Ministère de l'Enseignement Supérieur et la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences exactes
Département de Probabilités et Statistique

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Option : Probabilités & Statistique

Présentée par

Fatima **B**enziadi

Sur les propriétés du flot stochastique engendré par le modèle naturel du risque de crédit

Composition du jury

Président	:	**Mr.** M.K.Attouch	Professeur. Univ. de S.B.A
Directeur de thèse	:	**Mr.** A.Kandouci	Professeur. Univ. de Saïda
Co-Directeur de thèse	:	**Mr.** A.B.Rabhi	Maître de conférences A. Univ. de S.B.A
Examinateurs	:	**Mr.** A.Gherriballah	Professeur. Univ. de S.B.A
		Mr. T.Guendouzi	Professeur. Université de Saïda
		Mr. F.Madani	Maître de conférences A. Univ. de Saïda

À mes chers parents qui m'ont soutenus au long de mes études,

À mon frère et mes soeurs,

À toute ma famille,

À tout mes collègues.

REMERCIEMENTS

C'est un réel plaisir pour moi d'écrire ces lignes par lesquelles je tiens à remercier les nombreuses personnes qui ont contribué, de diverses manières, à ce travail.

Il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma profonde gratitude à Monsieur ***Abdeldjebbar Kandouci***, je le remercie vivement pour son chaleureux intérêt et la gentillesse avec laquelle il a accepté d'être directeur de ma thèse. Je remercie sincèrement Monsieur ***M.K.Attouch*** pour l'honneur qu'il ma fait en présidant le jury. Je remercie vivement Monsieur ***A.B.Rabhi***, je lui rends le respect le plus profond. Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur ***A.Gherriballah***, Monsieur ***T.Guendouzi***, et Monsieur ***F.Madani*** pour leur participation à mon jury. Je suis très honorée de leur présence.

J'adresse aussi mes remerciements à tous les enseignants du département de Mathématiques ainsi qu'à tous les membres du laboratoire LMSSA de l'université de Saida, et particulièrement à Monsieur le Doyen ***Oukacha Abbès***, Monsieur le Chef de département ***Djelloul Djebbouri*** et Madame ***Dalila Bouazza***.

Merci à ***ma mère***, ***mon père***, et toute ma famille de m'avoir soutenu avec beaucoup d'affection.

C'est à ***Khelifa*** que je dois tout : sa joie de vivre, sa confiance en moi, son soutien permanent m'a permis d'avancer dans la vie jusqu'à maintenant et je l'espère, pour toujours.

Table des matières

Résumé **7**

Summary **9**

Liste des travaux **11**

Introduction générale **13**

1 Éléments de calcul stochastique **15**

1.1 Notions sur les processus stochastiques 15

1.2 Intégration stochastique 19

1.2.1 Processus à variation finie 19

1.2.2 Intégrale de Stieltjes 20

1.2.3 Construction de l'intégrale stochastique d'Itô 21

1.2.4 Formule de changement de variable : formule d'Itô 24

1.2.5 Crochet d'un processus d'Itô 25

1.3 Équations différentielles stochastiques 27

1.3.1 Inégalité de Bellman-Gronwall 29

1.3.2 Théorèmes d'existence et d'unicité 29

1.3.3 Flot stochastique 31

2 Modélisation du risque de crédit **35**

2.1 Zoologie des risques 36

2.2 Enjeux 38

2.3 Modèles du risque de crédit 39

2.4 La modélisation dans le cas d'un seul défaut 41

3 The Application of Kolmogorov's theorem in the one-default model 49

3.1 Introduction 51

3.2 The Kolmogorov's theorem and basic lemmas 53

3.3 Our approach to the $\natural$-model 58

3.4 Conclusion 62

4 The homeomorphic property of the stochastic flow of the natural equation in Multi-dimensional case 65

4.1 Introduction 66

4.2 Flow of homeomorphisms for the solution of stochastic differential equation 67

4.3 Main result 75

4.3.1 Proof of the one to one property 77

4.3.2 Proof of the onto property 85

Conclusion et Perspectives 95

Résumé

Les modèles à un défaut sont largement appliqués dans la modélisation du risque financier et dans l'évaluation du prix des produits financiers, comme les Credit default swap. Tout d'abords, nous nous intéressons essentiellement à un modéle dit modèle naturel. Ce modèle est exprimé par une équation différentielle stochastiques appelée équation naturelle, celui-ci joue un rôle essentiel dans ce travail, mais son application a été soumise à une hypothèse de continuité. Alors, il est important de savoir dans quelles conditions cette hypothèse est satisfaite. Donc, pour avoir ce résultat, nous avons appliqué le lemme de Kolmogorov.

Deuxièment, sur le même modèle et avec quelques hypothèses, nous avons étudié la propriété d'homéomorphisme du flot stochastique engendré par l'équation naturelle mais dans un cas multidimensionnel. Dans cette partie, nous appliquons la théorie de Hiroshi Kunita.

Summary

The one-default models are widely applied in modeling financial risk and in price valuation of financial products such as Credit default swap. Firstly, we are interested essentially to the so-called natural model. This model is expressed by a stochastic differential equation called $\natural$-equation, the latter plays an essential role in this work, but its application has been submitted to a hypothesis of continuity. Then it is important to know under what conditions this hypothesis is satisfied. So, to have this result, we applied the lemma of Kolmogorov.

Secondly, on the same model and with some assumptions, we studied the homeomorphism property of the stochastic flow generated by the $\natural$-equation but in a multidimensional case. In this part we apply the theory of Hiroshi Kunita.

Liste des travaux

Publications

1. Benziadi, F., Kandouci, A. *The application of Kolmogorov's theorem in the one-default model*. Journal of Mathematical Sciences and Applications E-Notes, Vol. 4, No. 2(2016)71-78.
2. Benziadi, F., Kandouci, A. *The homeomorphic property of the stochastic flow of the natural equation in Multi-dimensional case* (submitted).

Communications dans des congrès

- *The one default model*. 1^{er} Workshop International sur le Calcul Stochastique et ses Applications, Saïda : 28-29 et 30 Mai 2014.

Activités au niveau de laboratoire LMSSA

Un cycle de conférences au cours des années suivantes :

1. *Quelques éléments d'analyse stochastique*, 2010/2011.
2. *Hiding drift*, 2011/2012.
3. *Le risque de crédit*, 2012/2013.
4. *La continuité d'un modèle à un défaut*, 2013/2014.
5. *The one-default model with jumps*, 2014/2015.

6. *Le flot stochastique de l'équation naturelle dans le cas multidimensionnel*, 2015/2016.
7. *La propiété d'homéomorphisme du flot stochastique engendré par le modèle naturel dans le cas multidimensionnel*, 2016/2017.

Introduction générale

L'étude des flots d'équations stochastiques est un outil essentiel dans la géométrie différentielle stochastique. C'était Neveu [37], le premier qui a démontré un théorème de continuité de la solution X^x en fonction de la valeur initiale x dans son cours de troisième cycle de 1973 pour les équations du type classique gouvernées par des termes en dB_t et dt. Le résultat fondamental dans l'étude de la différentiabilité des solutions d'une équation différentielle stochastique en fonction des conditions initiales dit que, si l'on considère la solution $X(t, \omega, x)$ d'une très bonne équation différentielle stochastique, correspondante à la valeur initiale x, il en existe une version de classe C^∞ en x pour presque tout ω. Ce résultat est dû à Malliavin pour les équations du type classique sur les variétés, cela constitue l'une des étapes importantes dans sa démonstration probabiliste des résultats d'hypoellipticité. En 1979, Paul André Meyer [35] a démontré le même résultat dans $\mathbb{R}^n$ pour une équation gouvernée par une semimartingale discontinue.

Les applications $\phi_t(\omega, .) : x \longrightarrow X(t, \omega, x)$ sont alors analogues au flot d'une équation différentielle ordinaire. Dans le cas déterministe, ce flot est un groupe à un paramètre de difféomorphismes. Pour les équations différentielles stochastiques générales, on ne peut espérer l'injectivité que dans le cas où la semimartingale est continue. Dans le cas où il s'agit du processus de Wiener, Malliavin l'a effectivement démontrée au moyen de l'argument naturel de retournement du temps et Bismut a démontré la surjectivité dans le cas de $\mathbb{R}^n$. Plus récemment (1980), le cas général de l'injectivité a été traité sans retournement du temps, d'abord l'injectivité dite faible par Emery [19] : pour x et y distincts donnés on a p.s. pour tout t,

$X(t, \omega, x) \neq X(t, \omega, y)$. En suite l'injectivité dite forte par Kunita [29] : on a p.s. pour tous x et y distincts et tout t, $X(t, \omega, x) \neq X(t, \omega, y)$, et il a démontré la surjectivité de l'application $X(t, \omega, .)$ pour t fixé (pouvant cependant dépendre de ω). En 1982, Are Uppman [47] aurait par sa méthode d'utilisation de semimartingales exponentielles, une démonstration améliorée des résultats d'injectivité forte. Enfin, les développements récents du sujet concernant aussi l'étude des processus de la forme $\phi_t(\omega, Z_t(\omega))$, où le processus $Z_t(\omega)$ substitué à x est une semimartingale, Bismut [5] a montré que ce sont des semimartingales et il les a exprimés au moyen d'une formule d'Ito très intéressante.

Pour bien présenter mes résultats originaux, j'ai partagé la thèse en quatre chapitres :
Le premier chapitre, est un *chapitre introductif* qui présente des notions générales sur le calcul stochastique.
En chapitre 2, on donne une brève description du modèle de risque du crédit, plus particulièrement sur la modélisation dans le cas d'un seul défaut.
Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la continuité du flot stochastique engendré par le modèle naturel dans le cas unidimensionnel, en appliquant le critètre de Kolmogorov.
Le chapitre 4 est destiné à l'étude de la propriété d'homéomorphisme du flot stochastique du modèle naturel sous quelques hypothèses supplémentaires dans un cas multidimmensionnel.
Enfin, je présente quelques perspectives de recherche permettant d'étendre et parfois de généraliser les résultats de cette thèse.

Chapitre 1

Éléments de calcul stochastique

L'objectif de ce chapitre est de donner les éléments nécessaires pour développer le calcul différentiel stochastique, notament la théorie de l'intégration stochastique. Nous établissons la formule de changement de variables dite formule d'Itô dans ce cadre. Cette formule permet en particulier de construire d'autres processus stochastiques liés au Brownien notamment les martingales. La formule d'Itô permet aussi de donner des interprétations probabilistes à des équations aux dérivés partielles. Nous étudierons également les équations différentielles stochastiques (EDS), en particulier l'existence et l'unicité des solutions ainsi que la régularité des trajectoires par rapport aux différentes variables et paramètres. En particulier, nous étudions le flot stochastique engendré par une EDS.

1.1 Notions sur les processus stochastiques

Nous rappelons tout d'abord quelques définitions et notations. La filtration donne "l'information" dont on dispose à chaque instant t.

Définition 1.1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Une filtration est une famille croissante* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est à dire telle que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *si* $s \leq t$.

2. *On dit que la filtration* $\mathbb{F}$ *satisfait les conditions usuelles si elle est :*

- *continue à droite, i.e.,* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.
- *complète, i.e., toutes les tribus* $\mathcal{F}_t$ *contiennent les ensembles négligeables, ce qui revient à demander que* $\mathbb{P}(A) = 0$ *entraîne* $A \in \mathcal{F}_0$.

Convention. Dans toute la suite on se donne un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0), \mathbb{P})$ et on suppose que sa filtration $\mathbb{F}$ satisfait les conditions habituelles.

Définition 1.1.2. *Un processus stochastique (à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*) est une famille* $(X_t, t \geq 0)$ *de variables aléatoires* $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{R}^d)$.

1. *Le processus stochastique* (X_t) *est* $\mathbb{F}$*-adapté si* X_t *est mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ *dans* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}^d)$ *pour tout instant* $t \geq 0$.
2. *L'application* $X_.(\omega)$ *(pour* $\omega \in \Omega$ *fixé) s'appelle une trajectoire du processus.*
3. *Le processus stochastique* (X_t) *est progressivement mesurable (ou progressif) si pour tout instant* $s \in [0, t]$*, l'application* $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ *est mesurable de* $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *dans* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}^d)$.
4. *Soit* (X_t) *un processus stochastique. Sa filtration naturelle est* $(\mathcal{F}_t^X, t \geq 0)$ *où* $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\sigma(X_s, s \in [0, t]), \mathcal{N})$ *où* $\mathcal{N}$ *désigne les ensembles négligeables. Si le processus* (X_t) *est continu à droite, sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t^X)$ *satisfait les conditions habituelles.*

Théorème 1.1.1. *[36] Soit* (X_t) *un processus stochastique à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, adapté et continu à droite. Alors* (X_t) *est progressif.*

Définition 1.1.3. *Soient* X *et* Y *deux processus stochastiques, définis sur le même espace de probabilité. On dira que* X *est une modification de* Y *si*

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1.$$

i.e. $\forall t \geq 0$*, il existe une partie* $\mathcal{N}_t$ *négligeable tel que* $\forall \omega \in \mathcal{N}_t^c$ *on ait* $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$.

Définition 1.1.4. *Deux processus stochastiques* X *et* Y *sont dits indistingables si*

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t \quad \forall t \geq 0] = 1.$$

i.e. Il existe une partie $\mathcal{N}$ négligeable tel que $\forall \omega \in \mathcal{N}^c$ et $\forall t \geq 0$, on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$.

Dans toute la suite, on travaille sur une base stochastique satisfaisant les conditions habituelles, modulo la relation d'équivalence :

$$X \, \mathcal{R} \, Y \Longleftrightarrow X \text{ et } Y \text{ sont indistingables.}$$

Définition 1.1.5. *Un processus stochastique X est dit continu s'il existe $\mathcal{N}$ négligeable tel que $\forall \omega \in \mathcal{N}^c$ l'application $t \longmapsto X_t(\omega)$ soit continue. De plus X est dit continu à droite et limité à gauche (càdlàg) s'il existe $\mathcal{N}$ négligeable tel que $\forall \omega \in \mathcal{N}^c$ l'application $t \longmapsto X_t(\omega)$ soit continue à droite et limité à gauche. i.e.*

$$\lim_{s \searrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega) \text{ et } \lim_{s \nearrow t} X_s(\omega) \text{ existe et est finie.}$$

Théorème 1.1.2. *[48] Si X et Y sont càdlàg et X est une modification de Y alors X et Y sont indistingables.*

Maintenant, on présente le critère de continuité de Kolmogorov qui joue un rôle important dans la suite de cette thèse.

Lemme 1.1.1. *[48] Soient Γ un cube de $\mathbb{R}^d$ et $\{X_t, t \in \Gamma\}$ un processus stochastique à valeurs réelles. Supposons qu'il existe des constantes $k > 1$, $K > 0$ et $\mu > 0$ vérifiant*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^k\right] \leq K|t-s|^{d+\mu},$$

où $|t-s|$ désigne la distance euclidienne. Alors

1. *X admet une version continue,*
2. *Il existe des constantes θ et β dépendant seulement de d, k et μ et une variable aléatoire réelle positive Y telle que*

$$|X_t - X_s| \leq Y|t-s|^{\frac{\mu}{k}} \left(\ln\left(\frac{\theta}{|t-s|}\right)\right)^{\frac{2}{k}} \text{ p.s. pour tout } (t,s) \in \Gamma^2$$

et

$$\mathbb{E}[Y^k] \leq \beta K.$$

La notion de temps d'arrêt joue un rôle crucial dans la théorie.

Définition 1.1.6. *Une variable aléatoire* $\tau : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ *est un temps d'arrêt (relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$*), ou* $(\mathcal{F}_t)$*-temps d'arrêt, si* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *pour tout* $t \geq 0$*. Si* τ *est un temps d'arrêt relativement à* $(\mathcal{F}_t)$*, on note*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in [0, +\infty]\}$$

Enfin si (X_t) *est un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté, on note* $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$ *; si le processus* (X_t) *est continu à droite et adapté,* $X_\tau 1_{\{\tau < +\infty\}}$ *est* $\mathcal{F}_\tau$*-mesurable.*

Les martingales jouent un rôle central dans la théorie ; elles ont la propriété fondamentale constamment utilisée en finance : le processus $(X_t, t \in [0, \mathrm{T}])$ est complètement déterminé par sa valeur X_T à l'instant T.

Définition 1.1.7. *Un processus réel* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale si*

- $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$ *autrement dit* $X_t \in L^1(\Omega)$ *pour tout* $t \geq 0$.
- $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ *pour tout* $s \leq t$.

Si X *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale telle que* $\mathbb{E}(X_t^2) < +\infty$ *pour tout* $t \geq 0$*, on dit que* X *est une martingale de carré intégrable.*
On peut définir une martingale sans filtration préalable, en demandant que ce soit une $(\mathcal{F}_t^X)$*-martingale où* $(\mathcal{F}_t^X)$ *est la tribu naturelle de* X*. Clairement, si* X *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale, c'est aussi une* $(\mathcal{F}_t^X)$*-martingale.*
Enfin, un processus $X = (X_t^i, i = 1, ..., d, t \geq 0)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale si chacune de ses composantes* $(X_t^i, t \geq 0), i = 1, ..., d$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale.*

Rappelons qu'une $(\mathcal{F}_t)$-martingale (X_t) par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ qui satisfait les conditions habituelles admet une modification continue à droite et limitée à gauche (càdlàg). Toutes les martingales que nous considérons seront donc continues à droite. Le théorème d'arrêt s'étend aux martingales continues à droite.

Théorème 1.1.3. *[36](Théorème d'arrêt) Soit* M *une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale (continue à droite).*

1. *Soit S, T des $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt bornés par une constante K, i.e., tels que $S \leq T \leq K$. Alors M_T est intégrable et*

$$\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_S) = M_S \ p.s.$$

2. *Soit T un temps d'arrêt. Le processus arrêté $(M_t^T, t \geq 0)$ défini par*

$$M_t^T = M_{T\wedge t}$$

est encore une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Cette proposition justifie la définition suivante qui permet de "localiser" la notion de martingale en introduisant une suite croissante de temps d'arrêt.

Définition 1.1.8. *Un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté et continu à droite M est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale s'il existe une suite croissante (τ_n) de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que $\tau_n \longrightarrow \infty$ et $M^{\tau_n} := (M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale pour tout n.*

Définition 1.1.9. *On dit qu'un processus stochastique $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien réel si B est à accroissements indépendants, stationnaires et continues sur la base stochastique $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$. De plus $loi(B_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})dx$, par suite $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $Var[B_t] = \mathbb{E}[B_t^2] = t$ pour tout $t \geq 0$, où Var désigne la variance.*

Rappelons que les trajectoires du Brownien B sont p.s. continues, et même Höldériennes d'ordre $\alpha < \dfrac{1}{2}$, mais p.s. elles ne sont pas dérivables.

1.2 Intégration stochastique

1.2.1 Processus à variation finie

Définition 1.2.1. *Soit $T > 0$. Un processus stochastique $A : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $A_0 = 0$ est dit à variation finie si $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t \in [0, T]$*

$$|A|_t := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \right\} < +\infty$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ *de* $[0, t]$.

$|A|_t$ est appelé variation de A sur $[0, t]$ et le processus $t \longmapsto |A|_t$ est appelé la variation total de A. Il est claire que $|A|_.$ est positif croissant. Si $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} |A|_t < +\infty$ alors le processus A est dit à variations bornée.

Proposition 1.2.1. *[48] Tout processus à variation finie est différence de deux processus croissants.*

1.2.2 Intégrale de Stieltjes

Soit f et g deux fonctions réelles continues sur $[0, +\infty[$. Nous voulons donner un sens à $\int_0^t f(s)dg(s)$ comme limite de somme de Riemann i.e. le problème peut être posé sous la forme suivante. Pour quelle classe de fonctions f et g peut on avoir

$$\int_0^t f(s)dg(s) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{\pi_n} f(t_j)(g(t_{j+1}) - g(t_j))$$

où π_n est une subdivision de taille $n+1$ de $[0, t]$ donnée par $\pi_n = \{t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = t_n = t\}$?

Remarque 1.2.1. *L'intégrale de Riemann correspond à* $g(t) = t$.

Théorème 1.2.1. *[48] Soit f une fonction continue et g une fonction à variation finie. L'intégrale de Stieltjes de f par rapport à g est donnée par la limite suivante*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{\pi_n} f(t_j)(g(t_{j+1}) - g(t_j)) \textit{ existe et elle notée } \int_0^t f(s)dg(s)$$

Nous allons maintenant caractériser les fonctions g pour les quelles nous avons : pour toute fonction f, continue bornée

$$S_n(f) = \sum_{\pi_n} f(t_j)(g(t_{j+1}) - g(t_j)) \text{ converge (sa limite est notée } \int_0^t f(s)dg(s))$$

Le théorème suivant dû à P.A. Meyer (1985) donne la caractérisation cherchée.

Théorème 1.2.2. *[48] $S_n(f)$ converge pour toute fonction f, continue bornée si et seulement si g est à variation bornée.*

Corollaire 1.2.1. *[48] La trajectoire brownienne $t \longmapsto B_t(\omega)$ n'est pas à variation bornée sur $[a, a+t]$ $\forall t > 0$. i.e. le mouvement Brownien fait une infinité d'oscillations qu'on ne peut pas contrôler sur $[a, a+t]$.*

Proposition 1.2.2. *[48](**Formule d'intégration par partie**)*
Soient $\{H_t, t \geq 0\}$ et $\{G_t, t \geq 0\}$ deux processus continues et à variation finie, alors pour tout t

$$H_t G_t = H_0 G_0 + \int_0^t H_s dG_s + \int_0^t G_s dH_s$$

En revanche l'intégrale $\int_0^t H_s dG_s$ est définie ω par ω i.e. la variable aléatoire $(\int_0^t H_s dG_s)(\omega) := \int_0^t H_s(\omega) dG_s(\omega)$.

La proposition suivante montre que les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ opèrent sur les processus à variation finie.

Proposition 1.2.3. *[48](**Formule de changement de variable**)*
Soient $\{A_t, t \geq 0\}$ un processus continu et à variation finie et F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors le processus $\{F(A_t), t \geq 0\}$ est à variation finie et

$$F(A_t) = F(A_0) + \int_0^t F'(A_s) dA_s.$$

1.2.3 Construction de l'intégrale stochastique d'Itô

Soit $\{h(t, \omega), t \geq 0\}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté. Notre but est de définir une intégrale de h par rapport à B que nous notons

$$\int_0^t h(s, \omega) dB_s(\omega) = \int_0^t h(s) dB_s$$

Remarquons d'abord que si on fixe ω dans Ω et si on suppose que le processus $\{h(s), s \geq 0\}$ est continu alors l'intégrale $\int_0^t h(s,\omega)dB_s(\omega)$ est divergente. Sinon la trajectoire brownienne serait à variation finie. Par conséquent $\int_0^t h(s)dB_s$ sera étudié comme une variable aléatoire i.e. $(\int_0^t h(s)dB_s)(\omega)$.

Il est raisonnable de commencer, dans un premier temps, par la définition de cet objet pour les processus simples (élémentaires) et ensuite étendre la définition par des procédés d'approximation convenable au cas général.
Un processus élémentaire est un processus de la forme

$$h(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n-1} h_j(\omega) 1_{]t_j,t_{j+1}]}(t) \quad \text{pour } t \in [0,T]$$

où $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n \leq T$ et h_j, $0 \leq j \leq n-1$ sont des variables aléatoires.

Les processus élémentaires jouent le rôle des fonctions en escalier (étagées) dans une intégrale de Lebesgue. Il est naturel de définir $\displaystyle\int_0^t h(s)dB_s$ par

$$\int_0^t h(s)dB_s = \sum_{j=1}^{n-1} h_j [B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t}].$$

Nous allons maintenant décrire la classe des processus pour laquelle l'intégrale stochastique sera définie. On note par $L^2_{ad}(T)$ la classe des processus

$$\begin{aligned} h : [0,+\infty[\times\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s,\omega) &\longmapsto h(s,\omega) \end{aligned}$$

telle que

1. $(s,\omega) \longmapsto h(s,\omega)$ soit $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}_s$-mesurable, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $[0,+\infty[$,
2. $h(s,\omega)$ soit $\mathcal{F}_s$-adapté et $\mathbb{E}\int_0^T |h(s,\omega)|^2 ds < +\infty$.

Nous allons donc construire l'intégrale stochastique d'Itô d'un élément de $L^2_{ad}(T)$ par rapport à un mouvement Brownien B de dimension 1.

Pour cela, soit $h \in L^2_{ad}(T)$ un processus élémentaire i.e. de la forme :

$$h(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n-1} h_{t_j}(\omega) 1_{]t_j,t_{j+1}]}(t).$$

Puisque $h \in L^2_{ad}(T)$ les variable aléatoires $h_{t_j}(\omega)$ doivent être $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable et par suite

$$\int_0^t h(s)dB_s := \sum_{j=1}^{n-1} h_{t_j}(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t}).$$

et la v.a. $(\int_0^t h(s)dB_s)(\omega)$ est donnée par $\sum_{j=1}^{n-1} h_{t_j}(\omega)(B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega))$.

Lemme 1.2.1. *[48] Si h est un processus élémentaires borné et appartenant à $L^2_{ad}(T)$. Alors*

1. $\mathbb{E}\int_0^T h(s)dB_s = 0$ *et* $\mathbb{E}\left(\int_0^T h(s)dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T (h(s))^2 ds.$
2. $\mathbb{E}\left(\int_0^T h(s)dB_s \int_0^T g(s)dB_s\right) = \mathbb{E}\int_0^T h(s)g(s)ds.$
3. *Le processus* $M_t := \displaystyle\int_0^t h(s)dB_s$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*
4. *Le processus* $N_t := \left[\displaystyle\int_0^t h(s)dB_s\right]^2 - \int_0^t h^2(s)ds$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*

La propriété (2) est appelé propriété d'isométrie.

Quelques propriétés de l'intégrale stochastique.

- Soient h et g deux élément de $L^2_{ad}(T)$ et soit $0 \le s \le r \le t$. Alors
  1. $\int_s^t h(u)dB_u = \int_s^r h(u)dB_u + \int_r^t h(u)dB_u$;
  2. $\int_0^t [ah(s) + bg(s)]dB_s = a\int_0^t h(s)dB_s + b\int_0^t g(s)dB_s$ (où a et b sont des constantes).
- Les processus $\{\int_0^t h(s)dB_s, t > 0\}$ et $\{[\int_0^t h(s)dB_s]^2 - \int_0^t h^2(s)ds, t > 0\}$ sont des martingales continues.

Proposition 1.2.4. *[48] Soit h un élément de $L^2_{ad}(T)$ tel que $|h(t,\omega)| \leq C$, (C ne dépends ni de t ni de ω). Alors le processus $t \longmapsto \int_0^t h(s)dB_s$ admet une version continue. Plus précisément une version hölderienne d'ordre $\alpha < \frac{1}{2}$.*

La preuve de cette proposition résulte immédiatement du critère de Kolmogorov énoncé précédemment.

Inégalité maximale

On a souvent besoin de majorations de l'intégrale stochastique. L'inégalité dite de Doob est très utile

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t h(s)dB_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^T |h(s)|^2 ds\right],$$

pour tout $h \in L^2_{ad}(T)$. De plus si $h \in L^2_{ad}(T)$ tel que $\mathbb{E}[\int_0^T |h(s)|^2 ds]^{\frac{p}{2}}$ est fini alors pour tout $p > 1$ nous avons

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t h(s)dB_s\right|^p\right] \leq C(T,p)\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |h(s)|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

Elle est appelé inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (BDG).

1.2.4 Formule de changement de variable : formule d'Itô

Dans ce paragraphe nous allons donner la formule d'Itô qui correspond à l'intégrale stochastique d'Itô. Soit $\mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à $t \in [0,T]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.2.3. *[48] Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus d'Itô i.e. de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t v(s)ds + \int_0^t u(s)dB_s$$

où $u(.)$ et $v(.)$ sont des processus adaptés avec $u(.) \in L^2_{ad}(T)$ tels que

$$\int_0^t |v(s)|ds < +\infty \ \ et \int_0^t u^2(s)ds < +\infty \ \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

et B un mouvement Brownien réel.
Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors

$$f(t, X_t) = f(0, x) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)u(s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)v(s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)u^2(s)ds.$$

1.2.5 Crochet d'un processus d'Itô

Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ une martingale continue de carré intégrable (telle que $\mathbb{E}(\sup_t M_t^2) < +\infty$). On peut montrer (voir Revuz-Yor) qu'il existe un processus croissant continu A tel que $\{M_t - A_t, t \geq 0\}$ est une martingale. Le processus A est appelé le crochet oblique, ou le crochet de M. On le note très souvent $A_t =< M, M >_t$ ou encore $< M >_t$.

Si M et N sont deux martingales locales continues, on définit leur crochet par

$$< M, N >_t = \frac{1}{2}(< M + N, M + N >_t - < M, M >_t - < N, N >_t).$$

C'est l'unique processus à variation finie tel que le processus $M_t N_t - < M, N >_t$ est une martingale locale.

Le crochet de deux intégrales stochastiques

$$X_t = x + \int_0^t H_s dB_s \text{ et } Y_t = y + \int_0^t H_s dB_s \text{ est } < X, Y >_t = \int_0^t H_s K_s ds.$$

Proposition 1.2.5. *[48] Le crochet de deux martingales continues M et N est égal à la variation quadratique de ces processus dont le pas tend vers 0*

$$< M, N >_t = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}).$$

Il en résulte que si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes, le crochet de M sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{Q}$ sont égaux. On dit que deux martingales continues sont orthogonales si leur crochet est nul, ou si leur produit est une martingale.

Version multidimensionnelle de la formule d'Itô.
Nous allons maintenant établir la version multidimensionnelle de la formule d'Itô. Supposons que $B_t = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^m)$ est un mouvement Brownien de dimension m. Considérons un processus de dimension n de la forme

$$X_t^1 = X_0^1 + \int_0^t u_s^{1,1} dB_s^1 + ... + \int_0^t u_s^{1,m} dB_s^m + \int_0^t v_s^1 ds$$

$$\vdots$$

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t u_s^{n,1} dB_s^1 + ... + \int_0^t u_s^{n,m} dB_s^m + \int_0^t v_s^n ds.$$

En forme différentielle on écrit

$$dX_t^i = \sum_{k=1}^m u_t^{i,k} dB_t^k + v_t^i dt$$

ou

$$dX_t = u_t dB_t + v_t dt$$

où $\{v_t, t \geq 0\}$ est un processus de dimension n et $\{u_t, t \geq 0\}$ est un processus à valeurs dans l'ensemble des matrices d'ordre $n \times m$ et on suppose que les composantes de u appartiennent à $L^2_{ad}(T)$ et celles de v appartient à $L^1_{ad}(T)$. Alors, si $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, le processus $Y_t = f(t, X_t)$ est aussi un processus d'Itô de décomposition

$$dY_t^k = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) < dX^i, dX^j >_t.$$

Comme conséquence on en déduite la formule d'intégration par partie en supposans que $\{X_t, t \geq 0\}$ $\{Y_t, t \geq 0\}$ sont des processus d'Itô

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X, Y >_t.$$

1.3 Équations différentielles stochastiques

L'équation différentielle ordinaire $\frac{dx}{dt} = b(t, x)$ peut être interprété au sens du calcul de Leibnitz-Newton par l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s, x(s))ds.$$

Lorsque cette équation est perturbé par la dérivé informelle $\dot{B}_t$ du mouvement Brownien B_t, cette équation prend la forme

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X) + \sigma(t, X)\dot{B}_t$$

Dans le calcul différentiel d'Itô $\dot{B}_t dt$ sont combinés pour former la différentielle dB_t.

Considérons un mouvement Brownien $\{B_t, t \geq 0\}$ défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons que $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une filtration telle que B_t est $\mathcal{F}_t$-adapté et pour tout $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$. Notre objectif dans cette section est de résoudre l'équation différentielle stochastique.

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

avec une condition initiale X_0, qui est une variable aléatoire indépendante du Brownien B_t.

Les coefficients $b(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ sont appelés respectivement le coefficient de dérive (drift) et le coefficient de diffusion. Elle a l'interprétation heuristique suivante : l'accroissement $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ peut être approché et décomposé en somme de $b(t, X_t)\Delta t$ plus le terme $\sigma(t, X_t)\Delta B_t$ qui représente l'impulsion aléatoire. La distribution approximative de cet accroissement sera une loi normale de moyenne $b(t, X_t)\Delta t$

et de variance $\sigma(t, X_t)^2 \Delta t$. Une formulation rigoureuse de cette équation est obtenue en réécrivant son équation intégrale en utilisant l'intégrale stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

C'est à dire la solution sera un processus d'Itô $\{X_t, t \geq 0\}$. Les solutions des EDS sont appelés processus de diffusions. La motivation originale de K. Itô pour développer la théorie de l'intégration stochastique était de construire les processus de diffusion en résolvant les équations différentielles stochastiques.

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par une solution de l'EDS.

Définition 1.3.1. *Un processus jointement mesurable (en ω et en t) $X_t, 0 \leq t \leq T$, est dit solution forte de EDS ci-dessus si X_t satisfait les conditions suivantes :*

1. *Le processus $\sigma(t, X_t)$ appartient à $L^2_{ad}(T)$, de sorte que $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ a un sens comme intégrale d'Itô pour tout $t \in [0, T]$;*
2. *Presque toute les trajectoires du processus $b(t, X_t)$ appartient à l'espace $L^1([0, T] \times \Omega)$;*
3. *Pour tout $t \in [0, T]$, X_t vérifie l'équation ci-dessus.*

Nous aurons besoin d'imposer des conditions sur les coefficients $b(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ afin d'assurer l'existence d'une unique solution non explosive de l'équation énoncée. Nous rappelons ci-dessous ces conditions.

Définition 1.3.2. *1. Une fonction borélienne $f(t, x)$ définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne en x s'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|, \forall\, 0 \leq t \leq T,\ x,\ y \in \mathbb{R}.$$

2. Une fonction borélienne $f(t, x)$ définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ est dite à croissance au plus linéaire en x s'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|f(t, x)| \leq K(1 + |x|),\ \forall\, 0 \leq t \leq T,\ x \in \mathbb{R}$$

1.3.1 Inégalité de Bellman-Gronwall

Dans cette partie, nous allons rappeler une inégalité qui sera utilisée dans la suite.

Lemme 1.3.1. *[16](Inégalité de Bellman-Gronwall). Supposons que* $\varphi \in L^1([0,T])$ *satisfait l'inégalité suivante*

$$\varphi(t) \leq f(t) + \beta \int_0^t \varphi(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

Alors

$$\varphi(t) \leq f(t) + \beta \int_0^t f(s)e^{\beta(t-s)}ds.$$

En particulier, si $f(t)$ *est une constante* α *alors*

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta(t)}, \ \forall 0 \leq t \leq T.$$

1.3.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

Soit B_t un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T$ satisfaisant les conditions habituelles et B_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t et $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ pour tout $s \leq t$. Soient $b(t,x)$ et $\sigma(t,x)$ des fonctions mesurables de $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \ X_0 = \xi,$$

qui s'interprète comme l'équation stochastique intégrale

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s, \ 0 \leq t \leq T \qquad (*)$$

Lemme 1.3.2. *[16](Unicité). Soient* $b(t,x)$ *et* $\sigma(t,x)$ *deux fonctions mesurables sur* $[0,T] \times \mathbb{R}$ *et Lipschitziennes. Supposons que* ξ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$*-mesurable tel que* $\mathbb{E}[\xi^2] < +\infty$*. Alors l'équation* $(*)$ *admet au plus une solution* X_t*.*

Théorème 1.3.1. *[16](Existence). Soient $b(t,x)$ et $\sigma(t,x)$ deux fonctions mesurables sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ et Lipschitziennes, et satisfaisant la condition de la croissance linéaire. Supposons que ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable tel que $\mathbb{E}[\xi^2] < +\infty$. Alors l'équation $(*)$ admet une unique solution continue X_t.*

Remarque 1.3.1. *Ce résultat reste vrai en dimension supérieure, lorsque B_t est un mouvement Brownien de dimension d, le processus X_t est de dimension n, et les coefficients sont des fonctions*

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}.$$

Dans la pratique, ce théorème est parfois insuffisant. On peut énoncer un théorème sur $\mathbb{R}$:

Théorème 1.3.2. *[16] Soit ρ une fonction borélienne de $]0,+\infty[$ dans lui-même telle que l'intégrale de ρ^{-1} au voisinage de 0 diverge. Si*

$$|\sigma(s,y) - \sigma(s,x)|^2 \leq \rho(|y-x|)$$

et b est lipschitzienne, soit

$$|b(s,y) - b(s,x)| \leq K_t|y-x|$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $s \leq t$, il existe une unique solution de $(*)$.

On trouvera dans Revuz-Yor (chapitre 9, paragraphe 3) d'autres résultats.

Lemme 1.3.3. *[16] Soit b une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, localement bornée telle que pour tout $t > 0$, $x \longrightarrow b(t,x)$ est dérivale et $b_x(t,x) \leq C$ $\forall t > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors l'EDS :*

$$Y_t = Y_0 + B_t + \int_0^t b(s,Y_s)ds$$

possède la propriété d'unicité trajectorielle.

Lemme 1.3.4. *[16] Supposons que σ est localement lipschitzienne et vérifie la condition de croissance linéaire :*

$$|\sigma(t,x)|^2 \leq K(1+|x|^2)$$

Alors l'EDS : $X_t = \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$ *possède la propriété d'existence et d'unicité de la solution forte.*

Théorème 1.3.3. *[16](Théorème de comparaison). Soient*

$$dX_i(t) = b_i(X_i(t))dt + \sigma(X_i(t))dB_t \text{ pour } i = 1,2$$

où b_i *est lipschitzienne et* $|\sigma(x)-\sigma(y)|^2 \leq K|x-y|$. *Supposons que* $X_1(0) \leq X_2(0)$ *et* $b_1(x) \leq b_2(x)$. *Alors* $X_1(t) \leq X_2(t)$.

1.3.3 Flot stochastique

Propriétés élémentaires du flot

On va travailler ici avec des conditions initiales déterministes ce qui permet de prendre comme filtration la filtration naturelle du mouvement Brownien $\{\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$. On suppose que les fonctions b et σ vérifient les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité. D'après le résultat précédent, on peut construire pour tout $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, la solution de l'EDS

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})dB_r,\ t \leq s \leq T$$

et l'on conviendra que $X_s^{t,x} = x$ si $0 \leq s \leq t$. Dans le cas déterministe i.e. $\sigma = 0$, le flot de l'équation différentielle, noté $\phi_s^{t,x}$ dans ce cas, possède de nombreuses propriétés ; en particulier :

1. $\phi_s^{t,x}$ est Lipschitz en (t,s,x) ;
2. pour $t \leq r \leq s$, $\phi_s^{t,x} = \phi_s^{t,\phi_r^{t,x}}$

Dans le cas stochastique $X_s^{t,x}$ possède aussi des proprétés du même type. Dans ce qui suit nous étudierons la continuité des trajectoires $(t,s,x) \longmapsto X_s^{t,x}$.

Continuité du flot

Pour démontrer les propriétés de continuité du flot, nous allons utiliser le critère de Kolmogorov. Pour cela, nous devant établir des estimations sur les moments de $X_s^{t,x}$. Les démonstrations sont un peu technique mais ne sont pas difficiles : il s'agit souvent d'utiliser les inégalités de Hölder, de Burkholder-Davis-Gundy et le lemme de Bellman-Gronwall.

Proposition 1.3.1. *[16] Soit $p \geq 1$. Il existe une constante C, dépendant de T et p, telle que :*

$$\forall s \in [0,T],\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^{t,x}|^p\right] \leq C(1+\|x\|^p)$$

Nous savons à présent que la solution de l'EDS a des moments de tout ordre ; nous montrons une estimation du même type pour les moments des accroissements de X.

Proposition 1.3.2. *[16] Soit $p \geq 2$. Il existe une constante C telle que, pour tout (t,x), (t',x') appartenant à $[0,T] \times \mathbb{R}^n$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^{t,x} - X_s^{t',x'}|^p\right] \leq C\left(|x -' x|^p + |t-t'|^{\frac{p}{2}}(1+|x'|^p)\right)$$

Corollaire 1.3.1. *Il existe une modification du processus X telle que l'application de $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathcal{C}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, $(s,x) \longmapsto (t \longmapsto X_s^{t,x})$ soit continue. En particulier, $(t,s,x) \longmapsto X_s^{t,x}$ est continue.*

Démonstration. C'est une application directe de l'estimation précédente valable pour tout $p \geq 2$ et du critère de Kolmogorov. □

Nous terminons ce paragraphe en précisant la régularité du flot généré par l'EDS.

Proposition 1.3.3. *[16] Soit $p \geq 2$, il existe une constante C telle que, pour tout (t,s,x), (t',s',x'),*

$$\mathbb{E}|X_s^{t,x} - X_{s'}^{t',x'}| \leq C\left(|x-x'|^p + (1+|x'|^p)\left(|s'-s|^{\frac{p}{2}} + |t'-t|^{\frac{p}{2}}\right)\right)$$

En particulier, les trajectoires $(t, s, x) \longmapsto X_s^{t,x}$ *sont hölderiennes (localement en* x*) de paramètre* β *en* s*,* α *en* x *et* γ *en* t *pour tout* $\beta, \gamma \leq \frac{1}{2}$ *et* $\alpha < 1$*.*

Corollaire 1.3.2. *[16](Estimation des moment d'ordre p). Supposons que* b, σ *et* X_0 *satisfait les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité, si de plus,* $\mathbb{E}[|X_0|^{2p}] < +\infty$ *pour un certain* $p > 1$*, alors la solution* X *de l'EDS*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \text{ et } X_0 = \xi$$

satisfait

1. $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^{2p}\right] \leq C_2\left(1 + \mathbb{E}[|X_0|^{2p}]\right) e^{C_1 T}$

2. $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - X_0|^{2p}\right] \leq C_2\left(1 + \mathbb{E}[|X_0|^{2p}]\right) T^p e^{C_1 T}$

pour certaines constantes C_1 *et* C_2*, dépendantes de* T*.*

Chapitre 2

Modélisation du risque de crédit

Le risque de crédit au sens classique désigne le risque qu'un particulier ou une entreprise ne rembourse pas sa dette à l'échéance. Du point de vue de Mathématiques financières, cette expression peut porter un sens plus large. Elle peut désigner le risque de défaut d'une entreprise, le risque de contagion dans une crise financière, ou le risque lié à un changement brutal de la valeur d'un portefeuille d'actifs, conséquence d'un événement qui n'est pas nécessairement issu de l'activité de transactions financières (comme transition de catégorie dans une note de crédit, catastrophe naturelle, fraude,...). Un point commun de ces risques est que les flux de prix des produits financiers avant l'événement de contrepartie ne donnent pas toutes les informations du risque de crédit. Il y a deux approches importantes dans la littérature classique : modèles structurels et ceux de forme réduite. Dans l'approche structurelle initialement due à Merton [3] et généralisée par Black et Cox [6], le temps de défaut est modélisé comme le premier passage d'un processus stochastique par une barrière. Le processus peut être la valeur d'un actif, le flux de cash d'une entreprise. La barrière est une constante dans [3, 6]. On peut étendre ce modèle au cas où la barrière est une variable aléatoire, faisant un lien avec l'approche de forme réduite, où on décrit le temps de défaut comme un temps de saut d'un processus ponctuel qui modélise directement les quantités figurant dans la formule d'évaluation des produits financiers liés au risque de crédit, comme notamment le processus d'intensité. Cette approche est plus utilisée en pratique car elle est plus facilement adaptée aux données réelles du marché.

Dans la littérature concernant ces deux approches de modélisation, beaucoup de travaux portent sur les études "avant-défaut", c'est-à-dire conditionnées aux événements où le défaut n'a pas eu lieu. Cependant, dans l'étude des risques de contrepartie et de contagion et dans la modélisation des risques liés aux plusieurs agents défautables, il est essentiel d'analyser l'impact, éventuellement de long-terme, du défaut d'un agent sur le reste du marché. Les approches classiques ne sont pas adéquates pour ces problèmes car elles imposent des contraintes restrictives sur ce qui se passe après un événement de défaut. Dans une série de travaux en collaboration avec N. El karoui et M. Jeanblan [20], les auteurs ont proposé une nouvelle approche de modélisation basée sur la distribution conditionnelle du temps de défaut τ par rapport à une filtration de référence $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui représente les informations du marché qui ne sont pas directement liées à l'événement de défaut. L'approche de densité s'adapte naturellement dans le cadre de la théorie de grossissement progressif de filtrations en mettant l'accent sur l'ensemble "après-défaut".

2.1 Zoologie des risques

On distingue traditionnellement quatre grands types de risques financiers :

Le risque de marché

Le risque de marché peut se définir comme le risque de perte lié aux variations des conditions de marché (prix, taux de change, volatilité,...)

Le risque de liquidité

Il s'agit, pour une entreprise, du risque de ne pas pouvoir mobiliser à un instant donné assez de liquidités pour pouvoir faire face à ses engagements. Voir [31] pour un supplément d'informations.

Le risque opérationnel

Dans cette catégorie sont regroupés, par exemple, les risques de fraude, l'erreurs des opérateurs, de pannes des systèmes, etc... Pour plus de détails, voir [31].

Le risque de crédit

Le risque de crédit est défini comme le risque de perte lié à l'évolution de la qualité de la signature d'un émetteur. On peut distinguer deux types de risque de crédit : le risque de contrepartie et le risque de référence. Pour un émetteur donné, ce risque peut se matérialiser sous la forme :

1. Du changement de sa note (upgrade ou downgrade) telle celle émise par les grandes agences de notations Moody's, Standard et Poor's.
2. D'une variation de son spread de crédit.
3. D'un événement de crédit (*credit event*) tel le défaut de paiement ou la restructuration de sa dette.

Ces trois risques sont, bien évidemment, corrélés. Une augmentation brutale du niveau du spread émetteur augmente la probabilité d'un événement de crédit. De la même manière, un changement de notation influe fortement sur la probabilité du défaut d'un émetteur.

Lorsque A entre en relation avec une contrepartie B via un instrument financier, il peut être soumis au risque que B soit dans l'impossibilité d'honorer ses engagements. Par exemple, si A est en possession d'une obligation émise par B, il court le risque qu'à une maturité B ne puisse lui rembourser le capital investi. On parle dans ce cas de *risque de contrepartie unilatéral* puisque B n'est pas soumis au risque de crédit de A. Si A et B sont les deux contreparties d'un swap, ils sont tous deux soumis au risque de contrepartie : on parle alors de *risque de contrepartie bilatéral*.

Supposons maintenant que la qualité de la signature des contreparties A et B soit de qualité infinie (de sorte que le risque de contrepartie bilatéral soit nul). Les parties A et B peuvent entrer dans un contrat qui fait intervenir le risque de crédit d'une troisième contrepartie C (un *credit swap* dont le payoff dépend de l'occurrence d'un événement de crédit est un exemple de tel contrat). Le risque de crédit associé à C

est appelé *risque de référence*. Nous verrons que le but des produits dérivés de crédit est le transfert de ce risque de référence.

La distinction entre ces risques n'est pas toujours aisée : le risque de crédit lié à la variation des spread de crédit default swap peut être considéré comme un risque de marché.

2.2 Enjeux

Le risque de crédit peut être défini, en première approximation, comme le risque perte lié au changement de la qualité de la signature d'une contrepartie. Toutes les institutions financières (ainsi que tous les auteurs du marché) accumulent une grande quantité de risque de crédit : soit directement par l'intermédiaire de leurs portefeuilles de créances, soit indirectement sous la forme de risques de contrepartie dans leurs portefeuilles d'actifs et de produits dérivés.

L'enjeu que représente la modélisation de ce risque est donc très important : il s'agit de pouvoir :

1. Mesurer le risque de crédit contenu dans les portefeuilles.

2. Évaluer les instruments financiers sensibles au risque de crédit, et plus généralement, tout instrument exposé à ce risque (risque de contrepartie).

La production de résultats quantitatifs robustes permet alors à l'institution concernée :

- D'alouer à chaque centre de profit un capital économique adéquat.
- D'évaluer la performance des centres de profit au regard des risques pris.
- De fournir des informations fiables sur son intégrité financière aux régulateurs, aux investisseurs et aux agences de notation.
- De diversifier et réduire le risque en imposant, par exemple, des limites à l'exposition au risque de crédit par contrepartie.

2.3 Modèles du risque de crédit

Nous nous plaçons dans le cadre de l'évaluation risque-neutre des actifs financiers : nous supposons donnés un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini le processus des taux d'intérêt instantanés $(r_t)_{t\geq 0}$ et une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$. Rappelons qu'alors la valeur des actifs contingents [1] est calculée comme l'espérance sous cette probabilité de ses flux futurs actualisés au taux sans risque. Une obligation zéro-coupon (sans risque) est un actif qui paye 1 à sa maturité T. La valeur $B(t,T)$ de cet actif est

$$B(t,T) = \mathbb{E}_t^* \left[\exp \left(-\int_t^T r(s)ds \right) \right].$$

Si le risque de contrepartie de l'émetteur du zéro-coupon n'est pas nul, l'évaluation du zéro-coupon doit tenir compte de la possibilité du défaut de celui-ci : deux nouveaux risques entrent en jeu :
– L'instant de défaut.
– La perte en cas de défaut (*Loss Given Default*).

Modèles structurels

L'approche structurelle de l'évaluation de la dette risquée a été initiée par Merton (1974) [31] et est basée sur la modélisation de l'évolution du bilan de l'entreprise. Dans ce cadre, le défaut intervient si l'émetteur de la dette est dans l'impossibilité d'honorer ses engagements et les zéro-coupons risqués apparaissent comme des produits dérivés sur la valeur de l'entreprise émettrice de cette dette. La qualité d'une signature est alors fonction de trois variables fondamentales : sa valeur, la variabilité de ses actifs [2] et son levier d'endettement (qui est le rapport entre le niveau de sa dette et sa valeur totale).

1. c'est-à-dire dont la valeur est contingente à l'évolution des conditions de marché.
2. Par exemple, cette volatilité est plus forte pour une entreprise travaillant dans le secteur des nouvelles technologies que pour une entreprise des secteurs traditionnels.

Les modèles structurels sont largement utilisés par les praticiens. Pour s'en convaincre, il suffit de mentionner l'entreprise Moody's KMV [3] qui a développé une offre complète de services financiers basés sur un tel modèle. Ainsi, ils proposent à leurs clients des outils d'analyse et leur fournissent des données (telles des estimations de probabilité de défaut) obtenues à partir de leur modèle [17].

Modèles à forme réduite

Dans ces modèles dit à *forme réduite*, et contrairement aux modèles structurels, le défaut est considéré comme un événement imprévisible dont la loi est gouvernée par un processus stochastique appelé *intensité d'arrivée* ou *taux de hasard*. L'exemple le plus simple d'un tel modèle est celui où l'instant de défaut τ est défini comme le premier instant d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité λ (autrement dit, τ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$). Dans ce cas, on a

$$\mathbb{P}[\tau > t] = e^{-\lambda t}, \quad \mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{P}[\tau \in (t, t + \Delta t) | \tau > t] = \lambda \Delta t + \circ(\Delta t)$$

En pratique, cette intensité de défaut est liée à un certain nombre de variables économiques (tels les taux d'intérêt) et/ou de variables liées à l'entreprise (telle sa notation). Noter que ces modèles sont couramment utilisés pour l'évaluation des produits dérivés de crédit.

Défauts corrélés

L'évaluation des produits dérivés de crédit exotiques (Par opposition aux produits vanilla que sont les Credit Default Swap) tels les CDO (Collateralized Debt Obligations) et les TDP (Tranche Default Product) nécessitent la modélisation de la structure de dépendance qui existe entre les instants de défaut $(\tau_1, ..., \tau_N)$ de N entreprises.

Il existe, pour l'essentiel, deux manières de modéliser cette dépendance :

– En choisissant une structure de co-dépendance pour les rendements instantanés des processus de valeur des entreprises.

3. www.moodyskmv.com

– En spécifiant la corrélation entre les intensités des instants de défaut.

Modèles hybrides

L'évaluation du risque de contrepartie ou celle de produits mixtes [4] nécessite la mise en place de modèles prenant en compte l'évolution jointe de différents facteurs de risque : les taux d'intérêt, les taux de change, les cours des actions, l'intensité de défaut des entreprises.

2.4 La modélisation dans le cas d'un seul défaut

On considère dans ce paragraphe le problème de modélisation d'un marché financier qui contient le risque de défaut d'un actif. Dans ce cadre, on peut déjà observer les idées importantes dans notre approche de modélisation et ses liens avec les modèles classiques. Intuitivement, l'information du défaut de l'actif peut conduire à des modifications brutales des valeurs des produits financiers dans le marché, et donc l'étude de la filtration du marché est souvent plus compliquée que celle dans les problèmes classiques.

Soient $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet qui modélise le marché financier et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration qui décrit les informations générales du marché qui ne sont pas directement liées à l'événement de défaut. On suppose que la filtration $\mathbb{F}$ satisfait aux conditions habituelles (continue à droite et complète). Dans la pratique, la filtration $\mathbb{F}$ est souvent supposée être engendrée par un mouvement brownien ou un processus de Lévy (éventuellement multi-dimensionnels). On désigne par τ le temps de défaut de l'actif, qui est une variable aléatoire strictement positive. L'observation à l'instant t de défaut ou non de l'actif est modélisée par la tribu $\sigma(\tau \wedge t)$. On désigne par $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ la filtration $(\sigma(\tau \wedge t))_{t\geq 0}$ rendue usuelle. L'information du marché est alors modélisée par la filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, le grossissement progressif de $\mathbb{F}$ par $\mathbb{D}$. En d'autres termes, on a $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t$ pour tout $t \geq 0$. Il s'avère que, une fois connaître la distribution conditionnelle du temps de défaut par rapport à la filtration $\mathbb{F}$ (qui est un processus en mesures aléatoires), l'évaluation des produits

4. c'est-à-dire dont la valeur dépend de plusieurs facteurs de risque.

financiers ne repose que sur le calcul stochastique par rapport à la filtration $\mathbb{F}$. Cette méthode nous donne des souplesses à appliquer des divers outils de mathématiques financières (optimisation, représentation des martingales, etc). Les études classiques sont principalement effectuées sur l'ensemble "avant-défaut" $\{t < \tau\}$, on s'intéresse également à celui "après-défaut" $\{t \geq \tau\}$.

La théorie de grossissement de filtrations donne des liens explicites entre les processus $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$-adaptés (resp. prévisibles). En effet, tout processus $\mathbb{G}$-adapté X s'écrit sous la forme

$$X_t = X_t^0 \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + X_t^1(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}, \quad t \geq 0$$

où X^0 est un processus $\mathbb{F}$-adapté et $X^1(\cdot)$ est un processus $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-adapté, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ étant la tribu borélienne de $\mathbb{R}^+$. De façon similaire, tout processus $\mathbb{G}$-prévisible Y s'écris sous la forme

$$Y_t = Y_t^0 \mathbb{1}_{\{\tau \geq t\}} + Y_t^1(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau < t\}}, \quad t \geq 0$$

où Y^0 est un processus $\mathbb{F}$-prévisible et $Y^1(\cdot)$ est une fonction $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-mesurable, $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ étant la tribu prévisible de la filtration $\mathbb{F}$.

On étudie d'abord les lois conditionnelles de défaut par rapport aux différentes filtrations. Pour tout $t \geq 0$, on désigne par $\mu_t^{\mathbb{G}}$ la loi conditionnelle de τ par rapport à la tribu $\mathcal{G}_t$. C'est une $\mathcal{G}_t$-mesure aléatoire. Par définition, l'intégrale d'une fonction borélienne bornée ou positive f par rapport à $\mu_t^{\mathbb{G}}$ est l'espérance conditionnelle de $f(\tau)$ par rapport à la filtration $\mathcal{G}_t$. En outre, la famille de variables aléatoires $(\int f \, d\mu_t^{\mathbb{G}})_{t \geq 0}$ définit une $\mathbb{G}$-martingale. On peut ainsi considérer $(\mu_t^{\mathbb{G}})_{t \geq 0}$ comme une $\mathbb{G}$-martingale en mesure aléatoires. De façon similaire, on désigne par $\mu_t^{\mathbb{F}}$ la loi conditionnelle de τ par rapport à $\mathcal{F}_t$. On peut établir un lien explicite entre les mesures aléatoires (sur $\mathbb{R}_+$) $\mu_t^{\mathbb{G}}$ et $\mu_t^{\mathbb{F}}$:

$$\mu_t^{\mathbb{G}}(du) = \frac{\mu_t^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \cdot du)}{\mu_t^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}})} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} \, \delta_\tau(du)$$

où δ_τ est la mesure de Dirac en τ.

Pour calculer les espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{G}_t$, il est utile d'étendre $\mu_t^{\mathbb{F}}$ en une $\mathcal{F}_t$-mesure aléatoire sur l'espace mesurable $(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ qui envoie toute fonction positive $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable $Z_t(\cdot)$ en

$$\int_{\mathbb{R}_+} Z_t(x)\mu_t^{\mathbb{F}}(dx) = \mathbb{E}[Z_t(\tau)|\mathcal{F}_t]$$

Par abus de langage, on utilise encore l'expression $\mu_t^{\mathbb{F}}$ pour désigner la mesure aléatoire étendue. En outre, si $Y_t(\cdot)$ est une fonction $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$ qui est positive ou bornée, on désigne par $\mu_t^{\mathbb{F}}(Y_t(x)\cdot dx)$ la mesure aléatoire telle que

$$\int_{\mathbb{R}_+} Z_t(x)\mu_t^{\mathbb{F}}(Y_t(x)\cdot dx) := \int_{\mathbb{R}_+} Z_t(x)Y_t\mu_t^{\mathbb{F}}(dx)$$

Avec ces notations, nous avons établi le résultat suivant.

Théorème 2.4.1. *[31] Soit $T>0$ un nombre réel qui désigne la maturité. Pour toute fonction $\mathcal{F}_T\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable $Y_T(\cdot)$ qui est positive ou bornée, on a* [5]

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t] = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathbb{E}[\mu_T^{\mathbb{F}}(Y_T(x)\cdot dx)|\mathcal{F}_t]}{\mu_t^{\mathbb{F}}(dx)} d\mu_t^{\mathbb{G}}$$

où le quotient désigne la dérivée au sens de Radon-Nikodym de deux $\mathcal{F}_t$-mesures aléatoires sur l'espace mesurable $(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$.

Ce résultat montre que, pour évaluer les prix des produits dérivés sensibles au risque de contrepartie en τ, il suffit de modéliser la loi conditionnelle du temps aléatoire par rapport à la filtration $\mathbb{F}$, qui est en général plus simple que celle par rapport à la filtration $\mathbb{G}$. Dans les sous-paragraphes qui suivent, on présente les rôles joués par ce théorème dans différents contextes, ainsi que la comparaison avec des approches classiques.

5. Ici on a aussi étendu $\mu_t^{\mathbb{G}}$ en une mesure aléatoire sur $(\Omega\times\mathbb{R}_+,\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ de façon naturelle, comme ce que l'on avait fait pour $\mu_t^{\mathbb{F}}$.

Hypothèse de densité

Dans la littérature classique, il est standard de ramener l'étude du $\mathbb{G}$-compensateur du processus de défaut $(\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}})_{t\geq 0}$ à la décomposition Doob-Meyer de la $\mathbb{F}$-surmartingale de survie $(\mathbb{P}(\tau > t\,|\mathcal{F}_t))_{t\geq 0}$. Basée sur cette idée, la modélisation de la $\mathbb{F}$-intensité de défaut est fréquente dans l'étude du risque de crédit, et est particulièrement commode lorsque le produit dérivé considéré s'arrête à l'instant de défaut τ. Rappelons que la $\mathbb{G}$-intensité de τ est par définition le processus $\mathbb{G}$-adapté $\lambda^{\mathbb{G}}$ tel que $(\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}-\int_0^t \lambda_s^{\mathbb{G}}ds,\ t\geq 0)$ soit une $\mathbb{G}$-martingale. On peut montrer que, si la $\mathbb{G}$-intensité existe, alors il existe un processus $\mathbb{F}$-adapté $\lambda^{\mathbb{F}}$ tel que $\lambda_t^{\mathbb{G}} = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\lambda_t^{\mathbb{F}}$. le processus $\lambda^{\mathbb{F}}$ est appelé la *$\mathbb{F}$-intensité* de τ. Cependant, la $\mathbb{F}$-intensité donne peu d'information sur les impacts de l'événement de défaut sur la filtration $\mathbb{F}$ après le temps de défaut, sauf si certaines hypothèses d'indépendance conditionnelle sont exigées. Ainsi ce genre de modèles ne sont pas suffisants pour étudier les produits dérivés qui continuent à exister après le moment de défaut.

On suppose que le temps de défaut τ vérifie *l'hypothèse de densité*, c'est-à-dire que la loi conditionnelle de τ par rapport à $\mathcal{F}_t$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Auntrement dit, il existe une famille de fonctions $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables $(\omega,\theta)\longmapsto \alpha_t(\theta)$ telles que

$$\mathbb{P}(\tau\in d\theta|\,\mathcal{F}_t) = \alpha_t(\theta)d\theta, \quad t\geq 0$$

On peut distinguer les densités conditionnelles pour $t\leq\theta$, dites "avant-défaut" et celles pour $t>\theta$, dites "après-défaut". En effet, il existe un lien étroit entre la densité avant-défaut et la $\mathbb{F}$-intensité, tandis que la densité après-défaut joue un rôle particulièrement important sur l'étude du marché après l'événement de défaut.

L'existence de $\mathbb{F}$-intensité est vérifiée sous l'hypothèse de densité, et dans ce cas-là la $\mathbb{F}$-intensité peut être calculée explicitement comme

$$\lambda_t^{\mathbb{F}} = \frac{\alpha_t(t)}{S_t} = \frac{\alpha_t(t)}{\int_t^\infty \alpha_t(\theta)d\theta}$$

où S est la surmartingale d'Azéma $(S_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t))_{t\geq 0}$. En particulier, l'intensité ne dépend que de la partie avant-défaut des densités conditionnelles. Inversement, pour tout $\theta \geq t$, la densité conditionnelle avant-défaut est donnée par la relation $\alpha_t(\theta) = \mathbb{E}[\lambda_\theta^{\mathbb{G}}|\mathcal{F}_t]$. Cependant, la densité après-défaut ne peut pas être déduite de l'intensité sans hypothèse complémentaire.

Sous l'hypothèse de densité, la mesure aléatoire μ_t^F s'écrit comme $\mu_t^F(dx) = \alpha_t(x)dx$. En particulier, l'espérance conditionnelle énoncée au théorème précédant admet une forme explicite comme la suite.

Proposition 2.4.1. *[31] Sous l'hypothèse de densité, pour toute fonction $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable $Y_T(\cdot)$ qui est positive ou bornée, on a*

$$\mathbb{E}[Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t] = \frac{\int_t^\infty \mathbb{E}[Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t]d\theta}{S_t}\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} + \frac{\mathbb{E}[Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t]}{\alpha_t(\theta)}|_{\theta=\tau}\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$$

où S_t est la probabilité conditionnelle de survie $\mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$.

La surmartingale S admet une décomposition de Doob-Meyer multiplicative de la forme $S_t = \exp(-\int_0^t \lambda_s^{\mathbb{F}} ds)L_t$ où L est une $\mathbb{F}$-martingale locale. Sous l'hypothèse d'immersion (appelée aussi l'hypithèse (H) dans littérature) qui assume que toute $\mathbb{F}$-martingale est une $\mathbb{G}$-martingale, le processus S est décroissant, et donc on a $L = 1$. L'hypothèse d'immersion implique aussi que $\alpha_t(\theta) = \alpha_\theta(\theta)$ pour tout $t \geq \theta$. En particulier, on a

$$\mathbb{E}[Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t]\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} = \mathbb{E}[Y_T(\theta)|\mathcal{F}_t]|_{\theta=\tau}\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$$

Cette formule sur l'ensemble $\{\tau \leq t\}$ ignore complètement la loi conditionnelle de τ. Ainsi, l'hypothèse d'immersion, qui est souvent supposée dans les études avant-défaut, devient inadéquate pour analyser l'impact d'un défaut sur un produit dérivé qui continue à exister après le défaut.

Caractérisation des martingales

En mathématiques financières, les propriétés de martingale jouent un rôle essentiel pour l'évaluation des produits dérivés et la couverture. Dans ce sous-paragraphe, on discute la caractérisation des $\mathbb{G}$-martingales en terme des $\mathbb{F}$-martingales.

Soit Y une $\mathbb{G}$-martingale qui se décompose sous la forme

$$Y_t = Y_t^0 \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} + Y_t^1(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$$

Comme τ est un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt, on peut écrire Y comme la somme de deux martingales dont l'une est arrêtée en τ et l'autre commence en τ :

$$Y_t = Y_{t\wedge t} + (Y_t - Y_\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} = Y_t^{bd} + Y_t^{ad}$$

où $Y_t^{bd} = Y_t^0 \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} + Y_\tau^1(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$ et $Y_t^{ad} = (Y_t^1(\tau) - Y_\tau^1(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$. Inversement, étant donnés deux processus Y^0 et $Y^1(\cdot)$ qui sont $\mathbb{F}$-adapté respectivement, il est naturel de se demander sous quelles conditions les processus Y^{bd} et Y^{ad} deviennent des $\mathbb{G}$-martingales (ou de façon équivalente, le processus Y devient une $\mathbb{G}$-martingale). On a établit le résultat suivant.

Théorème 2.4.2. *[31] Soient Y^0 et $Y^1(\cdot)$ deux processus qui sont $\mathbb{F}$-adapté et $\mathbb{F}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-adapté respectivement.*

1. *Le processus $\mathbb{G}$-adapté Y^{bd} est une $\mathbb{G}$-martingale (locale) si et seulement si le processus $\mathbb{F}$-adapté $(Y_t^0 S_t + \int_0^t Y_s^1(s)\alpha_s(s)ds)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}$-martingale (locale), ou de façon équivalente, le processus $(L_t(Y_t^0 + \int_0^t (Y_s^1(s) - Y_s^0)\lambda_s^{\mathbb{F}} ds))_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}$-martingale (locale).*
2. *Le processus $\mathbb{G}$-adapté Y^{ad} est une $\mathbb{G}$-martingale (locale) si et seulement si, pour tout $\theta \geq 0$, le processus $\mathbb{F}$-adapté $(Y_t^1(\theta)\alpha_t(\theta))_{t\geq\theta}$ est une $\mathbb{F}$-martingale (locale).*

Un des éléments importants de la démonstration est de montrer que, sous l'hypothèse de densité, toute $\mathbb{F}$-martingale est une $\mathbb{G}$-semimartingale. C'est un analogue d'un résultat classique de Jacod [23] en théorie de grossissement initial de filtrations. En outre, toute $\mathbb{F}$-martingale $Y^{\mathbb{F}}$ (qui est une $\mathbb{G}$-semimartingale) se décompose sous la forme $Y^{\mathbb{F}} = M^{\mathbb{G}} + A^{\mathbb{G}}$, où $M^{\mathbb{G}}$ est une $\mathbb{G}$-martingale et $A^{\mathbb{G}}$ est un processus $\mathbb{G}$-adapté de variation finie. On peut exprimer explicitement le processus $(A_t^{\mathbb{G}} = A_t \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} + A_t(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}})_{t\geq 0}$ comme

$$A_t = \int_0^t \frac{d\langle Y^{\mathbb{F}}, S\rangle_u}{S_u}, \quad A_t(\theta) = A_\theta + \int_0^t \frac{d\langle Y^{\mathbb{F}}, \alpha(\theta)\rangle_u}{\alpha_u(\theta)}$$

Ces formules sont utiles dans la démonstration du théorème précédent.

Changement de probabilités

On discute maintenant le problème de changement de probabilités sous l'hypothèse de densité. Comme dans le sous-paragraphe précédent, on suppose que τ admet une famille de densités conditionnelles $(\alpha_t(\cdot))_{t\geq 0}$ par rapport à la filtration $\mathbb{F}$ sous la probabilité $\mathbb{P}$. Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ dont la dérivée de Radon-Nikodym par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{G}_t$ est donnée par une variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable $Q_t^{\mathbb{G}} = q_t \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} + q_t(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$. Le processus $Q^{\mathbb{G}}$ est une $\mathbb{G}$-martingale avec $\mathbb{Q}_0^{\mathbb{G}} = 1$. D'après le théorème précédent, on obtient que le processus $(q_tS_t + \int_0^t q_s(s)\alpha_s(s)ds)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}$-martingale et que $(Y_t(\theta)\alpha_t(\theta))_{t\geq\theta}$ est une $\mathbb{F}$-martingale pour tout $\theta \geq 0$.

L'hypothèse de densité pour le temps aléatoire τ est encore vérifiée sous la nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$. La densité $\alpha^{\mathbb{Q}}$ de τ conditionnellement à la filtration $\mathbb{F}$ est donnée par les formules suivantes

$$\alpha_t^{\mathbb{Q}}(\theta) = \alpha_t(\theta)\frac{q_t(\theta)}{Q_t^{\mathbb{F}}}, \quad t \geq \theta$$

$$\alpha_t^{\mathbb{Q}}(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\alpha_\theta^{\mathbb{Q}}(\theta)|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{Q_t^{\mathbb{F}}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\alpha_\theta(\theta)q_\theta(\theta)], \quad t < \theta$$

où $Q_t^{\mathbb{F}}$ est l'espérance conditionnelle de $Q_t^{\mathbb{G}}$ par rapport à $\mathcal{F}_t$:

$$Q_t^{\mathbb{F}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Q_t^{\mathbb{G}}|\mathcal{F}_t] = q_tS_t + \int_0^t q_t(u)\alpha_t(u)du$$

La $\mathbb{F}$-intensité de défaut sous la probabilité $\mathbb{Q}$ est

$$\lambda_t^{\mathbb{F},\mathbb{Q}} = \lambda_t^{\mathbb{F}}\frac{q_t(t)}{q_t}, \quad t \geq 0$$

et la surmartingale d'Azéma de survie devient $S^{\mathbb{Q}} = qS/Q^{\mathbb{F}}$.

Le changement de probabilités est un outil important dans la modélisation de la densité conditionnelle. Avec cette méthode, on peut systématiquement proposer des modèles de $\mathbb{F}$-densité conditionnelle à partir d'un modèle qui est relativement simple.

On peut commencer par un modèle standard d'intensité (le modèle de Cox) où l'hypothèse d'immersion est satisfaite sous la probabilité initiale $\mathbb{P}$. On cherche à construire une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ et qui coincide avec $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{G}_\tau$. Ce changement de probabilités ne modifie pas la partie avant-défaut du modèle : la $\mathbb{F}$-intensité $\lambda^{\mathbb{F}}$ ainsi que la densité avant-défaut $\alpha_t(\theta)$, $t \leq \theta$ restent inchangées. Cela est possible en prenant la dérivée de Radon-Nikodym de la forme

$$Q_t^{\mathbb{G}} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + q_t(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$$

où $(q_t(\theta), t \geq \theta)$ est une famille de $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingales positives telles que $q_\theta(\theta) = 1$ pour tout $\theta \geq 0$. Par ailleurs, les processus $(S_t/S_t^{\mathbb{Q}}, t \geq 0)$ et $(\alpha_t^{\mathbb{Q}}(\theta)S_t/S_t^{\mathbb{Q}}, t \geq \theta)$ sont des $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingales. En revanche, la propriété d'immersion n'est plus nécessairement conservée sous la nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$.

Chapitre 3

The Application of Kolmogorov's theorem in the one-default model

Ce chapitre fait l'objet d'une publication dans Mathematical Sciences and Applications E-Notes.

The Application of Kolmogorov's theorem in the one-default model

Fatima Benziadi [1] and Abdeldjebbar Kandouci [2]

[1,2] The Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, Tahar Moulay University PO.Box 138 En-Nasr, 20000 Saida, Algeria

Abstract

The problem of modeling a default time is well represented in the literature. There are two main approaches : either the default time τ is a stopping time in the asset's filtration or it is a stopping time in a larger filtration (see Coper and Martin 1996 for a comparison between these approaches). In the first approach, the so-called structural form pioneered by Merton (1974), the default time τ is a stopping time in the filtration of the prices. In the second case, the idea is also to compute the value of the defaultable claim, and it is fruitful to introduce the notion of intensity of the default. The intensity of the default time acts as a change of the spot interest rate in the pricing formula. In this work, we consider the so-called $\natural$-model. It is a one-default model which gives the conditional law of a random time with respect to a reference filtration. In this paper, we work on a stochastic differential equation (called equation ($\natural$) below) ; this equation plays an essential role in this article, but its application has been submitted to a hypothesis of continuity. Then it is important to know under what conditions the hypothesis of continuity is satisfied. This is the main motivation of our research.

Keywords *:* Progressive enlargement of filtration ; Semimartingale decomposition ; Multiplicative decomposition ; Credit risk.

3.1 Introduction

We consider one-default model, i.e. the data of a random time τ combined with a filtration $\mathbb{F}$ under a probability measure $\mathbb{Q}$. The one-default models are widely applied in modeling financial risk and in price valuation of financial products such as Credit default swap. The usefulness of a one-default model depends upon the way the conditional laws of τ can be computed with respect to the filtration $\mathbb{F}$. The most used examples of random times, therefore, are the independent time, the Cox time, the honest time, the pseudo stopping time, the initial time, etc (for example,[4, 17, 27]). In the paper [24] a new class of random times has been introduced. Precisely, on the filtered probability space $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, it is proved that, for any continuous increasing process Λ null at the origin, for any continuous non-negative local martingale N such that $0 < N_t e^{-\Lambda_t} < 1, t > 0$, for any continuous local martingale Y, for any Lipschitz function f on $\mathbb{R}$ null at the origin, there exists a random variable τ such that the family of conditional expectations $X_t^u = \mathbb{Q}[\tau \leq |\mathcal{F}_t]$, $u > 0$, $t < \infty$, satisfy the following stochastic differential equation :

$$(\natural_u) : \begin{cases} dX_t = X_t \left(-\dfrac{e^{-\Lambda_t}}{1 - Z_t} dN_t + f(X_t - (1 - Z_t))dY_t \right), & t \in [u, \infty) \\ X_u = x \end{cases}$$

We call this setting a $\natural$-model, where the initial condition x can be any $\mathcal{F}_u$-mesurable random variable.

There are two remarkable properties about the $\natural$-model. It is the only one in which the conditional laws of τ with respect to $\mathbb{F}$ are defined by a system of dynamic equations. The $\natural$-equation displays the evolution of the defaultable market. The knowledge of market evolution is a valuable property. This evolution form of the $\natural$-model had allowed [24] to establish the so-called enlargement of filtration formula. It is also proved in [24] that, reciprocally, the $\natural$-equation can be recovered from the enlargement of filtration formula in a way similar to that a differentiable function can be deduced from its derivative.

We recall that the formula of enlargement of filtration is essential, when the no-arbitrage price valuation is considered in an one-default model. Much as the enlargement of filtration formula is universally valid before the default time τ, for a long time, the part of the enlargement of filtration formula after τ was merely proved for the honest time model or the initial time model. The $\natural$-models constitute the third family of models where the enlargement of filtration formula is valid on the whole $\mathbb{R}^+$. In addition, the enlargement of filtration formula in the $\natural$-model has a richer structure than that of honest time model, and has a more accurate expression than that of the initial time model.

We recall also how widely the financial models are defined by stochastic differential equations, because it is one of the best ways to represent the evolution of a financial market. Usually, in a one-default model, there is no such a possibility to design the evolution. Now with the $\natural$-model, this becomes available.

The second remarkable property of the $\natural$-model is its rich and flexible system of parameters Z, Y, f. The parameter Z determines the default intensity. The parameters Y and f describe the evolution of the market after the default time τ. Such a system of parameters sets up a propitious framework for inferring the market behavior and for calibrating the financial data. We believe that the $\natural$-model can be a useful instrument to modeling financial market.

In this paper, we want to show that the continuity of the process $X_t^u(x)$ such as :

$$X_t^u(x) = x + \int_u^t X_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_s}\right) dN_s + \int_u^t X_s f(X_s - (1-Z_s)) dY_s, u \leq s \leq t$$

is the solution of the equation $(\natural_u)$.

Our aim is to look at the regularity of the process $(u,t,x) \longmapsto X_t^u(x)$ with respect to all the variables u, t, x. Our useful fundamentals are the theorem of Kolmogorov and the lemma of Gronwall.

The continuity of the stochastic flow has been studied by Philip E.Protter (see [40]) for a general system of equations in the form $X_t^x = H_t^x + \int_0^t F(X^x)_{s_-} dZ_s$, where X_t^x and H_t^x are column vectors in $\mathbb{R}^n$, Z is a column vector of m semimartingales, and F is an $n \times m$ matrix. His study is a direct application of Kolmogorov's lemma.

The same study was also done by H.Kunita (see [30]) but with a detailed proof, for a general system of equations of the form $\xi_{st}^m(x) = x + \sum_{k=0}^{m} \int_0^t V_k(r, \xi_{sr}(x)) dB_r^k$, where V_k is a family of vector fields on $\mathbb{R}^d$ and B^k is a family of standard brownian motions, such that this result has been based on Kolmogorov's lemma, Itô's formula and the inequality of Burkholder-Davis-Gundy.

A technical proof based on the use of the Kolmogorov's lemma has been also done by G.Barles and Bernt Oksendal (see [2, 39]), for a general system $X_t = Z + \int_0^t \alpha(r, X_r) dr + \int_0^t \sigma(r, X_r) dW_r$, where α and σ are measurable functions, Z is a square integrable random variable and W is a d-dimensional brownian motion.

The paper is organized as follows. In the next section, we prove the theorem of Kolmogorov, Gronwall's lemma, and an other lemma to finish our calculus. Section 3.3 presents the main result of this paper.

3.2 The Kolmogorov's theorem and basic lemmas

There are several versions of Kolmogorov's theorem ; we give here a quite general one.

Theorem 3.2.1. *[24]. Let (E, d) be a complete metric space, and let U^x be an E-valued random variable for all x dyadic rationals in $\mathbb{R}^n$. Suppose that for all x and y, we have $d(U^x, U^y)$ which is a random variable and that there exist strictly positive* *constants ε, C, β such that*

$$\mathbb{E}\{d(U^x, U^y)^\varepsilon\} \leq C\|x-y\|^{n+\beta}$$

Then for almost all ω the function $x \longmapsto U^x$ can be extended uniquely to a continuous function from $\mathbb{R}^n$ to E.

Proof of Theorem 3.2.1.
We prove the theorem for the unit cube $[0,1]^n$. Before the statement of the theorem we establish some notations. Let Δ denote the dyadic rational points of the unit cube $[0,1]^n$ in $\mathbb{R}^n$, and let Δ_m denote all $x \in \Delta$ whose coordinates are of the form $k2^{-m}, 0 \leq k \leq 2^m$. Two points x and y in Δ_m are neighbors if $\sup\limits_i |x^i y^i| = 2^{-m}$. We use Chebyshev's inequality on the inequality hypothesized to get

$$\mathbb{P}\{d(U^x, U^y) \geq 2^{-\alpha m}\} \leq C2^{\alpha\varepsilon m}2^{-m(n+\beta)}$$

Let

$$\Lambda_m = \{\omega : \exists\, neighbors\ x, y \in \Delta_m\, with\ d(U^x(\omega), U^y(\omega)) \geq 2^{-\alpha m}\}$$

Since each $x \in \Delta_m$ has at most 3^n neighbors, and the cardinality of Δ_m is 2^{mn}, we have

$$\mathbb{P}(\Lambda_m) \leq c2^{m(\alpha\varepsilon-\beta)}$$

Where the constant $c = 3^n C$. Take α a sufficiently small so that $\alpha\varepsilon < \beta$. Then

$$\mathbb{P}(\Lambda_m) \leq c2^{-m\delta}$$

Where $\delta = \beta - \alpha\varepsilon > 0$. The Borel-Cantelli lemma then implies $\mathbb{P}(\Lambda_m\, infinitely\ often) = 0$. In other words, there exists an m_0 such that for $m \geq m_0$ and every pair (u, v) of points of Δ_m that are neighbors,

$$d(U^u, U^v) \leq 2^{-\alpha m}$$

We now use the preceding to show that $x \longmapsto U^x$ is uniformly continuous on Δ and hence extendable uniquely to a continuous function on $[0,1]^n$. To this end, let $x, y \in \Delta$ be such that $\|x-y\| \leq 2^{-k-1}$. We will show that $d(U^x, U^y) \leq c2^{-\alpha k}$ for a constant c, and this will complete the proof.

Without loss of generality assume $k \geq m_0$. Then $x = (x^1, ..., x^n)$ and $y = (y^1, ..., y^n)$ in Δ with $\|x - y\| \leq 2^{-k-1}$ have dyadic expansions of the form

$$x^i = u^i + \sum_{j>k} a^i_j 2^{-j}$$

$$y^i = v^i + \sum_{j>k} b^i_j 2^{-j}$$

where a^i_j, b^i_j are each 0 or 1 and u,v are points of Δ_k which are either equal or neighbors. Next set $u_0 = u, u_1 = u_0 + a_{k+1}2^{-k-1}, u_2 = u_1 + a_{k+2}2^{-k-2}$,...
We also make analogous definitions for $v_0, v_1, v_2, ...$ then u_{i-1} and u_i are equal or neighbors in Δ_{k+i} each i, and analogously for v_{i-1} and v_i. Hence

$$d(U^x(\omega), U^u(\omega)) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-\alpha j}$$

$$d(U^y(\omega), U^v(\omega)) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-\alpha j}$$

and moreover

$$d(U^u(\omega), U^v(\omega)) \leq 2^{-\alpha k}$$

The result now follows by the triangle inequality.

The following section is the heart of our article. To show our main result, we need the following lemmas :

Lemma 3.2.1. *[45]. Let $a(t)$ be a non-negative right-continuous increasing (extented real-valued) function on $\mathbb{R}_+$. Set*

$$C(t) = \inf\{s : a(s) > t\},\ t \in \mathbb{R}_+$$

Then $C(t)$ is a non-negative right-continuous increasing function on $\mathbb{R}_+$, and is called the right-inverse function of $a(t)$. For $t \in \mathbb{R}_+$,$C(t) < +\infty$ if and only if $t < a(\infty) = \lim_{t\longrightarrow\infty} a(t)$. Set

$$a_-(t) = a(t-) = \lim_{s\uparrow\uparrow t} a(s),\ t > 0 \text{ (such that } s \uparrow\uparrow t \text{ means } s \longrightarrow t, s < t\text{)},$$
$$C_-(t) = C(t-) = \lim_{s\uparrow\uparrow t} C(s) = \inf\{s : a(s) \geq t\} = \sup\{s : a(s) < t\}, t > 0,$$
$$a(0-) = a(0),\ C(0-) = C(0).$$

Then we have

$$a_-(C_-(t)) \leq a_-(C(t)) \leq t\ ,\ t \in \mathbb{R}_+$$

and

$$a(C(t)) \geq a(C_-(t)) \geq t\ ,t < a(\infty)$$

Lemma 3.2.2. *[7]. Let $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ with $a < b$, φ and $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ non-negative continuous functions, such that $\exists\rho \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [a,b], \varphi(t) \leq \rho + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds$ then :*

$$\forall t \in [a,b], \varphi(t) \leq \rho \exp(\int_a^t \psi(s)ds)$$

Proof of Lemma 3.2.2.
We assume $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \left(\int_a^u \varphi(s)\psi(s)ds\right) \exp\left(-\int_a^u \psi(s)ds\right)$$

Because φ and ψ are continuous functions, then G is the is continuously derivable on $[a,b]$ and $\forall u \in [a,b]$

$$\grave{G}(u) = \varphi(u)\psi(u) \exp\left(-\int_a^u \psi(s)ds\right) - \psi(u)\left(\int_a^u \varphi(s)\psi(s)ds\right) \exp\left(-\int_a^u \psi(s)ds\right)$$

$$\forall u \in [a,b],\ \grave{G}(u) = \psi(u)\exp\left(-\int_a^u \psi(s)ds\right)\left(\varphi(u) - \int_a^u \varphi(s)\psi(s)ds\right)$$

But, by hypothesis

$$\forall u \in [a,b], \varphi(u) \leq \rho + \int_a^u \varphi(s)\psi(s)ds$$

So

$$\forall u \in [a,b], \grave{G}(u) \leq \rho\ \psi(u)\exp\left(-\int_a^u \psi(s)ds\right)$$

Let $t \in [a,b]$, integrating this inequality for i from a and t :

$$G(t) - G(a) \leq \rho \int_a^t \psi(u)\exp\left(-\int_a^u \psi(s)ds\right)du$$

By definition of G and as $G(a) = 0$:

$$\begin{aligned}\left(\int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds\right)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right) &\leq \rho\left[-\exp\left(-\int_a^u \psi(s)ds\right)\right]_a^t \\ &\leq -\rho\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right) + \rho\exp(0)\end{aligned}$$

From where

$$\left(\int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds\right) \leq -\rho + \rho\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

and finally

$$\varphi(t) \leq \rho\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

3.3 Our approach to the $\natural$-model

In our model, we show the continuity of the solution of the $\natural$-equation by applying the theorem of Kolmogorov presented in the previous section and the lemma of Gronwall (lemma 2.2) such that we take $\varepsilon = p$ and $\beta = p-n$ with $p > 0$. We have for $u \leq s \leq t$:

$$X_t^u(x) = x + \int_u^t X_s\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_s}\right)dN_s + \int_u^t X_s f(X_s - (1-Z_s))dY_s$$

We know that the quantity $f(X_s - (1-Z_s))$ is bounded because f is a Lipschitz function, but as we do not know a priori if the quantity $\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_s}\right)$ is finite or not, we introduce the stopping time $\tau_n = \inf\{t, 1-Z_t < \frac{1}{n}\}$. Therefore, we assume the process $\tilde{X}$ instead of X :

$$d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t\left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}}dN_t + f(\tilde{X}_t - (1-Z_t))dY_t\right),$$

such as $\tilde{X}_t = X_t$ and $\forall\, t \leq \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$.
We denote $A_t = \tilde{X}_t^u(x) - \tilde{X}_t^u(y)$ and we apply Itô's formula to the process $|A_t|^p$, we find :
$A = \tilde{X}^x - \tilde{X}^y \Longrightarrow dA_t = d(\tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y)$

$$\Longrightarrow d|A_t|^p = p|A_t|^{p-1}dA_t + \tfrac{|A_t|^{p-2}}{2}p(p-1)[d < A_t, A_t >]$$

Such as
$dA_t = d(\tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y)$

$$= (\tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y)\left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}}\right)dN_t + [\tilde{X}_t^x f(\tilde{X}_t^x - (1-Z_t)) - \tilde{X}_t^y f(\tilde{X}_t^y - (1-Z_t))]dY_t$$

Noting

$$\mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^x) = \tilde{X}_t^x f(\tilde{X}_t^x - (1-Z_t))$$

$$\mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^y) = \tilde{X}_t^y f(\tilde{X}_t^y - (1-Z_t))$$

So

$d|A_t|^p = p|A_t|^{p-1}dA_t + \frac{|A_t|^{p-2}}{2}p(p-1)d < A_t, A_t >$

$d|A_t|^p = p|A_t|^{p-1}dA_t + \frac{|A_t|^{p-2}}{2}p(p-1)[(\tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y)^2 \left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}}\right)^2 d < N, N >_t$
$+(\mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^y))^2 d < Y, Y >_t +2(\tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y)\left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}}\right)(\mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^y))d <$
$N, Y >_t]$

By lemma of Jacod (see [23], page 128, 129), there always exists an increasing matrix G, such that :
$C_{11}dG = d < N, N >$, $C_{22}dG = d < Y, Y >$ and $C_{12}dG = d < N, Y >$ with $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ is a symmetric nonnegative matrix, and the choice of the latter is arbitrary, then :

$$d|A_t|^p = p|A_t|^{p-1}dA_t + \frac{A_t^{p-2}}{2}p(p-1)\left[\left((\tilde{X}^x - \tilde{X}^y), \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^y)\right) \times \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y \\ \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^x) - V_t(\tilde{X}_t^y) \end{pmatrix}\right] dG_t$$

We denote

$$W_t^T = \left((\tilde{X}^x - \tilde{X}^y), \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^y)\right)$$

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_t = \begin{pmatrix} \tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y \\ \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{V}_t(\tilde{X}_t^y) \end{pmatrix}$$

So

$d|A_t|^p = p|A_t|^{p-1}dA_t + \frac{A_t^{p-2}}{2}p(p-1)[W_t^T M W_t]dG_t$

$\Longrightarrow |A_t|^p = |x-y|^p + \left[\int_u^t p|A_s|^{p-1}dA_s + \int_u^t \frac{p(p-1)}{2}A_s^{p-2}W_s^T M W_s dG_s\right]$

$\Longrightarrow \mathbb{E}[|A_t|^p] = |x-y|^p + \mathbb{E}[\int_u^t p|A_s|^{p-1}dA_s] + \mathbb{E}[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2}A_s^{p-2}W_s^T M W_s dG_s]$

$\Longrightarrow \mathbb{E}[|A_t|^p] \leq |x-y|^p + \mathbb{E}[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2}A_s^{p-2}W_s^T M W_s dG_s]$

$$\leq |x-y|^p + \mathbb{E}[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2}A_s^{p-2}m_s|W_s|^2 dG_s]$$

such that

$$M = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ and } m = |b_{11}| + |b_{12}| + |b_{21}| + |b_{22}|$$

So

$$\mathbb{E}[|A_t|^p] \leq |x-y|^p + \mathbb{E}[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2}A_s^{p-2}m_s((\tilde{X}_s^x - \tilde{X}_s^y)^2 + (V_s(\tilde{X}_s^x) - V_s(\tilde{X}_s^y))^2)dG_s]$$

But f is a Lipschitz function, then there exists a real positive constant K, so :

$$|V_s(\tilde{X}_s^x) - V_s(\tilde{X}_s^y)|^2 \leq K|\tilde{X}_s^x - \tilde{X}_s^y|^2$$

Therefore

$$\mathbb{E}[|A_t|^p] \leq |x-y|^p + \mathbb{E}[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2}A_s^{p-2}m_s(A_s^2 + K|A_s|^2)dG_s]$$

$$\mathbb{E}[|A_t|^p] \leq |x-y|^p + \mathbb{E}[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2}|A_s|^p m_s(1+K)dG_s]$$

$$\leq |x-y|^p + \frac{p(p-1)}{2}(1+K)\mathbb{E}[\int_u^t |A_s|^p m_s dG_s]$$

We denote

$$a = |x-y|^p$$

$$b = \frac{p(p-1)}{2}(1+K)$$

Then

$$\mathbb{E}[|A_t|^p] \leq a + b\mathbb{E}[\int_u^t |A_s|^p m_s dG_s]$$

To apply Gronwall's lemma (lemma 3.2.2) we must use the technique of change of time to eliminate the matrix G, so for this we will use the lemma 3.2.1. In our case, putting $G(s) = a(s)$, we consider the stopping time :

$$C(t) = \inf\{s, G(s) > t\}$$

Such that, for $t \in \mathbb{R}_+$, $C(t) < \infty$ if and only if $t < G(\infty) = \lim\limits_{t \longrightarrow \infty} G(t)$ and

$$G(C(t)) \geq G(C_-(t)) \geq t \ , \ t \in \mathbb{R}_+.$$

In fact

$$\mathbb{E}[|A_t|^p] \leq a + b\mathbb{E}[\int_u^t |A_s|^p m_s dG_s]$$

For $s, t, \alpha \in \mathbb{R}^+$ such that $s < \alpha$:

$$\mathbb{E}[\sup_{t \leq C(\alpha)} |A_t|^p] \leq a + b\mathbb{E}[\sup_{t \leq C(\alpha)} \int_u^{C(\alpha)} |A_s|^p m_s dG_s]$$

We denote $B_t = \sup\limits_{t \leq C(\alpha)} |A_t|$, then

$$\mathbb{E}[B_t^p] \leq a + b\mathbb{E}[\int_u^\alpha B_{C(s)}^p m_{C(s)} dG_{C(s)}]$$

$$\leq a + b\mathbb{E}[\int_u^\alpha B_{C(s)}^p m_{C(s)} ds]$$

$$\leq a + b\mathbb{E}[\int_u^{C(\alpha)} B_s^p m_s ds]$$

Now, we can apply the lemma of Gronwall (lemma 3.2.2) to this last expression, we have :

$$\mathbb{E}[B_t^p] \leq a + b\mathbb{E}\left[\int_u^{C(\alpha)} B_s^p m_s ds\right]$$

We take

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[B_t^p]$$

$$\psi(s) = m_s$$

$$a = \rho$$

So, we find

$$\mathbb{E}[B_t^p] \leq a \exp\left(b\int_u^{C(\alpha)} m_s ds\right)$$

Eventually, if the quantity $\left(\int_u^{C(\alpha)} m_s ds\right)$ is finite , there exists the constant C which satisfies the condition of Kolmogorov's lemma that is to say that $C = \exp\left(b\int_u^{C(\alpha)} m_s ds\right)$.

3.4 Conclusion

This document contains a new and original methodological approach to the subject in question and could therefore be a good contribution to the theory of stochastic processes, based on a very interesting lemma of Kolomogorov. Some difficulties have been encountered because the subject deals with a difficult area "the stochastic differential equations". As prospects, we try to prove the same result of the paper, but in a vectorial case ; moreover, we also think of demonstrating that the stochastic flow associated with our model will be a diffeomorphism with multidimensional parameters on the same space, and we will investigate whether it is possible to have the same work on manifolds.

Chapitre 4

The homeomorphic property of the stochastic flow of the natural equation in Multi-dimensional case

Ce chapitre fait l'objet d'un article soumis.

The homeomorphic property of the stochastic flow of the ♮-equation in Multi-dimensional case

Fatima BENZIADI [1] and Abdeldjebbar KANDOUCI [2]

[1,2]The Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, Tahar Moulay University PO.Box 138 En-Nasr, 20000 Saida, Algeria.

Abstract

We regard the ♮-model. It is an one-default model which gives the conditional law of a random time with respect to a reference filtration. This models are widely applied in modeling financial risk and in price valuation of financial products such as CDS. In this paper, we work on a SDE called a (♮)-equation, introduced in [24]. This equation displays the evolution of the defaultable market. So, in this paper we will try to prouve a few properties of stochastic flow of ♮-equation with some modifications. This is the main motivation of our research.

Key words : Stochastic flow ; Stochastic differential geometry ; Diffeomorphism.

4.1 Introduction

In [24] a new class of random times has been introduced. Precisely, it is proved that, for any continuous increasing process Λ null at the origin, for any continuous non-negative local martingale N such that $0 < N_t e^{-\Lambda_t} < 1, t > 0$, for any continuous local martingale Y, for any Lipschitz function f on $\mathbb{R}$ null at the origin, there exist a random variable τ such that the family of conditional expectations $X_t^u = \mathbb{Q}[\tau \leq u|\mathcal{F}_t]$,$u > 0$,$t < \infty$, satisfy the following stochastic differential equation :

$$(\natural_u) : \begin{cases} dX_t = X_t \left(-\dfrac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_t} dN_t + f(X_t - (1-Z_t))dY_t \right), & t \in [u, \infty) \\ X_u = x \end{cases}$$

We call this setting a $\natural$-model, where the initial condition x can be any $\mathcal{F}_u$-mesurable random variable.

In this work, we introduce the $\natural$-model in Multi-dimensional case. Let F be continuous, Lipschitz mapping from $\mathbb{R}^d$ into itself and $Y(t,\omega) = (Y_1(t,\omega), ..., Y_r(t,\omega))$ denote r-dimensional continuous local martingale difined on a probability space $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. We consider the stochastic differential equation $(\natural_u)$ on $\mathbb{R}^d$:

$$(\natural_u) : \begin{cases} dX_t = X_t \left(-\dfrac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_t} dN_t + \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{d} F_j^i (X_t - (1-Z_t))dY_t^j \right), t \in [u, \infty), 1 \leq j \leq r \\ X_u = x \end{cases}$$

We will show that under additional conditions on F or Y, the map $X_t(., \omega)$ become a flow of diffeomorphisms a.s. ω. The property appears important in recent study of stochastic differential geometry, and has been studied by several authors, e.g. Elworthy [18], Malliavin [33], Ikeda-Watanabe [22], Bismut [5]. We will still other method for the proof of diffeomorphism, our fundamental useful is the results obtained in [28] by Hiroshi Kunita.
The paper is organized as follows. In section 2, we will prove the found theorems and lemmas motived by T.Yamada and S. Varadhan, wich will appear in [28]. Section 3 presents the main results of this paper.

4.2 Flow of homeomorphisms for the solution of stochastic differential equation

This section is borrowed from [28].

Let $G_1(x), ..., G_r(x)$ be continuous mappings from $\mathbb{R}^d$ into itself and $M_t^1, ..., M_t^r$ be continuous semimartingales difined on a probability space $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F}_t)$. Here $\mathbb{F}_t, 0 \leq t < \infty$ is an increasing family of sub σ-fields of $\mathbb{F}$ such that $\wedge_{\varepsilon>0}\mathbb{F}_{t+\varepsilon} = \mathbb{F}_t$ holds for each t. Consider an Itô stochastic differential equation (SDE) on $\mathbb{R}^d$;

$$d\xi_t = \sum_{j=1}^{r} G_j(\xi_t) dM_t^j \tag{4.1}$$

A sample continuous $\mathbb{F}_t$-adapted stochastic process ξ_t with values in $\mathbb{R}^d$ is called a solution of 4.1, if it satisfies

$$\xi_t = \xi_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t G_j(\xi_s) dM_s^j \tag{4.2}$$

where the right hand side is the Itô integral.
Concerning coefficients of the equation, we will assume in this section that they are Lipschitz continuous, i.e., there is a positive constant L such that

$$|G_j^i(x) - G_j^i(y)| \leq L|x-y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

holds for all indices i, j, where $G_j^i(x)$ is the i-th component of the vector function $G_j(x)$. Then for a given point x of $\mathbb{R}^d$, the equation has a unique solution such that $\xi_0 = 0$. We denote it as $\xi_t(x)$ or $\xi_t(x, \omega)$. It is continuous in (t, x) a.s. In fact, the following proposition is well known.

Proposition 4.2.1. *[46]. $\xi_t(x, \omega)$ is continuous in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ for almost all ω. Furthermore, for any $T > 0$ and $p \geq 2$, there is a positive constant $K_{p,T}^{(1)}$ such that*

$$\mathbb{E}|\xi_t(x) - \xi_s(y)|^p \leq K_{p,T}^{(1)} \left(|x-y|^p + |t-s|^{\frac{p}{2}} \right) \tag{4.3}$$

holds for all x, y of $\mathbb{R}^d$ and t, s of $[0, T]$.

We thus regard that for fixed t, $\xi_t(\cdot, \omega)$ is a continuous map from $\mathbb{R}^d$ into itself for almost all ω. The purpose of this section is to prove that map $\xi_t(\cdot, \omega)$ is one to one and onto, and that the inverse map $\xi_t^{-1}(\cdot, \omega)$ is also continuous. Namely we will prove

Theorem 4.2.1. *[28] Suppose that $G_1, ..., G_r$ of equation 4.1 are Lipschitz continuous. Then the solution map $\xi_t(\cdot, \omega)$ is a homeomorphism of $\mathbb{R}^d$ for all t, a.s. ω.*

Before the proof of the theorem, we shall mention a few remarks.

Remark 4.2.1. *In case of one dimensional SDE, Ogura and Yamada [38] has shown the same result under a weaker condition, using a strong comparison theorem of solutions. In fact, if coefficients are Lipschitz continuous on any finite interval (local Lipschitzan) and if they are of linear growth, i.e., $|G_j(x)| \leq C(1 + |x|)$ holds for all x with some positive C, then the solution $\xi_t(\cdot, \omega)$ is homeomorphism for any t a.s.*

Remark 4.2.2. *The (local) Lipschitz continuity of coefficients is crucial for the theorem. Ogura and Yamada [38] has given an example of one dimensional SDE with α-Hölder continuous coefficients ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$), which has a unique strong solution but does not have the "one to one" property.*

Remark 4.2.3. *It is enough to prove the theorem in case that M_t^i, $i = 1, ..., r$ satisfy properties below : Let $M_t^j = B_t^j + A_t^j$ be the decomposition of semimartingale such that B_t^j is a continuous local martingale and A_t^j is a continuous process of bounded variation. Let $< B^j >_t$ be the quadratic variation of B_t^j. Then it holds for each j and $\forall s < t$,*

$$A_t^j - A_s^j \leq t - s \ , \ < B^j >_t - < B^j >_s \leq t - s, \qquad \forall s < t \tag{4.4}$$

In the following discussion, condition (2.4) is always assumed. We will first show the "one to one" property. Our approach is based on several elementary inequalities.

Lemma 4.2.1. *Let $T > 0$ and p be any real number. Then there is a positive constant $K_{p,T}^{(2)}$ such that $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ and $\forall t \in [0, T]$,*

$$\mathbb{E}|\xi_t(x) - \xi_s(y)|^p \leq K_{p,T}^{(2)}|x - y|^p, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in [0, T] \tag{4.5}$$

Proof of Lemma 4.2.1.
if $x = y$, the inequality is clearly satisfied for any positive constant $K_{p,T}^{(2)}$. We shall assume $x \neq y$. Let ε be an arbitrary positive number and $\sigma_\varepsilon = \inf\{t > 0;\ |\xi_t(x) - \xi_t(y)| <$

$\varepsilon\}$. We shall apply Itô's formula $f(z) = |z|^p$. Then it holds for $t < \sigma_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |\xi_t(x)-\xi_t(y)|^p - |x-y|^p &= \sum_{i,j}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial z_i}(\xi_s(x)-\xi_s(y))\left(G^i_j(\xi_s(x))-G^i_j(\xi_s(y))\right)dM^j_s \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(\xi_s(x)-\xi_s(y))\left(G^i_k(\xi_s(x))-G^i_k(\xi_s(y))\right) \\ &\times \left(G^j_l(\xi_s(x))-G^j_l(\xi_s(y))\right)\, d<M^k, M^l>_s \\ &= I_t + J_t \end{aligned}$$

Note $\dfrac{\partial f}{\partial z_i} = p|z|^{p-2}z_i$ and apply Lipschitz inequality. Then

$$\sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial z_i}(\xi_s(x)-\xi_s(y))\left(G^i_j(\xi_s(x))-G^i_j(\xi_s(y))\right)\right| \le |p|\sqrt{d}L|\xi_s(x)-\xi_s(y)|^p$$

Therefore we have

$$|\mathbb{E}I_{t\wedge\sigma_\varepsilon}| \le |p|r\sqrt{d}L\int_0^t \mathbb{E}|\xi_{s\wedge\sigma_\varepsilon}(x)-\xi_{s\wedge\sigma_\varepsilon}(y)|^p ds$$

Next, note that

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = p|z|^{p-2}\delta_{ij} + p(p-2)|z|^{p-4}z_i z_j$$

where δ_{ij} is the Kronecker's delta. Then

$$\left|\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(\xi_s(x)-\xi_s(y))(G^i_k(\xi_s(x))-G^i_k(\xi_s(y)))(G^i_l(\xi_s(x))-G^i_l(\xi_s(y))) \le\right.$$

$$\left. |p|(|p-2|+d)L^2|\xi_s(x)-\xi_s(y)|^p \right|$$

Therefore

$$|\mathbb{E}J_{t\wedge\sigma_\varepsilon}| \le \tfrac{1}{2}r^2|p|(|p-2|+d)L^2\int_0^t \mathbb{E}|\xi_{s\wedge\sigma_\varepsilon}(x)-\xi_{s\wedge\sigma_\varepsilon}(y)|^p ds$$

Summing up these two inequalities, we obtain

$$\mathbb{E}|\xi_{t\wedge\sigma_\varepsilon}(x)-\xi_{t\wedge\sigma_\varepsilon}(y)|^p \le |x-y|^p + C_p\int_0^t \mathbb{E}|\xi_{t\wedge\sigma_\varepsilon}(x)-\xi_{t\wedge\sigma_\varepsilon}(y)|^p ds$$

where C_p is a positive constant. By Gronwall's inequality,

$$\mathbb{E}|\xi_{t\wedge\sigma_\varepsilon}(x)-\xi_{t\wedge\sigma_\varepsilon}(y)|^p \le K^{(2)}_{p,T}|x-y|^p, \quad \forall t\in[0,T]$$

where $K^{(2)}_{p,T}=\exp(C_pT)$. Letting ε tend to 0, we have

$$\mathbb{E}|\xi_{t\wedge\sigma}(x)-\xi_{t\wedge\sigma}(y)|^p \le K^{(2)}_{p,T}|x-y|^p$$

where σ is the first time t such that $\xi_t(x)=\xi_t(y)$. However, it holds $\sigma=\infty$ a.s., since otherwise the left hand side would be infinity if $p<0$. The proof is complete.

The above lemma shows that if $x\neq y$ then $\xi_t(x)\neq\xi_t(y)$ holds for all t a.s. But it does not conclude that $\xi_t(\cdot,\omega)$ is "one to one", since the exceptional null set $N_{x,y}=\{\omega\,|\xi_t(x)=\xi_t(y)\,for\,some\;t\}$ depends on the pair (x,y). To overcome this point, we shall prove the following lemma.

Lemma 4.2.2. *$(Varadhan)$ Set*

$$\eta(x,y)=\frac{1}{|\xi_t(x)-\xi_t(y)|} \tag{4.6}$$

Then $\eta_t(x,y)$ is continuous in $[0,\infty)\times\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}|x\neq y\}$.

Proof of Lemma 4.2.2.
Suppose $p>2(2d+1)$. It holds

$$|\eta_t(x,y)-\eta_{t'}(x',y')|^p \le 2^p\eta_t(x,y)^p\eta_{t'}(x',y')^p\{|\xi_t(x)-\xi_{t'}(x')|^p+|\xi_t(y)-\xi_{t'}(y')|^p\}$$

By Hölders inequality,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\eta_t(x,y)-\eta_{t'}(x',y')|^p &\le 2^p\{\mathbb{E}(\eta_t(x,y)^{4p})\mathbb{E}(\eta_{t'}(x',y')^{4p})\}^{\frac14}\\ &\quad\times\{(\mathbb{E}|\xi_t(x)-\xi_{t'}(x')|^{2p})^{\frac12}+(\mathbb{E}|\xi_t(y)-\xi_{t'}(y')|^{2p})^{\frac12}\}\end{aligned}$$

By Lemma 4.2.1 and Proposition 4.2.1, we have

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|\eta_t(x,y)-\eta_{t'}(x',y')|^p &\leq C_{p,T}|x-y|^{-p}|x'-y'|^{-p}\{|x-x'|^p+|y-y'|^p+2|t-t'|^{\frac{p}{2}}\} \\
&\leq C_{p,T}\delta^{-2p}\{|x-x'|^p+|y-y'|^p+2|t-t'|^{\frac{p}{2}}\}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

if $|x-y| \geq \delta$ and $|x'-y'| \geq \delta$, where $C_{p,T}$ is a positive constant. Then by Kolmogorov's theorem, $\eta_t(x,y)$ is continuous in $[0,T]\times\{(x,y)/|x-y|\geq\delta\}$. Since T and δ are arbitrary positive numbers, we get the assertion. The proof is complete.

The above lemma leads immediately to the "one to one" property of the map $\xi_t(\cdot,\omega)$ for all t a.s. We shall next consider the onto property. We first establish

Lemma 4.2.3. *Let $T>0$ and p be any real number. Then there is a positive constant $K^{(3)}_{p,T}$ such that*

$$
\mathbb{E}(1+|\xi_t(x)|^2)^p \leq K^{(3)}_{p,T}(1+|x|^2)^p, \quad \forall x\in\mathbb{R}^d,\ \forall t\in[0,T] \tag{4.8}
$$

Proof of Lemma 4.2.3.
We shall apply Itô's formula to the function $f(z)=(1+|z|^2)^p$. It holds

$$
\begin{aligned}
f(\xi_t(x))-f(x) &= \sum_{i,j}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial z_i}(\xi_s(x))G^i_j(\xi_s(x))dM^j_s \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}(\xi_s(x))G^i_k(\xi_s(x))G^j_l(\xi_s(y))\ d<M^k,M^l>_s \\
&= I_t+J_t
\end{aligned}
$$

Let K be a positive constant such that

$$
|G^i_j(x)| \leq K(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}
$$

holds for all i and j. Then,

$$
\left|\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(\xi_s(x))G^i_j(\xi_s(x))\right| \leq 2\sqrt{d}\,|p|K(1+|\xi_s(x)|^2)^p
$$

Therefore,

$$|\mathbb{E}\, I_t| \leq 2r\sqrt{d}\,|p|K \int_0^t \mathbb{E}(1 + |\xi_s(x)|^2)^p ds$$

Similarly,

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(\xi_s(x)) G_k^i(\xi_s(x)) G_l^j(\xi_s(x)) \right| \leq |p|(d + 2|p-1|)K^2(1 + |\xi_s(x)|^2)^p$$

so that

$$|\mathbb{E}\, J_t| \leq |p|r^2(d + 2|p-1|)K^2 \int_0^t \mathbb{E}(1 + |\xi_s(x)|^2)^p ds$$

Therefore we have

$$\mathbb{E}(1 + |\xi_t(x)|^2)^p \leq (1 + |x|^2)^p + \mathit{const.} \int_0^t \mathbb{E}(1 + |\xi_s(x)|^2)^p ds$$

By Gronwall's inequality, we get the inequality of the lemma.

Remark 4.2.4. *It holds* $(1 + |x|^2) \leq (1 + |x|)^2 \leq 2(1 + |x|^2)$. *Therefore, inequality* (4.8) *implies*

$$\mathbb{E}(1 + |\xi_t(x)|)^{2p} \leq 2^{|p|} K_{p,T}^{(3)} (1 + |x|)^{2p} \tag{4.9}$$

Now taking negative p in the above lemma, we see that $|\xi_t(x)|$ tends to infinity in probability as x tends sequencially to infinity. We shall prove a stronger convergence. We claim

Lemma 4.2.4. *Let* $\overline{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ *be the one point compactification of* $\mathbb{R}^d$. *Set*

$$\eta_t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + |\xi_t(x)|} & if\ x \in \mathbb{R}^d \\ 0 & if\ x = \infty \end{cases}$$

Then $\eta_t(x, \omega)$ *is a continuous map from* $[0, \infty) \times \overline{\mathbb{R}^d}$ *into* $\mathbb{R}$ *a.s.*

Proof of Lemma 4.2.4.

Obviously $\eta_t(x)$ is continuous in $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. Hence it is enough to prove the continuity in the neighborhood of infinity. Suppose $p > 2(2d+1)$. It holds

$$|\eta_t(x) - \eta_s(y)|^p \le \eta_t(x)^p \eta_s(y)^p |\xi_t(x) - \xi_s(y)|^p$$

By Hölders inequality, Proposition 4.2.1 and lemma 4.2.3, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\eta_t(x) - \eta_s(y)|^p &\le (\mathbb{E}\eta_t(x)^{4p})^{\frac{1}{4}}(\mathbb{E}\eta_s(y)^{4p})^{\frac{1}{4}}(\mathbb{E}|\xi_t(x) - \xi_s(y)|^{2p})^{\frac{1}{2}} \\
&\le C_{p,T}(1+|x|)^{-p}(1+|y|)^{-p}(|x-y|^p + |t-s|^{\frac{p}{2}})
\end{aligned}$$

if $t, s \in [0,T]$ and $x, y \in \mathbb{R}^d$, where $C_{p,T}$ is a positive constant. Set $\dfrac{1}{x} = (x_1^{-1}, ..., x_d^{-1})$. Since

$$\frac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \le \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

we get the inequality

$$\mathbb{E}|\eta_t(x) - \eta_s(y)|^p \le C_{p,T}\left(\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|^p + |t-s|^{\frac{p}{2}}\right)$$

Define

$$\widetilde{\eta}_t(x) = \begin{cases} \eta_t\left(\dfrac{1}{x}\right) & if\ x \neq 0 \\ 0 & if\ x = 0 \end{cases}$$

Then the above inequality implies

$$\mathbb{E}|\widetilde{\eta}_t(x) - \widetilde{\eta}_s(y)|^p \le C_{p,T}\left(|x-y|^p + |t-s|^{\frac{p}{2}}\right), \quad x \neq 0\,,\, y \neq 0$$

In case $y = 0$, we have

$$\mathbb{E}|\widetilde{\eta}_t(x)|^p \le C_{p,T}|x|^p$$

Therefore $\widetilde{\eta}_t(x)$ is continuous in $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ by Kolmogorov's theorem. This proves that $\widetilde{\eta}_t(x)$ is continuous in $[0,\infty)\times$ neighborhood of infinity.

Lemma 4.2.5. *Define a stochastic process* $\overline{\xi}_t$ *on* $\overline{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ *by*

$$\overline{\xi}_t(x) = \begin{cases} \xi_t(x) & if\ x \in \mathbb{R}^d \\ \infty & if\ x = \infty \end{cases}$$

Then $\overline{\xi}_t(x)$ *is continuous in* $[0,\infty) \times \overline{\mathbb{R}^d}$*.*

Proof of Lemma 4.2.5.
We have the proof by the previous lemma. Thus for each $t > 0$, the map $\overline{\xi}_t(\cdot,\omega)$ is homotopic to the identity map on $\overline{\mathbb{R}^d}$, which is homeomorphic to d-dimensional sphere $\mathcal{S}^d$. Then $\overline{\xi}_t(\cdot,\omega)$ is an onto map of $\overline{\mathbb{R}^d}$ by a well known homotopic theory. Now, the map $\overline{\xi}_t$ is a homeomorphism of $\overline{\mathbb{R}^d}$, since it is one to one, onto and continuous. Since ∞ is the invariant point of the map $\overline{\xi}_t$, we see that ξ_t is a homeomorphism of $\mathbb{R}^d$. This completes the proof of Theorem 2.2.

4.3 Main result

We now turn to the $\natural$-equation in higher dimensions. Let $(\Lambda_1, ..., \Lambda_d)$ be d-dimensional continuous increasing process null at the origin, and d-dimensional continuous non-negative local martingale N such that $0 < N_t e^{-\Lambda_t} < 1$, $t > 0$. Let F be continuous, Lipschitz mapping from $\mathbb{R}^d$ into itself and $Y(t,\omega) = (Y_1(t,\omega), ..., Y_r(t,\omega))$ denote r-dimensional continuous local martingale difined on a probability space $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. We consider the $\natural$-equation in Multi-dimensional case :

$$(\natural_u) : \begin{cases} dX_1(t) = X_1(t)\left(-\dfrac{e^{-\Lambda_1(t)}}{1-Z_1(t)}dN_1(t) + F_{11}dY_1 + \cdots + F_{1d}dY_r\right) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ dX_d(t) = X_d(t)\left(-\dfrac{e^{-\Lambda_d(t)}}{1-Z_d(t)}dN_d(t) + F_{r1}dY_1 + \cdots + F_{rd}dY_r\right) \end{cases}$$

with $X(u) = (x_1, ..., x_d)^T$ is the initial condition. Or, in matrix notation simply :

$$(\natural_u) : \begin{cases} dX_t = X_t\left(-\dfrac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_t}dN_t + F\left(X_t - (1-Z_t)\right)dY_t\right), & t \in [u,\infty) \\ X_u = x \end{cases}$$

where $X(t) = (X_1(t), ..., X_d(t))^{\mathbf{T}}$, $-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_t} = \left(-\frac{e^{-\Lambda_1}(t)}{1-Z_1(t)}, ..., -\frac{e^{-\Lambda_d}(t)}{1-Z_d(t)}\right)^{\mathbf{T}}$, $dN(t) = (dN_1(t), ..., dN_d(t))^{\mathbf{T}}$,
$F = \begin{pmatrix} F_{11} & . & . & . & F_{1d} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ F_{r1} & . & . & . & F_{rd} \end{pmatrix}$, $dY(t) = (dY_1(t), ..., dY_r(t))^{\mathbf{T}}$, where $\mathbf{T}$ denotes the transposed of the vector.

Concerning coefficients of our equation, we will assume in this section that they are Lipschitz continuous, i.e. there is a positive constant $\tilde{L}$ such that :

$$|F_j^i(x) - F_j^i(y)| \leq \tilde{L}|x-y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^d,\, 1 \leq i \leq d,\, 1 \leq j \leq r$$

holds for all indices i, j, where $F_j^i(x)$ is the i-th component of the vector function $F_j(x)$. Then for a given point x of $\mathbb{R}^d$, the $(\natural_u)$-equation has a unique solution such that $X_u = x$. We denote it as $X_t(x)$ or $X_t(x, \omega)$. It is continuous in (t, x) a.s. appliying the proposition 4.2.1 [46].

$$X_t^u(x) = x + \int_u^t X_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_s}\right) dN_s + \int_u^t \sum_{j=1}^r X_s F_j \left(X_s - (1-Z_s)\right) dY_s^j$$

We know that the quantity $F_j(X_s - (1-Z_s))$ is bounded because F is a Lipschitz function, but we do not know a priori if the quantity $\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_s}\right)$ is finite or not, we introduce the stopping time $\tau_n = \inf\{t,\, 1-Z_t < \frac{1}{n}\}$, therfore, we assume the process $\tilde{X}$ instead of X :

$$d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t \left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}} dN_t + \sum_{j=1}^r F_j\left(\tilde{X}_t - (1-Z_t)\right) dY_t^j\right)$$

such as $\tilde{X}_t = X_t$, $\forall t \leq \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.3.1 Proof of the one to one property

If $x = y$ the inequality is clearly satisfied for any constant $\tilde{K}^{(2)}_{p,T}$. We shall assume $x \neq y$. Let $\tilde{\varepsilon}$ be an arbitrary positive number and :

$$\sigma_{\tilde{\varepsilon}} = \inf\{t > 0,\, |\tilde{X}^u_t(x) - \tilde{X}^u_t(y)| < \tilde{\varepsilon}\}$$

denote $A_t = \tilde{X}^u_t(x) - \tilde{X}^u_t(y)$, and we shall apply Itô's formula to the function $f(z) = |z|^p$. Then it holds for $t < \tilde{\varepsilon}$;

$$\tilde{X}^u_t(x) = x + \int_u^t \tilde{X}_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \int_u^t \sum_{j=1}^r \tilde{X}_s F_j \left(\tilde{X}_s - (1 - Z_s)\right) dY^j_s.$$

$$d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t \left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1 - Z_{t\wedge\tau_n}}\right) dN_t + \sum_{j=1}^r \tilde{X}_t F_j \left(\tilde{X}_t - (1 - Z_t)\right) dY^j_t.$$

$$\left|\tilde{X}^u_t(x) - \tilde{X}^u_t(y)\right|^p - |x - y|^p = \sum_{i,j} \int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i} \left(\tilde{X}^u_t(x) - \tilde{X}^u_t(y)\right) \times$$

$$\left(\tilde{X}_s(x) \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \tilde{X}_s(x) F^i_j \left(\tilde{X}_s(x) - (1 - Z_s)\right) dY^j_s -\right.$$

$$\left.\tilde{X}_s(y) \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \tilde{X}_s(y) F^i_j \left(\tilde{X}_s(y) - (1 - Z_s)\right) dY^j_s\right) +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}^u_s(x) - \tilde{X}^u_s(y)\right) \times$$

$$\left(\tilde{X}_s(x) \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \tilde{X}_s(x) F^i_k \left(\tilde{X}_s(x) - (1 - Z_s)\right) dY^k_s -\right.$$

$$\left.\tilde{X}_s(y) \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \tilde{X}_s(y) F^i_k \left(\tilde{X}_s(y) - (1 - Z_s)\right) dY^k_s\right) \times$$

$$\left(\tilde{X}_s(x) \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \tilde{X}_s(x) F^j_l \left(\tilde{X}_s(x) - (1 - Z_s)\right) dY^l_s -\right.$$

$$\tilde{X}_s(y)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\tilde{X}_s(y)F_l^j\left(\tilde{X}_s(y)-(1-Z_s)\right)dY_s^l\Big).$$

$$\left|\tilde{X}_t^u(x)-\tilde{X}_t^u(y)\right|^p-|x-y|^p=\sum_{i,j}\int_u^t\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)-\tilde{X}_s^u(y)\right)\times$$

$$\Big[\left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\Big(\tilde{X}_s(x)F_j^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)-$$

$$\tilde{X}_s(y)F_j^i\left(\tilde{X}_s(y)-(1-Z_s)\right)\Big)dY_s^j\Big]+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\int_u^t\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}\left(\tilde{X}_s^u(x)-\tilde{X}_s^u(y)\right)\times$$

$$\Big[\left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\Big(\tilde{X}_s(x)F_k^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)-$$

$$\tilde{X}_s(y)F_k^i\left(\tilde{X}_s(y)-(1-Z_s)\right)\Big)dY_s^k\Big]\times$$

$$\Big[\left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\Big(\tilde{X}_s(x)F_l^j\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)-$$

$$\tilde{X}_s(y)F_l^j\left(\tilde{X}_s(y)-(1-Z_s)\right)\Big)dY_s^l\Big].$$

$$=\tilde{I}_t+\tilde{J}_t$$

$$\tilde{I}_t=\sum_{i,j}\int_u^t\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)-\tilde{X}_s^u(y)\right)\times$$

$$\Big[\left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\Big(\tilde{X}_s(x)F_j^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)-$$

$$\tilde{X}_s(y)F_j^i\left(\tilde{X}_s(y)-(1-Z_s)\right)\Big)\,dY_s^j\Big]$$

Notting

$$V_j^i(\tilde{X}_s^x)=\tilde{X}_s(x)F_j^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)$$

$$V_j^i(\tilde{X}_s^y)=\tilde{X}_s(y)F_j^i\left(\tilde{X}_s(y)-(1-Z_s)\right)$$

such that

$$\left|V_j^i(\tilde{X}_s^x)-V_j^i(\tilde{X}_s^y)\right|\leq\tilde{L}\left|\tilde{X}_s^x-\tilde{X}_s^y\right|$$

And

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}=p|z|^{p-2}z_i$$

We put

$$\tilde{I}_t=\tilde{I}_t^1+\tilde{I}_t^2$$

such that

$$\tilde{I}_t^1=\sum_{i,j}\int_u^t\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)-\tilde{X}_s^u(y)\right)\left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s$$

$$\tilde{I}_t^2=\sum_{i,j}\int_u^t\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)-\tilde{X}_s^u(y)\right)\left(V_j^i(\tilde{X}_s^x)-V_j^i(\tilde{X}_s^y)\right)dY_s^j$$

For $\tilde{I}_t^1$, we have :

$$\begin{aligned}\sum_i\left|\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)-\tilde{X}_s^u(y)\right)\left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\right| &\leq |p||z|^{p-2}|z_i|\sqrt{d}\left|\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right|\\ &\leq |p|\sqrt{d}\left|\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right|^p\end{aligned}$$

Therefore

$$\tilde{I}_t^1\leq|p|\sqrt{d}\int_u^t\left|\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right|^p ds\times\int_u^t-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}dN_s$$

Noting
$Q_t = \int_u^t -\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}} dN_s$, it is a local martingale (so called the hypothesis $H_Y(C)$ [24]).
So

$$\tilde{I}_t^1 \leq |p| r\sqrt{d}\; Q_t \int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds$$

For $\tilde{I}_t^2$, we have :

$$\begin{aligned}\sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x) - \tilde{X}_s^u(y)\right)\left(V_j^i(\tilde{X}_s^x) - V_j^i(\tilde{X}_s^y)\right)\right| &\leq |p||z|^{p-2}|z_i|\sqrt{d}\,\tilde{L}\left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right| \\ &\leq |p|\sqrt{d}\,\tilde{L}\left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p\end{aligned}$$

Therefore

$$\tilde{I}_t^2 \leq |p|\sqrt{d}\; r\,\tilde{L}\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds$$

So, we have

$$\begin{aligned}\tilde{I}_t = \tilde{I}_t^1 + \tilde{I}_t^2 &\leq |p| r\sqrt{d}\; Q_t \int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds + |p|\sqrt{d}\; r\,\tilde{L}\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds \\ &\leq |p| r\sqrt{d}\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds\,(Q_t + \tilde{L})\end{aligned}$$

Therefore, we have

$$\left|\mathbb{E}\,\tilde{I}_{t\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right| \leq |p| r\sqrt{d}\,(Q_{t\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}} + \tilde{L})\int_u^t \mathbb{E}\left|\tilde{X}_{s\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(x) - \tilde{X}_{s\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(y)\right|^p ds \tag{4.10}$$

Next,

$$\begin{aligned}\tilde{J}_t &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}_s^u(x) - \tilde{X}_s^u(y)\right) \\ &\times\left[\left(\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s + \left(V_k^i(\tilde{X}_s^x) - V_k^i(\tilde{X}_s^y)\right)dY_s^k\right] \\ &\times\left[\left(\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s + \left(V_l^j(\tilde{X}_s^x) - V_l^j(\tilde{X}_s^y)\right)dY_s^l\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}_t &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}^u_s(x)-\tilde{X}^u_s(y)\right) \\
&\times \Bigg[\left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)^2\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)^2 dN_s dN_s + \left(V^i_k(\tilde{X}^x_s)-V^i_k(\tilde{X}^y_s)\right) \\
&\times \left(V^j_l(\tilde{X}^x_s)-V^j_l(\tilde{X}^y_s)\right) dY^k_s dY^l_s \ + \left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)\left(V^j_l(\tilde{X}^x_s)-V^j_l(\tilde{X}^y_s)\right) \\
&\times dN_s\, dY^l_s + \left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)\left(V^i_k(\tilde{X}^x_s)-V^i_k(\tilde{X}^y_s)\right) dN_s\, dY^k_s\Bigg]
\end{aligned}
$$

Noting $\tilde{J}_t = \dfrac{1}{2}\left[\tilde{J}^1_t + \tilde{J}^2_t + \tilde{J}^3_t + \tilde{J}^4_t\right]$ such that :

$$\tilde{J}^1_t = \sum_{i,j,k,l}\int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}^u_s(x)-\tilde{X}^u_s(y)\right) \times \left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)^2\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)^2 dN_s dN_s$$

$$\tilde{J}^2_t = \sum_{i,j,k,l}\int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}^u_s(x)-\tilde{X}^u_s(y)\right)\times\left(V^i_k(\tilde{X}^x_s)-V^i_k(\tilde{X}^y_s)\right)\left(V^j_l(\tilde{X}^x_s)-V^j_l(\tilde{X}^y_s)\right) dY^k_s dY^l_s$$

$$\tilde{J}^3_t = \sum_{i,j,k,l}\int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}^u_s(x)-\tilde{X}^u_s(y)\right) \times \left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right) \times$$

$$\left(V^j_l(\tilde{X}^x_s)-V^j_l(\tilde{X}^y_s)\right) dN_s\, dY^l_s$$

$$\tilde{J}^4_t = \sum_{i,j,k,l}\int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}^u_s(x)-\tilde{X}^u_s(y)\right) \times \left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right) \times$$

$$\left(V^i_k(\tilde{X}^x_s)-V^i_k(\tilde{X}^y_s)\right) dN_s\, dY^k_s$$

and note that

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = p|z|^{p-2}\delta_{ij} + p(p-2)|z|^{p-4} z_i z_j$$

where δ_{ij} is the Kronecker's delta, then

For $\tilde{J}^1_t$, we have

$$\left|\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}^u_s(x)-\tilde{X}^u_s(y)\right) \times \left(\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right)^2\right|$$

$$\leq \left|(p|z|^{p-2}\delta_{ij}d + p(p-2)|z|^{p-4}z_iz_j)\left(\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right)^2\right|$$

$$\leq |p|\,(|p-2|+d)\left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p$$

Therefore

$$\tilde{J}_t^1 \leq |p|\,(|p-2|+d)\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds \int_u^t \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right)^2 dN_s dN_s$$

The hypothesis $H_Y(C)$ is always assumed, so

$$\tilde{J}_t^1 \leq |p|\,(|p-2|+d)\; Q_t^2 \int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds$$

For $\tilde{J}_t^2$, we have

$$\left|\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}_s^u(x) - \tilde{X}_s^u(y)\right) \times \left(V_k^i(\tilde{X}_s^x) - V_k^i(\tilde{X}_s^y)\right)\left(V_l^j(\tilde{X}_s^x) - V_l^j(\tilde{X}_s^y)\right)\right|$$

$$\leq \left|\left(p|z|^{p-2}\delta_{ij}d + p(p-2)|z|^{p-4}z_iz_j\right)\tilde{L}^2\;\left(\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right)^2\right|$$

$$\tilde{J}_t^2 \leq |p|\,(|p-2|+d)\,\tilde{L}^2\;\left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p$$

So

$$\tilde{J}_t^2 \leq |p|\,(|p-2|+d)\,\tilde{L}^2\,r^2\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds$$

For $\tilde{J}_t^3$, we have

$$\left|\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}_s^u(x) - \tilde{X}_s^u(y)\right) \times \left(\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right)\left(V_l^j(\tilde{X}_s^x) - V_l^j(\tilde{X}_s^y)\right)\right|$$

$$\leq \left|\left(p|z|^{p-2}\delta_{ij}d + p(p-2)|z|^{p-4}z_iz_j\right)\left(\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right)\tilde{L}\,r\left(\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right)\right|$$

$$\leq |p|\,(|p-2|+d)\,\tilde{L}\,r\left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p$$

The hypothesis $H_Y(C)$ is always assumed, so

$$\tilde{J}_t^3 \leq |p|\,(|p-2|+d)\,\tilde{L}\,r\,Q_t\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p ds$$

For $\tilde{J}_t^4$, we have also

$$\tilde{J}_t^4 \leq |p|\,(|p-2|+d)\,\tilde{L}\,r\,Q_t \int_u^t \left|\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right|^p ds$$

$$\tilde{J}_t = \frac{1}{2}\left[\tilde{J}_t^1+\tilde{J}_t^2+\tilde{J}_t^3+\tilde{J}_t^4\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\Bigg[|p|\,(|p-2|+d)\;Q_t^2\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right|^p ds+$$

$$|p|\,(|p-2|+d)\,\tilde{L}^2\,r^2\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right|^p ds\;+2|p|\,(|p-2|+d)\,\tilde{L}\,r\,Q_t\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right|^p ds\Bigg]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[|p|\,(|p-2|+d)\int_u^t \left|\tilde{X}_s(x)-\tilde{X}_s(y)\right|^p ds\left(Q_t^2+\tilde{L}^2\,r^2+2\tilde{L}\,r\,Q_t\right)\right]$$

Therefore

$$\left|\mathbb{E}\,\tilde{J}_{t\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right| \leq \frac{1}{2}|p|\,(|p-2|+d)\left(Q_t+r\,\tilde{L}\right)^2\int_u^t \mathbb{E}\left|\tilde{X}_{s\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(x)-\tilde{X}_{s\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(y)\right|^p ds \qquad (4.11)$$

Summing up these two inequalities 4.10 and 4.11, we obtain

$$\mathbb{E}\left|\tilde{X}^u_{t\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(x)-\tilde{X}^u_{t\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(y)\right|^p \leq |x-y|^p+\;\tilde{C}_p\int_u^t \mathbb{E}\left|\tilde{X}_{s\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(x)-\tilde{X}_{s\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(y)\right|^p ds$$

where $\tilde{C}_p$ is a positive constant.

By Gronwall's inequality we have

$$\mathbb{E}\left|\tilde{X}^u_{t\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(x)-\tilde{X}^u_{t\wedge\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}(y)\right|^p \leq K^{(2)}_{p,u}\;|x-y|^p, \quad u\leq t\leq\infty$$

such that

$$K^{(2)}_{p,u}\;|x-y|^p = \exp(\tilde{C}_p u)$$

Letting $\tilde{\varepsilon}$ tend to 0, we have

$$\mathbb{E}\left|\tilde{X}^u_{t\wedge\sigma}(x)-\tilde{X}^u_{t\wedge\sigma}(y)\right|^p \leq K^{(2)}_{p,u}\;|x-y|^p$$

where σ is the first time such that $\tilde{X}_t^u(x) = \tilde{X}_t^u(y)$. However it holds $\sigma = \infty$ a.s, since otherwise the left hand side would be infinity if $p < 0$. The proof is complete.
The above lemma shows that if $x \neq y$ then $\tilde{X}_t^u(x) \neq \tilde{X}_t^u(y)$ holds for all t a.s. But it does not conclude that $\tilde{X}_t(., \omega)$ is one to one, since the exceptional null set $\tilde{N}_{x,y} = \{\omega / \tilde{X}_t^u(x) = \tilde{X}_t^u(y) \, for \, some \, t\}$ depends on the pair (x, y). To overcome this point, we shall apply the lemma 4.2.2.

Suppose $p > 2(2d+1)$, we have

$$\tilde{X}_t^u(x) = x + \int_u^t \tilde{X}_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}} \right) dN_s + \int_u^t \sum_{j=1}^r \tilde{X}_s F_j \left(\tilde{X}_s - (1 - Z_s) \right) dY_s^j.$$

$$\tilde{X}_{t'}^u(x') = x' + \int_u^{t'} \tilde{X}_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}} \right) dN_s + \int_u^{t'} \sum_{j=1}^r \tilde{X}_s F_j \left(\tilde{X}_s - (1 - Z_s) \right) dY_s^j.$$

$$\tilde{X}_t^u(y) = y + \int_u^t \tilde{X}_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}} \right) dN_s + \int_u^t \sum_{j=1}^r \tilde{X}_s F_j \left(\tilde{X}_s - (1 - Z_s) \right) dY_s^j.$$

$$\tilde{X}_{t'}^u(y') = y' + \int_u^{t'} \tilde{X}_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}} \right) dN_s + \int_u^{t'} \sum_{j=1}^r \tilde{X}_s F_j \left(\tilde{X}_s - (1 - Z_s) \right) dY_s^j.$$

Putting

$$\tilde{\eta}_t(x, y) = \frac{1}{|\tilde{X}_t^u(x) - \tilde{X}_t^u(y)|}$$

$$\tilde{\eta}_{t'}(x', y') = \frac{1}{|\tilde{X}_{t'}^u(x') - \tilde{X}_{t'}^u(y')|}$$

So

$$|\tilde{\eta}_t(x, y) - \tilde{\eta}_{t'}(x', y')|^p = \left| \frac{1}{|\tilde{X}_t^u(x) - \tilde{X}_t^u(y)|} - \frac{1}{|\tilde{X}_{t'}^u(x') - \tilde{X}_{t'}^u(y')|} \right|^p$$

$$\leq 2^p \left(\frac{1}{|\tilde{X}_t^u(x) - \tilde{X}_t^u(y)|} \right)^p \left(\frac{1}{|\tilde{X}_{t'}^u(x') - \tilde{X}_{t'}^u(y')|} \right)^p \left[|\tilde{X}_t^u(x) - \tilde{X}_{t'}^u(x')|^p + |\tilde{X}_t^u(y) - \tilde{X}_{t'}^u(y')|^p \right]$$

By Hölder inequality

$$\mathbb{E}\,|\tilde{\eta}_t(x,y)-\tilde{\eta}_{t'}(x',y')|^p \le 2^p\left(\mathbb{E}(\tilde{\eta}_t(x,y)^{4p})\mathbb{E}(\tilde{\eta}_{t'}(x',y')^{4p})\right)^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\left[\left(\mathbb{E}|\tilde{X}_t^u(x)-\tilde{X}_{t'}^u(x')|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\mathbb{E}|\tilde{X}_t^u(y)-\tilde{X}_{t'}^u(y')|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

By lemme 4.2.1 and proposition 4.2.1, we have

$$\mathbb{E}\,|\tilde{\eta}_t(x,y)-\tilde{\eta}_{t'}(x',y')|^p \le \tilde{C}_{p,T}|x-y|^{-p}|x'-y'|^{-p}\left(|x-x'|^p+|y-y'|^p+2|t-t'|^{\frac{p}{2}}\right)$$

$$\le \tilde{C}_{p,T}\tilde{\delta}^{-2p}\left(|x-x'|^p+|y-y'|^p+2|t-t'|^{\frac{p}{2}}\right)$$

if $|x-y|\ge\tilde{\delta}$ and $|x'-y'|\ge\tilde{\delta}$, where $\tilde{C}_{p,T}$ is a positive constant. Then by Kolmogorov theorem 3.2.1, $\tilde{\eta}_t(x,y)$ is continuous in $[0,T]\times\{(x,y)/|x-y|\ge\tilde{\delta}\}$. Since T and $\tilde{\delta}$ are arbitrary positive numbers, we get the assertion. The proof is complete.

The above lemma leads immediately the one to one property of the map $\tilde{X}_t^u(.,\omega)$ for all t a.s. We shall next consider the onto property, we first establish the following lemma.

4.3.2 Proof of the onto property

Let $T>0$ and p any real number :

$$\tilde{X}_t^u(x)=x+\int_u^t\tilde{X}_s\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\int_u^t\sum_{j=1}^r\tilde{X}_sF_j\left(\tilde{X}_s-(1-Z_s)\right)dY_s^j.$$

$$d\tilde{X}_t=\tilde{X}_t\left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_{t\wedge\tau_n}}\right)dN_t+\sum_{j=1}^r\tilde{X}_tF_j\left(\tilde{X}_t-(1-Z_t)\right)dY_t^j.$$

We shall apply Itô's formula to the function $f(z)=(1+|z|^2)^p$. It holds

$$f(\tilde{X}_t^u(x))-f(x)=\sum_{i,j}\int_u^t\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times$$

$$\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\tilde{X}_s(x)F_j^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^j\right]+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\tilde{X}_s(x)F_k^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^k\right]\times$$

$$\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\tilde{X}_s(x)F_l^j\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^l\right]$$

$f(\tilde{X}_t^u(x))-f(x)=\tilde{I}_t+\tilde{J}_t$ such that

$$\tilde{I}_t=\sum_{i,j}\int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\tilde{X}_s(x)F_j^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^j\right]$$

$$\tilde{J}_t=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times$$

$$\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\tilde{X}_s(x)F_k^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^k\right]\times$$

$$\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\tilde{X}_s(x)F_l^j\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^l\right]$$

For $\tilde{I}_t$, we have

$$\tilde{I}_t=\sum_{i,j}\int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+\tilde{X}_s(x)F_j^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^j\right]$$

$$=\sum_{i,j}\int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s+$$

$$\sum_{i,j}\int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times\tilde{X}_s(x)F_j^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^j$$

$=\tilde{I}_t^1+\tilde{I}_t^2$ such tha

$$\tilde{I}_t^1=\sum_{i,j}\int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)dN_s$$

$$\tilde{I}_t^2=\sum_{i,j}\int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right)\times\tilde{X}_s(x)F_j^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)dY_s^j$$

For $\tilde{I}_t^1$, note $\dfrac{\partial f}{\partial z_i} = 2\,p\,z_i\,(1+|z|^2)^{p-1}$ and the hypothesis $H_Y(C)$ is always assumed, so

$$\tilde{I}_t^1 = \sum_{i,j} \int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \times \tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s$$

$$\begin{aligned}\sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \times \tilde{X}_s(x)\right| &\leq 2|p||z_i|(1+|z|^2)^{p-1}\sqrt{d}|\tilde{X}_s(x)| \\ &\leq 2|p|\sqrt{d}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p\end{aligned}$$

Therefore

$$\tilde{I}_t^1 \leq 2|p|\sqrt{d}\,r\,Q_t \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds$$

For $\tilde{I}_t^2$, we have

$$\tilde{I}_t^2 = \sum_{i,j} \int_u^t \frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \times \tilde{X}_s(x) F_j^i\left(\tilde{X}_s(x) - (1-Z_s)\right) dY_s^j$$

Noting

$$\tilde{V}_j^i(\tilde{X}_s^x) = \tilde{X}_s(x) F_j^i\left(\tilde{X}_s(x) - (1-Z_s)\right)$$

Let $\tilde{K}$ be a positive constant such that

$$\tilde{V}_j^i(\tilde{X}_s^x) \leq \tilde{K}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \times \tilde{V}_j^i(\tilde{X}_s^x)\right| &\leq 2\,|p|\,|z_i|\,(1+|z|^2)^{p-1}\sqrt{d}\,\tilde{K}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sqrt{d}\,|p|\,\tilde{K}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p\end{aligned}$$

So

$$\tilde{I}_t^2 \leq 2\sqrt{d}\,|p|\,r\,\tilde{K}\int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds$$

Therefore

$$\begin{aligned}\tilde{I}_t &\le 2|p|\sqrt{d}\, r\, Q_t \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds + 2\sqrt{d}\,|p|\, r\, \tilde{K} \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds \\ &\le 2|p|\sqrt{d}\, r\,(Q_t+\tilde{K}) \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds\end{aligned}$$

We have

$$\left|\mathbb{E}\,\tilde{I}_t\right| \le 2|p|\sqrt{d}\, r\,(Q_t+\tilde{K}) \int_u^t \mathbb{E}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds \tag{4.12}$$

Next, for $\tilde{J}_t$ we have

$$\tilde{J}_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \times$$

$$\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \tilde{X}_s(x) F_k^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right) dY_s^k\right] \times$$

$$\left[\tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \tilde{X}_s(x) F_l^j\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right) dY_s^l\right]$$

Noting

$$\tilde{V}_k^i(\tilde{X}_s^x) = \tilde{X}_s(x) F_k^i\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)$$

$$\tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x) = \tilde{X}_s(x) F_l^j\left(\tilde{X}_s(x)-(1-Z_s)\right)$$

So

$$\tilde{J}_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \times$$

$$\left[\tilde{X}_s(x)^2\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)^2 dN_s dN_s + \tilde{V}_k^i(\tilde{X}_s^x)\,\tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x)\, dY_s^k\, dY_s^l + \right.$$

$$\left. \tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)\tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x)\, dN_s\, dY_s^l + \tilde{X}_s(x)\left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right)\tilde{V}_k^i(\tilde{X}_s^x) dN_s dY_s^k\right]$$

Noting $\tilde{J}_t = \frac{1}{2}\left[\tilde{J}_t^1 + \tilde{J}_t^2 + \tilde{J}_t^3 + \tilde{J}_t^4\right]$, such that

$$\tilde{J}_t^1 = \sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{X}_s(x)^2 \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right)^2 dN_s dN_s$$

$$\tilde{J}_t^2 = \sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{V}_k^i(\tilde{X}_s^x)\, \tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x)\, dY_s^k\, dY_s^l$$

$$\tilde{J}_t^3 = \sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{X}_s(x) \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) \tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x)\, dN_s\, dY_s^l$$

$$\tilde{J}_t^4 = \sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{X}_s(x) \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) \tilde{V}_k^i(\tilde{X}_s^x) dN_s dY_s^k$$

and note that

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = 2p\,(1 + |z|^2)^{p-1}\delta_{ij} + 4p\,(p-1)\, z_i\, z_j\, (1 + |z|^2)^{p-2}$$

where δ_{ij} is the Kronecker's delta, then for $\tilde{J}_t^1$ we have

$$\tilde{J}_t^1 = \sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{X}_s(x)^2 \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right)^2 dN_s dN_s$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{X}_s(x)^2 \right| &\leq \left| (2p\,(1 + |z|^2)^{p-1}\delta_{ij} + 4p\,(p-1)\, z_i\, z_j\, (1 + |z|^2)^{p-2})\, \tilde{X}_s(x)^2 \right| \\ &\leq 2|p|\,(2(p-1) + d) \left(1 + |\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p \end{aligned}$$

Therefore

$$\tilde{J}_t^1 \leq 2|p|\,(2(p-1) + d) \int_u^t \left(1 + |\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds \int_u^t \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right)^2 dN_s dN_s$$

By hypothesis $H_Y(C)$, we have

$$\tilde{J}_t^1 \leq 2|p|\,(2(p-1) + d)\, Q_t^2 \int_u^t \left(1 + |\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds$$

For $\tilde{J}_t^2$, we have

$$\tilde{J}_t^2 = \sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{V}_k^i(\tilde{X}_s^x)\, \tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x)\, dY_s^k\, dY_s^l$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{V}_k^i(\tilde{X}_s^x)\, \tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x) \right| &\leq |\,(2p\,(1+|z|^2)^{p-1}\delta_{ij} + 4p\,(p-1)\, z_i\, z_j\,(1+|z|^2)^{p-2}) \\ &\quad \times \tilde{K}^2(1+|\tilde{X}_s(x)|^2)| \\ &\leq 2|p|\,(2(p-1)+d)\,\tilde{K}^2(1+|\tilde{X}_s(x)|^2)^p\end{aligned}$$

Therefore

$$\tilde{J}_t^2 \leq 2|p|\,(2(p-1)+d)\,\tilde{K}^2\, r^2 \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds$$

For $\tilde{J}_t^3$, we have

$$\tilde{J}_t^3 = \sum_{i,j,k,l} \int_u^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{X}_s(x) \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_{s\wedge\tau_n}}\right) \tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x)\, dN_s\, dY_s^l$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \left(\tilde{X}_s^u(x)\right) \tilde{V}_l^j(\tilde{X}_s^x) \right| &\leq |\,(2p\,(1+|z|^2)^{p-1}\delta_{ij} + 4p\,(p-1)\, z_i\, z_j\,(1+|z|^2)^{p-2}) \\ &\quad \times \tilde{K}\,(1+|\tilde{X}_s(x)|^2)^{\frac{1}{2}}\, \tilde{X}_s(x)| \\ &\leq 2|p|\,(2(p-1)+d)\,\tilde{K}(1+|\tilde{X}_s(x)|^2)^p\end{aligned}$$

The hypothesis $H_Y(C)$ is always assumed, so

$$\tilde{J}_t^3 \leq 2|p|\,(2(p-1)+d)\;\tilde{K}\, r\, Q_t \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds$$

For $\tilde{J}_t^4$, we have also

$$\tilde{J}_t^4 \leq 2|p|\,(2(p-1)+d)\;\tilde{K}\, r\, Q_t \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds$$

Therefore

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}_t &= \frac{1}{2}\left[\tilde{J}_t^1 + \tilde{J}_t^2 + \tilde{J}_t^3 + \tilde{J}_t^4\right] \\
&\le \frac{1}{2}\Bigg[2|p|\,(2(p-1)+d)\,Q_t^2 \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds + \\
&\le 2|p|\,(2(p-1)+d)\,\tilde{K}^2\,r^2 \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds + \\
&\le 4|p|\,(2(p-1)+d)\ \tilde{K}\,r\,Q_t \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds\Bigg] \\
&\le |p|\,(2(p-1)+d) \int_u^t \left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds \left(Q_t^2 + \tilde{K}^2\,r^2 \ + \ 2\,\tilde{K}\,r\,Q_t\right)
\end{aligned}
$$

So

$$
\left|\mathbb{E}\,\tilde{J}_t\right| \le \ |p|\,(2(p-1)+d)\left(Q_t + r\,\tilde{K}\right)^2 \int_u^t \mathbb{E}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds \tag{4.13}
$$

Summing up these two inequalities 4.12 and 4.13, we obtain

$$
\mathbb{E}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p \le \left(1+|x|^2\right)^p + \ const \times \int_u^t \mathbb{E}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds
$$

By Gronwall's inequality, we have

$$
\mathbb{E}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p \le \left(1+|x|^2\right)^p \times \exp\left(\tilde{C}_{p,u}\right)
$$

such that

$$
\tilde{C}_{p,u} = \ const \times \int_u^t \mathbb{E}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p ds
$$

and

$$
\tilde{K}_{p,u}^3 = \exp\left(\tilde{C}_{p,u}\right)
$$

So, we have the inequality of the lemma 4.2.3

$$
\mathbb{E}\left(1+|\tilde{X}_s(x)|^2\right)^p \le \tilde{K}_{p,u}^3\left(1+|x|^2\right)^p
$$

Now, taking negative p in the above lemma, we see that $\left|\tilde{X}_t(x)\right|$ tends to infinity in probability as x tends sequencially to infinity. We shall prove a stronger convergence.

So, let $\bar{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ be the one point compactification of $\mathbb{R}$. Set

$$\tilde{X}_t^u(x) = x + \int_u^t \tilde{X}_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_{s\wedge\tau_n}}\right) dN_s + \int_u^t \sum_{j=1}^r \tilde{X}_s F_j \left(\tilde{X}_s - (1 - Z_s)\right) dY_s^j.$$

$$\tilde{\eta}_t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \left|\tilde{X}_t(x)\right|} & \text{if } x \in \mathbb{R}^d \\ 0 & \text{if } x = \infty \end{cases}$$

Evidently $\tilde{\eta}_t(x)$ is continuous in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$. Thus just to prove the continuity in the vicinity of infinity. Suppose $p > 2(2d + 1)$. It holds

$$|\tilde{\eta}_t(x) - \tilde{\eta}_s(y)|^p \leq \tilde{\eta}_t(x)^p \tilde{\eta}_s(y)^p \left|\tilde{X}_t(x) - \tilde{X}_s(y)\right|^p$$

By Hölder inequality, proposition 4.2.1 and lemma 4.2.3, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|\tilde{\eta}_t(x) - \tilde{\eta}_s(y)|^p &\leq (\mathbb{E}\,\tilde{\eta}_t(x)^{4p})^{\frac{1}{4}} (\mathbb{E}\,\tilde{\eta}_s(y)^{4p})^{\frac{1}{4}} (\mathbb{E}|\tilde{X}_t(x) - \tilde{X}_s(y)|^{2p})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tilde{C}_{p,T}\,(1 + |x|)^{-p}\,(1 + |y|)^{-p}\left(|x - y|^p + |t - s|^{\frac{p}{2}}\right) \end{aligned}$$

if $t, s \in [0, T]$ and $x, y \in \mathbb{R}^d$, where $\tilde{C}_{p,T}$ is a positive constant. Set

$$\frac{1}{x} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, ..., x_d^{-1})$$

Since

$$\frac{|x - y|}{(1 + |x|)(1 + |y|)} \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

We get the inequality

$$\mathbb{E}\,|\tilde{\eta}_t(x) - \tilde{\eta}_s(y)|^p \leq \tilde{C}_{p,T}\left(\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|^p + |t - s|^{\frac{p}{2}}\right)$$

Define

$$\bar{\eta}_t(x) = \begin{cases} \tilde{\eta}_t(\frac{1}{x}) & \text{if } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{if } \ x = 0 \end{cases}$$

Then the above inequality implies

$$\mathbb{E}|\bar{\eta}_t(x) - \bar{\eta}_s(y)|^p \leq \tilde{C}_{p,T}\left(|x-y|^p + |t-s|^{\frac{p}{2}}\right),\ x \neq 0,\ y \neq 0$$

In case $y = 0$, we have

$$\mathbb{E}|\bar{\eta}_t(x)|^p \leq \tilde{C}_{p,T}\,|x|^p$$

Therefore $\bar{\eta}_t(x)$ is continuous in $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ by Kolmogorov's theorem. This proves that $\tilde{\eta}_t(x)$ is continuous in $[0,\infty)\times$ neighborhood of infinity.

Now, define a stochastic process $\bar{X}_t$ on $\bar{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ by

$$\bar{X}_t(x) = \begin{cases} \tilde{X}_t(x) & \text{if } x \in \mathbb{R}^d \\ \infty & \text{if } x = \infty \end{cases}$$

Then $\bar{X}_t(x)$ is continuous sur $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ by the previous lemma. Thus for each $t > 0$, the map $\bar{X}_t(.,\omega)$ is homotopic to the identity map on $\bar{\mathbb{R}}^d$, which is homeomorphic to d-dimensional sphere S^d. Then $\bar{X}_t(.,\omega)$ is an onto map of $\bar{\mathbb{R}}^d$ by a well known homotopic theory. Now, the map $\bar{X}_t$ is a homeomorphism of $\bar{\mathbb{R}}^d$, since it is one to one, onto and continuous. Since ∞ is the invariant point of the map $\bar{X}_t$, we see that $\tilde{X}_t$ is a homeomorphism of $\mathbb{R}^d$. This completes the proof of theorem 4.2.1.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, j'ai abordé une nouvelle étude sur les propriétés du flot stochastique engendré par un modèle financier très connu, qui s'appelle le modèle naturel. Ces résultats trouvés forment une bonne contribution dans la finance d'une part et dans la géométrie stochastique d'autre part. Dans la première partie, j'ai montré la continuité du flot stochastique dans le cas unidimensionnel, basant sur un lemme très intéressant de Kolmogorov. Dans la deuxième partie et sous quelques hypothèses, j'ai prouvé que le flot stochastique est un homéomorphisme dans un cas vectoriel, en appliquant une théorie importante de Kunita.

Dans la continuité de ce travail, je présente dans ce qui suit quelques perspectives possibles en vue d'améliorer et d'étendre mes résultats :

- Étude de la propriété d'homéomorphisme du flot stochastique engendré par le modèle naturel dans les deux cas unidimensionnel et multidimensionnel, mais dans un cas où il y a des processus avec sauts.
- Étude des propriétés du flot stochastique engendré par le modèle naturel gouverné par un mouvement Brownien fractionnaire.

Bibliographie

[1] Aven (T.). A theorem for determining the compensator of a counting process. Scandinavian Journal of Statistics, 12(1), pp. 69-72 (1985).

[2] Barles.G., Solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Math.Appl.Vol 17, Springer-Verlag, Paris, (1994).

[3] Bielecki (T. R.), Rutkowski (M.). Credit Risk : Modeling, Valuation and Hedging. Springer (2002).

[4] BieleckiT.R., M.Jeanblanc and M.Rutkowski., Credit Rist Modelling. Osaka University Press, (2009).

[5] BismutJ. M., Flots stochastiques et formula d'Itô-Stratonovich généralisée, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 290 (10 mars 1980).

[6] Bomfim (A. N.). Credit Derivatives and Their Potential to Synthesize Riskless Assets. The Journal of Fixed Income December 2002, Vol. 12, No. 3, pp. 6-16 (2002).

[7] Constantini.G., Équations différentielles d'ordre 2, (http ://bacamaths.net/).

[8] Crosbie (P. J.). Modeling Default Risk. KMV Corporation, San Francisco, www.kmv.com (1997).

[9] Dellacherie (C.) Meyer (P.A.). Probabilit´es et potentiels, chapitres I ‘a IV, Hermann, Paris (1975).

[10] Duffie (D.), Filipovic (D.), Schachermayer (W.). Affine Processes and Applications in Finance. Annals of Applied Probability, Vol.13, No 3, August (2003).

[11] Duffie (D.). A Short Course on Credit Risk Modeling with Affine Processes. Working Paper. Stanford University and Scuola Normale Superior (2002). Disponible sur http ://fibonacci.dm.unipi.it/ finance/duffie notes.pdf.

[12] Duffie (D.), Lando (D.). The Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information. Econometrica 69, pp. 633-664 (2001).

[13] Duffie (D.), Pan (J.), Singleton (K.). Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump Diffusions. Econometrica, Vol. 68, pp. 1343-1376 (2000).

[14] Duffie (D.), Singleton (K. J.). Modeling Term Structure of Defaultable Bonds. The Review of Financial Studies Special 1999 Vol. 12, No. 4, pp. 687- 720 (1999).

[15] Duffie (D.), Singleton (K. J.). Credit Risk . Princeton University Press (2003).

[16] Eddahbi.M., *Introduction aux équations différentielles stochastiques et applications*, École Symposium 11-14 Novembre 2007, Saida, Algérie.

[17] Elliott.J.R, Jeanblanc.M., Yor.M, On models of default risk, *Mathematical Finance. Vol 10. N 02. (April 2000). 179-195.*

[18] Elworthy K.D., Stochastic dynamical systems and their flows, stochastic analysis ed. by A.Friedman and M. Pinsky, 79-95, Academic press, New York, (1978).

[19] Emery.M., Non-confluence de solutions d'équations différentielles stochastiques, *Sém. Proba. 15. Lecture Notes in Math. Springer*, (1980). and Diffusions. Quantum Probability Communications, QP-PQ, Vol. XI,World Scientific (1999). Disponible sur http ://www-irma.u-strasbg.fr

[20] El Karoui (N.) Mazliak (L.). Backward Stochastic Differential Equations. Pitman Research Notes in Mathematic Series (1997).

[21] Geske (R.). The valuation of compound options. J. Finan. Econom. 7, pp. 63-81 (1979).Volatility Skews. Working Paper. University of Toronto (2003).

[22] Ikeda-S.N.. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes, Second edition, New York (1989) .

[23] Jacod.J., Calcul stochastique et problèmes de martingales. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1979).

[24] Jeanblanc.M., Shiqi Song., Random times with given survival probability and their $\mathbb{F}$-martingale decomposition formula, *Stochastic Processes And their Applications*, 121(2011).

[25] Jeulin.T., Yor.M., Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4t*, 11 429-443 (1978).

[26] Ju. N. Blagoveschenskii-M. I. Freidlin ; Some properties of diffusion processes depending on a parameter, DAN 138 (1961), Soviet Math. 2 (1961), 633-636.

[27] KaratzasI., Kardaras.C., The numéraire portfolioinsemimartingale financial models. *Finance and Stochastics*, 11(4) 447-493 (2007).

[28] Kunita.H., On the decomposition of solutions of stochastic differential equations, Proceeding of the LMS Symposium on Stoch.Diff.Eqs. Durham, Juillet (1980).

[29] Kunita.H., *Exposé au Congrès sur les intégrales stochastiques de Durham*, (1980).

[30] H.Kunita., Stochastic flows of diffeomorphisms. Lect.Notes in Math.Vol 1997, Springer-Verlag (1984).

[31] Kurtz.D, Pignard.T.B., *Modélisation du risque de crédit,(1979).*

[32] Longstaff (F. A.), Schwartz (E. S.). A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. J. Finance 50, pp. 789-819 (1995).

[33] Malliavin.P., Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, Kyoto, Conference, (1976), Wiley (1978), 195-263.

[34] Merton (R. C.). On the pricing of corporate debt :The risk structure of interest rates. J. Finance 29, pp. 449-470 (1974).

[35] Meyer.P.A., *Flot d'une équation différentielles stochastique*, Séminaire de probabilités,(1979/1980).

[36] Millet.A., *Calcul stochastique 2*, (2009).

[37] Neveu.J., Équations différentielles stochastiques et applications, *Cours de* 3^{e} *cycle*, Paris (1973).

[38] Ogura-T.Y., Yamada ; On the strong comparison theorem of solutions of stochastic differential equations, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete (1981) ; 56, 3-19.

[39] Oksendal.B., Stochastic differential equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985, 1989, 1992, 1995, 1998, 2003).

[40] Protter (P.). Stochastic Integration and Differentiel Equations. Springer (1990). February, pp.49-50 (1974).

[41] Credit Derivatives Survey. Risk, February 2003. www.risk.net (2003).

[42] Rudin (W.). Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, third edition (1987).

[43] Schonbücher (P.), Rogge (E.). Modeling Dynamic Portfolio Credit Risk. Working Paper. ETH Z¨urich (2002). Disponible sur www.schonbucher.de.

[44] Schonbüucher (P.), Schubert (D.). Copula-Dependent Default Risk in Intensity Models. Working Paper. University of Bonn (2000). Disponible sur www.schonbucher.de.

[45] Sheng-wu He, Jia-gang Wang and Jia-an Yan., Semimartingale theory and stochastic calculus. Science Press and CRC press INC, (1992).

[46] Stroock-S.D. W., R. S.Varadhan ; Multidimensional diffusion processes, Springer-Verlag, New York (1979).

[47] Uppman.A., Sur le flot d'une équation différentielle stochastique, *Sém. Proba. Strasbourg. tome 16 (1982).*

[48] Yor.M., Introduction au calcul stochastique, *Sém. N. Bourbaki, (1981-1982).*