



THESE DE DOCTORAT



Présentée à

UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

POUR OBTENIR

LE DIPLOME DE DOCTORAT LMD
EN GÉNIE MÉCANIQUE

Option : Mécanique et Conception des Systèmes

Par

AIT FERHAT Yazid

Intitulée :

ÉTUDE NUMERIQUE DU COMPORTEMENT EN RUPTURE
DES MATERIAUX EN FGM
SOUS DIFFERENTS TYPES DE CHARGEMENT

Directeur de thèse : Pr. BOULENOUAR Abdelkader

Soutenu le : 03 / 06 / 2021

Devant le jury composé de :

| | | | |
|--|------------|-------------------|--------------------|
| M ^r . BOUCHOUICHA Benattou | Professeur | U. Sidi Bel Abbès | Président |
| M ^r . GHAZI Abdelkader | MCA | U. Mascara | Examineur |
| M ^r . MILOUDI Abdelkader | MCA | U. Sidi Bel Abbès | Examineur |
| M ^r . BOULENOUAR Abdelkader | Professeur | U. Sidi Bel Abbès | Directeur de thèse |

Laboratoire de Matériaux et Systèmes Réactifs LMSR, Département Génie Mécanique,
UDL/ Sidi Bel Abbès, Faculté de Technologie,
BP 89, Cité Larbi Ben Mhidi, Sidi Bel Abbès 22000, Algérie

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu الله, le tout puissant de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.

Je voudrais exprimer ma plus profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, le professeur BOULENOUAR Abdelkader, qui m'a dirigé tout au long de ce travail, son aide, sa gentillesse et ces précieux conseils et j'ai aussi beaucoup apprécié son support et son sens des relations humaines, sa disponibilité permanente et aussi avec beaucoup de sympathie. C'est avec beaucoup de cœur et de plaisir que je me suis investi dans cette étude parfaitement bien encadrée et dirigée.

Je remercie aussi Messieurs les membres de jury :

- Mr. BOUCHOUICHA Benattou, Professeur de l'université Sidi Bel Abbès
- Mr. GHAZI Abdelkader, Maître conférences de l'université Mascara
- Mr. MILOUDI Abdelkader, Maître conférences de l'université Sidi Bel Abbès

Pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à ma soutenance et pour avoir accepté d'être examinateurs de ce travail doctoral.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation d'étude et à l'élaboration de cette modeste thèse.

Nombreux sont ceux et celles qui n'ont apporté les encouragements et l'aide au cours de la préparation de ma thèse. Qu'ils en soient tous chaleureusement remerciés.

Finalement, un très chaleureux remerciement à toute ma famille, tous mes amis et mes collègues de la faculté de technologie de l'université Djillali Liabes de Sidi Bel-Abbès et plus particulièrement les membres de notre Laboratoire (LMSR) qui m'ont soutenu et encouragé.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail tout d'abord à mes très chers parents qui m'ont encouragé et éclairé le chemin en me donnant "douaa" tout le long de mes années d'études.

Que Dieu me les gardes

A toute ma famille « AIT FERHAT »

La famille IGUETOULENE, IGDOULALLANE et SEKOUR

A tous mes amis et collègues

Et tous ceux que je connais.

Résumé

L'objectif de cette étude est d'analyser numériquement, par la méthode des éléments finis, le comportement en rupture des matériaux à gradient des propriétés (FGM), sollicités sous chargement mécanique et thermique. Dans ce travail de thèse, plusieurs méthodes numériques ont été proposées afin de déterminer l'évolution des FICs en mode mixte. A cet effet, des exemples d'applications suffisamment variés ont été testés et comparés, en se basant sur l'approche locale. Une technique basée sur la corrélation de déplacement dite « GDC » a été proposée et validée pour le cas des matériaux FGM. Les propriétés mécaniques des structures en FGM sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code par éléments finis ANSYS. Ce programme permet de localiser les coordonnées du centre de gravité de chaque élément du maillage et de calculer ensuite les propriétés mécaniques élastiques à partir des lois de mélange des matériaux FGM. Le deuxième objectif de ce travail est de présenter des aspects numériques liés à l'implémentation de la méthode d'intégrale d'interaction pour le but de déterminer les FICs par l'approche globale. Le présent développement numérique est basé sur le couplage des codes de calcul Ansys-Matlab. L'exactitude et la fiabilité de la démarche sont validés ; les résultats obtenus sont comparés avec d'autres travaux numériques existents dans la littérature.

Mots-clés

Matériaux à gradient de propriétés ; Méthode des éléments finis ; Fissure ; Facteur d'intensité des contraintes ; Corrélation de déplacement ; Intégrales d'interaction ; Intégrale M

Abstract

The objective of this study is to numerically analyze, by the finite element method, the fracture behaviour of Functionally Graded Materials (FGM), under mechanical and thermal loadings. In this thesis work, several numerical methods have been proposed in order to determine the evolution of SIFs under mixed mode conditions. To this end, sufficiently varied examples of applications were tested and compared, based on the local approach. A technique based on the displacement correlation called "GDC" has been proposed and validated for the case of FGM

materials. The mechanical properties of structures in FGM are declared using a subroutine implemented in the ANSYS finite element code. This program makes it possible to locate the coordinates of the gravity center for each element of the mesh and then to calculate the elastic mechanical properties from the mixing laws of FGM materials. The second objective of this work is to present numerical aspects related to the implementation of the interaction integral method for the purpose of determining the SIFs by the global approach. This numerical development is based on the coupling of Ansys-Matlab calculation codes. The accuracy and reliability of the approach are validated; the results obtained are compared with other numerical works used in the literature.

Key words

Functionally Graded Materials; Finite Element Method; Crack; Stress Intensity Factor; Displacement Correlation; Interaction Integrals; M-Integral.

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو التحليل الرقمي لسلوك كسر المواد ذات الخصائص المتدرجة وهذا تحت تأثير الضغط الميكانيكي والحراري، باستعمال طريقة العناصر المحدودة. من خلال هذا العمل، تم اقتراح العديد من الطرق الرقمية بهدف تعيين تطور عامل شدة الإجهاد في الوضع المختلط. تحقيقاً لهذه الغاية، تم اختبار ومقارنة عدة أمثلة متنوعة بالاعتماد على النهج المحلي. تم اقتراح طريقة تعتمد على تقنية ارتباط الإزاحة تدعى «GDC»، وكذا التحقق من صحتها في حالة المواد ذات الخصائص المتدرجة. إن الإعلان عن الخصائص الميكانيكية لهذه المواد تم باستخدام برنامج فرعي أدمج في برنامج حساب ANSYS يعتمد على طريقة العناصر المحدودة. يتيح هذا البرنامج الفرعي تحديد إحداثيات مركز ثقل لكل عنصر من عناصر الشبكة، لغرض حساب الخصائص الميكانيكية المرنة باستعمال قوانين الخلط لهذه المواد.

ان الهدف الثاني من هذا العمل هو تقديم الجوانب الرقمية المتعلقة بتنفيذ أسلوب يدعى تكاملات التفاعل من اجل تحديد عامل شدة الإجهاد، بالاعتماد على النهج العام. يعتمد هذا التطور الرقمي على اقتران البرنامجين Ansys و Matlab. تم التحقق من دقة وموثوقية الخطوات، عن طريق مقارنة النتائج المتحصل عليها تم مقارنتها بأعمال رقمية أخرى متاحة في المراجع.

الكلمات الدالة:

المواد ذات تدرج الخصائص ; طريقة العناصر المحدودة ; الشق ; عامل شدة الاجهاد ; ارتباط الإزاحة ; تكاملات التفاعل; تكامل M.

Table des matières

| | |
|-----------------------------|------|
| Remerciement | i |
| Dédicace..... | ii |
| Résumé | iii |
| Table des matières | v |
| Liste des figures | viii |
| Liste des tableaux..... | xi |
| Liste des Notations..... | xii |
| Introduction générale | 01 |

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites et FGMs

| | | |
|------------|--|----|
| I.1. | Introduction..... | 04 |
| I.2. | Matériaux composites..... | 06 |
| I.2.1. | Les composants du matériau composite..... | 07 |
| I.2.1.1. | Renforts..... | 07 |
| I.2.1.2. | Matrices | 08 |
| I.2.1.2.a. | Résines thermoplastiques..... | 09 |
| I.2.1.2.b. | Résines thermodurcissables..... | 09 |
| I.2.1.2.c. | Les élastomères..... | 09 |
| I.2.1.3. | L'interface | 09 |
| I.2.1.4. | Charges et additifs | 10 |
| I.3. | Classification des matériaux composites..... | 11 |
| I.4. | Les matériaux composites structuraux..... | 12 |
| I.4.1. | Sandwichs..... | 12 |
| I.4.2. | Monocouches..... | 12 |
| I.4.3. | Stratifiés..... | 13 |
| I.5. | Propriétés des matériaux composites..... | 13 |
| I.6. | Les endommagements des composites..... | 14 |
| I.6.1. | Endommagements au niveau des fibres | 14 |
| I.6.2. | Endommagements au niveau des plis | 15 |
| I.6.3. | La ruine du stratifié | 16 |
| I.7. | Le phénomène de délaminage..... | 16 |
| I.8. | Les domaines d'utilisations | 17 |
| I.9. | Les avantages et les inconvénients des matériaux composites..... | 18 |
| I.9.1. | Les avantages | 18 |
| I.9.2. | Les inconvénients | 18 |
| I.10. | Les Matériaux à Gradient Fonctionnel..... | 19 |
| I.10.1. | Qu'est-ce qu'un FGM ? | 19 |
| I.11. | Idée générale sur le développement des FGMs..... | 20 |
| I.12. | Procédés d'élaboration de FGM..... | 22 |
| I.13. | Les propriétés et les domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués..... | 23 |
| I.14. | Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels..... | 24 |
| I.15. | Lois de variation des propriétés matérielles des matériaux FGM..... | 25 |
| I.15.1. | Fonction exponentielle E-FGM..... | 26 |
| I.15.2. | Fonction sigmoïde S-FGM..... | 27 |
| I.15.3. | Fonction puissance P-FGM..... | 28 |
| I.16. | Les Caractéristiques des matériaux FGMs..... | 29 |
| I.17. | Avantages et inconvénients des FGMs | 30 |
| I.17.1. | Avantages des FGMs | 30 |
| I.17.2. | Inconvénients des FGMs | 30 |

| | | |
|------|-----------------|----|
| I.18 | Conclusion..... | 31 |
|------|-----------------|----|

Chapitre II

Généralités sur la mécanique de la rupture

| | | |
|----------|---|----|
| II.1 | Introduction..... | 32 |
| II.2 | Généralités sur la mécanique de la rupture..... | 32 |
| II.2.1 | Processus de fissuration..... | 32 |
| II.2.2 | Différents modes de rupture | 34 |
| II.3 | Critères de rupture en mécanique linéaire élastique | 34 |
| II.3.1 | Approche énergétique | 35 |
| II.3.2 | Facteur d'intensité des contraintes..... | 36 |
| II.4 | Mécanique élastoplastique de la rupture..... | 38 |
| II.4.1 | Ecartement à fond de fissure (CTOD) | 38 |
| II.4.2 | Intégrale-J..... | 40 |
| II.5 | État de l'art sur le problème de rupture des matériaux FGMs | 41 |
| II.5.1 | Evaluation numérique du FIC..... | 41 |
| II.5.1.a | Méthodes d'extrapolation..... | 42 |
| II.5.1.b | Méthodes de corrélation..... | 44 |
| II.5.1.c | Technique de l'intégrale de fermeture de fissure modifiée..... | 45 |
| II.5.1.d | Méthodes des intégrales d'interaction..... | 45 |
| II.5.2 | Rupture des matériaux FGMs sous différents chargements..... | 50 |
| II.5.2.a | Chargement mécanique..... | 51 |
| II.5.2.b | Chargement thermique | 53 |
| II.6 | Conclusion | 54 |

Chapitre III

Etude par EF du comportement en rupture des FGMs

| | | |
|---------|--|----|
| III.1 | Introduction | 55 |
| III.2 | Modélisation de la singularité et l'évaluation du FIC..... | 55 |
| III.3 | Modélisation numérique du comportement mécanique des FGMs | 57 |
| III.4 | Etude par EF du comportement en rupture des FGM..... | 57 |
| | Exemple 1 : Plaque pré-fissurée sollicitée en flexion | 57 |
| | Exemple 2 : Fissure centrale inclinée dans un disque en FGM..... | 60 |
| | Exemple 3 : Plaque en FGM pré-fissurée sollicitée thermiquement..... | 63 |
| III.5 | Méthode de déplacement généralisé (GDC) | 66 |
| III.6 | Théorie..... | 67 |
| III.7 | Exemples de validation..... | 68 |
| III.7.1 | Chargement mécanique..... | 68 |
| | Exemple 1 : Poutre de flexion 3-points avec une fissure parallèle à la gradation du matériau..... | 68 |
| | Exemple 2 : Plaque FGM avec une fissure débauchante..... | 71 |
| III.7.2 | Chargement thermique | 73 |
| | Exemple 1 : Fissure débouchante dans une plaque FGM, soumise à une charge thermique..... | 73 |
| | Exemple 2 : Fissure dans une barrière thermique en FGM..... | 74 |
| III.8 | Conclusion..... | 79 |

Chapitre IV

Formulation & l'implémentation numérique de l'intégrale d'interaction

| | | |
|------|---|----|
| IV.1 | Introduction..... | 80 |
| IV.2 | Théorie : Formulation de l'intégrale d'interaction..... | 80 |

| | | |
|---------------------------------|--|-----|
| IV.3 | Méthode des éléments finis..... | 84 |
| IV.3.1 | Couplage Ansys- Matlab..... | 84 |
| IV.3.2 | Stratégie et mise en œuvre de l'implémentation..... | 86 |
| IV.4 | Exemples d'application et validation..... | 91 |
| | Exemple 1 : Plaque mince contenant une fissure centrale..... | 91 |
| | Exemple 2 : Plaque pré-fissurée sollicitée en traction uni-axiale..... | 94 |
| | Exemple 3 : Epreuve de flexion 4-points en FGM..... | 98 |
| IV.5 | Conclusion | 103 |
| Conclusion générale..... | | 104 |
| Référence bibliographiques..... | | 106 |

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

| | | |
|-------------|--|----|
| Figure I.1 | Composition d'un matériau composite..... | 7 |
| Figure I.2 | les familles du renfort | 8 |
| Figure I.3 | Les familles du matrices..... | 8 |
| Figure I.4 | Exemples d'élastomères..... | 9 |
| Figure I.5 | Interface entre Couche+ (couche supérieur) et Couche- (couche inférieur)..... | 10 |
| Figure I.6 | La bonne résistance aux contraintes des matériaux composites..... | 10 |
| Figure I.7 | Classification des matériaux composites..... | 11 |
| Figure I.8 | Matériau composite stratifié..... | 12 |
| Figure I.9 | Matériau composite monocouche..... | 13 |
| Figure I.10 | Matériau composite stratifié..... | 13 |
| Figure I.11 | Microdélaminage (délaminage diffus) | 14 |
| Figure I.12 | Fissurations transverses a) décohésion fibre/matrice b) la fissure de plis perpendiculaires au chargement..... | 15 |
| Figure I.13 | Le phénomène de délaminage..... | 15 |
| Figure I.14 | Phénoménologie des dégradations..... | 16 |
| Figure I.15 | Modes de rupture et front de délaminage..... | 17 |
| Figure I.16 | Variation des propriétés des FGMs: Variation continue, b) Variation discrète.... | 20 |
| Figure I.17 | Production des FGMs par la technique de la métallurgie des poudres | 23 |
| Figure I.18 | Microstructure de FGM céramique-métal..... | 23 |
| Figure I.19 | Distribution composante des matériaux..... | 25 |
| Figure I.20 | Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et FGM..... | 25 |
| Figure I.21 | Géométrie d'une plaque FGM..... | 26 |
| Figure I.22 | Variation du module de Young d'un matériau E-FGM..... | 27 |
| Figure I.23 | Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure F-FGM..... | 28 |
| Figure I.24 | Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM..... | 29 |

CHAPITRE II

| | | |
|--------------|--|----|
| Figure II.1 | Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure..... | 33 |
| Figure II.2 | Les modes fondamentaux de la mécanique de la rupture..... | 34 |
| Figure II.3 | Répartition des contraintes au voisinage du fond de fissure..... | 36 |
| Figure II.4 | Estimation du CTOD à partir du déplacement à la distance r_y en amont de l'extrémité d'une fissure de longueur $(a + r_y)$ | 39 |
| Figure II.5 | Estimation du CTOD à partir du modèle de Dugdale-Barenblatt..... | 40 |
| Figure II.6 | L'intégrale J de contour..... | 41 |
| Figure II.7 | Elément singulier et coordonnées pour la description du champ de déplacements près de la pointe de la fissure..... | 43 |
| Figure II.8 | Eléments singuliers avec noeuds au quart des côtés..... | 44 |
| Figure II.9 | Paramètres géométriques R et δ | 48 |
| Figure II.10 | Distances δ_1 et δ_2 | 48 |

CHAPITRE III

| | | |
|---------------|---|----|
| Figure III.1 | Eléments singuliers avec nœuds au quart des côtés..... | 56 |
| Figure III.2 | Représentation schématique d'une plaque fissurée sollicitée en flexion..... | 58 |
| Figure III.3 | Champ de contraintes normales au voisinage de la fissure (avec $a/w = 0.2$)..... | 58 |
| Figure III.4 | Evolution du FIC K_I en fonction du rapport E_2/E_1 : $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ et 0.6 | 59 |
| Figure III.5 | a) Fissure centrale inclinée dans un disque circulaire en FGM, (b) Maillage globale du disque, (c) Maillage détaillé au voisinage de deux pointes de fissure..... | 60 |
| Figure III.6 | Variation de K_I et K_{II} en fonction de β : a) Variation de K_I , b) Variation de K_{II} | 61 |
| Figure III.7 | Variation du facteur d'intensité de contraintes K_I en fonction des angles d'inclinaison ($\beta = -0.75$)..... | 62 |
| Figure III.8 | Variation du facteur d'intensité de contraintes K_{II} en fonction des angles d'inclinaison ($\beta = -0.75$)..... | 62 |
| Figure III.9 | Organigramme de l'analyse thermique et structurale..... | 63 |
| Figure III.10 | (a) Géométrie d'une plaque fissurée en FGM, (b) Maillage globale de la plaque... | 64 |
| Figure III.11 | (a) Points de référence utilisés par Fu et al. [FU 12], cas des matériaux homogènes; (b) Points de référence utilisés par la méthode A, cas des matériaux FGMs..... | 68 |
| Figure III.12 | Géométrie de l'éprouvette de flexion 3 points en FGM | 69 |
| Figure III.13 | Maillage de l'éprouvette de flexion 3 points : (a) Maillage globale, (b) Maillage au voisinage de la pointe de fissure pour différentes tailles de fissure..... | 69 |
| Figure III.14 | a) Géométrie et conditions aux limites de la plaque FGM ; (b) maillage EF global ($a/w = 0.4$)..... | 71 |
| Figure III.15 | a) Géométrie et conditions aux limites de la plaque FGM; (b) Maillage global ($a/w = 0.5$)..... | 73 |
| Figure III.16 | Géométrie de système FG-TBC | 75 |
| Figure III.17 | Evolution des propriétés thermomécaniques dans le système FG-TBC..... | 76 |
| Figure III.18 | Maillage globale de la structure FG-TBC..... | 77 |
| Figure III.19 | Variation de K_I en fonction de a/W_1 | 77 |
| Figure III.20 | Contour de la température dans le FG-TBC ($a/W_1 = 0.4$) a) Garg et Pant [GAR 17], b) Présente étude..... | 78 |
| Figure III.21 | Distribution de la température dans le système FG-TBC a) Présente étude, b) Résultats de KC et Kim [KC 08]..... | 79 |

CHAPITRE IV

| | | |
|-------------|---|----|
| Figure IV.1 | Intégrale J..... | 82 |
| Figure IV.2 | Fonction q sur les éléments d'intégration..... | 83 |
| Figure IV.3 | Organigramme de programmation par d'éléments finis..... | 85 |
| Figure IV.4 | Points de Gauss..... | 86 |
| Figure IV.5 | Représentation du J domain et la fonction q | 87 |

| | | |
|--------------|--|-----|
| Figure IV.6 | Transformation géométrique linéaire d'un élément Q4 : (a) l'élément réel, (b) l'élément déformé. | 87 |
| Figure IV.7 | a) Fissure centrale inclinée dans une plaque mince, (b) Maillage globale de la plaque, (c) Maillage détaillé au voisinage de la pointe de fissure..... | 91 |
| Figure IV.8 | Définition des domaines d'intégration autour de deux pointes de fissure..... | 92 |
| Figure IV.9 | Variation des FICs normalisés en fonction des angles d'inclinaison β | 93 |
| Figure IV.10 | Variation des FICs normalisés en fonction des angles d'inclinaison β | 94 |
| Figure IV.11 | (a) Représentation schématique d'une plaque fissurée sollicitée en flexion (b) Maillage globale de la plaque, (c) Maillage détaillé au voisinage de la fissure..... | 95 |
| Figure IV.12 | Définition des domaines d'intégration autour de la pointe de fissure..... | 96 |
| Figure IV.13 | Variation des FICs normalisés en fonction de E_2/E_1 : Indépendante du domaine d'intégration..... | 96 |
| Figure IV.14 | Géométrie de l'éprouvette de flexion 4-points en FGM les dimensions sont données en [mm]..... | 98 |
| Figure IV.15 | Maillage de l'éprouvette de flexion 4points : (a) Maillage globale pour différentes positions de fissure, (b) Maillage détaillé au voisinage de la pointe de fissure, (c) Domaine d'interaction (D)..... | 99 |
| Figure IV.16 | Evolution des propriétés mécaniques dans la zone graduée [ROU 00, KIM 07] : a) Module de Young E et Coefficient de Poisson ν , b) Ténacité du matériau K_{IC} | 99 |
| Figure IV.17 | Résultats expérimentaux des angles d'amorçage θ_0 et des chemins de fissuration [ROU 00]..... | 100 |
| Figure IV.18 | Signe de l'angle de propagation θ_0 [CHA 19]: a) $K_{II} > 0$, b) $K_{II} < 0$ | 101 |
| Figure IV.19 | Evolution de l'angle de bifurcation θ_0 dans la zone graduée..... | 102 |

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

| | | |
|-------------|--|----|
| Tableau I.1 | Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGMs [SWA 17]. | 21 |
| Tableau I.2 | Les méthodes de fabrication des FGMs..... | 22 |
| Tableau I.3 | Les propriétés des FGMs et leurs applications significatives [BOH 14, MAK 14, UDU 14]..... | 24 |
| Tableau I.4 | Les propriétés des différentes couches des matériaux FGMs [HOU 11] | 30 |

CHAPITRE III

| | | |
|---------------|---|----|
| Tableau III.1 | Valeurs du FIC normalisé K_I/K_0 avec : $K_0 = \left(\frac{E_1 \alpha_1 \theta_0}{1-\nu_1}\right) \sqrt{\pi a}$ | 66 |
| Tableau III.2 | FIC normalisé $(K_I \sqrt{H}/\pi)$ calculé pour la poutre de flexion à 3-points | 70 |
| Tableau III.3 | Résultats du FIC K_I pour différentes tailles de fissure..... | 72 |
| Tableau III.4 | Résultats du FIC K_I pour différents rapports a/W | 74 |
| Tableau III.5 | Propriétés thermomécaniques du système FG-TBC..... | 75 |

CHAPITRE IV

| | | |
|--------------|--|-----|
| Tableau IV.1 | Evolution du FIC K_I normalisé $(K_I/\sigma\sqrt{\pi a})$ obtenu par différentes méthodes: $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ et 0.6 | 97 |
| Tableau IV.2 | Propriétés matériels dans la zone graduée..... | 100 |
| Tableau IV.3 | Comparaison entre P_{cr} , K_I et K_{II} (Position P_1 : $\xi_1 = 0.17$)..... | 101 |
| Tableau IV.4 | Comparaison entre les angles d'amorçage θ_0 | 102 |

Liste des notations

| | |
|---|--|
| μ_{tip} | Module de cisaillement calculé à la pointe de fissure (Mpa) |
| G | Taux de restitution d'énergie (J/mm^2) |
| ν_{tip} | Coefficient de Poisson calculé à la pointe de fissure |
| a | Longueur de fissure (mm) |
| Δa | Variation de longueur de fissure (mm) |
| E_{tip} | Module de Young ; Module de Young calculé à la pointe de fissure (Mpa) |
| $E(z)$ | Module de Young en fonction de « z » (Mpa) |
| $E(x)$ | Module de Young en fonction de « x » (Mpa) |
| σ | Contrainte appliquée (Mpa) |
| α | Dilatation thermique ($^{\circ}C^{-1}$) |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | Contraintes dans la direction x, y et z (Mpa) |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | Déformation dans la direction x, y et z |
| $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ | Contraintes de cisaillement (Mpa) |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ | Déformations de distorsion |
| K_I, K_{II}, K_{III} | Facteur d'intensité de contraintes en modes I, II et III ($N.mm^{-3/2}$) |
| $K_I^{(aux)}, K_I^{(act)}$ | Facteur d'intensité de contraintes de mode I à l'état auxiliaire et actuel ($N.mm^{-3/2}$) |
| K_{IC} | Facteur critique d'intensité de contraintes ($MPa \sqrt{mm}$) |
| R_{int} | Rayon intérieur (mm) |
| R_{ext} | Rayon extérieur (mm) |
| ξ | Positions de la fissure |
| W_{ext} | Énergie potentielle des forces extérieures |
| W_e | Energie de déformation élastique (J) |
| w_e | Densité d'énergie de déformation élastique (J/mm^3) |
| r, θ | Coordonnées polaires |
| Jac | Matrice Jacobienne |
| $ Jac $ | Déterminant de la matrice Jac |
| J | Intégrale de Rice |
| J_K | Intégrale |
| M | Intégrale d'interaction |
| Γ | Chemin arbitraire autour de la pointe de fissure |
| u_i | Déplacements (mm) |
| V_{Fi} | Fraction volumique |
| l_E | Longueur d'élément (mm) |
| T_i | Température ($^{\circ}C$) |
| k | conductivité thermique ($W.m^{-1}K^{-1}$) |
| CVD | dépôts chimique en phase vapeur |
| PVD | dépôts physique en phase vapeur |
| $P-FGM$ | la variation des fractions de volume sous une fonction puissance |
| $S-FGM$ | la variation des fractions de volume sous une fonction sigmoïde |
| $E-FGM$ | la variation des fractions de volume sous une fonction exponentielle |
| $[]$ | Matrice |
| $\{\}$ | Vecteur colonne |

Introduction générale

Grâce aux récentes recherches, aussi bien publiques que privées, les matériaux composites ont trouvé une application plus large dans les secteurs industriels de l'aéronautique, de l'automobile, du sport et loisir, du génie civil et de la marine. Ces matériaux présentent des avantages de légèreté, de résistance mécanique, et de résistance à la corrosion. Ils permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application.

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des matériaux composites sous la forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé. Que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et plus récemment en aéronautique. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme et durée de vie prolongée. Mais l'inconvénient c'est l'existence de concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches en raison du changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre.

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connus sous le nom de Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) ou matériaux à gradient fonctionnel, présente une attention considérable due à un changement continu de la composition, les propriétés mécaniques et physiques varient d'une manière graduelle et continue. Cette variation pourra être dans une direction, deux directions, ou trois directions. En plus, la combinaison matérielle de plus de deux matériaux est envisageable. Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit pour la première fois au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais. Depuis, un effort a été suivi pour développer des matériaux à haute résistance basée sur les matériaux à gradient fonctionnel. Ces matériaux ont été initialement conçus comme des matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion. Ils sont maintenant développés pour un usage général en tant que composants structuraux dans un environnement de haute température.

Les matériaux à gradient des propriétés (FGM) sont des composites de pointe, dont la microstructure est hétérogène. Généralement ces matériaux sont fabriqués à partir de composants isotropes tels que les métaux et la céramique. Les FGMs trouvent leur application dans divers

domaines tels que les avions, les secteurs biomédicaux et les constructions civiles et industrielles. Les FGMs sont obtenus en changeant sans interruption les constituants des matériaux multiphases dans une fraction prédéterminée de volume du matériau constitutif. La fonction de loi de puissance, et la fonction exponentielle et sigmoïdes sont employées pour décrire les variations des propriétés matérielles des matériaux FGMs, avec l'apparition des concentrations des contraintes dans les interfaces auxquelles le matériau est continu mais change graduellement.

Différentes méthodologies sont proposées dans la littérature pour examiner le comportement des fissures situées en FGM, en se basant sur des approches locales et énergétiques. Un des moyens efficaces de conduire l'analyse de la rupture des FGMs consiste à utiliser la méthode d'intégral d'interaction en conjonction avec la méthode des éléments finis. Cette technique est la plus compatible avec la formulation de la méthode des éléments finis, elle est relativement exploitée dans la littérature.

Objectif de la thèse

L'objectif principal de ce travail de thèse est de présenter une étude numérique par la méthode des éléments finis, du comportement en rupture des structures en FGMs, sous les conditions de chargement mécanique et thermique, en se basant sur l'approche locale. Par ailleurs, un autre objectif de ce travail est de présenter un développement numérique de l'implémentation de la méthode d'intégrale d'interaction pour le but de déterminer les FICs en mode mixte.

Plan de la thèse

Le plan de la présente thèse est organisé en quatre chapitres répartis comme suit :

Le premier chapitre, est consacré aux matériaux à gradient de propriété, leurs utilisations, leurs développements, leurs domaines d'application, les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles.

Le deuxième chapitre, est dédié à un rappel sur la mécanique de la rupture. Une attention particulière sera portée sur une bibliographie de quelques recherches scientifiques portant sur le comportement en rupture des matériaux fonctionnellement graduée, en mettant l'accent sur les approches locales et globales, ainsi les travaux publiés.

Le troisième chapitre, est consacré à l'étude numérique du comportement en rupture des matériaux FGMs. Un intérêt particulier est porté au calcul du facteur d'intensité de contrainte par des approches locales, qui consistent à exploiter directement les déplacements du nœud le plus proche de la pointe de fissure.

Dans ce chapitre on présentera les résultats obtenus. Ils seront comparés avec d'autres résultats publiés par d'autres auteurs. Cette comparaison nous a permis la validation de nos résultats.

Le quatrième chapitre, est réservé à la formulation de l'intégrale d'interaction et la présentation des aspects numériques liés à l'implémentation de cette approche énergétique afin de déterminer ensuite les facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte. Le présent développement numérique est basé sur l'utilisation de la MEF, par le couplage de deux codes de calcul Ansys et Matlab. La bonne performance du programme développé a été clairement démontrée et validée à travers une série d'exemples numériques.

- Une conclusion générale clôture l'ensemble de ces travaux permettant ainsi de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer les diverses perspectives dans le cadre de cette étude.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites et FGMs

I.1. Introduction

L'ingénieur a peut-être plus de 50 000 matériaux à sa disposition. Lorsqu'il conçoit une structure, comment s'y prend-il pour choisir dans ce vaste menu le matériau le plus adapté à son objectif ? Les erreurs peuvent engendrer des désastres.

L'amélioration des performances des pièces structurelles peut conduire à rechercher, au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques des différents matériaux au sein d'une même pièce.

Cependant, avec ces nouveaux matériaux, des nouveaux processus de fabrication ainsi que des théories plus poussées doivent être développés et mis en œuvre afin de mieux comprendre le comportement de ces structures fabriquées.

Un matériau composite est donc un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Les plus répandus et possédant des propriétés mécaniques exceptionnelles sont ceux constitués de deux phases : la matrices et les renforts [DOR 86].

L'optimisation des propriétés de composite c'est par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Par exemple, pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, une couche d'un matériau métallique peut coller à la surface d'une structure céramique, la transition brusque des propriétés des matériaux à l'interface entre les matériaux discrets peuvent provoquer une forte concentration des contraintes entraînant une déformation plastique ou de fissuration, c'est le cas des composites conventionnels, c'est pour cela les propriétés mécaniques à l'interface entre fibres et matrice sont de grandes importances dans l'exécution d'un composite. Pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différents constituants du composite. Donc un gradient de composition c'est la solution d'une transition continue des propriétés recherchées qui permet de diminuer ces effets nuisibles, avec l'utilisation d'un matériau à gradient de propriété FGM (*Functionally Graded Material*).

Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : Comment ce concept a été germé, et comment l'étude des FGMs a-t-elle été lancée ? Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGMs a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel FGM. En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGMs à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier. La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses.

Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGMs sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les

déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGMs trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil [BAR 08].

L'étude du comportement en rupture des FGMs est compliquée en raison du gradient des propriétés thermiques et mécaniques. Dans les matériaux FGMs de type céramique-métal, les fissures se comportent de plusieurs façons selon les conditions de variation des propriétés graduées et du chargement appliqué.

L'apparition des fissures est observée dans les FGMs céramique-métal sollicités sous des chocs thermiques ou fatigue thermique. L'amorçage de fissure est observée le long de l'interface d'un multicouches FGMs [KAW 96]. La rupture et l'évaluation d'une fissure dans les structures en FGM nécessite une compréhension du comportement en rupture de ces matériaux. La plupart des études sur la rupture des FGMs, se sont concentrées sur le comportement élastique linéaire de ces matériaux.

I.2. Matériaux composites

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [BER 10].

La composition de ces matériaux comme le montre la figure (I.1), combine un matériau de renfort dispersé sous forme de particules, fibres courtes ou fibres longues, au sein d'une matrice qui les enrobe. Avec une zone créée par l'adhérence et la réaction entre les fibres et la matrice s'appelle l'interface qu'elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice. Le choix des renforts et de la matrice, de leur disposition, de leur fraction respective, permet à l'élaborateur du matériau de le concevoir pratiquement (sur mesure) optimisé pour la pièce où il sera utilisé, et même parfois optimisé localement en fonction de la distribution locale des contraintes dans la pièce. La résistance et la rigidité d'un composite sont assurées principalement par les fibres qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice.

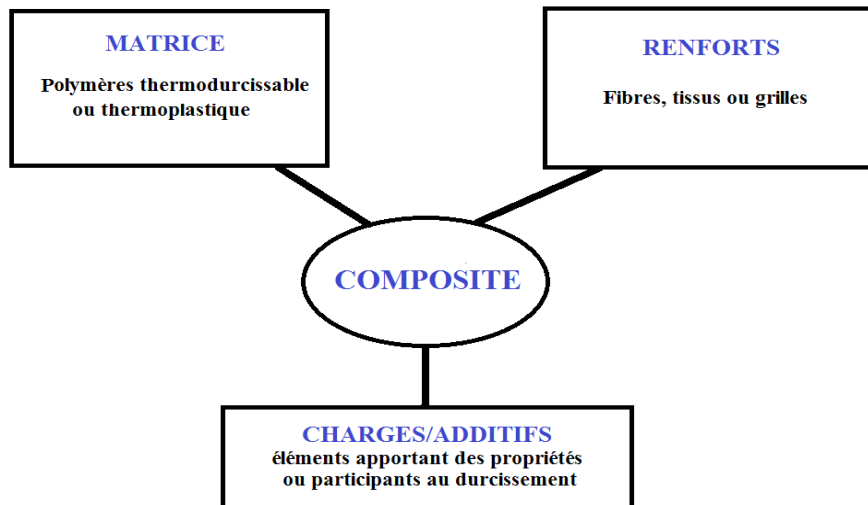


Figure I.1. Composition d'un matériau composite.

I.2.1. Les composants du matériau composite

I.2.1.1. Renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite. Ils doivent également être compatibles avec la matrice du composite sur le plan chimique, c'est-à-dire assurer une adhérence interfaciale renfort-matrice suffisante et stable dans le temps.

Les rôles des renforts consistent à :

- Supporter les efforts appliqués
- Conférer au composite sa rigidité élastique et sa résistance à la rupture, éventuellement à haute température.

Les principaux types de renforts se distinguent par leur géométrie (particules, billes, fibres courtes, fibres longues), par leur disposition, notamment pour les fibres (aléatoire 3D, feutres, nappes de mat 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissages 3D) ou par leur nature. Les différentes familles du renfort sont citées dans la figure (I.2) sous forme organigramme.

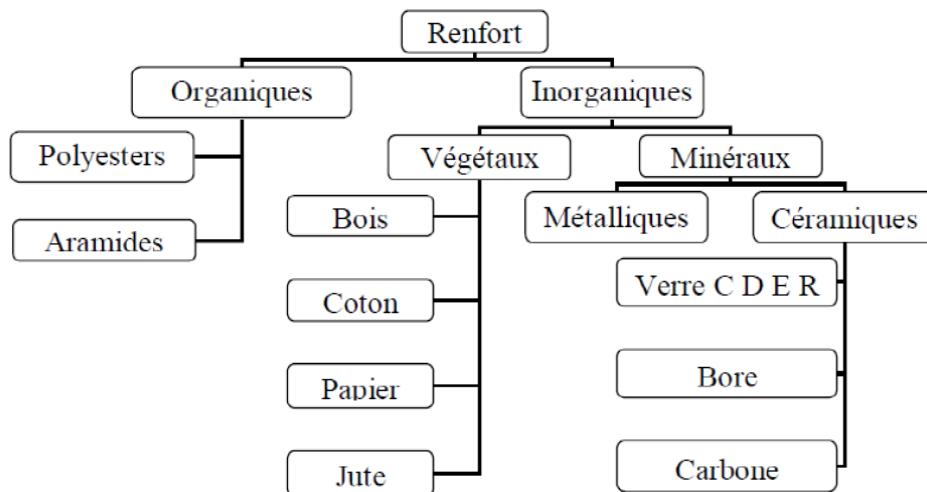


Figure I.2. Les familles du renfort.

I.2.1.2. Matrices

La matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, la classification de la matrice est représentée sous forme organigramme, donné par la figure (I.3).

La matrice d'un composite a pour rôles :

- D'embrober les renforts, les protégeant ainsi du milieu extérieur.
- D'assurer une répartition spatiale homogène des renforts.
- De transmettre aux renforts les efforts extérieurs et de les répartir.
- De conférer la forme à la pièce de matériau composite : ce sont elles qui conditionnent l'aptitude à la mise en forme du composite.

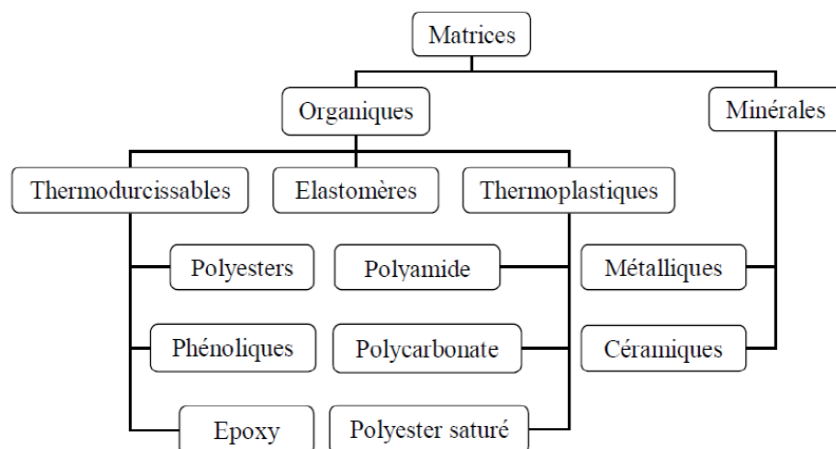


Figure I.3. Les familles des matrices.

On distingue trois catégories principales de matrices :

- Résines thermoplastiques,
- Résines thermodurcissables,
- Élastomères.

a) Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques.

b) Résines thermodurcissables

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, aminoplastes, furaniques) et les résines époxy sont des résines thermodurcissables.

c) Élastomères

Sont des polymères synthétiques ou naturels dont la structure particulière confère une importante élasticité. À titre d'exemple, nous citons : les polyuréthanes, le néoprène et le latex (Figure I.4).

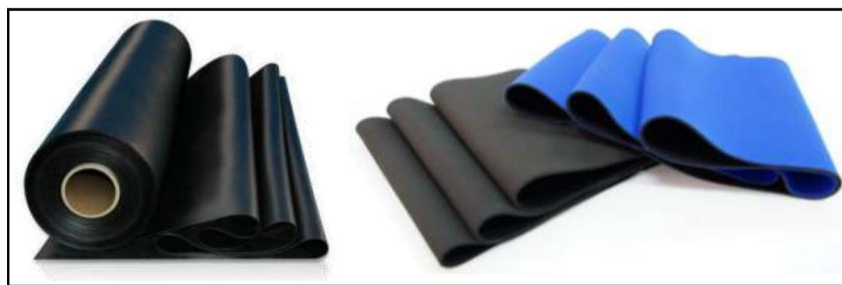


Figure I.4. Exemples d'élastomères.

I.2.1.3. L'interface

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif (Figure I.5), bonne adhérence en couche fine. Ces produits chimiques entrent aussi dans

la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

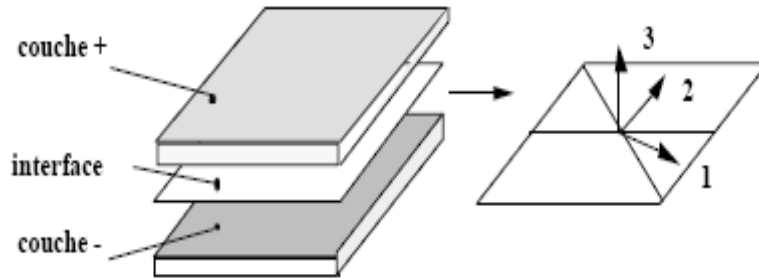


Figure I.5. Interface entre Couche+ (couche supérieur) et Couche- (couche inférieur).

I.2.1.4. Charges et additifs

Dans les matériaux composites on appelle « les matières d'origine minérale, végétale, synthétique ou organique se présentant sous forme pulvérulente ou fibreuse chimiquement pures et inertes vis-à-vis des résines. Mélangées à une résine ou bien Des produits peuvent être incorporés à la résine pour renforcer les propriétés mécaniques (charges renforçantes, ex : charges sphériques creuses) et des charges non renforçantes peuvent être également utilisées pour diminuer le coût des matrices en résine » Les charges et additifs.

Ces additifs apportent de nouvelles propriétés et modifient les caractéristiques du produit fini. Concernant le type colorant ou agent de démoulage sont largement utilisés lors de la conception des structures constituées de matériaux composites.

Un matériau composite est l'assemblage des fibres de renforcement et d'une matrice souvent organique. Cela permet au matériau d'avoir des propriétés intéressantes, représenté par une bonne résistance aux contraintes (Figure I.6).

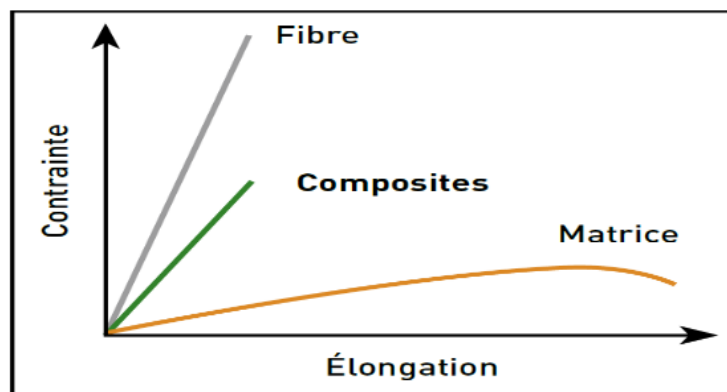


Figure I.6. La bonne résistance aux contraintes des matériaux composites [VIN 17].

I.3. Classification des matériaux composites

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer par les formes des renforts [GÜR 99]. Les composites sont donc divisés en quatre catégories, comme le montre la figure (I.7).

- Composites à renforts de particules
- Composites à renforts de paillettes
- Composites à renforts de fibres
- Composites stratifiés

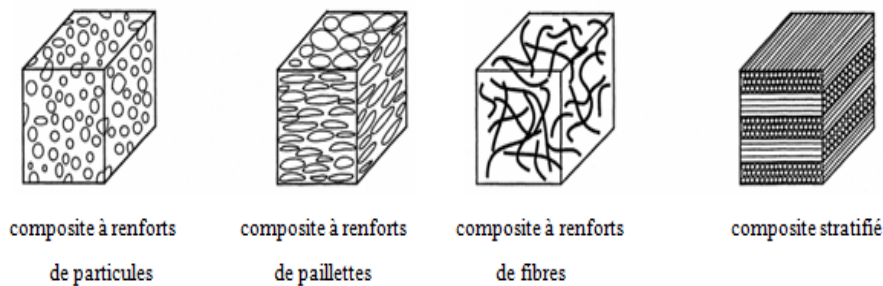


Figure I.7. Classification des matériaux composites [GÜR 99].

Il existe 3 grandes familles qui répertorient les matériaux composites en fonction de la matrice qui les composent :

- **Le CMO** (ou composite à matrice organique) qui est le plus utilisé aujourd'hui grâce à son coût plus bas permettant une production en série.
- **Le CMC** (ou composite à matrice céramique) qui est majoritairement utilisé pour des domaines très spécifiques à haute technicité et à température élevée : spatial, militaire ou encore nucléaire.
- **Le CMM** (ou composite à matrice métallique) qui est composé d'aluminium, zinc ou magnésium par exemple qui peut être utilisé pour diverses applications comme l'automobile, les loisirs ou encore l'électronique. Pour chacune de ces familles, les renforts utilisés pour compléter la matrice sont différents.

Pour chacune de ces familles, les renforts utilisés pour compléter la matrice sont différents. Dans la famille de composite la plus répandue aujourd'hui, le composite à matrice organique, on distingue deux types :

- ✓ Le composite à grande diffusion : est le moins couteux à produire et est utilisé dans la fabrication de pièces de toutes sortes.
- ✓ Le composite à haute performance : est plus cher à produire bien qu'il ait des qualités mécaniques supérieures. Il est ainsi utilisé dans les secteurs de l'aéronautique, le nautisme, le sport et les loisirs.

I.4. Les matériaux composites structuraux

I.4.1. Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppent un cœur (ou âme) de forte épaisseur et faible résistance (Figure I.8). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion c'est un excellent isolant thermique.

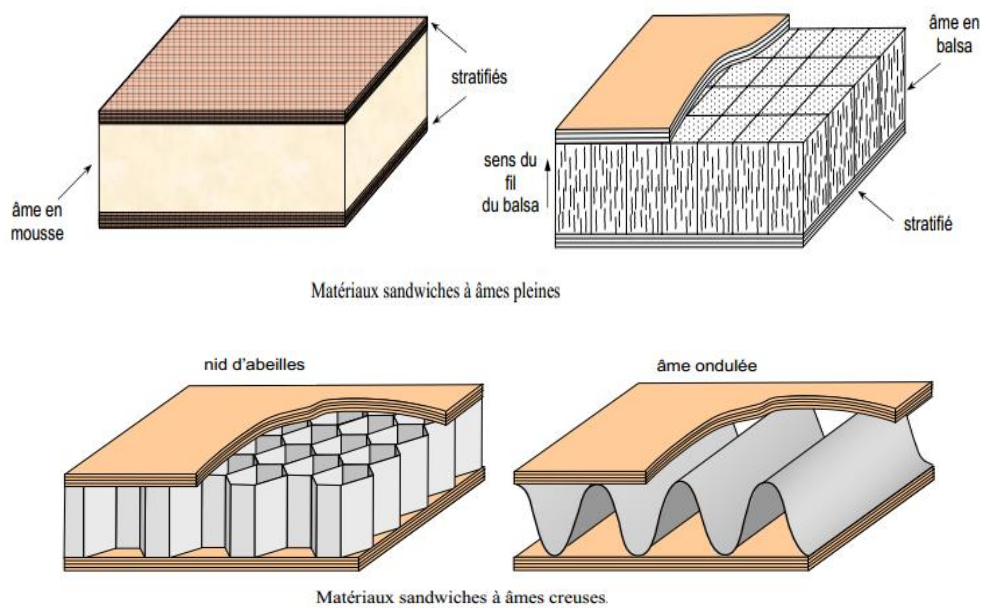


Figure I.8. *Matériau composite stratifié.*

I.4.2. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes. Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère (Figure I.9).

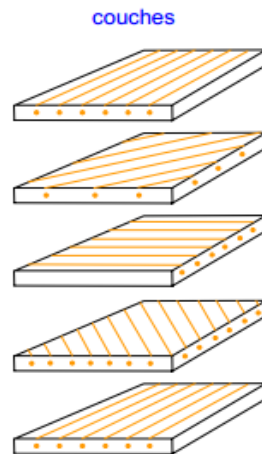


Figure I.9. *Matériau composite monocouche.*

I.4.3. Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches (Figure I.10) ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

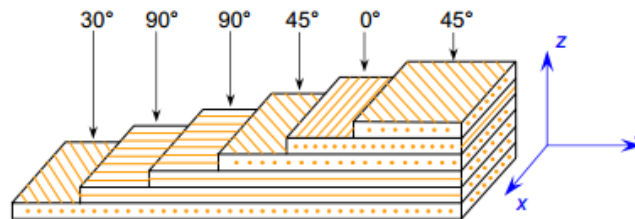


Figure I.10. *Matériau composite stratifié.*

I.5. Propriétés des matériaux composites

Les matériaux composites sont différents par rapport à des matériaux conventionnels par un fort module d'Young, une faible masse volumique et une bonne tenue en fatigue. Ils ont l'avantage d'avoir une limite élastique très élevée, ne se corrodent pas et ne résistent pas aux produits chimiques courants tels que les huiles, peintures, graisse, etc. De plus, les techniques de mise en forme par moulage permettent la réalisation de pièces complexes. Toutefois, ils sont plus sensibles à la chaleur et à l'humidité. Enfin, leur résistance aux impacts est souvent plus faible que celle de matériaux métalliques classiques.

Dans les matériaux composites, on trouve des couches élastiques homogènes qui sont assemblées les unes aux autres pour obtenir des propriétés mécaniques et thermiques améliorées. Le

problème majeur d'un tel assemblage est la discontinuité de propriétés des couches que par les fortes concentrations des contraintes peuvent décoller le long des interfaces, en particulier lorsque des températures élevées sont impliquées. Cela peut entraîner des mécanismes d'endommagement comme les délaminages, des fissures résultant du changement brusque et soudain des propriétés mécaniques à l'interface des couches.

I.6. Les endommagements des composites

Les principales dégradations des matériaux composites proviennent des actions mécaniques qu'ils subissent. En effet, le réseau d'interfaces structurées des stratifiés (surtout à fibre longue) est particulièrement exposé aux dégradations car ces interfaces sont situées entre des constituants ayant des propriétés mécaniques différentes.

Lors d'un chargement, les endommagements ont ainsi tendance à suivre ce réseau de fibres. Des phénomènes différents peuvent aussi se produire dans les plis de ce réseau en fonction du sens de sollicitation de l'effort : parallèle aux fibres ou non.

I.6.1. Endommagements au niveau des fibres

Ils sont presque indétectables, mais ne posent pas de réels problèmes sauf si les contraintes continuent à augmenter. Des phénomènes plus graves pourront apparaître.

Suite à une trop forte sollicitation, les constituants matrice et fibre se désolidarisent, lesquelles désolidarisations sont facilitées par des concentrations de contrainte affectant l'interface. Ce défaut va s'accroître progressivement pour ruiner le matériau. On parle alors de phénomène diffus (Figure I.11). Il s'agit de minuscules fissures parallèles au plan du stratifié. Plus l'angle de croisement des plis est important, plus ces micro-fissures seront nombreuses.

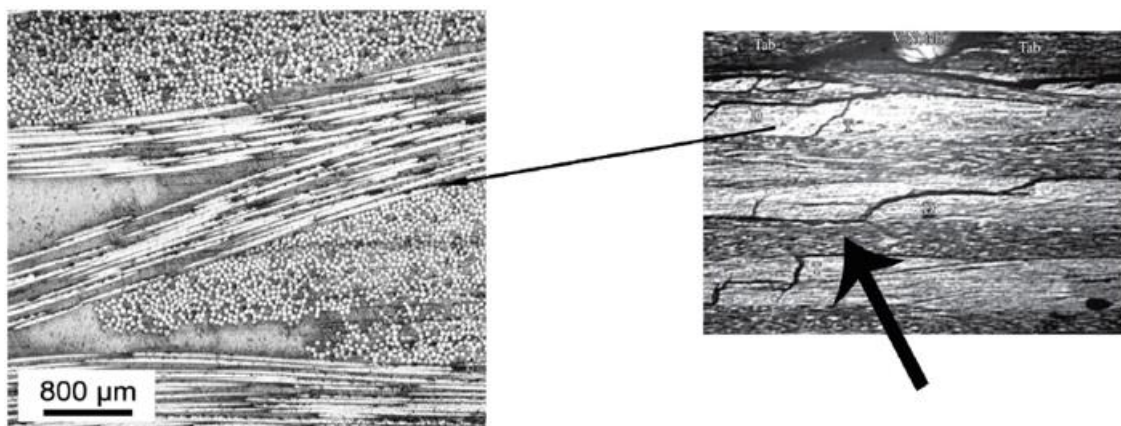


Figure I.11. Microdélaminage (délaminage diffus).

I.6.2. Endommagements au niveau des plis

Le phénomène des microfissures, peut croître sous l'effet de trop fortes pressions et provoquer ainsi des dégradations plus étendues. Ce phénomène est très fréquent aux plis à 90° (plis perpendiculaires au chargement) d'où le nom de fissuration transverse, comme le montre la figure (I.12) ci-dessous.

Tant que les plis à 0° restent intacts, le stratifié continue à supporter la charge, mais le plus souvent une redistribution du phénomène vers les plis encore intacts mène inexorablement à la ruine du matériau.

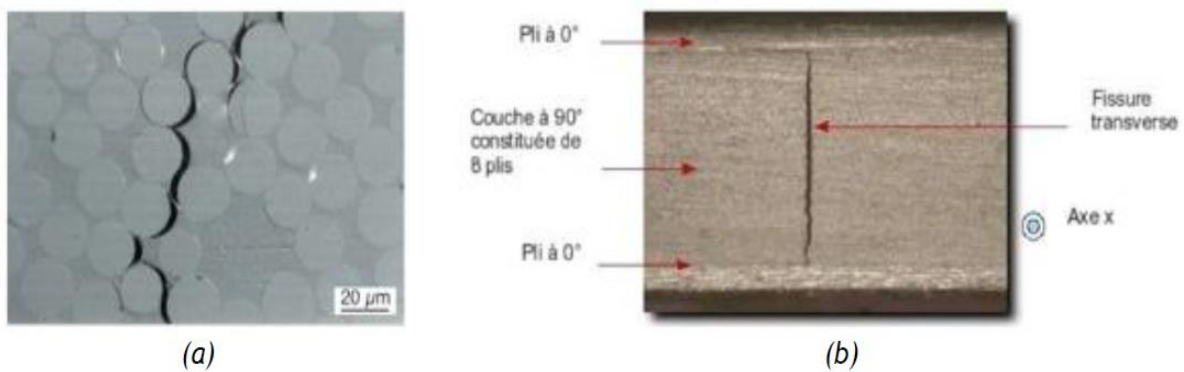


Figure I.12. Fissurations transverses :

a) décohésion fibre/matrice b) la fissure de plis perpendiculaires au chargement.

Les fissures transverses ont tendance à poursuivre leur chemin jusqu'à chaque changement de plis et c'est à cette jonction que le décollement entre les plis opère : c'est le délaminage (Figure I.13). Ce décollement important est accéléré par le micro délaminage, lequel peut fragiliser les interfaces.

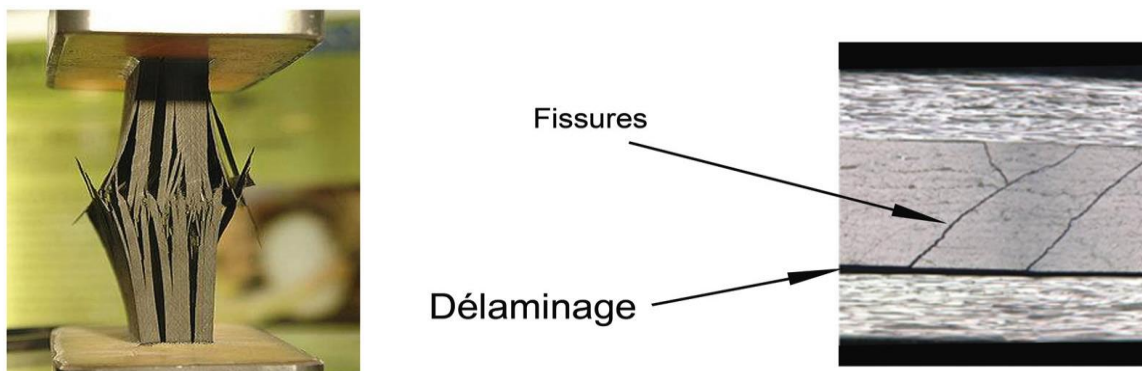


Figure I.13. Le phénomène de délaminage.

I.6.3. La ruine du stratifié

La ruine du stratifié est la cause de deux principaux endommagements : la rupture des fibres et le délaminage.

La rupture de fibre est souvent la conséquence directe d'un choc. C'est le type d'endommagements en réparation automobile.

Le délaminage est souvent celui qui pose le plus de soucis en fabrication, car il dépend essentiellement de la conception d'origine du stratifié. Il apparaît le plus souvent aux endroits sensibles de la pièce (trous pour passages divers, raccords entre stratifiés différents, etc.). La figure (I.14) résume les phénomènes des dégradations.

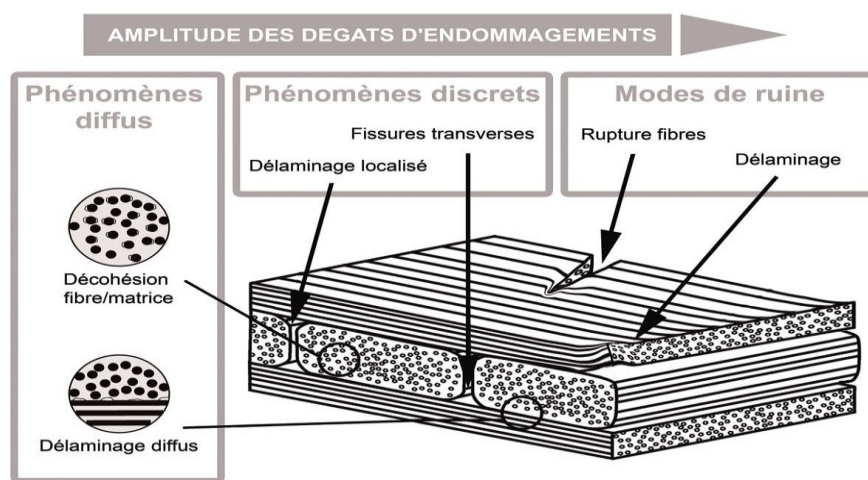


Figure I.14. Phénoménologie des dégradations.

I.7. Le phénomène de délaminage

L'un des avantages essentiels des composites stratifiés à renforts de fibres longues est l'aptitude d'orienter les fibres de chacun des plis afin d'obtenir des propriétés, souvent la résistance et la rigidité, adaptées aux chargements dans les directions attendues. Malgré les excellentes propriétés dans le plan, les composites stratifiés.

Ce mécanisme de rupture connu sous l'appellation de "délaminage" se caractérise par un décollement et/ou une décohésion entre les couches du stratifié.

Trois principaux modes de dégradation sont observés dans les couches unidirectionnelles (Figure I.15) :

- La micro fissuration de la matrice parallèlement aux fibres.
- La dégradation de l'interface fibre matrice.

- La rupture des fibres.

Un stratifié sollicité par un chargement présente différents taux de dégradations. Dans le schéma d'évolution des défauts les plus "classiques", la matrice et l'interface fibre/matrice sont les premières à s'abîmer. Les premières anomalies sont en conséquence la microfissuration de la matrice et la décohésion fibre/matrice à l'échelle microscopique. Puis, ces défauts s'accroissent de manière permanente à l'échelle du pli par coalescence, les micros dégradations s'accumulent pour constituer des fissurations transverses apparentes. Ces derniers (les fissures transverses) peuvent arriver à l'interface du pli et provoquer le délaminage sous l'effet des contraintes inter-laminaires. Généralement, le délaminage et son évolution dépendent du nombre de plis, de leur empilement et du chargement.

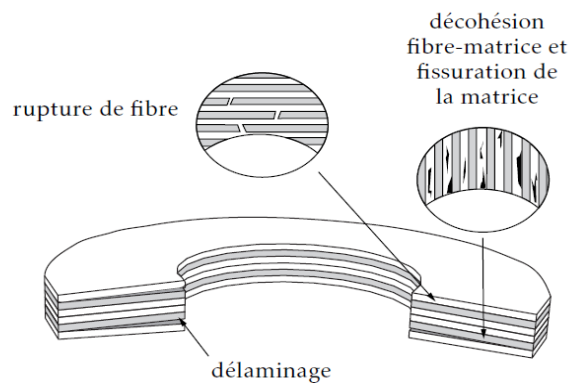


Figure I.15. Modes de rupture et front de délaminage.

I.8. Les domaines d'utilisations

Les matériaux composites de nos jours prennent une place prépondérante dans différents domaines :

- Électricité et électronique.
- Sports et loisirs (skis, raquette de tennis, planche à voile...).
- Bâtiment et travaux publics.
- Santé (instrumentation médicale).
- Transports routiers, ferroviaires, maritimes, aériens et spatiaux (notamment militaire).

Les matériaux composites sont principalement utilisés dans des applications qui nécessitent des performances élevées et le prix n'est pas un facteur majeur.

I.9. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites

Les matériaux composites présentent des avantages et des inconvénients. Les excellentes performances mécaniques des matériaux composites en terme de caractéristiques spécifiques en font des matériaux attrayants pour l'utilisation et voici quelques avantages :

I.9.1. Les avantages

- Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit. L'avion consomme donc moins de carburant.
- Ils sont bien sur insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques ...
- Il y a l'assurance d'en disposer beaucoup et pendant longtemps, ce qui n'est pas le cas des métaux dont le prix augmente vertigineusement.
- On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande.
- Ils offrent de grandes de maniement.
- Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale.
- Ils sont peu sensibles à l'humidité, la chaleur, la corrosion

Malgré l'impressionnants des avantages de ces matériaux, ils ne sont pas valables pour toutes les applications. Des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

I.9.2. Les inconvénients

- Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts.
- Une petite faille peut engendrer de grosses déformations.
- La détection de ces problèmes est difficile ce qui entraine une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.
- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.

I.10. Les Matériaux à Gradient Fonctionnel

I.10.1 Qu'est-ce qu'un FGM ?

Il s'agit d'une classe de composites constitués de deux matériaux ou plus avec des propriétés physico-chimiques différentes. Un FGM (*Functionally Graded Material*) est caractérisé par un changement graduel et continu des propriétés du matériau [BOH 14]. Ils présentent donc une microstructure hétérogène et contrôlée, modulée par un gradient de composition, de porosité, de distribution de phase ou de texture qui induit des différences de propriétés (densité, dureté, conductivité thermique, conductivité électrique...), les FGMs ont été initialement et principalement conçues pour résister à des températures élevées ou à des gradients thermiques. En effet, grâce aux FGM les faces des structures qui sont soumises à des températures très élevées de l'ordre de 2000K° peuvent être protégées lorsque celles-ci sont constituées de matériaux adaptés et formant donc un revêtement protecteur en raison de leurs excellentes performances dans la réduction de la chaleur et des résidus. Autrement dit, ces matériaux a pour une amélioration d'adhérence et d'éviter la séparation à la limite (délaminage) causée par les contraintes thermiques se développant en raison de l'inadéquation de l'expansion thermique. Dans l'absolu, un FGM peut être fabriqué avec n'importe quelle combinaison de matériaux adaptée à l'application visée. L'invention du matériau à gradient de fonction (FGM) est attribuée à Koizumi en 1984 dans le cadre de son travail sur les barrières thermiques [YAM 90]. Les FGMs sont classés en deux catégories :

- Les FGMs continus sont représentés par une variation continue de la fraction volumique du métal ou de la céramique est assumé (Figure I.16a).
- Les FGMs discontinus sont représentés par une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le matériau à fonctionnel gradues FGM est pris pour être posé, avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est-à-dire. Couche quasi-homogène de céramique-métal (Figure I.16b).

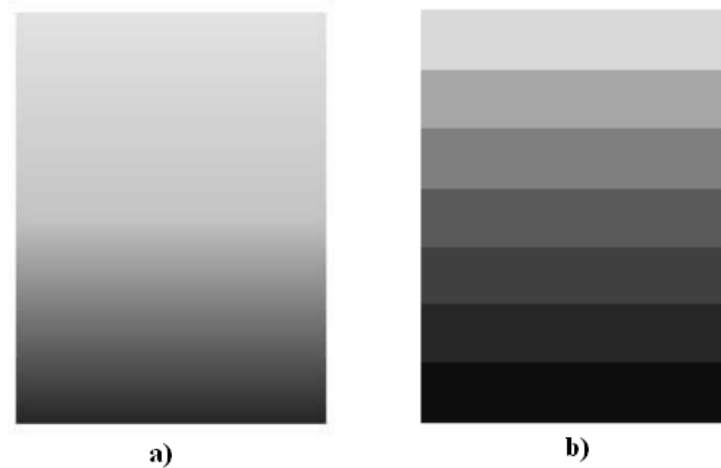


Figure I.16. *Variation des propriétés des FGMs:*
a) *Variation continue, b) Variation discrète.*

La loi de distribution de puissance [CHI 06, JIN 01] et les fonctions exponentielles [GU 97, NEJ 13, HEL 14] sont fréquemment utilisées pour décrire l'évolution des propriétés dans le FGM. Les FGMs trouvent leurs applications dans de nombreux domaines : les biomatériaux (par exemple Ti-Co pour les implants dentaires), l'ingénierie, l'optique (matériau à indice de réfraction graduel), l'aérospatiale, l'électronique, les outils de coupe (WC-Co) [BOH 14, UDU 14, KIE 03].

Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel.

I.11. Idée générale sur le développement des FGMs

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [KOI 93].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche Superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau coté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [ABD 97].

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGMs a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 °K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 °K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGMs s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

Tableau I.1. Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGMs [SWA 17].

| | Matériaux | Module d'élasticité E (GPa) | Densité (10^3 Kg/m^3) | Coefficient de dilatation thermique α (10^{-6} 1/K) |
|------------------|----------------------|-----------------------------|-----------------------------------|--|
| Métal | Aciers | 189-203 | 7.85-8.1 | 16-18 |
| | Fers | 80-150 | 6.9-7.35 | 11-13 |
| | Alliages d'Al | 68-82 | 2.5-2.9 | 21-24 |
| | Alliages de zinc | 68-95 | 4.9-5.7 | 23-28 |
| | Alliages de nickel | 150-245 | 7.75-8.65 | 9-16 |
| Céramique | Alumine | 215-413 | 3.5-3.98 | 4.5-10 |
| | Silicium | 140-180 | 2.28-2.38 | 7-8 |
| | Zircone | 100-250 | 5-6.15 | 1.7-2 |
| | Carbure de bore | 362-472 | 2.35-2.55 | 17-42 |
| | Carbure de tungstène | 600-686 | 15.25-15.88 | 28-88 |

I.12. Procédés d'élaboration de FGM

IL existe plusieurs techniques et méthodes pour comprendre la mise en forme des matériaux à gradient fonctionnel, le tableau I.2 suivant montre d'une façon générale les procédés de fabrication des FGMs.

Tableau I.2. Les méthodes de fabrication des FGMs.

| Procédés de dépôt | Procédés à l'état liquide | Procédés à l'état solide |
|---------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| ✓ Électrodéposition | ✓ Frittage et Infiltration | ✓ Diffusion collage |
| ✓ Dépôt laser | ✓ Coulée par centrifugation | ✓ Compaction Sèche des Poudres |
| ✓ Dépôt par vapeur | | |

Pour des FGMs de faibles épaisseurs les procédés de fabrication sont nombreux. Les méthodes les plus courantes sont les dépôts chimique ou physique en phase vapeur (CVD et PVD), la synthèse par auto-combustion, le coulage en bande, l'implantation ionique.

Les FGMs plus épais sont mis en forme par brasage, thermocompression et métallurgie des poudres (Figure I.17). Dans les assemblages réalisés par frittage (métallurgie des poudres), l'adhésion entre les couches est meilleure comparé à ceux réalisés par soudage-diffusion (brasage, thermocompression). En 1999, un nouveau concept est développé par Petrovic et al. [PET 98] avec la fabrication par pressage à chaud d'un FGM présentant un gradient de porosité dans la céramique, dense en face avant et poreux en face arrière. La porosité est ensuite comblée avec un polymère (époxy ou uréthane) ou un métal par infiltration sous vide.

Quelques publications signalent l'utilisation de la technologie SPS (*Spark Plasma Sintering*) pour l'obtention de FGM. La mise en œuvre est facile. Les cycles de frittage sont courts et de ce fait, la diffusion entre les deux matériaux est limitée, réduisant le risque de formation de phases fragiles. Lorsque deux matériaux ont des températures de fusion très éloignées, la technologie SPS est la seule qui permette de les cofritter [OMO 97, TOK 99]. Tous les types de matériaux peuvent être en effet assemblés : métaux et alliages métalliques, céramiques, polymères. Cependant, peu d'études concernent des FGMs de grandes dimensions (50 à 150 mm sur le système $ZrO_2(3Y)/$ acier [TOK 99, ICH 01], WC/Co/Ni [TOK 05]). Les FGMs sont souvent trouvés par la combinaison de céramique-métal. La figure (I.18) représente un exemple de la microstructure de cette combinaison.

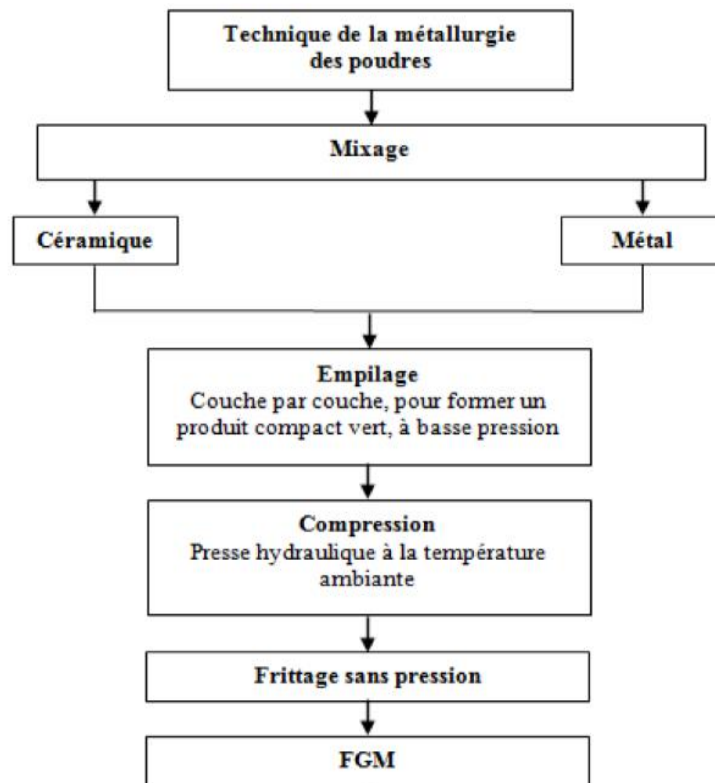


Figure I.17. Production des FGMs par la technique de la métallurgie des poudres.

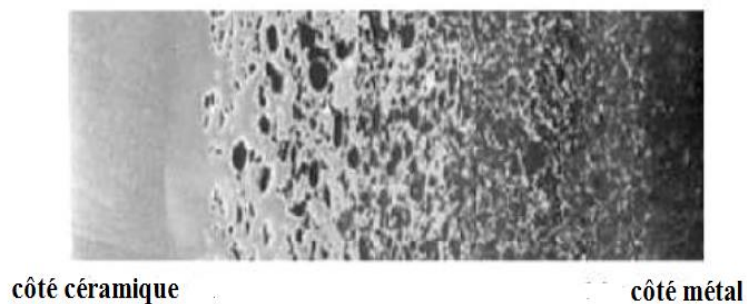


Figure I.18. Microstructure de FGM céramique-métal [TRU 08].

I.13. Les propriétés et les domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Les FGM se caractérisent par un large domaine d'application. Sur le tableau I.3, nous présentons les variétés des domaines d'applications réelles et éventuelles des FGM.

Tableau I.3. Les propriétés des FGMs et leurs applications significatives
[BOH 14, MAK 14, UDU 14].

| Types FGM | Propriétés | Applications |
|---|---|--|
| Al₂O₃ | Alliage d'aluminium Barrière thermique et anti-usure | Buse à fusée, ailes et pièces moulées |
| Fibre de verre / Epoxy | Résistance à la dureté et à l'amortissement. | Rotors de frein, dômes solaires, Systèmes de tuyauterie composite. |
| BaTiO₃ / Si | Contrôle de perte de signal à haute fréquence. | Moteurs diélectriques. |
| Al / SiC | Dureté et ténacité. | Chambres de combustion, Garnitures de cylindre moteur, Volants. |
| Carbone / Epoxy | Légers et de bonnes propriétés d'amortissement. | Composants d'hélicoptères Portes de trains d'atterrissage Panneaux d'échangeurs de chaleur Pièces de moteur. |
| SiCw / Alliage d'aluminium | Résistance thermique, inertie chimique, dureté et ténacité. | Cylindres de stockage, pistons de moteurs diesel, cadres de vélo et véhicules. |
| Graphite / Epoxy | Rapport résistance / raideur élevé, bonne résistance au rayonnement et réduit les distorsions thermiques. | Coques de pression cylindriques, Télescopes spatiaux, Réservoirs cryogéniques. |
| Alliage d'aluminium / Nanotubes de carbone (CNT) | Légèreté et haute rigidité | Ligaments artificiels, pièces de rechange pour scanner IRM, lunettes de verre et pièces de dentisterie. |
| WC / Co | Propriété de résistance à la chaleur, à l'usure et à la déchirure. | Machines et les outils de formage, les outils de coupe et les os artificiels. |
| TiAl / SiCSiC/C | Revêtements résistants aux températures et aux chocs. | Panneaux d'échange de chaleur, buse de fusée, structure de vaisseau spatial, panneaux solaires, réflecteurs et lames de roue de turbine. |

I.14. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Par rapport aux matériaux composites traditionnels, les matériaux FGMs ont des propriétés macroscopiquement inhomogènes car ils sont composés de plusieurs couches contenant des composants différentes (telles que les céramiques et les métaux).

Koizumi [KOI 97] a résumé cette différence dans la figure (I.19) ci-dessous, tandis que Yoshihisa [YOS 04] a établi un modèle simple montrant la différence entre les matériaux FGMs et les matériaux composites traditionnels, comme le montre la figure (I.20).

On peut dire aussi que les FGMs sont des matériaux dont les propriétés varient à travers une direction préférentielle telle que leur épaisseur, contrairement aux matériaux composites classiques où l'on suppose que les propriétés sont constantes à travers chaque couche individuelle.

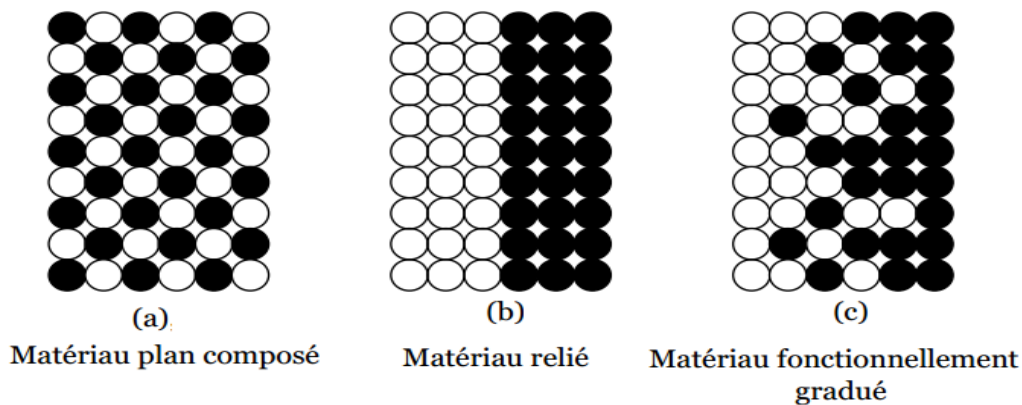


Figure I.19. Distribution composite des matériaux [YOS 04].

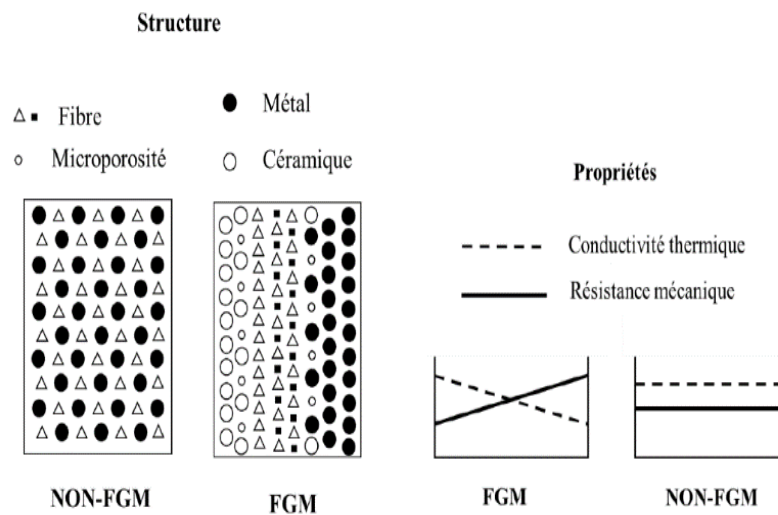


Figure I.20. Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et FGM [KOI 97].

I.15. Lois de variation des propriétés matérielles des matériaux FGMs

Dans le but de faire une analyse approfondie et une modélisation exacte des structures en FGMs leurs propriétés doivent être représentées avec justesse. Cette dernière s'obtient par la simple règle de mélange, très connue dans le domaine des matériaux composites, connu sous le nom

de « modèle de Voigt » [SHE 16]. Les propriétés des matériaux effectives P_F d'un FGM, comme le module d'élasticité E_f (module de Young) et le coefficient de dilatation thermique α_f s'expriment par la formule (I.1), suivante :

$$P_F = \sum_{i=1}^n P_i V_{Fi} \quad (\text{I.1})$$

Où P_i et V_{Fi} représentent les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i , respectivement.

La sommation des fractions volumiques de tous les constituants du matériau FGM est égale à l'unité.

$$\sum_{i=1}^n V_{Fi} = 1 \quad (\text{I.2})$$

Etant donné que dans la majorité des structures FGM sont constitué de deux matériaux en général (Céramique et métal inoxydable) (Figure I.21), la loi de *Voigt* dans ce cas se réduit à :

$$P_F = P_1 V_{F1} + P_2 V_{F2} \quad (\text{I.3})$$

avec :

$$V_{F1} + V_{F2} = 1 \quad (\text{I.4})$$

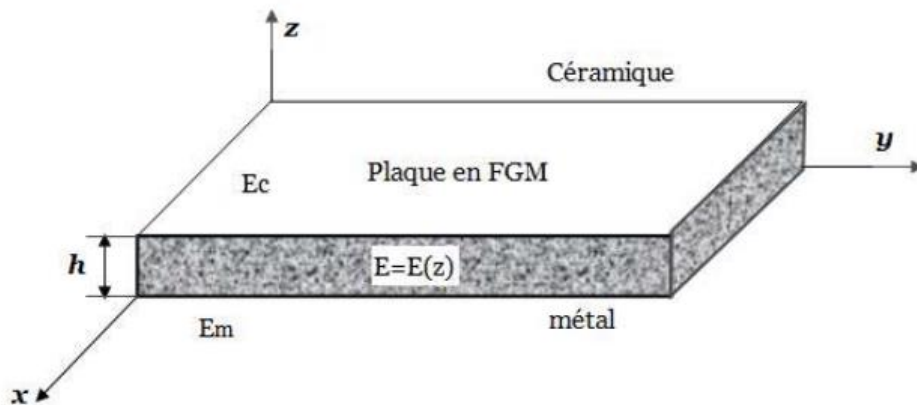


Figure I.21. Géométrie d'une plaque FGM.

Un FGM peut être définie par une fonction qui représente la variation des fractions de volume. Cette fraction est décrite par des fonctions de puissance, exponentielle ou sigmoïde suivant l'application recherchée et la méthode de synthèse utilisée.

Selon l'étude de Jin et Batra [JIN 96a] le coefficient de Poisson peut être supposé constant étant donné que son effet sur la déformation est négligeable par rapport à celui du module de Young.

I.15.1. Fonction exponentielle E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [DEL 83] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (I.5)$$

avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I.6)$$

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure (I.22).

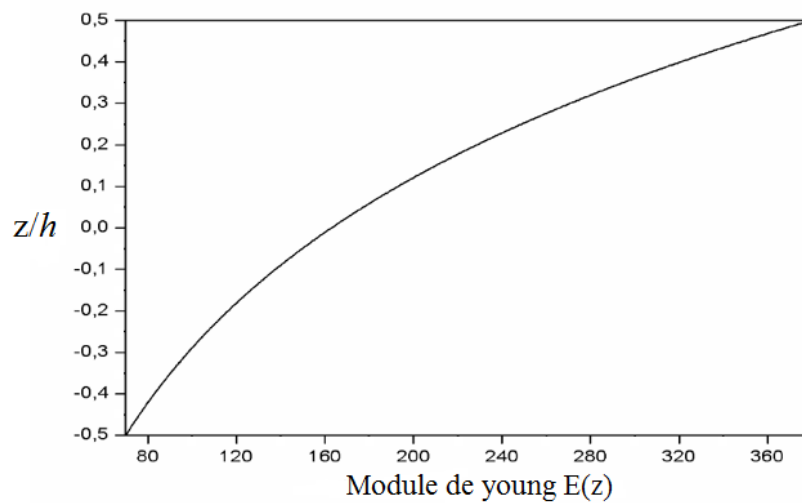


Figure I.22. Variation du module de Young d'un matériau E-FGM.

I.15.2. Fonction sigmoïde S-FGM

Pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces, Chi et Chung [CHI 03] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance :

$$V_{F1}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.7)$$

et

$$V_{F2}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.8)$$

La figure (I.23) montre que la variation de la fraction volumique, définie par les équations (I.7) et (I.8), représente les distributions sigmoïdes. Ce type des plaques est appelé Plaque S-FGM.

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_{F1}(z)E_1 + [1 - V_{F1}(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

$$E(z) = V_{F2}(z)E_1 + [1 - V_{F2}(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.10})$$

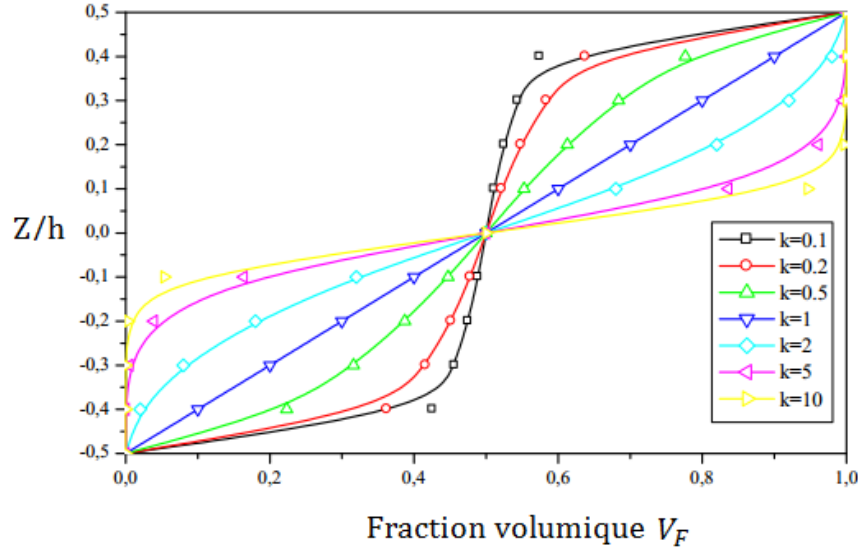


Figure I.23. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.15.3. Fonction puissance P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V_F(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (\text{I.11})$$

Où k représente le paramètre matériel tandis que h représente l'épaisseur du matériau FGM. Les propriétés matérielles d'un matériau P-FGM peuvent donc s'écrire comme suit [BAO 95] :

$$E(z) = [E_1 - E_2] \left(\frac{z+\frac{h}{2}}{h} \right)^k + E_2 \quad (\text{I.12})$$

Où E_1 et E_2 et sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = h/2$) et de la surface supérieure ($z = -h/2$) de la structure FGM.

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure (I.24). D'après cette dernière, il est clair que la fraction volumique

change rapidement près de la surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

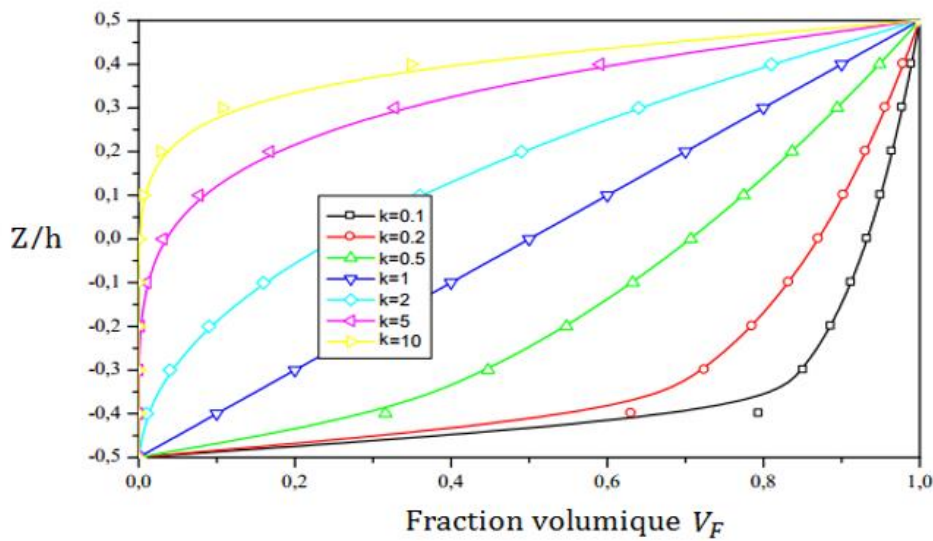


Figure I.24. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.16. Les Caractéristiques des matériaux FGMs

La structure des FGMs est constituée d'une phase céramique d'un côté et d'une phase métallique dans l'autre côté, avec des régions intermédiaires constituées d'un mélange des deux constituants, variant selon une fraction volumique.

Les FGMs ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés. Par conséquent, les FGMs attirent l'attention en termes de leurs applications dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGMs qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique [BEL 15].

Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGMs. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [BOC 86].

Tableau I.4. Les propriétés des différentes couches des matériaux FGMs [HOU 11].

| Couches | Matériaux | Propriétés |
|---|------------------|---|
| La face à basse température | Métal | <ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance mécanique • Conductivité thermique élevée • Très bonne ténacité |
| « Couches intermédiaires » Continuité du matériau d'un point à l'autre | Métal/céramique | <ul style="list-style-type: none"> • Élimination des problèmes de l'interface • Relaxer les contraintes thermiques |
| La face à haute température | Céramique | <ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance thermique • Bonne résistance à l'oxydation • Faible conductivité thermique |

I.17. Avantages et inconvénients des FGMs

Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application, et aussi des inconvénients et/ou des problèmes existents et peuvent empêcher leur usage.

I.17.1. Avantages des FGMs

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement [NAR 11] et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.

- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les sur faces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.17.2. Inconvénients des FGMs

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [NAR 11].

I.18 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application. D'un point de vue mécanique, les principaux avantages du classement des propriétés des matériaux semblent être une résistance améliorée, une ténacité et une résistance à l'usure et à la corrosion, ainsi qu'une réduction des contraintes résiduelles et thermiques.

Chapitre II

Généralités sur la mécanique de la rupture

II.1. Introduction

La rupture ou endommagement par fissuration se traduit par l'apparition de discontinuités, soit dans tout le volume sollicité, soit uniquement à la surface. Les fissures sont présentes dans toutes structures, elles peuvent exister sous forme de défaut de base dans le matériau ou peuvent être produites dans les structures et pièces de machines en service soumises à des efforts statiques ou dynamiques.

Les facteurs qui influencent le comportement à la rupture par fissuration des matériaux sont de deux natures : mécanique et métallurgique. Les facteurs mécaniques concernent l'état de déplacements, déformations et contraintes, les conditions d'environnement telle la température. Quant aux facteurs métallurgiques, on parle des impuretés, de taille de grains, état de surface, etc.

II.2. Généralités sur la mécanique de la rupture

II.2.1. Processus de fissuration

Il est généralement admis que la fissuration se produit dans un matériau suivant quatre étapes :

- a) La plastification locale au voisinage des défauts et singularités géométriques ou matériels : le degré de la singularité a une influence primordiale sur l'ampleur de la zone plastique ainsi que sur la concentration des contraintes.
- b) La formation des fissures : cette étape peut se réaliser à partir des traitements de surface, des traitements ou chargement thermique générant des contraintes résiduelles dépassant largement le seuil plastique.
- c) La propagation des fissures réelles naissantes : cette propagation peut être brutale ou successive. Souvent on assiste à une propagation successive faisant augmenter la taille de la fissure jusqu'à atteindre une taille critique, entraînant une propagation brutale.
- d) Cette propagation brutale constitue la dernière étape. Elle peut être accompagnée de grandes déformations généralisées (striction), ou sans déformations importantes (rupture fragile).

La mécanique de la rupture étudie l'interaction entre la discontinuité géométrique (fissure) et le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité. Schématiquement, on peut distinguer dans un milieu fissuré trois zones successives, (figure II.1).

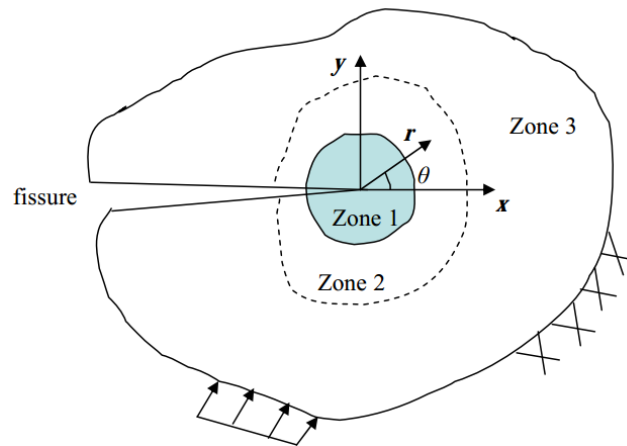


Figure II.1. Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure.

Zone d'élaboration (zone 1) :

Elle se trouve à la pointe de la fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. La taille de cette zone est généralement très petite, de l'ordre de quelques cristaux.

Zone singulière (zone 2) :

La zone dans laquelle les champs des déplacements, déformations et des contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. Cette zone est petite vis-à-vis du solide, mais elle est grande par rapport aux cristaux.

Dans cette zone, les composantes du champ des contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ($r \rightarrow 0$), et plus exactement, la singularité est en $r^{-1/2}$ en milieu élastique linéaire d'où le nom de la zone singulière ou zone fine. Ainsi la singularité en $r^{-1/2}$, ne sera pas valable en dessous d'un certain rayon dit plastique (r_p). Les valeurs de r_p autour de la pointe de fissure déterminent la forme de la zone plastique qui, en fonction de sa taille, l'on dira que la rupture est fragile ou ductile.

Zone extérieure (zone 3) :

Les champs lointains se raccordent d'une part à la zone singulière et d'autre part aux conditions aux limites de chargement et de déplacement. Dans cette zone, les champs de déplacements, déformations et contraintes varient peu.

II.2.2. Différents modes de rupture

L'ouverture d'une fissure peut être obtenue selon trois modes indépendants de sollicitations. Ces modes désignent une séparation géométrique dont une représentation est donnée sur la figure (II.2), les flèches indiquent les déplacements relatifs des deux lèvres.

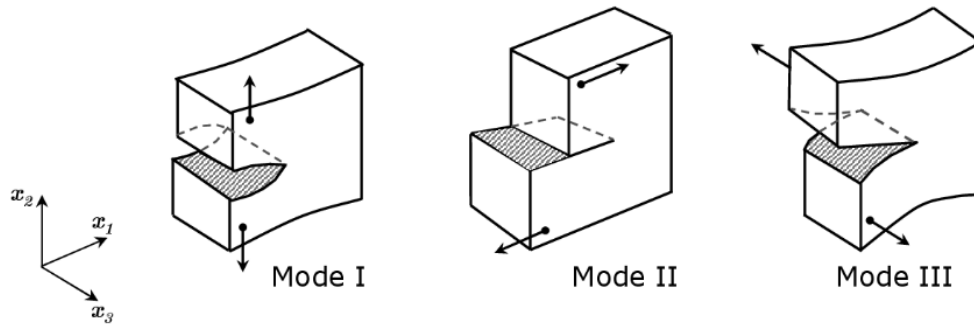


Figure II.2. Les modes fondamentaux de la mécanique de la rupture.

- **Mode I** : « mode d'ouverture de la fissure », est caractérisé par un chargement et un déplacement des lèvres de la fissure suivant la perpendiculaire à la direction de propagation.

Ce mode est physiquement le plus important, il est à la fois le plus fréquent et celui qui conduit aux ruptures les plus dangereuses.

- **Mode II** : « mode de cisaillement dans le plan » ; où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.
- **Mode III** : « mode de cisaillement hors plan » ; où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

II.3. Critères de rupture en mécanique linéaire élastique

En mécanique linéaire élastique de la rupture, deux principaux critères de rupture sont utilisés, le premier proposé par Griffith [GRI 21], est basé sur une approche énergétique, le second est proposé par Irwin [IRW 49], est défini à partir du champ des contraintes à la pointe de la fissure.

II.3.1. Approche énergétique

Il s'agit d'une approche qui exprime le transfert d'énergie élastique libérée par le solide fissuré lors d'un accroissement de fissure et nécessaire pour créer cet accroissement par décohésion de la matière.

Selon Griffith, la propagation statique de la fissure résulte de la conversion du travail des forces extérieures W et de l'énergie élastique disponible U en énergie libre de surface γ . On peut donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial a}(W - U) \geq \gamma \frac{\partial A}{\partial a} \quad (\text{II.1})$$

Où : ∂A est l'augmentation de surface associée à l'incrément de longueur de fissure ∂a .

En milieu bidimensionnel d'épaisseur b , le critère précédent (II.1) devient :

$$\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial a}(W - U) \geq 2\gamma \quad (\text{II.2})$$

On définit alors le paramètre G , le taux de restitution d'énergie élastique par :

$$G = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial a}(W - U) \quad (\text{II.3})$$

Dans un corps élastique contenant une fissure, l'extension de celle-ci est possible lorsque l'énergie disponible G , atteindra une valeur critique G_c qui représente la valeur au-delà de laquelle on aura théoriquement création de deux nouvelles surfaces, soit ($G = G_c = 2\gamma$).

avec : γ est énergie libre de création de surface.

Néanmoins on a constaté expérimentalement que la fissure ne croit que pour des valeurs :

$$G \geq G_c \quad (\text{II.4})$$

G est indépendant de la géométrie de la structure,

γ ne prend en compte que l'énergie de séparation des atomes lorsqu'un solide présente une plasticité appréciable. Une autre quantité U qui représente le travail dû à la déformation plastique doit être ajoutée, soit :

$$G_c = 2\gamma + 2U = 2(\gamma + U) \quad (\text{II.5})$$

II.3.2. Facteur d'intensité des contraintes

La seconde approche considère les champs locaux des contraintes à la pointe de fissure dans un matériau dont le comportement est linéaire élastique, ces champs peuvent être définis

uniquement par un paramètre K , appelé *facteur d'intensité des contraintes* (FIC). Ce paramètre est fonction du chargement de la structure fissurée et la géométrie du défaut.

La théorie d'élasticité permet de calculer le champ des contraintes au voisinage du fond de fissure dans une plaque de dimensions finies.

Westergaad [WES 39], a développé des relations qui relient ces contraintes en tête de fissure de longueur $2a$ dans une plaque de dimension infinie, soumise à une contrainte de traction σ perpendiculaire au plan de la fissure, (Figure II.3).

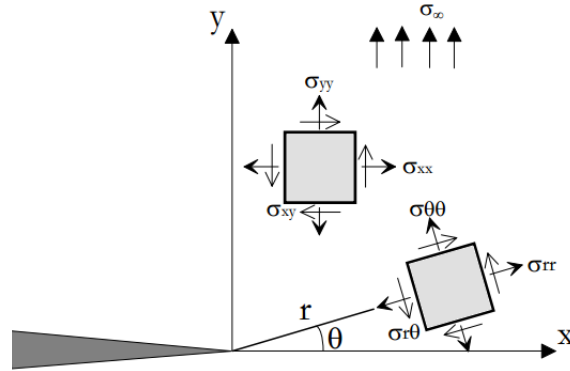


Figure II.3. Répartition des contraintes au voisinage du fond de fissure.

Au voisinage de la fissure, les contraintes sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Où : r et θ sont les coordonnées polaires du point considéré.

Le champ de déplacements est décrit par les relations :

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Où μ est le module de cisaillement et $\kappa = (3 - 4\nu)$ en état de déformation plane, et $\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$ en état de contrainte plane.

Selon Irwin [IRW 49], la rupture intervient lorsque le facteur K dépasse une valeur critique K_C qui caractérise la résistance du matériau à la propagation brutale d'une fissure. Sa valeur dépend uniquement du matériau, elle est donc indépendante des conditions aux limites et il considère ainsi que cette condition $K \geq K_C$ représentait un critère de rupture, K et K_C sont donnés par :

$$K = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{II.8})$$

$$K_C = F\sigma_c\sqrt{\pi a} \quad (\text{II.9})$$

où : σ_c est la valeur critique atteinte par la contrainte appliquée à la rupture en [MPa],

F : étant facteur de forme lié à la géométrie de l'éprouvette ainsi que du type de sollicitation. Il est donné pour chaque type d'éprouvette sous forme d'une fonction polynomiale de $\left(\frac{a}{w}\right)$, où w est la longueur de l'éprouvette.

Les deux paramètres : le taux de restitution d'énergie élastique G et le facteur d'intensité des contraintes K permettent de décrire le comportement mécanique des fissures. Le premier est un paramètre global qui quantifie la variation d'énergie qui accompagne la propagation de la fissure, le second est un paramètre local.

En mode I, pour les matériaux élastiques linéaire K et G sont liés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} G_I = \frac{K_I^2}{E} & \text{En contrainte plane} \\ G_I = \frac{K_I^2}{E}(1 - \nu^2) & \text{En déformation plane} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Dans le cas général on a :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (\text{II.11})$$

Les paramètres K_I , K_{II} et K_{III} représentent les facteurs d'intensité des contraintes respectivement en mode I, II et III qui traduisent l'état de contrainte au voisinage du fond de fissure.

L'équation (II.11) peut être mise sous la forme suivante :

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (\text{II.12})$$

D'où :

$$G_I = \frac{K_I^2}{E^*}, G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E^*} \text{ et } G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (\text{II.13})$$

$$\text{avec } \begin{cases} E^* = E & \text{En contrainte plane} \\ E^* = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{En déformation plane} \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

II.4. Mécanique élastoplastique de la rupture

La mécanique linéaire-élastique de la rupture (MLER) peut être appliquée lorsque la zone plastique est petite par rapport à la dimension de la fissure. Lorsque cette zone plastique devient grande par rapport à la dimension de la fissure, la MLER ne peut plus s'appliquer. La mécanique élasto-plastique de la rupture ou mécanique non linéaire de la rupture s'applique aux matériaux ductiles, lorsque la plastification à l'extrémité des fissures est importante.

Comme pour la mécanique linéaire de la rupture, où deux paramètres équivalents (K et G) peuvent être utilisés comme critère de rupture, deux paramètres caractéristiques de la mécanique non linéaire de la rupture sont présentés dans cette partie. Nous verrons que ces deux paramètres, le déplacement à fond de fissure ou CTOD (*Crack Tip Opening Displacement*) et l'intégrale de contour notée J sont aussi équivalents entre eux. Ils décrivent tous les deux, les conditions à l'extrémité d'une fissure (champs des contraintes et des déplacements) et peuvent être utilisés comme critère de rupture.

II.4.1. Ecartement à fond de fissure (CTOD)

Le comportement d'une fissure peut être décrit par l'écartement des deux surfaces en fond de fissure (*CTOD / Crack Tip Opening Displacement*). Il a été montré qu'il existait des relations entre les valeurs du CTOD et les valeurs critiques du facteur d'intensité des contraintes K_{IC} . Comme la mesure du CTOD peut être effectuée également lorsque la zone plastique au front de la fissure est importante, il est possible d'utiliser ce concept pour un dimensionnement lorsque le comportement du détail est plastique.

L'analyse proposée par WELLS [WEL 63] tente de relier le CTOD au FIC K_I lorsqu'on est en régime de plasticité confinée. Pour examiner cette approche on va considérer une fissure avec une faible zone plastifiée comme indiqué sur la figure (II.4). Irwin montra qu'une telle fissure se comporte comme si elle était effectivement plus longue du fait de l'écoulement plastique à fond de fissure. On peut alors estimer le CTOD en augmentant la longueur de fissure de r_y , la correction de zone plastifiée. Le CTOD est pris égal à l'ouverture de la fissure à la distance r_y

en amont de l'extrémité ; le déplacement à cette distance est estimé à partir de la MLR qui prévoit en mode-I :

$$u_y = \frac{\kappa+1}{2\mu} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} \quad (\text{II.15})$$

avec :

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{En contrainte plane} \\ 3-4\nu & \text{En déformation plane} \end{cases}$$

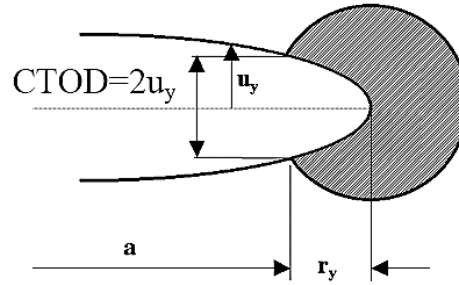


Figure II.4. Estimation du CTOD à partir du déplacement à la distance r_y en amont de l'extrémité d'une fissure de longueur $(a + r_y)$.

La longueur effective de fissure est $(a + r_y)$ avec r_y le rayon de la zone plastifiée calculé d'après l'approche d'Irwin :

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad (\text{II.16})$$

En combinant les deux relations précédentes, on trouve :

$$\delta = 2\mu_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_e E} \quad (\text{II.17})$$

δ ou CTOD représente l'écartement à fond de fissure. Le CTOD peut être relié au taux de restitution d'énergie G en utilisant la relation liant G au FIC K_I . En contrainte planes, on a :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \Rightarrow \delta = \frac{4}{\pi} \frac{G}{\sigma_e} \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, lorsqu'on est en régime de plasticité confinée où la MLR s'applique, le CTOD est relié à G et au FIC K_I . Wells postula alors que le CTOD est un paramètre approprié pour caractériser

le comportement à l'extrémité d'une fissure lorsqu'on atteint les limites d'application de la MLR. Cette hypothèse s'est avérée correcte quelques années plus tard lorsqu'on établit une relation unique entre le CTOD et l'intégrale de contour J introduite par Rice.

Le modèle de Dugdale-Barenblatt peut aussi être utilisé pour estimer le CTOD (Figure II.5) [ZEG 04].

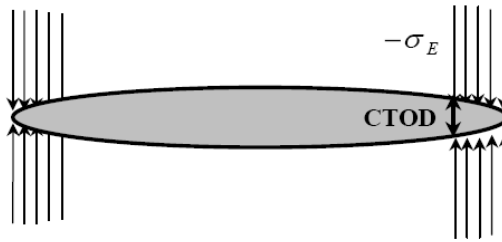


Figure II.5. Estimation du CTOD à partir du modèle de Dugdale-Barenblatt.

Le modèle de Dugdale-Barenblatt suppose un état des contraintes planes et un matériau élastique-plastique parfait c'est à dire sans consolidation. La relation plus générale entre le CTOD, δ et le FIC K_I est de la forme :

$$\delta = \frac{K_I^2}{m\sigma_e E} = \frac{G}{m\sigma_e} \quad (\text{II.19})$$

Où m est un coefficient sans dimension qui vaut à peu près 1 en contraintes planes et 2 en déformations planes.

II.4.2. Intégrale J

La caractérisation du champ de contrainte au voisinage de la singularité peut être réalisée au moyen de certaines intégrales de contour, que l'on peut déduire de la loi de conservation de l'énergie. Le taux de restitution d'énergie G peut alors s'écrire sous la forme d'une intégrale notée J sur le contour ouvert et continu Γ (Figure II.6) entourant la pointe de la fissure. La formulation originelle a été définie par Rice [RIC 68], dans un milieu élastique linéaire fissuré plan (état de déformation plane ou de contrainte plane), en l'absence de chargement sur la fissure et de déformations d'énergie thermique. Cette intégrale est définie par la relation (II.19), avec les notations de la figure (II.6).

$$G = J = \int_{\Gamma} W dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \quad (\text{II.20})$$

Où W est la densité de déformation d'énergie élastique (ou plastique pour les matériaux plastifiés), \vec{n} la normale au contour, \vec{T} le vecteur contrainte en un point et \vec{u} le vecteur

déplacement au même point. ds l'élément de contour. Cette intégrale est indépendante du contour, à condition que le contour se trouve en milieu élastique linéaire.

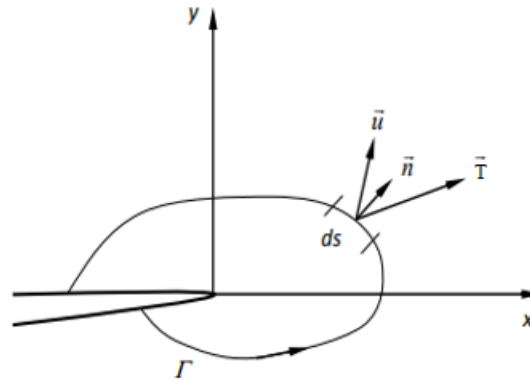


Figure II.6. L'intégrale J de contour.

Pour un matériau globalement élastique, il est démontré que le taux de restitution d'énergie G est directement lié aux facteurs d'intensité de contrainte par :

$$J = G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (\text{II.21})$$

II.5. État de l'art sur le problème de rupture des matériaux FGMs

II.5.1. Evaluation numérique du FIC

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, le facteur d'intensité de contrainte FIC est le seul paramètre significatif, qui permet de connaître l'état de contrainte et de déformation en toute pointe de fissure. A cet effet, de nombreuses expressions analytiques ont été proposées pour sa détermination dans le cas des matériaux homogènes, en se basant sur des conditions simplifiées de géométrie et des sollicitations.

Dans le cas général, l'évolution de FIC s'articule sur des informations des champs des contraintes et des déplacements ou avec des méthodes énergétiques, couplées aux méthodes numériques.

a) Méthodes d'extrapolation

Parmi les méthodes d'extrapolation des variables au voisinage du front de fissure, les plus utilisées sont les méthodes des contraintes et des déplacements, basées sur les informations des

champs des contraintes et des déplacements donnés par les équations (II.6) et (II.7), respectivement.

La méthode des contraintes a été utilisée dans les premiers travaux par Raju et Newman [RAJ 77, 79], ensuite a été employée par de Morais [MOR 07], en utilisant les équations (II.6). Cette méthode ne demande aucune hypothèse de contrainte ou déformation plane, ce qui constitue un avantage par rapport à la méthode d'extrapolation des déplacements [FIO 06].

Dans l'étude bibliographique, il a été observé que plusieurs auteurs ont utilisé des méthodes des déplacements en employant des éléments singuliers de Barsoum [BAR 74]. Afin d'obtenir une représentation correcte du champ de déplacements près de la pointe de la fissure, des éléments quadratiques dits singuliers sont employés (Figure II. 7), comme suggéré par Barsoum [BAR 74] et Henshell et Shaw [HEN 75]. La singularité de type $\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ pour les champs des contraintes est obtenue en déplaçant tous les nœuds intermédiaires des éléments autour de la pointe de la fissure à un quart de distance des nœuds appartenant au front de fissure considéré.

Guinea et al. [GUI 00] ont comparé trois possibilités différentes d'estimation du facteur d'intensité de contrainte en fonction des déplacements du nœud intermédiaire :

$$K_I = \frac{E^*}{12} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} (8v_a - v_b) \quad (\text{II.22})$$

$$K_I = \frac{E^*}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} v_a \quad (\text{II.23})$$

$$K_I = \frac{E^*}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} (4v_a - v_b) \quad (\text{II.24})$$

Où E^* est le module de Young effectif, égal à E en état de contrainte plane et égale à $\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)$ en déformation plane, L est la longueur de l'élément singulier comme le montre la Figure (II.7). v_a et v_b sont les déplacements des points A et B normalement au plan de fissuration.

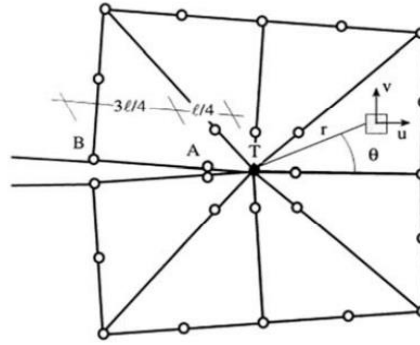


Figure II.7. Élément singulier et coordonnées pour la description du champ de déplacements près de la pointe de la fissure.

Dans le cas des matériaux FGM, Hebbar et al. [HEB 20], Ait Ferhat et Boulenouar [AIT 20a] ont utilisé la méthode d'extrapolation pour analyser le comportement en rupture des matériaux FGM, en se basant sur des exemples d'applications suffisamment variés. Benamara et al. [BEN 17a, 17b] et Chafi et Boulenouar [CHA 19] ont utilisé également cette technique afin de déterminer le trajet final de fissuration dans les matériaux gradués. L'angle de direction à chaque incrément de propagation est déterminé à l'aide des FICs, définis par :

$$K_I = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(\nu_b - \nu_d) - \frac{(\nu_c - \nu_e)}{2} \right] \quad (\text{II.25})$$

$$K_{II} = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_b - u_d) - \frac{(u_c - u_e)}{2} \right] \quad (\text{II.26})$$

Où : E_{tip} et ν_{tip} sont le module de Young et le coefficient de poisson, respectivement. Ces paramètres sont calculés à la pointe de fissure.

En élasticité linéaire, le paramètre k_{tip} égal à $\left(\frac{3-\nu_{tip}}{1+\nu_{tip}}\right)$ en état de contrainte plane et égale à $(3 - 4\nu_{tip})$ en déformation plane.

u et v sont respectivement les déplacements suivant les directions x et y (Figure II.8). L est la longueur de l'élément singulier.

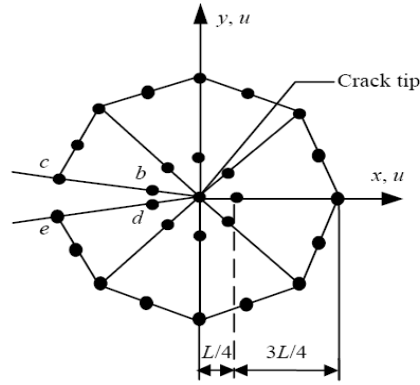


Figure II.8. Eléments singuliers avec nœuds au quart des côtés.

b) Méthodes de corrélation

La technique de corrélation de déplacement DCT « *Displacement Correlation Technique* » est l'une des méthodes les plus simples pour évaluer les FICs en mode mixte pour les matériaux fonctionnellement gradués. Il consiste à corréler les résultats numériques de déplacement avec des solutions analytiques [KIM 02]. Cette corrélation est effectuée sur des points spécifiques localisés sur les lèvres de la fissure (Figure II.8). Pour les matériaux FGM, les FICs peuvent être évalués par [BOU 20]:

$$K_I = \frac{\mu_{tip}}{1+k_{tip}} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(v_b - v_d) - (v_c - v_e)] \quad (II.27)$$

$$K_{II} = \frac{\mu_{tip}}{1+k_{tip}} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(u_b - u_d) - (u_c - u_e)] \quad (II.28)$$

μ_{tip} est le module de cisaillement, calculé à la pointe de fissure.

Plusieurs travaux scientifiques ont réalisé sur des structures en FGM en se basant sur la technique de corrélation ; Boulenouar [BOU 20] a analysé numériquement l'évolution des FICs pour une fissure centrale inclinée dans un disque en FGM. Yildirim et al. [YIL 08] ont étudié le comportement de délaminage des revêtements de FGM orthotropes, en utilisant l'approche DCT. Topal and Dag [TOP 13], Dag and Ilhan [DAG 08] and Dag [DAG 12] ont utilisé également cette technique pour comparer et valider les valeurs de FICs calculées à partir d'un développement de la méthode dite « Intégrale J_k » appliquée pour les matériaux FGM orthotropes. Les détails de la formulation et l'implémentation de la technique DCT sont trouvés dans la référence [YIL 05].

c) Technique de l'intégrale de fermeture de fissure modifiée

La technique de l'intégrale de fermeture de fissure modifiée MCC « *Modified Crack-Closure Integral method* » a été, à l'origine, proposée par Rybicki et Kanninen [RYB 77] en 1977 pour la fissuration en 2D, puis développée en 3D par Shivakumar et al. [SHI 88]. Cette technique est basée sur la théorie de l'intégrale de fermeture de fissure présentée par Irwin [IRW 57] et qui suppose que l'énergie libérée pour faire propager une fissure sur une distance donnée soit identique à l'énergie nécessaire à la fermeture de cette fissure. Le taux G peut être facilement déterminé par cette méthode. Par contre, la pré-fissure et le remaillage après chaque pas de propagation de fissure est nécessaires.

Pour les matériaux FGM, les facteurs d'intensité des contraintes peuvent être liés aux taux de restitution d'énergie G par les relations [JIN 96].

$$G_I = \left(\frac{k_{tip}+1}{8 \mu_{tip}} \right) K_I^2 \quad (\text{II.29})$$

$$G_{II} = \left(\frac{k_{tip}+1}{8 \mu_{tip}} \right) K_{II}^2 \quad (\text{II.30})$$

Kim and Paulino [KIM 02b, 03b] ont évalué les facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte (FIC) pour des fissures orientées arbitrairement dans les FGMs orthotropes en utilisant la méthode MCC et la méthode l'intégrale J_k .

d) Méthodes des intégrales d'interaction

Plusieurs méthodes numériques basées sur l'intégrale de Rice existent, parmi elles la méthode d'intégral d'interaction. Cette technique est la plus compatible avec la formulation de la méthode des éléments finis, elle est relativement exploitée dans la littérature que ce soit en élasticité linéaire 2D [MOË 99] et 3D [GOS 98, GRA 02], en dynamique [RÉT 05] ainsi que pour les matériaux à propriétés mécaniques variables [KIM 03b, YIL 06, RAO 03].

✓ Méthode de l'intégrale M

La technique d'extraction des FICs utilisée dans ce travail de thèse fait l'intervenir des intégrales dites d'interaction. C'est une méthode de découplage des modes de rupture pour acquérir la connaissance locale des modes de sollicitation en pointe de fissure. Cette approche globale est introduite pour des problèmes 2D [SHI 88, YAU 80], mais aussi pour des fissures planes 3D [GOS 98] ou non-planes [NAK 89, 91]. Le concept sous-jacent est basé sur l'utilisation de deux états indépendants, (1) et (2), d'un corps fissuré élastique, homogène et

isotrope. Les variables associées sont décrites respectivement par les exposants (1) et (2). L'état (1) correspond au champ réel qui satisfait le problème de conditions aux limites, tandis que l'état (2) est un champ auxiliaire arbitraire. La superposition des deux états conduit à un nouveau décrit par l'exposant (0). Dans le cas d'une fissure rectiligne et libre d'effort (sans frottement ni contact, hypothèses de l'intégrale J), l'intégrale J de l'état (0) est

$$J^{(0)} = \int_{\Gamma} (W^{(0)} \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1}) n_j ds \quad (\text{II.31})$$

où Γ correspond au contour d'intégration et $W^{(0)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)})$.

Après développements et réarrangement des termes, nous obtenons

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (\text{II.32})$$

avec $J^{(1)}$ et $J^{(2)}$ les intégrales J des états (1) et (2) respectivement, et $M^{(1,2)}$, appelée *l'intégrale d'interaction* pour les états (1) et (2), est donnée par :

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_j ds \quad (\text{II.33})$$

où $W^{(1,2)}$ est l'énergie de déformation d'interaction définie par $W^{(0)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)})$.

En utilisant l'équation (II.32) pour l'état (0), et après développement et simplification, nous aboutissons à l'écriture de $J^{(0)}$ sous la forme :

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (\text{II.34})$$

La comparaison des deux équations conduit à la relation

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) = M \quad (\text{II.35})$$

Par conséquent, les FICs de l'état réel (1) peuvent être déterminés en évaluant l'intégrale d'interaction $M^{(1,2)}$ pour un choix judicieux des champs asymptotiques de l'état auxiliaire (2). Nous optons pour les trois états des modes purs asymptotiques définis par Westergaard, de sorte que :

- En mode I pur, $K_I^{(2)} = I$, $K_{II}^{(2)} = 0$, $K_{III}^{(2)} = 0$, détermine $K_I^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction par la relation :

$$K_I^{(1)} = K_I = \frac{2}{E^*} M \quad (\text{II.36})$$

- En mode II pur, $K_I^{(2)}=0$, $K_{II}^{(2)}=1$, $K_{III}^{(2)} = 0$, détermine $K_{II}^{(1)}$ en terme d'intégrale d'interaction par la relation :

$$K_{II}^{(1)} = K_{II} = \frac{2}{E^*} M \quad (\text{II.37})$$

✓ Méthode de l'intégrale J_k

Cette technique a été utilisée dans plusieurs travaux scientifiques [YIL 04, 05, 06, 08], [TOP 13], [DAG 06, 07, 08, 10, 12, 13]. Elle basée sur l'intégrale J proposé par Rice, transférée dans le domaine d'intégrale, nommé l'intégrale J_k .

L'intégrale J peut s'écrire séparément en deux modes J_1 et J_2 (Mode-I et Mode-II) [BEN 06]:

$$\begin{cases} J_1 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,1})_{expl} q d\Omega \\ \text{et } J_2 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,2} - W \delta_{2j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl} q d\Omega + \int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) n_2^+ q d\Gamma \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

où : q est une fonction et $q_{,j}$ est la dérivée de la fonction q par rapport aux coordonnées.

W est la fonction de densité d'énergie de déformation mécanique.

$(W_{,1})_{expl}$ et $(W_{,2})_{expl}$ sont les dérivées de W par rapport aux coordonnées x et y , respectivement.

$u_{,1}$ et $u_{,2}$ sont les dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, respectivement.

Ω est la surface d'intégration.

$(W^+ - W^-)$ est la notation de densité d'énergie de déformation mécanique sur les faces de la fissure.

Après le développement, J_1 et J_2 peuvent s'écrire, [BEN 06]

$$J_1 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,1})_{expl} q d\Omega \quad (\text{II.39})$$

$$\begin{aligned} J_2 = & \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,2} - W \delta_{2j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl} q d\Omega + \int_{\Gamma_c} (W^+ - W^-) n_2^+ q d\Gamma \\ & - \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) \frac{x}{R} dx + \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}} \frac{8K_{II} T_s (3R-\delta)}{3E'R} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

La relation entre J_1 , J_2 et les FICs K_I , K_{II} sont données par [KIM 02a].

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (\text{II.41a})$$

$$J_2 = \frac{2K_I K_{II}}{E'} \quad (\text{II.41b})$$

On introduit une nouvelle quantité \hat{J}_2 :

$$\hat{J}_2 = \iint_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,2} q_{,j} - W \delta_{2j}) q_{,j} d\Omega - \iint_{\Omega} (W_{,2})_{expl} q d\Omega - \int_0^{R-\delta} (W^+ - W^-) \frac{x}{R} dx \quad (\text{II.42})$$

La quantité \hat{J}_2 peut s'écrire en fonction de contrainte T (T -stress) et les paramètres géométriques R et δ comme suit (Figure II .9):

$$\hat{J}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}} \frac{8 K_{II} T (3R - \delta)}{3E'R} = \frac{2 K_I K_{II}}{E'} \quad (\text{II.43})$$

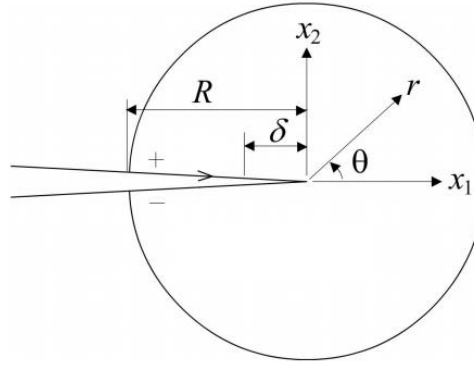


Figure II.9. Paramètres géométriques R et δ .

La quantité \hat{J}_2 est calculée numériquement sur un domaine donné pour deux valeurs de δ (δ_1 et δ_2), comme le montre la figure (II .10).

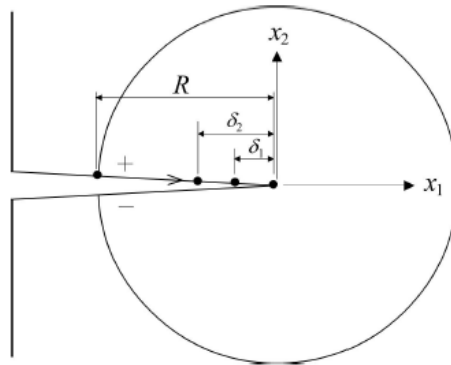


Figure II.10. Distances δ_1 et δ_2 .

Quand δ_1 et δ_2 sont substitués dans l'équation (II.43), les paramètres \hat{J}_2^1 et \hat{J}_2^2 peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \hat{J}_2^1 = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} - \sqrt{\frac{\delta_1}{2\pi}} \frac{8K_{II} T (3R - \delta_1)}{3E'R} \\ \hat{J}_2^2 = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} - \sqrt{\frac{\delta_2}{2\pi}} \frac{8K_{II} T (3R - \delta_2)}{3E'R} \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

On pose :

$$G = -\frac{8K_{II} T_s}{\sqrt{2\pi} E'} \quad (\text{II.45})$$

Introduisons les expressions (II.41b) et (II.45) dans (II.44), nous obtenons :

$$\hat{J}_2^1 = J_2 + G\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) \quad (\text{II.46.a})$$

$$\hat{J}_2^2 = J_2 + G\sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right) \quad (\text{II.46.b})$$

La soustraction entre les équations (II.46a) et (II.46b) donne :

$$G = \frac{J_2^1 - J_2^2}{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right)} \quad (\text{II.47})$$

En insérant l'équation (II.47) dans (II.46a), nous obtenons l'expression suivante :

$$\hat{J}_2^1 = J_2 + \frac{J_2^1 - J_2^2}{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right)} \sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) \quad (\text{II.48})$$

Ceci implique que :

$$J_2 = \frac{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) J_2^1 - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right) J_2^2}{\sqrt{\delta_1} \left(1 - \frac{\delta_1}{3R}\right) - \sqrt{\delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{3R}\right)} \quad (\text{II.49})$$

La relation (II.41b) nous permet d'écrire :

$$K_{II} = -\frac{E' J_2}{2K_I} \quad (\text{II.50})$$

Substituons l'expression (II.50) dans (II.41a), nous obtenons :

$$J_1 = \frac{K_I^2 + \left(\frac{E' J_2}{2K_I}\right)^2}{E'} \quad (\text{II.51})$$

La relation (II.51) nous permet d'écrire :

$$K_I^4 - E' J_1 K_I^2 + \frac{1}{4} (E')^2 (J_2)^2 = 0 \quad (\text{II.52a})$$

De même manière, nous trouvons :

$$K_{II}^4 - E' J_1 K_{II}^2 + \frac{1}{4} (E')^2 (J_2)^2 = 0 \quad (\text{II.52b})$$

Les racines des équations (II.52a) et (II.52b) sont données par [BEN 06] :

$$R_1 = \left\{ \frac{E'}{2} \left(J_1 + \sqrt{(J_1)^2 + (J_2)^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.53a})$$

$$R_2 = - \left\{ \frac{E'}{2} \left(J_1 + \sqrt{(J_1)^2 + (J_2)^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (\text{II.53b})$$

$$R_3 = \left\{ \frac{E'}{2} \left(J_1 + \sqrt{(J_1)^2 + (J_2)^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (\text{II.54c})$$

$$R_4 = - \left\{ \frac{E'}{2} \left(J_1 + \sqrt{(J_1)^2 + (J_2)^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (\text{II.54d})$$

Une des quatre racines donne le FIC en mode-I K_I , et le facteur le FIC en mode-II K_{II} .

On note que les signes des FICs sont liés aux déplacements normaux et tangentiels au voisinage de la pointe de fissure, défini par :

$$\Delta_n = u_2^+ - u_2^- \quad (\text{II.55a})$$

$$\Delta_t = u_1^+ - u_1^- \quad (\text{II.55b})$$

Les indices (+) et (-) indiquent les lèvres supérieures et inférieures de la fissure, respectivement.

Δ_n et Δ_t sont calculés au voisinage de la pointe de fissure. Si Δ_n est positif implique que la fissure est ouverte (c.-à-d. $K_I > 0$). De même manière, K_{II} est positif, si $\Delta_t > 0$ [BEN 06, KIM 03c]. Une description détaillée de l'utilisation de cette technique est donnée dans les références [BEN 06, EYÜ 08, FAR 13].

II.5.2. Rupture des matériaux FGMs sous différents chargements

L'utilisation croissante des matériaux avancés dans les éléments de structures a éveillé l'intérêt des chercheurs pour l'étude de la réponse des plaques en FGM utilisées dans des domaines à fortes sollicitations mécaniques et thermiques. L'étude du comportement de fissures est un axe fondamental dans l'étude de la durée de vie d'une structure. Elle repose sur les principes de la mécanique de la rupture, notamment par le calcul du facteur d'intensité de contrainte.

Pour les matériaux fonctionnellement gradués, des solutions analytiques pour étudier le comportement de fissures sont limités à des géométries relativement simples et aussi à des conditions de chargement. Le premier modèle analytique a été proposé par Erdogan et al. [ERD

91] afin de décrire le comportement de fissures des plaques FGM. Ces auteurs ont traité le problème d'élasticité plane pour deux demi-plans collés contenant une fissure perpendiculaire à l'interface et d'identifier l'effet de variation de propriétés des matériaux à proximité du plan de diffusion sur le FIC. Gu et al. [GU 99] ont proposé une simple méthode basée sur l'intégrale de domaine équivalent pour calculer le FIC dans les poutres et les cylindres en FGM.

Ces dernières années de nombreuses recherches ont été consacrées pour d'analyser le comportement statique et dynamique de différents éléments structurels, telles que les pipes, les plaques et les poutres en FGM sollicitées, sous chargement mécanique et thermique.

Dans cette partie d'étude, nous présentons une revue de quelques travaux scientifiques portant sur la rupture des matériaux fonctionnellement graduée en mettant l'accent sur les travaux publiés.

a) Chargement mécanique

Plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour évaluer l'état des contraintes au voisinage de fissure, parmi lesquelles, on trouve la méthode des éléments finis qui devient un outil indispensable pour analyser le comportement de fissures dans les matériaux fonctionnellement gradués, sous chargement mécanique. Dans ce contexte, Anlas et al. [ANL 00] ont évalué les FICs dans une plaque fissurée en FGM, sollicitée sous chargement mécanique uniforme. Les calculs numériques sont réalisés par la technique de l'intégrale-J et le taux de restitution d'énergie. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats analytiques existants.

Rao et Rahman [RAO 03] ont utilisé la méthode sans maillage de type Galerkin dite EFGM « *Element-Free Galerkin Method* » et les intégrales d'interaction pour le but de calculer les FICs des plaques en FGM, de géométrie arbitraire. Kim et Paulino [KIM 02a, 02b, 03a, 03b] ont analysé le comportement en rupture des plaques en FGM, en utilisant trois approches différentes basées sur les éléments finis telles que la méthode MCC, l'intégrale J_k et l'intégrale M . Un bon rapprochement est observé entre les trois techniques.

Mirahmadi et al. [MIR 16] ont évalué les FICs pour des fissures radiales dans un cylindre en FGM. Les calculs numériques ont été obtenus à travers la technique de l'intégrale J et la méthode des fonctions de poids « *Weight Function Method* ». Guo et al. [GUO 04] ont analysé théoriquement le problème de fissure sollicité en mode-I dans des structures en FGM orthotrope, en utilisant trois types de chargement tels que la pression interne, la flexion et le

déplacement imposé. Boulenouar [BOU 20] a étudié l'évolution des FICs en mode mixte dans un disque en FGM, au moyen de la technique de corrélation de déplacement (DCT). Shojaee et Daneshmand [SHO 15], Bayesteh et Mohammadi [BAY 13] ont utilisé la méthode des éléments finis étendus (XFEM) pour modéliser les structures en FGM orthotropes. Les FICs sont déterminés à l'aide de la méthode des intégrales d'interaction. Hebbar et al. [HEB 20] et Ait Ferhat et al. [AIT 20a] ont utilisé la méthode d'extrapolation de déplacement (DET) pour analyser les FICs dans des éprouvettes de flexion et des disques circulaires contenant une fissure centrale, sollicités à des forces concentrées.

Le problème de la propagation de fissures dans les matériaux FGM sollicités sous chargement mécanique a été consacré par nombreuses recherches : Benamara et al. [BEN 17a, 17b] et Chafi et Boulenouar [CHA 19] ont déterminé le trajet final de fissuration en mode mixte dans les plaques en FGM. Les FICs sont déterminés au moyen de la méthode des éléments finis et la technique d'extrapolation de déplacement. Ma et al. [MA 08] ont analysés par les méthodes XFEM et l'intégrale M le chemin de fissuration dans des éprouvettes de flexion 4-points en FGM.

Haider et Hassanein [HAI 17] ont adopté la méthode sans maillage dite XEFGM « *Extended Element Free Galerkin Method* » pour simuler la propagation des fissures des poutres en verre/époxy soumises à une flexion non proportionnelle. La méthode de l'intégrale d'interaction a été appliquée pour déterminer les FICs en mode mixte pour chaque extension de la fissure.

Chen et al. [CHE 18] ont développé une technique numérique dite SBFEM « *Scaled Boundary Finite Element Method* » pour modéliser la propagation des fissures sous chargement mécanique. Cette méthode est basée sur la combinaison entre la méthode des éléments de frontière et la méthode des éléments finis, en utilisant des polygones à quatre cotés (quadrilatère). Ooi et al. [OOI 15] ont également utilisé cette méthode SBFEM avec des éléments de forme polygone à 6 côtés (hexagone). Les FICs sont déterminés directement à partir des solutions des contraintes, sans aucune technique particulière. Un modèle numérique a été créé via commercial code Franc 2D par Kim and Poulino [KIM 04, 07] pour étudier la progression éventuelle de la fissure dans les matériaux FGMs. La technique de l'intégrale M a été implémentée dans le code pour déterminer les FICs à chaque incrément de propagation. Hirshikesh et al. [HIR 19] ont développé la formulation par éléments finis basé sur des équations de champ de phases pour étudier le phénomène de la propagation des fissures dans

les matériaux FGMs. Les FICs sont obtenus par l'extrapolation des déplacements en se basant sur les expressions asymptotiques.

b) Chargement thermique

L'idée originale du concept des matériaux FGMs a été proposée en 1984 par des chercheurs japonais, pour la préparation de nouveaux matériaux dans la construction de barrière thermique. Cette technologie permet de résoudre le problème de l'interface entre deux matériaux par l'élimination de discontinuités et d'améliorer la résistance au délaminage et à la propagation des fissures. La modélisation d'un milieu fissuré en FGM sous chargement thermique est retenue par plusieurs travaux, en utilisant différentes approches. Yildirim [YIL 06] a utilisé la technique de l'intégrale de domaine équivalent avec la méthode des éléments finis pour analyser l'évolution de FIC dans les matériaux FGMs, sous les conditions de chargement thermique en régimes permanent et transitoire. Dag [DAG 07] a développé la méthode de calcul basée sur l'intégrale J_k pour évaluer les FICs dans les matériaux FGM, soumises à un chargement thermique en mode mixte. Aussi par l'utilisation de la méthode des éléments finis, Dag [DAG 06], Dag et al. [DAG 10] ont considéré la même technique de calcul pour analyser la rupture des matériaux FGMs orthotropes soumises à des contraintes thermiques. Yildirim et al. [YIL 05] ont analysé le problème de fissures surfaciques dans le revêtement de barrière thermique, soumis à des charges thermomécaniques. Jin et Paulino [JIN 01] ont considéré une fissure débouchante dans une couche en FGM pour déterminer le FIC thermique (FICT), sous les conditions de chargement thermique transitoire. Garg et Pant [GAR 17] ont exploité la méthode sans maillage de type Galerkin pour analyser le problème de rupture thermoélastique des FGMs. Les FICs sont calculés à l'aide de la méthode l'intégrale M . En utilisant la technique de corrélation de déplacement, Kosker et al. [KOS 10] ont étudié par les éléments finis tridimensionnelles l'évolution des FICs en mode mixte pour une fissure semi-elliptique inclinée située dans un revêtement en FGM, prenant en compte l'effet des contraintes thermiques transitoires. Yildirim et Erdogan [YIL 04] ont considéré la technique des éléments enrichis pour évaluer les FICs en mode mixte, en utilisant des charges thermiques uniformes. Pour le cas des matériaux FGMs fissurés, Chen et al. [CHE 00] ont analysé l'influence de la non-homogénéité sur la méthode de l'intégrale J standard. Ces auteurs ont préposé une autre méthode modifiée de l'intégrale J . Au moyen d'une intégrale d'interaction, KC et Kim [KC 08] ont évalué les FICs et la contrainte T non singulière considérant des charges thermiques en régime permanent. Aussi par l'utilisation de l'intégrale d'interaction et la méthode des éléments finis, Moghaddam et ces collaborateurs [MOG 11] ont déterminé les

FICS sur le front de fissure tridimensionnelle. Nami et Eskandari [NAM 12] ont également étudié par la méthode des éléments finis tridimensionnelle, l'évolution des FICs pour des fissures de surfaces de forme semi-elliptique dans les cylindres en FGM, soumis à gradient de pression et de température. Takabi [TAK 16] a présenté une étude analytique et numérique thermomécanique d'un cylindre à paroi épaisse en FGM, soumis à une pression interne et une charge thermique. Moghaddam et Alfano [MOG 18] ont formulé l'intégrale d'interaction à l'aide de la méthode des éléments finis pour présenter une analyse thermomécanique non couplée et d'extraire les FICs pour des fissures de surface dans les cylindres creux en FGM. Mahbadi [MAH 17] a estimé les FICs pour une fissure radiale dans un disque circulaire en FGM isotropes, soumise à une charge de traction et à un changement de température uniforme. L'analyse de l'extension quasi-statique des fissures dans les revêtements de barrière thermique en FGM est examinée par Rangaraj et Kokini [RAN 04], en utilisant la méthode des éléments finis bidimensionnel avec la technique de la zone cohésive. Zhang et al. [ZHA 18] ont exploité une méthode numérique dite NMM « *Numerical Manifold Method* » pour étudier le comportement en rupture des FGMs soumises à des chargements thermomécaniques. Récemment, Ait Ferhat et al. [AIT 20c] ont exploité la méthode de déplacement généralisé et la méthode des éléments finis pour étudier les FICs sous chargement mécanique et thermique. Des exemples d'applications suffisamment variés ont été testés et comparés dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture.

II.6. Conclusion

Un aspect important qui doit être abordé dans diverses applications techniques des FGMs est la question de la fiabilité et de la durabilité en général et des défaillances liées à la rupture en particulier. Dans cette partie d'étude, et après une brève description de quelques notions de base de la mécanique de la rupture, une bibliographie de quelques recherches scientifiques liée au comportement en rupture des matériaux FGMs est présentée, en mettant l'accent sur les différentes approches utilisées pour déterminer les FICs en mode mixte.

Chapitre III

Etude par EF du comportement en rupture des FGMs

III.1 Introduction

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité sévères. Nous pensons bien sûr aux projets spatiaux, aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale. Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin des modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

En mécanique de la rupture, plusieurs approches numériques ont été adoptées pour la détermination des différents paramètres de rupture (facteur d'intensité des contraintes, l'intégrale J , l'écartement de fissure...), se basant sur les critères de rupture. Néanmoins, des difficultés peuvent être rencontrées, dues à la complexité de la géométrie de la structure et la forme de fissure.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus efficaces aujourd'hui pour la résolution des problèmes pratiques de rupture, elle constitue un outil industriel utilisé pour les problèmes usuels de calcul des structures et figure désormais dans les programmes d'enseignement des écoles d'ingénieurs. De plus, la disponibilité des logiciels généraux d'analyse structurale par éléments finis ainsi que les progrès de l'information ont bouleversé les méthodes de travail de l'ingénieur qui peut aujourd'hui résoudre les problèmes les plus complexes avec un degré de raffinement qui ne serait pas envisageable avec les méthodes traditionnelles. L'existence de ces logiciels n'atténue en rien le rôle et la responsabilité de l'ingénieur. Au contraire, pour bien maîtriser cette technique, il lui est indispensable de connaître ses principes de base, la formulation et les propriétés des éléments utilisés ainsi que les caractéristiques des méthodes de résolution.

Le but de ce chapitre est de présenter une étude numérique, par l'approche locale, du comportement en rupture des matériaux FGMs, sollicités sous chargement mécanique et thermique. Des exemples d'applications suffisamment variés ont été testés et comparés dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture MLR, en utilisant le code de calcul par éléments finis ANSYS 16.0.

III.2 Modélisation de la singularité et l'évaluation du FIC

Souvent dans une structure fissurée pour avoir une bonne précision dans une analyse par éléments finis conventionnels, un maillage plus raffiné est requis dans la région du front de

fissure, mais le taux de convergence devient très bas. Donc, pour éviter un maillage raffiné de discrétisation des structures fissurées, il est préférable d'utiliser des éléments spéciaux en pointe de fissure ayant des fonctions de formes compatibles avec la singularité du champ de déplacement (Figure III.1).

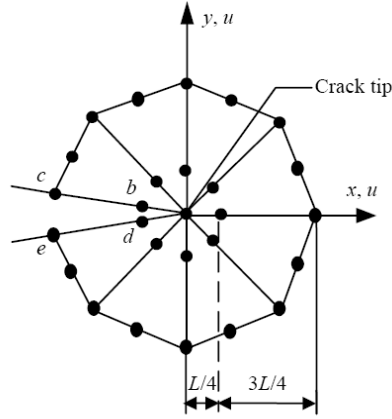


Figure III.1. *Eléments singuliers avec nœuds au quart des côtés.*

La mécanique linéaire de la rupture est basée sur la détermination des facteurs d'intensité des contraintes (FICs). Il est donc important d'élaborer un modèle numérique capable de calculer ces facteurs pour différentes géométries des structures fissurées.

Dans la première partie de ce chapitre, deux techniques sont utilisées pour analyser la variation des facteurs d'intensité des contraintes, en utilisant :

Méthode d'extrapolation de déplacement DET (*Displacement Extrapolation Technique*) :

En mode mixte, les facteurs K_I et K_{II} sont calculés par [BEN 17a, 17b, CHA 19]:

$$K_I = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(v_b - v_d) - \frac{(v_c - v_e)}{2} \right] \quad (\text{III.1})$$

$$K_{II} = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_b - u_d) - \frac{(u_c - u_e)}{2} \right] \quad (\text{III.2})$$

Méthode de corrélation de déplacement DCT (*Displacement Correlation Technique*) : Les paramètres K_I et K_{II} sont donnés par [BOU 20]:

$$K_I = \frac{\mu_{tip}}{k_{tip}+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(v_b - v_d) - (v_c - v_e)] \quad (\text{III.3})$$

$$K_{II} = \frac{\mu_{tip}}{k_{tip}+1} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(u_b - u_d) - (u_c - u_e)] \quad (\text{III.4})$$

Où :

E_{tip} , ν_{tip} et μ_{tip} sont le module de Young, le coefficient de poisson et le module de cisaillement, respectivement. Ces paramètres sont calculés à la pointe de fissure.

En élasticité linéaire, le paramètre k_{tip} égal à $\left(\frac{3-\nu_{tip}}{1+\nu_{tip}}\right)$ en état de contrainte plane et égale à $(3 - 4\nu_{tip})$ en état de déformation plane.

L est la longueur de l'élément singulier. u et v sont, respectivement, les déplacements suivant les directions x et y (Figure III.1).

Dans ce travail, les facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} sont déterminés à l'aide d'un sous-programme implanté dans le code par éléments finis ANSYS 16.0, en utilisant le langage de script APDL (*ANSYS Parametric Design Language*).

III.3 Modélisation numérique du comportement mécanique des FGMs

Les propriétés mécaniques de la plaque en FGM sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul ANSYS. Ce programme permet de localiser les coordonnées du centre de chaque élément du maillage (e_i) et de calculer ensuite, le module élastique E et le coefficient de Poisson ν (pour chaque élément e_i), à travers les lois de mélange.

III.4 Etude par EF du comportement en rupture des FGMs

✓ Exemple 1 : Plaque pré-fissurée sollicitée en flexion

Dans cet exemple, on considère une plaque mince en FGM de longueur L et de largeur w (avec $L/w = 8$). La plaque pré-fissurée de longueur a est chargée en flexion comme le montre la figure (III.2). Nous rappelons ici que le module élastique de cette plaque est donné par la fonction exponentielle [CHE 00, KIM 02a] :

$$E(x) = E_1 \exp(\lambda x); \quad 0 \leq x \leq w \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$E = E_1$ ($x = 0$), $E = E_2$ ($x = w$), et $\lambda = \ln(E_2/E_1)$. Avec $E_1 = 1$

$E_2/E_1 = (0.1, 0.2, 1, 5 \text{ et } 10)$ et $\nu = 0.3$

$a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \text{ et } 0.6$

La structure en FGM est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds avec des éléments spéciaux au voisinage de la fissure. La résolution a été faite en état de contraintes planes.

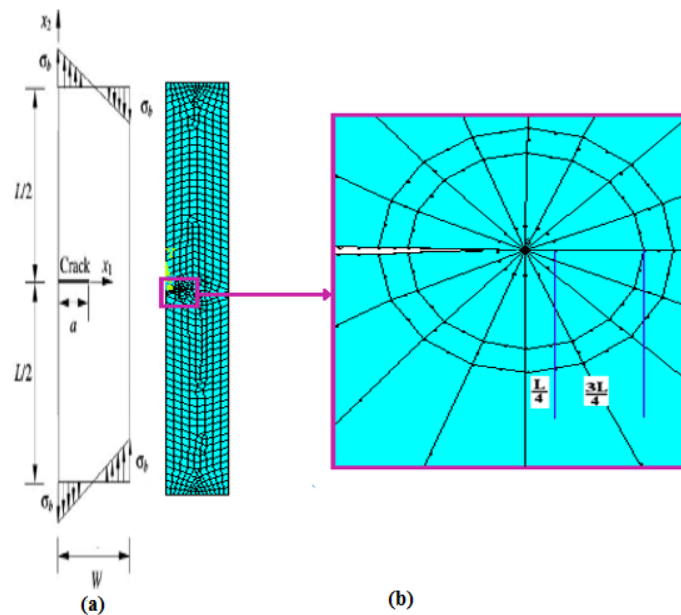


Figure III.2. Représentation schématique d'une plaque fissurée sollicitée en flexion.

Pour différentes valeurs du rapport $E_1/E_2=1, 5$ et 10 (avec $a/w=0.2$), la résolution par éléments finis nous a permis de donner sur la figure (III.3), des exemples de la distribution des contraintes normales dans la plaque considérée. On peut remarquer que la contrainte maximale concentrée au voisinage de la pointe de fissure (couleur rouge), diminue avec l'augmentation du rapport E_2/E_1 .

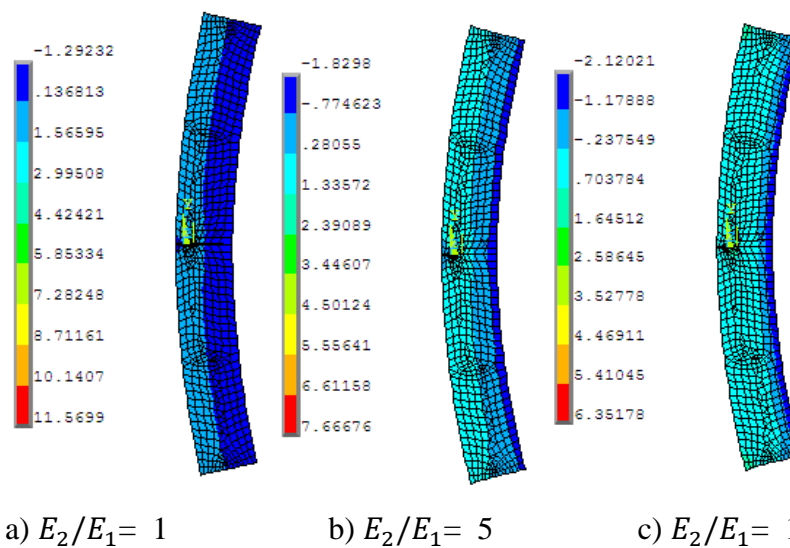


Figure III.3. Champ de contraintes normales au voisinage de la fissure (avec $a/w = 0.2$).

Nous avons exposé sur les figures (III.4a~e) l'illustration de la variation des valeurs de FIC estimé en mode-I en fonction du rapport E_2/E_1 , pour différentes taille de fissure (a/w). Les résultats obtenus par la méthode de corrélation du déplacement (DCT) sont comparés avec ceux obtenus par la technique d'extrapolation du déplacement (DET), en utilisant les équations (III.1) et (III.3).

La comparaison entre les deux méthodes implémentées dans le code de calcul indique une bonne concordance entre les courbes tracées.

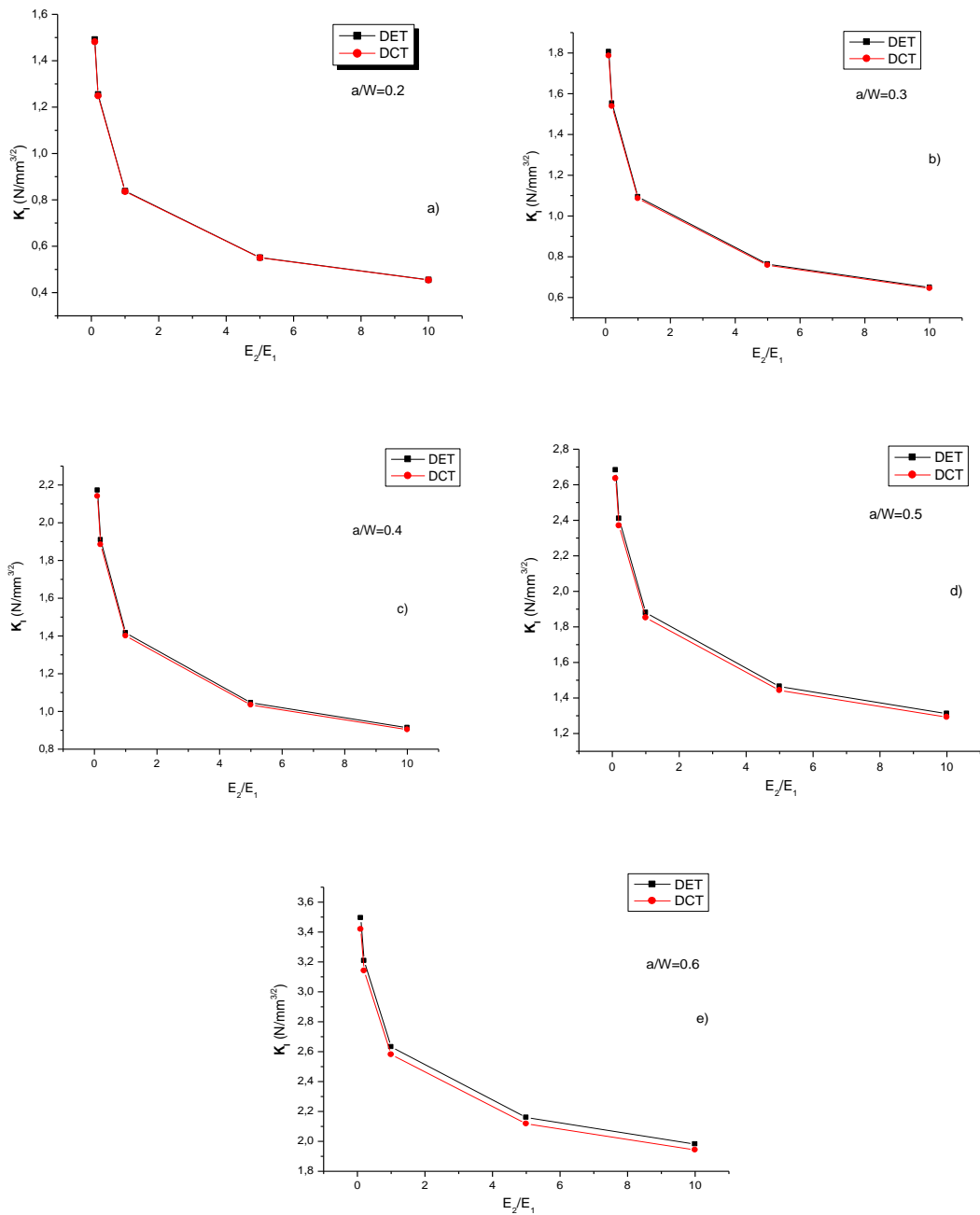


Figure III.4. Evolution du FIC K_I en fonction du rapport E_2/E_1 :
 $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ et 0.6 .

✓ **Exemple 2 : Fissure centrale inclinée dans un disque en FGM**

On considère ici, un disque en FGM contenu une fissure centrale inclinée avec l'angle $\theta = 30^\circ$ (Figure III.5a). Le disque est maillé par des éléments quadratiques et triangulaires, comme l'indique la figure (III.5b). Un maillage spécial est utilisé au voisinage de deux pointes de fissure pour caractériser la singularité (Figure III.5c).

Le module de Young E est donné par la fonction exponentielle [HEB 20, KIM 03b]:

$$E(R) = \bar{E} e^{\beta R}, \quad R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (\text{III.7})$$

Rest le rayon de disque

X_1 et X_2 sont des coordonnées cartésiennes.

Les données suivantes sont utilisées pour réaliser notre étude numérique, sous les conditions des contraintes planes : $a=1$, $R=10$, $\beta a = (-0.75, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75)$, $\bar{E}=1$, $\nu=0.3$

Une charge ponctuelle $P = \pm 100$ unité est appliquée à la partie supérieure et inférieure du disque, aux nœuds de coordonnées $(0, \pm 10)$, respectivement. Les déplacements u_1 et u_2 sont nuls au nœud de coordonnées $(X_1, X_2) = (-10, 0)$, et $u_2 = 0$ au nœud de coordonnées $(X_1, X_2) = (10, 0)$. Les conditions aux limites appliquées sont indiquées dans la figure (III.5a).

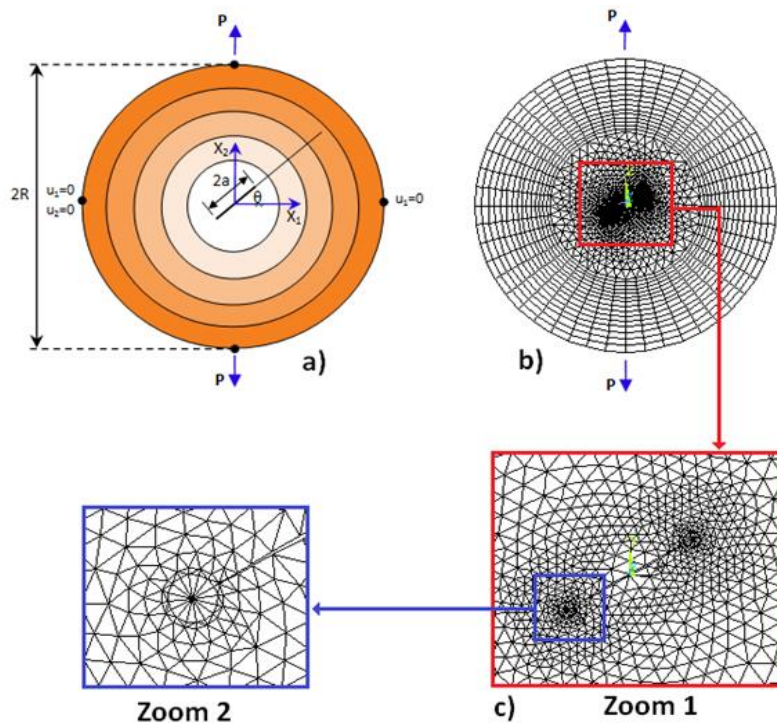


Figure III.5. a) Fissure centrale inclinée dans un disque circulaire en FGM,
 (b) Maillage globale du disque,
 (c) Maillage détaillé au voisinage de deux pointes de fissure.

Les figures (III.6a) et (III.6b) représentent, respectivement, la variation des facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} en fonction du paramètre β (avec $a/R=0.1$ et $\theta=30^\circ$). En utilisant les méthodes DET et DCT, les résultats obtenus pour les deux facteurs K_I et K_{II} sont comparés avec ceux obtenus numériquement par les méthodes MCC (*Modified Crack Closure*) [KIM 03a] et l'intégrale d'interaction ou l'intégrale M (*Interaction Integral Method*) [KIM 03b]. Cette comparaison indique un bon rapprochement entre les quatre techniques.

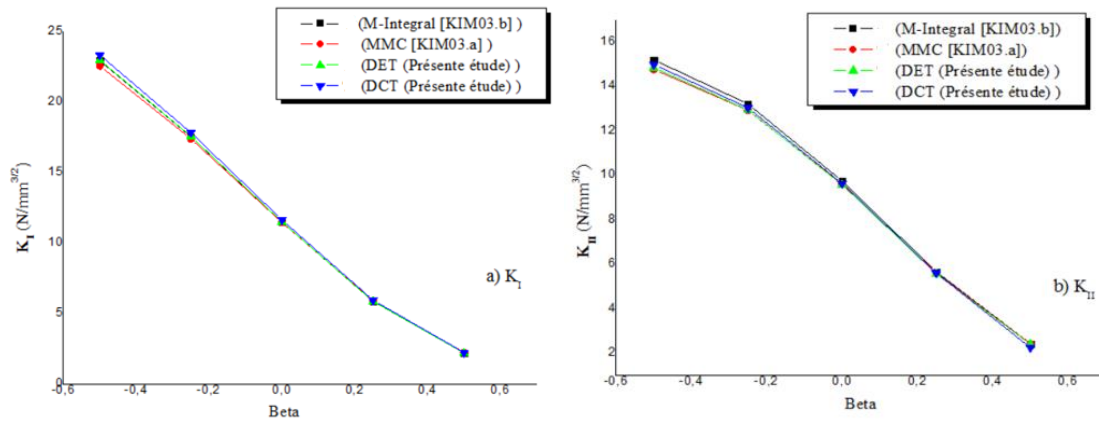


Figure III.6. Variation de K_I et K_{II} en fonction de β :

a) Variation de K_I , b) Variation de K_{II} .

Par l'effet de symétrie de la géométrie et les conditions de chargement, l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} en fonction des angles d'orientation θ est étudié dans l'intervalle $[90^\circ, -90^\circ]$.

Les figures (III.7) et (III.8) représentent la variation des facteurs K_I et K_{II} en fonction des angles positifs et négatifs de la fissure par la méthode DCT, en faisant varier taille de la fissure amorcée (a/w).

Nous pouvons remarquer que :

- Le facteur d'intensité des contraintes K_I est maximal lorsque l'angle est nul, ce qui est normal puisqu'on est en présence du mode d'ouverture (mode I), puis il diminue progressivement vers des valeurs négatives avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison θ . Les valeurs négatives de K_I obtenues pour des orientations varient entre $[90^\circ, 76^\circ]$ et $[-90^\circ, -76^\circ]$. Ces orientations présentent un risque de propagation de la fissure par cisaillement.
- Le facteur d'intensité des contraintes K_I augmente avec la longueur de la fissure. Pour chaque taille de fissure, les courbes tracées pour les angles négatifs et positifs sont symétriques entre elles par rapport à l'axe des ordonnées (yy') (Figure III.7).

- Dans le cas des angles positifs (Figure III.8), le facteur d'intensité des contraintes K_{II} est nul lorsque l'angle est nul ou bien atteint ($\theta = 90^\circ$) et augmente proportionnellement en fonction de l'angle jusqu'à une valeur maximale correspond à un angle $\theta = 45^\circ$ à partir duquel la courbe prend une allure descendante avec l'augmentation de l'angle θ . Cette évolution a été remarquée dans plusieurs travaux de recherche scientifique, dans le cas des matériaux homogènes [BOU 13a, KIM 02].
- Pour une longueur de la fissure donnée, les courbes de K_{II} obtenus pour les angles négatifs et positifs sont symétriques entre elles par rapport au repère M(0,0) (Figure III.8). Ces résultats indiquent que l'évolution de K_{II} est dépend du sens d'orientation de la fissure.

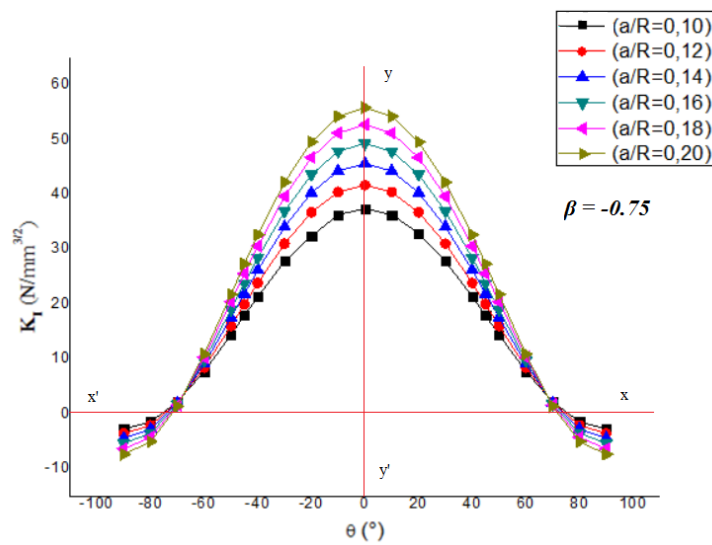


Figure III.7. Variation du facteur d'intensité des contraintes K_I en fonction des angles d'inclinaison ($\beta = -0.75$).

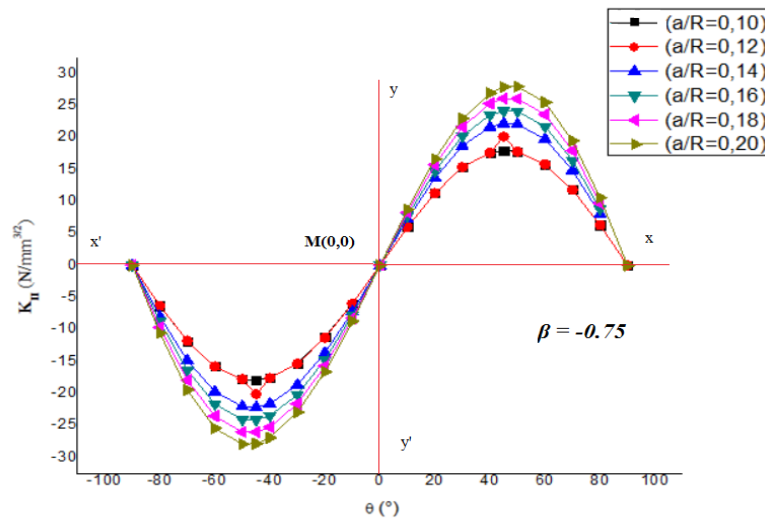


Figure III.8. Variation du facteur d'intensité des contraintes K_{II} en fonction des angles d'inclinaison ($\beta = -0.75$).

✓ Exemple 3 : Plaque en FGM pré-fissurée sollicitée thermiquement

Dans le cas d'un problème sollicité sous chargement thermomécanique, la démarche consiste à modéliser le problème sous chargement thermique en régime permanent et ensuite faire lancer l'analyse structurale. L'organigramme de la figure (III.9) résume les principales parties de chaque analyse (thermique et structurale).

Le programme de l'analyse structurale utilise les mêmes paramètres de calcul définis dans le programme de l'analyse thermique.

La commande **ETCHG** (*Element Type Change*) permet de garder exactement le même modèle (géométrie et maillage) créé pour l'analyse thermique en changeant uniquement l'élément thermique par son correspondant structural (PLANE77 à PLANE183).

ANSYS dispose de la commande **LDREAD** (*Load Read*) qui va lire, à chaque pas de calcul, les températures des nœuds des éléments thermiques, à partir d'un fichier créé automatiquement lors de l'analyse thermique, puis les transmettre aux mêmes nœuds des éléments structuraux, au même pas de calcul.

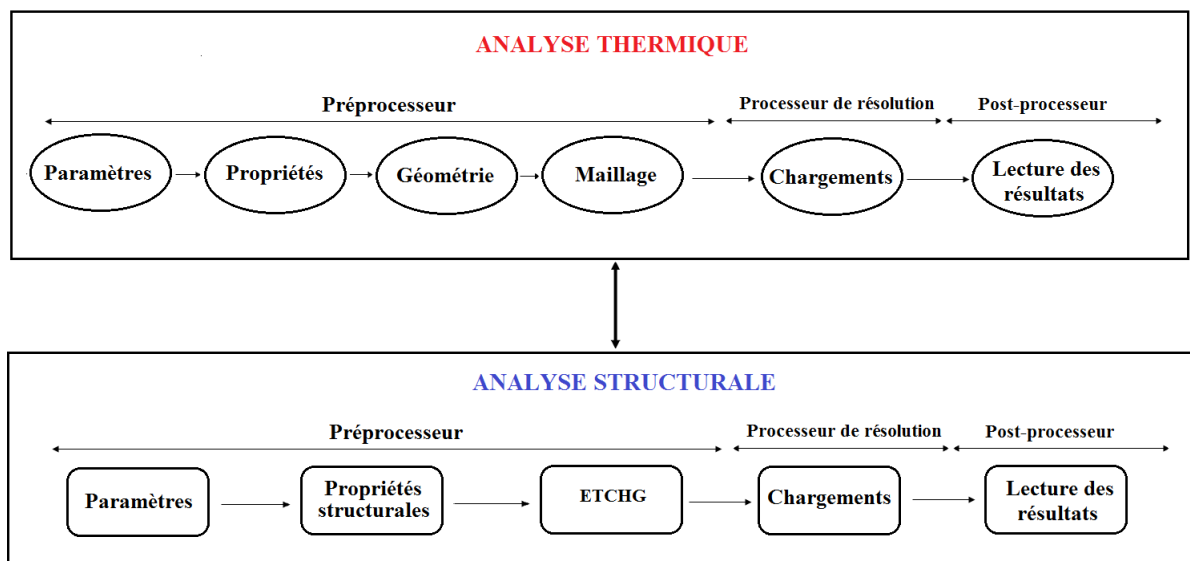


Figure III.9. Organigramme de l'analyse thermique et structurale.

Pour cet exemple, on considère une plaque de longueur $H = 8$ unités et de largeur $W = 1$ unité, soumise à des charges thermiques. Une fissure de longueur $a = 1$ unité est supposée amorcer au bord de la plaque. La figure (III.10a) illustre le modèle géométrique et le chargement thermique appliqué sur la plaque pré-fissurée en FGM.

La structure considérée est maillée par des éléments iso-paramétriques à 8 nœuds avec des éléments spéciaux au voisinage de la pointe de fissure pour modéliser la singularité. Ce maillage nous servira de calculer les FICs par la méthode d'extrapolation des déplacements. La figure (III.10b) illustre le maillage global de la structure. La discrétisation bidimensionnelle contient 2344 éléments et 4889 nœuds.

Les valeurs du FIC, en mode d'ouverture de la fissure, sont calculées sous les conditions de déformation et de contrainte plane, en se basant sur la méthode d'extrapolation du déplacement (DET).

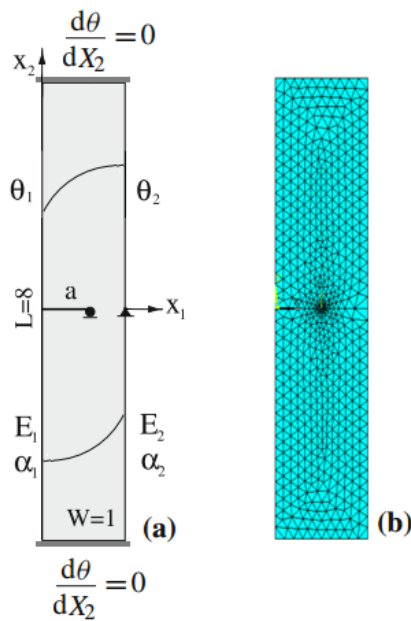


Figure III.10. (a) Géométrie d'une plaque fissurée en FGM,
(b) Maillage globale de la plaque.

Propriétés mécaniques de la plaque FGM :

Le module élastique et le coefficient de dilatation thermique de la plaque en FGM sont donnés par la fonction exponentielle [KC 08]:

$$E(X_1) = E_1 e^{\eta X_1} \quad (\text{III.8})$$

$$\alpha(X_1) = \alpha_1 e^{\gamma X_1} \quad (\text{III.9})$$

avec: $\eta = \frac{1}{W} \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$ et $\gamma = \frac{1}{W} \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$

$E_1 = 1$ et $E_2 = 5$ ou 10

$$\alpha_1 = 0.01 \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)} \text{ et } \alpha_2 = 0.02 \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)}$$

Dans cette analyse, nous avons considéré que le coefficient de Poisson est constant ($\nu=0.3$), car son effet est négligeable sur le comportement en rupture des matériaux FGMs en mode-I [KC 08].

Conditions aux limites :

Les conditions aux limites thermiques sont définies comme suit :

$$\theta_0 = 10 \text{ (}^\circ\text{C)}, \theta_1 \text{ (à } X_1 = 0) \text{ et } \theta_2 \text{ (à } X_1 = W)$$

Dans cette étude, deux cas ont été considérés :

- **Cas 1** : nous avons considéré un coefficient de conductivité thermique constant k
- **Cas 2** : nous avons considéré :

$$k(X_1) = k_1 e^{\delta X_1} \quad (\text{III.10})$$

$$\text{où : } \delta = \frac{1}{W} \ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right), k_1=1 \text{ et } k_2 = 10$$

$$\theta(X_1) = N e^{-\delta X_1} + M \quad (\text{III.11})$$

Les constants N et M sont obtenues à partir des conditions aux limites de la température.

Les propriétés élastiques de la plaque en FGM sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul par éléments finis. Ce programme permet de localiser les coordonnées du centre de chaque élément du maillage et de calculer ensuite, le module élastique E_i et le coefficient de Poisson ν_i (pour chaque élément i), en utilisant les équations (III.1) et (III.2). Le programme implémenté utilise le langage de script APDL (*ANSYS Parametric Design Language*).

Pour les deux cas, les résultats numériques du FIC normalisé (K_I/K_0) obtenus en mode-I sont regroupés dans le tableau (III.1). Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus par KC et Kim [KC 08], Walters et al. [WAL 04], Erdogan et Wu [ERD 96], Yildirim [YIL 06] et Yildirim et al. [YIL 05]. Les résultats FEM montrent un bon accord avec les résultats de référence.

Ces résultats nous permettent de conclure que la méthode DET décrit correctement le champ de contraintes et de déformations au voisinage du fond de fissure sollicitée thermiquement.

Tableau III.1. Valeurs du FIC normalisé K_I/K_0 avec : $K_0 = \left(\frac{E_1 \alpha_1 \theta_0}{1-\nu_1} \right) \sqrt{\pi a}$.

| Cas 1: $\frac{E_2}{E_1} = 5, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 2$ | | | | | | |
|--|----------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Température | Présente étude | [KC 08] | [ERD 96] | [WAL 04] | [YIL 05] | [YIL 06] |
| $\theta_1=0.5 \theta_0$ $\theta_2=0.5 \theta_0$ | 0.0128 | 0.0128 | 0.0125 | 0.0127 | 0.0124 | 0.0128 |
| $\theta_1=0.05 \theta_0$ $\theta_2=0.05 \theta_0$ | 0.0244 | 0.0244 | 0.0245 | 0.0241 | 0.0238 | - |
| Cas 2: $\frac{E_2}{E_1} = 10, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 2, \frac{k_2}{k_1} = 10$ | | | | | | |
| Température | Présente étude | [KC 08] | [ERD96] | [WAL04] | [YIL05] | [YIL06] |
| $\theta_1=0.2 \theta_0$ $\theta_2=0.5 \theta_0$ | 0.0335 | 0.0334 | 0.0335 | 0.0335 | 0.0331 | 0.0340 |
| $\theta_1=0.05 \theta_0$ $\theta_2=0.5 \theta_0$ | 0.0407 | 0.0406 | 0.0410 | 0.0409 | 0.0404 | - |

III.5 Méthode de déplacement généralisé (GDC)

Les FICs définissent suffisamment le champ de contraintes au voisinage de la pointe de fissure et fournissent des connaissances nécessaires sur les conditions de bifurcation et de trajet éventuel de propagation. D'une manière générale, les méthodes d'estimation peuvent être classées en deux groupes, celles basées sur l'extrapolation de champ près du fond de fissure et celles qui utilisent la technique de la libération d'énergie.

Dans cette section, la méthode de corrélation de déplacement généralisée GDC (*Generalized displacement correlation method*) proposée par Fu et al. [FU 12], dans le cas des matériaux homogènes, sera exploitée pour déterminer les FICs dans le cas des matériaux à gradient fonctionnel.

Par rapport aux autres méthodes basées sur les informations des champs de déplacements, la méthode GDC présente deux avantages [FU 12] :

- Elle est proposée pour fonctionner avec des types d'éléments finis conventionnels.
- Elle utilise un maillage homogène, sans raffinement local autour de la pointe de fissure.

III.6 Théorie

Pour la présente méthode GDC, le raffinement du maillage et la création des éléments singuliers au voisinage de la pointe de fissure peuvent être éliminés. En utilisant la méthode des éléments finis, si des éléments quadratiques sont utilisés, la longueur du côté de l'élément connecté au fond de fissure peut être remplacée par la distance ($l_E/2$) (*Méthode A*) ou par la distance (l_E) (*Méthode B*), comme le montre la figure (III.11a). La méthode B peut être appliquée à tous les types d'éléments finis et elle est donc plus générale que la méthode A [FU 12].

En utilisant la méthode GDC, les FICs K_I et K_{II} peuvent être déterminés par [FU 12] :

- **Méthode A :**

$$K_I = \frac{2\left(u_\theta\left(\frac{l_E}{2}, \pi\right) - u_\theta\left(\frac{l_E}{2}, -\pi\right)\right) + (u_\theta(l_E, -\pi) - u_\theta(l_E, \pi))}{((2\sqrt{2}-2)\sqrt{l_E} f_\theta^a(\pi))} \quad (\text{III.12})$$

$$K_{II} = \frac{2\left(u_r\left(\frac{l_E}{2}, \pi\right) - u_r\left(\frac{l_E}{2}, -\pi\right)\right) + (u_r(l_E, -\pi) - u_r(l_E, \pi))}{((2\sqrt{2}-2)\sqrt{l_E} f_r^b(\pi))} \quad (\text{III.13})$$

Où :

u_θ et u_r sont les champs de déplacements, par rapport au déplacement du fond de fissure, et

$$f_\theta^a(\pi) = f_r^b(\pi) = \frac{-\beta}{\sqrt{2\pi} G}$$

G est le module de cisaillement

$$\beta \text{ est un constant avec : } \beta = \begin{cases} 2(1-\nu) & \text{En déformation plane} \\ \frac{2}{1+\nu} & \text{En contrainte plane} \end{cases}$$

- **Méthode B :**

$$K_I = \frac{2\left(u_r\left(l_e, \frac{\pi}{2}\right) - u_r\left(l_e, -\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(u_r\left(2l_e, \frac{\pi}{2}\right) - u_r\left(2l_e, -\frac{\pi}{2}\right)\right)}{((4-2\sqrt{2})\sqrt{l_E} f_r^a\left(\frac{\pi}{2}\right))} \quad (\text{III.14})$$

$$K_{II} = \frac{(2u_\theta(l_e, 0) - u_\theta(2l_e, 0))}{((2-\sqrt{2})\sqrt{l_E} f_\theta^b(0))} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{où : } f_r^a\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\beta-1}{4\sqrt{\pi} G} \text{ et } f_\theta^b(0) = \frac{1-\beta}{\sqrt{2\pi} G}$$

On note ici que les deux méthodes (A) et (B) sont faciles à implémenter dans les codes par éléments finis existants. La méthode (A) ne nécessite que des déplacements sur une couche d'éléments autour de la pointe de fissure, tandis que la méthode (B) nécessite deux couches d'éléments [FU 12]. A cet effet, nous avons sélectionné la méthode (A) pour l'exploiter, afin de déterminer ensuite les FICs dans le cas des FGMs. Dans cette partie d'étude, la technique de

calcul est basée sur les équations (III.12) et (III.13), en utilisant les éléments singuliers au voisinage de la pointe de fissure au lieu des éléments conventionnels proposés par Fu et al. [FU 12], comme le montre la figure (III.11b).

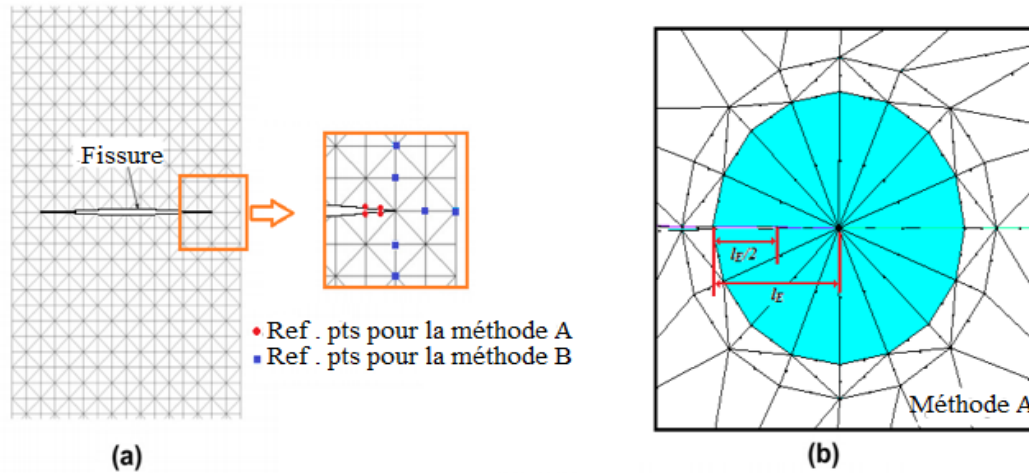


Figure III.11. (a) Points de référence utilisés par Fu et al. [FU 12], cas des matériaux homogènes ;
(b) Points de référence utilisés par la méthode A, cas des matériaux FGMs.

III.7 Exemples de validation

Afin de démontrer l'efficacité et la robustesse de la méthode utilisée, nous avons traité plusieurs exemples de validation. Les résultats obtenus, sous l'effet de chargement mécanique et thermique, seront comparés avec d'autres travaux numériques existents dans la littérature. Dans cette section, les exemples considérés sont :

III.7.1 Chargement mécanique

✓ Exemple 1 : Poutre de flexion 3-points avec une fissure parallèle à la gradation du matériau

Dans cet exemple, on considère une poutre de flexion 3-points avec une fissure de longueur a , supposée amorcer parallèlement à la gradation matérielle, comme l'indique la figure (III.12).

Les dimensions de la poutre sont : $L = 54$ unité, $2H = 10$ unité, et $t = 1$ unité. Une force $P = 1$ unité est appliquée au centre de la poutre.

Le module élastique de la poutre est donné par la relation linéaire [RAO 03, AIT 20b, KIM 02a] :

$$E(x_2) = Ax_2 + B \quad (\text{III.16})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} A = \frac{(E_2 - E_1)}{2h} \\ B = \frac{(E_2 + E_1)}{2} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Où E_1 , E_2 sont les paramètres du matériau. Le coefficient de Poisson ν est supposé constant.

Les données suivantes sont utilisées dans la présente analyse : $2h = 1$ unité, $E_1 = 1$ unité et $E_2/E_1 = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10$ et 20 .

La poutre de flexion 3-points est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds et particulièrement, des éléments spéciaux ont été utilisés pour caractériser la singularité en tête de la fissure (Figure III.13a). La détermination des facteurs d'intensité des contraintes K_I pour les trois tailles de fissure ($a = 4.5, 5.0$ et 5.5 unités) est effectuée sous les conditions de contrainte plane, en utilisant la méthode GDC (Figure III.13b).

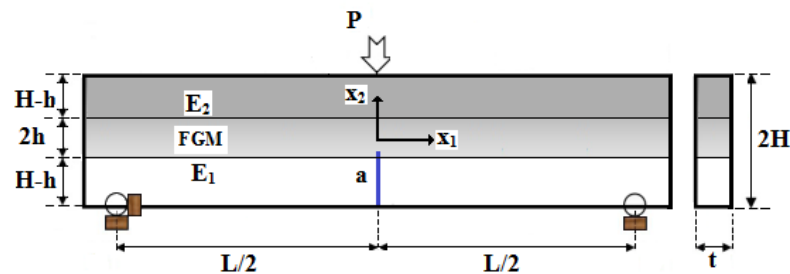


Figure III.12. Géométrie de l'éprouvette de flexion 3 points en FGM.

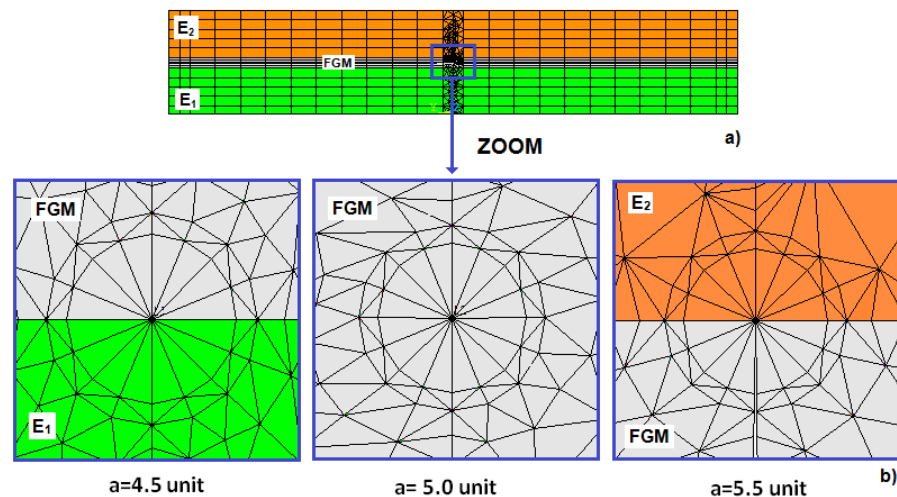


Figure III.13. Maillage de l'éprouvette de flexion 3 points:

(a) Maillage global,

(b) Maillage au voisinage de la pointe de fissure pour différentes tailles de fissure.

La comparaison des résultats obtenus avec des ceux de référence est utile pour estimer la précision des résultats obtenus. Le tableau (III.2) résume les valeurs du FIC normalisés ($K_I\sqrt{H}/\pi$) calculés par l'approche GDC, en utilisant plusieurs combinaisons de E_2/E_1 et $a/2H$. Ces résultats sont comparés avec les résultats de Kim et Paulino [KIM 02a] obtenus par la méthode d'intégrale J et les résultats de Rao et Rahman [RAO 05] obtenus au moyen des intégrales d'interaction modifiées, basées sur la méthode de Galerkin sans éléments (EFGM). La comparaison montre un bon accord avec d'autres résultats de référence.

Tableau III.2. FIC normalisé ($K_I\sqrt{H}/\pi$) calculé pour la poutre de flexion à 3-points.

| ($a/2H = 0.45$) | | | |
|-------------------|----------------|----------|-----------|
| E_2/E_1 | Présente étude | [RAO 05] | [KIM 02a] |
| 0.1 | 23.96 | 23.61 | 23.47 |
| 0.2 | 17.51 | 17.28 | 17.36 |
| 0.5 | 11.73 | 11.45 | 11.65 |
| 1 | 8.18 | 7.95 | 8.13 |
| 2 | 5.23 | 5.15 | 5.23 |
| 5 | 2.50 | 2.51 | 2.54 |
| 10 | 1.28 | 1.31 | 1.33 |
| 20 | 0.61 | 0.65 | 0.66 |

| ($a/2H = 0.50$) | | | |
|-------------------|----------------|----------|-----------|
| E_2/E_1 | Présente étude | [RAO 05] | [KIM 02a] |
| 0.1 | 24.89 | 23.96 | 23.92 |
| 0.2 | 19.04 | 18.36 | 18.32 |
| 0.5 | 13.08 | 12.30 | 12.57 |
| 1 | 9.85 | 9.20 | 9.46 |
| 2 | 7.61 | 7.33 | 7.31 |
| 5 | 5.71 | 5.46 | 5.49 |
| 10 | 4.77 | 4.61 | 4.58 |
| 20 | 4.11 | 3.98 | 3.93 |

| ($a/2H = 0.55$) | | | |
|-------------------|----------------|----------|-----------|
| E_2/E_1 | Présente étude | [RAO 05] | [KIM 02a] |
| 0.1 | 13.07 | 13.40 | 13.73 |
| 0.2 | 12.48 | 12.16 | 12.79 |
| 0.5 | 11.69 | 11.29 | 11.76 |
| 1 | 11.14 | 10.85 | 11.15 |
| 2 | 10.63 | 10.44 | 10.62 |
| 5 | 9.97 | 9.93 | 9.96 |
| 10 | 9.52 | 9.58 | 9.50 |
| 20 | 9.13 | 9.27 | 9.12 |

✓ **Exemple 2 : Plaque FGM avec une fissure débouchante**

On considère une plaque fissurée au bord soumise à un chargement de traction uni-axiale, cet exemple a été initialement proposé en 1963, par Erdogan et Wu [ERD 63]. La figure (III.14a) montre la géométrie de la plaque en FGM, avec une fissure initiale de longueur (a). Les données ci-dessous sont utilisées pour l'analyse par éléments finis :

$a/w=0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ et 0.6 ; $L/w=8$

$E_2/E_1=(0.1, 0.2, 1, 5$ et $10)$, $E_1=1$ unit, $\sigma=1$ unit et $\nu=0.3$

La figure (III.14b) montre la discrétisation du maillage d'une plaque FGM fissurée avec 1068 éléments et 2589 nœuds.

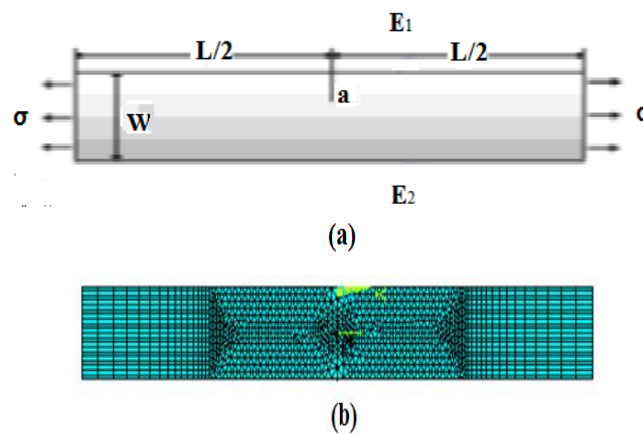


Figure III.14. a) Géométrie et conditions aux limites de la plaque FGM ;
(b) Maillage global ($a / w = 0.4$).

Le tableau (III.3) illustre l'ensemble des résultats de FIC, obtenu par la méthode GDC, en utilisant plusieurs combinaisons de E_2/E_1 et a/w . Ces résultats sont comparés avec ceux rapportés par d'autres méthodes, en utilisant la solution analytique de Erdogan et Wu [ERD 97], la méthode de l'intégrale J^* , la méthode MMC étudiée par Kim et Paulino [KIM 02a] et la méthode de Galerkin (EFG) utilisée par Chen et al. [CHE 00]. Les résultats confirment qu'il existe un bon accord entre la présente évaluation du FIC et d'autres références disponibles dans la littérature.

Les résultats obtenus à travers des exemples 1 et 2 permettent de conclure que la méthode de corrélation de déplacement généralisée, a correctement décrit le champ contrainte-déformation autour de la pointe de fissure, pour des plaques FGMs soumises à un chargement mécanique.

Tableau III.3. Résultats du FIC K_I pour différentes tailles de fissure.

| (a/w=0.2) | | | | | |
|------------------|---------------------------------------|-------------------|--------------------------------|--|-------------------------------|
| E_2/E_1 | $K_{I\text{GDC}}$ (Présente étude) | K_I [ERD 97] | $K_{I\text{MMC}}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{Intégrale J}^*}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{EPG}}$ [CHE 00] |
| 0.1 | 1.373 | 1.296 | 1.280 | 1.284 | 1.366 |
| 0.2 | 1.459 | 1.395 | 1.380 | 1.39 | 1.455 |
| 1 | 1.246 | - | 1.358 | 1.358 | 1.408 |
| 5 | 1.165 | 1.131 | 1.129 | 1.132 | 1.158 |
| 10 | 1.031 | 1.001 | 1.001 | 1.003 | 1.032 |

| (a/w=0.3) | | | | | |
|------------------|---------------------------------------|-------------------|--------------------------------|--|-------------------------------|
| E_2/E_1 | $K_{I\text{GDC}}$ (Présente étude) | K_I [ERD 97] | $K_{I\text{MMC}}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{Intégrale J}^*}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{EPG}}$ [CHE 00] |
| 0.1 | 1.919 | 1.858 | 1.832 | 1.846 | 1.926 |
| 0.2 | 1.890 | 1.839 | 1.818 | 1.831 | 1.897 |
| 1 | 1.694 | - | 1.649 | 1.658 | 1.698 |
| 5 | 1.393 | 1.369 | 1.371 | 1.37 | 1.392 |
| 10 | 1.248 | 1.299 | 1.234 | 1.228 | 1.249 |

| (a/w=0.4) | | | | | |
|------------------|---------------------------------------|-------------------|--------------------------------|--|-------------------------------|
| E_2/E_1 | $K_{I\text{GDC}}$ (Présente étude) | K_I [ERD 97] | $K_{I\text{MMC}}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{Intégrale J}^*}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{EPG}}$ [CHE 00] |
| 0.1 | 2.416 | 2.569 | 2.523 | 2.544 | 2.658 |
| 0.2 | 2.304 | 2.443 | 2.411 | 2.431 | 2.529 |
| 1 | 1.99 | - | 2.097 | 2.11 | 2.178 |
| 5 | 1.650 | 1.748 | 1.744 | 1.749 | 1.794 |
| 10 | 1.500 | 1.588 | 1.582 | 1.588 | 1.614 |

| (a/w=0.5) | | | | | |
|------------------|---------------------------------------|-------------------|--------------------------------|--|-------------------------------|
| E_2/E_1 | $K_{I\text{GDC}}$ (Présente étude) | K_I [ERD 97] | $K_{I\text{MMC}}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{Intégrale J}^*}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{EPG}}$ [CHE 00] |
| 0.1 | 3.568 | 3.570 | 3.470 | 3.496 | 3.666 |
| 0.2 | 3.369 | 3.326 | 3.268 | 3.292 | 3.443 |
| 1 | 2.899 | - | 2.806 | 2.822 | 2.933 |
| 5 | 2.432 | 2.365 | 2.36 | 2.366 | 2.446 |
| 10 | 2.236 | 2.176 | 2.174 | 2.175 | 2.223 |

| (a/w=0.6) | | | | | |
|------------------|---------------------------------------|-------------------|--------------------------------|--|-------------------------------|
| E_2/E_1 | $K_{I\text{GDC}}$ (Présente étude) | K_I [ERD 97] | $K_{I\text{MMC}}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{Intégrale J}^*}$ [KIM 02a] | $K_{I\text{EPG}}$ [CHE 00] |
| 0.1 | 5.250 | 5.188 | 4.921 | 4.962 | 5.234 |
| 0.2 | 4.971 | 4.761 | 4.632 | 4.669 | 4.926 |
| 1 | 4.337 | - | 4.005 | 4.03 | 4.237 |
| 5 | 3.730 | 3.445 | 3.437 | 3.448 | 3.611 |
| 10 | 3.479 | 3.212 | 3.207 | 3.212 | 3.337 |

III.7.2 Chargement thermique

✓ Exemple 1 : Fissure débouchante dans une plaque FGM, soumise à une charge thermique

Une plaque fissurée au bord de dimensions $L = 4$ unités, $W = 1$ unité et une fissure de longueur (a) est considérée dans cette section. La plaque FGM est soumise à une charge thermique comme indiqué sur la figure (III.15a).

Les propriétés thermomécaniques du matériau FGM sont obéit à une fonction linéaire varie de l'extrémité gauche vers l'extrémité droit. Les résultats sont obtenus sous les conditions de contrainte plane et avec les données suivantes :

$$E_1 = 1 \times 10^5 \text{ et } E_2 = 0.5 \times 10^5$$

$$\alpha_1 = 1.67 \times 10^{-5} (\text{°C}^{-1}) \text{ et } \alpha_2 = 1 \times 10^{-5} (\text{°C}^{-1})$$

$$\nu_1 = 0.30 \text{ et } \nu_2 = 0.35$$

$$\theta_1 = 0 \text{ (°C)}, \theta_2 = 1 \text{ (°C)} \text{ et } \theta_0 = 0 \text{ (°C)}$$

La figure (III.15b) illustre un exemple de la discrétisation du maillage d'une plaque FGM fissurée par des éléments triangulaires, avec 1226 éléments et 2573 nœuds ($a/W = 0.5$).

En utilisant la méthode GDC, le tableau (III.4) résume les résultats des FICs mode-I pour différentes longueurs de fissure ($a = 0.1 \sim 0.8$). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux rapportés par KC et Kim [KC 08] à travers la technique et l'intégrale d'interaction. Un bon accord est remarqué entre les deux approches.

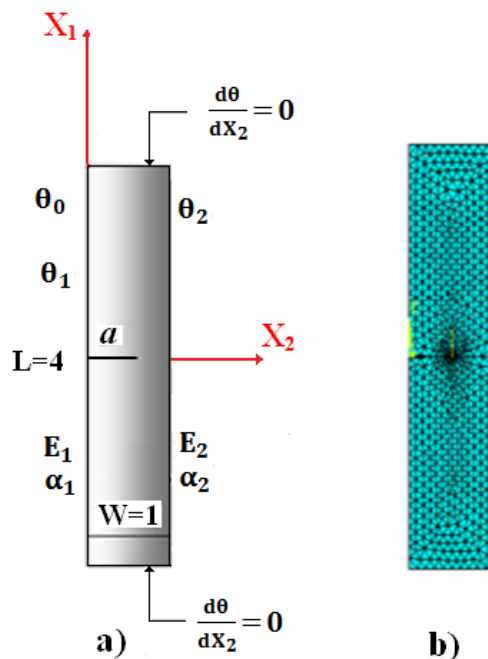


Figure III.15. a) Géométrie et conditions aux limites de la plaque FGM; (b) Maillage global ($a/w = 0.5$).

Tableau III.4. Résultats du FIC K_I pour différents rapports a/W .

| a/W | K_I | |
|-------|---------|----------------------|
| | [KC 08] | Présente étude (GDC) |
| 0.1 | 0.4229 | 0.4243 |
| 0.2 | 0.4691 | 0.4675 |
| 0.3 | 0.4385 | 0.4372 |
| 0.4 | 0.3742 | 0.3747 |
| 0.5 | 0.2972 | 0.2915 |
| 0.6 | 0.2186 | 0.2145 |
| 0.7 | 0.1444 | 0.1466 |
| 0.8 | 0.0795 | 0.0799 |

✓ Exemple 2 : Fissure dans une barrière thermique en FGM

Le concept de " *Matériaux à Gradient des Propriétés*" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984. L'idée principale est de réaliser des matériaux capables de jouer le rôle d'une barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [KOI 92].

A cet effet, nous avons considéré dans cette partie d'étude, une fissure amorcée dans un revêtement de barrière thermique en FGM. La figure (III.16) montre une couche de barrière thermique en FGM (*FGM coating*) déposée sur une couche de liaison (*Bond coat*) et un substrat métallique (*Metal substrate*).

Le revêtement FGM est 100% de zirconium-yttria à $x_1=0$ et 100% de Nickel-Chrome-Aluminium-Zirconium (NiCrAlY) à $x_1=W_1$. Le substrat métallique est constitué d'un superalliage à base de Nickel.

Les dimensions de système barrière thermique FG-TBC (*Functionally Graded Thermal Barrier Coating*), le chargement thermique et les conditions aux limites sont représentées sur la figure (III.16). Initialement, le système est supposé maintenu à la température uniforme ($T_0 = 1000$ °C).

Les deux extrémités (supérieur et inférieur) de ce système sont supposés isolés. Les autres extrémités (gauche et droite) sont supposés maintenu à des températures $T_1 = 0.2 T_0$ et $T_2 = 0.5 T_0$, respectivement.

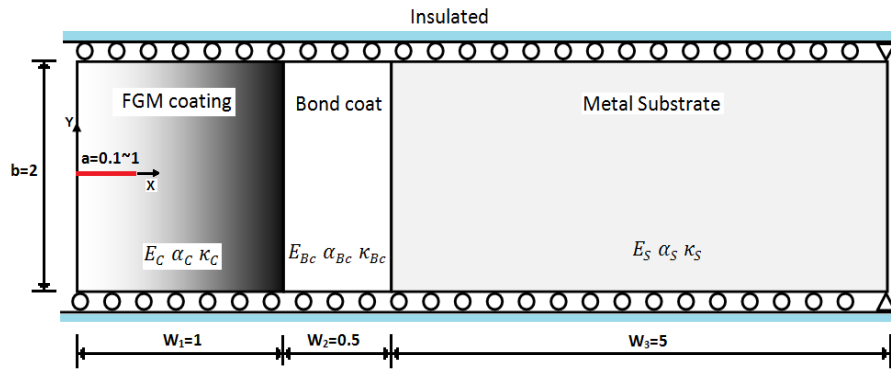


Figure III.16. Géométrie de système FG-TBC.

Propriétés thermomécaniques :

Les variations des propriétés thermomécaniques du module de Young E , du coefficient de Poisson ν , du coefficient de dilatation thermique α du revêtement en FGM, et de conductivité thermique k sont représentées par des fonctions de type loi de puissance. Ces propriétés sont données, respectivement, par :

$$E(x) = E_c + (E_{Bc} - E_c)x^2 \quad (\text{III.19})$$

$$\nu(x) = \nu_c + (\nu_{Bc} - \nu_c)x \quad (\text{III.20})$$

$$\alpha(x) = \alpha_c + (\alpha_{Bc} - \alpha_c)x \quad (\text{III.21})$$

$$k(x) = k_c + (k_{Bc} - k_c)x^2 \quad (\text{III.22})$$

Où :

Les indices c , Bc et s indiquent, respectivement, le revêtement FGM (*FGM coating*), la couche de liaison (*Bond coat*) et le substrat métallique (*Metal substrate*). Les propriétés thermomécaniques du système FG-TBC sont regroupées dans le tableau (III.5) [GAR 17].

Tableau III. 5. Propriétés thermomécaniques du système FG-TBC.

| Matériaux | ν | $E(\text{GPa})$ | $\alpha (^{\circ}\text{C}^{-1})$ | $k (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1})$ |
|-----------------------------|-------|-----------------|----------------------------------|--|
| Zirconia-Yttria | 0.25 | 27.6 | 10.01×10^{-6} | 1 |
| Couche de liaison (NiCrAlY) | 0.27 | 137.9 | 15.16×10^{-6} | 25 |
| Substrat métallique (Ni) | 0.25 | 175.8 | 13.91×10^{-6} | 7 |

A l'aide du code de calcul MATLAB, nous avons représenté sur les figures (III.17 a~d) l'évolution du module de Young E , du coefficient de Poisson ν , du coefficient de dilatation thermique α et de conductivité thermique k respectivement, en utilisant les équations (III.19~22).

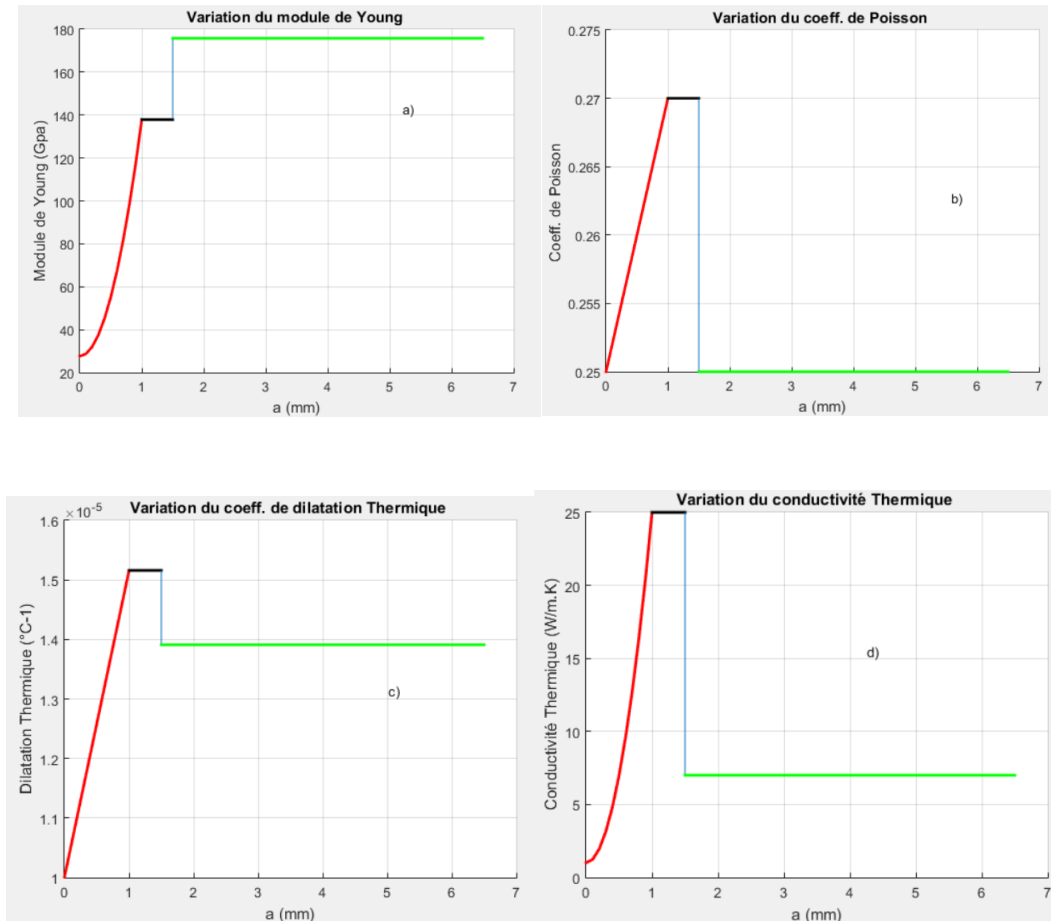


Figure III. 17. Evolution des propriétés thermomécaniques dans le système FG-TBC.

Le système barrière thermique FG-TBC est maillé par des éléments quadratiques à 8 nœuds et particulièrement un maillage à éléments spéciaux avec des nœuds au quart des côtés a été utilisé pour caractériser la singularité en tête de la fissure (Figure III.18). Le FIC K_I est calculé par la méthode GDC, sous les conditions de contrainte plane. La discrétisation bidimensionnelle contient 1734 éléments et 4749 nœuds.

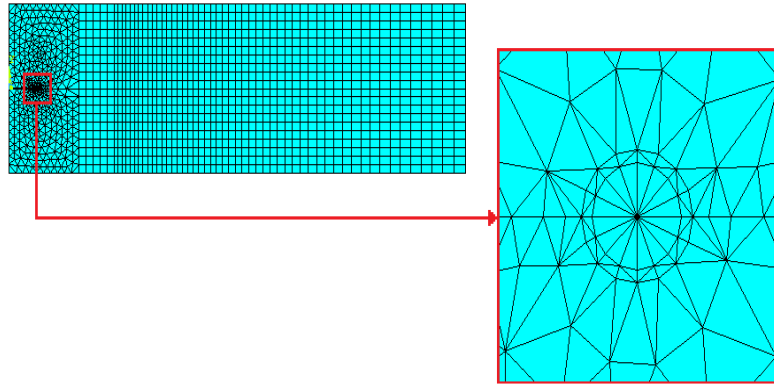


Figure III. 18. Maillage globale de la structure FG-TBC.

La figure (III.19) montre l'évolution des valeurs du FIC K_I pour différents rapports a/W , dans la région graduée. On peut remarquer clairement que le FIC augmente avec la taille de la fissure. Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis montrent un bon accord avec les résultats de référence obtenus par Garg et Pant [GAR 17] et par KC et Kim [KC 08], en utilisant la méthode de Galerkin sans élément EFGM (*element-free Galerkin method*) et la méthode de l'intégrale d'interaction, respectivement.

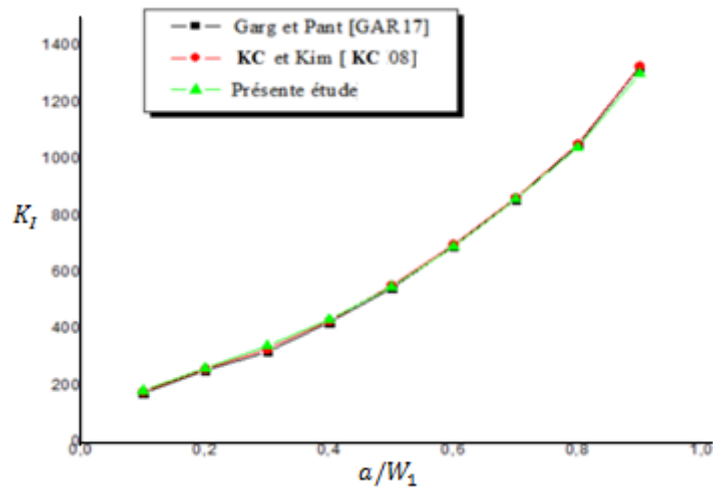


Figure III. 19. Variation de K_I en fonction de a/W_1 .

Dans la figure (III.20), nous avons montré un exemple de la distribution de la température dans le système de barrière thermique FG-TBC (avec $a/W_1 = 0.4$). On peut clairement voir que le champ de température reste non affecté par la présence de fissure et que le flux de chaleur est parallèle à la surface de la fissure, dans la direction horizontale.

La distribution de température obtenue par la méthode des éléments finis a été comparée à celle obtenue par Garg et Pant [GAR 17], en utilisant la méthode EFGM. Un bon accord est constaté entre les deux méthodes de calcul.

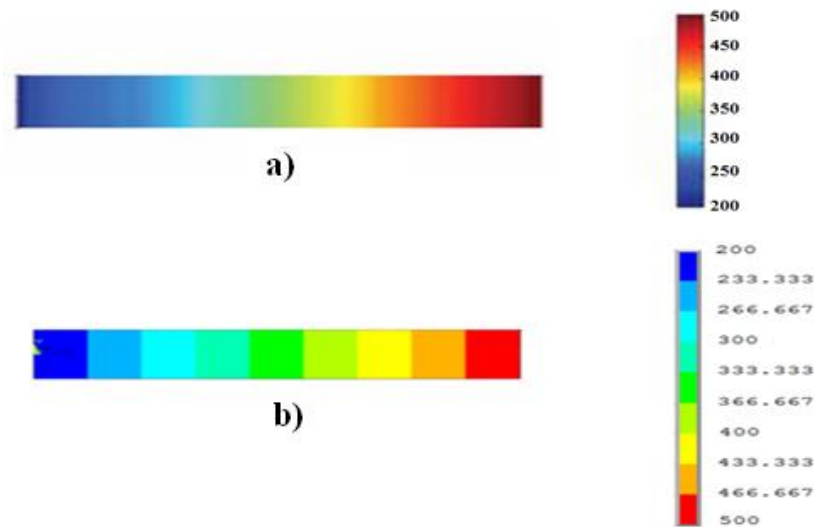
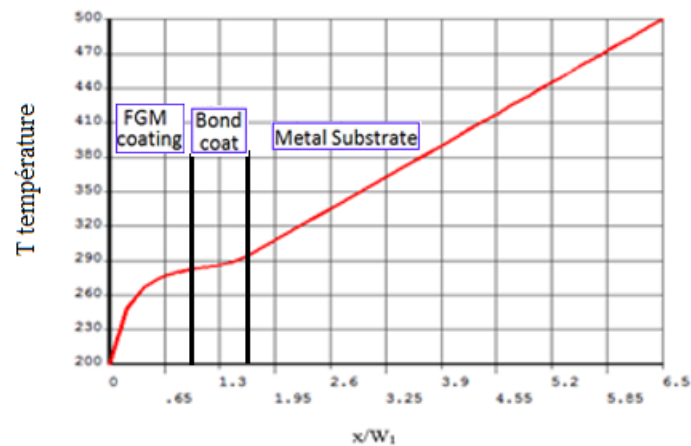


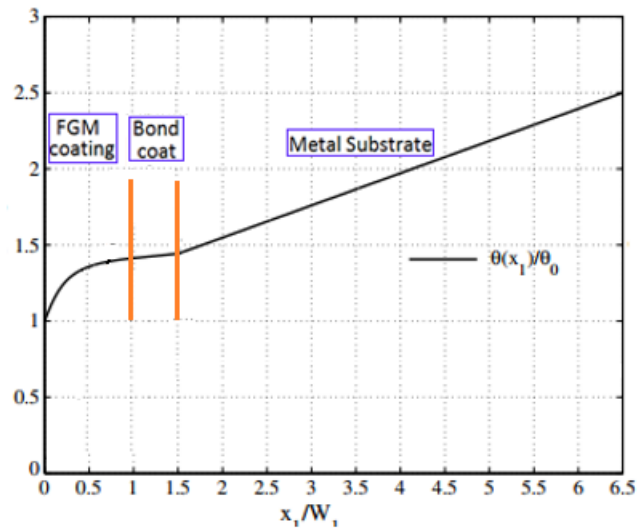
Figure III. 20. Contour de la température dans le FG-TBC ($a/W_1 = 0.4$)

a) Garg et Pant [GAR 17], b) Présente étude.

La figure (III.21a) représente la variation de la température dans le système FG-TBC. On peut remarquer que la variation de la température n'est pas linéaire dans la partie FGM comme celle remarquée dans le reste du système FG-TBC. Ces remarques sont en bon accord avec les résultats de références réalisés par KC et Kim [KC 08], comme le montre la figure (III.21b).



a)



b)

Figure III. 21. Distribution de la température dans le système FG-TBC

a) *Présente étude*, b) *Résultats de KC et Kim [KC 08]*.

III.8 Conclusion

Ce chapitre avait pour le but de présenter une étude numérique du comportement en rupture des matériaux à gradient fonctionnel. Cette étude s'articule essentiellement sur l'approche locale qui utilise les informations du champ des déplacements au voisinage de la pointe de la fissure. Nous avons réussi à valider les calculs numériques qui visent la détermination du FIC, sous chargement mécanique et thermique. Des exemples d'applications suffisamment variés ont été testés et comparés afin de montrer la validation de notre implémentation numérique. Les trois techniques exploitées DET, DCT et GDC présente une grande concordance avec les méthodes numériques existantes dans la littérature.

Chapitre IV

Formulation & l'implémentation numérique de l'intégrale d'interaction

IV.1 Introduction

L'importance croissante de la simulation numérique dans le processus de conception industriel a entraîné une augmentation importante du nombre des problèmes accessibles par les méthodes numériques modernes. Que ce soit en simulation du phénomène de rupture ou dans d'autres domaines de la mécanique, la méthode des éléments finis a été largement développée et utilisée. Elle est désormais capable d'aller bien au-delà des simulations statiques élastiques linéaires, et de traiter le cas des non linéarités matérielles.

Dans la cadre de la mécanique linéaire de la rupture, plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour évaluer l'état de contrainte au voisinage de fissure, en se basant sur la détermination des facteurs d'intensité des contraintes. Parmi elles la méthode d'intégrale d'interaction qui a fait l'objet de plusieurs études pour analyser la problématique de la fissuration en mode mixte.

L'objectif de ce chapitre est de présenter des aspects numériques liés à l'implémentation de la méthode d'intégrale d'interaction pour le but de déterminer les facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte, dans le cas des structures en matériaux à gradient de propriétés. Le présent développement numérique est basé sur l'utilisation de la MEF, par le couplage des codes de calcul Ansys-Matlab. Pour valider l'exactitude et la fiabilité de la démarche, les résultats obtenus seront comparés avec d'autres travaux numériques existents dans la littérature.

IV.2 Théorie : Formulation de l'intégrale d'interaction

Lorsque la fissure est sollicitée en mode mixte, il devient nécessaire de déterminer les différents facteurs d'intensité des contraintes séparément. A partir de l'intégrale J , Yau et al. [YAU 80] ont proposé une méthode pour les déterminer. Cette méthode appelée intégrale d'interaction est très largement utilisée [GOS 02].

On considère un état mécanique comme la somme de l'état actuel de la structure ($u^{act}, \varepsilon^{act}, \sigma^{act}$) et d'un état auxiliaire fictif ($u^{aux}, \varepsilon^{aux}, \sigma^{aux}$). On considère deux états d'équilibre du corps fissuré : L'état 1 est l'état réel du problème étudié satisfaisant les conditions aux limites, et l'état 2 est un état auxiliaire fictif. On peut alors réécrire l'intégrale J des deux états superposés par [DUF 04] :

$$J^{(tot)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(tot)} \delta_{1j} - \left(\sigma_{ij}^{(act)} + \sigma_{ij}^{(aux)} \right) \frac{\partial (u_i^{(act)} + u_i^{(aux)})}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (IV.1)$$

$$\text{où} \quad W^{(tot)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{(act)} + \sigma_{ij}^{(aux)} \right) \left(\varepsilon_{ij}^{(act)} + \varepsilon_{ij}^{(aux)} \right) \quad (IV.2)$$

En réarrangeant les termes, nous obtenons :

$$J^{(tot)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(act)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{(act)}}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(W^{(aux)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{(aux)}}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} \left(W^{(act,aux)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{(aux)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{(act)}}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (IV.3)$$

$$\Rightarrow J^{(tot)} = J^{(act)} + J^{(aux)} + M^{(act,aux)} \quad (IV.4)$$

Où $J^{(act)}$ et $J^{(aux)}$ sont les intégrales J des états actuel et auxiliaire, respectivement.

$M^{(act,aux)}$ est l'intégrale d'interaction des deux états :

$$M^{(act,aux)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(act,aux)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{(aux)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{(act)}}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (IV.5)$$

Où $W^{(1,2)}$ est l'énergie de déformation mutuelle défini par :

$$W^{(act,aux)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{(act)} \varepsilon_{ij}^{(aux)} + \sigma_{ij}^{(aux)} \varepsilon_{ij}^{(act)} \right) \quad (IV.6)$$

Il est possible de développer l'expression (IV.3b) pour la superposition des états, nous obtenons :

$$J^{(tot)} = \frac{(K_I^{(tot)})^2}{E^*} + \frac{(K_{II}^{(tot)})^2}{E^*} + \frac{(K_{III}^{(tot)})^2}{2\mu} \quad (IV.7)$$

$$\Rightarrow J^{(tot)} = \frac{(K_I^{(act)} + K_I^{(aux)})^2}{E^*} + \frac{(K_{II}^{(act)} + K_{II}^{(aux)})^2}{E^*} + \frac{(K_{III}^{(act)} + K_{III}^{(aux)})^2}{2\mu} \quad (IV.8)$$

$$\Rightarrow J^{(tot)} = \frac{(K_I^{(act)})^2}{E^*} + \frac{(K_{II}^{(act)})^2}{E^*} + \frac{(K_{III}^{(act)})^2}{2\mu} + \frac{(K_I^{(aux)})^2}{E^*} + \frac{(K_{II}^{(aux)})^2}{E^*} + \frac{(K_{III}^{(aux)})^2}{2\mu} + 2 \frac{K_I^{(act)} K_I^{(aux)}}{E^*} + \\ 2 \frac{K_{II}^{(act)} K_{II}^{(aux)}}{E^*} + 2 \frac{K_{III}^{(act)} K_{III}^{(aux)}}{2\mu} \quad (IV.9)$$

$$\Rightarrow J^{(tot)} = J^{(act)} + J^{(aux)} + 2 \left(\frac{K_I^{(act)} K_I^{(aux)}}{E^*} + \frac{K_{II}^{(act)} K_{II}^{(aux)}}{E^*} + \frac{K_{III}^{(act)} K_{III}^{(aux)}}{2\mu} \right) \quad (IV.10)$$

Où : μ est le module de cisaillement.

$E^* = E$ en contrainte plane, et $\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)$ en déformation plane.

Finalement, nous obtenons :

$$M^{(act,aux)} = 2 \left(\frac{K_I^{(act)} K_I^{(aux)}}{E^*} + \frac{K_{II}^{(act)} K_{II}^{(aux)}}{E^*} + \frac{K_{III}^{(act)} K_{III}^{(aux)}}{2\mu} \right) \quad (IV.11)$$

Pour un problème bidimensionnel fissuré ($K_{III}^{(act)} = 0$), l'expression (IV.11) devient alors :

$$M^{(act,aux)} = \frac{2}{E^*} \left(K_I^{(act)} K_I^{(aux)} + K_{II}^{(act)} K_{II}^{(aux)} \right) = M \quad (IV.12)$$

En choisissant les champs auxiliaires comme chacun des modes purs, il est alors possible d'identifier la valeur de chacun des facteurs d'intensité des contraintes. On utilisera les deux combinaisons suivantes :

$$K_I^{(aux)} = 1.0, K_{II}^{(aux)} = 0.0 \Rightarrow K_I^{(act)} = \frac{E^*}{2} M = K_I \quad (IV.13a)$$

$$K_I^{(aux)} = 0.0, K_{II}^{(aux)} = 1.0 \Rightarrow K_{II}^{(act)} = \frac{E^*}{2} M = K_{II} \quad (IV.13b)$$

- **Evaluation de l'intégrale d'interaction (Intégrale M) :**

Nous rappelons que la formulation de l'intégral de Rice [RIC 68] a été définie par :

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \vec{T} \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad (IV.14)$$

Nous considérons une certaine intégrale sur le contour fermé de la figure (IV.1) où l'intégrande est celui de l'intégrale de l'équation (IV.14) multiplié par une fonction q :

$$I = \int_{\Gamma} \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_j q d\Gamma \quad (IV.15)$$

Où : m est la normale extérieure au contour fermé qui vaut n sur Γ_2 et $-n$ sur Γ_1 et δ_{1i} est un paramètre de Kronecher.

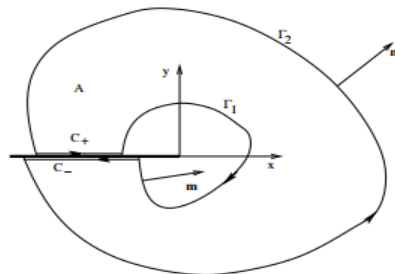


Figure IV.1. Intégrale J .

La fonction q est choisie telle que :

$$q = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

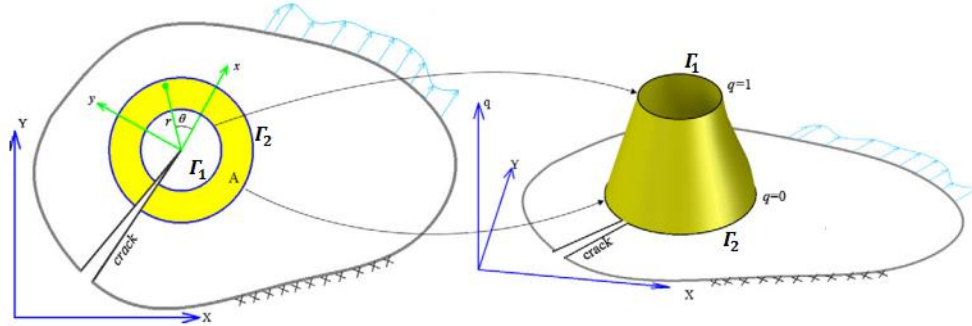


Figure IV.2. Fonction q sur les éléments d'intégration.

D'une part, puisque $q=0$ sur Γ_2 et que l'intégrande est nul sur C_+ et C_- , l'intégrale sur le contour fermé se réduit à une intégrale sur Γ_1 .

$$I = \int_{\Gamma_1} \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_j d\Gamma = -J \quad (\text{IV.17})$$

D'autre part, par le théorème de la divergence,

$$I = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) q + \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] dA \quad (\text{IV.18})$$

On peut facilement montrer que le premier terme de l'équation (IV.18) est nul en élasticité linéaire et par conséquent, la forme en domaine de l'intégrale J est

$$J = - \int_A \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (\text{IV.19})$$

De la même manière, l'intégrale d'interaction évaluée sur un domaine est donnée par [DUF 04] :

$$M^{(act,aux)} = M = - \int_A \left(W^{(act,aux)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(act)} \frac{\partial u_i^{(aux)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{(act)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (\text{IV.20})$$

IV.3 Méthode des éléments finis

IV.3.1 Couplage Ansys- Matlab

La méthode d'intégrale d'interaction est l'un des méthodes la plus compatible avec la formulation de la méthode des éléments finis. De ce fait, nous nous intéressons dans ce paragraphe à la présentation des démarches nécessaires qui permettent la résolution d'un problème par éléments finis pour les problèmes mécaniques.

Il est très important de noter que le principe de l'implémentation de la technique « Intégrale M » s'articule sur le couplage entre deux logiciels commerciaux Ansys et Matlab, grâce à des scripts.

Le lien entre Matlab et un logiciel dédié au calcul par éléments finis tel qu'Ansys va permettre d'obtenir des résultats plus précis. De plus, avec cette interaction, des problèmes avec des géométries plus complexes pourront être traités.

Le code de calcul Ansys 16.0 est un code d'éléments finis d'usage général dédié à la résolution numérique d'une large variété de problèmes physique en général et de mécanique en particulier. Ce code a été développé à Canonsburg en Pennsylvanie ; il est l'un des plus grands développeurs et fournisseur de logiciels de simulation numérique.

Dans le cadre de notre étude, la résolution par éléments finis comporte trois étapes :

Première étape : Préparation des données ou Pré-processing pour définir le problème (géométrie, le type d'élément fini ; les propriétés physiques des matériaux, maillage)

On note ici que Les propriétés mécaniques des matériaux FGMs sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul ANSYS 16.0, en utilisant le langage de script APDL (*ANSYS Parametric Design Language*). Le programme implémenté permet de localiser les coordonnées du centre de chaque élément du maillage et de calculer ensuite, le module élastique E et le coefficient de Poisson selon la loi de mélange choisie.

Deuxième étape : Traitement ou Processing : assigner les conditions aux limites pour résoudre le système d'équations.

Troisième étape : Post-processing : analyse et visualisation des résultats.

Après cette dernière étape, les résultats numériques nécessaires pour ce travail seront enregistrés et organisés en plusieurs fichiers texte, sous forme des matrices. La description de chaque fichier texte est représentée ci-dessous :

Fichier « **Out_Stress.txt** » : permet de lire les contraintes nodales.

Fichier « **Out_Strain.txt** » : permet de lire les déformations nodales.

Fichier « **Out_Displ.txt** » : permet de lire les déplacements nodaux.

Fichier « **Out_Coord.txt** » : permet de lire les coordonnées nodales.

Fichier « **Out_Prop.txt** » : permet de lire les propriétés mécanique (E et ν) des éléments.

L'organigramme des démarches effectuées par le code Ansys APDL est décrit par la figure (IV.3).

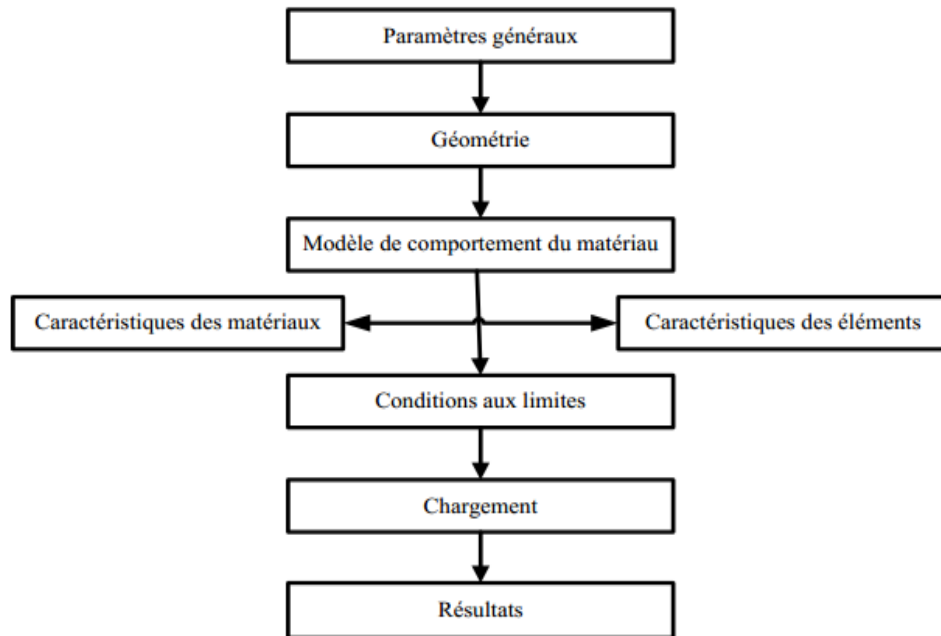


Figure IV.3. Organigramme de programmation par d'éléments finis.

Dans une seconde partie de ce développement, nous avons exploité le code de calcul Matlab pour importer les données de sortie obtenues par le code Ansys APDL et les intégrer sous Matlab pour le but analyser, traiter et calculer les paramètres de rupture : Intégrale d'interaction M et les FICs en mode mixte. Nous rappelons que nous avons dans le cas de fissure stationnaire (pas de propagation).

Le choix de Matlab dans cette partie d'étude est basé sur son approche matricielle qui permet de traiter les données sans aucune limitation de taille et de réaliser des calculs numériques de façon fiable et rapide. Matlab c'est un environnement puissant, complet et facile à utiliser pour le calcul scientifique. Il permet aussi le travail interactif soit en mode commande, soit en mode programmation ; tout en ayant toujours la possibilité de faire des visualisations graphiques.

IV.3.2 Stratégie et mise en œuvre de l'implémentation

Le but principal du ce présent programme de calcul de décomposer les modes de rupture pour le but d'extraire les FICs K_I et K_{II} à partir de la méthode d'intégrale-M.

Du point de vue numérique, la méthode d'intégral d'interaction est la plus compatible avec la formulation de la méthode des éléments finis. L'expression (IV.20) définissant la technique de l'intégrale-M peut être écrite sous la forme discrétisée [HON 10, BEN 12]:

$$M = \sum_{e=1}^{e_n} \sum_{p=1}^{P_e} \left\{ (\sigma_{ij}^{(act)} u_{j,1}^{(aux)} + \sigma_{ij}^{(aux)} u_{j,1}^{(act)} - \sigma_{jk}^{(act)} \varepsilon_{jk} \delta_{1i}) q_{,i} \right\} |Jac| W_p \quad (IV.21)$$

Où : e_n est le nombre des éléments du domaine d'intégration A .

P_e est le nombre des points d'intégration dans un élément, $|Jac|$ est le déterminant de la matrice du Jacobienne Jac et W_p sont les poids des points de Gauss.

L'implémentation de la résolution du problème par la présente approche (Eq. IV.21) s'est faite selon les étapes suivantes :

1- dessinons deux cercles d'origine la pointe de fissure, de rayons R_1 et R_2 . L'intersection entre les deux surfaces représente un ensemble d'éléments appelé $Jdomain$ (domaine A) (Figure IV.4). L'intégration de contour se transforme à un intégrale de domaine à l'aide de la fonction q qui a été définit par l'équation (IV.16).

La méthode des éléments finis demande le calcul d'intégrales sur chacun des éléments du maillage. A cet effet, on fait l'intégration sur les éléments de $Jdomain$, en choisissant les points de Gauss pour chaque élément de $Jdomain$ (Figure IV.4) avec :

$$Jdomain = [élé_1, élé_2, élé_3, \dots, élé_n] \quad (IV.22)$$

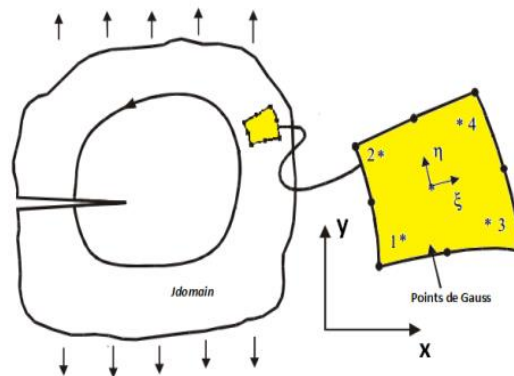


Figure IV.4. Points de Gauss.

2- détermination des valeurs de la fonction q à chaque point des éléments $Jdomain$, q prend la valeur 1 à l'intérieur du cercle, 0 à l'extérieur et des valeurs varient entre 0 et 1 comme le montre la figure IV.5.

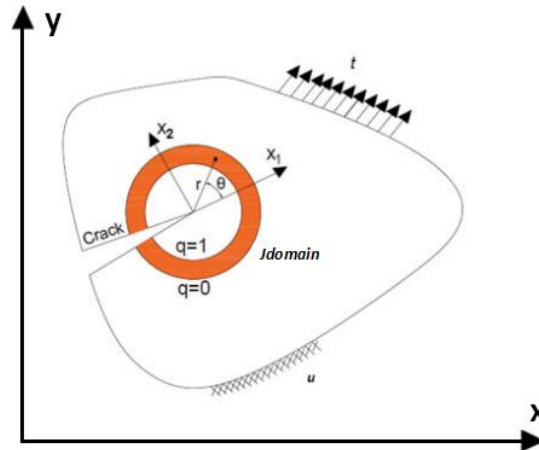


Figure IV.5. Représentation du J domain et la fonction q .

3- Initialisation de calcul :

$M_1 = M_2 = 0, I = [0 \ 0]^T$, pour faire des sommations itératives.

4- Pour chaque élément e de l'ensemble $Jdomain$, pour chaque point d'intégration (ξ_i, η_i) , on calcul :

a) Les fonctions de formes N_i et leurs dérivés $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$. Pour le cas d'un élément

isoparamétrique à 4 nœuds $Q4$ (Figure IV.6), les fonctions N_i sont déterminées par :

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

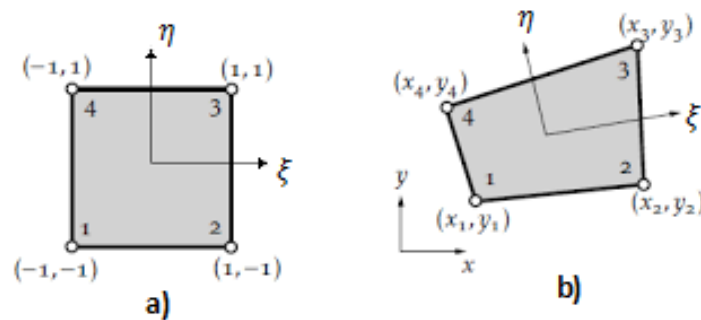


Figure IV.6. Transformation géométrique linéaire d'un élément $Q4$:

(a) L'élément réel (b) l'élément déformé.

b) Le jacobien Jac et leur inverse Jac^{-1} .

Pour chaque élément, la matrice *Jacobienne* s'exprime en fonction des dérivées des fonctions connues de transformation géométrique et des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. En effet :

$$Jac = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (IV.24)$$

$$\Rightarrow Jac = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \eta & -(1 - \eta) & 1 - \eta & -(1 + \eta) \\ 1 + \xi & -(1 - \xi) & -(1 + \xi) & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (IV.25)$$

La transformation suivante garantie la transformation de l'élément réel à l'élément de référence :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = Jac \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (IV.26)$$

La transformation inverse est assurée par la matrice Jacobéenne inverse Jac^{-1} telle que :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = Jac^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (IV.27)$$

La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

c) Détermination des valeurs de la fonction q à chaque point des éléments $Jdomain$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} = Jac^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial \xi} \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (IV.28)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} q = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \\ \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-x}{R\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{-y}{R\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (IV.29)$$

d) Extraire des FICs $K_I^{(act)}$ et $K_{II}^{(act)}$

✓ **Mode I** : nous posons $K_I^{(aux)} = 1, K_{II}^{(aux)} = 0$

Calcul les champs de contrainte auxiliaires :

Pour le problème d'élasticité linéarisé bidimensionnel, dans le cas d'un matériau homogène isotrope, les expressions des champs des contraintes auxiliaires $\sigma_{ij}^{(aux)}$ peuvent être exprimés par :

$$\sigma_{ij}^{(aux)} = \frac{K_I^{(aux)}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}^{(aux)}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) (i, j = 1, 2) \quad (IV.30)$$

Où :

$\sigma_{ij}^{(aux)}$ est le tenseur de contrainte, $K_I^{(aux)}$ et $K_{II}^{(aux)}$ sont les facteurs d'intensité des contraintes auxiliaires en mode I et mode II, respectivement. r est la distance radiale de la fissure, et f_{ij}^{II} est une fonction de θ , l'angle du plan de la fissure.

Calcul les champs de déplacements auxiliaires :

$$u_i^{(aux)} = \frac{K_I^{(aux)}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^I(\theta) + \frac{K_{II}^{(aux)}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{II}(\theta) (i = 1, 2) \quad (IV.31)$$

$$\begin{cases} g_1^I(\theta) = \frac{1}{4} \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ g_1^{II}(\theta) = \frac{1}{4} \left[(2k+3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ g_2^I(\theta) = \frac{1}{4} \left[(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ g_2^{II}(\theta) = -\frac{1}{4} \left[(2k-3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (IV.32)$$

Calcul les dérivations des champs de déplacements auxiliaires :

Le gradient du champ de déplacement auxiliaire $u_{i,j}^{(aux)}$ est évalué:

$$\begin{cases} u_{1,1}^{(aux)} = \frac{1}{8\mu\sqrt{2\pi r}} \left[K_I^{(aux)} \left((2k-1) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) - K_{II}^{(aux)} \left((2k+1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) \right] \\ u_{2,1}^{(aux)} = \frac{1}{8\mu\sqrt{2\pi r}} \left[K_I^{(aux)} \left(-(2k+3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) - K_{II}^{(aux)} \left((2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) \right] \\ u_{1,2}^{(aux)} = \frac{1}{8\mu\sqrt{2\pi r}} \left[K_I^{(aux)} \left((2k+1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) + K_{II}^{(aux)} \left((2k+5) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) \right] \\ u_{2,2}^{(aux)} = \frac{1}{8\mu\sqrt{2\pi r}} \left[K_I^{(aux)} \left((2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) + K_{II}^{(aux)} \left(-(2k-5) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (IV.33)$$

Calcul les champs de déformations auxiliaires :

Les champs de déformations auxiliaires $\varepsilon_{ij}^{(aux)}$ peuvent être calculés à partir des relations :

$$\varepsilon_{ij}^{(aux)} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^{(aux)} + u_{j,i}^{(aux)} \right), \quad (i, j = 1, 2) \quad (IV.34)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^{(aux)} = u_{1,1}^{(aux)} \\ \varepsilon_{22}^{(aux)} = u_{2,2}^{(aux)} \\ \varepsilon_{12}^{(aux)} = \frac{1}{2} \left(u_{1,2}^{(aux)} + u_{2,1}^{(aux)} \right) \\ \varepsilon_{21}^{(aux)} = \varepsilon_{12}^{(aux)} \end{cases} \quad (IV.35)$$

Calcul l'énergie de déformation :

L'énergie de déformation mutuelle $W^{(act,aux)}$ est définir par :

$$W^{(act,aux)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{(act)} \varepsilon_{ij}^{(aux)} + \sigma_{ij}^{(aux)} \varepsilon_{ij}^{(act)} \right), \quad (i, j = 1, 2) \quad (IV.36)$$

Les contraintes $\sigma_{ij}^{(act)}$ et les déformations $\varepsilon_{ij}^{(act)}$ sont reliées entre eux par :

En contrainte plane :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{act} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{act} \quad (IV.37)$$

En déformation plane :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{act} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{act} \quad (IV.38)$$

Calcul l'intégrale d'interaction M : nous calculons l'intégrale M par la sommation itérative:

$$M = \sum_{e=1}^{e_n} \sum_{p=1}^{P_e} \left\{ (\sigma_{ij}^{(act)} u_{j,1}^{(aux)} + \sigma_{ij}^{(aux)} u_{j,1}^{(act)} - \sigma_{jk}^{(act)} \varepsilon_{jk} \delta_{1i}) q_{,i} \right\} |Jac| W_p \quad (IV.39)$$

✓ **Mode II** : nous posons : $K_{II}^{(aux)} = 1, K_I^{(aux)} = 0$

Pour ce mode, nous refaisons les mêmes étapes que celle utilisées pour le mode I afin de calculer l'intégrale d'interaction M .

Après avoir calculé l'intégrale d'interaction M pour les deux modes de rupture, les FICs $K_I^{(act)}$ et $K_{II}^{(act)}$ sont déterminés ensuite, par les relations :

$$K_I^{(act)} = K_I = \frac{E^*}{2} M \quad (IV.40)$$

$$K_{II}^{(act)} = K_{II} = \frac{E^*}{2} M \quad (IV.41)$$

Dans le cas des matériaux FGM, le module de Young calculé $E^* = E_{tip}$ en contrainte plane, et $E^* = \left(\frac{E_{tip}}{1-\nu^2}\right)$ en déformation plane. E_{tip} est calculé à la pointe de fissure.

IV.4 Exemples d'application et validation

Dans ce chapitre, nous testons l'efficacité et la robustesse du programme de calcul élaboré. À cet effet, plusieurs exemples de validation seront traités. Les résultats obtenus seront comparés avec d'autres travaux numériques et expérimentaux existents dans la littérature.

✓ Exemple 1 : Plaque mince contenant une fissure centrale

Dans cet exemple, nous nous intéressons à vérifier l'efficacité du programme réalisé dans le cas des matériaux homogène. À cet effet, nous avons considéré une plaque mince de dimensions: hauteur $H = 140 \text{ mm}$, largeur $w = 70 \text{ mm}$ et dont les propriétés mécaniques sont les suivantes : Module de Young $E = 190.000 \text{ MPa}$ et Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La plaque est sollicitée en traction uniaxiale dans la direction verticale sous la contrainte appliquée d'amplitude $\sigma = 50 \text{ MPa}$. Elle comporte une fissure centrale de longueur $2a = 10 \text{ mm}$, inclinée par rapport au plan de chargement avec l'angle β (Figure IV.7a).

La structure considérée est maillée avec des éléments standards quadrilatéraux à huit nœuds, en considérant les conditions de contrainte plane. Ce type d'éléments est efficace dans l'analyse linéaire élastique et a l'avantage de bien caractériser les singularités. La figure (IV.7b, c) représente le maillage typique de la plaque et au voisinage des deux pointes de fissure.

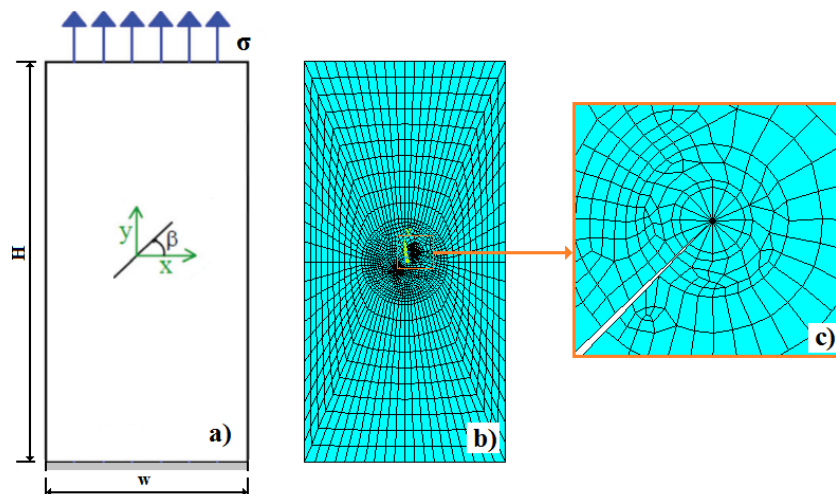


Figure IV.7. a) Fissure centrale inclinée dans une plaque mince,
 (b) Maillage globale de la plaque,
 (c) Maillage détaillé au voisinage de la pointe de fissure.

Dans cette partie d'étude, le facteur d'intensité des contraintes qui gouverne le phénomène de rupture est calculé à travers la méthode de l'intégrale d'interaction M , et aussi au moyen des méthodes du champ de déplacement en tête de fissure (DCT et DET).

En théorie, la méthode de l'interaction d'intégrale est indépendante du domaine choisi. De ce fait, il est nécessaire de créer une couronne d'éléments qui servira ensuite d'évaluer les FICs par cette approche énergétique.

Dans cette partie d'étude, nous avons considéré trois domaines d'intégration, créés à partir des contours circulaires entourant la pointe de fissure. Ces contours sont définis par des rayons R_{int} et R_{ext} , relatifs au contour interne et externe, respectivement.

Les contours considérés sont des domaines ouverts (puisque'ils s'appuient sur les lèvres de la fissure), l'aire de chaque domaine est supérieure à celle du domaine précédemment défini, comme le montre la figure (IV.8).

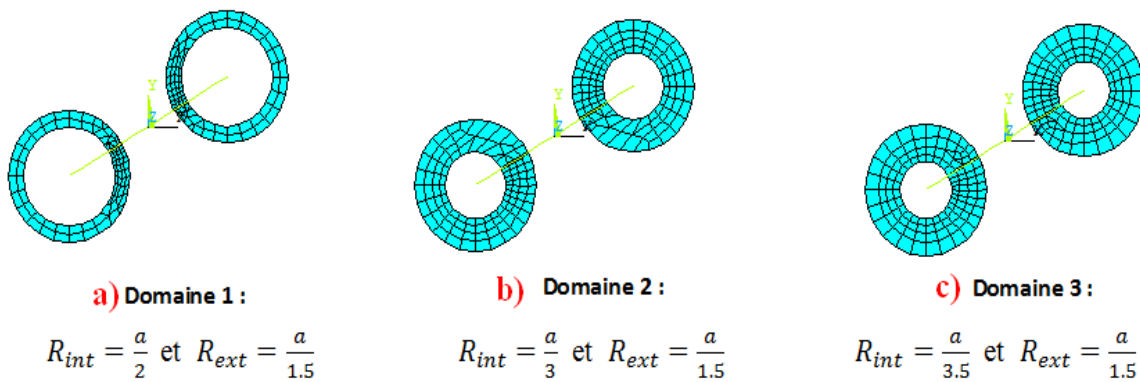


Figure IV.8. Définition des domaines d'intégration autour de deux pointes de fissure.

La figure (IV.9 a,b) présente l'évolution des FICs normalisés ($\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ et $\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$) en fonction des angles d'orientation β dans l'intervalle $[90^\circ, -90^\circ]$, respectivement. On peut constater clairement que les valeurs des FICs normalisés sont indépendantes du domaine choisi, cette propriété de s'accorde bien avec la littérature. Le calcul par cette approche peut aussi être réalisé loin de la pointe de fissure et de sa singularité, ce qui rend le calcul plus précis.

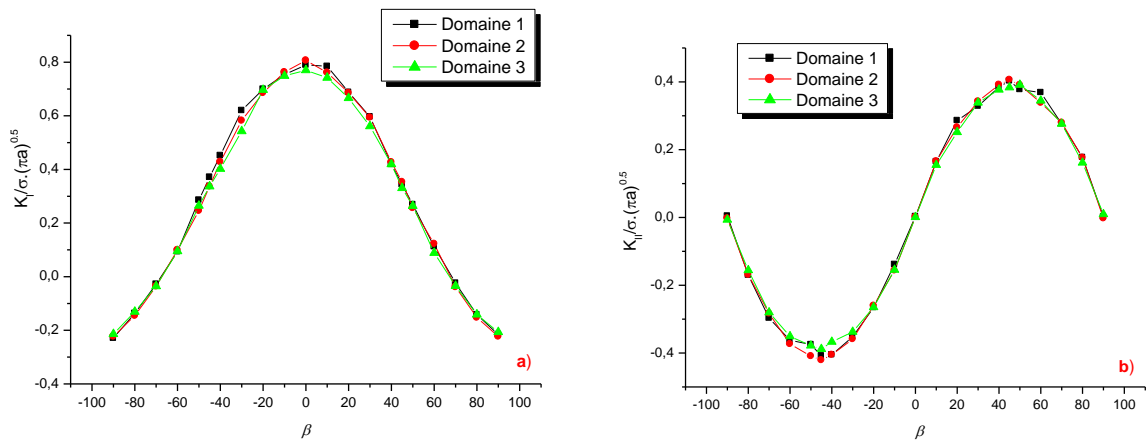


Figure IV.9. Variation des FICs normalisés en fonction des angles d'inclinaison β .

En considérant la valeur moyenne des résultats effectués sur trois domaines d'intégration du FICs par l'approche globale, les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par les méthodes du champ de déplacement (DCT et DET). L'étude comparative est donnée sur les figures (IV.10 a, b), cette dernière montre une très bonne concordance des résultats de l'évolution des FICs normalisés ($\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ et $\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$) en fonction des angles β .

Les résultats obtenus par l'approche locale et globale montrent aussi que :

- Le FIC K_I est maximal lorsque l'angle $\beta=0$, ce qui est normal puisqu'on est en présence du mode d'ouverture de la fissure, puis il diminue progressivement vers des valeurs négatives avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison. Les valeurs négatives de K_I obtenues pour des orientations varient entre $[90^\circ, 70^\circ]$ et $[-90^\circ, -70^\circ]$. Ces orientations présentent un risque de propagation de la fissure par cisaillement.
- Dans le cas des angles positifs (Figure IV.10), le FIC K_{II} est nul lorsque l'angle est nul ou bien atteint ($\beta=90^\circ$) et augmente proportionnellement en fonction de l'angle jusqu'à une valeur maximale correspond à un angle $\beta=45^\circ$ à partir duquel la courbe prend une allure descendante avec l'augmentation de l'angle β .
- Les courbes de K_{II} obtenus pour les angles négatifs et positifs sont symétriques entre elles par rapport au repère $M(0,0)$ (Figure IV.10). Ces résultats indiquent que l'évolution de K_{II} est dépend du sens d'orientation de la fissure.

En conclusion, l'évolution des FICs observé dans cette partie d'étude est similaire à celle remarquée dans le cas d'une fissure centrale inclinée dans un disque en FGM, discutée dans le troisième chapitre.

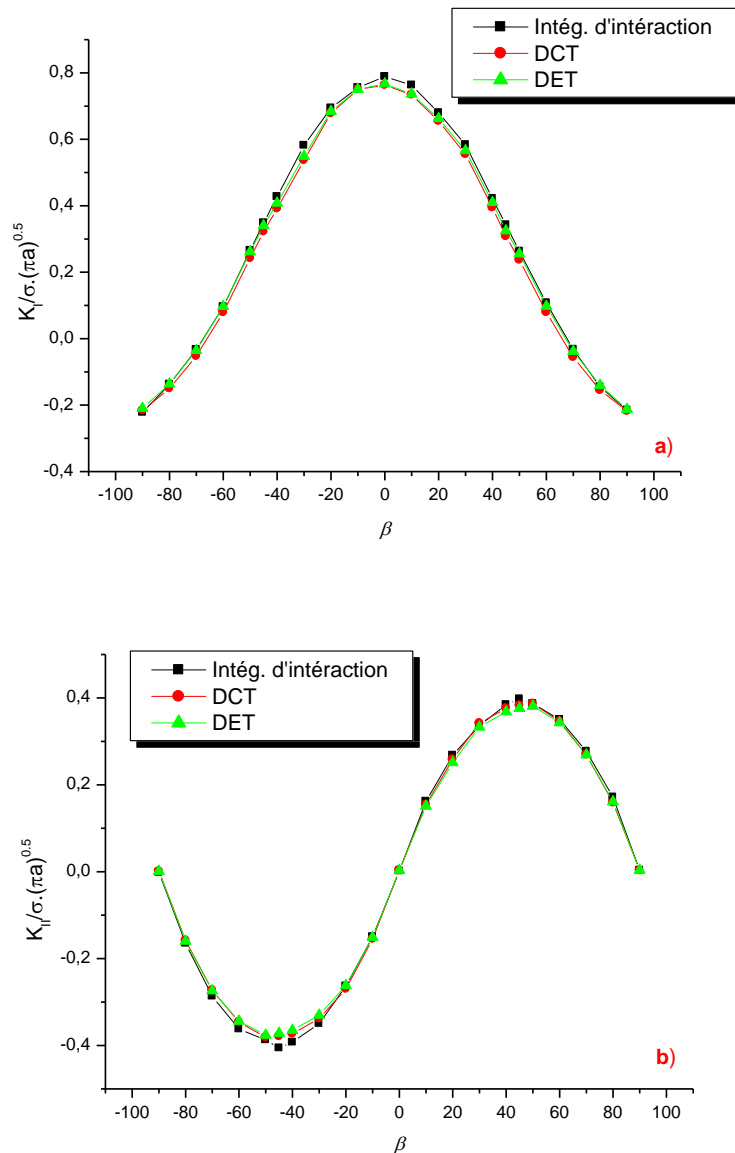


Figure IV.10. Variation des FICs normalisés en fonction des angles d'inclinaison β .

✓ Exemple 2 : Plaque pré-fissurée sollicitée en traction uni-axiale

Dans cette modélisation, on considère une fissure débouchante de longueur a , supposée amorcer dans une plaque mince. La figure (IV.11a) représente le modèle géométrique de la plaque en FGM, sollicitée en traction uni-axiale dans la direction verticale. Cette géométrie a été proposée par Erdogan and Wu [ERD 97] et ensuite, a été investiguée dans plusieurs travaux scientifiques [KIM 02, BEN 17a, CHE 00].

La structure considérée est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds et particulièrement, des éléments spéciaux ont été utilisés pour caractériser la singularité en tête de la fissure (Figure IV.11b, c). Ce maillage nous servira de calculer les facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} par des méthodes du champ de déplacement. Les calculs numériques sont réalisés sous les conditions de contrainte plane.

Propriétés mécaniques de la plaque en FGM [KIM 02, CHE 00] :

$$E(x) = E_1 \exp(\lambda x) \quad 0 \leq x \leq w \quad (\text{IV.42})$$

avec : $E = E_1(0) = 1$, $E = E_2(w)$, $E_2/E_1 = (0.1, 0.2, 1, 5 \text{ et } 10)$; et $\lambda = \ln(E_2/E_1)$.

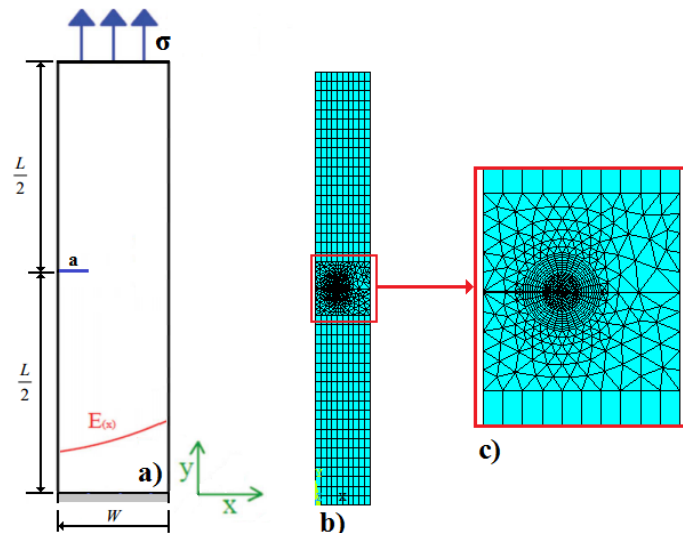


Figure IV.11. (a) Représentation schématique d'une plaque fissurée sollicitée en flexion
 (b) Maillage globale de la plaque,
 (c) Maillage détaillé au voisinage de la fissure.

Pour le but de vérifier l'indépendance des contours d'intégration sur l'évaluation des FICs par l'approche globale, des différents domaines sont créés à partir des contours entourant la pointe de fissure. Chaque contour englobe le contour précédemment défini auquel on ajoute des éléments directement en contact avec lui. L'interaction d'intégrale M a été calculée à travers 02 domaines (avec $R_1=0.100$ mm, $R_2=0.125$ mm, $R_3= 0.150$ mm), comme le montre la figure (IV.12) ci-dessous.

La figure (IV.13) montre la variation des valeurs de FIC normalisés ($K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$) en fonction du rapport E_2/E_1 , pour différentes taille de fissure a/w . On peut constater clairement que les valeurs des FICs normalisés sont indépendantes du domaine choisi, quel que soit la taille de la fissure dans le matériau FGM.

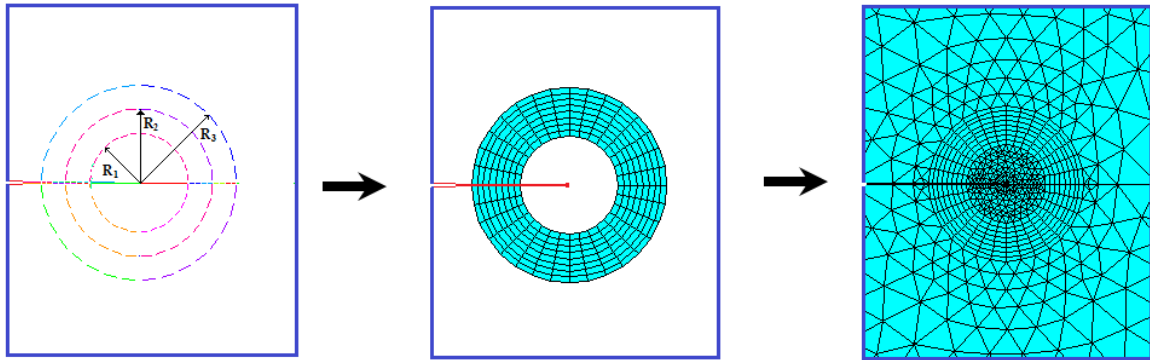


Figure IV.12. Définition des domaines d'intégration autour de la pointe de fissure.

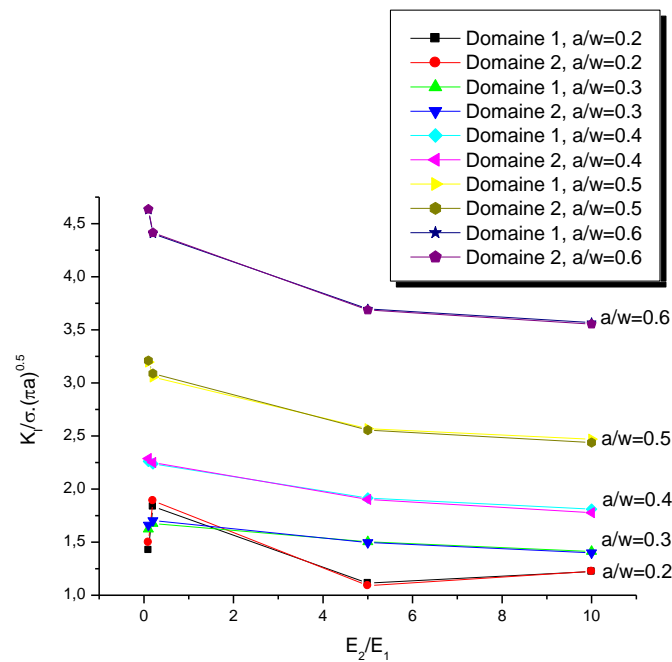


Figure IV.13. Variation des FICs normalisés en fonction de E_2/E_1 :
Indépendante du domaine d'intégration.

Le tableau (IV.1) illustre la variation des valeurs de FIC normalisés ($K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$) en fonction du rapport E_2/E_1 , pour différentes taille de fissure a/w . Les résultats obtenus par la méthode énergétique sont comparées avec ceux obtenus par les méthodes DET et DCT, les résultats de Chen et al. [CHE 00], et les résultats numériques de Kim et Paulino [KIM 02a], en utilisant la méthode de l'intégrale J^* .

Cette comparaison indique une bonne concordance entre les résultats obtenus et ceux réalisés par d'autres méthodes. Cette comparaison nous permet de conclure que la technique utilisée dans le cas des matériaux FGM, décrit correctement le champ de contrainte au voisinage de la pointe de fissure, sollicité en mode I.

Tableau IV.1. Evolution du FIC K_I normalisé ($K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$) obtenu par différentes méthodes: $a/w = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ et 0.6 .

| E_2/E_1 | $(a/w=0.2)$ | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-----------|----------|
| | Intégrale M | Méthode DCT | Méthode DET | [KIM 02a] | [CHE 00] |
| 0.1 | 1.426 | 1.314 | 1.299 | 1.284 | 1.319 |
| 0.2 | 1.836 | 1.408 | 1.397 | 1.390 | 1.419 |
| 5 | 1.113 | 1.135 | 1.133 | 1.132 | 1.162 |
| 10 | 1.224 | 1.003 | 1.002 | 1.003 | 1.032 |

| E_2/E_1 | $(a/w=0.3)$ | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-----------|----------|
| | Intégrale M | Méthode DCT | Méthode DET | [KIM 02a] | [CHE 00] |
| 0.1 | 1.623 | 1.870 | 1.853 | 1.846 | 1.864 |
| 0.2 | 1.676 | 1.849 | 1.838 | 1.831 | 1.850 |
| 5 | 1.503 | 1.370 | 1.371 | 1.370 | 1.390 |
| 10 | 1.412 | 1.227 | 1.229 | 1.228 | 1.250 |

| E_2/E_1 | $(a/w=0.4)$ | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-----------|----------|
| | Intégrale M | Méthode DCT | Méthode DET | [KIM 02a] | [CHE 00] |
| 0.1 | 2.261 | 2.558 | 2.547 | 2.544 | 2.559 |
| 0.2 | 2.238 | 2.440 | 2.434 | 2.431 | 2.449 |
| 5 | 1.916 | 1.744 | 1.751 | 1.749 | 1.775 |
| 10 | 1.811 | 1.582 | 1.590 | 1.588 | 1.615 |

| E_2/E_1 | $(a/w=0.5)$ | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-----------|----------|
| | Intégrale M | Méthode DCT | Méthode DET | [KIM 02a] | [CHE 00] |
| 0.1 | 3.196 | 3.492 | 3.500 | 3.496 | 3.521 |
| 0.2 | 3.055 | 3.286 | 3.297 | 3.327 | 3.323 |
| 5 | 2.569 | 2.349 | 2.370 | 2.366 | 2.413 |
| 10 | 2.470 | 2.157 | 2.179 | 2.175 | 2.223 |

| E_2/E_1 | $(a/w=0.6)$ | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-----------|----------|
| | Intégrale M | Méthode DCT | Méthode DET | [KIM 02a] | [CHE 00] |
| 0.1 | 4.629 | 4.904 | 4.962 | 5.188 | 5.073 |
| 0.2 | 4.405 | 4.615 | 4.672 | 4.669 | 4.786 |
| 5 | 3.697 | 3.398 | 3.454 | 3.448 | 3.574 |
| 10 | 3.568 | 3.163 | 3.218 | 3.212 | 3.337 |

✓ Exemple 3 : Epreuve de flexion 4-points en FGM

Dans ce dernier exemple, on considère une éprouvette de flexion 4-points en FGM (Epoxy/Glass). L'éprouvette contenant une fissure de longueur $a=5.5$ mm, supposée amorcer perpendiculairement à la gradation matérielle. La figure (IV.14) montre la géométrie de l'éprouvette, les forces appliquées et les conditions aux limites. Trois positions de fissure: P_1 , P_2 et P_3 , sont considérées dans cette étude (avec : $\xi = 0.17, 0.58$ et 1 respectivement). Dans la figure (IV.14), u_x et u_y indiquent les déplacements suivant les directions (Ox) et (Oy), respectivement.

On note que cette géométrie a été utilisée par Rousseau and Tippur [ROU 00] pour réaliser des essais expérimentaux sur les matériaux FGMs et ensuite, ce modèle a été investigué dans plusieurs travaux numériques [KIM 07, CHA 19, COM 07, KHA 19, NAT 19].

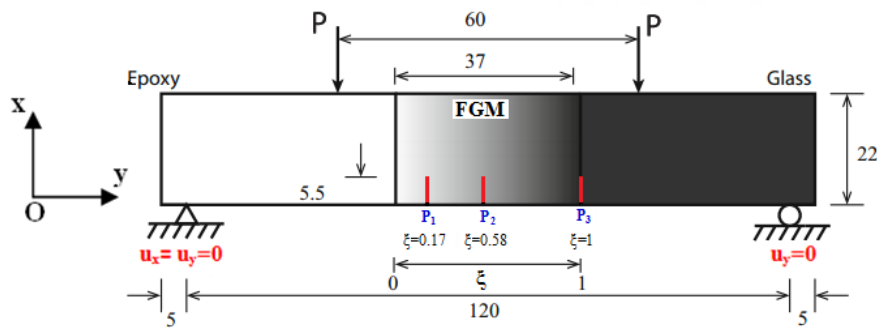


Figure IV.14. Géométrie de l'éprouvette de flexion 4-points en FGM
les dimensions sont données en [mm].

La structure considérée est maillée par des éléments quadratiques à 8 nœuds (quadrangulaires et triangulaires) et particulièrement, des éléments spéciaux ont été utilisés pour caractériser la singularité en tête de la fissure. Ce maillage nous servira de calculer les FICs K_I et K_{II} par les méthodes de déplacements. Les figures (IV.15a) et (IV.15b) illustrent respectivement, le maillage global de l'éprouvette avec différentes positions de la fissure ξ , et le maillage au voisinage de la pointe de fissure.

Pour le but de calculer les FICs par l'approche énergétique, le domaine (D) est créé autour de la pointe de fissure à partir des rayons $R_{int} = \frac{a}{3.5}$ et $R_{ext} = \frac{a}{2}$, comme le montre la figure (IV.15c).

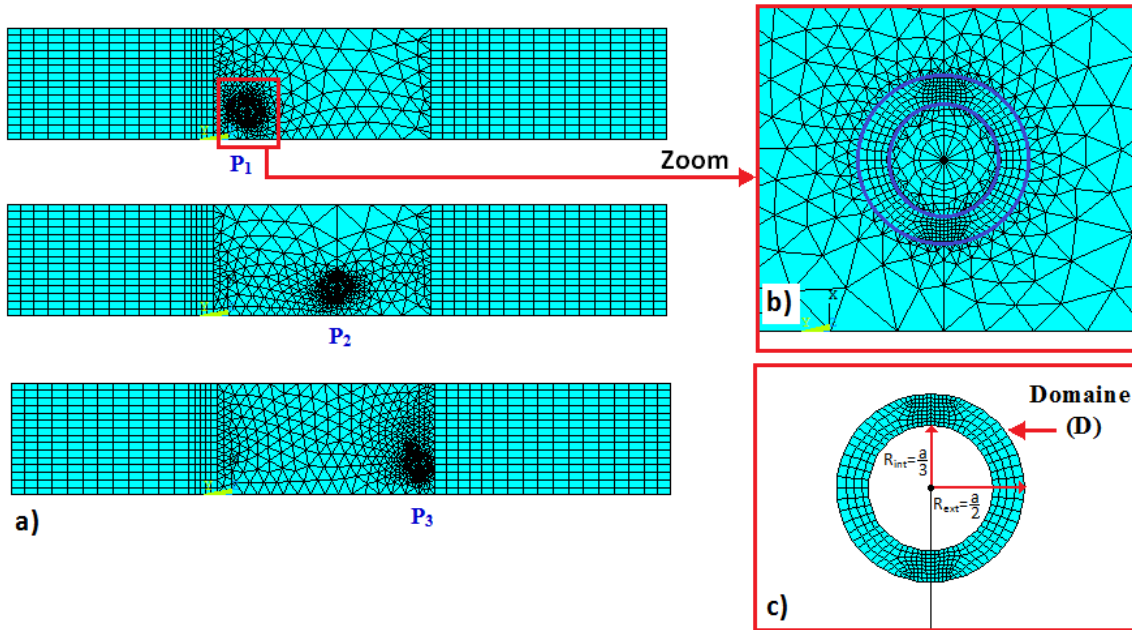


Figure IV.15. Maillage de l'éprouvette de flexion 4points :
 (a) Maillage globale pour différentes positions de fissure,
 (b) Maillage détaillé au voisinage de la pointe de fissure,
 (c) Domaine d'interaction (D).

La figure (IV.16) illustre la variation des propriétés mécaniques (E , ν et K_{IC}), le long de la région graduée ($0 \leq \xi \leq 1$). Les valeurs numériques de ces paramètres sont illustrées dans le tableau (IV.2).

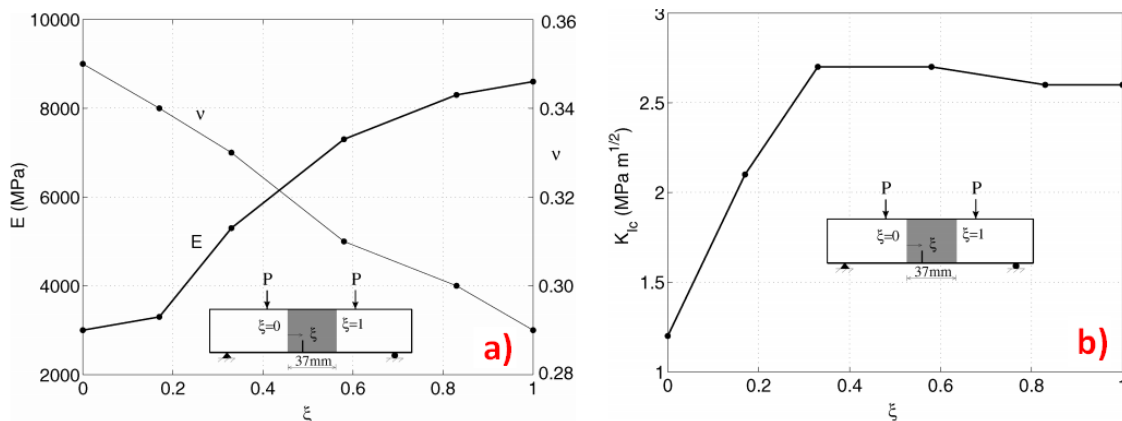


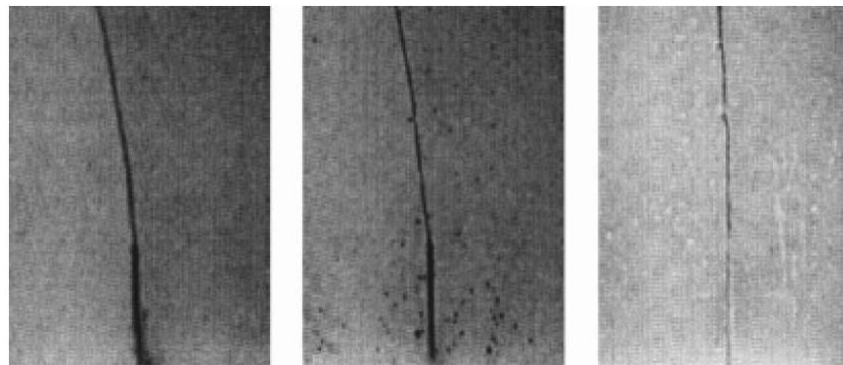
Figure IV.16. Evolution des propriétés mécaniques dans la zone graduée [ROU 00, KIM 07] :

- a) Module de Young E et Coefficient de Poisson ν ,
- b) Ténacité du matériau K_{IC} .

Tableau IV.2. Propriétés matériels dans la zone graduée.

| ξ | $E(\text{MPa})$ | ν | $K_{Ic} (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}})$ |
|-------|-----------------|-------|---|
| 0 | 3000 | 0.35 | 1.2 |
| 0.17 | 3300 | 0.34 | 2.1 |
| 0.33 | 5300 | 0.33 | 2.7 |
| 0.58 | 7300 | 0.31 | 2.7 |
| 0.83 | 8300 | 0.30 | 2.6 |
| 1 | 8600 | 0.29 | 2.6 |

Afin de valider notre modèle numérique de la propagation des fissures dans les matériaux FGMs, nous avons exposé sur les figures (IV.17a~c) les résultats expérimentaux obtenus par Rousseau et Tippur [ROU 00]. Ces résultats illustrent les chemins de propagation et les angles d'amorçage de fissure θ_0 , pour les trois positions de fissure ($\xi = 0.17, 0.58$ et 1), respectivement.



a) $\xi = 0.17$ ($\theta_0 = 6.95^\circ$) **b)** $\xi = 0.58$ ($\theta_0 = 4^\circ$) **c)** $\xi = 1$ ($\theta_0 = 0.5^\circ$)

Figure IV.17. Résultats expérimentaux des angles d'amorçage θ_0 et des chemins de fissuration [ROU 00].

Dans cette partie d'étude, nous avons adopté le critère de la contrainte circonférentielle maximale (CCM) [KIM 63] afin de déterminer numériquement l'angle initial de direction θ_0 , en utilisant la relation suivante [BOU 13, 14] :

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = \left[\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (\text{IV.43})$$

Le signe du FIC K_{II} désigne le signe de l'angle de bifurcation θ_0 . Les deux possibilités sont illustrées sur la figure (IV.18).

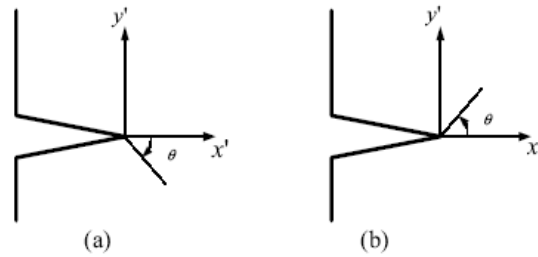


Figure IV.18. Signe de l'angle de propagation θ_0 [CHA 19]:

a) $K_{II} > 0$, b) $K_{II} < 0$.

Le tableau (IV.3) récapitule le chargement critique appliqué P_{cr} et les FICs K_I et K_{II} , évalués numériquement pour une fissure localisée à la position $\xi=0.17$ ($L=6.29$ mm), en utilisant la technique d'extrapolation DET et la méthode de l'intégrale de domaine. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus dans littérature. On peut constater que la comparaison montre un résultat très acceptable.

Tableau IV.3. Comparaison entre P_{cr} , K_I et K_{II} (Position P_1 : $\xi = 0.17$).

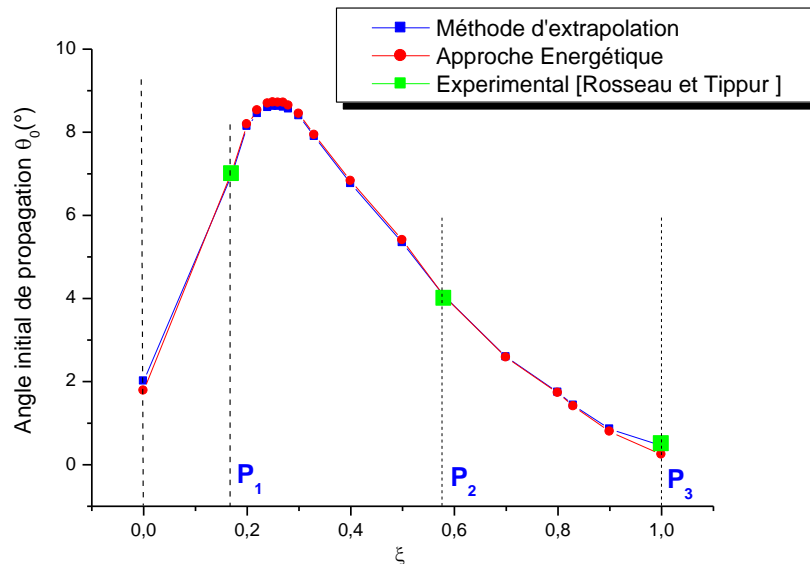
| $\xi = 0.17$ | | | |
|---------------------------|--------------|--------------------------|-----------------------------|
| | P_{cr} (N) | K_I (MPa. \sqrt{m}) | K_{II} (MPa. \sqrt{m}) |
| Approche locale DET | 257 | 2.138 | -0.133 |
| Approche globale | 257 | 2.170 | -0.129 |
| Khazal and Saleh [KHA 19] | 255 | 2.087 | -0.116 |
| Bayesteh [BAY 13] | 250 | 2.087 | -0.117 |
| Kim et Paulino [KIM 04] | 253.3 | 2.122 | -0.129 |
| Ooi et al. [OOI 15] | 247.0 | 2.145 | -0.110 |
| Chen et al. [CHE 18] | 236.7 | 2.078 | -0.103 |

Le tableau (IV.4) compare l'angle initial de propagation θ_0 obtenu par la technique de l'intégrale de domaine avec ceux rapportés dans les références [ROU 00, KIM 07, CHA 19, COM 07, KHA 19] en considérant les données expérimentales de Rosseau et Tippur [ROU 00] et les résultats numériques basés sur les méthodes MEF, X-FEM et XEFGM. La comparaison indique clairement que les résultats obtenus présentent des résultats très proches entre eux.

Tableau IV.4. Comparaison entre les angles d'amorçage θ_0 .

| Angles d'amorçage θ_0 (°) | | | | | | |
|----------------------------------|----------------------|--|------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| Position de fissure ξ | Présente Etude (MEF) | Rousseau et Tippur (Expérimental) [ROU 00] | Chafi et Boulenouar (MEF) [CHA 19] | Kim et Paulino (MEF) [KIM 07] | Comi et Mariani (X-MEF) [COM 07] | Khazal and Saleh (XEFGM) [KHA 19] |
| $\xi=0.17$ (P_1) | 6.98° | 7° | 6.95° | 6.98° | 7.22° | 6.90° |
| $\xi=0.58$ (P_2) | 4.06° | 4° | 4.04° | 4.01° | 4.07° | 4.02° |
| $\xi=1.00$ (P_3) | 0.46° | 0.5° | 0.57° | 0.59° | 1.02° | 0.60° |

La figure (IV.19) illustre l'évolution de l'angle initial de fissuration θ_0 dans la zone graduée, évalués numériquement par la méthode d'extrapolation DET et la méthode de l'intégrale de domaine, respectivement. On peut remarquer clairement que l'angle de bifurcation θ_0 augmente et atteint sa valeur maximale lorsque la fissure est localisée à la position $\xi=0.25$. Ensuite, cet angle diminue progressivement lorsque la position de fissure continue de se déplacer vers la position $\xi=1$. L'étude comparative montre un bon accord entre la simulation numérique et le résultat expérimental obtenu pour les trois positions de fissure $\xi = 0.17, 0.58$ et 1 , respectivement. La procédure numérique donne donc un résultat très satisfaisant, pour le cas des fissures situées perpendiculairement à la gradation matérielle.

**Figure IV.19.** Evolution de l'angle de bifurcation θ_0 dans la zone graduée.

IV.5 Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter le principe de l'implémentation de la méthode de l'intégrale de domaine dans les matériaux FGMs, afin de déterminer les FICs en mode mixte. Le présent développement numérique est basé sur l'utilisation de la MEF, par un calcul combiné entre deux logiciels Ansys et Matlab.

La bonne performance du programme développé a été clairement démontrée et validée, par des approches numériques et expérimentales, à travers des exemples d'applications suffisamment variés.

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail s'inscrit dans le cadre général de l'étude numérique du comportement en rupture des matériaux à gradient fonctionnel, sous les conditions de chargement mécanique et thermique. Afin d'orienter notre étude dans une bonne direction, il était indispensable, dans un premier temps, de dresser un bilan des études sur les techniques d'évaluation du FIC dans le cas des matériaux FGMs. Dans la littérature, il existe deux méthodes plus largement utilisées. La première méthode c'est une approche locale qui déduit le FIC à partir des informations du champ de déplacement ou de contrainte au voisinage de la fissure. La deuxième méthode dite « globale ou énergétique », s'appuie sur le concept de taux de restitution d'énergie.

Dans cette étude, la modélisation numérique des propriétés mécaniques des matériaux FGMs sont déclarées à l'aide d'un sous-programme implémenté dans le code de calcul par éléments finis. Ce programme permet de localiser automatiquement les coordonnées du centre de chaque élément du maillage (e_i) et de calculer ensuite, le module élastique (E) et le coefficient de Poisson (ν) à travers les lois de mélange.

Dans ce manuscrit, trois approches locales basées sur le champ de déplacement sont exploitées, il s'agit des méthodes DET, DCT et GDC. La dernière approche utilisée pour les matériaux homogènes a été exploitée et implémentée dans le cas des matériaux FGMs, sous chargement mécanique et thermique. A cet effet, des exemples d'applications suffisamment variés ont été testés et comparés afin de montrer la robustesse de cette technique. Les calculs numériques réalisés par la méthode des éléments finis ont montré que le modèle intégré capable de décrire correctement le champ de contraintes et de déformations au voisinage du fond de fissure, par l'évaluation des FICs en mode-I et mode mixte.

Dans le cadre d'évaluation des FICs par l'approche énergétique, nous avons utilisé la méthode de l'intégrale de domaine. Pour ce faire, la simulation numérique est réalisée à l'aide du logiciel aux éléments finis ANSYS et du langage de programmation MATLAB.

La bonne performance du programme développé a été clairement démontrée et validée, par des approches numériques et expérimentales, à travers des exemples d'applications suffisamment variés.

D'une manière générale, Les résultats du FIC présentés dans cette thèse ont été calculés pour plusieurs combinaisons, en considérant la forme de la plaque, la loi de mélange constituant le matériau FGM et l'orientation de la fissure par rapport le sens de dégradation des propriétés matériels.

En fin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux à gradient de propriétés et précisément leurs comportements en rupture, sous chargement thermique et mécanique.

Comme perspective, l'étude par l'approche énergétique peut être élargie aux autres axes de recherche concernant le comportement en rupture des matériaux FGMs anisotropes et l'interaction des fissures avec l'interface au sein d'un couple FGM/Matériau homogène. Il est aussi prévu de développer le présent modèle de calcul dans le cas de la propagation de fissures dans les matériaux FGMs.

Référence bibliographiques

- [ABD 97] Abdizadeh, H. (1997). Elaboration et caractérisation de composites duplex" Composites laminaires tri-couches à base d'alumine". Thèse de doctorat, Lyon, INSA.
- [ABO 12] Abotula, S., Kidane, A., Vijaya, B., Chalivendra, B., Shukla, A. (2012). Dynamic curving cracks in functionally graded materials under thermo-mechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*. 49(13), 1637-1655.
- [AIT 20a] Ait Ferhat, Y., Boulenouar, A. (2020). Computation of SIFs for cracked FGMs under mechanical and thermal loadings. *Archives of Mechanical Technology and Materials*, 40(1), 12-19.
- [AIT 20b] Ait Ferhat, Y., Boulenouar, A. (2020). Computation of SIFs for cracks in FGMs and TBC under mechanical and thermal loadings. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*, 1-10.
- [AIT 20c] Ait Ferhat, Y., Boulenouar, A., Benamara, N., Benabou, L. (2020). Generalized displacement correlation method for mechanical and thermal fracture of FGM. *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, 9(1), 2050004-2565.
- [ANL 00] Anlas, G., Santare, M. H., & Lambros, J. (2000). Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal of Fracture*, 104(2), 131-143.
- [ANL 02] Anlas, G., Lambros, J., Santare, M. H. (2002). Dominance of asymptotic crack tip fields in elastic functionally graded materials. *International Journal of Fracture*, 115(2), 193-204.
- [ANT 99] Antunes, F. V., Ferreira, J. M., Byrne, J. (1999). Stress intensity factor calculation based on the work of external forces. *International journal of fracture*, 98(1), 1-14.
- [BAH 03] Bahr, H. A., Balke, H., Fett, T., Hofinger, I., Kirchhoff, G., Munz, D., Yang, Y. Y. (2003). Cracks in functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 2-16.
- [BAK 17] Bakhshizadeh, A., ZamaniNejad, M., DavoudiKashkoli, M. (2017). Time-dependent hygro-thermal creep analysis of pressurized FGM rotating thick cylindrical shells subjected to uniform magnetic field. *Journal of Solid Mechanics*, 9(3), 663-679.
- [BAO 95] Bao, G., Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), 2853-2871.
- [BAR 74] Barsoum, R. S. (1974). Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 10(4), 603-605.

- [BAR 08] Baron, C., Naili, S. (2008). Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(9), 722-730.
- [BAY 13] Bayesteh, H., Mohammadi, S. (2013). XFEM fracture analysis of orthotropic functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, 44(1), 8-25.
- [BEC 01] Becker Jr, T. L., Cannon, R. M., Ritchie, R. O. (2001). Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(32-33), 5545-5563.
- [BEL 15] Belkorissat, I., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Bedia, E. A., & Mahmoud, S. R. (2015). On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model. *Steel Composite Structure*, 18(4), 1063-1081.
- [BEN 06] Bengi, D. (2006). Thermal stress intensity factor evaluation for inclined cracks in functionally graded materials using J_k -integral method, Thèse de maîtrise, Middle East Technical University, Turkey.
- [BEN 12] Benmessaoud, A. (2012). Contribution à la modélisation dynamique des structures fissurées soumises à des sollicitations sismiques par la méthode des éléments finis étendue (X-FEM), Mémoire de Magister, université de Djelfa.
- [BEN 17a] Benamara, N., Boulenouar, A., Aminallah, M., Benseddiq, N. (2017). On the mixed-mode crack propagation in FGMs plates: comparison of different criteria. *Structural Engineering and Mechanics*. 61(3), 371-379.
- [BEN 17b] Benamara, N., Boulenouar, A., Aminallah, M. (2017). Strain energy density prediction of mixed-mode crack propagation in functionally graded materials. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 61(1), 60-67.
- [BER 10] Berthelot, J. M. (2010). Mécanique des matériaux et structures composites. *Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés*. livre éditions Lavoisier.
- [BHA 10] Bhadauria, S.S., Pathak, K.K., Hora, M.S. (2010). Finite Element Modeling of Crack Initiation Angle under Mixed Mode (I/II) Fracture, *Journal of Solid Mechanics*, 2(3), 231-247
- [BOC 86] Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M. (1986). Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites. *Journal of the American Ceramic Society*, 69(8), C-191.
- [BOH 14] Bohidar, S. K., Sharma, R., & Mishra, P. R. (2014). Functionally graded materials: A critical review. *International Journal of Research*, 1(4), 289-301.
- [BOU 00] Bouchard, P., Bay, F., Chastel, Y., Tovenat, I. (2000). Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 189(3), 723-742.

- [BOU 13a] Boulenouar, A., Benseddiq, N., Mazari, M. (2013). Strain energy density prediction of crack propagation for 2D linear elastic materials. *Theoretical And Applied Fracture Mechanics*, 67-68, 29-37.
- [BOU 13b] Boulenouar, A., Benseddiq, N., & Mazari, M. (2013). Two-dimensional numerical estimation of stress intensity factors and crack propagation in linear elastic analysis. *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 3(5), 506-510.
- [BOU 14] Boulenouar, A., Benseddiq, N., Mazari, M., & Benamara, N. (2014). FE model for linear-elastic mixed mode loading: estimation of SIFs and crack propagation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 52. 373-383.
- [BOU 19] Boulenouar, A., Bendida, N. (2019). Crack growth path simulation in a cement mantle of THR using crack box technique. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 57(2), 317-329.
- [BOU 20] Boulenouar A. (2020). Numerical Study of the Fracture Behavior of a FGM Circular Disk. *Journal of Mineral and Material Science*, 1(2), 1006
- [CHA 19] Chafi, M., Boulenouar, A. (2019). A numerical modelling of mixed mode crack initiation and growth in functionally graded materials. *Materials Research*, 22(3).
- [CHE 00] Chen, J., Wu, L., Du, S. (2000). A modified J integral for functionally graded materials. *Mechanics research communications*, 27(3), 301-306.
- [CHE 18] Chen, X., Luo, T., Ooi, E. T., Ooi, E. H., & Song, C. (2018). A quadtree-polygon-based scaled boundary finite element method for crack propagation modeling in functionally graded materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 94, 120-133.
- [CHI 03] Chi, S. H., Chung, Y. L. (2003). Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(10), 1227-1243.
- [CHI 06] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2006). Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43(13), 3657-3674.
- [CHO 05] Choi, B., Zhou, Z., Chudnovsky, A., Stivala, S., Sehanobish, K., Bosnyak, C. (2005). Fracture initiation associated with chemical degradation: observation and modeling. *International Journal of Solids and Structures*, 42(2), 681-695.
- [CHU 02] Chung, K. H., & Yang, W. H. (2002). Fracture mechanics analysis on the bonded repair of a skin/stiffener with an inclined central crack. *Composite structures*, 55(3), 269-276.
- [COM 07] Comi, C., & Mariani, S. (2007). Extended finite element simulation of quasi-brittle fracture in functionally graded materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44), 4013-4026.

- [DAG 06] Dag, S. (2006). Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach. *Engineering fracture mechanics*, 73(18), 2802-2828.
- [DAG 07] Dag, S. (2007). Mixed-Mode Fracture Analysis of Functionally Graded Materials Under Thermal Stresses: A New Approach Using J k-Integral. *Journal of Thermal Stresses*, 30(3), 269-296.
- [DAG 08] Dag, S., & Ilhan, K. A. (2008). Mixed-mode fracture analysis of orthotropic functionally graded material coatings using analytical and computational methods. *Journal of applied mechanics*, 75(5).
- [DAG 10] Dag, S., Arman, E. E., & Yildirim, B. (2010). Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using Jk-integral. *International Journal of Solids and Structures*, 47(25-26), 3480-3488.
- [DAG 12] Dag, S., Yildirim, B., Arslan, O., & Arman, E. E. (2012). Hygrothermal fracture analysis of orthotropic materials using J k-Integral. *Journal of Thermal Stresses*, 35(7), 596-613.
- [DAG 13] Dag, S., Yildirim, B., & Topal, S. (2013). Computational methods for inclined cracks in orthotropic functionally graded materials under thermal stresses. *Journal of thermal stresses*, 36(10), 1001-1026.
- [DEL 83] Delale, F. Erdogan, F., (1983). The crack problem for a non-homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50(3), pp. 609-614.
- [DEL 85] Delorenzi, H. G. (1985). Energy release rate calculations by the finite element method. *Engineering fracture mechanics*, 21(1), 129-143.
- [DES 83] Destuynder, P. (1983). Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 2(1), 113-135.
- [DOR 86] Dorlot, J. M., Bailon, J.P., Masounave, J. (1986). « les Matériaux » Livre , Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal.
- [DUF 04] Duflot, M., (2004). Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture, Thèse de doctorat en sciences appliquées, Université de Liège.
- [EIS 87] Eischen, J. W. (1987). Fracture of nonhomogeneous materials. *International Journal of Fracture*, 34(1), 3-22.
- [ELM 18] Elmeiche, A., Bouamama, M., Megueni, A. (2018). Dynamic analysis of FGM nanobeams under moving load considering shear deformation effect. *International Journal of Scientific Engineering Research*, 9(3), 1212-1221.
- [ERD 63] Erdogan, F., Sih, G. (1963). On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal Of Basic Engineering*, 85(4), 519-525

- [ERD 91] Erdogan, F., Kaya, A. C., & Joseph, P. F. (1991). The crack problem in bonded nonhomogeneous materials. *Applied mechanics transaction Journal of ASME*, 58(6),410-416.
- [ERD 95] Erdogan, F. (1995). Fracture mechanics of functionally graded materials. *Composites Engineering*, 5(7), 753-770.
- [ERD 96] Erdogan, F., & Wu, B. H. (1996). Crack problems in FGM layers under thermal stresses. *Journal of thermal stresses*, 19(3), 237-265.
- [ERD 97] Erdogan, F., & Wu, B. H. (1997). The surface crack problem for a plate with functionally graded properties, *Applied mechanics transaction Journal of ASME*, 449-456
- [ESH 15] Eshraghi, I., Soltani, N. (2015). Stress intensity factor calculation for internal circumferential cracks in functionally graded cylinders using the weight function approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 134, 1-19.
- [EYÜ 08] Eyüp, E. A., (2008) Jk -Integral formulation and implementation for thermally loaded orthotropic functionally graded materials, Thesis, Middle East Technical University, Turkey.
- [FAR 13] Farid, S., (2013). Hygrothermal fracture analysis of fibrous composites with variable fiber spacing using Jk-Integral, Thesis, Middle East Technical University, Turkey.
- [FIO 06] Fiordalisi, S. (2006). Modélisation tridimensionnelle de la fermeture induite par plasticité lors de la propagation d'une fissure de fatigue dans l'acier 304L, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique.
- [FOR 11] Foroutan, M., Moradi-Dastjerdi, R. (2011). Dynamic analysis of functionally graded material cylinders under an impact load by a mesh-free method. *Acta Mechanica*, 219(3-4), 281-290.
- [GAR 17] Garg, S., & Pant, M. (2017). Numerical simulation of adiabatic and isothermal cracks in functionally graded materials using optimized element-free Galerkin method. *Journal of Thermal Stresses*, 40(7), 846-865.
- [GOS 98] Gosz, M., Dolbow, J., & Moran, B. (1998). Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 35(15), 1763-1783.
- [GOS 02] Gosz, M., & Moran, B. (2002). An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(3), 299-319.
- [GOU 15] Gouasmi, S., Megueni, A., Bouchikhi, A. S., Zouggar, K., Sahli, A. (2015). On the reduction of stress concentration factor around a notch using a functionally graded layer. *Materials Research*, 18(5), 971-977.

- [GOU 16] Gouasmi, S. (2016). Modélisation numérique du comportement en rupture des structures en matériaux composites gradués. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.
- [GRA 02] Gravouil, A., Moës, N., & Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part II: Level set update. *International journal for numerical methods in engineering*, 53(11), 2569-2586.
- [GRI 21] Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221(582), 163-198.
- [GU 97a] Gu, P., Asaro, R. J. (1997). Crack deflection in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 34(24), 3085-3098.
- [GU 97b] Gu, P., Asaro, R. J. (1997). Cracks in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 34(1), 1-17.
- [GU 99] Gu, P., Dao, M. & Asaro, R. J. (1999). A simplified method for calculating the crack tip field of functionally graded materials using the domain integral. *Journal of Applied Mechanics*, 66, 101 -108.
- [GUI 00] Guinea, G. V., Planas, J., Elices, M. (2000). KI evaluation by the displacement extrapolation technique. *Engineering fracture mechanics*, 66(3), 243-255.
- [GUI 18] Guidara, M., Bouaziz, M., Dallali, M., Schmitt, C., Haj Taieb, E., Azari, Z. (2018). HDPE Pipe Failure Analysis Under Overpressure in Presence of Defect. *Design And Modeling Of Mechanical Systems—III*, 1027-1038.
- [GUO 04] Guo, L. C., Wu, L. Z., Zeng, T., Ma, L. (2004). Mode I crack problem for a functionally graded orthotropic strip. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23(2), 219-234.
- [GÜR 99] Gürdal, Z., Haftka, R. T., & Hajela, P. (1999). Design and optimization of laminated composite materials. livre édition John Wiley & Sons.
- [HAI 17] Haider, I. K., Khazal, M.H. (2017). Analysis of mixed-mode crack tip in functionally graded beams by using xefgm. *Iraqi journal of mechanical and material engineering*, 17(3), 496-514.
- [HEB 20] Hebbar I., A. Boulenuar, A., Ait Ferhat, Y. (2020). Two dimensional fracture analysis of FGM under mechanical loading, *Journal of materials and engineering structures*, 7, 241-252.
- [HEL 14] Helal, W. M., & Shi, D. (2014). Optimum material gradient for functionally graded rectangular plate with the finite element method. *Indian Journal of Materials Science*, 2014.1-7.
- [HEN 75] Henshell, R. D., & Shaw, K. G. (1975). Crack tip finite elements are unnecessary. *International journal for numerical methods in engineering*, 9(3), 495-507.

- [HIR 19] Natarajan, S., Annabattula, R. K., & Martínez-Pañeda, E. (2019). Phase field modelling of crack propagation in functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering*, 169, 239-248.
- [HON 97] Honein, T., Herrmann, G. (1997). Conservation laws in nonhomogeneous plane elastostatics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(5), 789-805.
- [HON 10] Hon, Y., Wu, L., Guo, L., He, Q., & Du, S. (2010). Interaction integral method for the interfacial fracture problems of two nonhomogeneous materials. *Mechanics of Materials*, 42(4), 435-450.
- [HOU 11] Houari, MSA. (2011). Analyse des contraintes thermoélastique : lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès de Sidi Bel Abbes, Algérie.
- [ICH 01] Ichikawa, K. (2001). Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts. *Springer Science & Business Media*.
- [IRW 49] Irwin, G. R. (1949). Fracturing of metals, *Metallurgia*, 39(231), 133-137.
- [IRW 57] Irwin, G. R. (1997). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate., *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361-364.
- [JAI 06] Jain, N., Chona, R., Shukla, A. (2007). Asymptotic stress fields for thermomechanically loaded cracks in FGMs. *Fatigue and Fracture Mechanics*. 35(1) 309-320.
- [JIN 94] Jin, Z. H., Noda, N. (1994). Crack-tip singular fields in nonhomogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 61(3): 738-740.
- [JIN 96a] Jin, Z. H., Batra, R. C. (1996). Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. *Journal of Thermal Stresses*, 19(4), 317-339.
- [JIN 96b] Jin, Z. H., Batra, R. C. (1996). Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(8), 1221-1235.
- [JIN 01] Jin, Z. H., & Paulino, G. H. (2001). Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *International Journal of Fracture*, 107(1), 73-98.
- [JIN 03] Jin, Z. H., Paulino, G. H., Dodds Jr, R. H. (2003). Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(14), 1885-1912.
- [JIN 04] Jin, Z. H., Dodds Jr, R. H. (2004). Crack growth resistance behavior of a functionally graded material: computational studies. *Engineering Fracture Mechanics*, 71(12), 1651-1672.

- [KAW 87] Kawasaki, A., Watanabe, R. (1987). Finite element analysis of thermal stress of the metal/ceramic multi-layer composites with controlled compositional gradients. *Japan Institute of Metals, Journal*, 51, 525-529.
- [KAW 96] Kawasaki, A., Watanabe, R., Yuki, M., Nakanishi, Y., Onabe, H. (1996). Effect of microstructure on thermal shock cracking of functionally graded thermal barrier coatings studied by burner heating test. *Materials Transactions, JIM*, 37(4), 788-795.
- [KAW 02] Kawasaki, A. and Watanabe R. (2002). Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 1713-1728.
- [KC 08] KC, A., Kim, J. H. (2008). Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(8), 2542-2565.
- [KHA 04] Khan, S., Khraisheh, M. (2004). A new criterion for mixed mode fracture initiation based on the crack tip plastic core region. *International Journal Of Plasticity*, 20(1), 55-84.
- [KHA 19] Khazal, H., & Saleh, N. A. (2019). XEFGM for crack propagation analysis of functionally graded materials under mixed-mode and non-proportional loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(11), 975-983.
- [KID 10] Kidane, A., Vijaya, B., Chalivendra, V.B., Shukla, A., Chona, R. (2010). Mixed-mode dynamic crack propagation in graded materials under thermo-mechanical loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 77(14), 2864-2880.
- [KIE 03] Kieback, B., Neubrand, A., & Riedel, H. (2003). Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 81-106.
- [KIM 97] Kim, A. S., Suresh, S., Shih, C. F. (1997). Plasticity effects on fracture normal to interfaces with homogeneous and graded compositions. *International Journal of Solids and Structures*, 34(26), 3415-3432.
- [KIM 02a] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2002). Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8), 1903-1935.
- [KIM 02b] Kim, J. H., Paulino, G. H. (2002). Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(14-16), 1557-1586.
- [KIM 03a] Kim J.H., Paulino G.H., (2003). Mixed-mode J-integral formulation and implementation using graded elements for fracture analysis of nonhomogeneous orthotropic materials, *Mechanics of Materials*. 35, 107–128.
- [KIM 03b] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2003). The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 40(15), 3967-4001.

- [KIM 03c] Kim, J. H., Paulino, G. H. (2003). An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(10), 1457-1497.
- [KIM 04] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2004). Simulation of crack propagation in functionally graded materials under mixed-mode and non-proportional loading. *Mechanics and Materials in Design*, 1(1), 63-94.
- [KIM 05] Kim, J. H., Paulino, G. H. (2005). Consistent formulations of the interaction integral method for fracture of functionally graded materials.. *Journal applied mechanics – Trans ASME*.72, 351–64.
- [KIM 07] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2007). On fracture criteria for mixed-mode crack propagation in functionally graded materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(4), 227-244.
- [KOI 93] Koizumi M. (1993). The concept of FGM. *ceramic transaction*, 34, 3- 10.
- [KOI 97] Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4.
- [KON 95] Kong, X., Schlüter, N., Dahl, W. (1995). Effect of triaxial stress on mixed-mode fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 52(2), 379-388.
- [KOS 10] Kosker, S., Dag, S., Yildirim, B. (2010). Three dimensional modeling of inclined surface cracks in FGM coatings. *Materials Science Forum*. 631, 109-114.
- [LEE 08] Lee, K. H., Chalivendra, V. B., Shukla, A. (2008). Dynamic crack-tip stress and displacement fields under thermomechanical loading in functionally graded materials. *Journal of appliedmechanics*, 75(5). 1-7.
- [LIU 00] Liu, G.R., Yan, L. (2000). A modified meshless local Petrov-Galerkin method for solid mechanics. *In Advances in Computational Engineering and Sciences*, Atluri N.K. and Brust F.W. Eds., *Tech. Science Press, Palmdale, CA*, 1374–1379.
- [MA 08] MA, L., Zhi-Yong, W., & Lin-Zhi Wu. (2008). Simulation of crack propagation in functionally graded materials, *XXII ICTAM*, Adelaide, Australia.
- [MAH 17] Mahbadi, H. (2017). Stress intensity factor of radial cracks in isotropic functionally graded solid cylinders. *Engineering Fracture Mechanics*, 180, 115-131.
- [MAK 14] Makwana, A. B., Panchal, K. C., & Gandhi, A. H. (2014). Stress analysis of functionally graded material plate with cut-out. *International Journal of Advanced Mechanical Engineering*, 4(5) 495-500.
- [MAR 00] Marur, P. R., Tippur, H., V. (2000). Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient. *International Journal of Solids and Structures*, 37(38), 5353-5370.

- [MAR 15] Martínez-Pañeda, E., Gallego, R. (2015). Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 11(4), 405-424.
- [MAT 04] Matthew, C., Walters M.C., Glaucio, H., Paulino, G.H., Robert, H., Dodds, JR. (2004). Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*. 41(3-4), 1081-1118.
- [MIR 16] Mirahmadi, H., Azimi, M., & Mirjavadi, S. S. (2016). Calculation of stress intensity factor for functionally graded cylinders with two radial cracks using the weight function method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 85, 447-456.
- [MIY 13] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., Ford, R. G. (Eds.). (2013). Functionally graded materials: design, processing and applications. *Springer Science Business Media*, 5.
- [MOË 99] Moës, N., Dolbow, J., & Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1), 131-150.
- [MOG 11] Moghaddam, A. S., Ghajar, R., Alfano, M. (2011). Finite element evaluation of stress intensity factors in curved non-planar cracks in FGMs. *Mechanics research communications*, 38(1), 17-23.
- [MOG 18] Moghaddam, A.S., Alfano, M. (2018). Thermoelastic analysis of surface cracks in FGMs hollow cylinders using the interaction energy integral method. *Engineering Fracture Mechanics*. 202, 103-115.
- [MOR 87] Moran, B., Shih, C. F. (1987). A general treatment of crack tip contour integrals. *International journal of fracture*, 35(4), 295-310.
- [MOR 07] Morais, A. B. (2007). Calculation of stress intensity factors by the force method. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(5), 739-750.
- [NAK 89] Nakamura, T., & Parks, D. M. (1989). Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*, 25(12), 1411-1426.
- [NAK 91] Nakamura, T. (1991). Three-dimensional stress fields of elastic interface cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 58, 939-946.
- [NAM 12] Nami, M. R., & Eskandari, H. (2012). Three-dimensional investigations of stress intensity factors in a thermo-mechanically loaded cracked FGM hollow cylinder. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 89, 222-229.
- [NAR 11] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi. (2011). "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions»; John Wiley & Sons, 110.

- [NAT 19] Natarajan, S., & Annabattula, R. K. (2019). A FEniCS implementation of the phase field method for quasi-static brittle fracture. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 13(2), 380-396.
- [NEJ 13] Nejad, M. Z., Abedi, M., Lotfian, M. H., & Ghannad, M. (2013). Elastic analysis of exponential FGM disks subjected to internal and external pressure. *Central European Journal of Engineering*, 3(3), 459-465.
- [OMO 97] Omori, M., Okubo, A., Kang, G. H., & Hirai, T. (1996). Preparation and properties of polyimide/Cu functionally graded material. *Functionally Graded Materials*, 24(996), 767-772.
- [OOI 15] Ooi, E. T., Natarajan, S., Song, C., & Tin-Loi, F. (2015). Crack propagation modelling in functionally graded materials using scaled boundary polygons. *International Journal of Fracture*, 192(1), 87-105.
- [ÖZG 08] Özge, K. (2008). Computational 3d fracture analysis in axisymmetric media. , Thesis, Middle East Technical University, Turkey.
- [PAR 65] Paris, P. C. and Sih, G. C., (1965), Stress analysis of cracks, Fracture toughness testing and its applications: *ASTM International*, 30-81.
- [PET 98] Petrovic, J. J., & McClellan, K. J. (1998). Ceramic/polymer functionally graded material (FGM) lightweight armor system (No. LA-UR-98-2614). Los Alamos National Lab., NM (United States), 8-13.
- [RAN 03] Rangaraj, S., Kokini, K. (2003). Estimating the fracture resistance of functionally graded thermal barrier coatings from thermal shock tests. *Surface and Coatings Technology*, 173(2-3), 201-212.
- [RAN 04] Rangaraj, S., Kokini, K. (2004). A study of thermal fracture in functionally graded thermal barrier coatings using a cohesive zone model. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 126(1), 103-115.
- [RAO 03] Rao, B. N., Rahman, S. (2003). Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engineering fracture mechanics*, 70(1), 1-27.
- [RAJ 77] Raju, I. S., & Newman Jr, J. C. (1977). Three dimensional finite-element analysis of finite-thickness fracture specimens. Livre edition Work of the US Gov. Public Use Permitted.
- [RAJ 79] Raju, I. S., & Newman Jr, J. C. (1979). Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engineering fracture mechanics*, 11(4), 817-829.
- [RAJ 08] Rajan, T. P. D., Pillai, R. M., & Pai, B. C. (2008). Functionally graded Al–Al₃Ni in situ intermetallic composites: fabrication and microstructural characterization. *Journal of alloys and compounds*, 453(1-2), 4-7.

- [RÉT 05] Réthoré J. (2005). Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique de fissures. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [RIC 68] Rice, J. (1968). A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2), 379.
- [ROU 00] Rousseau, C. E., & Tippur, H. V. (2000). Compositionally graded materials with cracks normal to the elastic gradient. *Acta Materialia*, 48(16), 4021-4033.
- [ROU 14] Roumeli, E. (2014). *Structure and properties of cross linked high density polyethylene nano composite materials*, Thèse de doctorat, Université Aristote de Thessalonique (AUTH). Faculté des sciences. Département de physique.
- [RYB 77] Rybicki, E. F., & Kanninen, M. F. (1977). A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering fracture mechanics*, 9(4), 931-938.
- [SAB 95] Sabir, B. (1995). The performance of isoparametric finite elements in stress intensity factor determination. *International Journal Of Fracture*, 72(3), 259-275.
- [SAH 15] Sahu, Y. K., Moulick, S. K. (2015). Analysis of semi-elliptical crack in a thick walled cylinder using FEM. *International Journal of Advanced Engineering Research and Studies. Studies/IV/II/Jan.-March*, 231, 235.
- [SAN 00] Sansoz, F. (2000). *Propagation des petites fissures de fatigue dans les zones de concentration de contraintes dans le superalliage N18* (Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris).
- [SHE 16] Shen, H. S. (2016). *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. Livre Edition CRC press.
- [SHI 88] Shivakumar, K. N., Tan, P. W., & Newman Jr, J. C. (1988). A virtual crack-closure technique for calculating stress intensity factors for cracked three dimensional bodies., *International Journal of Fracture*, 36 .43-50.
- [SHI 88] Shih, C. F., & Asaro, R. J. (1988). Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: part I—small scale yielding. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 299-316.
- [SIH 74] Sih, G. (1974). Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal Of Fracture*, 10(3), 305-321.
- [SHO 15] Shojaee, S., Daneshmand, A. (2015). Crack analysis in media with orthotropic functionally graded materials using extended isogeometric analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 147, 203-227.
- [SWA 17] Swaminathan, K., & Sangeetha, D. M. (2017). Thermal analysis of FGM plates—A critical review of various modeling techniques and solution methods. *Composite Structures*, 160, 43-60.

- [TAK 90] Takahashi, H., Hashida, T. (1990). Development of an evaluation method of functionally gradient materials. *JSME international journal Series A Solid mechanics strength of materials*, 33(3), 281-287.
- [TAK 16] Takabi, B. (2016). Thermomechanical transient analysis of a thick-hollow FGM cylinder. *Engineering Solid Mechanics*, 4(1), 25-32.
- [TOH 06] Tohgo, K., Hadano, A. (2006). Characterization of fracture process in ceramic-metal functionally graded material under three-point-bending. *JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering*, 49(3), 321-330.
- [TOK 99] Tokita, M. (1999). Development of large-size ceramic/metal bulk FGM fabricated by spark plasma sintering. *Materials science forum*, 308, 83-88.
- [TOK 05] Tokita, M. (2005). Development of square-shaped large-size WC/Co/Ni system FGM fabricated by spark plasma sintering (SPS) method and its industrial applications. *Materials Science Forum*, 492, 711-718.
- [TOP 13] Topal, S., Dag, S. (2013). Hygrothermal Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Materials Using-Integral-Based Methods. *Mathematical Problems in Engineering*,
- [TRU 08] Trung-Kien N. (2008). Quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectives des plaques hétérogènes, Thèse de doctorat, Université paris-East.
- [UDU 14] Udupa, G., Rao, S. S., &Gangadharan, K. V. (2014). Functionally graded composite materials: an overview. *Procedia Materials Science*, 5, 1291-1299.
- [VIN 17] Vincent A. (2017). Les nouveaux matériaux composites pour l'aéronautique, Livre édition mediachimie 76-83.
- [WAL 98] Walters, M. C., Paulino, G. H., Dodds Jr, R. H. (2005). Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(11), 1635-1663.
- [WEL 63] Wells, A. A. (1963). Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British Welding Journal*, 10.
- [WES 39] Westergaard, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of applied mechanics*, 6(2), 49-53.
- [YAM 90] Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., &Shiota, I. (1990). Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials. *Sendai, Japan*.
- [YAU 80] Yau, J. F., Wang, S. S. et Corten, H. T. (1980). A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47, 335-341.

- [YIL 04] Yildirim, B., Erdogan, F. (2004). Edge crack problems in homogenous and functionally graded material thermal barrier coatings under uniform thermal loading. *Journal of Thermal Stresses*, 27(4), 311-329.
- [YIL 05] Yildirim, BF., Dag, S., & Erdogan, F. (2005). Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading. *International journal of Fracture*, 132(4), 371-397.
- [YIL 06] Yildirim, B. (2006). An equivalent domain integral method for fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses. *Journal of Thermal Stresses*, 29(4), 371-397.
- [YIL 08] Yildirim, B., Yılmaz, S., Kadioğlu, S. (2008). Delamination of compressively stressed orthotropic functionally graded material coatings under thermal loading. *Journal of applied mechanics*, 75(5).
- [YOS 04] Yoshihisa, U., 2004. Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications. *Composites Part B*, 39, 39-51.
- [YUE 03] Yue, Z. Q., Xiao, H. T., Tham, L. G. (2003). Boundary element analysis of crack problems in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14), 3273-3291.
- [ZEG 04] Zeghloul, A. (2003). Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture. Livre édition arts et métiers paristech.
- [ZHA 18] Zhang, H. H., Liu, S. M., Han, S. Y., & Fan, L. F. (2018). Modeling of 2D cracked FGMs under thermo-mechanical loadings with the numerical manifold method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 148, 103-117.
- [ZHU 19] Zhu, N., Oterkus, E. (2020). Calculation of stress intensity factor using displacement extrapolation method in peridynamic framework. *Journal of Mechanics*, 36(2), 235-243.