant la théorie par couche, (Cho et al. 1991) ont déterminé les fréquences propres et les contraintes et les déformations relatives distribuées à travers l'épaisseur des plaques rectangulaires simplement appuyées par la théorie d'ordre supérieur en adoptant l'approche de la couche discrètes. (Nosier et al. 1993) ont utilisé la théorie par couches (layerwise) de Reddy pour effectuer une analyse de vibration libre des plaques stratifiées. (Ferreira et al. 2005) ont effectués une analyse statique et de vibrations libre de plaques composites et sandwichs, à l'aide d'une théorie de déformation par couches layerwis et une discrétisation multiquadratique.

(Suganyadevi et Singh 2016) ont développé une théorie trigonométrique de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur par couche (Trigonometric Layer-wise Higher Order Shear Deformation Theory TLHSDT) pour l'analyse des vibrations libres des plaques composites stratifiées et sandwichs. Le modèle HSDT par couche (Layerwise Higher Order Shear Deformation Theory) est utilisée par (Lokesh et al. 2017) pour prédire les fréquences propres adimensionnelles des plaques composites laminées ; ou les déplacements de chaque couche sont exprimés en termes de fonctions HSDT. Les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur ont également été utilisées pour déterminer les fréquences propres des plaques composites laminées. (Shimpi et Ainapure 2004) ont amélioré la théorie de la déformation trigonométrique par cisaillement par couche de (Shimpi et Ghugal 2000), pour traiter la vibration libre des plaques stratifiées croisées à deux couches. En utilisant une théorie de la déformation en cisaillement des plaques du troisième ordre (TSDT), les fréquences propres des plaques composites laminées sont présentées par (Agaah et al. 2006) pour les différentes conditions aux limites, par ailleurs, la méthode des éléments finis est appliquée pour résoudre les équations et trouver les fréquences propres fondamentales.

(Mantari et al. 2011) ont effectué une étude statique et dynamique des plaques composites stratifiées, sandwichs et coques, en utilisant une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur. (Grover et al. 2013) ont développé la théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique inverse (IHSdT), qui est étendue leur travail antérieur, pour l'analyse la réponse de la vibration libre des plaques composites stratifiées et sandwichs.

(Mahi et al. 2015) ont analysé la flexion et la vibration libre des plaques composites isotropes, à gradient fonctionnel, sandwichs et stratifiées, en utilisant une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique.

(Sayyad et al. 2016) ont présentée une simple théorie trigonométrique de la déformation par cisaillement pour la flexion, le flambement et la vibration libre des plaques composites stratifiées, la théorie comporte quatre variables inconnues. La vibration libre des plaques stratifiées croisées est étudiée (Javed et al. 2018), avec une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

En utilisant les théories raffinées d'ordre supérieur, (Kant et Swaminathan 2001a; b) ont examiné la vibration libre des plaques composites stratifiées et sandwichs. (Swaminathan et Patil 2008) ont utilisé des formulations et des solutions analytiques pour l'analyse de la fréquence propre de plaques composites équilibrées et sandwichs antisymétriques, basées sur une théorie raffinée d'ordre supérieur avec 12 degrés de liberté qui prend en compte les effets du cisaillement transversal et des déformations normales transversales. (Adim et al. 2016) ont étudié le flambement et la vibration libre de plaques composites stratifiées à l'aide d'une simple théorie raffinée de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

(Ben Henni et al. 2018) ont présenté le comportement en vibration libre de plaques composites laminées orthotropes en utilisant une théorie raffinée de la déformation par cisaillement. Dans ces modèles, la distribution des contraintes de cisaillement transversales est considérée comme parabolique satisfaisant à la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques sans utiliser de facteurs de correction du cisaillement.

(Adhikari et Singh 2018) ont proposé une nouvelle théorie trigonométrique inverse d'ordre supérieur quasi 3-D, pour étudier la réponse dynamique de la plaque. Analyse des vibrations libres des plaques stratifiées et sandwichs à l'aide d'une théorie améliorée du zig-zag (improved zig-zag theory ZIGT) est étudiée par (Ren et Chen 2011)

En se basant sur la méthode des éléments finis, (Belarbi et al. 2017) ont développé un nouveau modèle d'éléments finis par couches d'ordre supérieur, pour étudier le comportement de vibration libre des plaques composites stratifiées et sandwichs. Dans ce modèle, un champ de déplacement du premier ordre est supposé pour les peaux et un champ de déplacement d'ordre supérieur pour l'âme.

Un modèle simple d'éléments finis isoparamétrique basé sur la théorie d'ordre supérieur est utilisée par (Mallikarjuna et Kant 1989), pour prédire les fréquences propres des plaques stratifiées et sandwichs symétriques. Les fréquences propres des plaques composites sandwichs sont déterminées par (Nayak et al. 2002, 2004), utilisant la méthode des éléments finis basées sur la théorie d'ordre supérieur de Reddy. Analyse dynamique des plaques composites stratifiées à l'aide d'un modèle d'éléments finis FE mixtes par l'approche tridimensionnelle a été traitée par (Desai et al. 2003).

(Viswanathan et al. 2016) ont étendu les travaux de (Viswanathan et Lee 2007), y compris la théorie de la déformation de cisaillement, utilisant l'approximation de spline, pour traiter la vibration libre des plaques stratifiées croisées d'épaisseur variable,

(Rastogi et al. 2019) ont présenté une approche tridimensionnelle par éléments finis d'analyse permettant de déterminer les fréquences propres des plaques composites stratifiées isotropes.

II.4 Conclusion

Un rappel des différentes théories des plaques a été donné dans ce chapitre à savoir les théories qui se basent sur la théorie tridimensionnelle d'élasticité (solution exacte 3D), bidimensionnelle (2D) et la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur. Ensuite nous avons présenté les travaux effectués par plusieurs chercheurs pour étudier le comportement statique et dynamique des plaques stratifiées.

A la base de ce qui a été montré dans ce chapitre, le chapitre trois sera consacré à présenter une simple théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur HSDT pour l'analyse la vibration libre des plaques composites stratifiées et sandwichs.

Chapitre III

***Analyse de vibration libre des plaques
composites stratifiées équilibrées et
sandwichs à l'âme souple***

Chapitre III: Analyse de vibration libre des plaques composites stratifiées équilibrées et sandwichs à l'âme souple

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, une formulation analytique basée sur une simple théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur HSDT est présentée, cette théorie ne possède que quatre variables, tandis que cinq ou plus dans les autres théories d'ordre supérieur, grâce à la formulation par l'intégrale indéterminée par la solution de Navier introduit dans le champ du déplacement.

Cette théorie sera exploitée pour l'analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées équilibrées et des plaques sandwichs.

Les équations du mouvement sont dérivées selon le principe des travaux virtuels, et l'approche de Navier est adoptée pour dériver des solutions analytiques. Les fréquences propres des plaques stratifiées et sandwichs sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres.

III.2 Formulation mathématique

Une plaque rectangulaire dont la longueur, la largeur et l'épaisseur uniforme sont respectivement égales à « a , b et h » est représentée dans la **figure III.1**. La plaque est composée d'un nombre " N " de couches orthotropes parfaitement liées entre elles. Chaque couche de plaque est constituée de matériaux orthotropes linéairement élastiques. Les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) sont utilisées pour décrire les déformations infinitésimales d'une plaque occupant la superficie $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$ dans la configuration de référence sans contrainte. La direction z est prise positive dans le sens vers le bas.

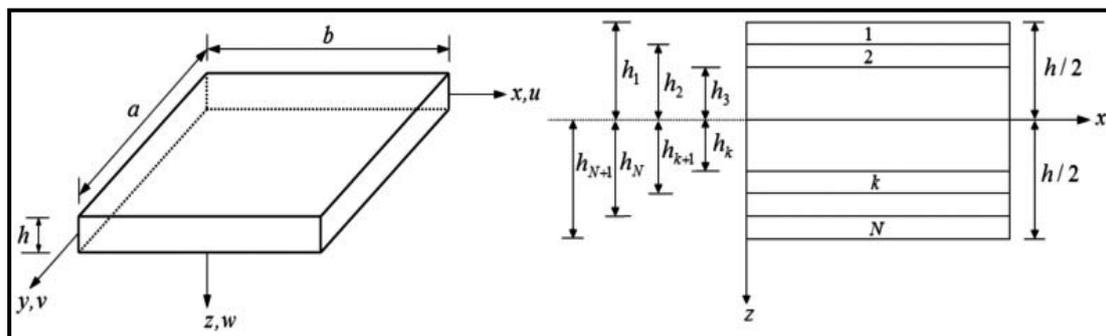


Figure III.1: Géométrie de la plaque et système de numérotation des couches

Dans ce travail, des suppositions simplificatrices supplémentaires sont faites sur la HSST conventionnelle afin de réduire le nombre d'inconnues. Le champ de déplacement de la HSST conventionnelle est donné par :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y, t) \quad (\text{III.1a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y, t) \quad (\text{III.1b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{III.1c})$$

Où u_0, v_0, w_0, φ_x et φ_y sont les cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque, $f(z)$ désigne la fonction de forme représentant la variation des déformations transversales de cisaillement et des contraintes dans l'épaisseur. En considérant que :

$$\varphi_x = \int \theta(x, y, t) dx \quad \text{et} \quad \varphi_y = \int \theta(x, y, t) dy,$$

Le champ de déplacement du présent modèle peut être exprimé sous une forme plus simple comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (\text{III.2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (\text{III.2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{III.2c})$$

Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par la méthode de Navier et le champ de déplacement peut être réécrit comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.3a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.3b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (\text{III.3c})$$

Où les coefficients A', B', k_1 et k_2 sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2, \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad (\text{III.4})$$

Il est clair que le champ de déplacement de l'équation (III.3) ne tien en compte que quatre inconnues u_0, v_0, w_0 et θ . Où la fonction de forme $f(z)$ est définie par :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.5})$$

La fonction de cisaillement est présentée dans cette théorie pour satisfaire des contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La fonction de cisaillement est obtenue comme suit :

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad \text{Où } g(z)(z = \pm h/2) = 0 \quad (\text{III.6})$$

Les déformations non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation (III.3) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.7a})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.7b})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}$$

Pour une plaque stratifiée orthotrope, les relations constitutives de chaque couche peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^k \quad (\text{III.8})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de la contrainte et de la déformation, respectivement. \bar{Q}_{ij} sont les constantes de matériau transformées et sont données par :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11}^k &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4 \\
 \bar{Q}_{12}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{16}^k &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\
 \bar{Q}_{22}^k &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4 \\
 \bar{Q}_{26}^k &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 \\
 \bar{Q}_{66}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{44}^k &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2, \quad \bar{Q}_{45}^k = (Q_{55} - Q_{44})sc, \quad \bar{Q}_{55}^k = Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2
 \end{aligned} \tag{III.9}$$

Où $c = \cos \theta^k$, $s = \sin \theta^k$ et Q_{ij} sont les coefficients de rigidité indiqués ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{66} &= G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}
 \end{aligned} \tag{III.10}$$

Où E_i, G_{ij} et ν_{ij} sont les modules de Young, les modules de cisaillement et le coefficient de Poisson, respectivement.

III.3 Équations du mouvement

Afin de dériver les équations du mouvement, le principe du travail virtuel est appliqué :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \tag{III.11}$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δV est variation du travail effectué par des charges externes et δK est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$\delta U = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dAdz \tag{III.12}$$

En remplaçant les équations (III.7) et (III.8) dans l'équation (III.12) et par intégration à travers l'épaisseur de la plaque, la variation de l'énergie de déformation peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \delta U = \int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right. \\
 \left. + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} + k_2 B' M_y^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_1 A' S_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B' S_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right\} dA
 \end{aligned} \tag{III.13}$$

Où A est la surface supérieure de la plaque, et les résultantes des contraintes N, M et S sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (III.14)$$

En utilisant l'équation (III.8) dans l'équation (III.14), les résultantes des forces de la plaque peuvent être exprimées en fonction de déformation :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \quad (III.15a)$$

Où

$$\begin{aligned} N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^{Tr}, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^{Tr}, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^{Tr}, \\ \varepsilon &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^{Tr}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^{Tr}, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^{Tr}, \\ S &= \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^{Tr}, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^{Tr} \end{aligned} \quad (III.15b)$$

Et les composantes de la rigidité sont données comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (III.16a)$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} g^2(z) dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (III.16b)$$

La variation du travail dû aux charges transversales peut être écrit comme :

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA \quad (III.17)$$

Et la variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \delta K &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \int_A \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dA dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_A \left\{ I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + J_1 \left[k_1 A' \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + k_2 B' \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right] \\ &\quad \left. - J_2 \left[k_1 A' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + k_2 B' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right] \right\} dA \\ &\quad + K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) dA \end{aligned} \quad (III.18)$$

Où la convention le point-exposant représente la dérivée par rapport à la variable de temps (t) ; $\rho(z)$ est la masse volumique et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties massiques exprimées par :

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (\text{III.19})$$

En introduisant les équations (III.13), (III.17) et (III.18) dans l'équation (III.11), intégrant par parties par rapport à x , y , et t , et en fixant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$ à zéro, individuellement. On obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\ & + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\ \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ & + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

En substituant l'équation (III.15) dans l'équation (III.20), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 3B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k_1 B_{16}^s + k_2 B_{26}^s) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ & + (k_1 A' + k_2 B') B_{16}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.21a})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : \quad & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} + (k_1 B_{16}^s + k_2 B_{26}^s) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ & + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') B_{26}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.21b})$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
 & - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(k_1 D_{12}^s + k_2 D_{26}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') D_{16}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^3 \partial y} + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 & + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') D_{26}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x \partial y^3} + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + q \\
 & = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \quad (III.21c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \theta : & -(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial u_0}{\partial x} - (k_1 B_{16}^s + k_2 B_{26}^s) \frac{\partial u_0}{\partial y} - (k_1 A' + k_2 B') B_{16}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & - (k_1 B_{16}^s + k_2 B_{26}^s) \frac{\partial v_0}{\partial x} - (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial v_0}{\partial y} - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - (k_1 A' + k_2 B') B_{26}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2(k_1 D_{16}^s + k_2 D_{26}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + (k_1 A' + k_2 B') D_{26}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
 & + (k_1 A' + k_2 B') D_{16}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - (k_1^2 H_{11}^s - k_2^2 H_{22}^s - 2k_1 k_2 H_{12}^s) \theta \\
 & - (k_1^2 A' H_{16}^s + k_2^2 B' H_{26}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - k_1 k_2 (B' H_{16}^s + A' H_{26}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - (k_1^2 A' + k_1 k_2 B') H_{16}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\
 & - (k_2^2 B' + k_1 k_2 A') H_{26}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - (k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 + 2k_1 k_2 A' B') H_{66}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + k_1^2 A'^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 & + k_2^2 B'^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2k_1 k_2 A' B' A_{45}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \quad (III.21d)
 \end{aligned}$$

III.4 Solutions analytiques pour plaques composites stratifiées antisymétriques

La méthode de Navier est utilisée pour obtenir les solutions des équations différentielles partielles de l'équation (III.21) en forme réduite pour des plaques composites stratifiées antisymétriques simplement appuyées. Deux types différents sont pris en considération dans cette étude, le stratifié croisé $[0^\circ/90^\circ]_n$ et équilibré $[\theta^\circ/-\theta^\circ]_n$. Pour le premier type, les composantes de rigidité suivantes sont égales à zéro :

$$\begin{aligned}
 A_{16} = A_{26} = B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} = B_{12}^s = B_{16}^s = B_{26}^s = B_{66}^s = D_{16} = D_{26} \\
 = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = A_{45}^s = 0 \quad (III.22)
 \end{aligned}$$

Sur la base de la solution de Navier, les développements suivantes des déplacements généralisés sont pris pour satisfaire automatiquement les conditions aux limites des plaques composites stratifiées simplement appuyées.

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Pour le deuxième type " équilibré ", les composantes de rigidité suivantes sont égales à zéro :

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = B_{11}^s = B_{12}^s = B_{22}^s = B_{66}^s = D_{16} = D_{26} \\ = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = A_{45}^s = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Et les variables de déplacement qui satisfont automatiquement les conditions aux limites peuvent être exprimées sous les formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Où $\alpha = m\pi/a$ et $\beta = n\pi/b$, ω est la fréquence de vibration libre de la plaque, $\sqrt{i} = -1$ l'unité imaginaire. En substituant l'équation (III.23) dans l'équation (III.21) et en collectant les déplacements et l'accélération pour toutes les valeurs de m et n , on obtient le problème suivant :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Où $[S_{ij}]$ et $[M_{ij}]$ sont des éléments de matrice de rigidité et de matrice de masse, respectivement. Et peut être défini pour les stratifiés antisymétriques à couches croisées et équilibrées comme suit :

a. Pour les plaques stratifiées à couches croisées antisymétriques

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, & S_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), & S_{13} &= -\alpha^3 B_{11}, & S_{14} &= -k_1 \alpha B_{11}^s, \\
S_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, & S_{23} &= -\beta^3 B_{22}, & S_{24} &= -k_2 \beta B_{22}^s, \\
S_{33} &= \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}), \\
S_{34} &= k_1 \alpha^2 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + k_2 \beta^2 D_{22}^s - 2(k_1 A' + k_2 B') \alpha^2 \beta^2 D_{66}^s, \\
S_{44} &= k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + (k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 + 2k_1 k_2 A' B') \alpha^2 \beta^2 H_{66}^s \\
&\quad + k_2^2 B'^2 \beta^2 A_{44}^s + k_1^2 A'^2 \alpha^2 A_{55}^s
\end{aligned} \tag{III.27}$$

b. Pour les plaques stratifiées équilibrées antisymétriques

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, & S_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), & S_{13} &= -3\alpha^2 \beta B_{16} - \beta^3 B_{26}, \\
S_{14} &= -k_1 \beta B_{16}^s - k_2 \beta B_{26}^s + (k_1 A' + k_2 B') \alpha^2 \beta B_{16}^s, \\
S_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, & S_{23} &= -3\alpha \beta^2 B_{26} - \alpha^3 B_{16}, \\
S_{24} &= -k_1 \alpha B_{16}^s - k_2 \alpha B_{26}^s + (k_1 A' + k_2 B') \alpha \beta^2 B_{26}^s, \\
S_{33} &= \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}), \\
S_{34} &= k_1 \alpha^2 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + k_2 \beta^2 D_{22}^s - 2(k_1 A' + k_2 B') \alpha^2 \beta^2 D_{66}^s, \\
S_{44} &= k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + (k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 + 2k_1 k_2 A' B') \alpha^2 \beta^2 H_{66}^s \\
&\quad + k_2^2 B'^2 \beta^2 A_{44}^s + k_1^2 A'^2 \alpha^2 A_{55}^s
\end{aligned} \tag{III.28}$$

Les éléments de matrice de masse $[M]$ pour les plaques stratifiées à couches croisées et équilibrées :

$$\begin{aligned}
M_{11} &= I_0, & M_{12} &= 0, & M_{13} &= 0, & M_{14} &= 0, \\
M_{22} &= I_0, & M_{23} &= 0, & M_{24} &= 0, \\
M_{33} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), & M_{34} &= -(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) J_2, \\
M_{44} &= (k_1^2 A'^2 \alpha^2 + k_2^2 B'^2 \beta^2) K_2
\end{aligned} \tag{III.29}$$

III.1 Conclusion

Pour l'analyse dynamique des plaques composites stratifiées antisymétriques et des plaques sandwichs à âme souple, une simple théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables a été utilisée et développé dans ce chapitre, pour le calcul des fréquences de vibration libre de ces plaques. Le principal avantage de la théorie considéré réside dans la prise en compte de l'effet de la déformation de cisaillement transverse. Employant un champ de déplacement de variable intégrale indéterminé à travers l'épaisseur de la plaque, l'addition du terme d'intégrale dans le champ de déplacement mène à une réduction des nombres d'inconnus en quatre, au lieu de cinq ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement.

Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel et résolues en utilisant la solution de Navier. Des solutions analytiques sont déduites pour déterminer les fréquences propres des plaques simplement appuyées.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

Chapitre IV

Résultats et discussions

Chapitre IV: Résultats et discussions

IV.1 Introduction

L'intérêt principal de cette section, est de présenter l'évaluation et la validation de la théorie (à quatre variables) que nous avons développé dans le chapitre précédent, qui prend en considération l'effet de déformation transversale de cisaillement, dans l'investigation des fréquences propres des plaques stratifiées et sandwichs simplement appuyées. Divers exemples numériques sont examinés pour démontrer l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie. Les résultats seront confrontés à ceux de travaux publiés dans littérature permettant ainsi la validation des résultats obtenus

Des interprétations seront présentées et discutées. Ce chapitre contient également une étude paramétrique permettant de mettre l'accent sur quelques paramètres influant sur le comportement dynamique des plaques stratifiées et sandwichs, tels que le rapport géométrique de la plaque (a/h), du rapport modulaire (E_1/E_2), de la séquence d'empilement, du nombre et de l'angle d'orientation des couches.

IV.2 Résultats numériques et discussions

Divers exemples numériques sont résolus pour vérifier l'exactitude du modèle mathématique proposé dans cette théorie pour la prédiction de la réponse dynamique des composites stratifiés multicouches antisymétriques et des plaques sandwichs, les solutions de forme réduite sont obtenues à l'aide de la solution Navier pour l'analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées à couches croisées et équilibrées simplement appuyées sur tous leurs bords.

La validité de la présente théorie est démontrée par la comparaison avec les résultats publiés précédemment.

A cet effet, des ensembles de caractéristiques de matériaux appropriés dans ces études numériques seront utilisés comme suit :

A. Composite stratifié

$$\text{Matériau 1 : } E_1 / E_2 = \text{ouvert}, G_{12} / E_2 = G_{13} / E_2 = 0.6, G_{23} / E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$$

$$\text{Matériau 2 : } E_1 / E_2 = 40, G_{12} / E_2 = G_{13} / E_2 = 0.6, G_{23} / E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$$

Matériau 3 : $E_1 = 276GPa$, $E_2 = E_3 = 6.9GPa$, $G_{12} = G_{13} = 4.14GPa$,
 $G_{23} = 3.45GPa$, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho = 1578kg/m^3$

Matériau 4 : $E_1/E_2 = 15$, $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$, $G_{23}/E_2 = 0.35$, $\nu_{12} = 0.3$

B. Sandwich

Matériau 5 : $E = 73GPa$, $\nu_{12} = 0.3$, $\rho = 2800kg/m^3$, (Alliage d'aluminium pour les peaux)

Matériau 6 : $E = 180GPa$, $\nu_{12} = 0.37$, $\rho = 50kg/m^3$, (Matériau PVC pour noyau en mousse)

Matériau 7 : $E_1 = 132.38GPa$, $E_2 = E_3 = 10.756GPa$, $G_{12} = G_{13} = 5.6537GPa$,
 $G_{23} = 3.603GPa$, $\nu_{12} = 0.24$, $\rho = 1600kg/m^3$

Matériau 8 : $E_1 = 131.0GPa$, $E_2 = E_3 = 10.34GPa$, $G_{12} = G_{13} = 6.895GPa$,
 $G_{23} = 6.205GPa$, $\nu_{12} = 0.22$, $\rho = 1627kg/m^3$

Matériau 9 : $E_1 = E_2 = E_3 = 00.689GPa$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 00.345GPa$,
 $\nu_{12} = 0$, $\rho = 97kg/m^3$

La forme adimensionnelle suivante est utilisée lors de la présentation des résultats numériques des fréquences propres :

$$\bar{\omega} = \omega(b^2/h)\sqrt{(\rho/E_2)} \quad (IV.1)$$

IV.2.1 Analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées antisymétriques

a) Exemple 1

Analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées à couches croisées (0°/90°)_n

Dans cet exemple, on a étudié la vibration libre des plaques carrées stratifiées croisées antisymétriques en utilisant l'équation (III.26) en l'absence de charge externe.

Le **tableau IV.1** montre les fréquences propres adimensionnelle des plaques composites stratifiées multicouches (0°/90°)_n, en utilisant des différentes théories avec un nombre de couches variant de 2 à 10. Le rapport modulaire E_1/E_2 varie de 3 à 40. Toutes les couches ont la même épaisseur et sont composées de **matériau 1**. Les résultats sont comparés à ceux rapportée par (Mindlin 1951), (Reddy 1984), (Thai et Kim 2010) (RPT2), (Sayyad et Ghugal 2015, 2017) et à la solution d'élasticité exacte donnée par (Noor et Burton 1990).

On remarque que la présente approche fournit des résultats précis par rapport aux solutions d'élasticité tridimensionnelle données par (Noor et Burton 1990) et aux études précédentes basées sur les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Tableau IV.1: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée multicouches antisymétrique $(0/90)_n$ ($a/h=5$, matériau 1)

N	Les couches	Théories	E_1/E_2				
			3	10	20	30	40
2	$(0/90)_1$	Présente	6.2188	6.9964	7.8379	8.5316	9.1236
		(Sayyad et Ghugal 2017)	6.2190	6.9967	7.8385	8.5320	9.1246
		(Thai et Kim 2010) (RPT1)	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
		(Thai et Kim 2010) (RPT2)	6.2167	6.9836	7.8011	8.4646	9.0227
		(Sayyad et Ghugal 2015)	6.2417	7.0150	7.8537	8.5452	9.1357
		(Reddy 1984)	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
		(Mindlin 1951)	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8383
		CPT ^(a)	6.7705	7.7420	8.8555	9.8337	10.721
(Exact 1990)	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625		
4	$(0/90)_2$	Présente	6.5012	8.1929	9.6205	10.5268	11.1628
		(Sayyad et Ghugal 2017)	6.5012	8.1929	9.6205	10.5268	11.1628
		(Thai et Kim 2010) (RPT1)	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
		(Thai et Kim 2010) (RPT2)	6.5008	8.1949	9.6252	10.5334	11.1705
		(Sayyad et Ghugal 2015)	6.5255	8.2177	9.6437	10.5477	11.1815
		(Reddy 1984)	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
		(Mindlin 1951)	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
		CPT ^(a)	7.1690	9.7192	12.476	14.7250	16.6725
(Exact 1990)	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6789		
6	$(0/90)_3$	Présente	6.5567	8.4066	9.9210	10.8603	11.5102
		(Sayyad et Ghugal 2017)	6.5567	8.4065	9.9210	10.8603	11.5100
		(Thai et Kim 2010) (RPT1)	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
		(Thai et Kim 2010) (RPT2)	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5009
		(Sayyad et Ghugal 2015)	6.5815	8.4305	9.9407	10.855	11.5025
		(Reddy 1984)	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
		(Mindlin 1951)	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
		CPT ^(a)	7.2415	10.053	13.058	15.4907	17.5897
(Exact 1990)	6.6100	8.4143	9.8398	10.6958	11.2728		
10	$(0/90)_5$	Présente	6.5854	8.5156	10.0740	11.0309	11.6893
		(Sayyad et Ghugal 2017)	6.5854	8.5156	10.0740	11.0309	11.6893
		(Thai et Kim 2010) (RPT1)	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
		(Thai et Kim 2010) (RPT2)	6.5842	8.5126	10.0671	11.0186	11.6705
		(Sayyad et Ghugal 2015)	6.6100	8.5397	10.0957	11.0500	11.6855
		(Reddy 1984)	6.5842	8.5126	10.0614	11.0197	11.6730
		(Mindlin 1951)	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444
		CPT ^(a)	7.2415	10.053	13.0585	15.4907	17.5897
(Exact 1990)	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245		

^(a) Les résultats sont extraits de la référence (Sayyad et Ghugal 2017)

Le **tableau IV.2** illustre une comparaison des fréquences propres adimensionnelles des plaques composites à stratification croisée antisymétriques pour divers rapports de longueur/épaisseur a/h , variant de 5 à 100 (correspondant à des plaques épaisses à minces), et la plaque se compose du **matériau 2**. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions rapportée par (Sayyad et Ghugal 2015, 2017), (Thai et Kim 2010) et (Reddy 1984).

Tableau IV.2: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée multicouches antisymétrique $(0/90)_n$ (**matériau 2**)

N	Les couches	Théories	a/h				
			5	10	20	50	100
2	$(0/90)_1$	Présente	9.1236	10.5811	11.1089	11.2757	11.3003
		(Sayyad et Ghugal 2017)	9.1246	10.5815	11.1090	11.2757	11.3003
		(Thai et Kim 2010) (RPT1)	–	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
		(Thai et Kim 2010) (RPT2)	–	10.5480	11.0997	11.2742	11.2999
		(Sayyad et Ghugal 2015)	–	10.5930	11.1320	11.3000	11.3000
		(Reddy 1984)	9.0871	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
		(Mindlin 1951)	8.8383	10.4731	11.0779	11.2705	11.2990
CPT ^(a)	10.721	11.1537	11.2693	11.3023	11.3070		
4	$(0/90)_2$	Présente	11.1628	14.8376	16.5700	17.1843	17.2782
		(Sayyad et Ghugal 2017)	11.1628	14.8376	16.5700	17.1842	17.2782
		(Thai et Kim 2010) (RPT1)	–	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
		(Thai et Kim 2010) (RPT2)	–	14.8433	16.5719	17.1847	17.2783
		(Sayyad et Ghugal 2015)	–	14.8570	16.6080	17.2250	17.3000
		(Reddy 1984)	11.1716	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
		(Mindlin 1951)	11.2708	14.9214	16.6008	17.1899	17.2796
CPT ^(a)	16.6725	17.1448	17.2682	17.3032	17.3082		
6	$(0/90)_3$	Présente	11.5102	15.4633	17.3768	18.0643	18.1698
		(Sayyad et Ghugal 2017)	11.5100	15.4633	17.3768	18.0642	18.1698
		(Thai et Kim 2010) (RPT1)	–	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
		(Thai et Kim 2010) (RPT2)	–	15.4627	17.3769	18.0643	18.1698
		(Sayyad et Ghugal 2015)	–	15.4830	17.4160	18.1250	18.2000
		(Reddy 1984)	11.5012	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
		(Mindlin 1951)	11.5264	15.5010	17.3926	18.0673	18.1706
CPT ^(a)	17.5897	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038		
10	$(0/90)_5$	Présente	11.6893	15.7739	17.7751	18.4985	18.6097
		(Sayyad et Ghugal 2017)	11.6893	15.7739	17.7751	18.4985	18.6097
		(Thai et Kim 2010) (RPT1)	–	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
		(Thai et Kim 2010) (RPT2)	–	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
		(Sayyad et Ghugal 2015)	–	15.7930	17.8160	18.5500	18.6000
		(Reddy 1984)	11.6730	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
		(Mindlin 1951)	11.6444	15.7790	17.7800	18.4995	18.6100
CPT ^(a)	17.5897	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038		

^(a) Les résultats sont extraits de la référence (Sayyad et Ghugal 2017)

Cette comparaison montre clairement que les résultats calculés sont en très bon accord avec celles calculés par (Sayyad et Ghugal 2015, 2017), (Thai et Kim 2010) et (Reddy 1984). Alors que la théorie classique des plaques (CPT) surestime les fréquences propres par rapport aux résultats des autres théories et cela est dû à la négligence des déformations de cisaillements transversaux et elle fournit des résultats acceptables que pour les plaques laminées minces.

b) Exemple 2

Analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées équilibrées (45°/-45°)

On considère dans l'exemple suivant, des plaques carrées stratifiées équilibrées à deux couches antisymétriques (45°/-45°). Le rapport modulaire E_1 / E_2 varie de 3 à 40. Toutes les couches sont de même épaisseur et constituées du *matériau 1*. Le rapport longueur/épaisseur a/h est de 4 à 100.

Les résultats numériques des fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) sont énumérés dans le *tableau IV.3*. On observe que la présente théorie a donné des résultats précis par rapport à ceux de (Sayyad et Ghugal 2017), (Thai et Kim 2010), (Kant et Manjunatha 1988), (Pandya et Kant 1988) et (Reddy 1984).

On peut constater à nouveau que les résultats calculés sont en très bon accord avec ceux calculés par d'autres théories de déformation de cisaillement pour différents rapports d'épaisseur des plaques composites stratifiées épaisses à minces.

Les fréquences propres adimensionnelles des plaques carrées stratifiées équilibrées antisymétriques avec deux couches constituées du *matériau 2* et pour les deux angles d'orientation des fibres ($\theta = 15^\circ$) et ($\theta = 30^\circ$) sont données dans le *tableau IV.4* et comparées à d'autres théories citées précédemment dans la littérature.

Il est évident, vu aux résultats obtenus, que les calculs actuels sont en bonne concordance avec les résultats analytiques indiqués par (Sayyad et Ghugal 2017) et (Senthilnathan et al. 1988). En plus, on peut remarquer que l'augmentation du rapport d'épaisseur a un effet significatif sur l'augmentation des fréquences propres.

Tableau IV.3: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique ($45^\circ/-45^\circ$) (*matériau 1*)

E_1 / E_2	Théories	a/h				
		4	10	20	50	100
3	Présente	6.0900	7.0747	7.2706	7.3293	7.3378
	(Sayyad et Ghugal 2017)	6.0902	7.0747	7.2706	7.3293	7.3382
	(Thai et Kim 2010) (RPT1)	6.0861	7.0739	7.2705	7.3293	7.3378
	(Thai et Kim 2010) (RPT2)	6.0852	7.0738	7.2704	7.3293	7.3378
	(Kant et Manjunatha 1988)	6.1223	7.1056	7.3001	7.3583	7.3666
	(Pandya et Kant 1988)	6.0803	7.0728	7.2702	7.3295	7.3383
	(Reddy 1984)	6.0861	7.0739	7.2705	7.3293	7.3378
	(Mindlin 1951)	6.0665	7.0700	7.2694	7.3291	7.3378
	CPT ^(a)	6.9251	7.2699	7.3228	7.3378	7.3400
10	Présente	7.3670	8.9709	9.3279	9.4379	9.4541
	(Sayyad et Ghugal 2017)	7.3676	8.9711	9.3279	9.4379	9.4541
	(Thai et Kim 2010) (RPT1)	7.3470	8.9660	9.3266	9.4377	9.4540
	(Thai et Kim 2010) (RPT2)	7.3259	8.9621	9.3255	9.4376	9.4540
	(Kant et Manjunatha 1988)	7.2647	8.9893	9.3265	9.4377	9.5123
	(Pandya et Kant 1988)	7.2159	8.9328	9.3174	9.4363	9.4540
	(Reddy 1984)	7.3470	8.966	9.3266	9.4377	9.4540
	(Mindlin 1951)	7.2169	8.9324	9.3173	9.4362	9.4537
	CPT ^(a)	8.7950	9.3444	9.4304	9.4548	9.4583
20	Présente	8.4595	10.728	11.281	11.456	11.482
	(Sayyad et Ghugal 2017)	8.4606	10.728	11.281	11.456	11.482
	(Thai et Kim 2010) (RPT1)	8.4152	10.715	11.277	11.455	11.481
	(Thai et Kim 2010) (RPT2)	8.3396	10.698	11.272	11.454	11.481
	(Kant et Manjunatha 1988)	8.049	10.641	11.298	11.507	11.539
	(Pandya et Kant 1988)	8.0074	10.588	11.240	11.449	11.480
	(Reddy 1984)	8.4152	10.715	11.277	11.455	11.482
	(Mindlin 1951)	8.1185	10.627	11.252	11.451	11.481
	CPT ^(a)	10.631	11.341	11.453	11.484	11.489
30	Présente	9.2434	12.118	12.872	13.116	13.153
	(Sayyad et Ghugal 2017)	9.2448	12.119	12.872	13.116	13.153
	(Thai et Kim 2010) (RPT1)	9.1752	12.097	12.866	13.115	13.152
	(Thai et Kim 2010) (RPT2)	9.0341	12.062	12.856	13.113	13.152
	(Kant et Manjunatha 1988)	8.5212	11.893	12.842	13.157	13.204
	(Pandya et Kant 1988)	8.4847	11.844	12.789	13.102	13.149
	(Reddy 1984)	9.1752	12.097	12.866	13.115	13.152
	(Mindlin 1951)	8.7213	11.946	12.821	13.108	13.151
	CPT ^(a)	12.159	12.989	13.120	13.158	13.163
40	Présente	9.8501	13.293	14.255	14.574	14.622
	(Sayyad et Ghugal 2017)	9.8516	13.294	14.256	14.574	14.622
	(Thai et Kim 2010) (RPT1)	9.7594	13.263	14.246	14.572	14.621
	(Thai et Kim 2010) (RPT2)	9.5498	13.207	14.230	14.569	14.620
	(Kant et Manjunatha 1988)	8.8426	12.912	14.171	14.601	14.667
	(Pandya et Kant 1988)	8.8096	12.867	14.122	14.550	14.615
	(Reddy 1984)	9.7594	13.263	14.246	14.572	14.621
	(Mindlin 1951)	9.1609	13.044	14.179	14.561	14.618
	CPT ^(a)	13.506	14.439	14.587	14.63	14.636

^(a) Les résultats sont extraits de la référence (Sayyad et Ghugal 2017)

Tableau IV.4: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique ($\theta/-\theta$) (*matériau 2*)

θ	Théories	a/h				
		4	10	20	50	100
15°	Présente	9.4639	13.1956	14.3222	14.7059	14.7638
	(Sayyad et Ghugal 2017)	9.5421	13.4284	14.6293	15.0420	15.1044
	(Senthilnathan et al. 1988)	9.4119	13.1793	14.3173	14.7050	14.6745
	(Kant et Manjunatha 1988)	8.5142	12.7600	14.2324	14.7629	14.8445
	(Pandya et Kant 1988)	8.4789	12.6928	14.1507	14.6754	14.7563
	(Reddy 1984)	8.8117	12.8126	14.1881	14.6819	14.7577
	(Mindlin 1951)	8.4662	12.6802	14.1457	14.6745	14.7557
30°	Présente	9.6358	12.9540	13.8744	14.1783	14.2238
	(Sayyad et Ghugal 2017)	9.6610	13.0383	13.9852	14.2992	14.3461
	(Senthilnathan et al. 1988)	9.5564	12.9283	13.8667	14.1770	14.2235
	(Kant et Manjunatha 1988)	8.6739	12.5935	13.8010	14.2137	14.2763
	(Pandya et Kant 1988)	8.6393	12.5442	13.5452	14.1562	14.2184
	(Reddy 1984)	9.4455	12.8730	13.8487	14.1738	14.2225
	(Mindlin 1951)	8.9169	12.6807	13.7896	14.1637	14.2198

Pour en savoir plus, le **tableau IV.5** illustre une comparaison des fréquences propres pour des plaques carrées stratifiées équilibrées antisymétriques simplement appuyées avec deux couches de *matériau 1* pour des différentes valeurs du rapport longueur/épaisseur ($a/h = 5, 10, 20, 50, 100$), pour les différentes valeurs du rapport de modules d'Young ($E_1/E_2 = 3, 10, 20, 30, 40$) et de l'angle d'orientation des fibres ($\theta = 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ$).

D'après l'investigation du **tableau IV.5**, on peut observer que l'augmentation du rapport modulaire conduit à une augmentation des fréquences propres adimensionnelles et cela est dû à l'augmentation de la rigidité des plaques composites stratifiés équilibrés antisymétriques.

Tableau IV.5: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique ($\theta/-\theta$) (*matériau 1*)

θ	a/h	Théories	E_1/E_2					
			3	10	20	30	40	
15°	4	Présente	6.1752	7.5093	8.4440	9.0274	9.4639	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	6.5130	7.7721	8.6007	9.1337	9.5421	
	10	Présente	7.1890	9.3233	11.0766	12.2692	13.1956	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.7624	9.8333	11.4492	12.5576	13.4284	
	20	Présente	7.3904	9.7347	11.7544	13.1827	14.3222	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	8.0191	10.3180	12.2060	13.5489	14.6293	
	50	Présente	7.4506	9.8622	11.9725	13.4859	14.7059	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	8.0965	10.4697	12.4520	13.8810	15.0420	
	100	Présente	7.4594	9.8809	12.0049	13.5313	14.7638	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	8.1078	10.4920	12.4886	13.9309	15.1044	
	30°	4	Présente	6.1083	7.3253	8.3400	9.0670	9.6358
			(Sayyad et Ghugal 2017)	6.2027	7.4276	8.3994	9.1516	9.6610
10		Présente	7.0987	8.9264	10.5771	11.8668	12.9540	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.2635	9.1279	10.7242	12.0686	13.0383	
20		Présente	7.2956	9.2816	11.1209	12.5975	13.8744	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.4772	9.5113	11.2978	12.8437	13.9852	
50		Présente	7.3545	9.3909	11.2929	12.8339	14.1783	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.5413	9.6299	11.4800	13.0958	14.2992	
100		Présente	7.3631	9.4070	11.3183	12.8690	14.2238	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.5506	9.6472	11.5069	13.1334	14.3461	
60°		4	Présente	6.1083	7.3253	8.3400	9.0670	9.6358
			(Sayyad et Ghugal 2017)	6.2027	7.4276	8.3994	9.1516	9.6610
	10	Présente	7.0987	8.9264	10.5771	11.8668	12.9540	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.2635	9.1279	10.7242	12.0686	13.0383	
	20	Présente	7.2956	9.2816	11.1209	12.5975	13.8744	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.4772	9.5113	11.2978	12.8437	13.9852	
	50	Présente	7.3545	9.3909	11.2929	12.8339	14.1783	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.5413	9.6299	11.4800	13.0958	14.2992	
	100	Présente	7.3631	9.4070	11.3183	12.8690	14.2238	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.5506	9.6472	11.5069	13.1334	14.3461	

c) Exemple 3**Analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées équilibrées (45°/-45°)₂**

Cet exemple est effectué pour l'analyse des vibrations libres d'une plaque stratifiée équilibrée antisymétrique (45°/-45°)₂ afin d'étudier l'exactitude et l'applicabilité de la présente théorie. Les quatre couches ont une épaisseur de 0,25h / 0,25h / 0,25h / 0,25h, et la plaque est en *matériau 3*.

La variation des fréquences propres pour les six premiers modes en fonction du rapport longueur/épaisseur (a/h) est présentée dans le **tableau IV.6**. Afin de vérifier l'exactitude de la présente théorie, les résultats numériques obtenus pour cet exemple sont comparés aux résultats prédits par (Sayyad et Ghugal 2017) en utilisant une simple théorie de déformation de cisaillement trigonométrique à quatre variables, aux solutions analytiques rapportées par (Matsunaga 2001) utilisant la méthode d'expansion en série de puissance des composantes de déplacement et une théorie globale de plaque d'ordre élevé, aux résultats d'élément quadrilatéral obtenus par (Kulkarni et Kapuria 2008) basés sur la théorie du zig-zag du troisième ordre, aux solutions d'éléments finis présentées par (Chalak et al. 2013) et les solutions données par (Chakrabarti et Sheikh 2004) basées sur la théorie raffinée des plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Il convient de signaler clairement que la théorie actuelle donne des résultats très précis dans la prévision des fréquences propres par rapport à (Sayyad et Ghugal 2017) et (Kulkarni et Kapuria 2008).

Tableau IV.6: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique à quatre couches ($45^\circ / -45^\circ$)₂ (**matériau 3**)

a/h	Théories	Modes de vibration					
		1	2	3	4	5	6
5	Présente	12.5295	21.7713	21.7713	29.4406	32.4781	32.4781
	(Sayyad et Ghugal 2017)	12.5295	21.7713	21.7713	29.4406	32.4780	32.4780
	(Kulkarni et Kapuria 2008)	12.5293	21.4012	21.4012	29.3154	32.0688	32.0688
	(Chakrabarti et Sheikh 2004)	11.8130	18.7780	18.9260	23.9570	25.3290	25.4380
	(Chalak et al. 2013)	11.9131	20.2298	20.2298	27.2263	30.1399	30.3087
	10	Présente	18.3062	35.0905	35.0905	50.1181	54.8631
(Sayyad et Ghugal 2017)	18.3062	35.0905	35.0905	50.1181	54.8630	54.8630	
(Matsunaga 2001)	17.5885	32.6571	32.6571	46.6888	50.6147	50.6147	
(Kulkarni et Kapuria 2008)	18.3144	34.5392	34.5392	50.0729	53.8869	53.8869	
(Chakrabarti et Sheikh 2004)	17.9340	33.3000	33.4640	47.2370	50.5840	50.6340	
(Chalak et al. 2013)	17.6921	32.8839	32.8839	47.2914	51.5889	52.0283	

d) Exemple 4

Analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées équilibrées ($45^\circ/-45^\circ$)₅

Cette étude traite l'analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées carrées équilibrées antisymétriques ($45^\circ/-45^\circ$)₅, avec les couches de même épaisseur et constituées de **matériau 4**.

Les fréquences propres calculées à l'aide de la théorie actuelle et d'autres théories de déformation de cisaillement et les solutions d'élasticité tridimensionnelles données par (Noor et Burton 1990) sont indiquées dans le **tableau IV.7**.

Il peut être confirmé à partir du **tableau IV.7** que, les résultats de la théorie proposée sont en bon accord avec les résultats de (Sayyad et Ghugal 2017), (Reddy 1984), (Thai et Kim 2010) et FSDT de (Mindlin 1951). En comparant les résultats à ceux obtenus par la CPT, on peut voir que l'effet de la déformation de cisaillement est de diminuer les fréquences propres.

Tableau IV.7: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque stratifiée carrée équilibrée antisymétrique à dix couches ($45^\circ / -45^\circ$)₅ (**matériau 4**)

Théories	a/h		
	5	10	100
Présente	10.1672	13.6111	15.9482
(Sayyad et Ghugal 2017)	10.1672	13.6111	15.9482
(Reddy 1984)	10.1537	13.6078	15.9482
(Thai et Kim 2010) (RPT1)	10.1537	13.6078	15.9482
(Thai et Kim 2010) (RPT2)	10.1516	13.6078	15.9482
(Mindlin 1951)	10.1288	13.6140	15.9484
CPT ^(a)	15.4661	15.8460	15.9775
(Exact 1990)	9.9825	13.5100	15.9500

^(a) Les résultats sont extraits de la référence (Sayyad et Ghugal 2017)

IV.2.2 Analyse de la vibration libre des plaques sandwichs

a) Exemple 1

Analyse de la vibration libre des plaques sandwichs symétriques (0° /âme/ 0°) :

Dans cette section, l'efficacité de la théorie proposée est prouvée pour la réponse de vibration libre des plaques carrées et rectangulaires sandwichs symétriques simplement appuyées avec des peaux minces et une âme épaisse pour des différentes valeurs du rapport longueur/épaisseur. L'épaisseur de chaque peau est de $0,15h$ et constituée d'un alliage d'aluminium isotrope (**matériau 5**) tandis que l'épaisseur de l'âme central est de $0,7h$ en mousse de PVC (**matériau 6**).

Le **tableau IV.8** contient les fréquences adimensionnelles des trois premiers modes de vibration obtenus par la théorie actuelle et ils sont comparées à celles obtenues par la

solution d'élasticité exacte donnée par (Brischetto 2014) et la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique à quatre variables développées par (Sayyad et Ghugal 2017).

Tableau IV.8: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich rectangulaire symétrique à trois couches ($0^\circ / \hat{a}me / 0^\circ$) (**matériau 5 et 6**)

b/a	Théories	Modes	a/h			
			5	10	50	100
1	Présente	I	4.4221	6.5923	8.5408	8.6349
		II	13.535	27.070	135.35	270.70
		III	22.885	45.771	228.85	457.71
	(Sayyad et Ghugal 2017)	I	4.4220	6.5923	8.5408	8.6384
		II	13.535	27.070	135.35	270.70
		III	22.885	45.771	228.85	457.70
	(Exact 3D 2014)	I	1.4786	2.4879	7.0764	8.1693
		II	6.8059	27.045	135.35	270.70
		III	13.473	28.081	228.77	457.67
3	Présente	I	2.9876	4.0581	4.7757	4.8051
		II	10.088	20.177	100.88	201.77
		III	17.058	34.116	170.57	341.16
	(Sayyad et Ghugal 2017)	I	2.9876	4.0581	4.7756	4.8050
		II	10.088	20.176	100.88	201.77
		III	17.057	34.115	170.56	341.14
	(Exact 3D 2014)	I	1.0092	1.7567	4.2583	4.6553
		II	6.9197	20.167	100.88	201.77
		III	10.066	24.201	170.55	341.14

L'investigation du **tableau IV.8** révèle également que la théorie actuelle donne des résultats excellents pour les fréquences des deuxièmes et troisièmes modes pour les plaques sandwichs carrées et rectangulaires. Cependant, il existe une différence considérable par rapport à la solution d'élasticité 3D pour les fréquences adimensionnelles du premier mode.

b) Exemple 2

Analyse vibratoire libre des plaques sandwichs ayant des peaux stratifiées à couches croisées symétriques ($0^\circ/90^\circ / \hat{a}me / 90^\circ/0^\circ$)

Dans le deuxième exemple, on applique la présente théorie pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwichs symétriques ($0^\circ/90^\circ / \hat{a}me / 90^\circ/0^\circ$) simplement appui. La plaque sandwich est composée de deux peaux sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque et constituée d'un matériau composite orthotrope graphite-époxy (**matériau 7**), tandis que l'âme central flexible est constitué de mousse PVC (**matériau 6**). L'épaisseur de chaque peau est de $0,075h$ et l'âme souple a une épaisseur de $0,7h$.

La comparaison des fréquences adimensionnelles pour les trois premiers modes de vibration libre des plaques sandwichs carrées et rectangulaires est rapportée dans le **tableau IV.9** pour les quatre valeurs du rapport d'épaisseur ($a/h = 5, 10, 50, 100$).

Tableau IV.9: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich rectangulaire symétrique à cinq couches ($0^\circ / 90^\circ / \hat{a}me / 90^\circ / 0^\circ$) (**matériau 6 et 7**)

b/a	Théories	Modes	a/h			
			5	10	50	100
1	Présente	I	5.7104	9.6654	15.702	16.129
		II	38.581	77.161	385.80	771.61
		III	43.074	86.148	430.74	861.48
	(Sayyad et Ghugal 2017)	I	5.7107	9.6657	15.702	16.129
		II	38.580	77.161	385.80	771.60
		III	43.074	86.148	430.73	861.48
	(Exact 3D 2014)	I	3.2639	5.9275	14.440	15.754
		II	17.398	71.631	385.73	771.58
		III	37.351	76.817	430.56	861.39
3	Présente	I	4.1627	7.0263	11.169	11.449
		II	17.122	34.245	171.22	342.45
		III	39.554	79.108	395.54	791.08
	(Sayyad et Ghugal 2017)	I	4.1626	7.0265	11.169	11.448
		II	17.122	34.245	171.22	342.45
		III	39.554	79.108	395.54	791.08
	(Exact 3D 2014)	I	2.4968	4.5385	10.421	11.231
		II	19.965	34.219	171.22	342.45
		III	17.876	48.469	395.40	791.01

Il est clair, d'après les résultats obtenus, que les calculs actuels sont en excellent accord avec ceux de la solution d'élasticité exacte et de la théorie trigonométrique de déformation de cisaillement donnée par (Sayyad et Ghugal 2017).

c) Exemple 3

Analyse des vibrations libres des plaques sandwichs ayant des peaux stratifiées à couches croisées antisymétriques ($0^\circ/90^\circ / \hat{a}me / 0^\circ/90^\circ$)

Le troisième exemple est effectué pour une plaque sandwich carrée ayant des peaux stratifiées à couches croisées antisymétriques ($0^\circ/90^\circ / \hat{a}me / 0^\circ/90^\circ$) simplement appuyée dont le rapport longueur/épaisseur (a/h) variant de 2 à 100. Le rapport entre les épaisseurs de l'âme et les peaux de surface est adopté ($t_c/t_f = 10$). Les peaux de la plaque sont constituées d'un composite orthotrope en **matériau 8** alors que l'âme souple est en **matériau 9**. Les fréquences propres adimensionnelles obtenues par la présente solution sont comparées à celles prédites par les résultats disponibles dans le **tableau IV.10**, tandis

que le *tableau IV.11* mentionne les fréquences propres adimensionnelles pour les six premiers modes de vibration. Ces résultats sont comparés à ceux fournis par d'autres théories existantes telles que celle proposée par (Sayyad et Ghugal 2015, 2017) , (Reddy 1984), (Rao et al. 2004), (Kant et Manjunatha 1988), (Pandya et Kant 1988), (Senthilnathan et al. 1988) et (Mindlin 1951).

Tableau IV.10: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich carrée antisymétrique à cinq couches ($0^\circ / 90^\circ / \hat{a}me / 0^\circ / 90^\circ$) (*matériau 8 et 9*, $t_c / t_f = 10$).

Théories	a / h					
	2	4	10	20	50	100
Présente	0.8718	1.6694	4.0051	7.2849	12.3028	14.3519
(Sayyad et Ghugal 2017)	0.8209	1.6439	3.9964	7.2820	12.3004	14.3474
(Sayyad et Ghugal 2015)	0.8778	1.6767	4.1312	7.5829	13.3791	15.5978
(Reddy 1984)	1.6252	3.1013	7.0473	11.2664	15.0323	15.9522
(Rao et al. 2004)	0.7141	0.9363	1.8480	3.4791	7.7355	11.9400
(Kant et Manjunatha 1988)	1.1941	2.1036	4.8594	8.5955	13.6899	15.5093
(Pandya et Kant 1988)	1.1734	2.0913	4.8519	8.5838	13.6577	15.4647
(Senthilnathan et al. 1988)	1.6252	3.1013	7.0473	11.2664	15.0323	15.9522
(Mindlin 1951)	5.2017	9.0312	13.869	15.5295	16.1264	16.2175

Tableau IV.11: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich carrée antisymétrique de cinq couches ($0^\circ / 90^\circ / \hat{a}me / 0^\circ / 90^\circ$) (*matériau 8 et 9*, $t_c / t_f = 10$).

a / h	Théories	Modes of vibration					
		1	2	3	4	5	6
10	Présente	4.0051	6.5102	8.2788	9.3364	10.6617	12.6177
	(Sayyad et Ghugal 2017)	3.9964	6.4622	8.1987	9.1760	10.4767	11.9465
	(Sayyad et Ghugal 2015)	4.1312	6.7339	8.6150	9.6638	11.0885	13.1232
	(Reddy 1984)	7.0473	11.9087	15.2897	17.3211	19.8121	23.5067
	(Rao et Desai 2004)	4.9624	8.1934	10.5172	11.9867	13.7488	16.4514
	(Kant et Manjunatha 1988)	4.8594	8.0187	10.2966	11.7381	13.4706	16.1320
	(Pandya et Kant 1988)	4.8519	7.9965	10.2550	11.6809	13.3889	16.0039
	(Senthilnathan et al. 1988)	7.0473	11.9624	15.2897	17.3698	19.8325	23.5067
(Mindlin 1951)	13.869	30.6432	41.5577	50.9389	58.3636	71.3722	
100	Présente	14.3519	35.5662	49.2113	64.7584	74.0710	92.2246
	(Sayyad et Ghugal 2017)	14.3474	35.5583	49.2015	64.7474	74.0586	92.2090
	(Sayyad et Ghugal 2015)	15.5978	38.3778	53.5165	69.8024	80.0727	100.3965
	(Reddy 1984)	15.9521	42.2271	60.1272	83.9982	96.3132	124.2047
	(Rao et Desai 2004)	15.5480	39.2652	73.4951	55.1512	84.2919	106.5897
	(Kant et Manjunatha 1988)	15.5093	39.0293	54.7618	72.7572	83.4412	105.3781
	(Pandya et Kant 1988)	15.4646	38.9232	54.6330	72.5925	83.2699	105.1807
	(Senthilnathan et al. 1988)	15.9521	42.3708	60.1272	84.4215	96.7259	124.2047
(Mindlin 1951)	16.2175	44.7072	64.5044	94.9097	108.9049	143.7969	

On peut constater que les résultats de la présente étude concordent bien à nouveau avec ceux de (Sayyad et Ghugal 2017) qui utilisent une théorie de déformation trigonométrique à quatre variables et avec ceux de (Reddy 1984) basée sur la HSDT.

D'autre part, le **tableau IV.12** indique une comparaison des fréquences propres adimensionnelles pour les plaques sandwichs rectangulaires antisymétriques.

Tableau IV.12: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich rectangulaire antisymétrique à cinq couches ($0^\circ/90^\circ/\hat{a}me/0^\circ/90^\circ$) (**matériau 8 et 9** $t_c/t_f = 10, a/h = 10$).

Théories	a/b						
	0.5	1	1.5	2	2.5	3	5
Présente	12.5275	4.0051	2.3075	1.6275	1.2638	1.0374	0.6184
(Sayyad et Ghugal 2017)	12.5073	3.9964	2.2980	1.6155	1.2489	1.0195	0.5886
(Rao et al. 2004) (ESL)	15.3407	4.9624	2.8797	2.0483	1.6057	1.3317	0.8342
(Rao et al. 2004) (LW)	5.7328	1.8480	1.0884	0.8049	0.6626	0.5792	0.4493
(Reddy 1984)	21.4500	7.0473	4.1587	3.6444	2.3324	1.9242	1.1541
(Kant et Manjunatha 1988)	15.0316	4.8594	2.8188	2.4560	1.5719	1.3040	0.8187
(Pandya et Kant 1988)	15.0128	4.8519	2.8130	2.4469	1.5660	1.2976	0.8102
(Senthilnathan et al. 1988)	21.6668	7.0473	4.1725	3.6582	2.3413	1.9216	1.1550
(Mindlin 1951)	39.4840	13.869	10.165	9.4910	6.5059	5.6588	3.6841

d) Exemple 4

Analyse de la vibration libre des plaques sandwichs ayant des peaux stratifiées équilibrées antisymétriques ($\theta/\hat{a}me/\theta/\theta$)

Dans le dernier exemple, des plaques sandwichs carrées équilibrées antisymétriques ($\theta/\hat{a}me/\theta/\theta$) sont considérées pour déterminer les fréquences propres adimensionnelles vis-à-vis des différentes valeurs du rapport d'épaisseur ($a/h = 10, 20, 50, 100$) et de l'angle d'orientation des fibres ($\theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$), tandis que le rapport entre l'épaisseur de l'âme et celle des peaux est prise ($t_c/t_f = 4, 10$). Les peaux de la plaque sont composées d'un **matériau 8** orthotrope et l'âme isotrope est en **matériau 9**. Les résultats numériques obtenus sont présentés dans le **tableau IV.13** et ils ont été comparés avec les résultats précédemment publiés, obtenus par d'autres théories des plaques. On constate que les calculs actuels sont en excellent accord avec les solutions analytiques fournies par (Sayyad et Ghugal 2017) ; cependant, une différence significative est observée par rapport à d'autres théories de déformation de cisaillement

comme (Kant et Manjunatha 1988), (Pandya et Kant 1988), (Reddy 1984) et (Senthilnathan et al. 1988). Cela est dû aux différentes approches utilisées pour prédire les fréquences propres. En plus, la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre de (Mindlin 1951) surestime les valeurs de fréquence propre pour tous les rapports d'épaisseur.

Tableau IV.13: Les fréquences propres adimensionnelles ($\bar{\omega}$) d'une plaque sandwich carrée antisymétrique à cinq couches ($\theta / -\theta / \hat{a}me / \theta / -\theta$) (matériau 8 et 9)

t_c / t_f	Théories	a / h					
		10	20	50	100		
4	15°	Présente	7.5923	12.1491	16.2539	17.2622	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.5929	12.1489	16.2527	17.2608	
		(Kant et Manjunatha 1988)	8.8342	12.9787	16.2421	16.9744	
		(Pandya et Kant 1988)	8.8109	12.9633	16.2330	16.9666	
		(Reddy 1984)	10.585	14.3884	16.6537	17.0840	
		(Senthilnathan et al. 1988)	11.284	14.9062	16.7857	17.1196	
		(Mindlin 1951)	14.360	16.3410	17.0808	17.1965	
	30°	Présente	7.7412	12.8130	17.9614	19.3510	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.7421	12.8128	17.9602	19.3495	
		(Kant et Manjunatha 1988)	9.5383	14.4318	18.2621	19.1154	
		(Pandya et Kant 1988)	9.5153	14.4130	18.2465	19.1005	
		(Reddy 1984)	11.631	16.0979	18.7384	19.2378	
		(Senthilnathan et al. 1988)	11.832	16.2517	18.7787	19.2487	
		(Mindlin 1951)	16.096	18.3818	19.2351	19.3685	
	45°	Présente	7.7982	13.0779	18.7132	20.3004	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	7.7993	13.0778	18.7119	20.2988	
		(Kant et Manjunatha 1988)	9.8197	15.0371	19.1695	20.0845	
		(Pandya et Kant 1988)	9.7973	15.0173	19.1513	20.0667	
		(Reddy 1984)	12.051	16.8312	19.6858	20.2163	
		(Senthilnathan et al. 1988)	12.051	16.8312	19.6858	20.2163	
		(Mindlin 1951)	16.848	19.3022	20.2263	20.3573	
	10	30°	Présente	4.0530	7.5673	13.8217	16.9422
			(Sayyad et Ghugal 2017)	4.0393	7.5623	13.8192	16.9372
			(Kant et Manjunatha 1988)	5.0035	9.0294	15.5303	18.4008
(Pandya et Kant 1988)			4.9949	9.0227	15.5216	18.3900	
(Reddy 1984)			7.3280	12.2477	17.6159	19.1603	
(Senthilnathan et al. 1988)			7.4382	12.4504	17.7286	19.1974	
(Mindlin 1951)			15.926	18.5408	19.5550	19.7222	
45°		Présente	4.0624	7.6287	14.2074	17.6676	
		(Sayyad et Ghugal 2017)	4.0471	7.6230	14.2049	17.6626	
		(Kant et Manjunatha 1988)	5.0653	9.2740	16.2062	19.3098	
		(Pandya et Kant 1988)	5.0566	9.2675	16.1965	19.2970	
		(Reddy 1984)	7.4895	12.6964	18.4604	20.1355	
		(Senthilnathan et al. 1988)	7.4895	12.6964	18.4604	20.1355	
		(Mindlin 1951)	16.654	19.4671	20.5661	20.7477	

IV.3 Conclusion

Au cours de ce quatrième chapitre, nous avons présenté les résultats numériques pour analyser le comportement de la vibration libre des plaques composites, stratifiées et des plaques sandwichs symétriques et antisymétriques, en utilisant une simple théorie HSDT. Le nombre de variables dans cette théorie est seulement quatre ce qui permet de réduire les équations du mouvement et simplifier le problème étudié.

La performance et la fiabilité de la présente théorie développée sont démontrées à travers une série d'applications en vibration libre des plaques.

Par ailleurs, on a aussi montré à travers des exemples illustratifs, l'effet de certains paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, le degré d'orthotropie et l'orientation des fibres, sur la variation des fréquences propres des plaques, il est avéré que ces paramètres influent significativement sur la réponse dynamique des plaques.

En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée donne des solutions qui coïncident très bien à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevée.

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, une simple théorie de déformation de cisaillement trigonométrique à quatre variables avec des termes intégraux indéterminés est développé pour l'analyse des vibrations libres des plaques composites antisymétriques stratifiées et sandwichs à âme souple simplement appuyées.

Le plus important de cette théorie est qu'elle ne comporte que quatre variables inconnues et quatre équations du mouvements dérivées en utilisant le principe du travail virtuel et ne nécessite aucun facteur de correction du cisaillement.

Divers exemples numériques sont présentés et comparés avec ceux fournis par d'autres théories existantes pour prouver la validité du modèle mathématique proposé.

Les effets du nombre de couches, du rapport modulaire, du rapport longueur/épaisseur et de l'angle d'orientation des fibres sont examinés et discutés. Il ressort de toute cette étude que la présente théorie à quatre inconnues prédit des résultats excellents pour les fréquences propres par rapport à ceux obtenus à l'aide d'autres théories de déformation de cisaillement raffinées pour tous les modes de vibrations.

Enfin, le modèle mathématique actuel s'avère approprié et efficace pour analyser le problème des vibrations des plaques composites stratifiées et des plaques sandwichs à âme souple

Une amélioration de la formulation actuelle sera envisagée dans les futurs travaux visant à prendre en compte d'autres types de matériaux et des différents conditions d'appuis... ((Avcar 2015, 2016), (Hadji et al. 2016), (Mehar et al. 2016), (Kar et Panda 2015a; b, 2017) , (Chandra Mouli et al. 2018), (Belmahi et al. 2018), (Bensattalah et al. 2018), (Chemi et al. 2018), (Kumar et Srinivas 2018), (Faleh et al. 2018), (Shahadat et al. 2018) et (Safa et al. 2019)).

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- Agaah, M. R., Mahinfalah, M., et Jazar, G. N. (2006). « Natural frequencies of laminated composite plates using third order shear deformation theory ». *Composite Structures*, 72(3), 273-279.
- Adhikari, B., et Singh, B. N. (2018). « An efficient higher order non-polynomial Quasi 3-D theory for dynamic responses of laminated composite plates ». *Composite Structures*, 189, 386-397.
- Adim, B., Daouadji, T. H., Rabia, B., et Hadji, L. (2016). « An efficient and simple higher order shear deformation theory for bending analysis of composite plates under various boundary conditions ». *Earthquake and Structures*, 11(1), 63-82.
- Afsharmanesh, B., Ghaheri, A., et Taheri-Behrooz, F. (2014). « Buckling and vibration of laminated composite circular plate on winkler-type foundation ». *Steel and Composite Structures, Int.J.*, 17(1), 1-19.
- Afsset, (Agence française de sécurité sanitaire de l'environnement et du travail). (2010). « Fabrication et usinage des matériaux composites à base de fibres de carbone ». *Rapport d'expertise collective*.
- Aguib, S. (2014). « Identification des propriétés dynamiques et simulation du comportement vibratoire des plaques en matériaux composites adaptatifs ». Thèse de doctorat, Université M'hamed Bougara, Boumerdes, Algérie.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., et Adda Bedia, E. A. (2010). « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory ». *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(2), 113-121.
- Akbaş, Ş. D. (2016). « Forced vibration analysis of viscoelastic nanobeams embedded in an elastic medium ». *Smart Structures and Systems, Int.J.*, 18(6), 1125-1143.
- Akbaş, Ş. D. (2018). « Thermal post-buckling analysis of a laminated composite beam ». *Structural Engineering and Mechanics, Int.J.*, 67(4), 337-346.
- Ambartsumian, S. A. (1958a). « On the theory of bending plates ». *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR*, 5, 69-77.
- Ambartsumian, S. A. (1958b). « On a general theory of anisotropic shells ». *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 22(2), 305-319.
- Ambartsumian, S. A. (1962). « Contributions to the theory of anisotropic layered shells ». *Applied Mechanics Reviews*, 15, 245-249.
- Ashour, A. S. (2003). « Buckling and vibration of symmetric laminated composite plates with edges elastically restrained ». *Steel and Composite Structures, Int.J.*, 3(6), 439-450.
- Avcar, M. (2015). « Effects of rotary inertia shear deformation and non-homogeneity on frequencies of beam ». *Structural Engineering and Mechanics, Int.J.*, 55(4), 871-884.
- Avcar, M. (2016). « Effects of material non-homogeneity and two parameter elastic foundation on fundamental frequency parameters of Timoshenko beams ». *Acta Physica Polonica A, Int.J.*, 130(1), 375-378.
-

- Avcar, M. (2019). « Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams ». *Steel and Composite Structures, Int.J.*, 30(6), 603-615.
- Bachiri, A. (2019). « Contribution à l' étude des structure s en matériaux composites avancés : Approche mathématique ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Bahlouli, N. (2009). « Cours Matériaux Composites ». Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- Bakhti, A. (2017). « Etude vibratoire d' un impact accidentel sur une plaque en matériau composite soumise aux conditions d' environnement ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Baltacioğlu, A. K., et Civalek, Ö. (2018). « Numerical approaches for vibration response of annular and circular composite plates ». *Steel and Composite Structures, Int.J.*, 29(6), 755-766.
- Belabed, Z. (2015). « Étude du comportement statique et dynamique des plaques épaisses non homogènes ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Belarbi, M. O. (2015). « Éléments Finis pour l' Analyse des Structures Sandwichs ». Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie.
- Belarbi, M. O., Abdelouahab, T., Ounis, H., et Khechai, A. (2017). « On the Free Vibration Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates : A Layerwise Finite Element Formulation ». *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14 (2017), 2265-2290.
- Belkacem, A., Tahar, H. D., Abderrezak, R., Amine, B. M., Mohamed, Z., et Boussad, A. (2018). « Mechanical buckling analysis of hybrid laminated composite plates under different boundary conditions ». *Structural Engineering and Mechanics, Int.J.*, 66(6), 761-769.
- Belkaid, K. (2016). « Etude numérique de l'effet de la température sur le comportement du flambage des plaques stratifiées en utilisant un élément fini basé sur la théorie de troisième ordre de Reddy ». Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie.
- Belmahi, S., Zidour, M., Meradjah, M., Bensattalah, T., et Dihaj, A. (2018). « Analysis of boundary conditions effects on vibration of nanobeam in a polymeric matrix ». *Structural Engineering and Mechanics, Int.J.*, 67(5), 517-525.
- Ben Henni, M. A. (2019). « Contribution a l'etude de la vibration des plaques en materiaux composites sous chargements mecanique et thermomecanique ». Thèse de doctorat, Université Ibn Khaldoun, Tiaret, Algérie et Université de Reims Champagne-Ardenne, France.
- Ben Henni, M. A., Daouadji, T. H., Abbes, B., Li, Y. M., et Abbes, F. (2018). « Analytical and numerical results for free vibration of laminated composites plates ». *International Journal of Chemical and Molecular Engineering*, 12(6), 300-304.
- Benahmed, A. (2018). « Contribution à l' étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d' ordre élevé avec un nombre réduit de variable ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Benarbia, D. (2018). « Etude du comportement mécanique des poutres fissurées et renforcées par des matériaux composites ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Benbakhti, A. (2017). « Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM (Functionally Graded Materials) ». Thèse de doctorat, Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem, Algérie.
- Benferhat, R., Hassaine Daouadji, T., Hadji, L., et Said Mansour, M. (2016). « Static analysis of the FGM plate with porosities ». *Steel and Composite Structures, Int.J.*, 21(1), 123-136.
-

- Bensattalah, T., Bouakkaz, K., Zidour, M., et Daouadji, T. H. (2018). « Critical buckling loads of carbon nanotube embedded in Kerr's medium ». *Advances in Nano Research, Int.J.*, 6(4), 339-356.
- Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Ait Atmane, H., et Adda Bedia, E. A. (2010). « Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations ». *Mechanics of Composite Materials*, 46(4), 425-434.
- Bert, C. W. (1973). « Simplified analysis of static shear factors for beams of non homogeneous cross Section ». *Journal of Composite Materials*, 7(4), 525-529.
- Bert, C. W., et Birman, V. (1987). « Dynamic instability of shear deformable antisymmetric angle-ply plates ». *International Journal of Solids and Structures*, 23(7), 1053-1061.
- Bert, C. W., et Chen, T. L. C. (1978). « Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates ». *International Journal of Solids and Structures*, 14(6), 465-473.
- Bert, C. W., et Mayberry, B. L. (1969). « Free Vibrations of Unsymmetrically Laminated Anisotropic Plates with Clamped Edges ». *Journal of Composite Materials*, 3(2), 282-293.
- Berthereau, A., et Dallies, E. (2008). « Fibres de verre de renforcement ». *Techniques de l'ingénieur. Matériaux fonctionnels*, N2(AM5132), 1-19.
- Boudjema, H. L. (2016). « Elaboration de matériaux composites biodégradables issus de ressources renouvelables ». Thèse de doctorat, Université d'Oran 2, Algérie.
- Bourahli, M. E. H. (2014). « Caractérisation d'un composite verre / époxy ». Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas, Setif, Algérie.
- Bourega Remaoun, D. (2014). « Modélisation et simulation du comportement des matériaux magnétiques . » Thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf, Oran, Algérie.
- Brek, S. (2012). « Modélisation numérique de la propagation de l'endommagement et de la rupture dans les matériaux composites stratifiés sous sollicitations thermomécaniques et cycliques Soutenue ». Thèse de doctorat, Université Hadj Lakhdar, Batna, Algérie.
- Brischetto, S. (2014). « An exact 3d solution for free vibrations of multilayered cross-ply composite and sandwich plates and shells ». *International Journal of Applied Mechanics*, 6, 1-42.
- CARMA, C. d'animation régional en matériaux avancés. (2006). « Glossaire des matériaux composites ».
- Carrera, E. (1995). « A class of two-dimensional theories for anisotropic multilayered plates analysis ». *Atti della accademia delle scienze di Torino. Classe di scienze fisiche matematiche e naturali*, 19, 49-87.
- Carrera, E. (1999). « A study of transverse normal stress effect on vibration of multilayered plates and shells ». *Journal of Sound and Vibration*, 225(5), 803-829.
- Carrera, E. (2000). « An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates ». *Composite Structures*, 50(2), 183-198.
- Carrera, E. (2004). « On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells ». *Computers and Structures*, 82(7-8), 541-554.
- Chaabani, C. (2017). « Composites à fibres de carbone : récupération des fibres par solvolysse hydrothermale. Impact sur la qualité des fibres et valorisation de la phase liquide ». Thèse de doctorat, Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, France.
-

- Chakrabarti, A., et Sheikh, A. H. (2004). « Vibration of laminate-faced sandwich plate by a new refined element ». *ASCE Journal of Aerospace Engineering*, 17(3), 123-134.
- Chalak, H. D., Chakrabarti, A., Iqbal, M. A., et Sheikh, A. H. (2013). « Free vibration analysis of laminated soft core sandwich plates ». *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(1), 1-15.
- Chandra Mouli, B., Ramji, K., Kar, V. R., Panda, S. K., Lalepalli Anil, K., et Pandey, H. K. (2018). « Numerical study of temperature dependent eigenfrequency responses of tilted functionally graded shallow shell structures ». *Structural Engineering and Mechanics, Int.J.*, 68(5), 527-536.
- Chemi, A., Zidour, M., Heireche, H., Rakrak, K., et Bousahla, A. A. (2018). « Critical buckling load of chiral double-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium ». *Mechanics of Composite Materials*, 53(6), 827-836.
- Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H., et Mahmoud, S. R. (2017). « Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT ». *Smart Structures and Systems, Int.J.*, 19(3), 289-297.
- Cho, K. N., Bert, C. W., et Striz, A. G. (1991). « Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory ». *Journal of Sound and Vibration*, 145(3), 429-442.
- Cho, M., et Parmerter, R. R. (1993). « Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations ». *AIAA Journal*, 31(7), 1299-1306.
- Chow, T. S. (1971). « On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load ». *Journal of Composite Materials*, 5(3), 306-319.
- Daikh, A. A. (2018). « vibration libre et flambement des structures sandwichs en FGM ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Desai, Y. M., Ramtekkar, G. S., et Shah, A. H. (2003). « Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model ». *Composite Structures*, 59(2), 237-249.
- Di Sciuva, M. (1987). « An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates ». *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 54(3), 589-596.
- Di Sciuva, M., et Gherlone, M. (2003). « A global/local third-order Hermitian displacement field with damaged interfaces and transverse extensibility: Analytical formulation ». *Composite Structures*, 59(4), 419-431.
- Djemai, H. (2017). « Doctorat en Sciences : Génie Mécanique Contribution à l' étude de l' endommagement dans les matériaux composites sandwichs Présentée par : DJEMAI Hocine ». Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie.
- Dong, S. B., et Tso, F. K. W. (1972). « On a laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation ». *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 39(4), 1091-1097.
- Draiche, K., Bousahla, A. A., Tounsi, A., Alwabli, A. S., Tounsi, A., et Mahmoud, S. R. (2019). « Static analysis of laminated reinforced composite plates using a simple first-order shear deformation theory ». *Computers and Concrete, Int.J.*, 24(4), 369-378.
- Draiche, K., Tounsi, A., et Mahmoud, S. R. (2016). « A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates ». *Geomechanics and Engineering, Int.J.*, 11(5), 671-690.
-

- Eltaher, M. A., Khairy, A., Sadoun, A. M., et Omar, F. A. (2014). « Static and buckling analysis of functionally graded Timoshenko nanobeams ». *Applied Mathematics and Computation*, 229, 283-295.
- Fadodun, O. O., Borokinni, A. S., Layeni, O. P., et Akinola, A. P. (2017). « Dynamic analysis of a transversely isotropic non-classical thin plate ». *Wind and Structures, An International Journal, Int.J.*, 25(1), 25-38.
- Faleh, N. M., Ahmed, R. A., et Fenjan, R. M. (2018). « On vibrations of porous FG nanoshells ». *International Journal of Engineering Science*, 133, 1-14.
- Fares, M. E., et Elmarghany, M. K. (2008). « A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates ». *Composite Structures*, 82(1), 71-83.
- Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., et Kansa, E. J. (2005). « Static deformations and vibration analysis of composite and sandwich plates using a layerwise theory and multiquadrics discretizations ». *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(12), 1104-1114.
- Gendre, L. (2011). « Matériaux composites et structures composites ». ENS CACHAN université Paris-Saclay.
- Ghugal, Y. M., et Pawar, M. D. (2011). « Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear deformation theory ». *Journal of Aerospace Engineering & Technology*, 1(1), 1-12.
- Grover, N., Singh, B. N., et Maiti, D. K. (2013). « Analytical and finite element modeling of laminated composite and sandwich plates: An assessment of a new shear deformation theory for free vibration response ». *International Journal of Mechanical Sciences*, 67, 89-99.
- Hachemi, M. (2018). « Analyse dynamique d'une plaque rectangulaire en composite avec des ouvertures ». Thèse de doctorat, Université Abou Bakr Belkaid, Tlemcen, Algérie.
- Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., et Adda Bedia, E. A. (2016). « Dynamic behavior of FGM beam using a new first shear deformation theory ». *Earthquake and Structures, Int.J.*, 10(2), 451-461.
- Hami, B. (2018). « Elaboration et caractérisation physico-mécanique d'une structure sandwich multicouches ». Thèse de doctorat, Université M'hamed Bougara, Boumerdes, Algérie.
- Hearmon, R. F. S. (1959). « The Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates with Clamped or Simply Supported Edges ». *Journal of Applied Mechanics*, 26, 537-540.
- Hosseini-Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., et Omid, M. (2010). « Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory ». *Applied Mathematical Modelling*, 34(5), 1276-1291.
- Issad, M. N. (2018). « Investigation sur le comportement mécanique des plaques épaisse isotropes et orthotropes ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Jao Jules, E. (2001). « Couplages entre propriétés thermiques, réactivité chimique et viscosité des matériaux composites thermodurcissables en relation avec les conditions de leur élaboration fondée sur l'hysteresis diélectrique ». Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure d'arts et métiers, Paris, France.
- Javed, S., Viswanathan, K. K., Izyan, M. D. N., Aziz, Z. A., et Lee, J. H. (2018). « Free vibration of cross-ply laminated plates based on higher-order shear deformation theory ». *Steel and Composite Structures, Int.J.*, 26(4), 473-484.
- JEC GROUP, KNOWLEDGE, N. et I. (2020). « Developing the composites industry worldwide
-

- through ». JEC World, Premier salon international des composites; Paris.
- Kaczkowski, Z. (1968). « Plates statistical calculations ». *Warsaw: Arkady*.
- Kant, T., et Manjunatha, B. S. (1988). « An un-symmetric FRC laminate C° finite element model with 12 degrees of freedom per node ». *Engineering Computations*, 5(4), 300-308.
- Kant, T., et Swaminathan, K. (2001a). « Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory ». *Composite Structures*, 53(1), 73-85.
- Kant, T., et Swaminathan, K. (2001b). « Free vibration of isotropic, orthotropic, and multilayer plates based on higher order refined theories ». *Journal of Sound and Vibration*, 241(2), 319-327.
- Kant, T., et Swaminathan, K. (2002). « Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory ». *Composite Structures*, 56(4), 329-344.
- Kar, V. R., et Panda, S. K. (2015a). « Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel ». *Steel and Composite Structures, Int.J.*, Techno Press, 18(3), 693-709.
- Kar, V. R., et Panda, S. K. (2015b). « Free vibration responses of temperature dependent functionally graded curved panels under thermal environment ». *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(11), 2006-2024.
- Kar, V. R., et Panda, S. K. (2016). « Nonlinear thermomechanical deformation behaviour of P-FGM shallow spherical shell panel ». *Chinese Journal of Aeronautics*, 29(1), 173-183.
- Kar, V. R., et Panda, S. K. (2017). « Large-amplitude vibration of functionally graded doubly-curved panels under heat conduction ». *AIAA Journal*, 55(12), 4376-4386.
- Karama, M., Afaq, K. ., et Mistou, S. (2009). « A new theory for laminated composite plates ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 223(2), 53-62.
- Karama, M., Afaq, K. S., et Mistou, S. (2003). « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity ». *International Journal of Solids and Structures*, 40(6), 1525-1546.
- Karami, B., et Karami, S. (2019). « Buckling analysis of nanoplate-type temperature-dependent heterogeneous materials ». *Advances in nano research, Int.J.*, 7(1), 51-61.
- Kassapoglou, C., et Lagace, P. A. (1986). « An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials ». *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 53(4), 744-750.
- Kassapoglou, C., et Lagace, P. A. (1987). « Closed Form Solutions for the Interlaminar Stress Field in Angle-Ply and Cross-Ply Laminates ». *Journal of Composite Materials*, 21(4), 292-308.
- Khdeir, A. A., et Reddy, J. N. (1999). « Free vibrations of laminated composite plates using second-order shear deformation theory ». *Computers and Structures*, 71(6), 617-626.
- Kirchhoff, G. (1850). « 4. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe ». *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, (40), 51-88.
- Kolahchi, R. (2017). « A comparative study on the bending, vibration and buckling of viscoelastic sandwich nano-plates based on different nonlocal theories using DC, HDQ and DQ methods ».
-

- Aerospace Science and Technology*, 66, 235-248.
- Kulkarni, S. D., et Kapuria, S. (2008). « Free vibration analysis of composite and sandwich plates using an improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third-order zigzag theory ». *Computational Mechanics*, 42(6), 803-824.
- Kumar, P., et Srinivas, J. (2018). « Transient vibration analysis of FG-MWCNT reinforced composite plate resting on foundation ». *Steel and Composite Structures, Int.J.*, 29(5), 569-578.
- Lekhnitskii, S. G. (1935). « Strength calculation of composite beams ». *Vestnik inzhen i tekhnikov*.
- Liew, K. M. (1996). « Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the p-Ritz method ». *Journal of Sound and Vibration*, 198(3), 343-360.
- Liu, Q., et Zhao, Y. (2007). « Effect of soft honeycomb core on flexural vibration of sandwich panel using low order and high order shear deformation models ». *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 9(1), 95-108.
- Lokesh, S., Lakshmi Tulasi, C. H., Monica, T., et Pranavi, U. (2017). « Vibration analysis of laminated composite plates using layerwise higher order shear deformation theory ». *International Journal of Mechanical Engineering and Technology*, 8(7), 414-427.
- Ly, E. H. B. (2008). « Nouveaux matériaux composites thermoformables à base de fibres de cellulose ». Thèse de doctorat, Institut national polytechnique, Grenoble, France.
- Mahi, A., Adda Bedia, E. A., et Tounsi, A. (2015). « A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates ». *Applied Mathematical Modelling*, 39(9), 2489-2508.
- Mahmoudi, A. (2019). « Etude de l' influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Mallick, P. K. (2007). *Fiber-reinforced composites: Materials, manufacturing, and design*. CRC Press.
- Mallikarjuna, et Kant, T. (1989). « Free vibration of symmetrically laminated plates using a higher-order theory with finite element technique ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(8), 1875-1889.
- Mantari, J. L., Oktem, A. S., et Guedes Soares, C. (2011). « Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory ». *Composite Structures*, 94(1), 37-49.
- Mantari, J. L., et Ore, M. (2015). « Free vibration of single and sandwich laminated composite plates by using a simplified FSDT ». *Composite Structures*, 132, 952-959.
- Matsunaga, H. (2001). « Vibration and stability of angle-ply laminated composite plates subjected to in-plane stresses ». *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(8), 1925-1944.
- Mehar, K., Panda, S. K., Dehengia, A., et Kar, V. R. (2016). « Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate in thermal environment ». *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 18(2), 151-173.
- Meksi, R. (2018). « Investigation sur les différents comportements mécaniques des structures en matériaux composites avancées ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Mena, R., Tounsi, A., Mouaici, F., Mechab, I., Zidi, M., et Adda Bedia, E. A. (2012). « Analytical solutions for static shear correction factor of functionally graded rectangular beams ».
-

- Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 19(8), 641-652.
- Merad, L. (2010). « étude par spectroscopie RAMAN et modélisation d'une résine composite RTM ». Thèse de doctorat, Université Abou Bakr Belkaid, Tlemcen, Algérie.
- Merazi, M. (2015). « Analyse mécanique des structures composites : Etude comparative entre les différentes théories des plaques ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Messaoudi, K. (2018). « Implémentation des lois de comportement des matériaux graduels (FGMS) dans un code de calcul ». Thèse de doctorat, Université Abou Bakr Belkaid, Tlemcen, Algérie.
- Mindlin, R. . (1951). « Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates ». *Journal of Applied Mechanics*, 18(1), 31-38.
- Murakami, H. (1986). « Laminated composite plate theory with improved in-plane responses ». *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 53(3), 661-666.
- Naserian-Nik, A. M., et Tahani, M. (2010). « Free vibration analysis of moderately thick rectangular laminated composite plates with arbitrary boundary conditions ». *Structural Engineering and Mechanics, Int.J.*, 35(2), 217-240.
- Nayak, A. K., Moy, S. S. J., et Shenoi, R. A. (2002). « Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory ». *Composites Part B: Engineering*, 33(7), 505-519.
- Nayak, A. K., Shenoi, R. A., et Moy, S. S. J. (2004). « Transient response of composite sandwich plates ». *Composite Structures*, 64(3-4), 249-267.
- Nedri, K. (2015). « Analyse de la vibration libre des plaques composites sur fondation élastique ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Nguyen, A. V. (2015). « Matériaux composites à renfort végétal pour l'amélioration des performances de systèmes robotiques ». Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, France.
- Nguyen, T. K., Sab, K., et Bonnet, G. (2008). « First-order shear deformation plate models for functionally graded materials ». *Composite Structures*, 83(1), 25-36.
- Nguyen, V. T. (2004). « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque ». Thèse de doctorat, Ecole des Ponts ParisTech, France.
- Noor, A. K. (1973). « Free vibrations of multilayered composite plates ». *AIAA Journal*, 11(7), 1038-1039.
- Noor, A. K., et Burton, W. S. (1989). « Free vibrations of multilayered composite plates ». *Composite Structures*, 11(3), 183-204.
- Noor, A. K., et Burton, W. S. (1990). « Three-dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates ». *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 57(1), 182-188.
- Noor, A. K., Peters, J. M., et Burton, W. S. (1994). « Three-Dimensional Solutions for Initially Stressed Structural Sandwiches ». *Journal of Engineering Mechanics*, 120(2), 284-303.
- Nosier, A., Kapania, R. K., et Reddy, J. N. (1993). « Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory ». *AIAA Journal*, 31(12), 2335-2346.
- Ochoa, O. O., et Reddy, J. N. (1992). « Finite Element Analysis of Composite Laminates ». *Solid mechanics and its applications*, Springer, Dordrecht.
- Ounis, H. (2015). « Etude numérique par éléments finis de l'effet de la température sur la vibration
-

- et la stabilité des plaques stratifiées ». Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie.
- Pagano, N. J. (1969). « Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending ». *Journal of Composite Materials*, 3(3), 398-411.
- Pagano, N. J. (1970). « Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates ». *Journal of Composite Materials*, 4(1), 20-34.
- Panc, V. (1975). *Theories of elastic plates (Mechanics of Surface Structure)*. Noordhoff International Publishing.
- Pandya, B. N., et Kant, T. (1988). « Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model ». *Composites Science and Technology*, 32(2), 137-155.
- Panjehpour, M., Loh, E. W. K., et Deepak, T. J. (2018). « Structural Insulated Panels: State-of-the-Art ». *Trends in Civil Engineering and its Architecture*, 3(1), 336-340.
- Perrot, Y. (2006). « Influence des propriétés de la matrice sur le comportement mécanique de matériaux composites verre/polyester utilisés en construction navale de plaisance - Cas des résines polyester limitant les émissions de styrène ». Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, France.
- Rahmane, A. (2018). « Etude du comportement dynamique des composites stratifiés et sandwichs ». Thèse de doctorat, Université des Frères Mantouri, Constantine, Algérie.
- Rao, M. K., et Desai, Y. M. (2004). « Analytical solutions for vibrations of laminated and sandwich plates using mixed theory ». *Composite Structures*, 63(3-4), 361-373.
- Rao, M. K., Scherbatiuk, K., Desai, Y. M., et Shah, A. H. (2004). « Natural Vibrations of Laminated and Sandwich Plates ». *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 130(11), 1268-1278.
- Rastogi, V., Urmaliya, P. K., Verma, A. K., et Kumhar, V. (2019). « Free vibration of isotropic and laminated composite plate using three-dimensional finite element analysis ». *Materials Today: Proceedings*, 2823-2831.
- Rath, B. K., et Das, Y. C. (1973). « Vibration of layered shells ». *Journal of Sound and Vibration*, 28(4), 737-757.
- Reddy, J. N. (1979). « Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method ». *Journal of Sound and Vibration*, 66(4), 565-576.
- Reddy, J. N. (1984). « A simple higher order theory for laminated composite plates ». *ASME Journal of Applied Mechanics*, 51(4), 745-752.
- Reddy, J. N. (1987). « Generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates ». *Communications in Applied Numerical Methods*, 3(3), 173-180.
- Reddy, J. N. (1993). « An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates ». *Composite Structures*, 25(1-4), 21-35.
- Reddy, J. N. (1997). « Mechanics of laminated composite plates : theory and analysis ». *CRC Press, Boca Raton*.
- Reddy, J. N. (1999). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press.
- Reddy, J. N., et Khdeir, A. A. (1989). « Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories ». *AIAA Journal*, 27(12), 1808-1817.
- Reddy, J. N., Wang, C. M., Lim, G. T., et Ng, K. H. (2001). « Bending solutions of Levinson beams
-

- and plates in terms of the classical theories ». *International Journal of Solids and Structures*, 38(26-27), 4701-4720.
- Reissner, E. (1945). « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ». *J. Appl. Mech., Trans ASME*, 12(2), 69-77.
- Reissner, E. (1975). « On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation ». *International Journal of Solids and Structures*, 11(5), 569-573.
- Reissner, E. (1984). « On a certain mixed variational theorem and a proposed application ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(7), 1366-1368.
- Reissner, E. (1986). « On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(2), 193-198.
- Ren, J. G. (1986a). « A new theory of laminated plate ». *Composites Science and Technology*, 26(3), 225-239.
- Ren, J. G. (1986b). « Bending theory of laminated plate ». *Composites Science and Technology*, 27(3), 225-248.
- Ren, X., et Chen, W. (2011). « Free vibration analysis of laminated and sandwich plates using quadrilateral element based on an improved zig-zag theory ». *Journal of Composite Materials*, 45(21), 2173-2187.
- Reyne, M. (2006). « Solutions composites : Thermodurcissables et thermoplastiques ».
- Saeedi, N. (2012). « Une approche très efficace pour l'analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues ». Thèse de doctorat, Université Paris-est, France.
- Safa, A., Hadji, L., Bourada, M., et Zouatnia, N. (2019). « Thermal vibration analysis of FGM beams using an efficient shear deformation beam theory ». *Earthquakes and Structures, Int.J.*, 17(3), 329-336.
- Sahouane, A., Hadji, L., et Bourada, M. (2019). « Numerical analysis for free vibration of functionally graded beams using an original HSDBT ». *Earthquakes and Structures, Int.J.*, 17(1), 31-37.
- Saidani, K. (2014). « Analyse des composites sandwichs et qualification de leur intégrité vis-à-vis de la ruine ». Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, Algérie.
- Sayyad, A. S., et Ghugal, Y. M. (2015). « On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results ». *Composite Structures*, 129, 177-201.
- Sayyad, A. S., et Ghugal, Y. M. (2017). « On the free vibration of angle-ply laminated composite and soft core sandwich plates ». *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 19(6), 679-711.
- Sayyad, A. S., Shinde, B. M., et Ghugal, Y. M. (2016). « Bending, vibration and buckling of laminated composite plates using a simple four variable plate theory ». *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(3), 516-535.
- Selmi, A., et Bisharat, A. (2018). « Free vibration of functionally graded SWNT reinforced aluminum alloy beam ». *Journal of Vibroengineering*, 20(5), 2151-2164.
- Senthilnathan, N. R., Lim, S. P., Lee, K. H., et Chow, S. T. (1988). « Vibration of laminated orthotropic plates using a simplified higher-order deformation theory ». *Composite Structures*, 10(3), 211-229.
- Shahadat, M. R. Bin, Alam, M. F., Mandal, N. A., et Ali, M. M. (2018). « Thermal transportation
-

- behaviour prediction of defective graphene sheet at various temperature: A Molecular dynamics study ». *American Journal of Nanomaterials*, 6(1), 34-40.
- Shimpi, R. P., et Ainapure, A. V. (2004). « Free Vibration of Two-layered Cross-Ply Laminated Plates Using Layer-wise Trigonometric Shear Deformation Theory ». *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 23(4), 389-405.
- Shimpi, R. P., et Ghugal, Y. M. (2000). « A layerwise shear deformation theory for two-layered cross-ply laminated plates ». *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 7(4), 331-353.
- Slimani, M. (2015). « Optimisation des structures mécaniques composites en vibrations ». Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, Algérie.
- Soldatos, K. P. (1992). « A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates ». *Acta Mechanica*, 94(3-4), 195-220.
- Srinivas, S. (1973). « A refined analysis of composite laminates ». *Journal of Sound and Vibration*, 30(4), 495-507.
- Srinivas, S., Joga Rao, C. V., et Rao, A. K. (1970). « An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates ». *Journal of Sound and Vibration*, 12(2), 187-199.
- Srinivas, S., et Rao, A. K. (1970). « Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates ». *International Journal of Solids and Structures*, 6(11), 1463-1481.
- Srinivas, S., et Rao, A. K. (1971). « A three-dimensional solution for plates and laminates ». *Journal of the Franklin Institute*, 291(6), 469-481.
- Suganyadevi, S., et Singh, B. N. (2016). « Dynamic Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates Using Trigonometric Layer-wise Higher Order Shear Deformation Theory ». *International Journal of Aerospace System Engineering*, 3(1), 10-16.
- Sun, C. T., et Whitney, J. M. (1973). « Theories for the dynamic response of laminated plates ». *AIAA Journal*, 11(2), 178-183.
- Swaminathan, K., et Patil, S. S. (2008). « Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates ». 82, 209-216.
- Tafla, A. (2007). « Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches ». Reims.
- Tahani, M., et Nosier, A. (2003). « Edge effects of uniformly loaded cross-ply composite laminates ». *Materials and Design*, 24(8), 647-658.
- Tanov, R., et Tabiei, A. (2000). « Simple correction to the first-order shear deformation shell finite element formulations ». *Finite elements in analysis and design*, 35(2), 189-197.
- Tekili, S. (2017). « Comportement sous sollicitations dynamiques des structures renforcées par matériaux composites ». Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, Algérie.
- Tephany, C. (2014). « Analyse de la formabilité de renforts composites à base de fibres naturelles ». Thèse de doctorat, Université Orléans, France.
- Thai, H. T., et Choi, D. H. (2013). « A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates ». *Composite Structures*, 106, 754-763.
-

- Thai, H. T., et Kim, S. E. (2010). « Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory ». *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(4), 626-633.
- Thai, H. T., et Kim, S. E. (2013). « A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates ». *Composite Structures*, 99, 172-180.
- Thai, H. T., Vo, T. P., Bui, T. Q., et Nguyen, T. K. (2014). « A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates ». *Acta Mechanica*, 225(3), 951-964.
- Thomas, C. (2011). « Etude des mécanismes d' endommagement des composites fibres de carbone / matrice polyamide : application à la réalisation de réservoirs de stockage de gaz sous haute pression de type IV ». *Science*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Paris, France.
- Timoshenko, S., et Woinowsky-Kreiger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*.
- Toledano, A., et Murakami, H. (1987). « A high-order laminated plate theory with improved in-plane responses ». *International Journal of Solids and Structures*, 23(1), 111-131.
- Topal, U., et Uzman, Ü. (2007). « Free vibration analysis of laminated plates using first-order shear deformation theory ». *Vibration Problems ICOVP 2005*, 493-498.
- Tounsi, A., Houari, M. S. A., Benyoucef, S., et Adda Bedia, E. A. (2013). « A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates ». *Aerospace Science and Technology*, 24(1), 209-220.
- Touratier, M. (1991). « An efficient standard plate theory ». *International Journal of Engineering Science*, 29(8), 901-916.
- Vilfayeau, J. . (2014). « Modélisation numérique du procédé de tissage des renforts fibreux pour matériaux composites ». *Comptes Rendus des JNC 18*, Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon, France.
- Viswanathan, K. K., Aziz, Z. A., Javed, S., Salleh, S., Tumiran, S. A. B., et Sivakumar, B. (2016). « Free Vibration of Cross-Ply Laminated Plates with Variable Thickness Based on Shear Deformation Theory ». *International Journal of Computational Methods*, 13(3), 1650016.
- Viswanathan, K. K., et Lee, S. K. (2007). « Free vibration of laminated cross-ply plates including shear deformation by spline method ». *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(3), 352-363.
- Wassereau, T. (2016). « Caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire ». Thèse de Doctorat, Université du Maine sous le sceau de l'université Bretagne Loire, France.
- Whitney, J. M. (1969). « The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates ». *Journal of Composite Materials*, 3(3), 534-547.
- Whitney, J. M. (1970). « The Effect of Boundary Conditions on the Response of Laminated Composites ». *Journal of Composite Materials*, 4(2), 192-203.
- Whitney, J. M. (1973). « Shear correction factors for orthotropic laminates under static load ». *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 40(1), 302-304.
- Whitney, J. M., et Leissa, A. W. (1970). « Analysis of a simply supported laminated anisotropic rectangular plate ». *AIAA Journal*, 8(1), 28-33.
- Yang, P. C., Norris, C. H., et Stavsky, Y. (1966). « Elastic wave propagation in heterogeneous plates ». *International Journal of Solids and Structures*, 2(4), 665-684.
- Yin, W. L. (1994). « Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer
-

- model ». *International Journal of Solids and Structures*, Pergamon, 31(11), 1549-1564.
- Younsi, A. (2018). « Proposition d' une théorie de déformation de cisaillement 2D et 3D pour l' étude du comportement mécanique des plaques ». Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.
- Zombre, W. S. C. (2019). « Durabilité des matériaux composites dans un environnement Génie Civil : expérimentation multi-échelle et analyse statistique ». Thèse de doctorat , Université Lyon, France.