

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique (MESRS)
Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbès
Faculté de Technologie
DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



THESE

Pour

L'obtention du grade de

DOCTEUR en Sciences

Spécialité : **Matériaux**

Présentée par: **BERRIAH Abdelatif**

Analyse par éléments finis de la dégradation des propriétés thermo-mécaniques des stratifiés croisés

Soutenue le / /2017 Devant la commission d'examen :

| | | | |
|-----------------------------------|------------|--------------------|--------------------|
| ELAJRAMI Mohamed | Professeur | UDL-SBA | Président |
| MEGUENI Abdelkader | Professeur | UDL.SBA | Directeur de thèse |
| BOUCHIKHI Aboubakar Seddik | MCA | UDL-SBA | Examinateur |
| YEGHNEM Redha | MCA | Université Saida | Examinateur |
| ELMEICHE Noureddine | M.C.A | Université Mascara | Examinateur |
| HOUARI Sid-Ahmed | M.C.A | Université Mascara | Examinateur |

Thèse présentée au sein du:

Laboratoire **LMSS**, Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbès

BP 89, Cité Ben M'hidi , Sidi Bel Abbès 22000

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicace

A la mémoire de ma mère, j'espère qu'elle repose en paix à jamais,

A mes parents..., à toute ma famille, je ne vous remercierai jamais assez pour votre soutien et vos encouragements tout au long de mes études,

A ma petite famille : « Ma femme et ma petite fille RAHIL »,

A ma grande famille : « Mes frères et mes sœurs et leurs petites familles »,

A tous mes amis et tous ceux qui m'ont apporté leur aide.

Remerciements

“Al hamdou lillah” : je remercie Dieu de m’avoir donné le courage et la patience.

Je tiens tout d’abord à remercier chaleureusement Monsieur MEGUENI Abdelkader, Professeur en Science des Matériaux à l’université de Sidi Bel abbés, faculté des technologies, pour m’avoir accepté et accueilli au sein du Laboratoire de recherche et qui a su me diriger dès le début de cette modeste thèse avec enthousiasme. Je lui remercie aussi pour sa gentillesse, sa disponibilité, son dévouement, sa patience, sa pédagogie et sa rigueur qui ont fait de cette thèse ce qu’elle est aujourd’hui.

Ce travail n’aurait pu voir le jour sans la ténacité et la clairvoyance de Monsieur LOUZDED Abdelkader, Professeur en Sciences des Matériaux à la même université. Je les remercie tous les deux pour m’avoir fait confiance et d’avoir examiné mon travail et conseillé sur la rédaction. Ces conseils ont permis d’aplanir bien des difficultés. Enfin, je tiens à rendre hommage à leurs qualités humaines et pédagogiques.

Je tiens à exprimer avec fierté ma gratitude à Monsieur ELAJRAMI Mohamed pour avoir accepté de présider le jury. Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur BOUCHIKHI Aboubakar Seddik, YEGHNEM Redha, ELMEICHE Nouredine et HOUARI Sid-Ahmed qui ont accepté de participer au jury et qui ont bien voulu juger mon travail.

Je remercie de tout mon cœur mes parents et toute ma famille, qui ont su me donner sans cesse son soutien, son tolérance et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études et par conséquent, ce mémoire de thèse. Merci à tous mes amis pour la motivation que leur amitié m’a apportée.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l’aboutissement de cette thèse.

BERRIAH Abdelatif

الملخص

كثيراً ما تتعرض المكونات المصنعة من المواد المركبة لأحمال ميكانيكية وحرارية كبيرة أثناء التشغيل. كلا النوعان من الأحمال قد يسبب بكسور وإخفاق الهياكل المركبة. عندما تتعرض الصفائح المركبة المتقاطعة من نوع $[0_m / 90_n]_s$ لإجهاد الشد أحادي المحور، تظهر و تتطور أنواع مختلفة من الأضرار (انشقاق المصفوفة : انشقاقات عرضية و طولية، انفكك الطبقات المختلفة الاتجاه : الانفصال) وتقسيم الألياف. إن تطور هذه النماذج من الأضرار يمكن أن تؤثر بشكل كبير على صلابة الصفائح المركبة. من الناحية التجريبية، الانشقاقات العرضية معروفة على أنها أول ضرر يحدث. وفي هذا الصدد، الهدف من هذه المذكرة هو دراسة تأثير الانشقاق العرضي على توزيع مجال التوتر وتدهور الخصائص الميكانيك-حرارية للصفائح المركبة المتقاطعة. من أجل هذا، سنستخدم المحاكاة بالعناصر المحدودة (FE) لتطور هذا الضرر في الصفائح المركبة المتقاطعة من نوع $[0_m / 90_n]_s$ تحت الشد الأحادي المحور. تم دراسة تأثير الانشقاقات العرضية على صلابة الصفائح المركبة المتقاطعة تحت تدهور الخصائص الميكانيك حرارية عددياً. النتائج التي تم الحصول عليها عن طريق النموذج العددي في هذا التحقيق تبرهن على تأثير الانشقاقات العرضية على قدرة التحمل ومقاومة للتلف وكذلك أثارها على التغيرات في الخواص الميكانيكية مثل معامل يونغ، معامل بواسون ومعامل التمدد الحراري. تأثير عدد الطبقات ذات الاتجاه 90° و 0° على تدهور معامل المرونة الطولي والتغير في الضغط العادي مع كثافة مختلفة من الشقوق عرضية مدرجة أيضاً في هذه الدراسة. النتائج التي تم الحصول عليها أظهرت اتفاق جيد مع النموذج التحليلي المقترح shear lag وكذلك مع النتائج التجريبية التي تم الحصول عليها المتاحة أو المتوفرة.

الكلمات المفتاحية: الخصائص الميكانيك-حرارية، الصفائح المتقاطعة، الانشقاق العرضي، التحليل العددي عن طريق العناصر المحدودة، التحليل النظري عن طريق مقارنة shear lag.

RÉSUMÉ

Les composants fabriqués à partir de matériaux composites sont fréquemment soumis à des charges mécaniques et thermiques superposées pendant leur service d'exploitation. Les deux types de chargements peuvent provoquer des fractures et l'échec des structures composites. Lorsque les composites stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$ sont soumis à un chargement de traction uni-axiale, différents types de dommages sont apparaissent et sont développés tels que la fissuration de la matrice: fissuration transversales et longitudinales, délaminage entre les couches désorientées et rupture des fibres. Le développement de ces modes d'endommagement peut être nuisible à la rigidité des stratifiés. Du point de vue expérimental, la fissuration transversale est connue comme étant le premier mode de dommages. À cet égard, l'objectif du présent document est d'étudier l'effet des fissures transversales d'un composite stratifié croisé sur la distribution du champ de contraintes et la dégradation des propriétés thermomécaniques. Une simulation des Éléments Finis (FE) de l'évolution de dommages en composites stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$ soumis à un chargement de traction uni-axiale est réalisé. L'effet de la fissuration transversale sur la résistance des stratifié croisés sous la dégradation thermomécanique est étudiée numériquement. Les résultats obtenus par la prédiction du modèle numérique développé dans cette étude montrent l'influence des fissures transversales sur la résistance aux dommages, ainsi que ses effets sur la variation des propriétés thermomécanique telles que, le module d'Young, coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique. L'effet du nombre n de plis à 90° et le nombre m de plis à 0° sur la dégradation du module d'élasticité longitudinal, ainsi que la variation de la contrainte normale $\sigma_{xx}^{(90)}$, avec différentes densité de fissures transverses a été également étudié. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux prédits par le modèle analytique proposé shear lag ainsi qu'avec les résultats expérimentaux obtenus disponibles dans la littérature.

Mots clés : Propriétés thermomécaniques, Stratifiés croisés, Fissures transverses, Analyse élément finis (AEF), Analyse shear lag.

ABSTRACT

Components manufactured from composite materials are frequently subjected to superimposed mechanical and thermal loadings during their operating service. Both types of loadings may cause fracture and failure of composite structures. When composite cross-ply laminates of type $[0_m/90_n]_s$ is subjected to uni-axial tensile loading, different types of damage are set-up and are developed such as matrix cracking: transverse and longitudinal cracks, delamination between disoriented layers and broken fibers. The development of these modes of damage can be detrimental for the stiffness of the laminates. From the experimental point of view, transverse cracking is known as the first mode of damage. In this regard, the objective of the present paper is to investigate the effect of transverse cracking in cross-ply laminate on the distribution of the stress field and thermo-mechanical degradation. A Finite Element (FE) simulation of damage evolution in composite cross-ply laminates of type $[0_m/90_n]_s$ subjected to uni-axial tensile loading is carried out. The effect of transverse cracking on the cross-ply laminate strength under thermo-mechanical degradation is investigated numerically. The results obtained by prediction of the numerical model developed in this investigation demonstrate the influence of the transverse cracking on the bearing capacity and resistance to damage as well as its effects on the variation of the mechanical properties such as Young's modulus, Poisson's ratio and coefficient of thermal expansion. The effect of the number n of 90° plies and the number m of 0° plies on the degradation of the longitudinal elasticity modulus and the variation of the normal stress $\sigma_{xx}^{(90)}$, with different density of transverse cracks, was also studied. The results obtained are in good agreement with those predicted by the shear lag analytical model as well as with the obtained experimental results available in the literature.

Keywords: Cross-ply laminate, thermo-mechanical properties, Shear-lag analysis, transverse cracking, finite element method (FEM).

SOMMAIRE

Sommaire

| | Page |
|--|-------------|
| Dédicace | I |
| Remerciement | II |
| ملخص | III |
| Résumé | IV |
| Abstract | V |
| Sommaire | VI |
| Nomenclature | IX |
| Liste des figures | XVI |
| Liste des tableaux | XXI |
| Introduction générale | 01 |
| 1. CHAPITRE 01 : Revue de littérature | 04 |
| 2. CHAPITRE 02 : Généralités sur les matériaux composites | 11 |
| 2.1. Introduction | 11 |
| 2.1.1. Les matériaux composites structuraux..... | 11 |
| ▪ Monocouches..... | 11 |
| ▪ Stratifiés..... | 12 |
| ▪ Sandwichs..... | 13 |
| 2.2. Les constituants des matériaux composites | 15 |
| 2.2.1. Les renforts..... | 15 |
| 2.2.2. La matrice..... | 15 |
| 2.2.3. Interface..... | 16 |
| 2.3. Nomenclature d'une structure stratifiée | 16 |
| 2.4. Modélisation analytique | 18 |
| 2.4.1. Les modèles théoriques de renforcement pour un composite | 18 |
| ▪ Modèles série et parallèle..... | 19 |
| ▪ Modèle de Hirsch..... | 19 |

| | | |
|--------------|--|-----------|
| ▪ | Modèle Halpin-Tsai..... | 20 |
| ▪ | Modèle Halpin-Tsai modifié..... | 21 |
| ▪ | Modèle de Cox..... | 21 |
| ▪ | Modèle modifié de Bowyer et Bader..... | 21 |
| ▪ | La loi des mélanges selon Cox, Kelly et Bigg..... | 22 |
| ▪ | Modèle de renforcement selon Nielsen..... | 22 |
| 2.5. | Les différents Types des matériaux..... | 23 |
| 2.5.1. | Les matériaux anisotropes..... | 23 |
| 2.5.2. | Matériaux monocliniques..... | 24 |
| 2.5.3. | Matériaux orthotropes (orthogonalement anisotropes)..... | 24 |
| 2.5.4. | Matériaux transversalement isotropes..... | 26 |
| 2.5.5. | Matériaux quasi isotropes transverses..... | 27 |
| 2.5.6. | Matériaux quasi isotropes..... | 27 |
| 2.5.7. | Matériaux isotropes..... | 27 |
| 2.6. | La Théorie Classique des Stratifiés (ou théorie des laminés)..... | 28 |
| 2.6.1. | Introduction..... | 28 |
| 2.6.2. | Historique..... | 29 |
| 2.6.3. | Equations pour un milieu élastique linéaire..... | 30 |
| 2.6.4. | Construction d'un laminé isotrope à partir de plis unidirectionnels..... | 31 |
| 2.6.5. | Mise en équation d'un laminé..... | 33 |
| 2.6.6. | Source de simplification..... | 34 |
| 2.6.7. | Théorie des laminés isotropes..... | 35 |
| ▪ | Loi de Hooke généralisée (matériau orthotrope)..... | 36 |
| ▪ | Équations constitutives d'un laminé orthotrope (plan (1,2))..... | 37 |
| ▪ | Équations constitutives d'un laminé orthotrope (plan (x,y))..... | 38 |
| 2.7. | Déformations dans chaque pli..... | 40 |
| 2.8. | Critères de rupture..... | 41 |
| 2.8.1. | Critère de déformation maximale..... | 41 |
| 2.8.2. | Critère de la contraint maximale..... | 42 |
| 2.9. | Modélisation par ANSYS..... | 44 |
| 2.10. | Conclusion..... | 45 |
| 3. | CHAPITRE 03 : Analyse de l'endommagement par fissuration transverse des strati- | |
| | fies croisés | 46 |
| 3.1. | Introduction..... | 46 |

| | |
|---|------------|
| 3.1.1. Fissuration transverse..... | 47 |
| 3.1.2. Fissuration longitudinale..... | 48 |
| 3.1.3. Délaminage..... | 48 |
| 3.1.4. Rupture des fibres..... | 49 |
| 3.1.5. Étapes de dégradation..... | 50 |
| 3.2. Contraintes résiduelles d'origine thermique dans les stratifiés | 51 |
| 3.3. Modélisation du comportement mécanique | 55 |
| 3.3.1. Approches utilisant la diffusion de cisaillement | 56 |
| 3.3.2. Méthodes numériques | 56 |
| 3.4. Formulation de la fissuration transversale..... | 59 |
| 3.4.1. Modèle géométrique..... | 59 |
| 3.4.2. Relation contrainte-déformation de stratifié fissuré..... | 61 |
| 3.4.3. Perturbation des contraintes et déformations provoquées par les fissures transverses..... | 62 |
| 3.4.4. Modèle shear lag parabolique incomplet..... | 67 |
| 3.4.5. Expressions de réduction des propriétés thermo-élastiques due aux fis- sures transversales..... | 70 |
| 3.5. Conclusion | 72 |
| 4. CHAPITRE 04 : Modélisation par EF, résultats et commentaires..... | 73 |
| 4.1. Modélisation géométrique par EF..... | 74 |
| 4.2. État de contraintes..... | 75 |
| 4.3. Effet de la densité de fissures..... | 81 |
| 4.4. Effet de l'épaisseur du stratifié..... | 97 |
| 5. CONCLUSION GENERALE..... | 100 |
| 6. BIBLIOGRAPHIES | 103 |
| 7. ANNEXE | 112 |

 NOMENCLATURE

| | |
|-------------|---|
| \bar{a} | Rapport géométrique de la fissuration transverse |
| UD | Unidirectionnelles |
| H | Epaisseurs de stratifié |
| n_p | Quantité ou nombre de plis empilés dans un stratifié |
| h_k | Epaisseur de la couche k |
| θ_k | Orientation de la couche k |
| mat_k | Matériau de la couche k |
| (x, y, z) | Repère global de la structure ou coordonnées cartésiennes usuelles (x, y, z) |
| $(1, 2, 3)$ | Repère local d'un pli ou les axes du matériau $(1, 2, 3)$ |
| M | Les modules de Young (E, G) |
| E_{ij} | Module d'élasticité selon les directions (i, j) |
| G_{ij} | Module de cisaillement (coulomb) selon les directions (i, j) |
| σ | Les résistances à la traction ou contrainte de traction |
| V | Les fractions volumiques |
| c | Indice inférieur signifie qu'il s'agit du composite |
| f | Indice inférieur signifie qu'il s'agit de la fibre |
| m | Indice inférieur signifie qu'il s'agit de la matrice |
| ζ | Facteur des équations Halpin-Tsai dépendant de la géométrie, de la distribution et de la fraction volumique de fibres |
| η'' | Facteur des équations Halpin-Tsai prend en compte le module relatif de la fibre et de la matrice |
| η' | Facteur des équations Halpin-Tsai Prend en compte la résistance relative de la fibre et de la matrice |
| E_c | Le module d'élasticité d'un composite à fibres courtes orientées aléatoirement dans le plan |
| $E_{//}$ | Le module d'élasticité longitudinal du composite |

| | |
|-----------------|--|
| E_{\perp} | Le module d'élasticité perpendiculaire du composite |
| E_{cVoigt} | Le module d'élasticité d'un composite suivant le modèle de Voigt dans le cas d'un composite unidirectionnel |
| E_{cReuss} | Le module d'élasticité d'un composite suivant le modèle de Reuss dans le cas d'un composite unidirectionnel |
| φ | Facteur des équations Halpin-Tsai modifiées |
| ϕ_{max} | La fraction maximum de « Packing » du renfort |
| K | Facteur des équations Halpin-Tsai |
| ℓ/d | Le facteur de forme de la fibre |
| ℓ | Longueur |
| d | Diamètre |
| β | Facteur des équations de Cox |
| A_f | L'aire de la fibre |
| R | La distance entre les fibres centre à centre |
| r | Le rayon de la fibre |
| K_1 | Le facteur d'orientation de la fibre |
| K_2 | Le facteur tenant compte de la longueur des fibres |
| ℓ_c | La longueur critique de la fibre |
| τ | La contrainte de cisaillement |
| $(\ell/d)_c$ | Le facteur de forme critique. |
| ε_0 | Paramètre tenant compte de l'orientation des fibres (≤ 1) |
| ε_1 | Paramètre tenant compte du transfert de charge par rapport au facteur de forme rapporté au facteur de forme critique |
| τ_i | Le cisaillement interfacial |
| σ_{tu} | La résistance transverse d'un composite unidirectionnel |
| ν_{ij} | Coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction j quand la contrainte est appliquée selon la direction i |
| C_{ijkl} | Tenseur de rigidité (ou d'élasticité) |
| S_{ijkl} | Tenseur de souplesse |
| σ_{ij} | Contraintes normale selon (i, j) |

| | |
|---|--|
| ε_{ij} | Déformation normale selon (i, j) |
| γ_{ij} | Distorsions angulaires selon (i, j) |
| ε_i | Déformation normale selon $i \quad i = x, y, z$ |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ | Déformation de cisaillement dans le plan xy , xz et yz respectivement |
| (u, v, w) | Déplacements suivant les trois directions de l'espace |
| (u^o, v^o, w^o) | Déplacements du plan moyen |
| $\kappa_x^o, \kappa_y^o, \kappa_{xy}^o$ | Courbures de la torsion de plan moyen |
| $\varepsilon_x^o, \varepsilon_y^o$ | Déformations (étirement ou compression) de plan moyen selon l'axe x et y respectivement |
| γ_{xy}^o | Déformations (cisaillement) de plan moyen |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | Contraintes normale selon l'axe x , y et z respectivement |
| $\tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ | Contraintes de cisaillement selon le plan xy , zx et yz respectivement |
| N_x, N_y | Contraintes résultantes selon l'axe x et y respectivement |
| N_{xy} | Contraintes résultantes selon le plan xy |
| M_x, M_y | Moments résultants selon l'axe x et y respectivement |
| M_{xy} | Moments résultants selon le plan xy |
| κ_x, κ_y | Courbures de flexion du laminé selon l'axe x et y respectivement |
| κ_{xy} | Courbures de torsion du laminé selon le plan xy |
| $[A]$ | Matrice de rigidité en membrane, ses coefficients A_{ij} liés à la traction ou à la compression dans le plan |
| $[B]$ | Matrice de couplage membrane-flexion, ses coefficients B_{ij} sont liés aux couplages |
| $[D]$ | Matrice de rigidité en flexion, ses coefficients D_{ij} sont liés à la flexion |
| $[\theta_i], i = 1,2$ | Matrice de transformation ou de passage |
| $[Q_{ij}]_{(k)}$ | Matrice de rigidité réduite de pli k |
| $[\sigma_i]_{(k)}, i = 1,2$ | Contrainte normale dans le repère local $(1,2)$ de pli k |
| $\{\tau_{12}\}_{(k)}$ | Contrainte de cisaillement dans le repère local $(1,2)$ de pli k |

| | |
|--------------------------------|---|
| $[\varepsilon_i]_{(k)}, i=1,2$ | Déformation normale dans le repère local (1,2) de pli k |
| $\{\gamma_{12}\}_{(k)}$ | Déformation de cisaillement dans le repère local (1,2) de pli k |
| $Q_{ij}; i, j=1,2,6$ | Composants de la matrice de rigidité réduite |
| $[Q_{ij}^*]$ | Matrice de rigidité réduite dans le système de coordonnées du stratifié (x, y) |
| $Q_{ij}^*; i, j=1,2,6$ | Composants de la matrice de rigidité réduite dans le système de coordonnées du stratifié (x, y) |
| E'_x, E'_y | Module d'élasticité apparent de la structure dans la direction x et y respectivement |
| ν'_{xy} | Coefficient de Poisson apparent |
| G'_{xy} | Module de cisaillement apparent de la structure |
| $\varepsilon_{iC}, i=1,2$ | Déformations limites ultimes admises en compression |
| $\varepsilon_{iT}, i=1,2$ | Déformations limites ultimes admises en traction |
| $\pm \gamma_{12F}$ | Déformations limites ultimes admises en cisaillement |
| λ_ε | Facteur de rupture par déformation maximale |
| ε_{1F} | La valeur de la limite ultime de déformation en traction (ε_{1T}) si $\varepsilon_1 > 0$ et en compression (ε_{1C}) si $\varepsilon_1 < 0$ dans la direction 1. |
| ε_{2F} | La valeur de la limite ultime de déformation en traction (ε_{2T}) si $\varepsilon_2 > 0$ et en compression (ε_{2C}) si $\varepsilon_2 < 0$ dans la direction 2. |
| γ_{12F} | La limite admise en cisaillement prend une valeur positive si $\gamma_{12} > 0$ ou négative si $\gamma_{12} < 0$. |
| ε_{ij}^n | La déformation du matériau à l'incrément n ($i, j=1,2,3$) |
| ε_{ij}^R | La déformation maximale admissible dans la direction considérée ij ($i, j=1,2,3$) |
| X^t, X^c | La résistance en tension et compression, respectivement, longitudinale |
| Y^t, Y^c | La résistance en tension et compression, respectivement, transversale |
| \underline{S} | La résistance en cisaillement |
| F_{12} | Coefficient d'interaction |

| | |
|--|--|
| $\bar{\rho}$ | La densité de fissures normalisée |
| σ_{FPF} | Contrainte seuil de rupture de la matrice dans la couche désorientée |
| ε_{FPF} | Déformation seuil de rupture de la matrice dans la couche désorientée |
| G_{mf} | Le taux de restitution d'énergie associée à une fissure transverse |
| G_{mfc} | Le taux de restitution d'énergie critique |
| T_{gf} | La température de transition vitreuse de la matrice à l'issue de la polymérisation) |
| e_j^s | Tenseur de déformations résiduelles du stratifié complet |
| $e_j^{(k)}$ | Tenseur de déformations résiduelles du pli k |
| $\alpha_j^{(k)}$ | Tenseur des coefficients de dilatation thermique du pli k |
| T_0 | Température finale d'essai |
| T_{sf} | Température de référence pour laquelle les déformations résiduelles sont nulles (Residual stress-free temperature) |
| t_0 | Epaisseur des couches extérieur à 0° de stratifié croisé |
| t_{90} | Epaisseur de la couche centrale à 90° de stratifié croisé |
| σ_0 | La charge en membrane ou contrainte appliquée |
| ε_i^k | Déformation normale selon i ($i = x, y, z$) de la couche k ($k = 0,90$) |
| E_x | Module d'élasticité de la structure dans la direction x |
| $\bar{\varepsilon}_x^{-0}$ | Valeur moyenne de déformation du stratifié |
| ν_{xy} | Coefficient de Poisson de stratifié dans le plan xy |
| E_{x0} | Le module d'élasticité longitudinal initial du stratifié sain |
| $\bar{\varepsilon}_{x0}$ | La déformation initial du stratifié non endommagé selon x |
| α_x | Le coefficient de dilatation thermique du stratifié selon x |
| α_L, α_1 | Le coefficient de dilatation thermique longitudinal |
| α_T, α_2 | Le coefficient de dilatation thermique transversal |
| $\varepsilon_{xy}^k, \varepsilon_{xz}^k, \varepsilon_{yz}^k$ | La déformation de la couche à k ($k = 0,90$) selon le plan xy, xz et yz respectivement |
| $\sigma_{xy}^k, \sigma_{xz}^k, \sigma_{yz}^k$ | La contrainte de la couche à k ($k = 0,90$) selon le plan xy, xz et yz |

| | |
|--|--|
| | respectivement |
| $\bar{\sigma}_x^k, \bar{\sigma}_y^k$ | Contraintes normale moyenne de la couche k ($k=0,90$) selon l'axe x et y respectivement |
| N_y | La charge appliquée par unité de largeur suivant l'axe y |
| $\bar{\epsilon}_x^k$ | La déformation moyenne de la couche k ($k=0,90$) selon le plan x |
| σ_x^k | La distribution de contrainte axiale dans les couches k ($k=0,90$) |
| σ_{x0}^k | Les contraintes longitudinales du stratifié non endommagé sollicité suivant x , déterminées par la théorie classique des stratifiés, dans les couches k ($k=0,90$) |
| $\pm \sigma_{x0}^{90} f_i(\bar{x}, \bar{z}),$ $i=1,2$ | Perturbation de contraintes causées par la présence de fissures |
| λ | Le paramètre (coefficient) d'empilement |
| $R_i(\bar{a}), i=1,2$ | Fonctions de perturbation de contrainte |
| ξ | Le paramètre shear lag |
| E^{90} | Module d'élasticité de la couche à 90° de structure endommagée |
| E_x^0 | Module d'élasticité de la couche à 0° de structure endommagée |
| $u_k(x, z),$ | La variation du déplacement longitudinal dans l'épaisseur des couches k ($k=90,0$) |
| $\bar{u}_k(x),$ | Les valeurs moyennes (estimée à travers les épaisseurs de couches) des déplacements longitudinaux $u_k(x, z), k=90,0$ dans les couches k |
| $f(z)$ | Fonction de variation de cisaillement transversal à travers de l'épaisseur de la couche à 0° |
| $G_{xz}^k, k=0,90$ | Module de cisaillement (coulomb) transverses dans le plan xz de la couche k |
| $\gamma_{xz}^k, k=0,90$ | Déformation de cisaillement dans le plan xz de la couche k |
| $\tau(x)$ | La contrainte de cisaillement à l'interface entre les couches à 0° et à 90° |
| η | Le paramètre de transfert de charge entre deux fissures consécutives |
| G | Module de cisaillement (coulomb) |
| η_t | Le paramètre de transfert en cisaillement |
| $\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}$ | Les déformations provoquées par la charge thermique et mécanique com- |

| | |
|---------------|---|
| | binées. |
| ν_{12} | Coefficient de Poisson du stratifié dans le plan 12 |
| ν_{xy0} | Coefficient de Poisson du stratifié non endommagé dans le plan xy |
| α_{x0} | Le coefficient de dilatation thermique du stratifié sain selon x |
| α_{y0} | Le coefficient de dilatation thermique du stratifié sain selon y |

Liste des figures

| | Page |
|---|-------------|
| - Introduction générale. | |
| - Figure 1 : Matériaux composites dans des structures d'avions [1] | 01 |
| - Chapitre 01. | |
| - Figure 1.1 : Types d'endommagement intra- et inter-laminaire observés dans les composites stratifiés croisés et orientés [5]..... | 05 |
| - Chapitre 02. | |
| - Figure 2.1 : Microstructure observée dans une section transversale de composite unidirectionnel en carbone-époxy [50] | 12 |
| - Figure 2.2 : Construction d'un stratifié [52] | 13 |
| - Figure 2.3 : Plaque sandwich [49] | 13 |
| - Figure 2.4 : Micrographie des renforts : (a) petite taille, (b) grande taille [53]..... | 15 |
| - Figure 2.5 : Nomenclature d'un stratifié – Orientation d'un pli [54] | 17 |
| - Figure 2.6 : Exemple d'un stratifié $[(\pm 45, 0)_2]_T$ [54] | 18 |
| - Figure 2.7 : Exemple d'un stratifié $(\pm 45, 0)_S$ [54] | 18 |
| - Figure 2.8 : Matériaux orthotrope [52]..... | 24 |
| - Figure 2.9 : Matériau transversalement isotrope [57]..... | 26 |
| - Figure 2.10 : Forme déformée (plan (x, y)) [54]..... | 33 |
| - Figure 2.11 : Forme déformée (plan (x, y)) [54]..... | 33 |
| - Figure 2.12 : Stratifié symétrique avec couches identiques k et k' [59]..... | 35 |
| - Figure 2.13 : Une stratifié dans un état plan de contrainte [59]..... | 36 |
| - Figure 2.14 : Stratifié avec systèmes de coordonnées globales (x, y, z) et locales $(1, 2, 3)$ [59]..... | 38 |
| - Figure 2.15 : Forces et moments dans le plan sur couche [59]..... | 39 |
| - Figure 2.16 : Géométrie d'un stratifié a n_p couches [59]..... | 40 |
| - Figure 2.17 : Enveloppe de rupture d'un pli unidirectionnel en carbone/époxy selon le critère de la contrainte maximale dans l'espace des déformations [62].. | 43 |

| | |
|--|----|
| - Figure 2.18 : Enveloppe de rupture d'un stratifié croisé en carbone/époxy selon le critère de la contrainte maximale dans l'espace des déformations [62]..... | 44 |
| - Chapitre 03 | |
| - Figure 3. 1 : Micrographies des zones endommagées [65] | 47 |
| - Figure 3. 2 : Endommagement d'un stratifié croisé sollicité en traction [2]..... | 48 |
| - Figure 3. 3 : Fissures traversant l'épaisseur du pli pour plusieurs empilements [68]..... | 48 |
| - Figure 3. 4 : Délaminage local en pointe d'une fissure transverse [69]..... | 49 |
| - Figure 3. 5 : Stratifié croisés avec fissure transverse, délaminage interne dans l'interface 0 / 90 et rupture des fibres [70, 71]..... | 49 |
| - Figure 3. 6 : Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement. (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) $\pm 45^\circ$, (d) $0^\circ/90^\circ$ [1]..... | 50 |
| - Figure 3. 7 : Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (a) $0^\circ/90^\circ$ tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotrope trouée, (d) $0^\circ/90^\circ$ trouée [1]..... | 50 |
| - Figure 3. 8 : Evolution de défauts : (a) Micro-défauts, (b) Coalescence, (c) fissuration transverse [1]..... | 51 |
| - Figure 3. 9 : Évolution expérimentale des modes de dommage en stratifié croisé [25].. | 51 |
| - Figure 3. 10 : Cycle de cuisson typique d'un composite à matrice Poly-Epoxyde (T_{gf} est la température de transition vitreuse de la matrice à l'issue de la polymérisation) [72]..... | 52 |
| - Figure 3. 11 : Développement de contraintes résiduelle thermiques dans un stratifié $[0/90]$ [72]..... | 53 |
| - Figure 3. 12 : Influence des matériaux et, avec (b) et sans (a), des contraintes thermiques de fabrication sur les valeurs maximales de la contrainte dans le stratifié croisés de type $[0_2/90_2]_s$ [23]..... | 55 |
| - Figure 3. 13 : Contrainte globale appliquée σ_{FPF} pour l'initiation de la première fissure transversale dans le stratifié croisé Verre / Epoxy $[0/90_3]_s$ [25]..... | 55 |
| - Figure 3. 14 : Stratifié avec fissures transverses dans la couche à 90° [29]..... | 59 |
| - Figure 3.15 : Cellule élémentaire entre deux fissures transverses consécutives [29]..... | 60 |
| - Figure 3. 16 : Champs de déplacement dans une cellule élémentaire [11]..... | 67 |

| | | |
|---|--|----|
| - | Figure 3. 17 : Variation du déplacement longitudinal à travers l'épaisseur pour deux valeurs de coordonnée longitudinale : $x = -a$ (a) et $x = -3a/4$ (b) et pour deux valeurs du rapport géométrique de la fissuration transverse $\bar{a} = 5$ et 2.5 | 68 |
| - | Figure 3. 18 : Évolution de la densité de fissures transverses en traction quasi-statique pour le drapage $[0/90_n/0]$ en Epoxyde 934 / Fibres de Carbone T300 [58] [2]..... | 71 |
| - | Figure 3.19 : Réduction de module élastique pour le stratifié Verre-E / Epoxyde $[0/90_2]_s$ en fonction de la densité de fissures. Comparaison entre la modélisation et l'analyse par éléments finis [64]..... | 72 |
| - | Chapitre 04. | |
| - | Figure 4. 1 : Modèle géométrique de la cellule élémentaire : (a) - Fissures transversales répétées dans la couche à 90° ; (b) - Conditions aux limites de la région modélisée et (c) - Modélisation par éléments finis. | 74 |
| - | Figure 4. 2 : Distribution de contraintes normales dans la cellule élémentaire pour $a = 5$ ($\rho = 0.1\text{mm}^{-1}$)..... | 74 |
| - | Figure 4. 3 : Distribution de la contrainte normale normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la couche à 90° pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0^\circ/90^\circ]_s$ (AS4-3502) au long de l'axe x : (a) $a = 5$, (b) $a = 2.5$ | 77 |
| - | Figure 4. 4 : Variation de la contrainte longitudinale normalisée σ_{xx} à travers l'épaisseur du stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ à $x = -a$, (a) $a = 5$ et (b) $a = 2,5$ | 78 |
| - | Figure 4. 5 : Distribution de la contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} du stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ à l'interface ($z = t_{90}$), (a) $a = 5$ et (b) $a = 2.5$ | 80 |
| - | Figure 4. 6 : Distribution de la contrainte normale inter-laminaire σ_{zz} du stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0 / 90]_s$ à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$ | 81 |
| - | Figure 4. 7 : Variation du module d'élasticité longitudinal normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde : (a) $[0_2 / 90_4]_s$, (b) $[0 / 90_3]_s$ et (c) $[0 / 90]_s$ | 83 |
| - | Figure 4. 8 : Variation du module d'élasticité normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde: (a) $[0/90]_s$; (b) $[0/90_2]_s$; (c) $[0/90_3]_s$ | 85 |

-
- Figure 4. 9 : Variation de la rigidité longitudinale en fonction de la contrainte appliquée pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde $[0/90_3]_s$ 86
 - Figure 4. 10 : Variation du module de cisaillement normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde : (a) $[0 / 90]_s$ et (b) $[0/90_3]_s$ 87
 - Figure 4. 11 : Variation du module de cisaillement normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0_3 / 90_3]_s$ 88
 - Figure 4. 12 : Variation du Coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures transverses pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde : (a) $[0_2 / 90_4]_s$; (b) $[0 / 90_3]_s$ et (c) $[0 / 90]_s$ 90
 - Figure 4. 13 : Variation du Coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures transverses pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde : (a) $[0 / 90]_s$; (b) $[0_2 / 90_2]_s$ 91
 - Figure 4. 14 : Comparaison entre les résultats de l'AEF des taux de réduction des propriétés mécanique d'un stratifié de type $[0/90]_s$ ($\lambda = 1$), de : (a) Fibre en Verre / Epoxyde et (b) Fibre en Graphite/ Epoxyde 93
 - Figure 4. 15 : Évolution du module d' Young longitudinal de stratifié croisé de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ de type IM7/977-3 par rapport à la densité des fissures pour deux cas de température 94
 - Figure 4. 16 : Variation du coefficient de Poisson effective normalisé de stratifié croisé de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ de type IM7/977-3 en fonction de la densité des fissures pour deux cas de température..... 95
 - Figure 4. 17 : Variation du Coefficient de dilatation thermique longitudinal α_x en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde de type $[0 / 90_4]_s$ 96
 - Figure 4. 18 : Variation du Coefficient de dilatation thermique longitudinal α_x en fonction de la densité de fissures transverse pour deux type de stratifiés de Fibre en Graphite / Epoxyde. (a) $[0/90]_s$ et (b) $[0/90_3]_s$ 97
 - Figure 4. 19 : Variation de la rigidité en fonction de nombre n de plis à 90° avec deux densités de fissures transverse pour stratifié de fibre en Verre / Epoxyde $[0 / 90_n]_s$ 98

| | |
|--|-----|
| - Figure 4. 20 : Variation de la rigidité en fonction de nombre n de plis à 90° avec deux différentes nombres m de plis à 0° pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde [0 _m / 90 _n] _s ($\rho = 0.1 \text{ mm}^{-1}$) | 98 |
| - Figure 4. 21 : Variation de la contrainte normale $\sigma_{xx}^{(90)}$ en fonction du nombre n de plis à 90° avec différentes nombres m de plis à 0° pour stratifié de fibre en Verre / Epoxyde [0 _m / 90 _n] _s . ($\rho = 0.1 \text{ mm}^{-1}$)..... | 99 |
| - Annexe. | |
| - A1. Annexe 1. | |
| - Figure A1. 1 : Types des stratifiés..... | 112 |
| - Figure A1. 2 : Stratifié symétrique..... | 113 |
| - Figure A1. 3 : distorsion ou déviation angulaire..... | 114 |
| - A2. Annexe 2. | |
| - Figure A2. 1 : Evolution de la fissuration transverse [1]..... | 115 |
| - Figure A2. 2 : Evolution des contraintes dans la largeur de l'éprouvette [45/-45/45/45] [1]..... | 115 |
| - Figure A2. 3 : Variation du déplacement longitudinal à travers l'épaisseur pour deux valeurs du rapport géométrique de fissuration \bar{a} (densité de fissure) : $\bar{a} = 2.5$ (a) et $\bar{a} = 5$ (b)..... | 118 |
| A3. Annexe 3. | |
| - Figure A3. 1 : Distribution de la contrainte normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la couche à 90° au long de l'axe x pour $a = 5$ | 120 |
| - Figure A3. 2 : Distribution de la contrainte normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la couche à 90° au long de l'axe x pour $a = 2,5$ | |
| - Figure A3. 3 : Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur du stratifié à $x = -a$ | 121 |
| - Figure A3. 4 : Distribution de la contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$ | 122 |
| - Figure A3. 5. Distribution de la contrainte inter-laminaire σ_{zz} à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$ (voir valeurs Sz dans le Tab. A3. 5)..... | 123 |
| | 124 |

LISTE DES TABLEAUX

| | Page |
|--|-------------|
| - Chapitre 02. | |
| - Tableau 2.1 : Type de matrices utilisées dans les composites courants [47] | 14 |
| - Tableau 2.2 : Propriétés des renforts couramment utilisés [47] | 14 |
| - Chapitre 04. | |
| - Tableau 4. 1 : Propriétés élastiques des stratifiés croisés | 76 |
| - Tableau 4. 2. Propriétés élastiques de composite unidirectionnel IM7/977-3 [17] | 94 |
| - Annexe. | |
| - A2. Annexe 2. | |
| - Tableau A2. 1. Le déplacement longitudinal à travers de l'épaisseur..... | 117 |
| - A3. Annexe 3. | |
| - Tableau A3. 1. Variation de la contrainte longitudinale normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ ($a = 5$) | 119 |
| - Tableau A3. 2. Variation de la contrainte longitudinale normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ ($a = 2,5$) | 120 |
| - Tableau A3. 3. Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur du stratifié à $x = - a$. (Matériel 1) | 121 |
| - Tableau A3. 4. Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur du stratifié à $x = - a$. (Matériel 2) | 122 |
| - Tableau A3. 5. Distribution de la contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$ | 123 |
| - Tableau A3. 6. Propriétés de stratifié fibre en Graphite / Epoxyde IM7 / 977-3 | 125 |

INTRODUCTION GENERALE

L'utilisation des stratifiés composites à fibres longues sont très répandue dans divers domaines tels l'aérospatiale, l'aéronautique, l'industrie automobile, nautique de même que dans l'industrie sportive. Ces matériaux sont prisés en raison de leur grand rapport rigidité vs poids et résistance vs poids de même que pour certaines de leurs propriétés mécaniques comme la résistance à la corrosion par exemple. De plus, l'utilisation des matériaux composites peut être avantageuse par rapport aux matériaux traditionnels, car elle permet la conception de structures aux propriétés globales qui répondent mieux aux besoins particuliers d'une situation.

La première utilisation majeure du composite, Bore / Epoxy par exemple, fut l'empennage horizontal du Grumman F-14 [1]. Dès lors, l'usage des éléments structuraux en composites a continué à augmenter autant en aviation militaire que civile. La figure 1 présente la croissance rapide de l'utilisation des matériaux composites dans les structures d'avions.

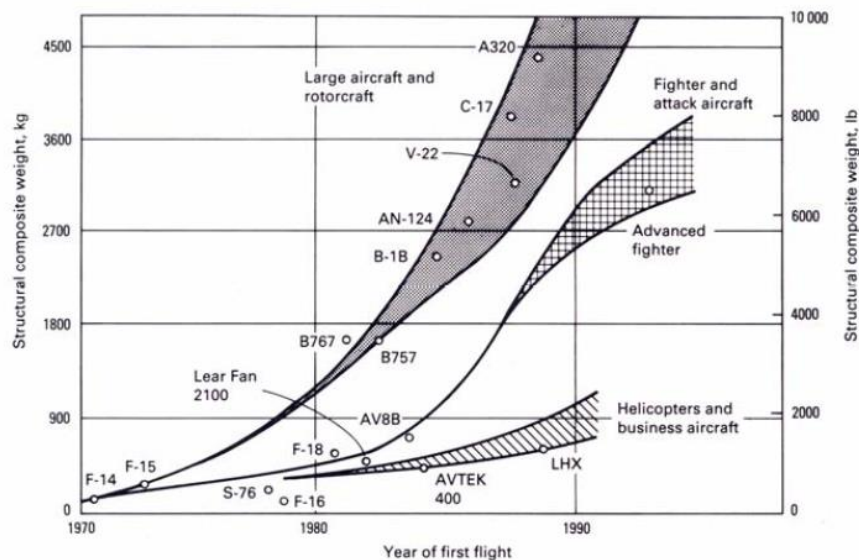


Figure 1 : Matériaux composites dans des structures d'avions [1]

Dans l'autre côté, lorsque ces stratifiés composites à fibres longues soumis à un chargement monotone ou cyclique, la rupture finale du stratifié résulte du développement et de l'accumulation de plusieurs types d'endommagement. A l'échelle microscopique, les différents types d'endommagement observés se résument à des microfissures dans la matrice ou à l'interface des plis, décohésions fibre / matrice, arrachement des fibres ainsi que des ruptures de fibres. A l'échelle macroscopique, les mécanismes d'endommagement rencontrés sont : la rupture de la matrice le long des fibres connue sous le nom de fissuration intra laminaire, décollement inter-plies appelé délaminage et la rupture des fibres qui représente le mode d'endommagement le plus dangereux puisqu'il apparaît tardivement et conduit à la ruine finale du matériau [2].

Cette thèse présente les résultats de l'Analyse Eléments Finis 2D d'un stratifié croisé avec des fissures dans les plis hors axe (à 90°). Les matériaux sont modélisés avec des couches homogènes orthotropes. Les stratifiés croisés de type $[0_m / 90_n]_s$ ont été analysés pour deux types de propriétés des matériaux différents représentant les composites de : Fibre de Verre / Epoxyde et Fibre de Graphite / Epoxyde.

Le but du travail actuel est d'étudier la dégradation des propriétés thermomécaniques, ainsi que la distribution du champ de contraintes, d'un stratifié croisé de type $[0_m / 90_n]_s$ due à la fissuration transversale. Une Analyse Elément Finis est appliquée pour une fissure traversant la largeur d'une cellule élémentaire caractérisée par un rapport géométrique de la fissuration transverse \bar{a} .

Ce mémoire se divise en quatre chapitres : **le premier chapitre** est composé d'une revue de littérature des divers travaux mettant en évidence l'influence de l'endommagement sur le comportement mécanique de stratifiés, tandis que, dans **le second chapitre**, il s'agit de présenter un ensemble de généralités de matériaux composites structuraux et leurs différents types, la théorie classique (hypothèse de Kirchhoff) et de comportement macro-mécanique des composites stratifiés. Une certaine attention est ensuite consacrée aux modélisations analytiques et mise en équation d'un laminé. L'objectif final de ce chapitre est celui d'initier au calcul des stratifiés en composite à usage structurel, en fournissant un bagage suffisant de connaissances de base sur ces matériaux et sur leurs techniques d'analyse. **Le troisième chapitre** s'intéresse à l'analyse analytique l'endommagement due des fissures transversales dans un stratifié

croisé type $[0_m / 90_n]_s$ à fibre longues sous l'influence de chargement thermomécanique, monotone ou cyclique, ainsi que les relations contraintes-déformation. Une bibliographie sélective présente la modélisation du comportement mécanique en utilisant l'approche shear lag en formulation des contraintes plane. **Le quatrième chapitre** concerne notre modélisation numérique d'un stratifié croisé de type $[0_m / 90_n]_s$ de deux matériaux différents endommagés par fissure transversale sous chargement quasi-statique mécanique et thermique. Tout d'abord, nous étudions la distribution du champ de contraintes dans les plis fissurés. Ensuite, le problème de la fissuration transverse est étudié pour prédire l'effet de ce mode d'endommagement sur la dégradation des propriétés thermomécaniques de composites stratifiés. En fin, l'effet de l'épaisseur de couches à 90° et à 0° sur la rigidité ainsi que la variation de la contrainte normale $\sigma_{xx}^{(90)}$ avec différentes densité de fissuration transverse est examiné. Une bonne concordance est obtenue en comparant les résultats déduits du modèle Elément Finis aux résultats de l'analyse analytique proposé de type shear lag et les tests expérimentaux disponible dans littérateurs.

Pour terminer, des conclusions sont tirées suivants les résultats obtenus comparées avec autres résultats théoriques et / ou expérimentaux. Dans la section de référence, il y a 85 références liées au sujet. Approximativement, 60% d'eux sont des publications de divers journaux. L'autre 40% d'eux sont des thèses, conférences et congrès.

CHAPITRE 01

REVUE DE LITTÉRATURE

CHAPITRE 01

Revue de littérature

Le matériau composite aux fibres de renforcement se compose des fibres disséminées dans une matrice continue. En raison de leur module élevé et de faible densité, les fibres agissent en tant que renforts dans les matériaux composites. La plupart des composites sont utilisés sous forme de stratifiés formés de couches unidirectionnelles (Plis) avec différentes orientations de fibres. Mais, les stratifiés unidirectionnelles sont faibles dans la direction transversale lorsqu'ils sont soumis à un chargement de traction transverse ou de cisaillement [3]. On peut séparer, en deux classes, les modes de dégradation des stratifiés aux fibres longues. La première concerne les endommagements intra-laminaires : fissuration transverse et longitudinale de la matrice, décohésion de la liaison fibre / matrice, rupture de fibres. Le second est relative à l'endommagement de la liaison entre les couches d'un stratifié, c'est le délaminage [4].

La figure 1.1, représente, schématiquement, les types de l'endommagement intra- et inter-laminaire observés dans les composites stratifiés croisés et orientés : fissures matricielles transverses et délamination dans un stratifié croisé (Fig. 1. 1a). Délamination de bouts de fissure transverse et longitudinale dans un stratifié croisé (Fig. 1. 1b). Fissures de pli hors axe dans un stratifié symétrique équilibré (Fig. 1. 1c-d), délamination locale uniforme (Fig. 1. 1c) et partiel (Fig. 1. 1d) induit par les fissures matricielles d'un pli orienté. Fissures matricielles provoquent la délamination de bord (Fig. 1. 1e) [5].

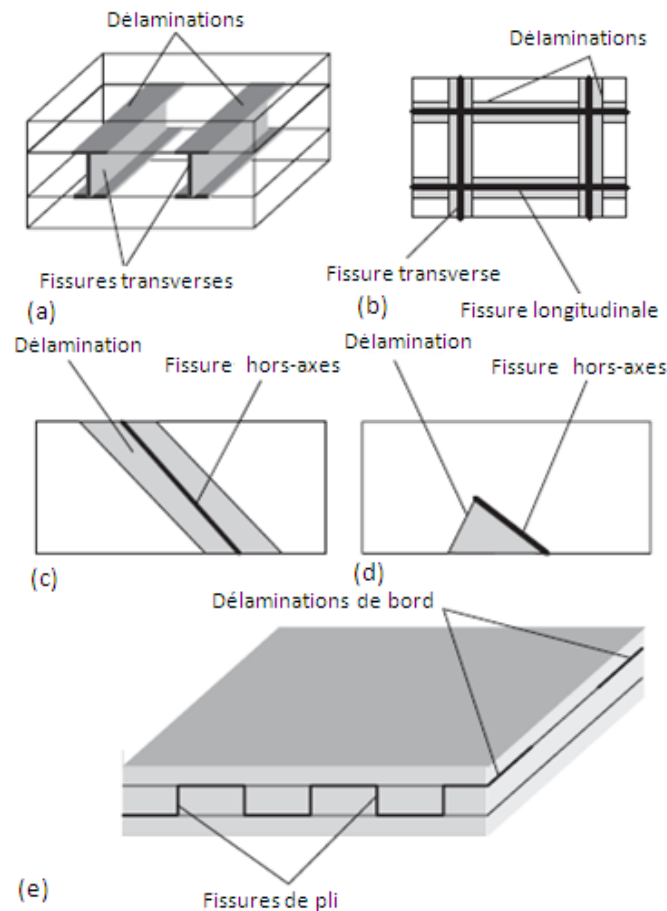


Figure 1.1 : Types d'endommagement intra- et inter-laminaire observés dans les composites stratifiés croisés et orientés [5].

Expérimentalement, le premier type d'endommagement observé dans un composite stratifié croisé, soumis à un chargement de traction statique uni-axiale ou en fatigue est généralement la fissuration transverse qui cause une concentration des contraintes inter-laminaire aux bouts de fissures. Une contrainte inter-laminaire élevée peut entraîner le décollement des couches aux interfaces des plis ayant des orientations différentes. La délamination ou fissuration longitudinale est l'endommagement ultérieur à la fissuration transverse. Il est bien connu, expérimentalement, que la rigidité d'une structure composite est réduite avec l'évolution de la fissure transverse. De plus, une structure composite endommagée par la délamination et / ou la fissuration longitudinale devient inutilisable [6]. Le développement de ces endommagements dans les stratifiés est un processus très complexe [7].

Les trois modes d'endommagements dans les composites stratifiés (fissuration transverse, fissuration longitudinale et la délamination) ont été le sujet de recherches approfondies,

théoriquement et expérimentalement. Plusieurs théories ont étudié l'initiation et le développement de ces modes d'endommagement et décrit leur effet sur la dégradation des propriétés thermomécaniques d'un stratifié [5, 8-10]. M. Kashtalyan et C. Soutis [5] ont également étudié l'effet de la délamination de bout de fissure sur la réduction de la rigidité pour les stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$ avec décollement local le long de la fissure transverse et longitudinale. Ils ont examiné aussi l'effet de l'angle d'orientation θ des plis extérieurs sur la réduction de propriétés de la rigidité d'un stratifié symétrique équilibre de type $[\pm\theta/90_n]_s$ dans le plan. Même auteurs [8] ont analysé, par l'utilisation d'une approche basée sur un modèle de contrainte équivalente (Equivalent Constraint Model, ECM), la dégradation de la rigidité des stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$ due à la fissuration matricielle dans les deux plis, à 90° (fissuration transverse) et à 0° (fissuration longitudinale). Ils ont utilisé une analyse de type shear lag 2D pour déterminer le champ de contraintes dans les stratifiés croisés endommagés et pour la description de la dégradation de la rigidité. Ils ont constaté que les propriétés de la rigidité réduite d'un stratifié endommagé dépendent explicitement de la densité de fissures de la couche à 90° et implicitement de la densité de fissure de la couche externe à 0° . L'effet de la fissuration matricielle sur le comportement d'un stratifié Verre / Epoxyde croisé de type $[0_m/90_n]_s$ et symétrique déséquilibre de type $[0/45]_s$ sous chargement statique et les prédictions théoriques de réduction de la rigidité dues aux endommagements basés sur un Modèle de Contrainte Equivalent (Equivalent Constraint Model, ECM), qui tient compte de la fissuration matricielle simultanée dans toutes les couches du stratifié, ont été analysées par D.T.G.Katerelos et al [10].

Plusieurs approches analytiques et numériques ont été proposées. Henaff- Gardin et al [11-13] ont utilisé l'analyse de type shear lag pour étudier les composites stratifiés croisés endommagés par double fissures matricielles périodiques (c.-à-d. fissuration transverse et longitudinale) sous chargement thermique et bi-axial général dans le plan. Ils ont supposé que le déplacement dans le plan dans chaque couche varie paraboliquement à travers l'épaisseur du stratifié dans la direction normale au plan de fissure et est constant dans l'autre direction. J.-M. Berthelot et al [14], ont été étudié l'effet de la fissuration transversale de stratifiés croisés, soumis à une charge de traction uni axiale, et la réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissure, par analyse éléments finis et comparer leurs résultats obtenus avec des modèles analytiques. Leurs comparaisons montrent qu'une analyse shear lag parabolique complète donne une assez bonne approximation de la distributions des contraintes

et déformation obtenues par l'analyse des éléments finis. Par conséquent, les résultats déduits de ce modèle analytique et de l'analyse des éléments finis sont en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus pour différents stratifiés croisés (Fibre de Verre-E / Epoxy $[0/90_2/0]_r$ et fibre de Graphite / Epoxy de types AS4-3502 $[0/90_n/0]_r$ avec $n=2; 4$ et P3051-F05 $[0/90_n/0]_r$ avec $n=5; 10$). Les auteurs R. Joffe et J. Varna [15] ont analysés la réduction de la rigidité de stratifiés symétriques de type $[S/90_n]_s$ contenant des sous-stratifiés orthotropes (S) et couche à 90° fissurés. Expressions Closed-form relatives (reliant) le changement de la rigidité à la densité de fissure transversale ont dérivées. Le modèles de distribution contraintes (shear lag, approche variationnelle et analyse par éléments finis (FEA)) ont adoptées pour les configurations $[S/90_n]_s$ et utilisées pour calculer la fonction de perturbation de contrainte. Leurs prédictions ont été comparées avec les données expérimentales pour des stratifiés de Fibres de Verre / Résine Epoxy de type $[\pm\theta/90_4]_s$ $\theta = 0, 15, 30$ et 40 . Généralement, ils ont conclu que le modèle EF légèrement sous-estime la réduction de rigidité tandis que les deux modèles théoriques utilisés conduisent à des résultats similaires, légèrement inférieure à celle expérimentale.

Les changements dans les propriétés mécaniques en raison de la fissuration transverse dans les stratifiés croisés âgés hygrothermique ont examinées théoriquement (analyse shear lag modifié) par K.H. Amara et *al* [16]. Dans leurs travaux, la dégradation des propriétés longitudinale et transversales des stratifiés croisés âgés hygrothermique due à la fissuration matricielle transversale sous chargement longitudinale a été étudiée. Ils ont observé une grande réduction du coefficient de Poisson lorsque la densité de fissure augmente, tandis que peu ou pas de réduction dans le module de Young. Aussi, ils ont étudié l'effet de la température et de l'humidité sur la réduction des propriétés élastiques des stratifiés croisés contenant fissuration transversale. Leurs résultats montrent que la dégradation de module d'Young longitudinal en raison de la fissuration transversale est réduite avec la diminution de concentration de l'humidité et de la température, en particulier lorsque la densité de la fissure prend des valeurs plus élevées. En revanche (d'autre part), aucun effet des conditions hygrothermiques a été observée sur la dégradation du coefficient de Poisson en raison de la fissuration transversale. A. Benzair et *al* [17] ont étudié l'influence de la fissuration matricielle transverse sur l'évolution du module longitudinal et du coefficient de Poisson d'un stratifié orienté à haute température par le modèle d'analyse de type shear lag parabolique complet et cisaillement progressif avec une certaine modification. A. Tounsi et *al* [18] ont été

utilisés une analyse shear lag modifiée, en tenant compte de la notion de fonction de perturbation de contrainte, pour évaluer l'effet des fissures transversales sur la réduction de rigidité dans les composites de stratifiés des plis orientés âgés. Ils sont trouvés que les résultats de leurs études représentent bien la dépendance de la dégradation des propriétés élastiques sur la densité des fissures, des conditions hygrométriques et l'orientation des fibres des couches extérieures. Effet de fissures transversales sur la réduction de la rigidité des stratifiés croisés âgés hygrothermique ont été examinés par M. Bouazza *et al* [19]. Ils ont développés et appliqués un modèle analytique, basé sur la notion de la fonction de perturbation de contrainte, pour étudier l'effet des fissures multiples des stratifiés croisés âgés sur la rigidité d'un composite stratifié. L'effet hygrothermique (variation de la température et de l'humidité) est pris en compte pour évaluer les changements dans le module longitudinal dû à la fissuration transversale. Leurs résultats obtenus représentent bien la dépendance de la dégradation des propriétés élastiques sur la densité des fissures et conditions hygrothermiques. Les mêmes études effectuée par E.A. Adda-bedia *et al* [20] mais pour stratifiés à plis orientées âgés hygrothermiques.

Dans l'étude de S. G. Lim & C. S. Hong [21], une analyse de shear lag modifiée, en tenant compte de la notion de cisaillement de la couche interlaminaire, a été utilisé pour évaluer l'effet des fissures transversales sur la réduction de la rigidité et le changement dans le coefficient de dilatation thermique dans du composites stratifiées croisées. Leurs résultats représentent bien la dépendance de la dégradation des propriétés thermomécaniques de la configuration du stratifié. Tandis que, J.-L. Robiere *et al* [22-25] ont examiné, avec le modèle d'approche variationnel utilisé le principe du minimum de l'énergie complémentaire et analyse EF, l'influence des fissures transverses et longitudinales sur la distribution de champ de contraintes, la perte de rigidité et la réduction de coefficient de Poisson d'un stratifié croisé soumis aux essais de traction statique ou de fatigue. Ils ont utilisé deux modèles analytiques (les deux modèles dépendent de la fonction $\varphi(z)$ [2, 23]) qui dépendent de différentes distributions du champ de contraintes dans la direction de l'épaisseur du stratifié. Les trois modèles sont destiné à prédire l'évolution des propriétés mécaniques des stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$ avec $m+n = 8$ afin de mieux comprendre l'évolution de l'endommagement. Ils ont prouvé qu'il est nécessaire de prendre en compte les contraintes résiduelles thermiques de fabrication dans les calculs. De plus, pour décrire avec précision le stratifié dégradé, l'étude montre que, pour les grandes densités de fissures, la présence de la délamination provoque une réduction supplémentaire de la rigidité. Lorsque l'endommagement transverse

devient important, Robiere et al [23] ont observé une réduction du coefficient de Poisson. Par contre, l'endommagement longitudinal augmente ce coefficient. A. Hosoi et H. Kawada [26] ont employé aussi la méthode de l'approche variationnel pour évaluer l'état de contraintes 3D dans les stratifiés croisés de type $[S/90_n]_s$ qui contiennent des fissures transverses dans les plis à 90° , où (S) est un sous-stratifié orthotrope. Ils ont utilisé le principe du minimum de l'énergie complémentaire pour trouver une approximation optimale de l'énergie de déformation du composite.

La plupart des modèles analytiques et numériques existants sont confinés aux stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$ et de l'état de chargement simple. Ces modèles ont utilisé les théories suivantes: analyse par l'approche variationnel [6, 22-27], la théorie de l'élasticité non linéaire [28], approche de mécanique de la rupture [29], analyse par éléments finis [4, 6, 23, 25, 27, 36] et analyse de type shear lag [7, 8, 11-13, 17, 31-33, 35-42] et la méthode d'équation d'état d'espace [43]. Dans le modèle shear lag, le déplacement dans les couches fissurées est supposé soit linéaire soit parabolique [11,12]. Diverses études de la fissuration transverse ne considèrent pas la fissuration longitudinale et la délamination [7, 13, 17, 26, 32, 34-36, 43, 44]. Tandis que, à un certain niveau de l'endommagement de la fissuration transverse et selon l'architecture du stratifié et la nature du matériau, le second type de l'endommagement peut se produire (la fissuration longitudinale ou délamination) [6, 22-25, 27, 33, 38]. Par conséquence, l'interaction entre ces deux ou trois modes d'endommagement n'est pas encore claire. La raison principale est la difficulté de modéliser correctement un stratifié contenant ces deux ou trois modes d'endommagement simultanément. Une solution analytique exacte est bien sur impossible à obtenir [23].

Actuellement, dans les bureaux d'études, des calculs éléments finis en théorie de plaque ou coque stratifiée, combinés avec des critères basés sur les contraintes, sont généralement utilisés pour prédire la dégradation et la rupture des stratifiés [4]. En ce qui concerne la fissuration matricielle, les prévisions sont reliées à la contrainte de premier pli endommagé sous chargement quasi-statique, à l'initiation de la fissure lors des tests, à la densité de fissures saturée, à l'évolution des constantes élastiques et au champ de contraintes [11]. La grande majorité des études examine le comportement et les propriétés des stratifiés composites avec des fissures matricielles en supposant que les fissures sont régulièrement espacées et donc l'analyse peut être restreinte à un segment représentant un stratifié contenant une fissure (cellule élémentaire) [5, 6, 11, 12, 22-24, 26, 27, 30-36, 38, 40, 43-46]. Ces

fissures matricielles, aussi connues sous le nom d'endommagement intra-laminaire, ont été largement étudiées, expérimentalement et théoriquement. Les tests expérimentaux ont montré que, dans le cas d'un stratifié croisé standard, les fissures se développent presque instantanément et traversent toute la largeur du stratifié [10]. Les fissures matricielles, développées dans les plis du stratifié, s'arrêtent à l'interface ou causent un endommagement inter-laminaire menant à une délamination due aux contraintes inter-laminaires élevées à l'interface du pli [5]. En effet, les contraintes inter-laminaires engendrées autour des bords libres et entre les couches sont connues comme sources principales de délamination des composites stratifiés créés aux bords libres [47].

A cet effet, le but du travail actuel est d'étudier la dégradation des propriétés thermomécaniques pour deux différents stratifiés croisés de type $[0_m / 90_n]_s$, Fibre en Graphite / Résine en Epoxyde et Fibre en Verre / Résine en Epoxyde et aussi la distribution des contraintes, due à la fissuration transverse. Une analyse élément finis est appliquée et comparée avec d'autres travaux expérimentaux et, évidemment, avec modèles théoriques de type shear lag et / ou variationnel, pour une fissure traversant la largeur d'une cellule élémentaire caractérisée par un rapport géométrique de la fissuration transverse \bar{a} .

CHAPITRE 02

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

CHAPITRE 02

Généralités sur les matériaux composites

Dans ce chapitre, nous nous proposons de présenter une étude bibliographique sur les matériaux composites mettant en évidence les différents types de composites (monocouche, stratifiée, sandwich, ...). Nous allons nous attarder de la nomenclature utilisée afin de décrire une structure stratifiée, l'hypothèse de Kirchhoff puisqu'il s'agit d'une théorie qui permet entre autre de rendre compte du comportement mécanique de composites stratifiés. Les modèles analytiques simples et les équations qui relient les déformations aux contraintes en premier lieu et aux efforts ensuite qui sont proposés dans la plupart des études sur les composites stratifiés sera notre centre d'intérêt aussi.

2.1. Introduction

2.1.1. Les matériaux composites structuraux

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature des constituants, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. [48, 49]. Ils sont généralement sous forme de :

- **Monocouches**

Les monocouches ou pli, représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes [49].

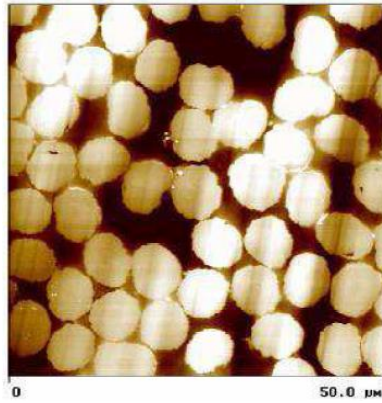


Figure 2. 1 : Microstructure observée dans une section transversale de composite unidirectionnel en carbone-époxy [50].

▪ Stratifiés

Un stratifié est constitué de l'empilement de deux ou plusieurs couches (appelées également plis) entreposées successivement, et se comportant comme une seule entité structurelle. Chaque couche est formée de fibres unidirectionnelles de faible section (d'environ 10 à 20 μm de diamètre), imprégnées de résine. Chaque couche est désignée par son orientation, qui est l'angle que fait la direction des fibres avec la direction de référence (qui est généralement la direction des fibres unidirectionnelles orientées à 0°).

La séquence d'empilement du stratifié désigne le nombre et l'orientation des couches successives, en parcourant le stratifié d'une face à l'autre. Ainsi, un stratifié est dit unidirectionnel si l'angle entre deux couches consécutives est nul, c'est à-dire, toutes les fibres sont alignées selon une seule direction. Par contre, un stratifié est multidirectionnel si les couches successives, sont orientées les unes par rapport aux autres à des angles autres que 0° tel, les multidirectionnels $[0/+45/-45/90/90/+45/-45/0]_r$ [48, 49].

Le choix de la nature et de la séquence d'empilement dépend de l'utilisation, en l'adoptant au mieux au champ de contraintes imposées, à savoir [51] :

- Les couches unidirectionnelles présentent une grande rigidité. Elles constituent un type de stratifié de base au quel peut se ramener, en principe, tout autre type de stratifié.
- Les mats sont peu résistants en traction.
- Une stratification croisée est sensible au délaminage inter-laminaire.
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

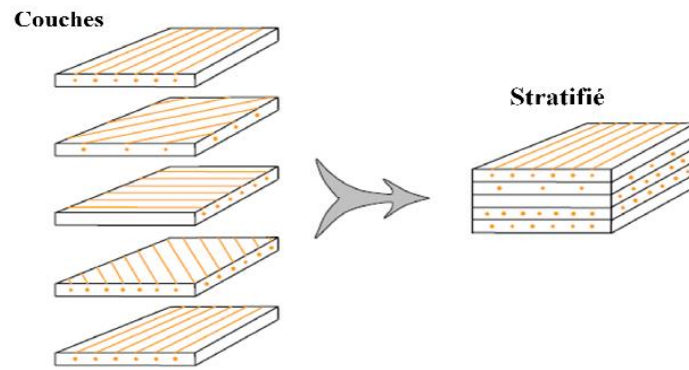


Figure 2.2 : Construction d'un stratifié [52].

▪ Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux), de grande rigidité et de faible épaisseur, enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique [49, 45].

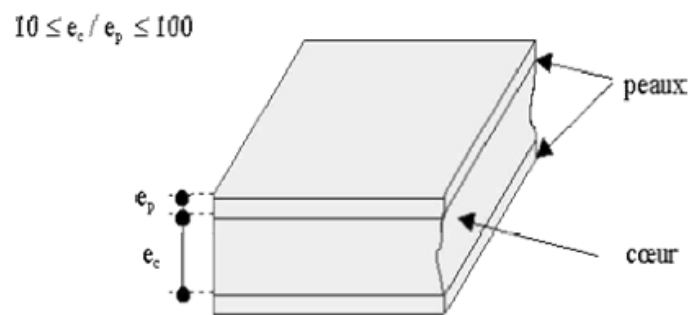


Figure 2.3 : Plaque sandwich [49].

Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Cependant, nous pouvons distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renfort utilisés (Tableau 2.1 et 2.2). Du point de vue des applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes [47].

| Type de matrice | Exemples | Propriétés |
|-----------------|--|--|
| Polymère | résine époxyde, polyester, PEEK, PEKK, PPS etc.... | Matériaux pouvant être de type thermodurcis ou thermoplastiques, faible résistance à la température, légers et facilement moulables, généralement ductiles. |
| Métaux | aluminium, magnésium, tungstène | Matériaux mis en œuvre par fonderie ou par métallurgie des poudres de moyenne à haute température de fusion, à bonne résistance mécanique intrinsèque, à densité moyenne à très élevée, généralement ductiles mais parfois fragiles. |
| Céramiques | carbure de Silicium (SiC) | Matériaux généralement mis en œuvre par frittage de poudres, à très haute température de fonctionnement, à densité élevée, mais fragiles. |

Tableau 2.1 : Type de matrices utilisées dans les composites courants [47]

| Type de renfort | Propriétés | Matrice utilisée couramment |
|---|---|--|
| fibres ou paillettes de verre | fibres de verre de type E ou R, à différents diamètres, souvent en tissus ou bobines, à faible coût, à densité moyenne et à propriétés mécaniques moyennes | polymères: polyester, résine époxyde, thermoplastiques |
| fibres de carbone | fibres obtenues par carbonisation de polymères ou frittage, souvent en tissu pré-imprégnés ou bobines, à coût moyen à élevé selon la qualité, de faible densité, à excellentes rigidité et limite de rupture, à faible résilience, à usinage relativement difficile mais possible avec des outils diamantés ou en métal dur | polymères: résine époxyde, PPS, PEEK, PEKK etc... |
| fibres d'aramide (Kevlar) | fibre polymère, souvent en tissu ou pré-imprégnée, parfois combinée en fils mixtes aramide-carbone, à densité faible, à rigidité moyenne à élevée, à hautes ténacité et résilience, très difficile à découper et usiner | polymères: résine époxyde, PPS, PEEK, PEKK etc... |
| fibres polypropylène à haute ténacité | fibre polymère, souvent en tissu ou pré-imprégnées, à densité très faible, à rigidité faible à moyenne, à très hautes ténacité et résilience mais difficile à découper et usiner | polymères: résine époxyde, polyester etc... |
| fibres / particules d'alumine (oxyde d'aluminium) | fibre à très hautes rigidité et limite de rupture, à densité élevée, à prix élevé et à très haute limite de température | métaux: aluminium, magnésium; céramiques |

Tableau 2.2 : Propriétés des renforts couramment utilisés [47]

2.2. Les constituants des matériaux composites

2.2.1. Les renforts

Les renforts représentent les principales composantes porteuses des matériaux composites, en lui apportant ses hautes performances (rigidité, résistance à la rupture, etc.) Les qualités recherchées pour le renfort sont surtout des caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec la résine ainsi qu'une facilité de mise en œuvre et un faible coût. La concentration du renfort est un paramètre déterminant pour les propriétés du matériau composite. Elle est mesurée par la fraction volumique ou par la fraction massique du renfort, et elle est généralement comprise entre 0,3 et 0,7.

L'anisotropie du matériau composite est une caractéristique fondamentale, elle est déterminée par l'orientation des fibres dans le cas où le renfort est constitué de fibres. Il faut cependant noter qu'au-delà de la concentration et de l'orientation des renforts, leurs distributions plus ou moins homogène a une influence sur la résistance du composite. En effet pour une concentration donnée du renfort, une distribution uniforme assure une homogénéité du matériau, par contre une distribution non uniforme engendre l'initiation de la rupture dans les zones pauvres en renfort introduisant ainsi une diminution de la résistance du composite [51].

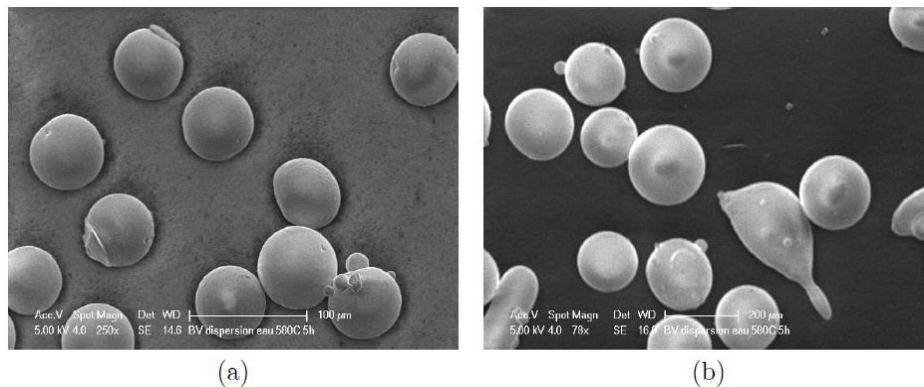


Figure 2.4 : Micrographie des renforts : (a) petite taille, (b) grande taille [53].

2.2.2. La matrice

La matrice est constituée de résine mélangée, pour améliorer ses caractéristiques, à une charge qui facilite aussi la mise en œuvre et diminue le coût de la production. Le mélange est considéré mécaniquement comme une phase homogène, et nous obtenons ainsi un matériau composite formé d'un renfort et d'une matrice.

Le rôle de la matrice est d'assurer le lien entre les fibres et de transmettre les sollicitations. Elle assure la résistance du matériau dans le sens transverse du renfort, ainsi qu'une protection physico-chimique des fibres contre les agents nocifs de l'environnement. De plus elle

conditionne directement la tenue thermique, et la résistance à la compression et au cisaillement inter-laminaire.

Les résines utilisées doivent être assez déformables et doivent présenter une bonne compatibilité avec les fibres. Elles doivent également avoir une masse volumique faible de manière à conserver au matériau composite des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées. Il existe deux grandes familles de résines polymériques, soient les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables [51].

2.2.3. Interface

Au cours de l'élaboration du composite, il se produit une interaction physico-chimique entre la matrice et la surface de la fibre. Cette interface "fibre-matrice" conditionne largement la résistance globale du matériau composite, notamment, la résistance au cisaillement inter laminaire, la résistance à la corrosion et au vieillissement, et la tenue en fatigue et aux chocs. La qualité et le type de l'interface dépendent essentiellement de la nature et de la morphologie du renfort et de la matrice, de la nature de l'agent de couplage ou de l'ensimage de la fibre et des conditions de mise en œuvre [51].

2.3. Nomenclature d'une structure stratifiée

Tout d'abord, une structure stratifiée, d'épaisseur H , est constituée d'une certaine quantité n_p de plis qui sont empilés les uns sur les autres tels que montrés à la figure 2.5. Chaque couche est définie par une épaisseur (h_k), une orientation (θ_k) et un matériau (mat_k). Le repère global de la structure est défini par les axes x , y et z tel qu'indiqué sur la figure. L'axe x étant orienté sur la longueur de la structure, l'axe y sur sa largeur et finalement l'axe z à travers son épaisseur. L'origine de l'axe z est située au plan moyen de la structure. Le premier pli (pli 1) est situé à l'extrémité inférieure de la structure (à $z = -H/2$) tandis que le dernier pli (pli n_p) est celui situé à l'extrémité supérieure (à $z = H/2$) [54].

Le repère local d'un pli est défini par l'axe 1 et 2 qui lui sont propres et qui sont orientés respectivement de façon parallèle et perpendiculaire à la direction des fibres. En fait, (1,2) est un repère dans lequel on a mesuré les propriétés. Tel que montré à la figure 2.5, l'orientation (θ_k) du pli k est définie par l'angle que fait son repère local (1,2) par rapport au repère global (x, y) de la structure. Les propriétés globales du stratifié dépendent des propriétés du matériau de chaque pli, de son épaisseur et de l'orientation de celui-ci. Donc, c'est en variant

l'orientation des plis et en choisissant les matériaux appropriés que l'on peut concevoir une structure stratifiée aux propriétés désirées.

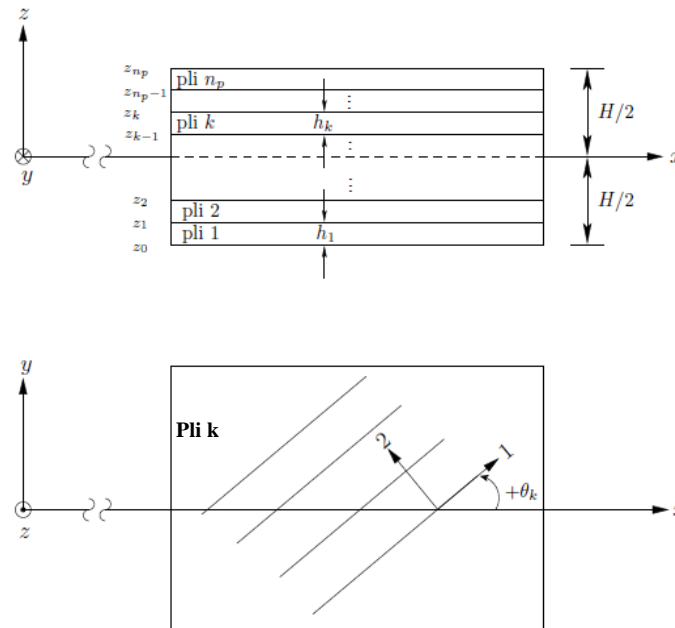


Figure 2.5 : Nomenclature d'un stratifié – Orientation d'un pli [54].

Afin de pouvoir caractériser une structure stratifiée, il faut connaître la séquence d'empilement des plis qui la constitue. C'est-à-dire, il faut déterminer l'orientation de chaque pli et l'ordre dans lequel ils sont empilés. Par exemple, considérons des structures stratifiées dont les plis sont d'épaisseur constant et sont composés d'un même matériau. La séquence d'empilement du stratifié montré à la figure 2.6 est $[+45/-45/0/+45/-45/0]_T$. L'orientation de chaque pli est définie entre les crochets en commençant par le pli extérieur inférieur, en passant par le plan moyen jusqu'au pli extérieur supérieur. L'indice T à l'extérieur des crochets signifie que la séquence est définie au complet. Toutefois, on peut simplifier cette représentation en regroupant les séquences qui se répètent à l'intérieur de l'empilement en utilisant un indice signifiant le nombre de fois que cette séquence est répétée. Dans ce cas, la séquence $(+45/-45/0)$ est répétée deux fois à l'intérieur de la structure. De plus, si deux plis consécutifs sont de mêmes orientations mais de signes opposés, on peut utiliser le signe \pm devant cette orientation afin d'alléger la représentation. La nomenclature simplifiée de ce stratifié est alors $[(\pm 45/0)_2]_T$.

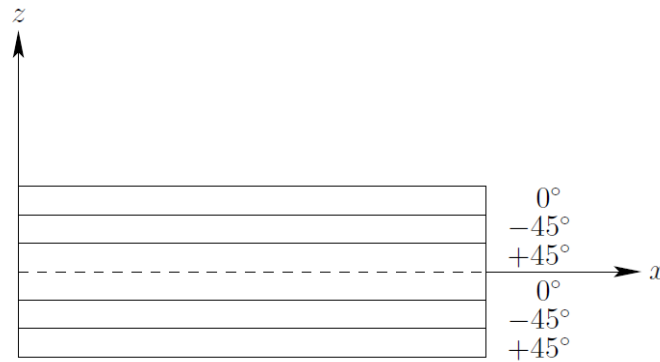


Figure 2.6 : Exemple d'un stratifié $[(\pm 45/0)_2]_r$ [54].

On peut réduire davantage la nomenclature d'une structure stratifiée si celle-ci est symétrique par rapport au plan moyen ($z=0$). La façon de faire est de simplement représenter la première moitié de la séquence et d'utiliser l'indice S à l'extérieur des crochets afin d'indiquer la symétrie. Par exemple, la séquence d'empilement du stratifié donné à la figure 2.7 est la suivante $[+45/-45/0/0/-45/+45]_r$. Ce stratifié est symétrique par rapport à son plan moyen et peut alors être représenté de façon simplifiée par $(\pm 45/0)_s$ [54].

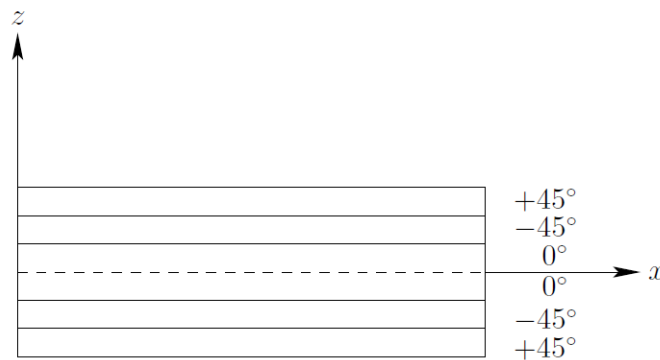


Figure 2.7 - Exemple d'un stratifié $(\pm 45/0)_s$ [54].

2.4. Modélisation analytique

2.4.1. Les modèles théoriques d'un composite

Nous allons présenter les différents modèles utilisés dans la littérature. Nous posons M pour les modules de Young (représentant soit E le module d'élasticité, soit G le module de cisaillement lorsque les deux sont applicables), σ pour les résistances à la traction ou contrainte de traction et V pour les fractions volumiques. Les indices c , f et m signifient respectivement qu'il s'agit du composite, de la fibre ou de la matrice. La plupart de ces modèles supposent une adhésion parfaite entre la fibre et la matrice, et que la loi de Hooke

(domaine de l'élasticité linéaire) soit vérifiée. Dans les modèles suivants, l'orientation n'est pas forcément prise en considération [55].

- **Modèles série et parallèle**

$$M_c = M_f V_f + M_m V_m \quad \text{Éq. 2-1}$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad \text{Éq. 2-2}$$

Le modèle série est aussi connu sous le nom de loi des mélanges. Ce modèle est simple et représente la borne supérieure de Voigt (1889) en ce qui concerne les modules alors que le modèle de Reuss (1929) représente la borne inférieure. Le modèle de Voigt fait l'hypothèse de la déformation constante contrairement au modèle de Reuss qui fait l'hypothèse d'une contrainte constante. Ces deux types d'approches sont des approximations qui ne tiennent nullement compte de la morphologie du matériau [55].

$$M_c = \frac{M_m M_f}{M_m V_f + M_f V_m} \quad \text{Éq. 2-3}$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_m \sigma_f}{\sigma_m V_f + \sigma_f V_m} \quad \text{Éq. 2-4}$$

Outre les bornes de Voigt et Reuss, Hashin et Shtrikman (1963) ont eux aussi défini une borne supérieure et inférieure pour les composites (basées sur les limites de Kerner). L'hypothèse avancée est d'ordre géométrique puisqu'il s'agit de considérer une phase continue et l'autre discontinue [55].

- **Modèle de Hirsch**

$$M_c = x(M_m V_m + M_f V_f) + (1-x) \frac{M_m M_f}{M_m V_f + M_f V_m} \quad \text{Éq. 2-5}$$

$$\sigma_c = x(\sigma_m V_m + \sigma_f V_f) + (1-x) \frac{\sigma_m \sigma_f}{\sigma_m V_f + \sigma_f V_m} \quad \text{Éq. 2-6}$$

Ce modèle est une combinaison des deux précédents modèles (série et parallèle). Le paramètre x est un paramètre qui détermine en quelque sorte le transfert de contraintes entre la fibre et la matrice. x est toutefois considéré comme principalement déterminé par l'orientation des fibres, la longueur des fibres et la concentration de contraintes aux extrémités des fibres [55].

▪ Modèle Halpin-Tsai

Les équations d'Halpin-Tsai permettent de prédire de façon simple et semi-empirique les modules d'un composite renforcé par des fibres courtes alignées. Il s'agit d'une généralisation de l'équation de Kerner (1956) qui, elle, traite des renforts sphériques.

$$M_c = M_m \left(\frac{1 + \zeta \eta'' V_f}{1 - \eta'' V_f} \right) \quad \text{Éq. 2-7}$$

$$\sigma_c = \sigma_m \left(\frac{1 + \zeta \eta' V_f}{1 - \eta' V_f} \right) \quad \text{Éq. 2-8}$$

$$\eta = \frac{M_f / M_m - 1}{M_f / M_m + \zeta} \quad \text{Éq. 2-9}$$

$$\eta' = \frac{\sigma_f / \sigma_m - 1}{\sigma_f / \sigma_m + \zeta} \quad \text{Éq. 2-10}$$

Dans ces équations ζ est un facteur dépendant de la géométrie des fibres, de la distribution des fibres et de la fraction volumique de fibres. Les termes η'' et η' prennent en compte, respectivement, le module et la résistance relative de la fibre et de la matrice.

La connaissance des équations précédentes peut conduire à l'estimation du module d'un composite renforcé par des fibres courtes non orientées (orientation aléatoire) dans le plan ou dans le volume. Le module d'élasticité d'un composite à fibres courtes orientées aléatoirement dans le plan est calculé par l'approche de Tsai-Pagano (équation 2.11, fondée sur la théorie de l'élasticité orthotrope).

$$E_c = \frac{3}{8} E_{//} + \frac{5}{8} E_{\perp} \quad \text{Éq. 2-11}$$

Si l'on se réfère aux modèles de Voigt et Reuss, qui dans le cas d'un composite unidirectionnel, nous donne respectivement le module longitudinal (//) et le module perpendiculaire (\perp) du composite, alors l'équation de Tsai-Pagano peut s'écrire :

$$E_c = \frac{3}{8} E_{cVoigt} + \frac{5}{8} E_{cReuss} \quad \text{Éq. 2-12}$$

L'approche Halpin-Kardos est sensiblement la même avec cette fois un composite quasi-isotrope. En effet le composite est considéré comme étant un stratifié composé de couches unidirectionnelles (dont les modules sont estimés par Halpin-Tsai) empilées selon un angle précis (le tout étant symétrique du point de vue angulaire). Cette dernière approche sera généralisée lors de la présentation de la théorie des stratifiés [55].

- **Modèle Halpin-Tsai modifié**

$$M_c = M_m \left(\frac{1 + \zeta \eta V_f}{1 - \eta \phi V_f} \right) \quad \text{Éq. 2-13}$$

$$\sigma_c = \sigma_m \left(\frac{1 + \zeta \eta' V_f}{1 - \eta' \phi V_f} \right) \quad \text{Éq. 2-14}$$

$$\phi = 1 + \left(\frac{1 - \phi_{max}}{\phi_{max}^2} \right) V_f \quad \text{Éq. 2-15}$$

$$\zeta = K - 1 \quad \text{et} \quad K = 1 + 2\ell/d \quad \text{Éq. 2-16}$$

Le terme ϕ_{max} qui est la fraction maximum de « Packing » du renfort. Cette fraction prend différentes valeurs selon la nature de l'arrangement des fibres. Par exemple, pour un arrangement carré des fibres la fraction vaut 0,785 alors que pour un « Packing » aléatoire des fibres sa valeur est donnée à 0,82. Le terme ℓ/d représente le facteur de forme de la fibre [55].

- **Modèle de Cox**

$$M_c = M_f V_f \left(1 - \frac{\tanh \beta \ell / 2}{\beta \ell / 2} \right) + M_m V_m \quad \text{Éq. 2-17}$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f \left(1 - \frac{\tanh \beta \ell / 2}{\beta \ell / 2} \right) + \sigma_m V_m \quad \text{Éq. 2-18}$$

$$\beta = \left[\frac{2\pi G_m}{M_f A_f \ln(R/r)} \right]^{1/2} \quad \text{Éq. 2-19}$$

Où r est le rayon de la fibre, G_m est le module de cisaillement de la matrice, A_f est l'aire de la fibre et R est la distance entre les fibres centre à centre. Selon le « Packing » R prend différentes valeurs (arrangement hexagonal ou carré).

- **Modèle modifié de Bowyer et Bader**

Ce modèle se fonde sur l'hypothèse que la résistance à la traction d'un composite thermoplastique renforcé par des fibres courtes est la somme des contributions provenant des fibres sub-critiques et super-critiques et celle de la matrice.

$$M_c = M_f K_1 K_2 V_f + M_m V_m \quad \text{Éq. 2-20}$$

$$\sigma_c = \sigma_f K_1 K_2 V_f + \sigma_m V_m \quad \text{Éq. 2-21}$$

$$K_2 = \ell - \frac{\ell_c}{2\ell} \quad \text{si } \ell > \ell_c \quad \text{Éq. 2-22}$$

$$K_2 = \frac{\ell}{2\ell_c} \quad \text{si } \ell < \ell_c \quad \text{Éq. 2-23}$$

Avec ℓ_c la longueur critique de la fibre. K_1 est le facteur d'orientation de la fibre et K_2 le facteur tenant compte de la longueur des fibres [55].

▪ **La loi des mélanges selon Cox, Kelly et Bigg**

$$M_c = M_f V_f \eta + M_m (1 - V_f) \quad \text{Éq. 2-24}$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f \eta + \sigma_m (1 - V_f) \quad \text{Éq. 2-25}$$

Avec cette fois un seul facteur η qui prend en compte la fibre.

Pour Cox (1952) η prend différentes valeurs et plus particulièrement pour des fibres distribuées aléatoirement dans le plan $\eta = 1/3$. En ce qui concerne Kelly et Tyson (1965) dans le cas de fibres orientées mais discontinues une longueur de fibre critique intervient : $\ell_c = \sigma_f * d / \tau$. Bigg (1985), dans le cas d'un composite à fibres courtes, considère un facteur de forme critique $(\ell/d)_c$. L'équation prend la forme suivante :

$$\sigma_c = \sigma_f V_f \varepsilon_0 \varepsilon_1 + \sigma_m V_m \quad \text{Éq. 2-26}$$

Avec ε_0 tenant compte de l'orientation des fibres (≤ 1) et ε_1 le paramètre tenant compte du transfert de charge par rapport au facteur de forme rapporté au facteur de forme critique soit: $(\ell/d)_c = \sigma_f / (2\tau_1)$. τ la contrainte de cisaillement et τ_1 le cisaillement interfacial [55].

▪ **Modèle de renforcement selon Nielsen**

$$\sigma_{tu} = \sigma_{mu} \left(\frac{E_{22}}{E_m} \right) (1 - V_f) \quad \text{Adhésion pauvre} \quad \text{Éq. 2-27}$$

$$\sigma_{tu} = \sigma_{mu} \left(\frac{E_{22}}{E_m} \right) (1 - V_f^{2/3}) \quad \text{Adhésion efficace} \quad \text{Éq. 2-28}$$

La résistance transverse d'un composite unidirectionnel (σ_{tu}) est exprimée en fonction de la qualité de l'adhésion, du module de traction de la matrice et du module transverse du composite (Mallick, 1997). Cette relation se présente sous une forme un peu différente de l'expression employée par Nielsen et Landel (1994).

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon} = \frac{1}{(1 - V_f^{1/3})} \quad \text{Éq. 2-29}$$

$$\sigma_{tu} = \sigma_{mu} \left(\frac{E_{22}}{E_m} \right) (1 - V_f^{1/3}) \quad \text{Adhésion parfaite} \quad \text{Éq. 2-30}$$

Cette expression n'est valable que s'il est admis que l'élongation est la même pour le polymère qu'il soit ou non chargé [55].

Concernant le coefficient de Poisson ν_{12} , les fibres et la matrice n'ont pas les mêmes valeurs. Ils n'auront donc pas la même contraction dans la direction 2 suite à l'application d'une force en direction 1. Leur contraction combinée donne la contraction totale dans la direction 2 qui est utilisée pour calculer le coefficient de Poisson ν_{12} . La formule est donc,

$$\nu_{12} = \nu_{12f} V_f + \nu_m V_m \quad \text{Éq. 2-31}$$

Où ν_{12f} et ν_m sont respectivement le coefficient de Poisson des fibres dans le plan 1-2 et le coefficient de Poisson de la matrice [56].

Tous les modèles présentés sont des approximations, plus ou moins réalistes et plus ou moins simples, reposant à la fois sur l'expérience et la théorie. Cependant, à l'exception de Nielsen et Landel (1994), aucun de ces modèles ne prend véritablement en compte la nature de l'adhésion entre la fibre et la matrice. Il n'est d'ailleurs pas plus question de la porosité du matériau composite que de véritables réseaux fibreux qui pourraient, de par leur structure, participer aux caractéristiques mécaniques [55].

2.5. Les différents Types des matériaux

2.5.1. Les matériaux anisotropes

Sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie. La loi de Hooke peut être exprimée par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} ; i, j, k, l = 1, 2, 3 \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} ; i, j, k, l = 1, 2, 3 \end{cases} \quad \text{Eq. 2-32}$$

Le tenseur de rigidité C_{ijkl} a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse S_{ijkl} et pour raison de la symétrie des contraintes σ_{ij} et de déformation ε_{ij} , il y a une réduction des coefficients à 36, parmi ces derniers, 21 sont indépendants. Les distorsions angulaires sont exprimées en fonction des déplacements $\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}; \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}; \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ [57].

On peut écrire la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-33}$$

En inversant 2-33, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-34}$$

2.5.2. Matériaux monocliniques

Si le matériau a un plan de symétrie, monoclinique, quelques constantes sont zéro et le comportement peut être décrit avec 13 constants [57]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ & C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-35}$$

2.5.3. Matériaux orthotropes (orthogonalement anisotropes)

Sont des matériaux qui possèdent 3 plans de symétrie orthogonaux, ces derniers ont les mêmes propriétés ou caractéristiques mécanique. Ce qui réduit le nombre des coefficients indépendants à 9 (Fig.2.8). Ex: matériau composite (assemblage de pli à 0-90) [57].

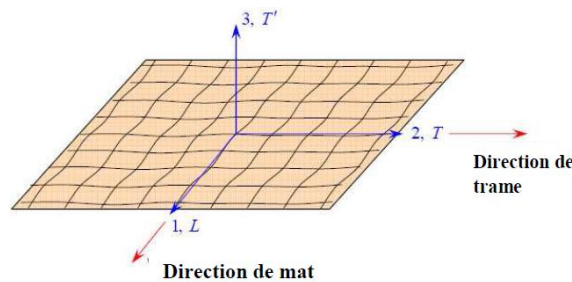


Figure 2.8 : Matériaux orthotrope [52].

La loi de Hooke généralisé s'écrit suivant l'une des formes matricielles, introduisant soit les constantes de rigidité C_{ij} soit les composantes de souplesse S_{ij} [51, 57] :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad \text{Éq. 2-36}$$

Avec [47]:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} ; & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} ; & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} ; \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} ; & C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} ; & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} ; & C_{44} &= G_{23} ; \\ C_{55} &= G_{13} ; & C_{66} &= G_{12} ; & \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} , \end{aligned}$$

En inversant le système (2-36) on obtient :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad \text{Éq. 2-37}$$

Les coefficients de souplesse sont définis par :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} ; & S_{22} &= \frac{1}{E_2} ; & S_{33} &= \frac{1}{E_3} ; & S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} ; & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} ; & S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_2} ; \\ S_{23} &= \frac{-\nu_{32}}{E_3} ; & S_{13} &= \frac{-\nu_{31}}{E_3} ; & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} , \end{aligned}$$

Avec

- E_{ij} et G_{ij} sont le module d'élasticité et Coulomb (cisaillement) respectivement.
- ν_{ij} est le coefficient de Poisson pour la déformation transversale dans la direction j quand la contrainte est appliquée selon la direction i .

A cause de la symétrie:

- $\frac{\nu_{21}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{E_{11}}$
- $\frac{\nu_{31}}{E_{33}} = \frac{\nu_{13}}{E_{11}}$
- $\frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}}$

2.5.4. Matériaux transversalement isotropes

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie. Ex : Matériau composite (pli unidirectionnel à 0°), bois Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc :

- $C_{22} = C_{33}$
- $C_{12} = C_{13}$
- $C_{55} = C_{66}$

Suivant la référence [57] :

- $E_y = E_z$
- $\nu_{xz} = \nu_{xy}$
- $\frac{1}{G_{xz}} = \frac{2(1+\nu_{yz})}{E_y}$

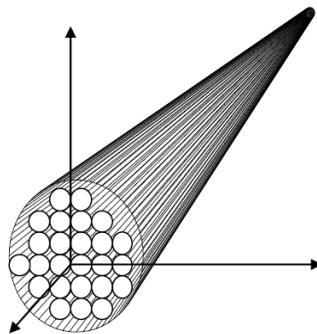


Figure 2.9 - Matériau transversalement isotrope [57].

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients. La loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ & Sym & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-38}$$

2.5.5. Matériaux quasi isotropes transverses

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 6 coefficients, et la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sym & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-39}$$

2.5.6. Matériaux quasi isotropes

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 3 coefficients. La loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sym & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-40}$$

2.5.7. Matériaux isotropes

C'est un matériau dont les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions. Autrement dit, aucune direction privilégiée, matériau macroscopiquement homogène. Ex : Acier, inox, plastique :

- $E_1 = E_2 = E_3 = E$
 - $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu$
 - $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$
- Éq. 2-41

Ce qui réduit le nombre de coefficients élastiques indépendants à 2 (C_{11}, C_{12}).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-42}$$

En termes de constantes techniques :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-43}$$

Avec : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

2.6. La Théorie Classique des Stratifiés (ou théorie des laminés)

2.6.1. Introduction

Les couches en composite ne sont jamais utilisées seules, mais sous la forme de stratifiés, à savoir en plaques obtenues par superposition de plusieurs plis, le plus souvent identiques. Les caractéristiques mécaniques de rigidité et résistance des couches normalement utilisées rendent en fait impossible l'utilisation de couches simples principalement à cause de :

- Une trop forte anisotropie de la réponse élastique, au moins pour les couches à renfort unidirectionnel.
- Une trop faible résistance en direction transversale.
- Une trop petite épaisseur (≈ 0.125 mm pour les pre-pregs en carbone), ce qui rend d'un côté la rigidité, surtout celle flexionnelle, trop petite et de l'autre donne un fort danger d'instabilité à la compression, dans les deux directions.

Les couches sont donc utilisées pour composer des stratifiés, par superposition d'un nombre suffisant de couches, selon les besoins conceptuels. Cette opération permet de créer des plaques dont les caractéristiques mécaniques, de rigidité et résistance, peuvent être l'objet de la conception. En fait, tandis que pour une plaque en matériau homogène c'est l'épaisseur le seul paramètre à dimensionner une fois le matériau choisi, un stratifié a des caractéristiques mécaniques finales qui dépendent aussi bien de celles des couches qui le composent que du nombre de ces couches et surtout de leur orientation relative.

L'utilisation d'un stratifié nécessite donc d'une phase de conception et de vérification. La phase de conception doit comprendre normalement la conception de la résistance et de la rigidité. Il faut spécifier que ceci comporte non seulement la détermination de requis minimaux de résistances et rigidité, selon les besoins de la conception, mais aussi le type de réponse élastique (orthotrope, isotrope etc.). Un stratifié est, en définitive, un *matériau complexe complètement à concevoir*. La théorie classique des stratifiés (ou CLT, l'acronyme anglais de Classical Lamination Theory [58]) répond à cet but; son objectif est en fait celui de fournir un modèle mathématique capable de synthétiser la réponse élastique d'un stratifié comme si celui-ci était constitué simplement par une seule couche équivalente. Les résultats de la théorie classique sont condensés dans une loi, qui formalise la réponse élastique de la plaque monocouche équivalente du stratifié, et ayant la même épaisseur totale. En effet, la théorie classique des stratifiés constitue la méthode de changement d'échelle méso-macro la plus largement utilisée dans les approches multi-échelles analytiques publiées. Cette méthode simple permet d'estimer, à partir du chargement macroscopique appliqué (flux d'efforts membranaires et de moments de flexion et de torsion), les champs de contraintes et de déformations à l'échelle du pli.

A l'échelle mésoscopique, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, les plis unidirectionnels sont supposés :

- Présenter un comportement élastique isotrope transverse.
- Travailler en contraintes planes ($\sigma_3 = \sigma_5 (= \tau_{13}) = \sigma_4 (= \tau_{23}) = 0$). [58]

2.6.2. Historique

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948) [57].

2.6.3. Equations pour un milieu élastique linéaire

Cette section a pour but de poser les bases mécaniques sur lesquelles sera développée la théorie des stratifiés. Dans le cadre de petites déformations, les relations entre les déformations et les déplacements s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v^o}{\partial x} + \frac{\partial u^o}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w^o}{\partial xy} + \frac{\partial^2 w^o}{\partial yx} \right) \end{cases} \quad \text{Éq. 2-44}$$

Avec ε_x , ε_y les déformations normales selon x , y et γ_{xy} la déformation de cisaillement. u, v, w sont les déplacements suivant les trois directions de l'espace ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). L'équation des déplacements u, v, w d'un point (x, y, z) en fonction des déplacements du plan moyen (u^o, v^o, w^o) et de la coordonnée z de ce point par rapport au plan moyen est donnée par [54, 55]

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^o(x, y) - z \frac{\partial w^o}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v^o(x, y) - z \frac{\partial w^o}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w^o(x, y) \end{cases} \quad \text{Éq. 2.45}$$

L'équation 2.44 peut être écrite de façon plus compacte par l'équation 2.46 avec l'introduction des courbures κ_x^o , κ_y^o et κ_{xy}^o définies par l'équation 2.47.

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_x^o(x, y) + z \kappa_x^o(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y, z) = \varepsilon_y^o(x, y) + z \kappa_y^o(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) = \gamma_{xy}^o(x, y) + z \kappa_{xy}^o(x, y) \end{cases} \quad \text{Éq. 2.46}$$

$$\kappa_x^o = -\frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} \quad ; \quad \kappa_y^o = -\frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \quad ; \quad \kappa_{xy}^o = -2 \frac{\partial^2 w^o}{\partial x \partial y}, \quad \text{Éq. 2.47}$$

L'équation 2.47 est la courbure de la torsion de plan moyen. Où les déformations de plan moyen sont [59] :

$$\varepsilon_x^o(x, y) = \frac{\partial u^o}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y^o(x, y) = \frac{\partial v^o}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy}^o(x, y) = \frac{\partial v^o}{\partial x} + \frac{\partial u^o}{\partial y}$$

Les relations entre les contraintes et les déformations pour un milieu élastique linéaire anisotrope en 3 dimensions s'expriment selon la matrice suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-48}$$

Cette expression prend en compte les symétries $C_{ij} = C_{ji}$. Dans le cas d'un matériau isotrope, la matrice des rigidités s'exprime plus simplement en fonction de deux constantes indépendantes C_{11} et C_{12} qui sont directement reliées au module d'élasticité E et au coefficient de Poisson ν selon les équations suivantes :

$$C_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad C_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{Éq. 2-49}$$

$$\text{Avec} \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

Le module de cisaillement G est aussi exprimé.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-50}$$

Ces relations permettent de décrire le comportement élastique linéaire d'un matériau [55].

2.6.4. Construction d'un laminé isotrope à partir de plis unidirectionnels

Certains travaux sur les composites renforcés par des fibres proposent d'étudier un matériau isotrope plan en considérant qu'il s'agit de l'empilement de couches unidirectionnelles identiques mais orientées et disposées de façon symétrique ou non. Dans

toutes ces études il est question de construire un laminé isotrope par différentes méthodes statistiques, micromécaniques ou aléatoires [49]. Giurgiutiu et Reifsnider (1994) ont développé une méthode pour calculer les résistances d'un composite fibreux aléatoire. Ils ont estimé les propriétés d'un laminé unidirectionnel équivalent en utilisant à la fois des modèles micromécaniques (Halpin-Tsai), une méthode inverse et pour finir la théorie des laminés. La comparaison, avec des données expérimentales sur une composite fibre de verre/époxy, a donné d'excellents résultats.

L'empilement d'un certain nombre de couches nécessite d'ajouter de nouvelles hypothèses afin de pouvoir dériver les équations qui gouvernent le comportement constitutif d'un laminé. L'hypothèse des contraintes planes est maintenue et l'adhésion est supposée parfaite entre chaque couche. Ceci signifie une déformation d'ensemble sans discontinuité de déplacement. Ces deux hypothèses impliquent que les contraintes et les déformations sont constantes selon l'épaisseur de chacune des couches. Les déformations du laminé peuvent être caractérisées par les déformations ε^o d'une couche simple appelée couche du plan moyen. Il faut noter qu'une distribution constante des déformations du laminé global n'implique pas une distribution constante des contraintes à travers l'épaisseur totale du laminé, alors qu'elle demeure (reste) constante pour chaque couche.

Il faut ajouter qu'il est souvent plus judicieux d'étudier une déformation en pure flexion sans déformation plane. Dans le cadre de la flexion des laminés, les hypothèses classiques de flexion pure sont celles de Kirchhoff-Love (figures 2.10 et 2.11) puisqu'elles sont les fondements de la théorie classique des stratifiés. La première hypothèse est qu'un segment perpendiculaire au plan moyen conserve sa perpendicularité, sa rectitude et la seconde hypothèse fait état de la conservation de la longueur du segment. De plus, comme les structures stratifiées sont minces, on suppose aussi un état plan de contraintes. Ces hypothèses associées à l'hypothèse d'une adhésion parfaite (avec un adhésif fin et indéformable) constituent la "classical lamination theory" ou CLT. Il faut noter que la supposition d'une déformation nulle dans l'épaisseur de la CLT n'est pas valable dans le cadre de la supposition des contraintes planes. Cependant, la CLT donne une base pour de nombreuses analyses et s'avère adéquate dans la plupart des applications d'ingénierie [55].

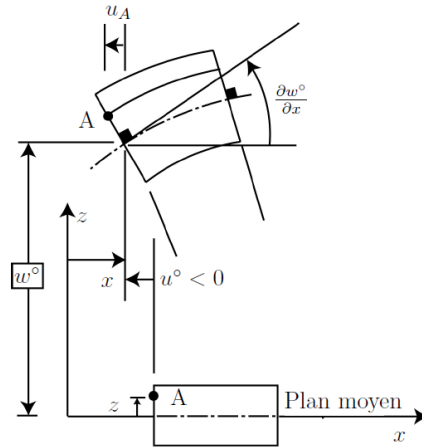


Figure 2.10 : Forme déformée (plan (x, z)) [54]

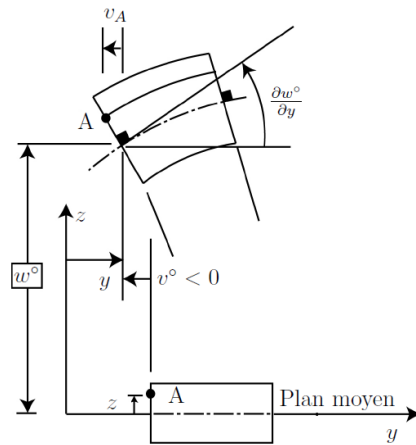


Figure 2.11 : Forme déformée (plan (y, z)) [54]

2.6.5. Mise en équation d'un laminé

Pour des raisons de simplification, il est commode de remplacer la matrice des rigidités par une matrice équivalente mettant en relation les contraintes et moments résultants (N, M) avec les déformations du plan moyen ϵ^o et les courbures de flexion κ (Guitard, 1987 ; Ashbee, 1993). Les équations constitutives pour une plaque ou laminé deviennent :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{Éq. 2-51}$$

Les coefficients A_{ij} sont liés à la traction ou à la compression dans le plan, appelée matrice de rigidité en membrane. Les composantes A_{ij} de la matrice $[A]$ sont données par l'équation 2.52. Les coefficients B_{ij} sont liés aux couplages, appelée matrice de couplage membrane-flexion. Les composantes B_{ij} de la matrice $[B]$ sont données par l'équation 2.53. Les coefficients D_{ij} sont liés à la flexion, appelée matrice de rigidité en flexion. Les composantes D_{ij} de la matrice $[D]$ sont données par l'équation 2.54. Contribution des différents paramètres :

- Étirement ou compression du plan moyen ($\varepsilon_x^o, \varepsilon_y^o$).
- Cisaillement du plan moyen (γ_{xy}^o).
- Flexion du laminé (κ_x, κ_y).
- Torsion du laminé (κ_{xy}).

Cette expression matricielle va nous permettre d'exprimer plus simplement les relations entre les contraintes et les déformations dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes (modélisation de contraintes de traction dans le plan du panneau composite) ou alors dans le cas de déformations de flexion (Halpin, 1992) [54, 55].

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p} (Q_{ij}^*)_k (z_k - z_{k-1}) \quad \text{Éq. 2-52}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p} (Q_{ij}^*)_k \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2} \quad \text{Éq. 2-53}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p} (Q_{ij}^*)_k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \quad \text{Éq. 2-54}$$

2.6.6. Source de simplification

Les coefficients B_{ij} sont nuls dès lors que le laminé est constitué de plis qui sont symétriquement identiques par rapport au plan moyen (spécificité et positionnement) (figure 2.12). Cela signifie que le couplage membrane-flexion ne sera pas présent dans ces stratifiés. De plus, si le stratifié est équilibré, les coefficients A_{16} et A_{26} sont aussi nuls.

Les coefficients D_{16} et D_{26} s'annulent si le laminé est entièrement composé de pli à 0° ou 90° . De même, ces deux coefficients peuvent s'annuler (la somme des termes s'annulent) si pour chaque pli θ_k le laminé possède un équivalent (par rapport au plan moyen) par le biais

d'un pli $-\theta_k$. Ceci implique, dans ce cas de figure, que le laminé n'est plus symétrique et par conséquent $B_{ij} \neq 0$.

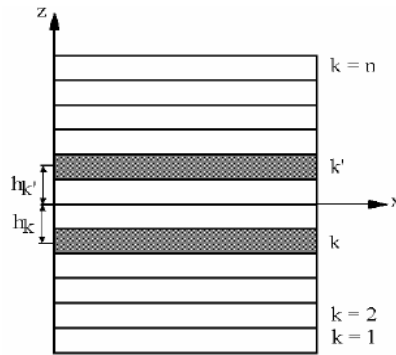


Figure 2.12 : Stratifié symétrique avec couches identiques k et k' [59].

Lorsqu'un stratifié est symétrique et équilibré, l'équation 2-51 est simplifiée et est représentée par l'équation 2.55.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & & & \\ A_{12} & A_{22} & 0 & & & \\ 0 & 0 & A_{66} & & & \\ \hline & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & & & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ & & & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{Éq. 2-55}$$

2.6.7. Théorie des laminés isotropes

Le stratifié isotrope est constitué de laminés orthotropes. La notion d'un laminé orthotrope (une couche ou plaque mince) oblige à définir précisément les axes du matériau (1,2,3) et à connaître les transformations nécessaires à un passage aux coordonnées cartésiennes usuelles (x, y, z). Etant donnée la nature bidimensionnelle de l'étude d'un laminé, les relations de transformation sont données en deux dimensions (Équations 2-56 et 2-57). La matrice de transformation $[\theta_i]$, $i=1,2$ est indépendante du matériau avec toutefois le postulat d'un continuum [59].

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad \text{Éq. 2-56}$$

Ou $\{\sigma_x\} = [\theta_1]\{\sigma_l\}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -cs \\ s^2 & c^2 & cs \\ 2cs & -2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-57}$$

Ou $\{\varepsilon_x\} = [\theta_2]\{\varepsilon_l\}$; où $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$.

▪ **Loi de Hooke généralisée (matériau orthotrope)**

La loi de Hooke généralisée est une loi de dépendance entre les contraintes et les déformations, donc c'est une proportionnalité entre les déplacements élastique d'un corps et les efforts aux quels il est soumis. Il existe 9 constantes élastiques indépendantes dans la matrice des complaisances d'un matériau spécialement orthotrope pour un état de contrainte tridimensionnelle (Eq. 2-58). Un état de contraintes planes nous ramène à deux dimensions et suppose que les contraintes σ_3 , τ_{23} et τ_{13} soient nulles, ce qui implique que γ_{23} et γ_{13} soient nulles aussi et que $\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2$ (Fig. 2.13). Il est désormais plus simple d'exprimer les équations constitutives d'un matériau orthotrope dans un état de contraintes planes par une matrice des complaisances plus compacte (Eq. 2.59).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-58}$$

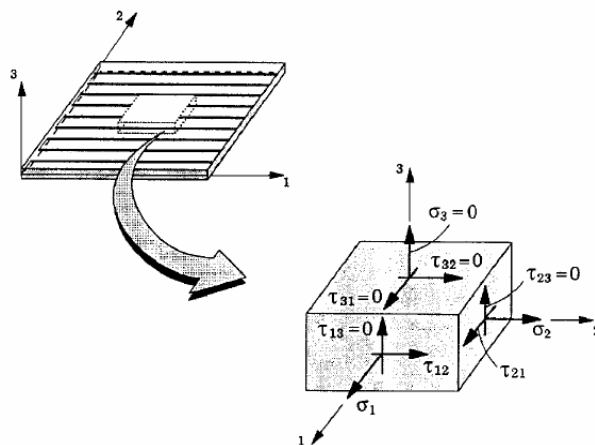


Figure 2.13 : Une stratifié dans un état plan de contrainte [59]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \\ S_{12} & S_{22} & \\ & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Éq. 2-59}$$

Voir la sous-section 2.6.3 pour l'expression de la matrice de souplesse S_{ij} en termes de constantes techniques.

▪ **Équations constitutives d'un laminé orthotrope (plan (1,2))**

L'hypothèse principale qui conduit à l'établissement des relations constitutives entre les contraintes et les déformations est la notion d'état de contraintes planes (cela provient de la théorie des poutres et des plaques sous le nom d'hypothèses de Kirchhoff). La loi de Hooke pour un matériau homogène orthotrope dans un état de contraintes planes (Eq. 2-60) s'exprime comme suit dans le repère principal du matériau (1,2). On rappelle que chaque pli possède son repère local dans lequel les propriétés mécaniques ont été mesurées. Les composantes de la matrice $[Q_{ij}]_{(k)}$ sont données par les équations 2-61 à 2-63.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \\ Q_{12} & Q_{22} & \\ & & 2Q_{66} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad \text{Éq. 2-60}$$

Où

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad ; \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad \text{Éq. 2-61}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad \text{Éq. 2-62}$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad \text{et} \quad Q_{16} = Q_{26} = 0 \quad \text{Éq. 2-63}$$

Il y a donc 4 constants élastiques indépendants que sont les deux modules d'Young (modules d'élasticité) E_{11} , E_{22} , le module de cisaillement G_{12} et le coefficient de Poisson ν_{12} . L'autre coefficient de Poisson ν_{21} est obtenu par les propriétés de symétrie de la matrice des rigidités par rapport à sa diagonale (Eq. 2-64) [55].

$$\frac{E_{11}}{\nu_{12}} = \frac{E_{22}}{\nu_{21}} \quad \text{Éq. 2-64}$$

▪ **Équations constitutives d'un laminé orthotrope (plan(x,y))**

Les axes principaux (locaux) d'une couche (1,2) ne sont pas forcément les axes de référence du laminé (x,y), c'est pourquoi il est important d'exprimer les relations constitutives (Eq. 2.65) en fonction du repère (x,y) (Fig. 2.14). Pour ce faire, nous allons utiliser la matrice de passage $[\theta_i]$, $i = 1,2$ et son inverse [55].

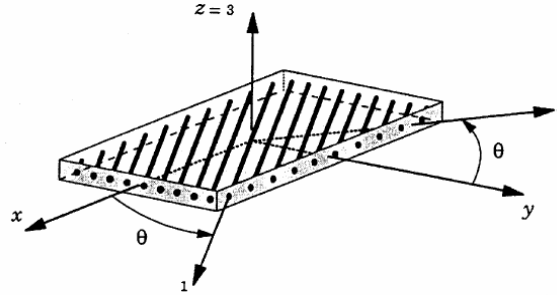


Figure 2.14 : Stratifié avec systèmes de coordonnées globales (x, y, z) et locales (1,2,3) [59].

$$\{\sigma_x\} = [\theta_1][Q][\theta_2]^{-1} \{\varepsilon_x\} \tag{Eq. 2.65}$$

Soit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)}$$

La matrice de rigidité réduite $[Q_{ij}^*]$, relie les composantes de la contrainte et de déformation dans le système de coordonnées du stratifié (x, y) [59] :

$$[Q^*] = [\theta_1][Q][\theta_2]^{-1} \tag{Eq. 2.66}$$

Les termes ou composants de Q_{ij}^* ; $i, j = 1,2,6$ sont définis par :

$$\begin{aligned} Q_{11}^* &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 \\ Q_{12}^* &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2 + Q_{12}(c^4 + s^4) \\ Q_{16}^* &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})cs^3 \\ Q_{22}^* &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 \\ Q_{26}^* &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s \\ Q_{66}^* &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \end{aligned} \tag{Eq. 2.67}$$

La construction d'un laminé résulte en un empilement de plis unidirectionnels. La recherche d'isotropie implique un empilement d'un ensemble de plis identiques selon tous les angles possibles. Le point de départ de cette démarche est la connaissance des caractéristiques mécanique du pli unidirectionnel soit E_{11}, E_{22}, G_{12} et ν_{12} . Par la suite, les coefficients de la matrice de rigidité réduite $Q_{ij}; i, j = 1, 2, 6$ sont calculés puis transformés en $Q_{ij}^*; i, j = 1, 2, 6$, pour être en accord avec les axes de référence du laminé (x, y) . Soit dans le cadre de contraintes et déformations planes :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{Èq. 2.68}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \text{Èq. 2.69}$$

La collection entière de forces et de moments résultantes pour un stratifié a n_p couches est défini comme :

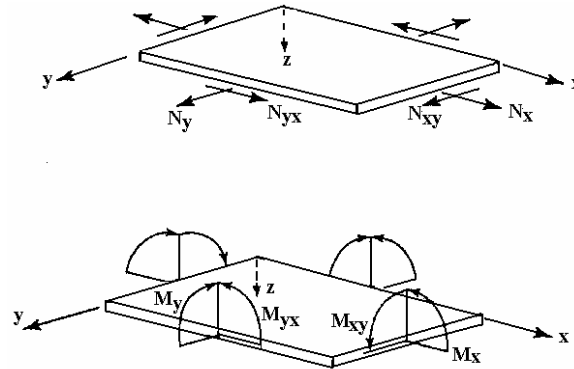


Figure 2.15 : Forces et moments dans le plan sur couche [59].

Soit

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{H} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^{n_p} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1}) dz \quad \text{Èq. 2-70}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n_p} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k (z_k - z_{k-1}) \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix}$$

Où z_k et z_{k-1} sont définis dans la figure 2.16.

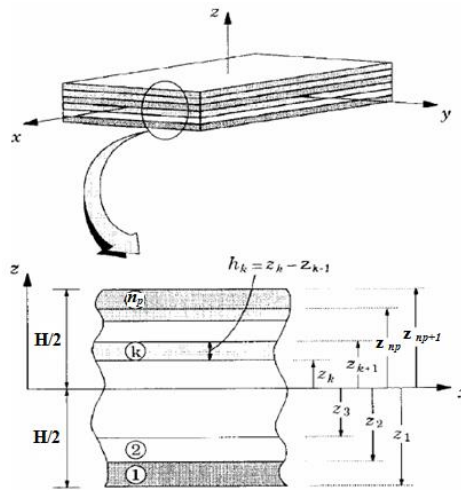


Figure 2.16 : Géométrie d'un stratifié a n_p couches [59]

$$\begin{cases} A_{11} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q_{11}^*(\theta) d\theta \\ A_{11} \text{ ou } A_{12} = (3Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) + 3Q_{22})/8 \\ A_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})(1/8) + Q_{66}(6/8) = G_{12} \end{cases} \quad \text{Éq. 2-71}$$

A partir des relations entre les A_{ij} et les modules de l'ingénieur on obtient les caractéristiques d'un stratifié (symétrique et équilibrée) isotrope plan équivalent (Eq. 2-72).

$$E'_x = \frac{1}{H} \left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \right) \quad \text{Èq. 2-72}$$

$$E'_y = \frac{1}{H} \left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}} \right) \quad \text{Èq. 2-73}$$

$$\nu'_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \text{Èq. 2-74}$$

De plus
$$G'_{xy} = \frac{A_{66}}{H} \quad \text{Èq. 2-75}$$

Les équations 2-72 et 2-73 définissent les modules d'Young apparents de la structure dans les directions x et y respectivement. L'équation 2-74 définit le Coefficient de Poisson apparent et l'Eq. 2-75 le module de cisaillement apparent de la structure [54, 55, 59].

2.7. Déformations dans chaque pli

Si en calculant l'inverse de $[ABD]$, on peut relier les déformations du plan moyen d'un stratifié en fonction des forces et des moments appliqués sur ce plan moyen. Cette relation est donnée par l'équation 2-76.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} = [ABD]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Èq. 2-76}$$

Après avoir déterminé les déformations du plan moyen, on peut calculer les déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} d'un pli k en fonction de la position z par rapport au plan moyen de ce pli avec l'équation 2-77.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^o \\ \kappa_y^o \\ \kappa_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad \text{Èq. 2-77}$$

Ces déformations sont ensuite multipliées par la matrice $[Q_{ij}^*]$ de ce pli afin d'obtenir les contraintes dans le système de coordonnées (x, y) . De plus, un changement de repère peut être effectué sur ces déformations afin de passer du repère (x, y) au repère $(1,2)$. Finalement, les contraintes dans le système de coordonnées $(1,2)$ peuvent être calculées en multipliant les déformations par la matrice $[Q_{ij}]_{(k)}$ de ce pli [54].

2.8. Critères de rupture

L'analyse de résistance d'un matériau hétérogène et anisotrope présente des problèmes inexistantes dans le cas de matériaux classiques, monophasés et isotropes. Ceci a eu comme effet la proposition d'un certain nombre de critères de résistance conçus ad hoc pour ce type de matériaux [60].

2.8.1. Critère de déformation maximale

Le critère de déformation maximale souvent utilisé en pratique. Selon ce critère, la rupture survient lorsqu'une des trois équations 2-78 n'est pas vérifiée. Lors de la rupture, le stratifié subit des déformations dans le repère local $(\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et $\gamma_{12})$ dépassant une des limites ultimes

admissibles en compression (ε_{1C} , ε_{2C}), en traction (ε_{1T} , ε_{2T}) ou en cisaillement (γ_{12F} , $-\gamma_{12F}$). Le facteur de rupture par déformation maximale λ_ε est défini par l'équation 2-79. Dans cette équation, on attribue à ε_{1F} la valeur de la limite ultime de déformation en traction dans la direction 1 (ε_{1T}) si ε_1 est positif et la limite ultime de déformation en compression (ε_{1C}) si ε_1 est négatif. Le même principe est appliqué à ε_{2F} et à γ_{12F} . C'est-à-dire que ε_{2F} prend la valeur de la limite ultime de déformation en compression ou en traction en fonction du signe de ε_2 et que γ_{12F} prend une valeur positive ou négative de la limite admise en cisaillement en fonction du signe de γ_{12} . Ensuite, pour chaque pli on détermine le rapport entre les limites ultimes de déformations et les déformations calculées dans leurs directions respectives. Le plus petit de ces rapports détermine la direction dans laquelle la déformation est le plus près de la limite ultime pour ce pli. Ainsi, le pli ayant le plus petit de ces rapports est celui le plus près de la rupture. C'est alors ce rapport qui détermine le facteur de rupture par déformation λ_ε .

$$\begin{cases} \varepsilon_{1C} < \varepsilon_1 < \varepsilon_{1T} \\ \varepsilon_{2C} < \varepsilon_2 < \varepsilon_{2T} \\ -\gamma_{12F} < \gamma_{12} < \gamma_{12F} \end{cases} \quad \text{Èq. 2-78}$$

$$\lambda_\varepsilon = \min \left[\min \left(\frac{\varepsilon_{1F}}{\varepsilon_1^i}, \frac{\varepsilon_{2F}}{\varepsilon_2^i}, \frac{\gamma_{12F}}{\gamma_{12}^i} \right) \right] \quad \text{pour } i=1, \dots, n_p \quad \text{Èq. 2-79}$$

Le même critère de type déformation maximale, mais avec différente forme, a été utilisé par B. Ludovic [61]. Il s'écrit comme suit :

$$\frac{\varepsilon_{ij}^n}{\varepsilon_{ij}^R} = d_{ij}^n \quad \text{Èq. 2-80}$$

Où ε_{ij}^n est la déformation du matériau à l'incrément n , et ε_{ij}^R la déformation maximale admissible dans la direction considérée ij (i et j varient de 1 à 3 et correspondent aux axes d'orthotropes du matériau). La rupture apparaît si $d_{ij}^n \geq 1$ [61].

2.8.2. Critère de la contrainte maximale

Le critère de la contrainte maximale est basé sur les valeurs critiques de chacune des composantes de contrainte dans les directions d'orthotropes du composite unidirectionnel. Rappelons son expression :

$$\max \left\{ \frac{\sigma_1}{X^t}; \frac{\sigma_1}{-X^c}; \frac{\sigma_2}{Y^t}; \frac{\sigma_2}{-Y^c}; \left| \frac{\tau_{12}}{\underline{S}} \right| \right\} = 1 \quad \text{Èq. 2-81}$$

Où :

- X^t et X^c sont les résistances en tension et en compression longitudinale respectivement;
- Y^t et Y^c sont les résistances en tension et en compression transversale respectivement;
- \underline{S} est la résistance en cisaillement;

L'enveloppe de rupture correspondante dans l'espace des contraintes $\{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}$ est un parallélépipède droit. Lorsque transformée dans l'espace des déformations $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}\}$, cette enveloppe de rupture devient un parallélépipède dont les angles apparaissent déformés dû au couplage entre les déformations et les contraintes dans les directions perpendiculaires (effet Poisson). Le parallélogramme représentant cette enveloppe dans le plan $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ pour l'unidirectionnel carbone/époxy et représenté à la figure 2.17.

La forme de l'enveloppe de rupture dans le plan $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est invariante pour des valeurs de γ_{12} variant entre $-\underline{S}/G_{12}$ et $+\underline{S}/G_{12}$. Ceci est dû au fait que le critère de la contrainte maximale ne considère pas d'interaction entre les composantes de contrainte et que la déformation de cisaillement est indépendante des déformations et des contraintes dans les directions parallèle et perpendiculaire aux fibres.

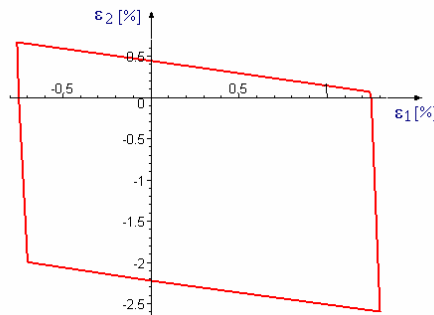


Figure 2.17 : Enveloppe de rupture d'un pli unidirectionnel en carbone/époxy selon le critère de la contrainte maximale dans l'espace des déformations [62].

Pour un stratifié croisé [0/90], l'enveloppe de rupture est obtenue par superposition des enveloppes correspondant aux plis à 0° et 90°. Pour permettre cette superposition, les enveloppes sont représentées dans le plan $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ des déformations normales par rapport aux axes de références. La figure 2.18 montre les enveloppes de rupture selon le critère de la

contrainte maximale pour les plis à 0° et les plis à 90° . Selon ce critère, l'initiation de la rupture (rupture du premier pli) est définie par l'intersection des deux enveloppes. L'enveloppe correspondant à la rupture finale (rupture du dernier pli) est définie par l'union des deux enveloppes.

Pour les mêmes raisons avancées plus haut (cas du composite unidirectionnel), la forme de l'enveloppe de rupture d'un stratifié croisé dans le plan $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ demeure (reste) invariante pour des valeurs de γ_{12} comprises entre $-\underline{S}/G_{12}$ et $+\underline{S}/G_{12}$.

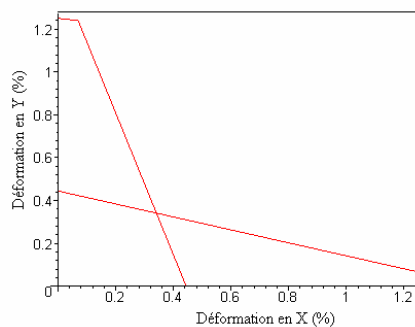


Figure 2.18 : Enveloppe de rupture d'un stratifié croisé en carbone/époxy selon le critère de la contrainte maximale dans l'espace des déformations [62]

2.9. Modélisation par ANSYS

ANSYS est l'un des plus grands développeurs et fournisseur de logiciels de simulation numérique au monde. Ses produits majeurs sont des logiciels qui mettent en œuvre la méthode des éléments finis, afin de résoudre des modèles discrétisés [63]. Ce produit permet d'effectuer des simulations mécaniques. Ses principales capacités sont :

- Analyse statique.
- Analyse modale.
- Analyse harmonique (réponse forcée).
- Analyse temporelle ou transitoire.
- La gestion de différentes situations non linéaires (contacts, plasticité des matériaux, grands déplacements ou grandes déformations).
- Simulations en matière de mécanique des fluides.
- Permet de résoudre des modélisations mettant en jeu des phénomènes électromagnétiques [57].

2.10. Conclusion

Dans ce chapitre, on a fait appel aux définitions et notions générales liées aux matériaux composites dans le but de donner une vision assez large, d'une présentation classique des composites et leurs caractérisations mécaniques. En fait, l'attention est portée sur certains sujets classiques : les matériaux composites structuraux, nomenclature d'une structure stratifiée, modélisation analytique, les différents types des matériaux composites, théorie classique des stratifiés, mise en équation d'un laminé, critère de rupture et modélisation numérique.

CHAPITRE 03

ANALYSE DE L'ENDOMMAGEMENT PAR FISSURATION TRANSVERSE DES STRATIFIÉS CROISÉS

CHAPITRE 03

Analyse de l'endommagement par fissuration transverse des stratifiés croisés

Ce chapitre du mémoire de thèse est dédié au sujet de l'endommagement de matériaux plus particulièrement des stratifiés composites à renforts de fibres long. Un aperçu est descriptif sur les principaux modes d'endommagement dans un stratifié croisé à fibres long tels que : fissuration intra-laminaire, délaminage et rupture des fibres. On s'intéresse à l'endommagement par fissuration transversale sur les stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$ soumis à des chargements thermomécanique monotone [64].

La modélisation du comportement mécanique, plus particulièrement, utilisant l'approche shear lag et la Méthode des Eléments Finis en formulation des contraintes plane ont été exhibé. La présentation de la formulation de fissuration transversale est inspirées des travaux de R. Joffe et *al* [15, 29] et J.-M. Berthelot et *al* [14].

3.1. Introduction

L'étude des matériaux composites comporte plusieurs thèmes tels que procédés de fabrication, élasticité anisotrope, micromécanique, etc. Nous nous intéressons au sujet de l'endommagement de ces matériaux, plus particulièrement des stratifiés composites à renforts de fibres longues.

Par définition, l'endommagement est un processus décrivant l'initiation de défauts microscopiques et de leur propagation macroscopique sous l'effet de sollicitations statiques ou cycliques. Autrement dit, l'endommagement désigne la détérioration irréversible d'un matériau.

La progression de l'endommagement se fait selon différents modes indépendants et conduits à une perte de cohésion dans le matériau et par conséquent, à la modification de ses caractéristiques mécaniques. Il est donc un mécanisme de la dissipation d'énergie. L'étape

particulièrement délicate de mise en œuvre du composite peut engendrer des discontinuités, c'est-à-dire défauts dans la matrice [1, 2, 48, 49].

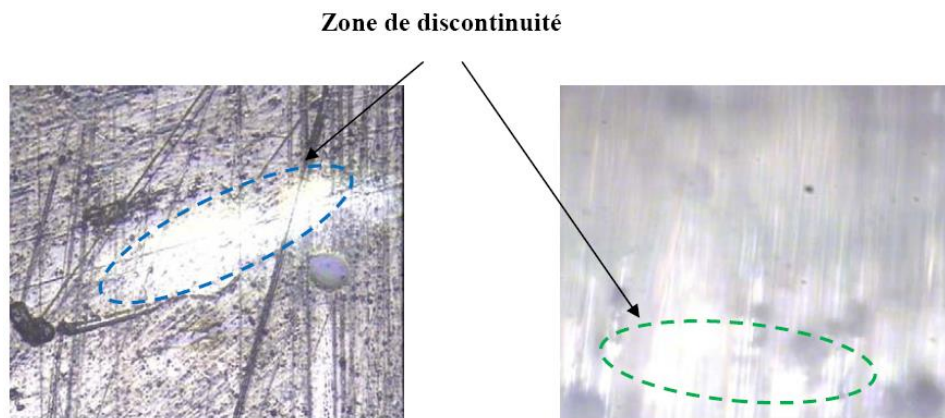


Figure 3. 1 : Micrographies des zones endommagées [65].

Lorsque les matériaux composites à fibres longues sont soumis à des forces extérieures (chargement monotone ou cyclique), ces discontinuités contribuent à l'initiation de l'endommagement et à une perte de rigidité de l'élément structural. Parmi ces endommagements, on peut citer : à l'échelle microscopique, microfissures dans la matrice ou à l'interface des plis, décohésions fibre / matrice, arrachement des fibres ainsi que des ruptures de fibres. A l'échelle macroscopique, la rupture de la matrice le long des fibres connue sous le nom de fissuration intra-laminaire, décollement inter-plies appelé délaminage et la rupture des fibres qui représente le mode d'endommagement le plus dangereux puisqu'il apparaît tardivement et conduit à la ruine finale du matériau [2, 49].

La rupture des stratifiés composites peut se produire de plusieurs façons très complexes. Sous l'influence de chargements thermomécaniques, monotones ou cycliques, les principaux modes d'endommagement, dans un stratifié croisé à fibres longues, peuvent être classés en quatre catégories (Fig. 3.2) [1, 2, 64].

3.1.1. Fissuration transverse :

Rupture dans la matrice provoquée par les contraintes dans le plan du stratifié. La qualité de l'interface fibre / matrice est également très importante dans le développement des fissures. Elle se propageant le long des fibres désorientées par rapport à la direction de sollicitation. Dans ces plis, la matrice moins résistante que les fibres est plus sollicitée. Lorsque la contrainte augmente, nouvelles fissures apparaissent dans la direction transversale entre les fissures formées précédemment [1, 2, 66, 67].

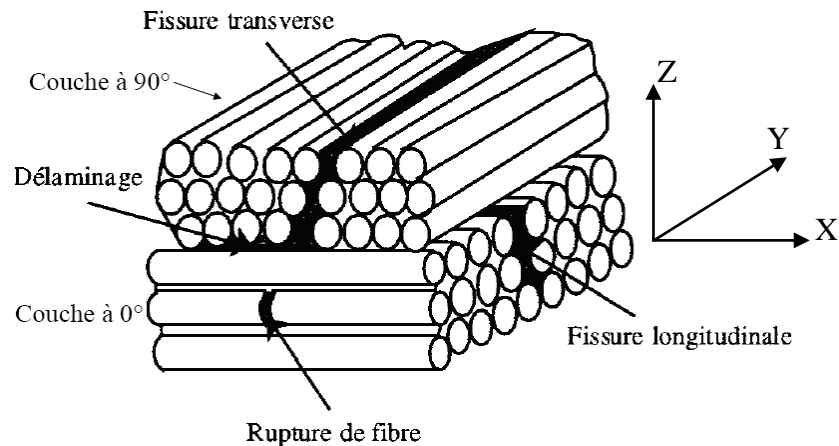


Figure 3. 2 : Endommagement d'un stratifié croisé sollicité en traction [2].

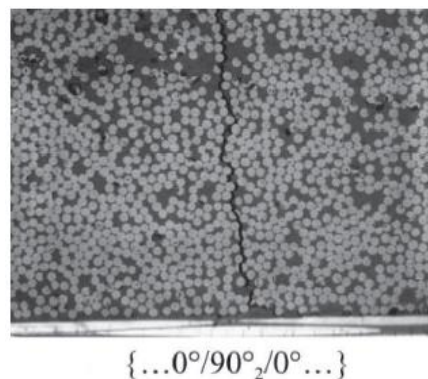


Figure 3. 3 : Fissures traversant l'épaisseur du pli pour plusieurs empilements [68]

3.1.2. Fissuration longitudinale :

Ces fissures sont de même nature que les fissures transverses, sauf qu'elles se développent le long des fibres orientées suivant la direction de sollicitation [2].

3.1.3. Délaminage :

Le délaminage est un processus de décollement ou de décohésion plane à l'interface de deux couches successives d'un laminé sous l'effet de contraintes inter-laminaires. A cause des contraintes très élevées aux bords libres, le délaminage aux bords libres est considéré comme le phénomène d'endommagement le plus diffus dans les structures composites et celui qui affecte le plus leur intégrité structurale et leur durée de vie (Fig. 3. 4) [1, 49, 69].

Lorsque le chargement se développe, l'aire délaminée augmente et la rigidité longitudinale de l'éprouvette diminue. Son front est incliné par rapport au plan de la fissure. Il se propage ensuite sur toute la largeur de l'éprouvette, son front devenant alors

majoritairement parallèle au plan de la fissure. Une mesure de ce mode de dégradation est donc l'aire délaminée [69].

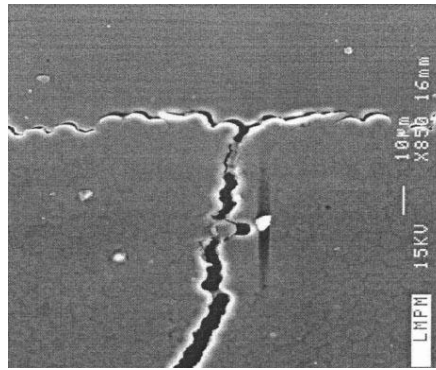


Figure 3. 4 : Délaminage local en pointe d'une fissure transverse [69]

3.1.4. Rupture des fibres :

Appelle aussi la rupture translaminaire, étape ultime menant à la ruine finale du matériau composite [1, 2].

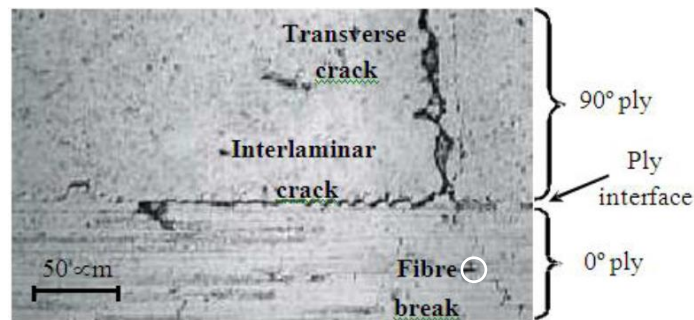


Figure 3. 5 : Stratifié croisés avec fissure transverse, délaminage interne dans l'interface 0 / 90 et rupture des fibres [70, 71]

La figure 3. 5, illustre un exemple de l'endommagement de délaminage interne croissant à partir d'une fissure transversale vers la gauche dans une interface 0 / 90 d'un stratifié croisé Carbone / Epoxy soumis à une charge axiale. Dans cette figure, quelques rupture de fibres dans la couche à 0° peuvent être vues en raison de la concentration de contraintes près de la fissure transversale [70].

Les figures 3. 6 et 3. 7, montrent les allures des ruptures par flexion et par traction respectivement [1].

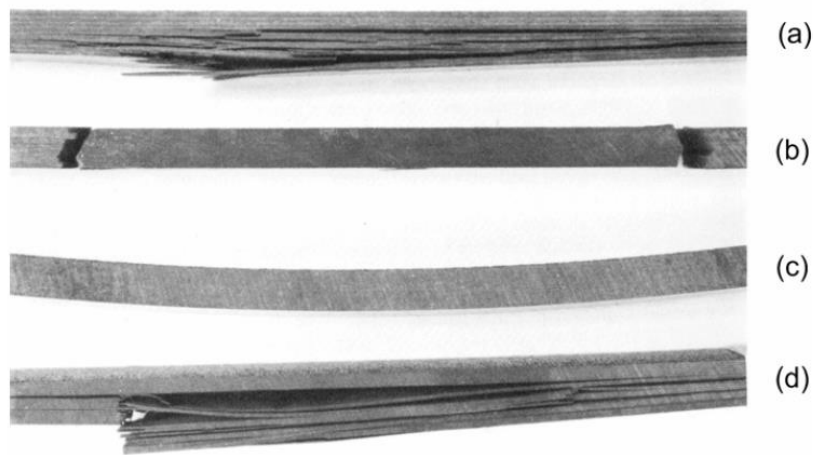


Figure 3. 6 : Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) $\pm 45^\circ$, (d) $0^\circ/90^\circ$ [1].

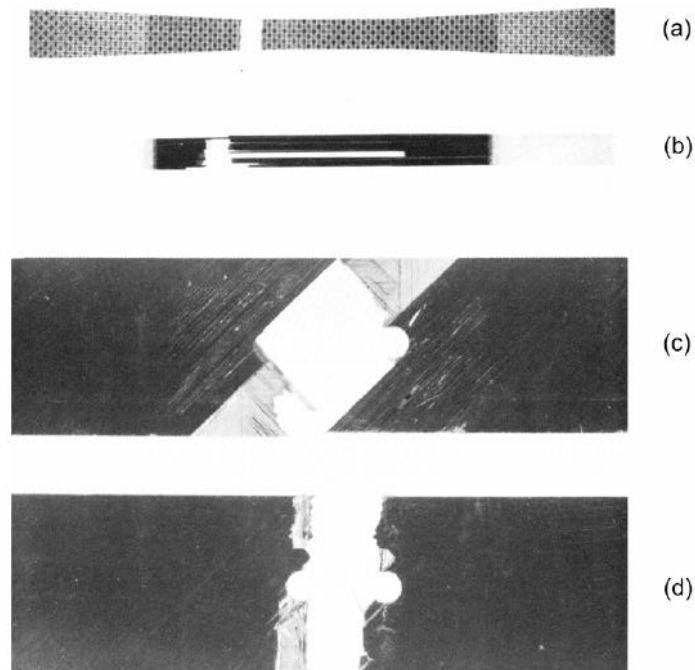


Figure 3. 7 : Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (a) $0^\circ/90^\circ$ tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotrope trouée, (d) $0^\circ/90^\circ$ trouée [1].

3.1.5. Étapes de dégradation

Un stratifié soumis à un chargement présente différentes étapes de dégradation. Dans le scénario d'évolution des défauts le plus «classique», la matrice et l'interface fibre / matrice sont les premières à se détériorer (Fig. 3. 8a). Les premiers défauts sont donc la microfissuration de la matrice et la décohésion fibre / matrice à l'échelle microscopique.

Ensuite, ces défauts s'agrandissent de façon stable à l'échelle du pli par coalescence (Fig. 3. 8b), les micro-défauts se rejoignent pour former des fissurations transverses. Les fissures transverses peuvent parvenir à l'interface des plis et provoquer le délaminage sous l'effet des contraintes inter-laminaires (Fig. 3. 8c). Ces défauts et leur évolution dépendent de l'empilement, du nombre de plis, du chargement, et de la taille et de la forme de la structure considérée [1]. La figure 3. 9 illustre la succession des mécanismes de dégradation dans un stratifié croisé qui peuvent être endommagés par un, deux ou trois modes d'endommagement [25].

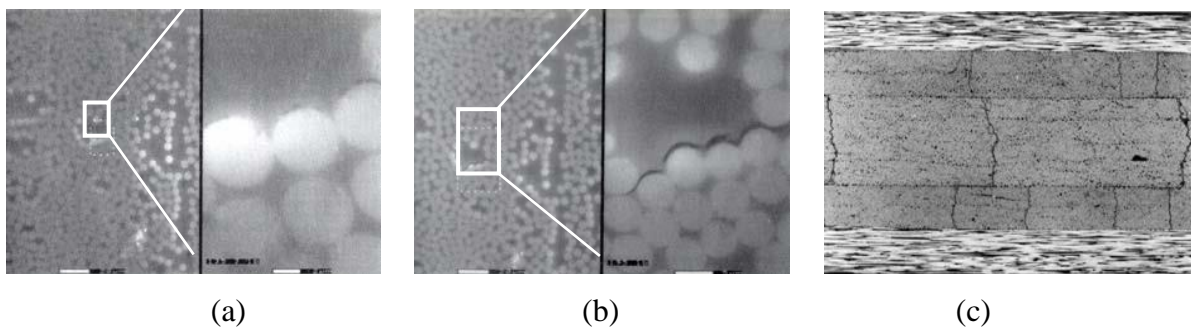


Figure 3. 8 : Evolution de défauts, (a) Micro-défauts, (b) Coalescence et (c) Fissuration transverse [1].

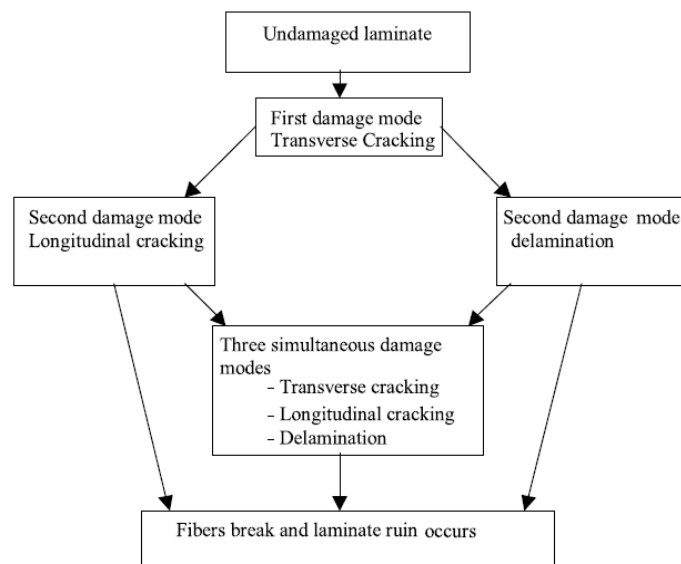


Figure 3. 9 : Évolution expérimentale des modes de dommage en stratifié croisé [25]

3.2. Contraintes résiduelles d'origine thermique dans les stratifiés

L'élaboration des composites stratifiés à matrice thermodurcissable fait généralement appel à un cycle thermique destiné à polymériser l'empilement des couches unidirectionnelles

pré-imprégnées. Un tel cycle se compose typiquement d'un premier palier thermique conduisant à l'élimination des volatils et à la gélification de la matrice, suivi d'un second palier de polymérisation à plus haute température qui permet d'atteindre le taux de réticulation souhaité (Fig. 3.10) [72].

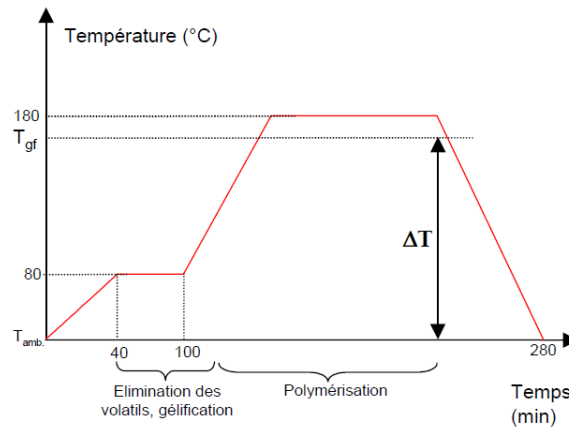


Figure 3. 10 : Cycle de cuisson typique d'un composite à matrice Poly-Epoxyde

(T_{gf} est la température de transition vitreuse de la matrice à l'issue de la polymérisation) [72].

Au cours de ces étapes, la fibre et la matrice subissent des variations dimensionnelles conduisant au développement de contraintes internes au sein du composite. Celles-ci ont leur origine dans les deux processus physiques suivants :

- (i) Lors de la polymérisation, la réticulation du réseau thermodurcissable se traduit par une concentration de la matrice. Celle-ci se produit toutefois à une température proche de la transition vitreuse de la matrice, où la viscosité du réseau permet la relaxation d'une fraction importante des contraintes internes induites par ce retrait de polymérisation. Au premier ordre, on peut donc considérer qu'il n'y a pas de contraintes résiduelles à la température de polymérisation.
- (ii) Lors du refroidissement à température ambiante de la pièce en composite, les différentiels de contraction thermique de la fibre et de la matrice génèrent des contraintes internes à deux échelles :
 - À l'échelle microscopique, au sein de chaque pli du stratifié. La matrice possédant un coefficient de dilatation largement supérieur à celui de la fibre (environ 10 fois), on observe, dans le sens longitudinal, une mise en traction de la fibre qui est équilibrée par la mise en compression de la fibre. La contraction thermique de la

matrice se traduit également par le développement de contraintes radiales de compression à la surface de la fibre.

- À l'échelle macroscopique, l'anisotropie du coefficient de dilatation thermique de chaque pli unidirectionnel induit le développement de contraintes d'un pli à l'autre : chaque couche subit les variations de température, mais à la déformation résultante s'oppose la réaction des couches adjacentes. Dans le cas d'un stratifié déséquilibré, ces contraintes se traduisent par l'apparition d'une courbure à l'issue du cycle de cuisson [72].

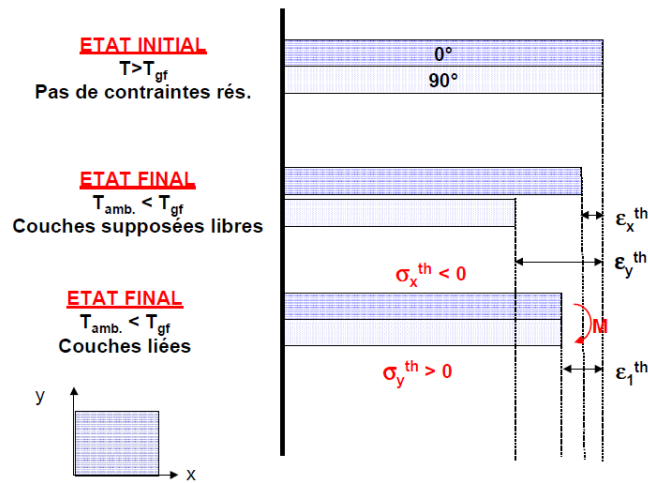


Figure 3. 11 : Développement de contraintes résiduelle thermiques dans un stratifié [0/90][72].

A partir des déformations résiduelles $e_j^{(k)}$ ($k = 0,90$) et e_j^s , les contraintes résiduelles d'origine thermique dans chaque pli s'écrivent de la manière suivante [2]:

$$\sigma_i^{R(k)} = [Q_{ij}]_{(k)} (e_j^s - e_j^{(k)}) \quad k = 0,90 \quad (3. 1)$$

$[Q_{ij}]_{(k)}$: Matrice de rigidité réduite du pli k .

e_j^s : Tenseur de déformations résiduelles du stratifié complet.

$e_j^{(k)}$: Tenseur de déformations résiduelles du pli k .

Les déformations résiduelles dans chaque pli ainsi que dans le stratifié complet sont obtenues à partir des relations suivantes [2]:

$$e_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} (T_0 - T_{sf}) \quad (3. 2)$$

$$e_j^s = A_{ij} \sum_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q_{ij}]_{(k)} e_j^{(k)} dz \quad (3. 3)$$

$\alpha_j^{(k)}$: Tenseur des coefficients de dilatation thermique du pli k .

A_{ij} : Matrice de rigidité caractérisant le comportement en membrane.

T_0 : Température finale d'essai.

T_{sf} : Température de référence pour laquelle les déformations résiduelles sont nulles
(Residual stress-free temperature).

h_k : Epaisseur du pli k .

Ainsi, la température de référence T_{sf} peut être calculée à partir des relations précédentes en mesurant la déformation résiduelle d'un pli dans le stratifié $(e_j^s - e_j^{(k)})$ [2].

O. Klinkova et al [73] ont été validé le modèle numérique tridimensionnel de cuisson d'un matériau composite stratifié orthotrope en le confrontant à une étude expérimentale. Il s'agit de comparer expérimentalement et par simulation la variation d'angle et d'épaisseur d'une pièce en L, qui a subi un cycle de cuisson. Une approche macro thermo-physico-mécanique, couplée faiblement, est utilisée pour ce problème complexe. Les variations d'épaisseur et d'angle du L composite sont caractérisées en différents points, mesurés sur toute la longueur de la pièce à intervalles réguliers. Leurs résultats montrent que les variations angulaires ne sont pas identiques à l'intérieur et à l'extérieur de la pièce. Cette variation est de l'ordre d'un degré. Ces résultats sont cohérents avec la littérature.

J.-L. Rebière et al [23] ont été étudiés l'influence des matériaux et des contraintes thermiques de fabrication sur les valeurs maximales de la contrainte dans le stratifié croisés de type $[0_2/90_2]_s$ (Fig. 3. 12). Ils ont démontré que les contraintes normales sont nettement augmenté si les contraintes résiduelles thermiques de fabrication sont introduits dans les calculs et que la différence entre les valeurs des contraintes normales des différents matériaux a été diminuée. Mêmes auteurs, dans [25], ont été étudiés dans la figure 3. 13, qu'illustre les résultats de la contrainte appliquée à l'initiation de la première fissure transversale dans un stratifié croisé Verre / Epoxyde $[0/90_3]_s$. Ils ont comparé deux résultats, l'un avec les contraintes résiduelles thermiques de fabrication et l'autre sans ces contraintes, pour plusieurs approches. Ils ont constaté que les résultats donnés par le modèle en tenant compte des contraintes résiduelles sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

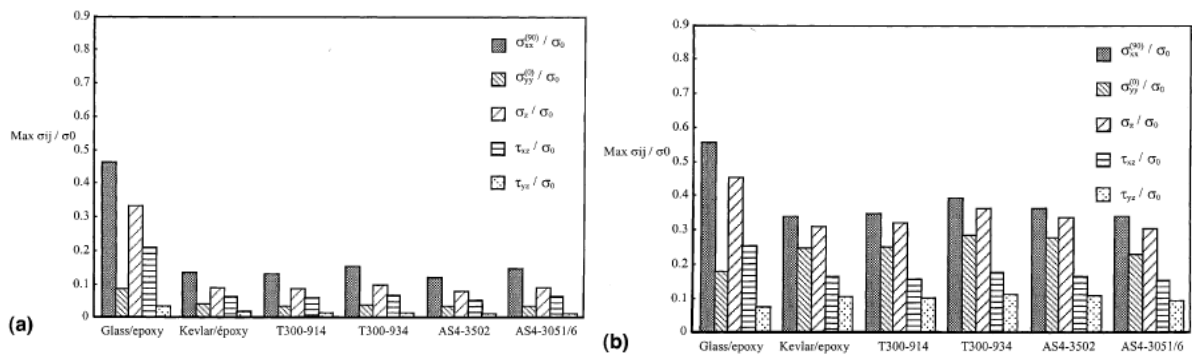


Figure 3. 12 : Influence des matériaux et, avec (b) et sans (a), des contraintes thermiques de fabrication sur les valeurs maximales de la contrainte dans le stratifié croisés de type $[0_2/90_2]_s$ [23]

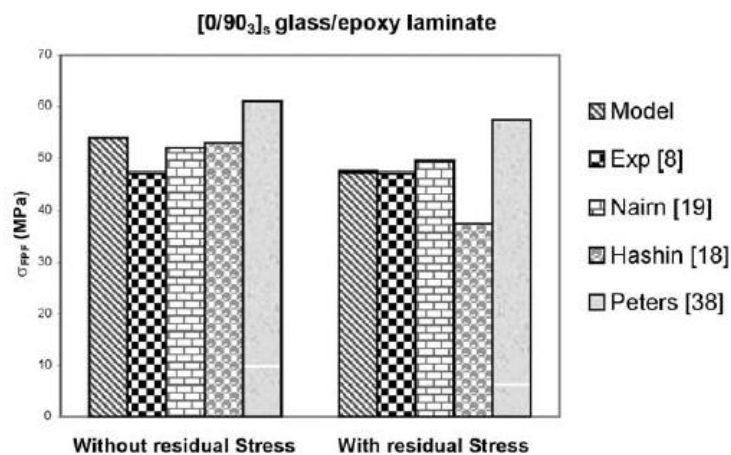


Figure 3. 13 : Contrainte globale appliquée σ_{FPF} pour l'initiation de la première fissure transversale dans le stratifié croisé Verre / Epoxy $[0/90_3]_s$ [25].

L. N. McCartney et al [34] ont montré que les effets de contrainte thermique résiduelle sont très importants dans la pratique, car ils contribuent de manière significative à la manière dont dommages progressifs et la ruine se produisent dans les composites stratifiés.

3.3. Modélisation du comportement mécanique

En parallèle avec les études expérimentales, il existe de nombreuses possibilités de modélisation qu'elle soit différentes modifications du modèle shear lag [7, 8, 11-13, 17, 31-33, 35, 37-40], modèles variationnels basé sur la minimisation de l'énergie complémentaire [6, 22-27], approche de mécanique de la rupture [29] et les méthodes numériques, par exemple, basées sur une analyse EF [4, 6, 23, 25, 27-36]. Ces modèles traitent généralement l'endommagement par fissuration transverse ainsi que les dégradations des propriétés thermo-élastiques d'un stratifié endommagé. Tous les modèles développés dans la littérature

supposent que les plis sont homogènes, anisotropes caractérisés par les propriétés effectives d'un unidirectionnel [2, 29, 55].

Dans cette section, on s'intéresse de présenter l'endommagement intra-laminaire des stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$ à fibres longues, sollicités en traction uni-axiale suivant la direction des plis à 0° par l'approches utilisant la diffusion de cisaillement (type shear lag). L'analyse analytique inspiré des travaux de R. Joffe et al [29], J.-M. Berthelot et al [14] a été appliqué sur la cellule élémentaire. L'endommagement dans ce cas de figure, correspond à la fissuration de la matrice dans la couche à 90° appelée fissuration transverse [69, 72].

3.3.1. Approches utilisant la diffusion de cisaillement

L'analyse shear lag est le modèle de transfert de contrainte le plus simple [15]. Il semble avoir été les premières modélisations, reposent sur des raisonnements unidimensionnels, introduit pour estimer la distribution des contraintes dans les couches fissurées à 90° , puis développé dans de nombreuses analyses [8, 11-13, 24, 31, 49]. En 1977, Reifsnider fut le premier à développer une approche analytique qui modélise le transfert de charge entre les couches orientées à 90° et 0° dans un stratifié croisé endommagé par fissuration transverse [2]. Le terme shear lag signifie littéralement retard de cisaillement (modèle unidimensionnel qui repose sur des hypothèses simples concernant le champ des contraintes dans le stratifié fissuré. Dans ces analyses shear lag, la charge de traction appliquée sur les plis à 0° est supposée être transmis dans la couche à 90° par cisaillement de plis transversal. La dépendance en z est supprimée par des hypothèses de type contraintes planes, moyenne de la contrainte σ_{zz} nulle dans l'épaisseur du stratifié ou encore déplacement vertical u_z nul. De plus, et c'est l'hypothèse fondamentale de la méthode shear lag, la variation du champ de déplacement u_z dans la direction longitudinale du stratifié est considérée comme négligeable

devant celle de u_x dans la direction z $\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \ll \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$ [31, 64, 69, 74].

3.3.2. Méthodes numériques

Durant les trente dernières années, les méthodes numériques ont connu un progrès important, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de puissance des ordinateurs. La recherche relative aux éléments finis de plaques a connu un grand développement pendant les vingt dernières années. On trouve un nombre important d'éléments de plaque fiables fondés, en général, sur la théorie de Kirchhoff ou celle de Mindlin [62]. Les problèmes physiques rencontrés lors de l'étude de matériaux ou structures, qu'ils

soient mécaniques ou thermiques, se formulent dans la plupart des cas comme suit : il s'agit de déterminer un champ scalaire, vectoriel ou tensoriel vérifiant un ensemble d'équations aux dérivés partielles et d'équations simples en tout point matériel M_{point} d'un domaine Ω , à chaque instant t , et ce en satisfaisant des conditions limites imposées à la frontière du domaine $\partial\Omega$. Le problème est stationnaire ou in-stationnaire selon que le temps intervient ou non comme variable dans les équations. L'analyse numérique fournit une solution à un problème que les analyses mathématiques sont incapables de résoudre. Toutefois, cette solution n'est pas aussi précise puisqu'elle nécessite d'introduire des valeurs numériques pour les caractéristiques du matériau [55].

Une simulation numérique (éléments finis en trois dimensions) ont été utilisée, en comparant avec le modèle analytique (approche variationnelle), par J.-L. Rebière et al [23] pour montrer l'influence de fissures transversales et longitudinales sur la distribution du champ de contraintes et la réduction de la rigidité et coefficient de Poisson d'un stratifié croisés $[0_m / 90_n]_s$ soumis à un test monotone ou de fatigue. Leurs résultats importants sont l'accord entre les données de réduction de la rigidité et de la simulation numérique. Cette dernière, est en bon accord avec le modèle 1 (variation parabolique de σ_{zz}) concerne la distribution des contraintes.

Mêmes auteurs ont utilisé la simulation numérique pour décrire l'initiation de chaque mode de dommages dans [27]. Aussi, ils ont utilisé l'approche variationnelle pour modéliser le comportement des stratifiés croisés endommagées par fissuration transversales, longitudinale et le délaminage. Les résultats numériques montrent que ces modèles analytiques (approche variationnelle) fournissent un niveau constant de précision pour une variété de systèmes de matériaux de stratifié minces et de la configuration, avec diverses combinaisons de décollements et les fissures matricielle.

L. N. McCartney et al [34] ont étudié la perte de résistance et de la rigidité et l'évolution du coefficient de dilatation thermique (CTE). Ils ont utilisé quatre différentes méthodes de prédiction, dont l'un est l'analyse par éléments finis et les autres sont des modèles semi-analytiques. Ces trois modèles distinctes ont été montré être compatibles les uns avec les autres, et avec les prédictions de l'analyse éléments finis. Leurs résultats ont montré qu'il existe une cohérence remarquable entre ces trois modèles semi-analytiques et le modèle éléments finis détaillé pour la perturbation de contrainte axiale d'un stratifié fissuré soumis à une flexion hors-plan et pour prédire le module axial efficace de stratifié fissuré.

R. Joffe et *al* [29] ont utilisé la méthode des éléments finis dans la formulation de contrainte plan pour analyser la dépendance de COD moyen (crack-opening displacement) (déplacement d'ouverture des fissures) sur l'espacement des fissures et l'effet de contrainte de sous-stratifiés adjacents d'un stratifié en fibre de verre / époxy $[S/90_4]_s$. Ils ont constaté que les constantes élastiques sous-stratifiés ont un effet négligeable sur COD.

C. V. Singh et R. Talreja [36] ont été exécutée la micromécanique sur une cellule élémentaire représentative par l'utilisation de l'analyse d'élément finie 3D pour calculer le déplacement d'ouverture de fissure (crack-opening displacement COD) et pour analyser le comportement de dommages dans le composite stratifié avec des fissures matricielles transversales dans plis d'orientations multiples. Ils ont trouvé que le COD et les prédictions de dégradation de la rigidité sont d'accord bien avec des données expérimentales publiées pour un stratifié Verre / Epoxyde (HyE 9082Af, Fiberite) de type $[0/\pm\theta_4/0_{1/2}]_s$ laminent la configuration.

Une analyse par Eléments Finis a été utilisée par J.-M. Berthelot et *al* [14] pour investiguer la fissuration transversale de stratifié croisé $[0_m/90_n]_s$ en Verre E / Epoxyde, soumis à des charges de traction uni-axiale, et comparer les résultats obtenus par modèle analytique de type shear lag. Ces comparaisons montrent qu'il analyse shear lag parabolique complète donne une assez bonne approximation des distributions de contrainte et de déformation obtenus par analyse éléments finis. Les résultats déduits de ce modèle analytique et d'analyse par éléments finis, pour la réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissure, sont en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus pour les différents stratifiés croisés.

R. Joffe et J. Varna [15] ont été adoptés les modèles de distribution des contraintes (shear lag, basée sur l'approche variationnelle et analyse par éléments finis (FEA)) pour les configurations $[S/90_n]_s$ et utiliser pour calculer la fonction de perturbation contrainte et ont été analysée aussi la réduction de la rigidité dans les stratifiés symétrique de type $[S/90_n]_s$, contenant sous-stratifiés orthotropes (S) et couche à 90° fissurée. Les prédictions sont comparées avec les données expérimentales pour les stratifiés en fibre de verre / résine en époxy $[\pm\theta/90_4]_s$ avec $\theta=0,15,30,40$. Généralement, le modèle FEA sous-estime légèrement la réduction de la rigidité alors que les deux modèles variationnels utilisées (modèle 2D-0 et modèle de Hashin généralisé) conduisent à des résultats similaires, légèrement inférieures à celle d'expérimentale.

3.4. Formulation de la fissuration transversale

3.4.1. Modèle géométrique

La présente analyse suite un modèle shear lag utilisé par R. Joffe et al [15, 29] et J.-M. Berthelot et al [14]. Considérer un stratifié croisé de type $[0/90_n]_s$, illustre dans la Figure 3. 14, soumis à une chargement mécanique et thermique, dans lesquelles les deux couches extérieur à 0° sont de même épaisseur, t_0 , et la couche centrale à 90° est d'épaisseur $2t_{90}$ (Fig. 3. 15). Lorsqu'il est soumis en tension, des fissures transversales apparaissent et se déplacent à travers l'épaisseur et étendent parallèlement à la direction des fibres dans la couche centrale de 90° . La plupart de ces fissures traversent instantanément toute la largeur de l'éprouvette de bord à bord (Fig. 3. 14). Le pli à 90° est transversalement isotrope. Les symboles $()^{90}$ et $()^0$ correspondent respectivement aux plis à 90° et à 0° . Le nombre de fissures augmentent avec l'augmentation de la charge, jusqu'à ce que la saturation de la densité des fissures. Il est supposé que :

- Les fissures s'étendent dans toute l'épaisseur de couches transversales,
- Les fissures couvrent toute la largeur de l'échantillon,
- Les surfaces de fissures sont planes et normal de chargement,
- L'espacement entre les fissures est uniforme dans la direction de la charge,

La charge en membrane appliquée est définie par $\sigma_0 = \frac{1}{H} N_x$, où N_x est la charge appliquée par unité de largeur suivant l'axe x [15, 16, 20, 21, 29, 31, 33].

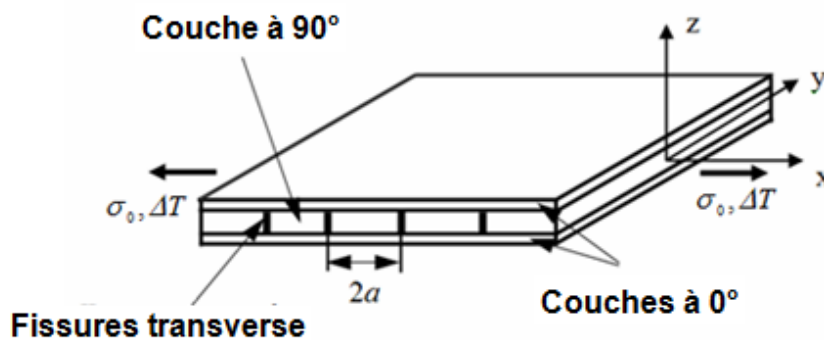


Figure 3. 14 : Stratifié avec fissures transverses dans la couche à 90° [29].

Lorsque l'espacement entre les fissures est supposé équidistant, ce qui signifie que le stratifié contient une rangée périodique de fissures dans la couche à 90° . Ensuite, l'analyse est réduite à une approche en deux dimensions, à l'intérieur d'une cellule élémentaire (Fig. 3. 15) entre

deux fissures consécutives. Puis, les conditions de symétrie peuvent être utilisées dans une section transverse contenant une fissure [14, 29, 32].

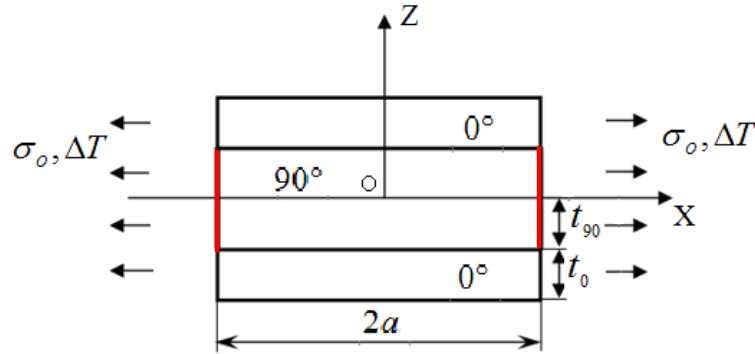


Figure 3. 15 : Cellule élémentaire entre deux fissures transverses consécutives.

Les coordonnées sans dimensions et les paramètres géométriques sont introduits en divisant la quantité correspondante par la demi-épaisseur de la couche à 90° [15, 16, 20, 29, 32].

$$\bar{z} = \frac{z}{t_{90}} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{x}{t_{90}} \quad ; \quad \bar{a} = \frac{a}{t_{90}} \quad ; \quad \lambda = \frac{t_0}{t_{90}} \quad ; \quad \bar{h}' = \frac{h'}{t_{90}} \quad (3.4)$$

$$h' = t_0 + t_{90}$$

\bar{a} est le rapport géométrique de la fissuration transverse [74].

L'analyse suivante sera effectuée en supposant une condition de contrainte plane généralisée [16, 20, 29]:

$$\bar{\varepsilon}_y^0 = \bar{\varepsilon}_y^{90} = \bar{\varepsilon}_y = const \quad (3.5)$$

Le symbole $(\bar{\quad})$ sur les composantes de contraintes et de déformations dénote la quantité ou la valeur moyenne [15, 16, 20, 29]. En employant les déformations dans les couches extérieurs à 0° (qui ne sont pas endommagées et, par conséquent, les déformations sont égaux aux déformations du stratifiés, $\bar{\varepsilon}_x = \bar{\varepsilon}_x^0$) et en supposant que les contraintes thermiques résiduelles sont nulles ($\Delta T = 0$), le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du stratifié endommagé peuvent être définis à partir des expressions suivantes [15, 16, 20, 29]:

$$E_x = \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\varepsilon}_x} \quad ; \quad \nu_{xy} = -\frac{\bar{\varepsilon}_y}{\bar{\varepsilon}_x} \quad (3.6)$$

Le module d'élasticité initial du stratifié non endommagé mesuré avec la même charge est $E_{x0} = \sigma_0 / \bar{\varepsilon}_{x0}$ et, par conséquent [16, 20, 29] :

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \frac{\widehat{\varepsilon}_{x0}}{\varepsilon_x} \quad (3.7)$$

Pour le calcul du coefficient de dilatation thermique α_x du stratifié, nous supposons que la charge mécanique appliquée σ_0 est nulle. ε_x^{-0} et α_x sont définis à partir d'expression [29] :

$$\alpha_x = \frac{\varepsilon_x^{-0}}{\Delta T} \quad (3.8)$$

3.4.2. Relation contrainte-déformation de stratifié fissuré

Afin de calculer les propriétés thermo-élastiques du stratifiés, nous avons besoin de ε_x^{-0} et ε_y . Les équations constitutives qui donnent la relation entre les déformations et les contraintes sont [16, 20, 29]:

- La couche médiane à 90° est transversalement isotropes dans le système des coordonnées x, y, z (Fig. 3. 14) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{90} \\ \varepsilon_y^{90} \\ \varepsilon_z^{90} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{22} & S_{21} & S_{23} \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} \\ S_{23} & S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{90} \\ \sigma_y^{90} \\ \sigma_z^{90} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_T \\ \alpha_L \\ \alpha_T \end{Bmatrix} \Delta T \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{xy}^{90} = S_{66} \sigma_{xy}^{90} \quad ; \quad \varepsilon_{xz}^{90} = S_{44} \sigma_{xz}^{90} \quad ; \quad \varepsilon_{yz}^{90} = S_{66} \sigma_{yz}^{90}$$

- Les couches extérieures à 0° sont orthotropes avec les axes coïncidés avec x, y, z .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_z^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx}^0 & S_{xy}^0 & S_{xz}^0 \\ S_{xy}^0 & S_{yy}^0 & S_{yz}^0 \\ S_{xz}^0 & S_{yz}^0 & S_{zz}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^0 \\ \sigma_y^0 \\ \sigma_z^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_x^0 \\ \alpha_y^0 \\ \alpha_z^0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = S_{66}^0 \sigma_{xy}^0 \quad ; \quad \varepsilon_{xz}^0 = S_{55}^0 \sigma_{xz}^0 \quad ; \quad \varepsilon_{yz}^0 = S_{44}^0 \sigma_{yz}^0$$

L'équilibre des forces dans la direction z [15, 16, 20, 29]:

$$\int_{-a}^{+a} \sigma_z^i dx = 0 \quad i=90,0 \quad (3.11)$$

Les équations constitutives correspondantes aux composantes de la déformation et de la contrainte normale dans le plan sont [16, 20, 29]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{-0} \\ \varepsilon_y^{-0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx}^0 & S_{xy}^0 \\ S_{xy}^0 & S_{yy}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{-0} \\ \sigma_y^{-0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_x^0 \\ \alpha_y^0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (3.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{-90} \\ \varepsilon_y^{-90} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{22} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{-90} \\ \sigma_y^{-90} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (3.13)$$

Les équations d'équilibre de force d'un stratifié endommagé ou non sont :

a- Dans la direction x :

$$N_x = \int_0^{t_{90}} \sigma_x^{90} dz + \int_{t_{90}}^{h'} \sigma_x^0 dz = \sigma_0 (t_{90} + t_0) \quad (3. 14)$$

Donnant :

$$\bar{\sigma}_x^{90} t_{90} + \bar{\sigma}_x^0 t_0 = \sigma_0 (t_{90} + t_0) \quad (3. 15)$$

b- Dans la direction y :

$$N_y = 0 \Rightarrow \int_0^{t_{90}} \sigma_y^{90} dz + \int_{t_{90}}^{h'} \sigma_y^0 dz = 0 \quad (3. 16)$$

Donnant :

$$\bar{\sigma}_y^{90} t_{90} + \bar{\sigma}_y^0 t_0 = 0 \quad (3. 17)$$

Les équations (3. 12), (3. 13), (3. 15) et (3. 17) contiennent sept inconnues : quatre composants de contraintes et trois composants de déformations $(\bar{\varepsilon}_x^{90}, \bar{\varepsilon}_x^0, \bar{\varepsilon}_y)$. Le nombre total d'équations est six. Par conséquent, un des ces inconnues peut être considéré indépendant et le restes d'eux peuvent être exprimés sous formes des fonctions linéaires de cet inconnue. Choissant la contrainte $\bar{\sigma}_x^{90}$ est indépendante, puis, on résoudre le système des Eqs. (3. 12), (3. 13), (3. 15) et (3. 17) par rapport à $\bar{\sigma}_x^{90}$, on obtient [16, 29]:

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_y = g_1 \bar{\sigma}_x^{90} + f_1 \sigma_0 + m_1 \Delta T \\ \bar{\varepsilon}_x^{90} = g_2 \bar{\sigma}_x^{90} + f_2 \sigma_0 + m_2 \Delta T \\ \bar{\varepsilon}_x^0 = g_3 \bar{\sigma}_x^{90} + f_3 \sigma_0 + m_3 \Delta T \end{cases} \quad (3. 18)$$

Les expressions de g_i, f_i, m_i ; $i=1,2,3$ en fonction de la géométrie du stratifié et les propriétés des constituants sont donnés en Annexe A2. 2 [29].

3.4.3. Perturbation des contraintes et déformations provoquées par les fissures transverses

Afin d'obtenir une expression pour la contrainte $\bar{\sigma}_x^{90}$ dans la cellule élémentaire, nous considérons la perturbation de contrainte axiale causée par la présence de deux fissures. La distribution de contrainte axiale peut être écrite sous la forme suivante [6, 20, 22-27, 29] :

$$\begin{cases} \sigma_x^{90} = \sigma_{x0}^{90} - \sigma_{x0}^{90} f_1(\bar{x}, \bar{z}) \end{cases} \quad (3. 19)$$

$$\begin{cases} \sigma_x^0 = \sigma_{x0}^0 + \sigma_{x0}^{90} f_2(\bar{x}, \bar{z}) \end{cases} \quad (3. 20)$$

Où σ_{x0}^{90} et σ_{x0}^0 sont les contraintes longitudinales du stratifié non endommagé sollicité suivant x , déterminées par la théorie classique des stratifiés, dans les couches à 90° et 0° , respectivement. $-\sigma_{x0}^{90}f_1(\bar{x}, \bar{z})$ et $\sigma_{x0}^{90}f_2(\bar{x}, \bar{z})$ sont des perturbations de contraintes causées par la présence de fissures. En utilisant l'intégrale d'équilibre de force dans la direction x (Eq. 3. 14), on obtient :

$$\bar{\sigma}_x^{90} = \sigma_{x0}^{90} - \sigma_{x0}^{90} \frac{1}{2a} R_1(\bar{a}) \quad (3. 21)$$

$$\bar{\sigma}_x^0 = \sigma_{x0}^0 + \sigma_{x0}^{90} \frac{1}{2a\lambda} R_2(\bar{a}) \quad (3. 22)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{aligned} R_1(\bar{a}) &= \int_{-\bar{a}}^{+\bar{a}} \int_0^1 f_1(\bar{x}, \bar{z}) d\bar{x} d\bar{z} \end{aligned} \right. \quad (3. 23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_2(\bar{a}) &= \int_{-\bar{a}}^{+\bar{a}} \int_1^{\bar{h}'} f_1(\bar{x}, \bar{z}) d\bar{x} d\bar{z} \end{aligned} \right. \quad (3. 24)$$

L'Eqs. (3. 23) et (3. 24) sont appelées les fonctions de perturbation de contrainte. Elles sont liées à la perturbation de la contrainte axiale dans la couche à 90° et dépend de l'espacement de fissures (densité de fissure). Cette fonction influe sur le taux de réduction des constants élastiques, et a des formes différentes selon le modèle d'analyse de rigidité adoptées telles que le modèle shear lag ou le modèle variationnel.

En utilisant l'intégral de l'équation d'équilibre de force dans la direction x (Eq. 3. 14), il peut être prouvé que [15]:

$$R_1(\bar{a}) = R_2(\bar{a}) = R(\bar{a}) \quad (3. 25)$$

Puis, les Eqs. (3. 21) et (3. 22) peut être réécrite :

$$\bar{\sigma}_x^{90} = \sigma_{x0}^{90} - \sigma_{x0}^{90} \frac{1}{2a} R(\bar{a}) \quad (3. 26)$$

$$\bar{\sigma}_x^0 = \sigma_{x0}^0 + \sigma_{x0}^{90} \frac{1}{2a\lambda} R(\bar{a}) \quad (3. 27)$$

La fonction de perturbation de contraintes s'écrit sous la forme suivante [7, 15-20, 23, 28, 29, 32] :

$$R(\bar{a}) = \int_{-\bar{a}}^{+\bar{a}} \frac{\cosh(\xi \bar{x})}{\cosh(\xi \bar{a})} d\bar{x} = \frac{2}{\xi} \tanh(\xi \bar{a}) \quad (3. 28)$$

Où ξ est le paramètre shear lag :

$$\xi^2 = \bar{G} \frac{t_{90}(t_{90}E^{90} + t_0E_x)}{t_0E_xE^{90}} \quad (3.29)$$

Le coefficient \bar{G} dépend des hypothèses utilisées pour les déplacements longitudinaux et la distribution des contraintes de cisaillement :

1. Hypothèse de déplacements longitudinaux : la variation du déplacement longitudinal est supposée être parabolique dans l'épaisseur de la couche à 90° [7, 16-20, 32, 33, 74].

$$u_{90}(x, z) = \bar{u}_{90}(x) + \left(z^2 - \frac{t_{90}^2}{3} \right) A_{90}(x) \quad (3.30)$$

La variation du déplacement longitudinal est déterminée dans l'épaisseur des couches à 0° par [7, 16-20, 32, 33, 74] :

$$u_0(x, z) = \bar{u}_0(x) + f(z)A_0(x) \quad (3.31)$$

Où $\bar{u}_{90}(x)$ et $\bar{u}_0(x)$ sont les valeurs moyennes (estimée à travers les épaisseurs de couches) des déplacements longitudinaux $u_{90}(x, z)$ et $u_0(x, z)$ dans les couches à 0° et à 90° [11, 33].

2. Hypothèses sur les contraintes de cisaillement : on supposant que les déplacements transverses sont indépendants de la coordonnée longitudinal et que les contraintes de cisaillement dans les deux couches sont liées à la déformation en cisaillement transversal par les relations [7, 14, 17-20, 32, 33, 74] :

$$\sigma_{xz}^k = G_{xz}^k \gamma_{xz}^k, \quad \gamma_{xz}^k = \frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \approx \frac{\partial u_k}{\partial z}, \quad k = 0, 90 \quad (3.32)$$

Où G_{xy}^k ($k = 0, 90$) sont les modules de cisaillement transverses des couches à 0° et à 90° [14, 16, 33, 74]. Suite à cette supposition, l'équation (3.32) devient :

$$\sigma_{xz}^k \approx G_{xz}^k \frac{\partial u_k}{\partial z}, \quad k = 0, 90 \quad (3.33)$$

Par conséquent, les contraintes de cisaillement sont exprimées par [33]:

$$\sigma_{xz}^0 = G_{xz}^0 f'(z)A_0(x) \quad (3.34)$$

$$\sigma_{xz}^{90} = 2G_{xz}^{90} z A_{90}(x) \quad (3.35)$$

Où :

$$f'(z) = \frac{df}{dz} \quad (3.36)$$

Ces contraintes de cisaillement doivent satisfaire aux conditions suivantes [14] :

- Condition découle de la symétrie : $\sigma_{xz}^{90}(x,0)=0$.
- Condition découle de la continuité : $\sigma_{xz}^0(x,t_{90})=\sigma_{xz}^{90}(x,t_{90})$.
- Aucune contrainte de cisaillement sur la surface latérale de la cellule élémentaire $\sigma_{xz}^0(x,t_0+t_{90})=0$.

La continuité de la contrainte de cisaillement à l'interface ($z=t_{90}$) entre les couches à 0° et à 90° mène à la relation [33]:

$$A_0(x)=2\frac{G_{xz}^{90}t_{90}}{G_{xz}^0f'(t_{90})}A_{90}(x) \quad (3.37)$$

La contrainte de cisaillement $\tau(x)$ à l'interface entre les couches à 0° et à 90° est [14] :

$$\tau(x)=\sigma_{xz}^{90}(x,t_{90})$$

et est exprimé à partir de l'Eq. (3.35) par [14]:

$$\tau(x)=2G_{xz}^{90}t_{90}A_{90}(x) \quad (3.38)$$

D'après ces hypothèses cités ci-dessus et associées aux formulations de la mécanique des milieux continus qui régissent le problème d'élasticité dans la cellule élémentaire, J.-M. Berthelot et *al* [14, 32] ont déduits les expressions de la contrainte longitudinale moyenne (Eq. 3.21) dans la couche à 90° , la contrainte longitudinale moyenne (Eq. 3.22) dans les couches à 0° et la contrainte de cisaillement à l'interface entre les couches à 0° et à 90° :

$$\bar{\sigma}_x^{-90}(x)=\sigma_0\frac{E^{90}}{E_{x0}}\left(1-\frac{\cosh\eta\bar{a}\left(\frac{x}{a}\right)}{\cosh\eta\bar{a}}\right) \quad (3.39)$$

$$\bar{\sigma}_x^0(x)=\sigma_0\frac{E^0}{E_{x0}}\left(1+\frac{t_{90}}{t_0}\frac{E^{90}}{E^0}\frac{\cosh\eta\bar{a}\left(\frac{x}{a}\right)}{\cosh\eta\bar{a}}\right) \quad (3.40)$$

$$\tau(x)=\sigma_0\frac{E^{90}}{E_{x0}}\eta\frac{\cosh\eta\bar{a}\left(\frac{x}{a}\right)}{\cosh\eta\bar{a}} \quad (3.41)$$

η est le paramètre de transfert de charge entre deux fissures consécutives [32]:

$$\eta^2=3\left(1+\frac{t_{90}}{t_0}\right)\frac{E_{x0}G}{E^0E^{90}} \quad (3.42)$$

Le coefficient $A_{90}(x)$ est déduit des relations (3. 38) et (3. 41) [17]:

$$A_{90}(x) = \frac{\sigma_0}{2t_{90} G_{xz}^{90}} \frac{E_{90}}{E_{x0}} \eta \frac{\sinh \eta \bar{a}(x/a)}{\cosh \eta a} \quad (3. 43)$$

Le coefficient \bar{G} dans l'équation (3. 29) est déterminé par [7, 15, 17-20] :

$$\bar{G} = \frac{3G}{t_{90}} \quad (3. 44)$$

Le module de cisaillement généralisé de la cellule élémentaire est donné par [7, 16-20, 32] :

$$G = \frac{G_{xz}^{90}}{1 - 3 \frac{G_{xz}^{90}}{G_{xz}^0} \frac{f(t_{90})}{t_{90} f'(t_{90})}} \quad (3. 45)$$

La fonction $f(z)$ représente la variation de cisaillement transversal à travers de l'épaisseur de la couche à 0° . Deux variations ont été envisagées: une variation parabolique et un cisaillement transversal progressif [17, 33] :

a. Un modèle parabolique complet [7, 14, 16, 17, 20, 32, 33] :

$$f(z) = z^2 - 2(t_0 + t_{90})z + \frac{2}{3}t_0^2 + 2t_0 t_{90} + t_{90}^2 \quad (3. 46)$$

b. Un modèle de cisaillement progressif [7, 14, 16-18, 32, 33, 74] :

$$f(z) = \frac{\sin \frac{t_0}{t_{90}} \eta_t}{\frac{t_0}{t_{90}} \eta_t} - \cosh \eta_t \left(1 + \frac{t_0}{t_{90}} - \frac{z}{t_{90}} \right) \quad (3. 47)$$

Où η_t est le paramètre de transfert en cisaillement, exprimé en fonction du module d'élasticité E_x^0 de couche à 0° , du module de cisaillement G_{xz}^0 et du rapport géométrique de fissuration \bar{a} [7, 14, 16-18, 20, 32, 33, 74] :

$$\eta_t = \frac{E_x^0}{G_{xz}^0} \frac{1}{\bar{a}} \quad (3. 48)$$

Dans l'hypothèse 1, l'Eq. (3. 30) considère une variation parabolique du déplacement longitudinal dans l'épaisseur de la couche à 90° , alors que l'Eq. (3. 31), garde une forme généralisée de la variation du déplacement longitudinal dans l'épaisseur de la couche à 0° qui permet de déduire des propriétés générales de la modélisation. La comparaison des résultats déduits de cette modélisation (Berthelot, 1997 et le Corre, 1999) avec les résultats déduits d'une analyse par élément finis (Berthelot et al, 1996 A [14]) montre que la meilleure

évaluation des champs des déplacements et des contraintes est obtenue dans le cas d'un modèle qui considère un cisaillement progressif des couches à 0° évalué par l'Eq. (3. 47) [14, 74]. Aussi, J.-M. Berthelot et *al* [33] ont été montré que des résultats similaires sont obtenus pour les deux types de variations (modèles parabolique complet et de cisaillement progressif) dans le cas de faibles densités des fissures transversales, où un cisaillement transversal progressif (Eq. 3. 47) doit être considéré dans le cas de grandes densités de fissures.

3.4.4. Modèle shear lag parabolique incomplet

C. Henaff-Gardin et *al* [11] ont été considéré l'hypothèse sur les champs de déplacement qui citée que dans la direction x (normal au plan de fissures de la couche à 90°) une évolution parabolique de déplacement u avec z (la valeur minimale de u étant u_{90}) dans la couche à 90° et constant, u_0 , dans les couches à 0° (Fig. 3. 16). Ce cas appel une analyse shear lag parabolique incomplet [14,11].

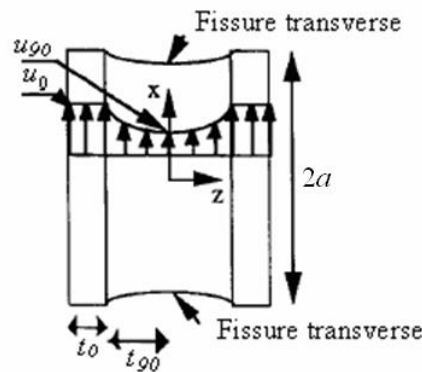
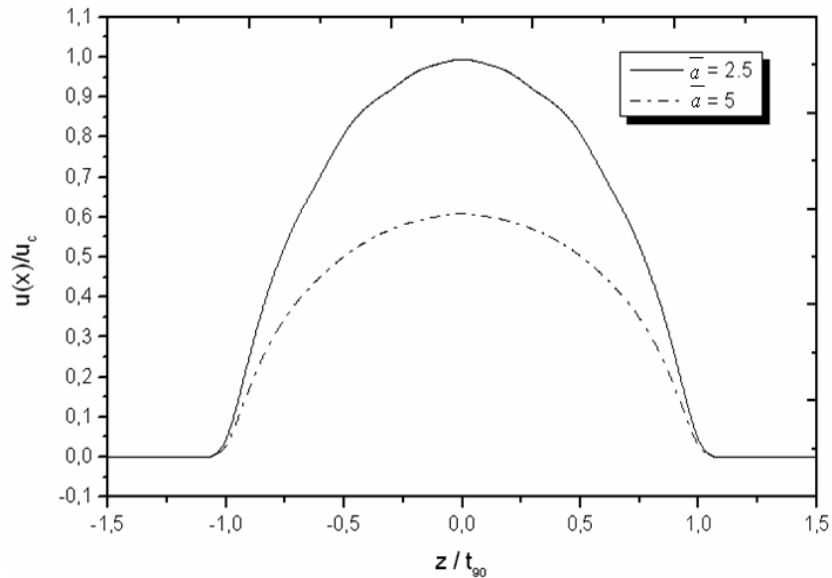


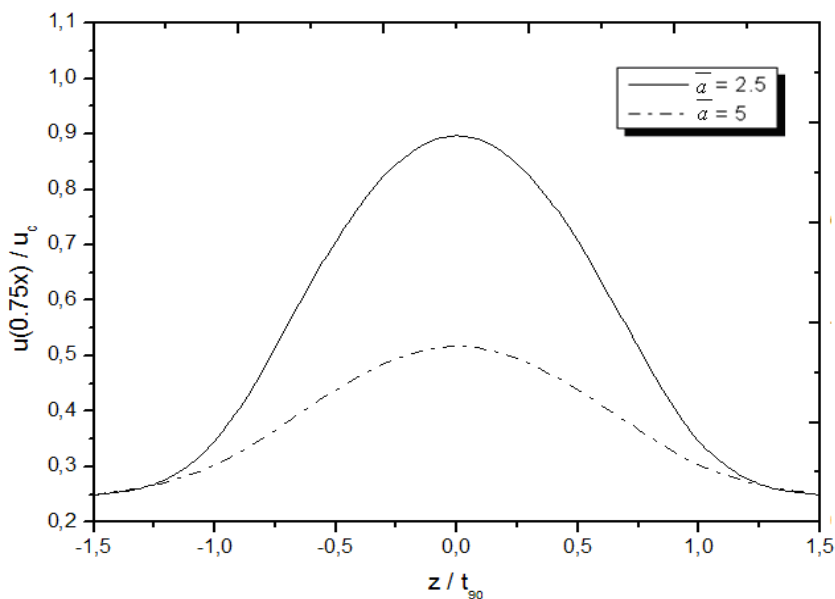
Figure 3. 16 : Champs de déplacement dans une cellule élémentaire [11].

Alors, les couches à 0° peuvent être considérés comme ayant un module de cisaillement transversale d'une valeur infinie, et le module de cisaillement G donnée par l'Eq. (3. 45) est réduite au module de cisaillement transversale G_{xz}^{90} de la couche à 90° . Ensuite, les contraintes longitudinaux moyens dans les couches à 0° et à 90° , et contrainte de cisaillement de l'interface, sont donnés par les Eqs. (3. 39), (3. 40) et (3. 41), en substituant G par G_{xz}^{90} dans l'Eq. (3. 42). Cependant, la distribution de déplacement dans l'épaisseur de stratifié, Eqs. (3. 30) et (3. 31) sont modifiées [14].

La figure 3. 17, illustre des exemples des variations de déplacement longitudinal, données pour deux valeurs de coordonnée longitudinale : $x = -a$ (a) et $x = -3a/4$ (b), à travers l'épaisseur du stratifié. Ces résultats ont été obtenus par analyse éléments finis pour deux valeurs du rapport géométrique de fissuration $\bar{a} = 5$ et 2.5.



(a)



(b)

Figure 3. 17 : Variation du déplacement longitudinal à travers l'épaisseur pour deux valeurs de coordonnée longitudinale : $x = -a$ (a) et $x = -3a/4$ (b) et pour deux valeurs du rapport géométrique de la fissuration transverse $\bar{a} = 5$ et 2.5.

Le déplacement longitudinal dans le plan de fissure (Fig. 3. 17 (a)) apparaît une variation parabolique dans la couche à 90° et est constante dans les couches à 0°. Cette variation est conforme à l'analyse shear lag parabolique incomplètes. Cependant, immédiatement à une distance du plan de la fissure (Fig. 3. 17 (b)), le déplacement longitudinal présente une variation parabolique à travers la couche à 90° et couches à 0°. Ainsi, En remarque que la valeur maximale de déplacement longitudinal est diminuée lorsque \bar{a} augmente et, aussi, lorsqu'on se déplace loin de la surface de fissure.

En substituant l'Eq. (3. 21) dans l'équation (3. 18), le résultat obtenu contient deux termes. Le premier terme est égale à la déformation de la théorie classique du stratifié, le second est un nouveau terme lié à la fonction de perturbation de contrainte $R(\bar{a})$ [16, 20, 29]:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - \sigma_{x0}^{90} g_1 \frac{1}{2a} R(\bar{a}) \quad (3. 49)$$

$$\varepsilon_x^{-90} = \varepsilon_{x0} - \sigma_{x0}^{90} g_2 \frac{1}{2a} R(\bar{a}) \quad (3. 50)$$

$$\varepsilon_x^{-0} = \varepsilon_{x0} - \sigma_{x0}^{90} g_3 \frac{1}{2a} R(\bar{a}) \quad (3. 51)$$

Voir Annexe A2. 2 pour g_i , $i=1,2,3$. La contrainte σ_{x0}^{90} dans la couche à 90° d'un stratifié non endommagé sous chargement thermomécanique peut être calculée en utilisant la théorie classique des stratifiés :

Dans l'Eq. (3. 52), ε_{x0} et ε_{y0} sont les déformations provoquées par la charge thermique et mécanique combinées. Cette équation peut être réécrite pour des cas d'un chargement mécanique pur et thermique pur :

$$\sigma_{x0}^{90} = Q_{22}(\varepsilon_{x0} - \alpha_2 \Delta T) + Q_{12}(\varepsilon_{y0} - \alpha_1 \Delta T) \quad (3. 52)$$

a- Chargement mécanique ($\Delta T = 0$) :

$$\sigma_{x0}^{90} = Q_{22} \varepsilon_{x0} (1 - \nu_{12} \nu_{xy0}) \quad (3. 53)$$

b- Chargement thermique ($\sigma_0 = 0$) :

$$\varepsilon_{x0} = \alpha_{x0} \Delta T \quad \text{et} \quad \varepsilon_{y0} = \alpha_{y0} \Delta T \quad (3. 54)$$

L'équation (3. 52) peut être réécrite sous la forme :

$$\sigma_{x0}^{90} = Q_{22} [\alpha_{x0} - \alpha_2 + \nu_{12} (\alpha_{y0} - \alpha_1)] \Delta T \quad (3. 55)$$

Ici, ν_{xy0} est le coefficient de Poisson du stratifié non endommagé.

3.4.5. Expressions de réduction des propriétés thermo-élastiques due aux fissures transversales

Les fissurations transversales multiples (densité de fissure) en composites stratifiés a été connu en tant que la cause de la réduction progressive des propriétés thermo-élastiques [21]. Pour un espacement des fissures répartis équidistant dans la couche à 90° de stratifié symétrique et équilibrée, le modèle de réduction de propriétés thermomécaniques a été utilisé pour montrer que l'espacement de fissures $2a$ réduire ces propriétés suivant les expressions de réduction de module d'élasticité, coefficient de Poisson et coefficient de dilatation thermique.

L'étude de la réduction de ces dernières est dérivée dans cette section. Pour cela, En substituant les équations (3. 49) et (3. 51) dans l'équation (3. 3) et en considère l'équation (3. 53) on obtient les expressions fondamentales suivantes [7, 16-20, 31] :

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \frac{1}{1 + a^* \bar{\rho} R(\bar{a})} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{xy}}{\nu_{xy0}} = \frac{1 - c \bar{\rho} R(\bar{a})}{1 + a^* \bar{\rho} R(\bar{a})} \quad (3. 56)$$

Où $\bar{\rho} = \frac{1}{2a}$ est la densité de fissures normalisée et a^*, c sont des fonctions connues, dépendantes des propriétés élastiques et de la géométrie de couches à 90° et à 0° (Voir l'Annexe A2. 2) [16, 29]. ν_{xy0} est le coefficient de Poisson de stratifié sain (non endommager) [7, 17].

Les fissures transversales peuvent entraîner un changement significatif de coefficient de dilatation thermique α_x de stratifiés composites [21]. Pour un stratifié endommagé, ce coefficient peut être obtenue en substituant l'équation (3. 51) dans l'équation (3. 5) et en supposant que la contrainte mécanique appliquée est nulle ($\sigma_0 = 0$). Finalement, nous obtenons :

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_{x0}} = 1 + e \bar{\rho} R(\bar{a}) \quad (3. 57)$$

Où e est une fonction des constantes élastiques et de la géométrie (Voir Annexe A2. 2) [29].

A partir des Eqs. (3. 56) et (3. 57), il est clair que la fonction $R(\bar{a})$ est la seule inconnue. Par conséquent, la réduction des propriétés thermomécanique dépend de la forme de cette fonction de l'espacement de la fissure (densité). La solution pour cette fonction peut être trouvée en utilisant différents modèles analytiques tels que les modèles shear-lag [16, 20].

Highsmith et Reifsnider [46] calculent la perte de rigidité pour le drapage $[0/90_3]_s$ en Epoxyde / Fibres de Verre. A l'état de saturation des fissures transverses, le modèle prédit une perte de 29% alors que la réduction du module longitudinal observé est de l'ordre de 45%. Ce modèle simplifié permet de décrire l'amorçage des fissures transverses et dans certains cas l'état de saturation.

Laws et Dvorak [75] proposent un modèle basé sur la mécanique de la rupture statistique. Ils donnent une expression du module longitudinal dans un stratifié croisé, en prenant en compte les contraintes résiduelles. Le paramètre de cisaillement est déterminé à partir de la contrainte σ_{FPF} correspondant à l'initiation des fissures transverses, obtenue expérimentalement. Les prédictions sur la réduction du module longitudinal en fonction de la densité de fissures et la loi d'évolution de la fissuration transverse en traction quasi-statique (Fig. 3.18) sont en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Wang [76].

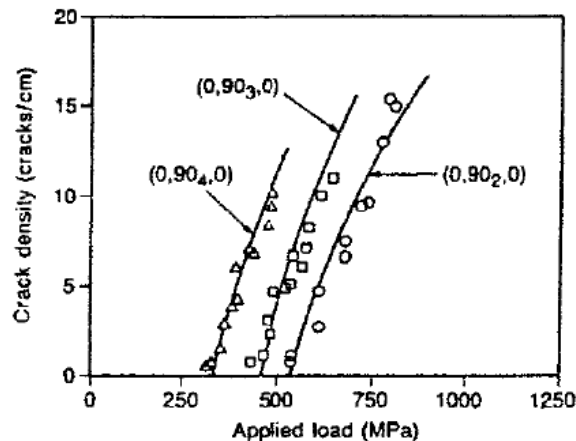


Figure 3. 18 : Évolution de la densité de fissures transverses en traction quasi-statique pour le drapage $[0/90_n/0]$ en Epoxyde 934 / Fibres de Carbone T300 [2].

Mendels et Nairn [77] ont montré qu'en prenant $\langle \zeta_1 R_1 \rangle = 0,330$ et $\langle (1 - \zeta_2) L_2 \rangle = 0,307$, on retrouvait pratiquement les résultats donnés par les éléments finis (symboles carrés) avec une erreur inférieure à 0,2% pour les densités de fissures en dessous de $0,9 \text{ mm}^{-1}$ et 0,48% pour la plus grande densité de fissures de 1 mm^{-1} . Les résultats sont donnés dans la figure (3.19) [64].

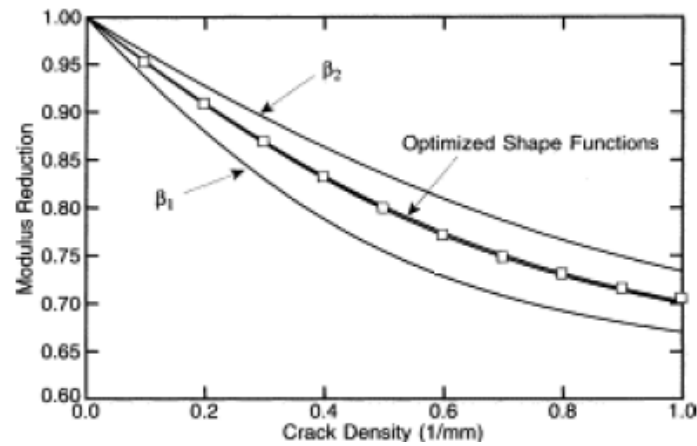


Figure 3. 19 : Réduction de module élastique pour le stratifié Verre-E / Epoxyde $[0/90_2]_s$ en fonction de la densité de fissures. Comparaison entre la modélisation et l'analyse par éléments finis [64].

3.5. Conclusion

Cette revue bibliographique exhaustive, donne un aperçu générale sur le mécanisme d'endommagement de type fissure transversale influé sur les stratifiés en chargement thermomécanique quasi statique, ainsi, la modélisation du comportement mécanique, en utilisant un modèle de type shear lag et la méthode des éléments finis en formulation des contraintes plane tous en basant sur la formulation de R. Joffe et *al* [15, 29] et J.-M. Berthelot et *al* [14].

CHAPITRE 04

MODÉLISATION PAR EF, RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

CHAPITRE 04

Modélisation par EF, résultats et commentaires

Dans ce chapitre, l'évaluation de la distribution de contraintes, ainsi que la dégradation des propriétés thermomécaniques, ont été étudiées par l'Analyse Eléments Finis dans le cas de fissures régulièrement espacées, caractérisées par la cellule élémentaire représentée dans la figure 3. 15 de chapitre 03 (ce modèle schématique a été inspiré des travaux de R. Joffe et al. [29]). Les calculs du modèle par Eléments Finis sont effectués dans une formulation de contrainte plane. La simulation de l'état de contrainte 2D dans un stratifié fissuré a été réalisée en utilisant le code de programme ANSYS 10.0.

4.1. Modélisation géométrique par EF

Pour raison de symétrie du problème, un quart seulement de l'unité (Fig. 4. 1b) est utilisée, alors, on doit introduire les conditions de symétries suivantes : Sur les côtés $x = -a$, $z \in [t_{90}, h']$ et $x \in [-a, 0]$, $z = 0$. Conditions de traction libres sont sur $z = h'$ et sur la surface de fissure $x = -a$, $z \in [0, t_{90}]$. Un déplacement constant est appliqué suivant la direction x à $x = 0$, $z \in [0, h']$ (Fig. 4. 1b,c). Des éléments rectangulaires plans 2D linéaires et quadratiques (04 nœuds, proportionnellement), de maillage uniforme ont été utilisés (Fig. 4. 1c). Ce dernier a été raffiné pour obtenir une meilleure approximation des champs de contraintes dans l'axe de proximité de fond de fissure et au niveau de l'interface $0^\circ/90^\circ$. Aussi, pour assurer la précision des résultats

La cellule élémentaire (le quart de l'unité) est modélisée avec un maillage 10×10 éléments (Fig. 4. 1). La distribution de contrainte dans la cellule élémentaire est reportée sur la figure 4.2, dans le cas d'une investigation 2-D et pour $a = 5$ ($\rho = 0.1 \text{mm}^{-1}$).

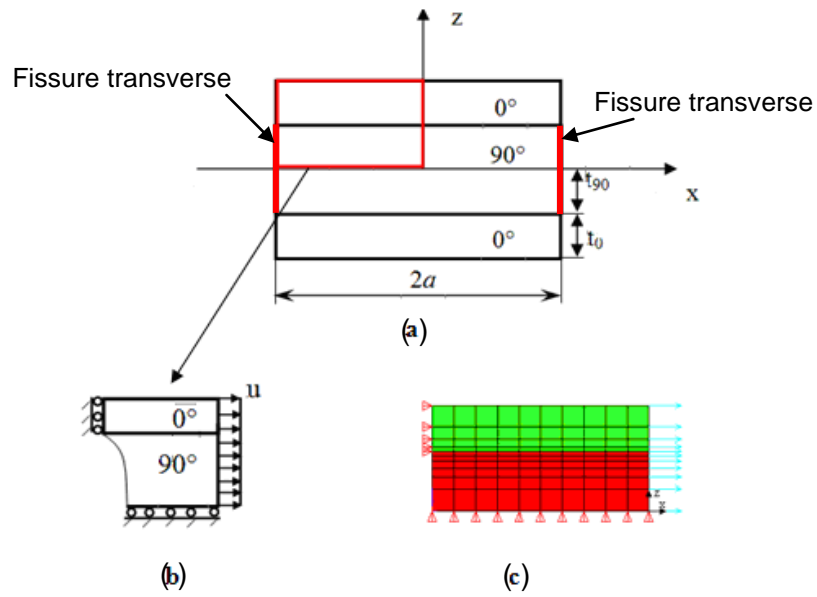


Figure 4. 1 : Modèle géométrique de la cellule élémentaire : (a) - Fissures transversales répétées dans la couche à 90°; (b) - Conditions aux limites de la région modélisée et (c) - Modélisation par éléments finis.

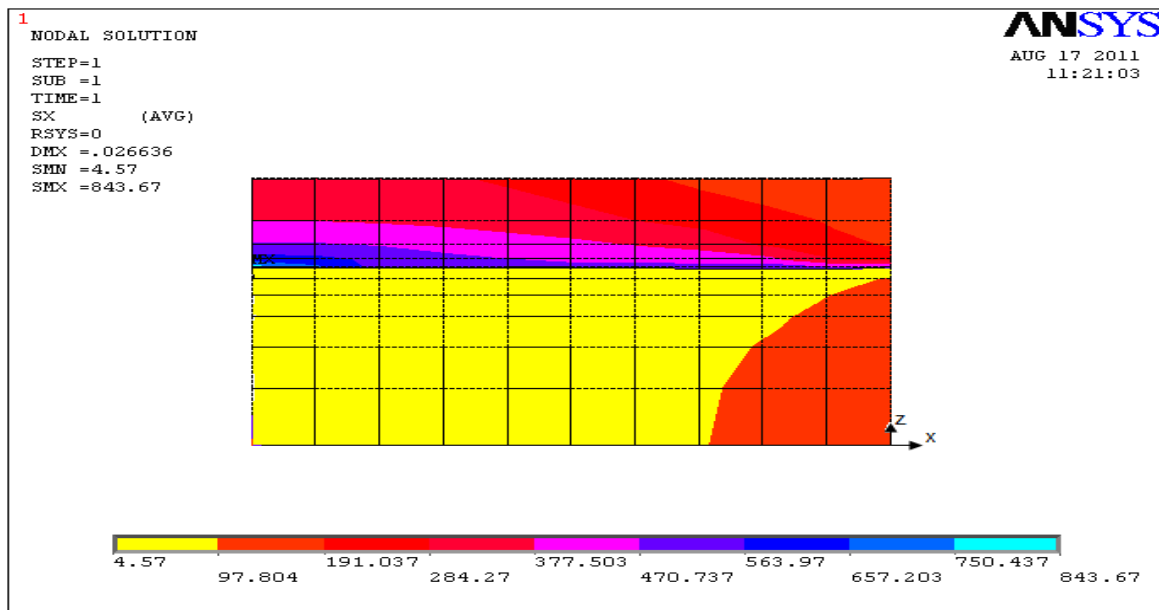


Figure 4. 2 : Distribution de contraintes normales dans la cellule élémentaire pour $a = 5$ ($\rho = 0.1\text{mm}^{-1}$).

4.2. État de contraintes

Pour raisons de comparaison, l'analyse Élément Fini est utilisé pour étudier l'état de contrainte dans un stratifié croisé de type $[0_m/90_n]_s$ endommagé par des fissures transversal. En utilisant les mêmes hypothèses à ceux des modèles analytiques [23, 29] :

- La surface fissurée est plane et rectangulaire,
- les fissures couvrent toute la largeur et la longueur de pli,
- Les fissurée sont régulièrement espacés,

Nous nous intéressons à la répartition des contraintes dans la cellule élémentaire. Dans les calculs par Éléments Finis réalisés, la contrainte moyenne de 45.35 MPa est appliquée, suivant la direction x , à la cellule élémentaire (Fig. 4. 1c). La température est prise égale à 24.85 °C dans les mêmes conditions d'essai de [29]. On suppose que l'interface $0^\circ/90^\circ$ entre les couches est une liaison parfaite.

Les calculs dans cette étude sont effectués pour deux types de stratifiés croisés : un stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde (AS4-3502) [78] et un stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde (GF/EP) [15, 29]. Le stratifié a les dimensions suivantes : $t_{90} = 1\text{mm}$ et $t_0 = 0.5\text{mm}$. Les résultats sont comparés avec le modèle analytique et les essais expérimentaux disponibles. Les propriétés du matériau utilisées dans cette analyse, à la température ambiante (24.85 °C), tirés de la littérature sont données dans le Tableau 4. 1.

On étudie, dans le premier temps, la variation des contraintes normales longitudinale $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la cellule élémentaire correspondant à chaque état d'endommagement ($a = 5$ ($\rho = 0.1\text{mm}^{-1}$) et $a = 2.5$ ($\rho = 0.2\text{mm}^{-1}$)). Ce qui permet de localiser l'initiation des fissures transverses provoquée par cette contrainte.

La figure 4. 3 (a) ; (b), montre la variation de la contrainte longitudinale normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ au long de l'axe x pour deux valeurs de a (a étant la demi-distance entre deux fissures consécutives) en cas de stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde (AS4-3502). L'étude numérique a été comparé avec les travaux de J.-L. Rebière et al [23] (Modèle analytique basé sur une approche variationnelle et l'analyse par EF). Effectivement, les résultats sont tracés à $z = t_{90}$ (à l'interface $0^\circ/90^\circ$) qui est une région de deux couches dissemblables et puisque nous étudions la distribution de la contrainte longitudinale normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la couche à 90° , nous devons prenons en compte les valeurs pour le matériel 1 qui sont indiquées dans les tableaux (A3. 1) et (A3. 2) de l'Annexe (A3. 1) (valeurs S_x). L'état de contraintes calculé par la méthode des Éléments Finis est en bon accord avec les résultats des modèles de J.-L. Rebière et al [23].

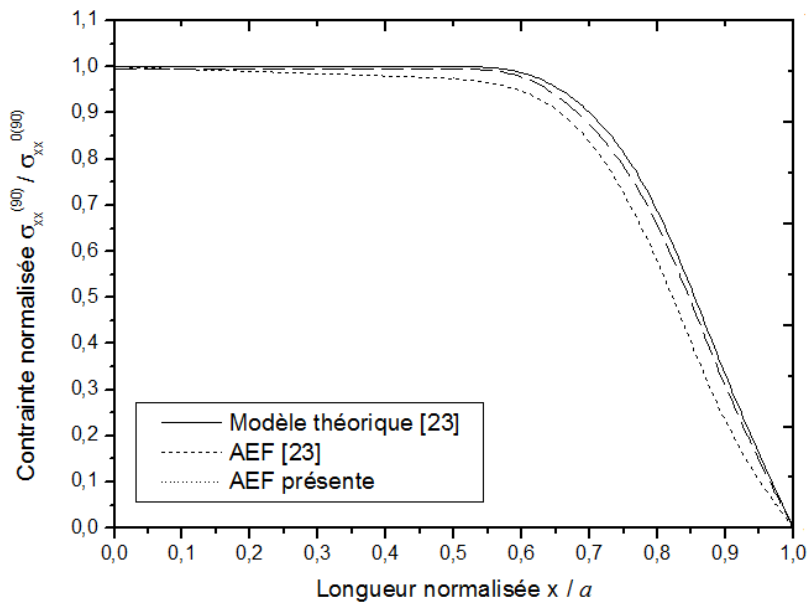
| Propriétés | Fibre en Verre / Epoxyde [15, 29] | Fibre en Graphite / Epoxyde (as4-3502) [78] |
|---------------------------------|-----------------------------------|---|
| E_1 , GPa | 44.73 | 144.78 |
| E_2 , GPa | 12.76 | 9.58 |
| ν_{12} | 0.297 | 0.31 |
| ν_{23} | 0.420 | 0.55 |
| G_{12} , GPa | 5.80 | 4.785 |
| G_{23} , GPa | 4.49 | 3.09 |
| α_1 , $1/^\circ\text{C}$ | 8.6×10^{-6} | -0.72×10^{-6} |
| α_2 , $1/^\circ\text{C}$ | 22.1×10^{-6} | 27×10^{-6} |
| ΔT , $^\circ\text{C}$ | -105 | -147 |

Tableau 4.1 : Propriétés élastiques des stratifiés croisés.

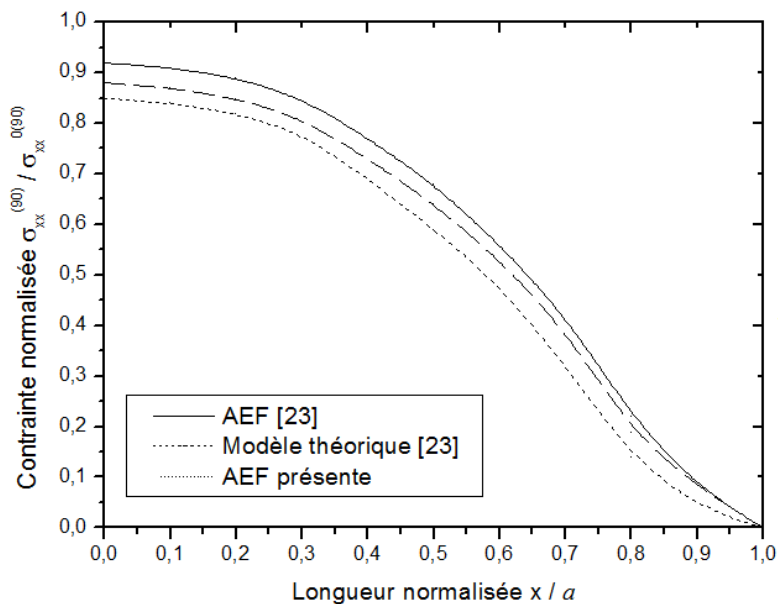
La contrainte longitudinale normalisée est nulle au niveau de surface de la fissure transverse (en raison des conditions aux limites) et prend une valeur maximale entre deux fissures adjacentes (c'est l'endroit théorique d'initiation d'une nouvelle fissure transverse [23]). En comparant la figure 4. 3a avec 3b, il a été constaté que la variation de la distribution de contraintes peut être exprimée par la différence de la distance entre les fissures transverses. En effet, lorsque la densité des fissures transverses augmente ($a = 2,5$ ($\rho = 0.2\text{mm}^{-1}$)), la valeur maximale de $\sigma_{xx}^{(90)}$ diminue et les courbes s'écartent loin entre eux. A cet état de l'endommagement, la couche à 90° ne transmet l'effort que partiellement. De plus, à un certain stade, la valeur de la densité des fissures transverses est proche de la valeur de l'état d'endommagement caractéristique (Characteristic Damage State value (CDS)), où la création d'une nouvelle fissure transverse est impossible. Puis, un nouveau mode d'endommagement peut facilement se développer : il s'agit de fissures longitudinale ou le délaminage.

La figure 4. 4, illustre des résultats obtenus par l'analyse des Eléments Finis en comparant avec les modèles analytiques et numériques de : J. L. Rebière et al [23] pour la figure 4. 4(a) et J. M. Berthelot et al [32] pour la figure 4.4 (b) pour la variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur du stratifié à $x = -a$. Les résultats montrent clairement que la surface de fissure, ce qui correspond à $0 \leq z/h' \leq 1$, est libre de toute contrainte, c.-à-d., aucune charge n'est portée par le pli à 90° dans cette région dans le cas des

petites densité des fissures (Fig. 4.4(a)), tandis que, cette contrainte augmente progressivement, à l'approche de l'interface $90^\circ/0^\circ$, en cas des grandes densité de fissure (Fig. 4.4(b)). Aussi, et au niveau de l'interface $0^\circ/90^\circ$, la contrainte change rapidement. L'accord entre les modèles est excellent.

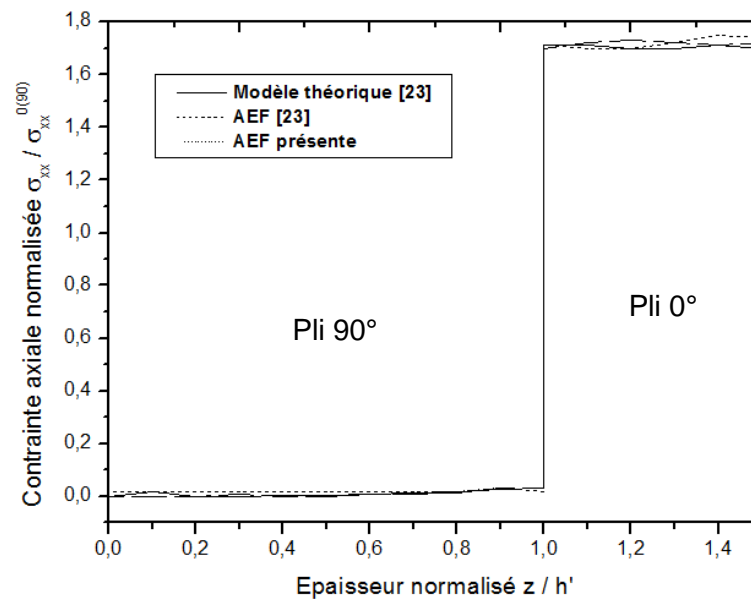


(a)

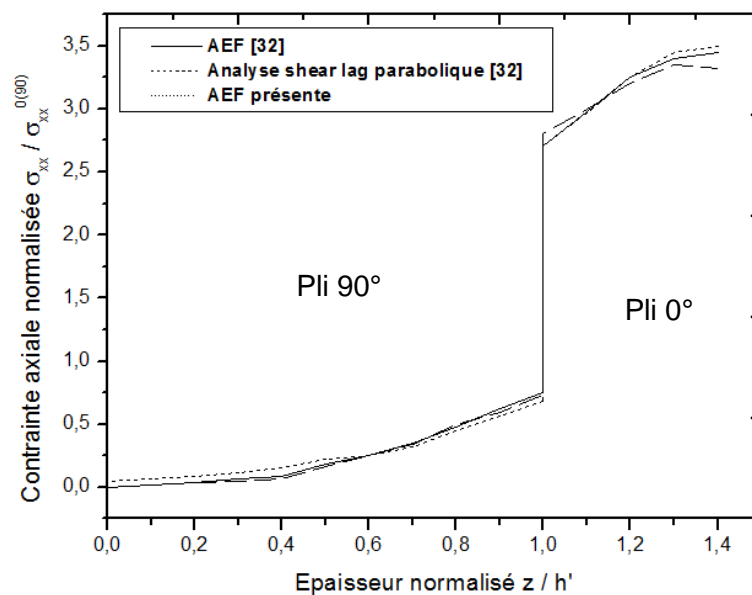


(b)

Figure 4. 3 : Distribution de la contrainte normale normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la couche à 90° pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0^\circ/90^\circ]_s$ (AS4-3502) au long de l'axe x : (a) $a = 5$, (b) $a = 2.5$.



(a)



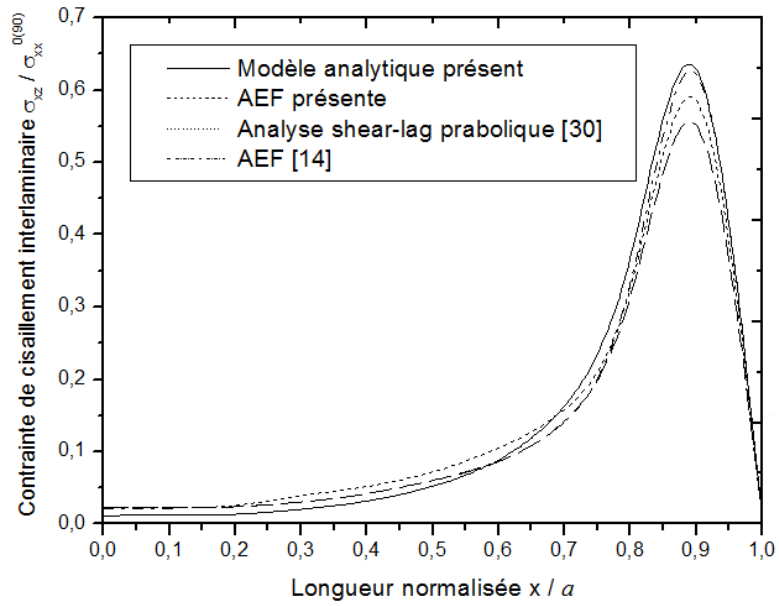
(b)

Figure 4.4 : Variation de la contrainte longitudinale normalisée σ_{xx} à travers l'épaisseur du stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ à $x = -a$, (a) $a = 5$ et (b) $a = 2,5$.

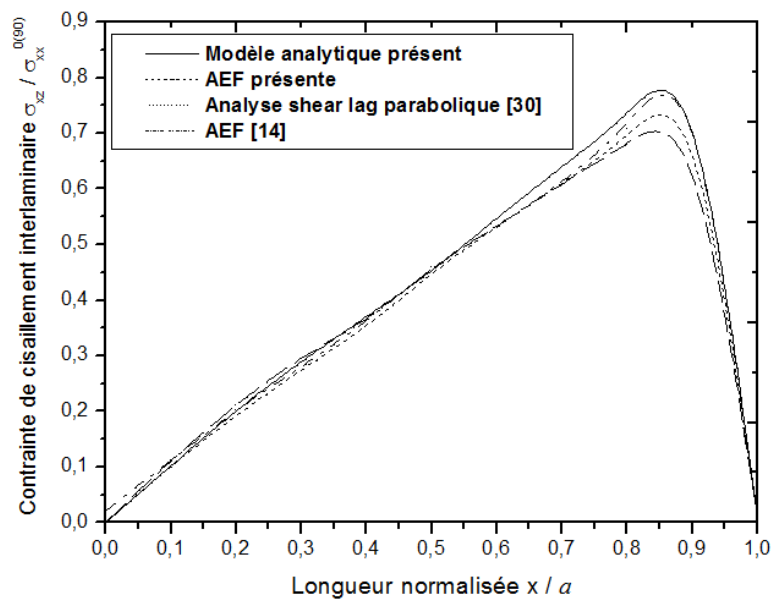
Sachant que le transfert de charge entre les deux couches se fait essentiellement par cisaillement à l'interface, la répartition des contraintes de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} et la contrainte normale inter-laminaire σ_{zz} sont analysées également.

Avec les deux modèles présents (analytique et Eléments Finis) et la comparaison avec les analyses: théorique de type shear lag parabolique de J.-M. Berthelot et *al* [30] et par Eléments Finies de J.-M. Berthelot et *al* [14], la contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} (figure 4. 5 (a) et (b)) présente une augmentation modérée lorsqu'on approche de plan de la fissure, et atteint une valeur élevée dans une petite région près au plan de la fissure, où, un pic plus élevé de la contrainte à une distance $x/a = 0.89$ du plan de la fissure a été constaté, mais réduit radicalement à zéro entre deux fissures transverses consécutives pour petite densité de fissures (Fig. 4.5 (a)) et progressivement pour grande densité de fissures (Fig. 4.5 (b)), puis, tombe soudainement à zéro au plan de la fissure en $x = -a$. Les résultats des modèles, numériques et analytiques, de la contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} obtenus sont similaires dans une certaine mesure avec une légère différence au niveau de Pic. En effet, la valeur maximale de la contrainte σ_{xz} dans les résultats du modèle numérique présent est plus petite que celle dans les résultats du modèle analytique présent. Cette différence peut être estimée par 10%. Le Pic donné par l'approche numérique est de 76% $\sigma_{xx}^{(90)}$, tandis que pour l'approche analytique est de 86% $\sigma_{xx}^{(90)}$.

La figure 4. 6, présente la distribution de la contrainte normale inter-laminaire du stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde à l'interface $z = t_{90}$, avec $a = 5$. À une distance importante du plan de la fissure, les valeurs de la contrainte inter-laminaire sont légèrement variées de 0.2 à 0.1 pour le modèle semi-analytique de L. N. McCartney et *al* [34] et analytique présent, mais une variation quasi-constante pour l'analyse EF présente dans la région $0 \leq x/a \leq 0,7$, puis elles augmentent tant vers la valeur maximale qui a été observée fortement au plan de la fissure transverse dans l'intervalle restant $0,7 < x/a \leq 1$. Il existe une excellente corrélation entre les deux modèles analytiques, présent et de L. N. McCartney et *al* [34]. Les deux figures, 4.5 et 4.6, ont la même remarque que les résultats de la variation de la contrainte longitudinale normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$, figure 4.3, pour le problème de l'interface $0^\circ/90^\circ$ à $z = t_{90}$. Les valeurs de matériel 1 ont été prises en considération (voir le tableau (A3.5) de l'annexe A3.1).



(a)



(b)

Figure 4. 5 : Distribution de la contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} du stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ à l'interface ($z = t_{90}$), (a) $a = 5$ et (b) $a = 2.5$.

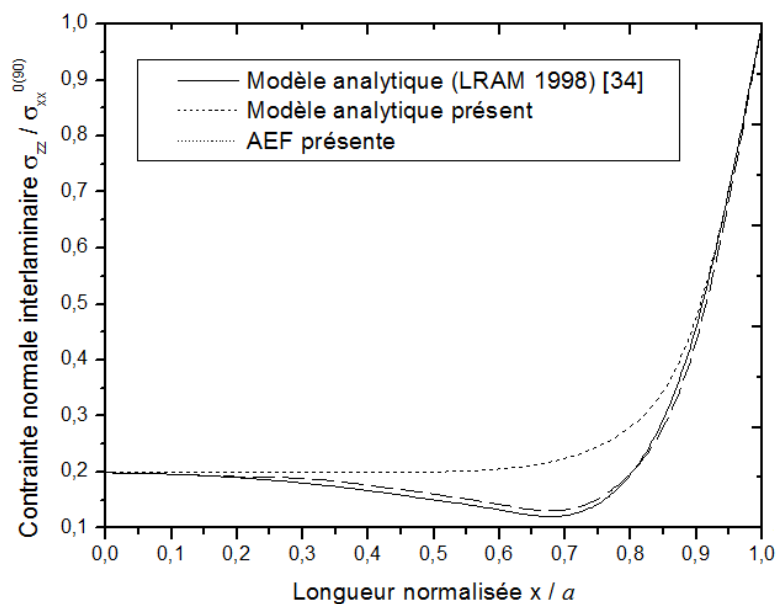


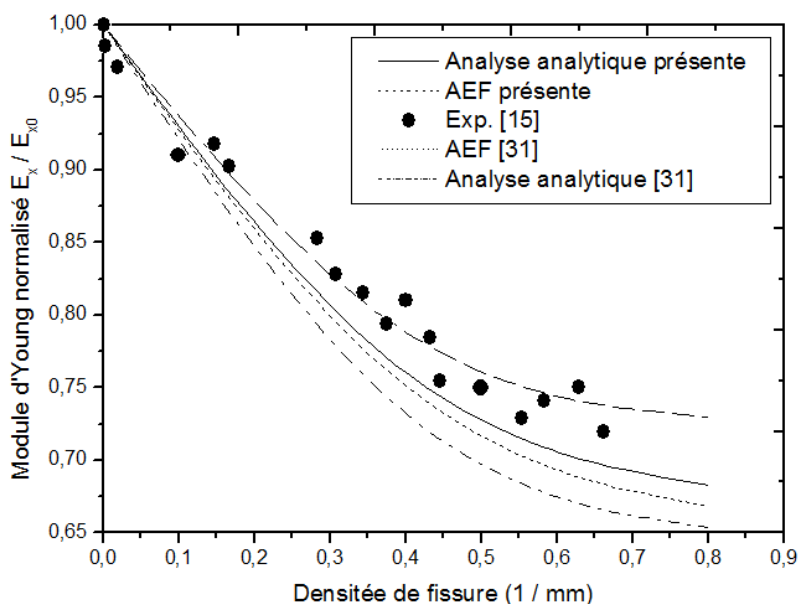
Figure 4. 6 : Distribution de la contrainte normale inter-laminaire σ_{zz} du stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$.

4.3. Effet de la densité de fissures

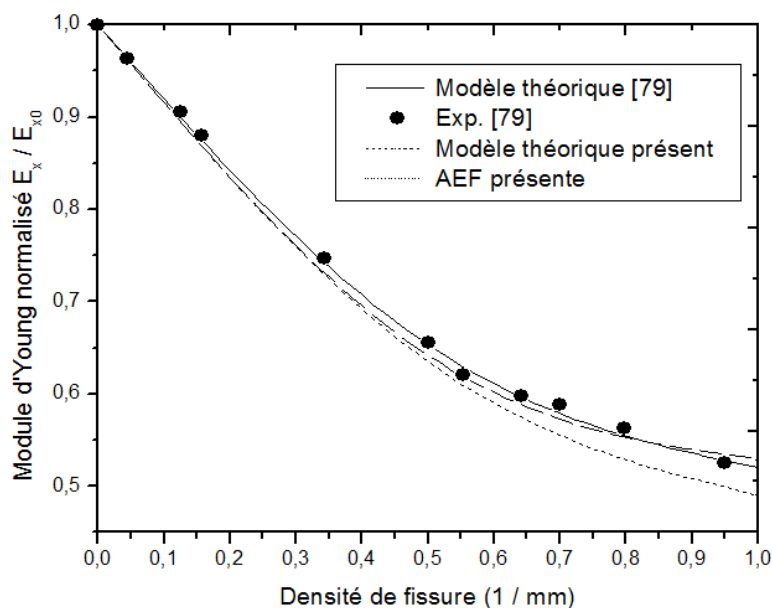
La dégradation des propriétés thermomécanique en fonction de la densité de fissures transverse a été largement étudiée. Pour cela, nous analysons dans cette section l'influence de l'évolution des fissurations transverse sur la dégradation des constantes thermomécanique d'un stratifié croisé de type $[0_m/90_n]_s$ sollicité en traction à la température ambiante et haute température. Nous étudions donc, le module d'élasticité longitudinal E_{ij} , le module de cisaillement ou Coulomb G_{ij} , le Coefficient de Poisson ν_{ij} et Coefficient de dilatation thermique α_x . Ce qui nous donne une idée globale sur le comportement mécanique du stratifié au cours du chargement, mécanique en traction monotone et thermique. Nous étudions d'abord la variation du module d'élasticité E_{ij} . Les résultats sont normés par le module d'élasticité longitudinal du stratifié sain calculé à partir de la théorie des plaques stratifiées.

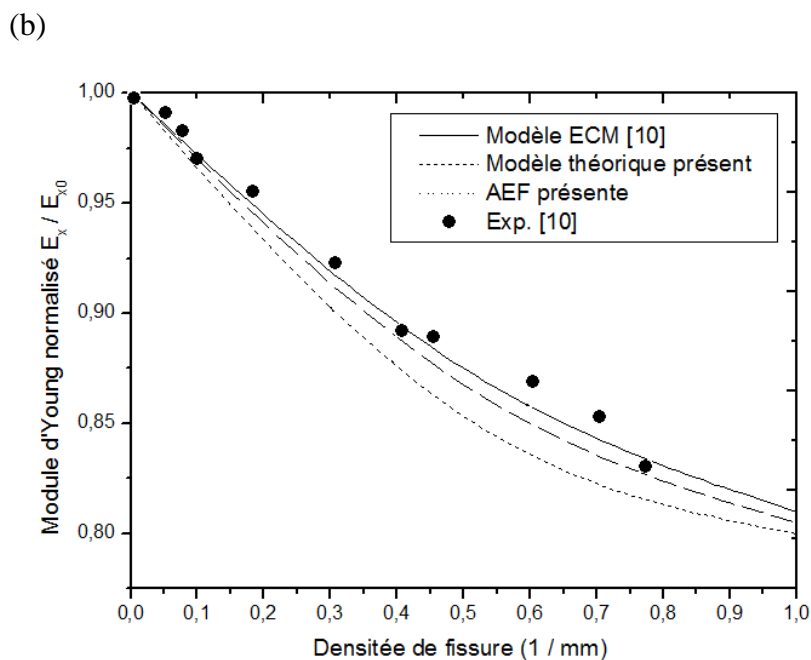
Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 4. 7 et 4. 8 et comparés avec les résultats expérimentaux dans le cas de deux stratifiés différents : Fibre en Verre / Epoxyde : (a) $[0_2/90_4]_s$, (b) $[0/90_3]_s$ et (c) $[0/90]_s$ (Fig. 4. 7) et Fibre en Graphite / Epoxyde : (a) $[0/90]_s$; (b) $[0/90_2]_s$ et (c) $[0/90_3]_s$ (Fig. 4.8). Dans la figure 4. 7, les résultats déduits de l'analyse analytique shear lag parabolique et Elément Finie de Leblond, P et al [31] (Fig. 4. 7(a)), modèle théorique de l'approche variationnelle de Z.Hashin [79] (Fig. 4. 7(b)) et modèle

ECM de D.T.G. Katerelos et *al* [10] (Fig. 4. 7(c)) sont rapportés. À première vue, a l'initiation de l'endommagement transverse, les modèles analytique et par Elément Finis présentés sont en bon accord avec les résultats expérimentaux ([15] pour la figure. 4. 7(a) et [78] pour la figure 4. 8(c)). Entre temps, on voit qu'il ya un accord remarquable avec l'analyse expérimentale de Z. Hashin [79] et D.T.G. Katerelos et *al* [10] (Fig. 4. 7(b) et (c) respectivement). On obtient, cas de Fibre en Verre / Epoxyde (Fig. 4. 7), une réduction entre (20÷ 50)% d'une densité de fissures de $(0.7 \div 0.8) \text{ mm}^{-1}$ pour le modèle EF présente avec une bonne concordance en comparaison avec les résultats expérimentaux [15, 79], tandis que, en cas d'empilement $[0/90]_s$ (Fig. 4. 7 (c)), l'AEF est surestimer la diminution de module d'élasticité. Cette réduction dépend des rigidités respectives des couches à 0° et à 90° .



(a)





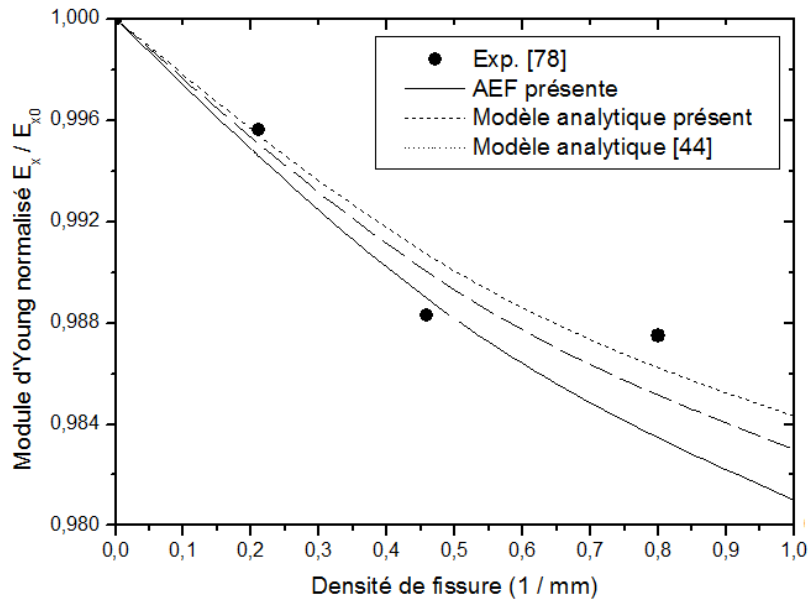
(c)

Figure 4. 7 : Variation du module d'élasticité longitudinal normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde : (a) $[0_2/90_4]_s$, (b) $[0/90_3]_s$ et (c) $[0/90]_s$

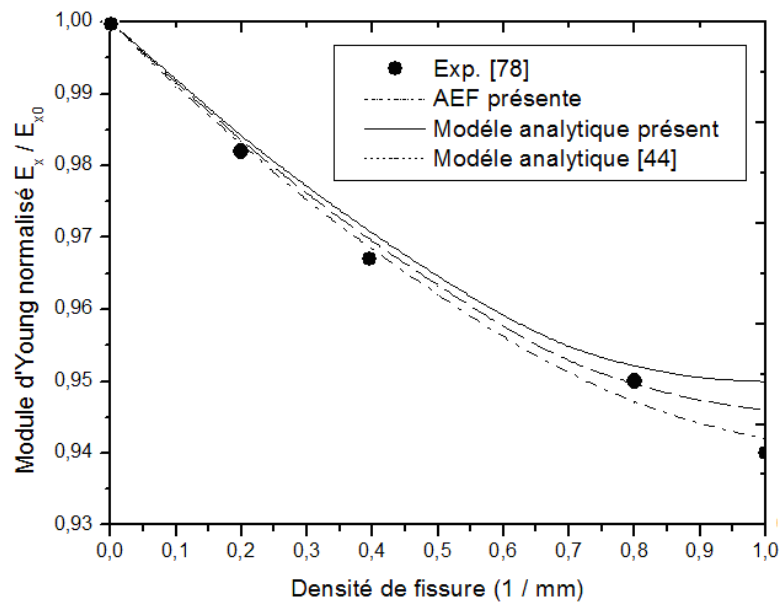
Les figures 4. 8 (a, b et c) illustrent la variation du module d'élasticité longitudinale normalisé (E_x/E_{x0}) en fonction de la densité de fissures transverse pour un stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde ((a) $[0/90]_s$; (b) $[0/90_2]_s$ et (c) $[0/90_3]_s$). Les résultats des Eléments Finis sont comparés avec les données expérimentales étudiées par Groves et *al* [78] et les résultats déduits des modèles analytiques: analyse Shear-lag parabolique de cette étude, modèle analytique basé sur la théorie classique de stratification de T. E. Tay [44] (Figs. 4. 8 a et b), analyse Shear-lag progressive de Tounsi, A et *al* [18] et modifié de Lim, S.G et *al* [21] (Fig. 4. 8 c). Les variations du module d'élasticité longitudinale semblent une légère réduction lorsque la fissure matricielle transversale augmenter en comparant avec le stratifié de Fibre en Verre / Epoxy (Figure 4. 7). En effet, pour une densité de fissure transverse de $(0.7 \div 0.8) \text{ mm}^{-1}$ et pour le même rapport d'empilement $\lambda = 0.33$ (cas de $[0/90_3]_s$), le module d'élasticité longitudinale réduite d'environ 10% pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxy (Fig. 4. 8c), alors que la réduction du module de stratifié de Fibre en Verre / Epoxy (Fig. 4. 7b) est réduite 50%.

Il est clair que l'accord entre les modèles et les données expérimentales [78] est raisonnable et que la réduction du module d'Young est plus grande dans les stratifiés avec un petit rapport d'empilement λ . Cependant, dans la figure 4. 8 c, pour une densité supérieure à

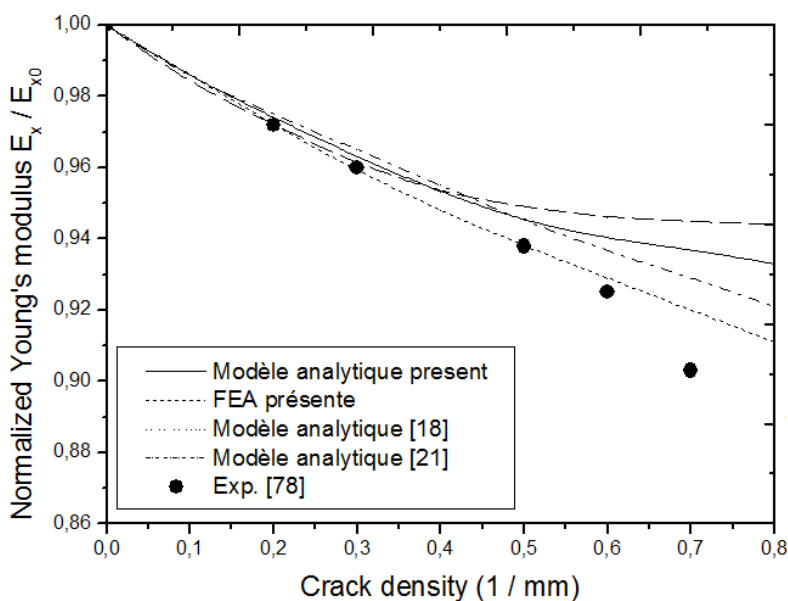
0.3 mm⁻¹, les modèles analytiques y compris le modèle Elément Fini s'écartent de plus en plus des résultats expérimentaux [78], à l'exception de modèle shear lag progressive de Tounsi, A et al [18].



(a)



(b)



(c)

Figure 4.8 : Variation du module d'élasticité normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde: (a) $[0/90]_s$; (b) $[0/90_2]_s$; (c) $[0/90_3]_s$.

Cet écart peut être attribué à l'initiation et au développement, simultanément à la progression de fissures transverse, d'un nouveau processus d'endommagement (fissuration longitudinale et / ou délamination de l'interface) qui ne sont pas prises en compte dans notre analyse. Les prédictions des différentes approches, Eléments Finis et shear lag, induisent une erreur relative de l'ordre de 2% à 4% par rapport aux résultats expérimentaux [78] pour une densité de fissures de $0,42 \text{ mm}^{-1}$. Les résultats déduits du modèle analytique basé sur la théorie classique de stratification de T. E. Tay [44] (Figs. 4. 8 a et b) ont été obtenir où les fissures transversales sont supposées droites seulement, tandis que, Groves et *al* [78] a rapporté que des fissures transversales courbes ont été observées.

La figure 4. 9, présente la variation de module d'élasticité longitudinale en fonction de la contrainte appliquée pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde $[0/90_3]_s$. Les résultats sont tracés en comparant avec différents résultats prenant en compte un (FT, Fissure Transverse) et trois (FT+FL+DEL, Fissure Transverse + Fissure Longitudinale + Délaminage) modes d'endommagement étudié par J.-L. Ribière et *al* [24], et résultats expérimentaux de Highsmith [80]. La réduction de la rigidité est diminuée d'environ 30% pour une contrainte est égale à 150 MPa dans le cas des fissures transverse (FT) [24] et AEF présente, tandis que, atteint 35% pour le cas de trois modes d'endommagement. Ces derniers continués la réduction et aboutir 45% pour une contrainte est égale à 250 MPa. Nous pouvons remarquer

que lorsque la contrainte de chargement augmente, une différence entre les résultats expérimentaux [80] avec le modèle théorique prend en compte les trois types d'endommagement, d'une part, et les résultats de modèle théorique prennent en compte un type d'endommagement et AEF présente, d'autre part, est apparaît.

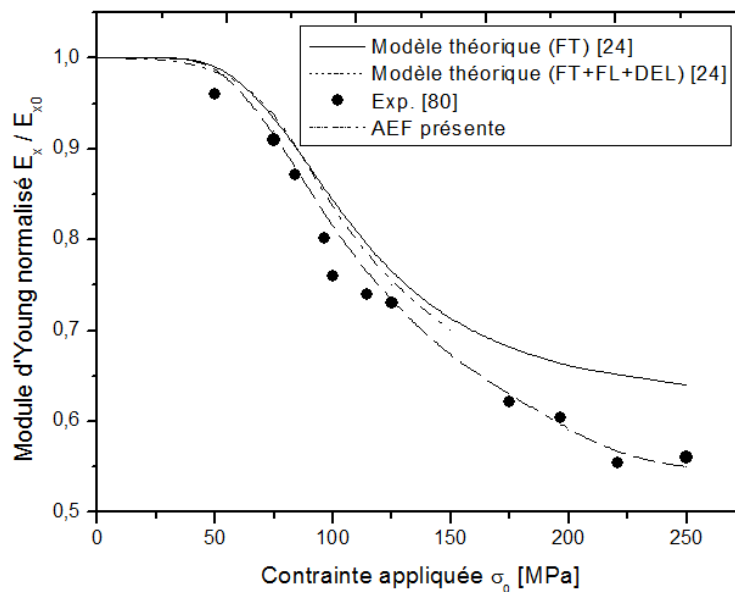
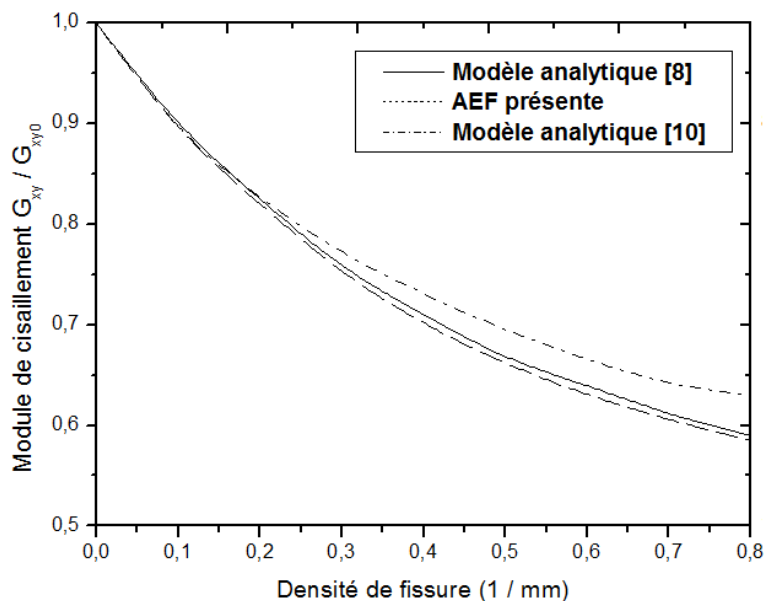


Figure 4. 9 : Variation de la rigidité longitudinale en fonction de la contrainte appliquée pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde $[0/90_3]_s$.

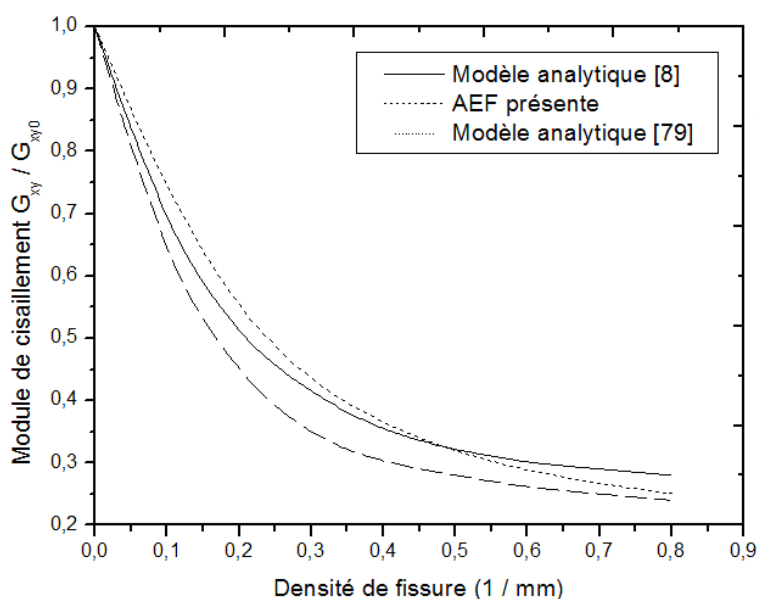
En comparant ces simulations, figures 4. 8c et 4. 9, aux données expérimentales [78] et [80] respectivement, il peut conclure que dans l'ordre d'étudier l'endommagement dans un stratifié croisé, il est nécessaire de tenir en compte l'influence des autres modes d'endommagement ensemble, tel que la fissuration longitudinale et / ou délaminage.

La figure 4. 10, montre la variation du module de cisaillement normalisé pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde $[0/90]_s$ (Fig. 4. 10(a)) et $[0/90_3]_s$ (Fig. 4. 10b) en fonction de la densité de fissures transverses. Les résultats déduits de l'analyse numérique sont comparés avec les résultats analytiques obtenus par M. Kashtalyan et *al* [8], D.T.G. Katerelos et *al* [10] et Z. Hashin [79]. On peut voir que ce module est réduit avec l'augmentation de la densité de fissures pour les deux empilements, et que la dégradation en cas d'empilement $[0/90_3]_s$ (70%) est plus prononcée que l'empilement $[0/90]_s$ (42%) pour une densité de fissures de 0.8 mm^{-1} . Sur la figure 4.10(a), les prévisions basées sur le modèle de contrainte équivalente "Equivalent Constraint Model (ECM)" d'un stratifié endommagé de M. Kashtalyan et *al* [8] semblent être en meilleur accord avec l'analyse EF présente et les prédictions théoriques du modèle ECM D.T.G. Katerelos et *al* [10] ont été estimés une dégradation moindre de 8.5% de ceux de EF. Tandis que, sur la figure 4. 10b, les modèles théorique de M. Kashtalyan et *al*

[8] et Z. Hashin [79] sont en bon concordance et L'analyse Eléments Finis actuelle est surestimer la réduction d'environ 4%.



(a)



(b)

Figure 4. 10 : Variation du module de cisaillement normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde : (a) $[0/90]_s$ et (b) $[0/90_3]_s$.

L'influence des fissures transversales sur la réduction du module de cisaillement longitudinal pour le stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0_3/90_3]_s$ est mise en évidence sur la figure 4. 11. Les résultats EF apparaissent en bon accord avec les résultats expérimentaux de Tsai et Daniel [81] et l'analyse théorique de N. M. Mohammed [2] pour

grande densité de fissure (≥ 0.2 fissures / mm). Moins de cette valeur, les résultats expérimentaux [81] illustrent des valeurs inférieures à celles qui sont dans le cas d'un stratifié sain (densité des fissures = 0), qui semble que le stratifié est pré-fissuré.

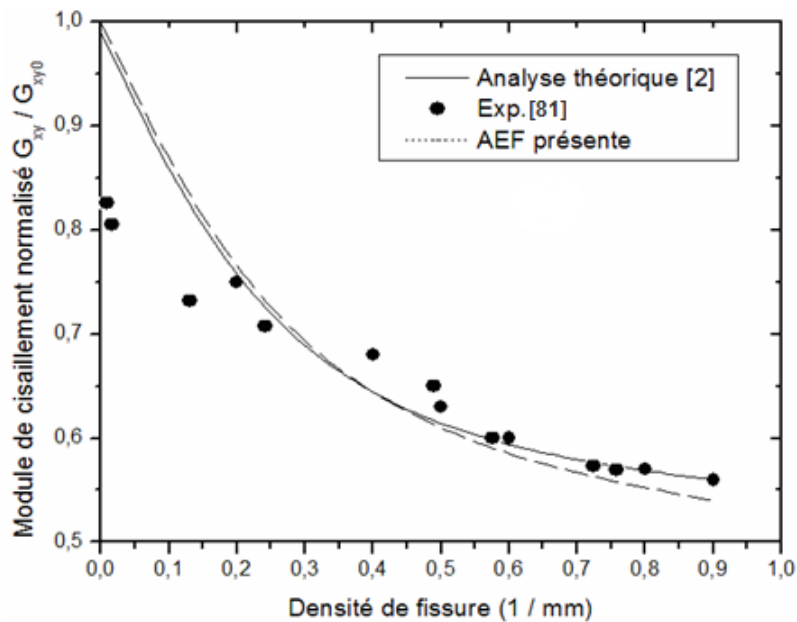
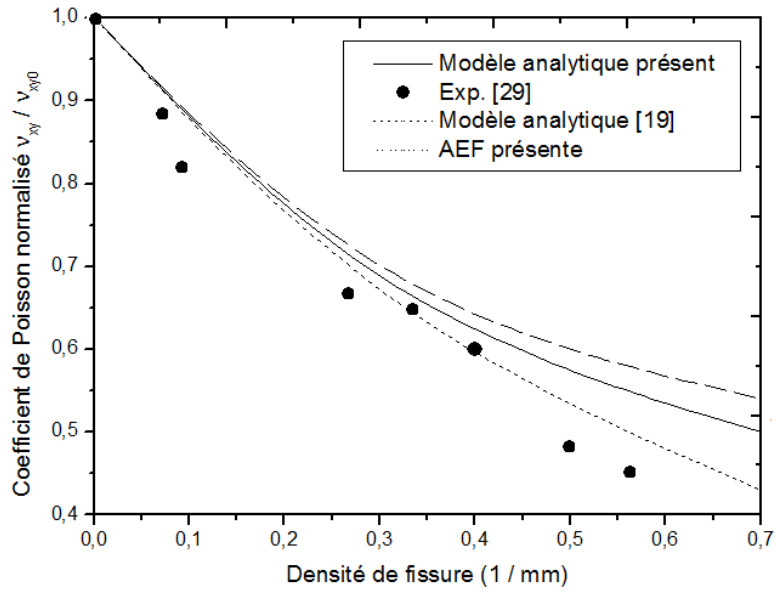
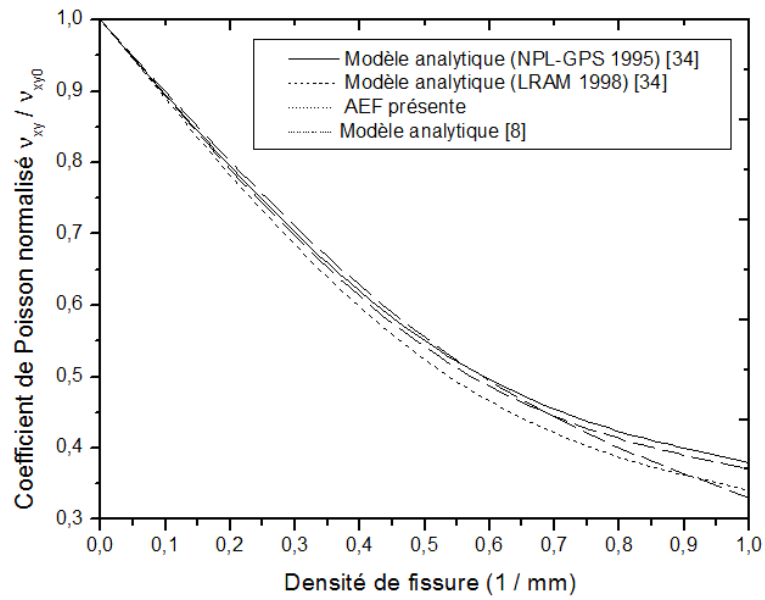


Figure 4. 11 : Variation du module de cisaillement normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0_3 / 90_3]_s$.

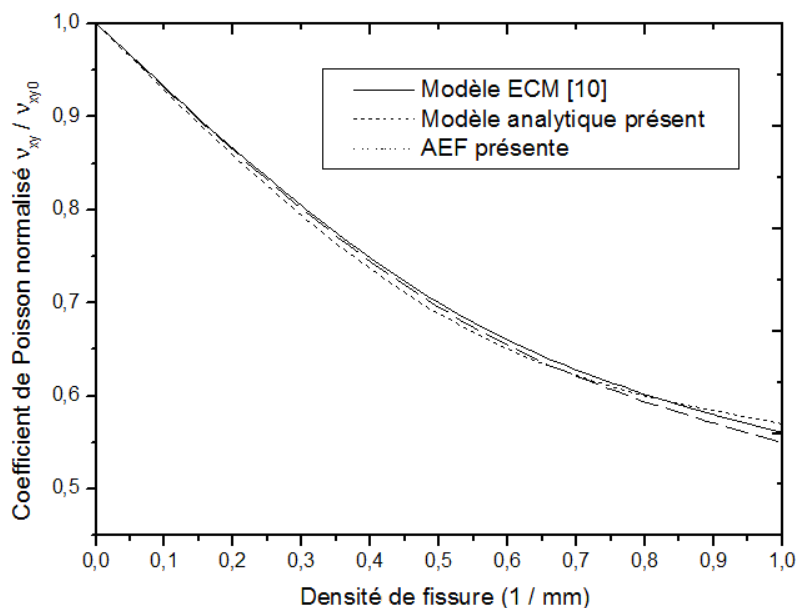
Les figures : 4. 12 {(a) $[0_2 / 90_4]_s$; (b) $[0 / 90_3]_s$ et (c) $[0 / 90]_s$ } et 4. 13 {(a) $[0 / 90]_s$; (b) $[0_2 / 90_2]_s$ } illustrent la variation du coefficient de Poisson normalisé en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde et de Fibre en Graphite / Epoxyde respectivement. La figure 4. 12(a) présente la comparaison avec les prédictions de l'approche shear lag progressive de M. Bouazza et *al* [19] et des données expérimentales Joffe, R et *al* [29] et sur la figure 4. 12(b), les deux modèle analytiques (NPL-GPS 1995 et LRAM 1998) de L.N. McCartney et *al* [34] et aussi le modèle analytique proposé par Kashtalyan M et *al* [8]. On voit, sur la figure 4.12 (a), que l'accord entre les résultats expérimentaux et ceux prédits en utilisant les modèles analytiques est assez satisfaisante, tandis que les résultats numériques montrent un bon accord avec les résultats des tests. On remarque sur les figures 4. 12(b) et (c) un excellent agrément de notre AEF présente et les différents modèles analytiques de : L.N. McCartney et *al* [34], modèle ECM proposé par D.T.G. Katerelos et *al* [10] et M. Kashtalyan et *al* [8].



(a)



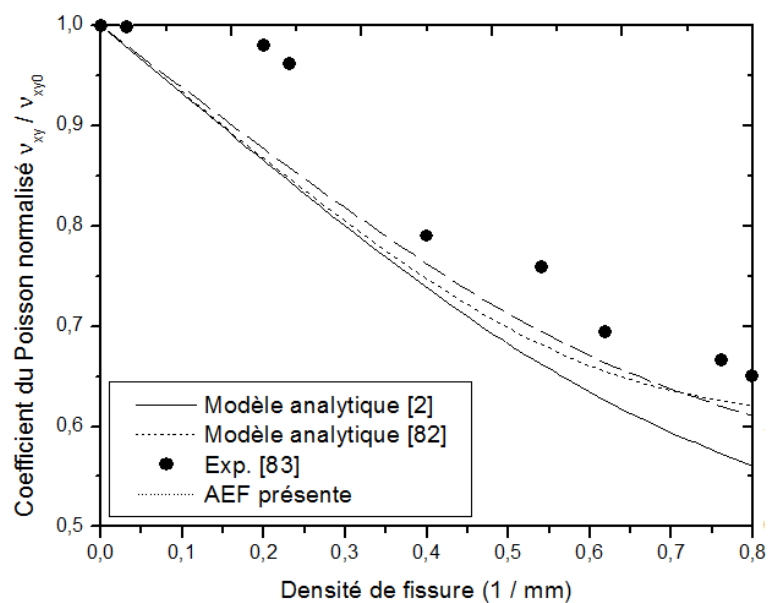
(b)



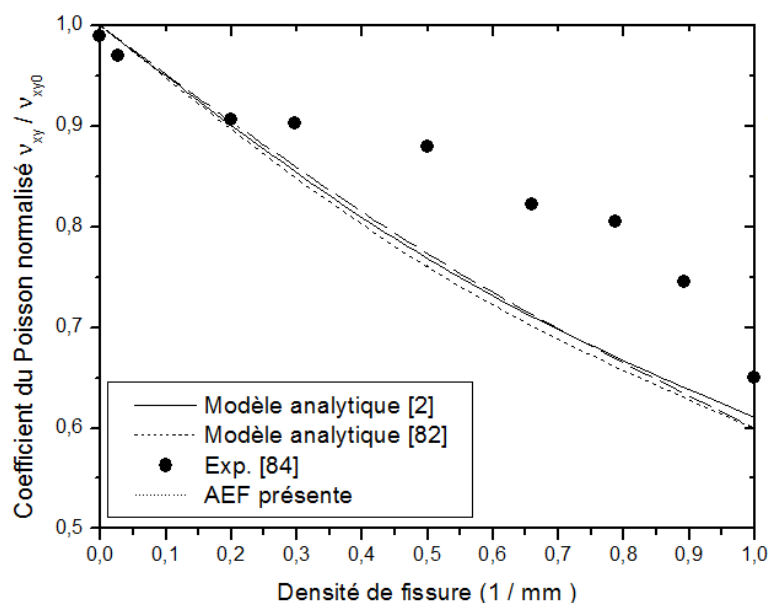
(c)

Figure 4. 12 : Variation du Coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures transverses pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde : (a) $[0_2/90_4]_s$; (b) $[0/90_3]_s$ et (c) $[0/90]_s$.

Dans la figure 4. 13, les drapages $[0/90]_s$ (Fig. 4. 13(a)) et $[0_2/90_2]_s$ (Fig. 4. 13(b)) sont comparée avec les résultats analytiques (approche variationnelles) de N. M. Mohammed [2] et de Z. Hashin [82] et les résultats expérimentaux obtenus par Han et Hahn [83] (Fig. 4. 13(a)) et Talreja et *al* [84] (Fig. 4. 13(b)). Pour le drapage $[0/90]_s$ (Fig. 4. 13(a)), l'analyse Elément Finis et l'approche variationnelle de Hashin [82] donnent une erreur relative de -3% par rapport aux résultats expérimentaux [83], tandis que, l'approche variationnelle de N. M. Mohammed [2] engendre une erreur de -9% et pour le drapage $[0_2/90_2]_s$ (Fig. 4. 13(b)), les trois analyses : variationnelle de N. M. Mohammed [2] et de Hashin [82] et Elément Finis semblent une erreur de -5% par rapport aux résultats expérimentaux [84]. Pour un rapport de empilement (confinement) donné, l'épaisseur des couches n'a pratiquement pas d'effet sur la variation du coefficient de Poisson en cas d'un stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde. En fin d'essai, il est réduit de 40% pour les empilements : $[0/90]_s$ (Fig. 4. 13(a)) et $[0_2/90_2]_s$ (Fig. 4. 13(b)), mais pour le cas d'un stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde, on remarque l'augmentation de la valeur de la dégradation lorsque le rapport d'empilement diminue.



(a)

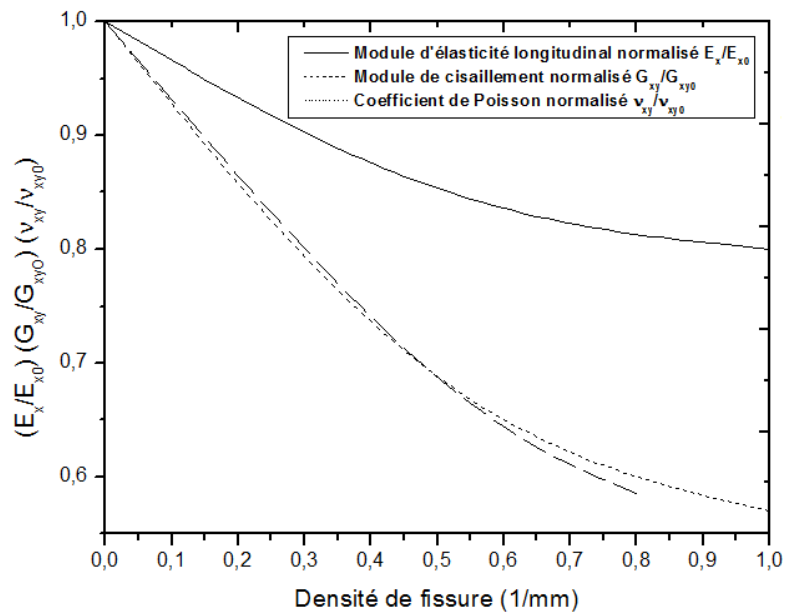


(b)

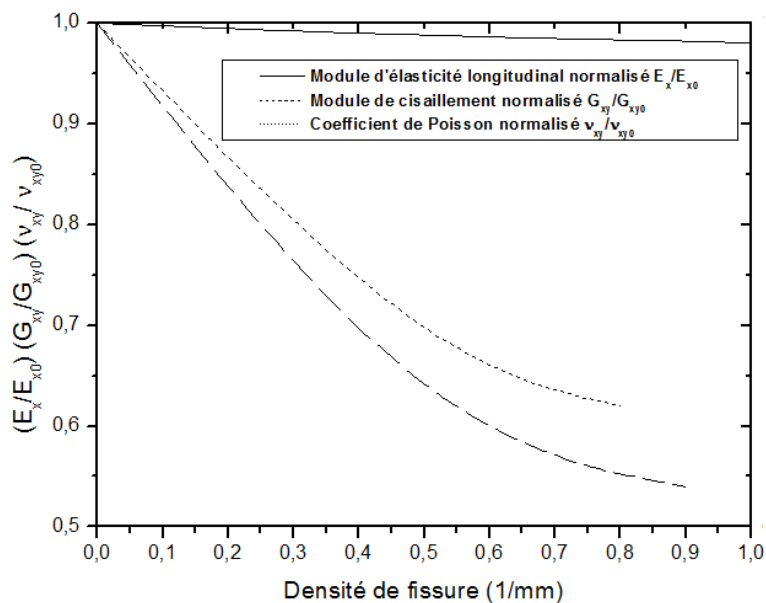
Figure 4. 13 : Variation du Coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures transverses pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde : (a) $[0/90]_s$; (b) $[0_2/90_2]_s$.

Il est évident à partir d'une comparaison entre la variation du module d'élasticité longitudinale avec les variations du module de cisaillement et du Coefficient de Poisson que le taux de la dégradation de ces dernières propriétés est sévère que celle du module d'élasticité longitudinale, ceci qui est représenté sur la figure 4. 14. Cette dernière a été tracés à partir des résultats de l'Analyse Élément Finis déjà trouvés sur les figures : 4. 7c, 4. 8a, 4. 10a, 4. 11, 4. 12c et 4. 13a, pour un stratifié de type $[0/90]_s$ ($\lambda = 1$ (coefficient d'empilement)), de : (a)

Fibre en Verre / Epoxyde et (b) Fibre en Graphite/ Epoxyde. En effet, pour une densité de fissures de 0.8 mm^{-1} , le module d'élasticité longitudinale est réduit de 19%, tandis que, la réduction du module de cisaillement est de 41.5% et du Coefficient de Poisson est 41% pour le cas d'un stratifié de Fibre en Verre/Epoxyde et le module d'élasticité longitudinale est réduit de 2%, alors que, la réduction du module de cisaillement est de 46% et du Coefficient de Poisson est 38% pour le cas d'un stratifié de Fibre en Graphite/Epoxyde, puisque sous tension uni-axiale, la couche à 0° domine toujours la rigidité axiale de stratifié. Ces observations prouvent que le module d'élasticité longitudinal, dans la direction de la charge, n'est pas suffisamment pour être une mesure fiable de l'endommagement, et que le module de cisaillement (G_{ij}) ou le Coefficient de Poisson (ν_{ij}) semble être un meilleur indicateur de l'endommagement [35].



(a)



(b)

Figure 4. 14 : Comparaison entre les résultats de l'AEF des taux de réduction des propriétés mécanique d'un stratifié de type $[0/90]_s$ ($\lambda = 1$), de : (a) Fibre en Verre / Epoxyde et (b) Fibre en Graphite/ Epoxyde.

Les prévisions de l'effet des fissures transversales sur la dégradation de module d'élasticité longitudinal et du coefficient de Poisson à haute température pour stratifiés composites de Fibre en Graphite / Epoxyde de type PMC IM7 / 977-3 a été illustré aussi. Ces derniers ont été inspirés des travaux de A. Benzair [17]. Les propriétés de stratifié unidirectionnel à la température ambiante 24°C et 149°C, respectivement, sont présentés dans le tableau 4. 2.

La variation du module d'élasticité longitudinal de stratifié croisé de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ de type IM7/977-3 est tracée sur la figure 4. 15 en fonction de la densité des fissures pour deux cas de températures ($T = 24^\circ\text{C}$ et $T = 149^\circ\text{C}$). Les résultats sont comparés avec l'analyse shear lag modifié, en tenant compte du concept de fonction contrainte de perturbation de A. Benzair et *al* [17]. Il peut être observé que la sensibilité de l'effet de la température sur la réduction du module est plus faible.

| Propriétés | 24°C | 149°C |
|------------------|------|-------|
| E_1 , GPa | 191 | 179 |
| E_2 , GPa | 9.89 | 8.93 |
| ν_{12} | 0.35 | 0.34 |
| G_{12} , GPa | 7.79 | 6.53 |
| G_{23}^* , GPa | 4.49 | 4.49 |

Tableau 4. 2. Propriétés élastiques de composite unidirectionnel IM7/977-3 [17].

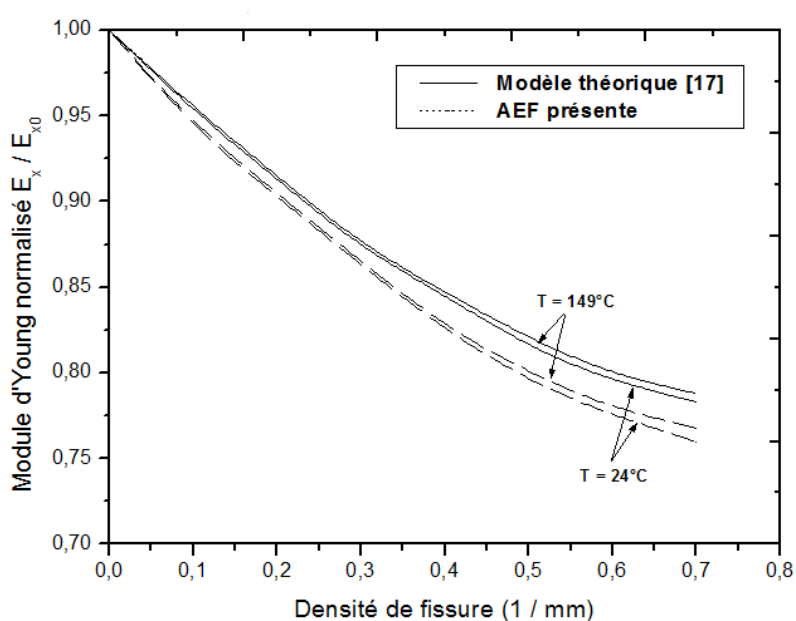


Figure 4. 15 : Évolution du module d'Young longitudinal de stratifié croisé de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ de type IM7/977-3 par rapport à la densité des fissures pour deux cas de température.

Dans la figure 4. 16, la dégradation du coefficient de Poisson effective normalisé du stratifié croisé de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ de type IM7/977-3 est représenté par rapport à la densité de fissure transverse pour deux valeurs de température. Les résultats présentés montrent une dégradation assez-importante de coefficient de Poisson normalisé lié à la température surtout lorsque la densité de la fissure prend des valeurs plus élevées. Pour les deux variations de figures 4. 15 et 4. 16, l'étude présentée par Eléments Finis prévoit une réduction assez semblable avec légèrement différence, de $(1.2\div 1.5)\%$ pour le coefficient de Poisson et de $(0.5\div 0.8)\%$ pour le module d'élasticité longitudinal, pour les grandes valeurs de la densité de fissure en comparant avec les prévisions de A. Benzair et *al* [17].

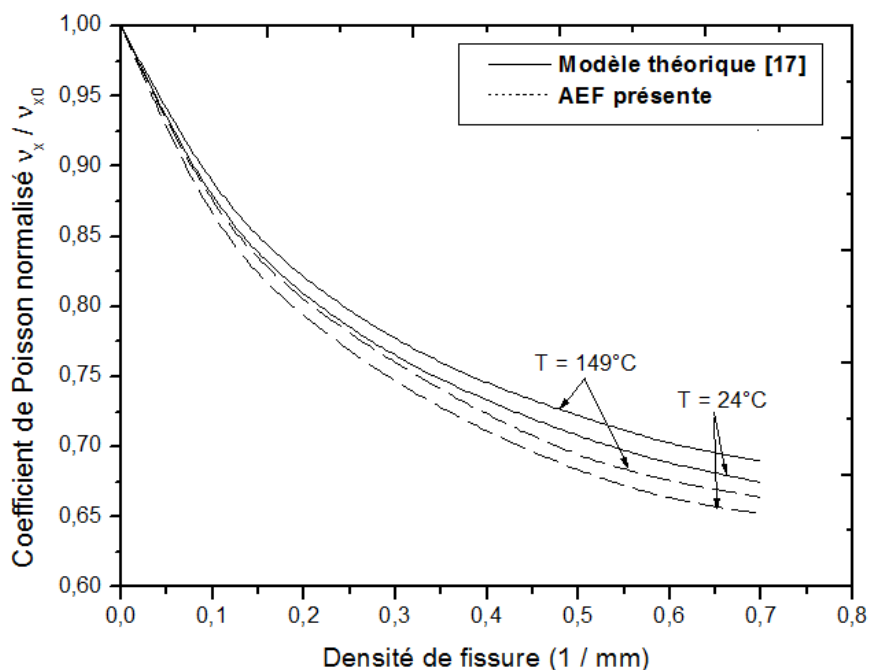


Figure 4. 16 : Variation du coefficient de Poisson effective normalisé de stratifié croisé de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0/90]_s$ de type IM7/977-3 en fonction de la densité des fissures pour deux cas de température.

Les changements prédits du coefficient de dilatation thermique longitudinal α_x (TEC) par rapport à la densité de fissure transverse sont représentés sur la figure 4. 17 pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde de type $[0/90_4]_s$ et figure 4. 18 pour deux type de stratifiés de Fibre en Graphite / Epoxyde, (a) $[0/90]_s$ et (b) $[0/90_3]_s$. On voit que les fissures ont un effet relativement important sur le TEC du stratifié notamment pour les stratifiés avec un pli à 90° plus grand. En effet, nous estimons la réduction entre 34.5% (Fig. 4. 17) et 24.5% cas de $[0/90]_s$ et 36.4% cas de $[0/90_3]_s$ (Fig. 4. 18). Les courbes présentent la même forme avec une légère différence pour des densités plus élevées, alors que, la variation de Joffe, R et al [29] prend une forme linéaire.

Sur la figure 4. 17, l'analyse EF conviennent bien avec Hashin [85], jusqu'à $0,75 \text{ mm}^{-1}$, après cela, ces courbes s'éloignent progressivement les unes des autres, mais, ils présentent une évolution surestimation du TEC, néanmoins, le modèle shear lag de cette étude est sous-estimer la variation du TEC. On estime l'erreur à maximale à 1.5 % pour une densité de 1mm^{-1} . Les résultats sur la figure 4. 18 illustrent un agrément excellent entre l'analyse Elément Finis présente et le modèle théorique de Daux Z et al [43] et l'analyse Elément Finis de Lim, S.G et al [21] pour des petits valeurs de la densité de fissure, mais, un écart de 4.4% (à $\rho = 1\text{mm}^{-1}$) peut remarquer entre les résultats pour le cas des grandes valeurs de densité de fissure.

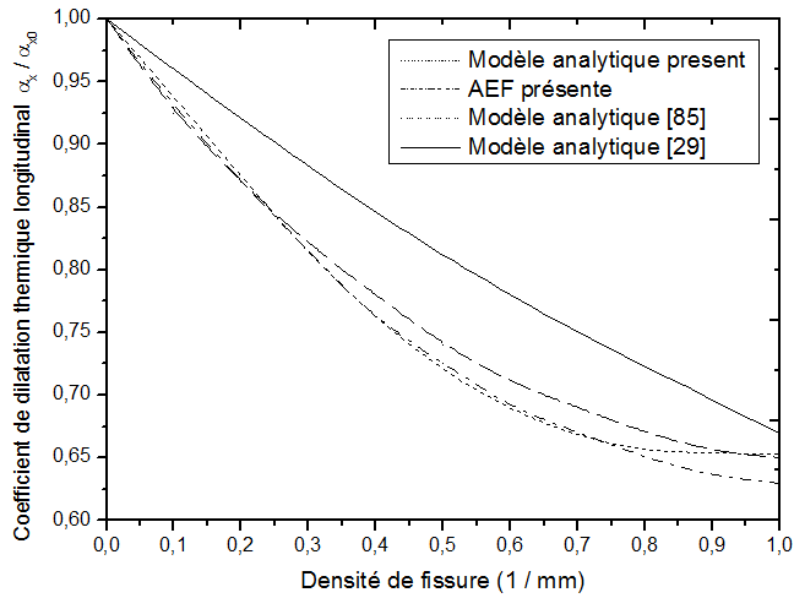
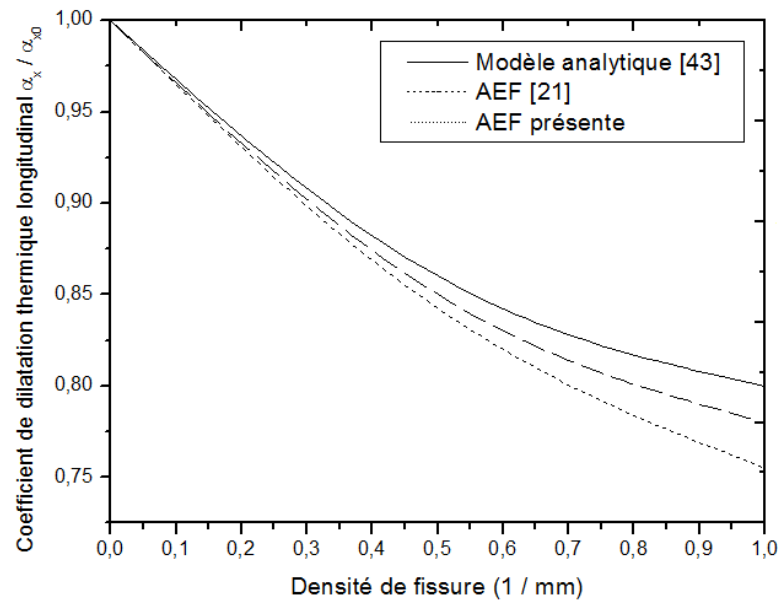
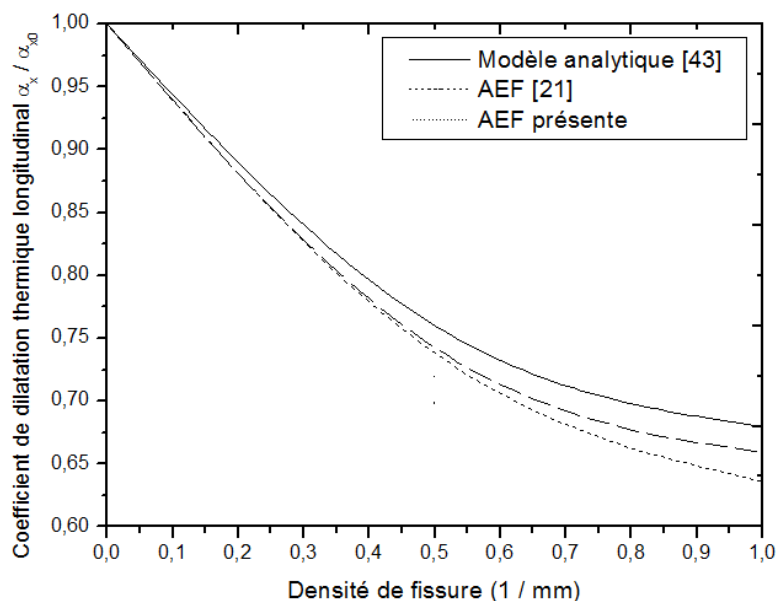


Figure 4. 17 : Variation du Coefficient de dilatation thermique longitudinal α_x en fonction de la densité de fissures transverse pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde de type $[0 / 90_4]_s$.



(a)



(b)

Figure 4. 18 : Variation du Coefficient de dilatation thermique longitudinal α_x en fonction de la densité de fissures transverse pour deux type de stratifiés de Fibre en Graphite / Epoxyde. (a) $[0/90]_s$ et (b) $[0/90_3]_s$.

4.4. Effet de l'épaisseur du stratifié

L'effet du nombre n de plis à 90° et le nombre m de plis à 0° sur la dégradation du module d'élasticité longitudinal, ainsi que la variation de la contrainte normale $\sigma_{xx}^{(90)}$, avec différentes densité de fissures transverses pour stratifié de type $[0_m / 90_n]_s$ ont été étudiés dans cette section.

La figure 4. 19 illustre les variations du module d'élasticité longitudinal en fonction de nombre n de plis à 90° pour deux cas densité de fissure ($\rho = 0.1\text{mm}^{-1}$ et $\rho = 0.1\text{mm}^{-1}$). L'augmentation du nombre n de plis à 90° accélère la dégradation du module d'élasticité longitudinale où la dégradation est plus dans le cas d'un stratifié avec un grand nombre n de plis à 90° . Cela est dû au fait que le stratifié avec un nombre n important de plis à 90° présente une large surface de fissures pour une densité de fissures transverse donnée. Il peut être observé que la sensibilité de l'effet de la densité de fissure transverse sur la réduction du module d'élasticité longitudinal est important où l'estimation de la valeur différente de la dégradation entre les deux densités est de 16.5% pour AEF présente. Une variation similaire a été observée en comparant avec l'analyse théorique de type shear lag progressif de Kh. Amara et al [7] dont la valeur différente n'excéder pas 3%.

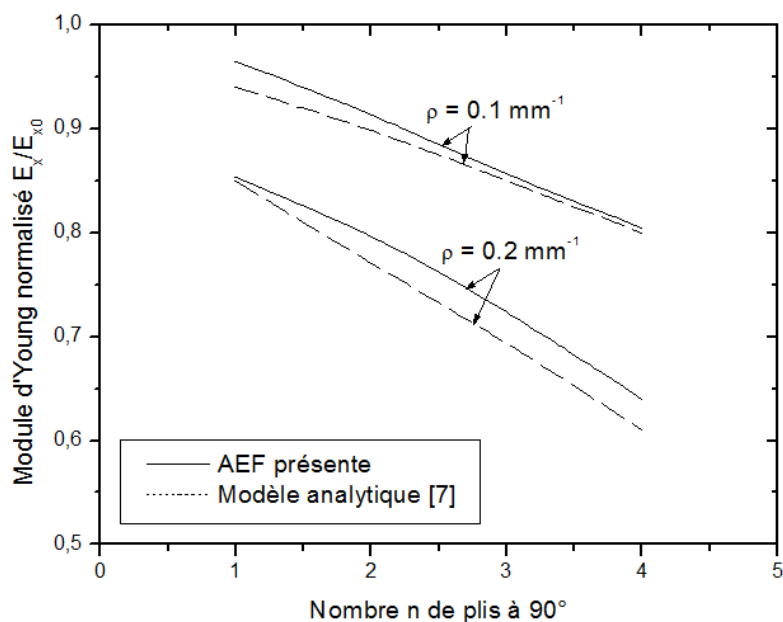


Figure 4. 19 : Variation de la rigidité en fonction de nombre n de plis à 90° avec deux densités de fissures transverse pour stratifié de fibre en Verre / Epoxyde $[0/90_n]_s$.

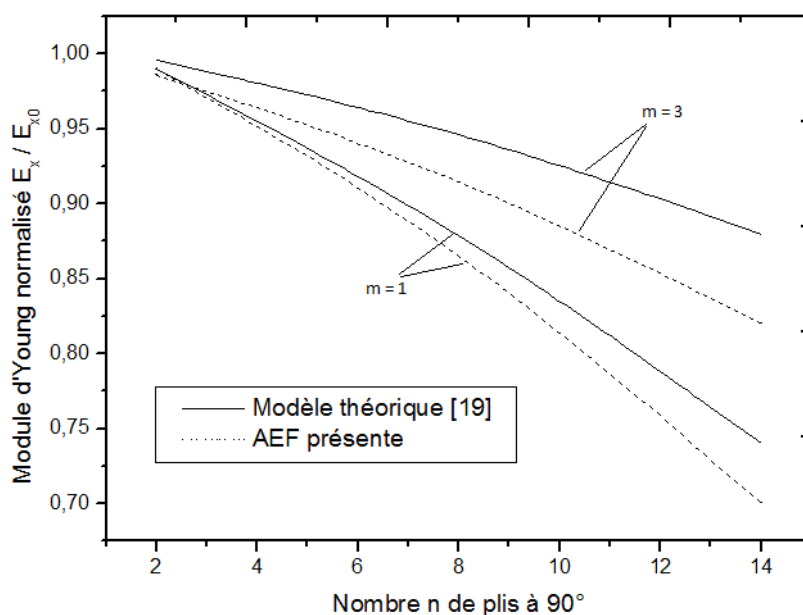


Figure 4. 20 : Variation de la rigidité en fonction de nombre n de plis à 90° avec deux différents nombres m de plis à 0° pour stratifié de Fibre en Graphite / Epoxyde $[0_m/90_n]_s$ ($\rho = 0.1 \text{ mm}^{-1}$)

La figure 4. 20 considéré des stratifiés à Fibre en Graphite / Epoxy de type $[0_m/90_n]_s$ avec une densité de fissure $\rho = 0,1\text{mm}^{-1}$ ($a = 5$). Les résultats sont présentés en comparant avec le modèle de M. Bouazza et *al* [19] qui ont été utilisés les paramètres de la variation de

la température et les caractéristiques d'humidité suivantes : ($T = 22^{\circ}\text{C}$, $C = 0,5\%$). On observe que le module d'élasticité réduit avec l'augmentation du nombre n de couches à 90° pour un nombre m fixe de couches à 0° , tandis que, pour un nombre n fixe de couches à 90° , le module d'élasticité diminue avec l'augmentation de nombre m de couches à 0° .

Un autre résultat intéressant présenté dans la figure 4. 21 qui montre la variation de la contrainte longitudinale normale $\sigma_{xx}^{(90)}$ en fonction du nombre n de plis à 90° , pour stratifié de Fibre en Verre / Epoxyde de type $[0_m/90_n]_s$ avec différentes nombres m de plis à 0° et une densité de fissures $\rho = 0.1 \text{ mm}^{-1}$, en comparant avec les résultats de N. M. Mohammed [2] et J. L. Rebière et *al* [23]. On peut conclure que, pour un nombre de plis à 0° fixé, les valeurs les plus grandes de contraintes normales $\sigma_{xx}^{(90)}$ sont obtenues dans les stratifiés avec des couches à 90° épaisses, ce qui favorise l'amorçage des fissures transverses. Par contre, pour un nombre de plis à 90° fixé, on observe un affaiblissement des composantes $\sigma_{xx}^{(90)}$ avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche à 0° . Ce qui paraît logique, puisque dans le cas d'une couche à 0° épaisse (m important), le stratifié est plus rigide et l'effort exercé est supporté par les fibres dans la couche à 0° .

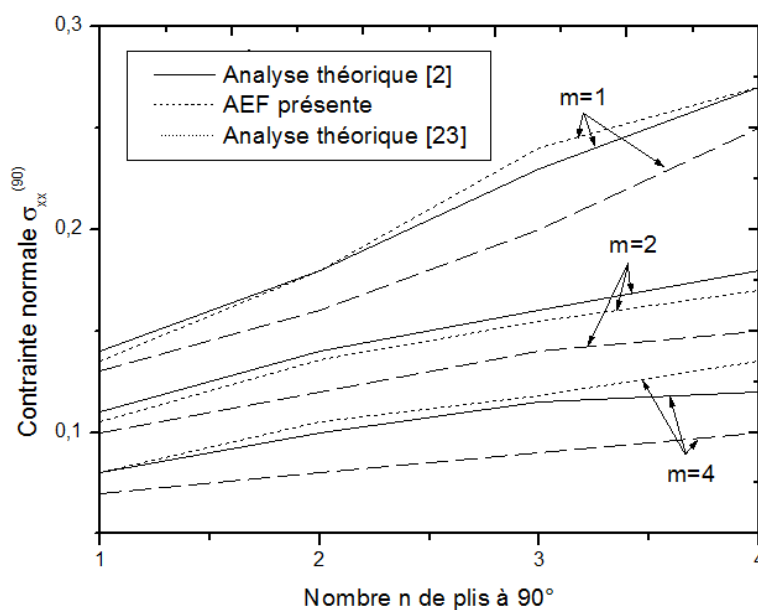


Figure 4. 21 : Variation de la contrainte normale $\sigma_{xx}^{(90)}$ en fonction du nombre n de plis à 90° avec différents nombres m de plis à 0° pour stratifié de fibre en Verre / Epoxyde $[0_m / 90_n]_s$. ($\rho = 0.1 \text{ mm}^{-1}$)

CONCLUSION GENERALE

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés aux stratifiés croisés de type $[0_m/90_n]_s$, sollicités en traction uni-axiale, à différentes températures, suivant la direction des fibres orientées à 0° . Dans ce cas, le processus d'endommagement est caractérisé par la fissuration transverse dans la couche orientée à 90° . L'objectif de l'étude était de connaître le comportement mécanique du stratifié endommagé. Nous avons développé dans notre étude une modélisation numérique par éléments finis 2D, en utilisant le logiciel de modélisation par la méthode des éléments finis ANSYS. Ainsi, les travaux réalisés dans ce cas nous donnent une idée générale sur le comportement mécanique du stratifié endommagé.

D'abord, notre étude permet de décrire la répartition du champ des contraintes dans une cellule élémentaire endommagée par fissuration transverse pour un état de dommages donné et une charge appliquée à l'aide d'une approche par éléments finis 2D pour le cas où les fissures travers toute la largeur de stratifié. En effet, la répartition du champ des contraintes est exploitée afin de prédire la dégradation des propriétés thermomécaniques provoquées par la multiplication des fissures transverse. A l'aide de la modélisation analytique et de l'étude numérique par éléments finis 2D, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- La contrainte normale longitudinale $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la couche orientée à 90° est principalement responsable de l'initiation et la propagation de la fissuration transversale. Elle prend les valeurs maximales à mi-distance entre deux fissures transverses consécutives.
- La valeur maximale de $\sigma_{xx}^{(90)}$ diminue lorsque la densité des fissures transverses augmente. Ce qui signifie que la variation de la distribution de contraintes peut être exprimée par la différence de la distance entre les fissures transverses.
- La contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} présente des valeurs élevées dans une petite région près au plan de la fissure puis réduit radicalement (pour petite densité de fissures) et / ou progressivement (pour grande densité de fissures) à zéro entre deux fissures transverses consécutives et tombe soudainement à zéro au plan de la fissure en $x = -a$.

- La contrainte normale inter-laminaire σ_{zz} à l'interface $0^\circ/90^\circ$ prend les valeurs maximales au niveau du plan de la fissure transverse.

Dans la suite du mémoire, nous avons appliquée la méthode d'analyse par Eléments Finis simple pour évaluer la dégradation des propriétés thermomécaniques du stratifié croisé de type $[0_m/90_n]_s$, dus aux fissures transversales dans les couches à 90° , durant le chargement. Les résultats sont comparés avec les données expérimentales existantes et des résultats d'analyse en utilisant une analyse de type shear lag. Suivant des travaux réalisés dans ce mémoire, les principaux résultats obtenus sont les suivants :

- La réduction du module longitudinal du stratifié est principalement provoquée par l'évolution de l'endommagement par fissuration transverse.
- La réduction de la rigidité de stratifié de Fibre en Graphite / époxyde est moins que de stratifié de Fibre en Verre / époxyde.
- Un nouveau processus de dommages (de fissuration longitudinale et / ou délaminage de l'interface) initié et développé simultanément avec la progression de la fissure transverse a été observée dans le cas de stratifié de Fibre en Graphite / époxyde $[0/90_3]_s$. Ce résultat suggère qu'il est nécessaire et possible de prendre en considération les autres modes de dommages pour une meilleure prévision de la réduction de la rigidité.
- Le taux de réduction de module d'élasticité longitudinal est diminué lorsque le coefficient d'empilement λ (confinement) augmente.
- Une réduction est importante (de 70%) de module de cisaillement normalisé pour le cas d'une petite valeur de coefficient d'empilement ($\lambda = 0.33$) par rapport au taux de leur réduction (40%) dans le cas d'une grand valeur de coefficient d'empilement ($\lambda = 1$).
- Un accord est assez satisfaisante a été obtenue entre les résultats expérimentaux et ceux prédits des modèles EF et analytiques pour le coefficient de Poisson normalisé en fonction de la densité de fissures transverse.
- Nous avons mis en évidence que le taux de la dégradation de module de cisaillement et du coefficient de Poisson est sévère que celle du module d'élasticité longitudinale. Par conséquent, ce dernier, dans la direction de la charge, n'est pas suffisamment pour être une mesure fiable de l'endommagement, donc, le module de cisaillement et / ou le coefficient de Poisson semble être un meilleur indicateur de l'endommagement.

- L'effet de la température sur la réduction du module d'élasticité longitudinale est faible, cependant, le coefficient de Poisson effectif normalisé est réduit avec diminution de la température, en particulier à haute densité de fissure.
- Les fissures transverses réduisent de manière significative le coefficient de dilatation thermique (TEC) de stratifié notamment pour les stratifiés avec un pli à 90° plus grand.
- Une accélération de la dégradation du module d'élasticité longitudinale a été observée dans le cas d'un stratifié a un nombre plus grand de plis à 90° avec un nombre constant de plis extérieurs à 0°. Aussi, la densité de fissure transverse a un effet important sur son réduction.
- Les stratifiés croisés $[0_m/90_n]_s$ avec un nombre plus grand de plis à 0° sont plus rigides que les stratifiés avec un nombre moins de plis extérieurs pour le même nombre de plis à 90°. C'est la couche orientée à 0° qui supporte la quasi-totalité du chargement.
- Il est plus facile d'engager la fissuration transversale dans les couches à 90° épaisses.

La méthode d'analyse par Eléments Finis présente est simple, mais ses résultats montrent un accord raisonnable avec les résultats analytiques et les données expérimentales. Cependant, il est encore difficile de pouvoir dicter des lois d'évolution de l'endommagement.

Enfin et à travers ce manuscrit, nous espérons avoir apporté un plus dans la compréhension du processus d'endommagement des stratifiés composites et l'influence de ce processus sur la modification de leurs propriétés mécaniques au cours du chargement en traction uni-axiale.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] **PROMBUT Pongtorn.** “ Caractérisation de la propagation de délaminage des stratifiés composites multidirectionnels”. Thèse doctorat de l’université de Toulouse III, Cedex - Paul Sabatier. Discipline : Génie Mécanique. 2007.
- [2] **Mohammed NACIM MAATALLAH.** “ Analyse de l'endommagement par fissuration transverse, fissuration longitudinale et Délaminage des stratifiés croisés ”. Thèse Présentée pour obtenir le titre de Docteur de l'université du Maine. 05 avril 2000.
- [3] **T. Yang, Y. Liu, J. Wang.** “ A study of the propagation of an embedded crack in a composite laminate of finite thickness ”. *Composite Structures* 59 (2003) 473-479.
- [4] **L. Daudeville, P. Ladevèze.** “ Une méthode simplifiée pour l'analyse du délaminage auprès d'un bord droit ”. *J.: Revue Européenne des Éléments* 3 – n° 1(1994) 127-150.
- [5] **M. Kashtalyan, C. Soutis.** “ Analysis of composite laminates with intra- and interlaminar damage ”. *Progress in Aerospace Sciences* 41 (2005) 152–173.
- [6] **Rebière J L, Gamby D.** “ A decomposition of the strain energy release rate associated with the initiation of transverse cracking, longitudinal cracking and delamination in cross-ply laminates ”. *Composite Structures*. 2008;84: 186-197.
- [7] **Amara, Kh.; Tounsi, A.; Megueni, A.; Adda-Bedia, E.A.** “ Effect of transverse cracks on the mechanical properties of angle-ply composites laminates ”. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2006; 45: 72-78.
- [8] **Kashtalyan M, Soutis C.** “ Stiffness degradation in cross-ply laminates damaged by transverse cracking and splitting ”. *Composites: Part A*. 2000 ; 31: 335-351.
- [9] **Kashtalyan M, Soutis C.** “ The effect of delaminations induced by transverse cracks and splits on stiffness properties of composite laminates ”. *Composites: Part A* 31. 2000; 107-119.
- [10] **D. T. G. Katerelos, M. Kashtalyan, C. Soutis, C. Galiotis.** “ Matrix cracking in polymeric composites laminates : Modelling and experiments ”. *Composite Science and Technology* 68 (2008) 2310-2317.
- [11] **C. Henaff-Gardin, M. C. Lafarie-Frenot, D. Gamby.** “ Doubly periodic matrix cracking in composite laminates Part 1: General in-plan loading ”. *Composite Structures* 36 (1996) 113-130.

- [12] **C. Henaff-Gardin, M. C. Lafarie-Frenot, D. Gamby.** “ Doubly periodic matrix cracking in composite laminates Part 2: Thermal biaxial loading ”. *Composite Structures.* (1996) 36: 131-140.
- [13] **Henaff-Gardin C, Lafarie-Frenot M C.** “ The use of a characteristic damage variable in the study of transverse cracking development under fatigue loading in cross-ply laminates ”. *International Journal of Fatigue.* (2002) 24: 389-395.
- [14] **J.-M. Berthelot, P. Leblond, A. El Mahi, J.-F. Le Corre.** “ Transverse cracking of cross-ply laminates: Part 1 ”. *Analysis. Composites Part A: 27* (1996), 989-1001.
- [15] **Joffe, R.; Varna, J.** “ Analytical modeling of stiffness reduction in symmetric and balanced laminates due to cracks in 90° layers ”. *Composites Science and Technology.* 1999; 59: 1641-1652.
- [16] **K.H. Amara, A. Tounsi, A. Benzair.** “ Transverse cracking and elastic properties reduction in hygrothermal aged cross-ply laminates ”. *Materials Science and Engineering A 396* (2005) 369–375.
- [17] **A. Benzair, M. Maachou, Kh. Amara, A. Tounsi.** “ Effect of transverse cracks on the elastic properties of high temperature angle-ply laminated composites ”. *Computational materials Science 37* (2006) 470-475.
- [18] **Tounsi, A.; Amara, K.H.; Benzair, A.; Megueni, A.** “ On the transverse cracking and stiffness degradation of aged angle-ply laminates ”. *Materials Letters;* 2006, 60: 2561–2564.
- [19] **M. Bouazza, A. Tounsi, A. Benzair, E.A. Adda-bedia.** “ Effect of transverse cracking on stiffness reduction of hygrothermal aged cross-ply laminates ”. *Materials and Design 28* (2007) 1116–1123
- [20] **E.A. Adda-bedia, M. Bouazza, A. Tounsi, A. Benzair, M. Maachou.** “ Prediction of stiffness degradation in hygrothermal aged $[\theta_m/90_n]_s$ composite laminates with transverse cracking ”. *Journal of materials processing technology 199* (2008) 199-205.
- [21] **Lim, S.G.; Hong, C.S.** “ Effect of transverse cracks on the thermomechanical properties of cross-ply laminated composites ”. *Composites Science and Technology 34* (1989): 145-162.
- [22] **J. L. Rebière.** “ Evolution de l’endommagement par fissuration et délaminage dans des stratifiés croisés à l’aide d’une approche variationnelle ”. *Phys. Chem. News 6* (2002) 01-08. june 2002-PCN.
- [23] **Rebière J L, Maâtallah M N, Gamby D.** “ Initiation and growth of transverse and longitudinal cracks in composite cross-ply laminates ”. *Composite Structures.*

- 2001;53: 173-187.
- [24] **Jean-luc Rebière, Mohammed-Nacim MAÂTALLAH.** “ Evolution des différents modes d’endommagements dans les stratifiés croisés ”. XV^{ème} Congrès Français de Mécanique. Nancy, 3-7 Septembre 2001.
- [25] **Rebière J L, Maâtallah M N, Gamby D.** “ Analysis of damage mode transition in a cross-ply laminate under uniaxial loading ”. *Composite Structures*. 2002;55: 115-126.
- [26] **A. Hosoi, H. Kawada.** “ Stress analysis of laminate of carbon fiber reinforced plastics, containing transverse cracks, considering free-edge effect and residual thermal stress ”. *Materials Science and Engineering A* 498 (2008) 69-75.
- [27] **Rebière J L, Gamby D.** “ A criterion for modelling initiation and propagation of matrix cracking and delamination in cross-ply laminates ”. *Composites Science and Technology*. 2004; 64: 2239-2250.
- [28]. **Q. Gu, J. N. Reddy.** “ Non-linear analysis of free-edge effects in composite laminate subjected to axial loads ”. *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 27. N. 1, pp. 27-41, 1992.
- [29] **Joffe, R.; Krasnikovs, A.; Varna; J.** “ COD-based simulation of transverse cracking and stiffness reduction in $[S/90_n]_s$ laminates ”. *Composites Science and Technology*. 2001; 61: 637-656.
- [30] **J.-M. Berthelot, A. El Mahi, P. Leblond.** “ Transverse cracking of cross-ply laminates: Part 2. Progressive widthwise cracking ”. *Composites Part A*: 27A (1996), 1003-1010.
- [31] **Leblond, P.; El Mahi, A.; Berthelot; J.-M.** “ 2D and 3D numerical models of transverse cracking in cross-ply laminates ”. *Composites Science and Technology* 56: (1996) 793-796.
- [32] **J. M. Berthelot, J. -F. Le Corre.** “ Modelling the transverse cracking in cross-ply laminates : application to fatigue ”. *Composites: Part B : engineering* 30 (1999) 560-577.
- [33] **J. -M. Berthelot, J.-F. Le Corre.** “ A model for transverse cracking and delamination in cross-ply laminates ”. *Composites Science and Technology* 60 (2000) 1055-1066.
- [34] **L. N. McCartney, G. A. Schoeppner, W. Becker.** “ Comparison of models for transverse ply cracks in composite laminates ”. *Composites Science and technology* 60 (2000) 2347-2359.
- [35] **J. F. Caron, A. Ehrlacher.** “ Modelling the kinetics of transverse cracking in composite laminates ”. *Composites Science and Technology* 57 (1997) 1261-1270.

- [36] **Chandra Veer Singh, Ramesh Talreja.** “ Analysis of multiple off-axis ply cracks in composite laminates ”. *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008) 4574–4589.
- [37] **S. Ogiwara, N. Takeda.** “ Interaction between transverse cracks and delamination during damage progress in CFRP cross-ply laminates ”. *Composites Science and Technology* 54 (1995) 395-404.
- [38] **J. M. Berthelot, J. F. Le Corre.** “ Fissuration transverse et délaminage dans les stratifiés croisés. Essais monotones et essais de fatigue ”. *XVe Congrès français de mécanique, Nancy, (2001).*
- [39] **F. Gao, L. Boniface, S. L. Ogin, P. A. Smith, R. P. Greaves.** “ Damage accumulation in woven-fabric CFRP laminates under tensile loading: 2. modelling the effect of damage on macro-mechanical properties ”. *Composites Science and Technology* 59 (1999) 137-145.
- [40] **X. Huang, J. W. Gillespie Jr, R. F. Eduljee.** “ Effect of temperature on the transverse cracking behavior of cross-ply composite laminates ”. *Composites Part B* 28B (1997) 419-424.
- [41] **John A. Nairn.** “ On the Use of Shear-Lag Methods for Analysis of Stress Transfer in Unidirectional Composites ”. *Mechanics of Materials* 26 (1997) 63–80.
- [42] **J.A. Nairn, D.A. Mendels.** “ On the use of planar shear-lag methods for stress-transfer analysis of multilayered composites ”. *Mechanics of Materials* 33 (2001) 335-362.
- [43] **Daxu Z, Jianqiao Y, Dennis L.** “ Ply cracking and stiffness degradation in cross-ply laminates under biaxial extension, bending and thermal loading ”. *Composite Structures* 75 (2006) 121-131.
- [44] **T. E. Tay, E. H. Lim.** “ Analysis of composite laminates with transverse cracks ”. *Composite Structure* 34 (1996) 419-426.
- [45] **BAYARASSOU Mokhtar.** “ Développement d’un logiciel de calcul d’homogénéisation des plaques stratifiées composites ”. *Mémoire de Magister en génie mécanique, option : Science des matériaux. Département de mécanique, faculté des science de l’ingénieur, université de Batna. 2008. Algérie.*
- [46] **A.L. Highsmith & K.L. Reifsnider.** “ Stiffness-Reduction mechanisms in composite laminates ”, *Damage in Composite Materials, ASTM STP 775, K.L. Reifsnider, Ed., ASTM, 1982, pp. 103-117.*

- [47] **Joël CUGNONI**. “ Identification par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites ”. Thèse de doctorat ès sciences No 3106 (2004). École polytechnique fédérale de Lausanne.
- [48] **SAADAOUI Hadjira**. “ Evaluation des endommagements thermiques et mécaniques du composite graphite / époxyde par émission acoustique et acousto-ultrasonique ”. Thèse pour maîtrise ès sciences appliquées (M. Sc. A.) génie mécanique. Ecole de génie, université de Moncton, Canada, 1996.
- [49] **DRIS Locif**. “ Evaluation simultanée des vitesses de propagation et d’atténuation des ultrasons dans des matériaux composites et polymériques ”. Mémoire de magister. Laboratoire dynamique des moteurs et vibro-acoustique. Département de maintenance industrielle. Faculté des sciences de l’ingénieur. Université m’Hamed Bougara de Boumerdes. 2007.
- [50] **HOCINE Dehmous**. “ Fiabilité et micromécanique des matériaux composites. Application à la passerelle de LAROIN ”. Thèse doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse. Ecole doctorale Matériaux - Structure – Mécanique : Génie Mécanique. Thèse préparée en cotutelle entre l’Université M’hamed Bouguera - Boumerdes (Algérie) et l’Institut National Polytechnique de Toulouse - ENIT/INPT (France). 25 Juin 2007.
- [51] **Imen KALLEL-KAMOUN**. “ Analyse mécanique de l’essai de flexion par flambement postcritique ”. Thèse de doctorat. Spécialité: Génie des Matériaux. École centrale de Lyon, France. Juin 1999.
- [52] **ZINE Ali**. “ Modélisation d’une plaque rectangulaire en composite en vibration sous effet thermique avec variation linéaire d’épaisseur ”. Mémoire de Magister. Option : Dynamique des Moteurs et Vibro-acoustique. Faculté des Sciences de l’ingénieur. Département : Maintenance Industrielle. Université M’Hamed Bougara – Boumerdés. Septembre 2010.
- [53] **Vincent CARMONA**. Etude de l’endommagement de matériaux composites par tomographie X et émission acoustique ”. Thèse doctorat. Ecole doctorale : Matériaux de Lyon. Spécialité : Génie des matériaux. Institut National des Science Appliquées de Lyon, France. 2009.
- [54] **FREDERIC Girard**. “ Optimisation de stratifiés en utilisant un algorithme génétique ”. Programme de maîtrise en génie mécanique pour l’obtention du grade de maître ès sciences (M. Sc.). Faculté des sciences et de génie, université Laval. Québec. 2006

- [55] **FRANCK Michaud.** “ Rhéologie de panneaux composites bois/thermoplastiques sous chargement thermomécanique : aptitude au post-formage ”. Thèse de doctorat. Faculté de foresterie et de géomatique, université Laval, Québec, Canada & Université Bordeaux I. Bordeaux, France. Décembre 2003.
- [56] **MYRIAM Gakwaya.** “ Compensation des déformations induites thermiquement dans les matériaux composites à l'aide d'un pièce-composite ”. Programme de maîtrise en génie mécanique pour l'obtention du grade de Maître es Sciences (M.Se). Faculté des sciences et de génie université Laval, Québec, 2006.
- [57] **SOFIANE Chorfi.** “ Analyse des plaques orthotropes minces sous l'effet des conditions extérieures ”. Mémoire de magister en génie mécanique, option : construction mécanique. Ecole nationale doctorale de la mécanique de construction, Département de génie mécanique. Faculté des sciences de l'ingénieur. Université Mentouri, Constantine. Mai 2010.
- [58] **IRISARRI François-Xavier.** “ Stratégies de calcul pour l'optimisation multi objectif des structures composites ”. Thèse doctorat de l'université de Toulouse III - Paul Sabatier. Discipline ou spécialité : Génie Mécanique, Mécanique des matériaux. 2009.
- [59] **BUKET Okutan.** “ Stress and failure analysis of laminated composite pinned joints ”. A thesis for the degree of doctor of philosophy in mechanical engineering, mechanics program. Graduate School of Natural and Applied Sciences of Dokuz Eylul University. December, 2001. IZMIR
- [60] **P. Vannucci.** “ Matériaux composites structuraux. Méthodes d'analyse et de conception ”. Master DSME – Dimensionnement des Structures. Mécaniques dans leur Environnement. Université de Versailles et Saint-Quentin-en-Yvelines. paolo.vannucci.free.fr/Mat_Comp_fr.pdf.
- [61] **Ludovic BALLERE.** “ Tolérance aux dommages par impacts de structures courbes composites – Effets d'échelles ”. Thèse doctorat. Ecole Nationale Supérieur d'Arts et Métiers. Spécialité “ Mécanique ”. 2008. laboratoire Matériaux Endommagement Fiabilité et Ingénierie des Procédés ENSAM, CER de Bordeaux, France.
- [62] **El Houssain ROCHDI.** “ Contribution à l'analyse du comportement mécanique de dalles en béton armé renforcées par matériaux composites ”. Thèse doctorat. Université Claude Bernard - Lyon 1, 2002.
- [63] **COSMIN Gruescu.** “ Approche par changement d'échelle de l'endommagement des matériaux anisotropes : application aux composites à matrice fragile ”. Thèse doctorat,

- université des Sciences et Technologies de LILLE I. Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107). 2005.
- [64] **VU Anh Thang**. “ Endommagement de stratifiés aéronautiques à fibres de carbone et matrice polymère soumis à des chargements monotones ou cycliques à plusieurs températures. Essais et modélisation ”. Thèse doctorat docteur de l'école nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique. Sciences pour l'Ingénieur & Aéronautique. Mécanique des Solides et des Matériaux. 06 Juillet 2009.
- [65] **DJAMA Abderrahmane**. “ Evaluation acoustique des propriétés mécanique dans des stratifiés sollicités par chocs dynamiques ”. Mémoire de magister. Dynamique des moteurs et vibro-acoustique. Génie mécanique. Faculté des sciences de l'ingénieur, département de maintenance industrielle. Université m'Hamed Bougara – Boumerdes, 2010.
- [66] **Walid Trabelsi**. “ Vieillissement de matériaux composites carbone/époxy pour applications aéronautiques ”. Thèse doctorat de l'école nationale supérieure d'arts et métiers. Spécialité “ Mécanique et Matériaux ”. Laboratoire d'Ingénierie des Matériaux ENSAM, CER de Paris. France, 2006.
- [67] **MODAYUR Shrinivas**. “ Three dimensional finite element analyses of matrix cracks in multidirectional composite laminates ”. A thesis for the degree of Master of Science in Mechanical Engineering. MONTANA STATE UNIVERSITY, Bozeman, Montana. May 1993.
- [68] **NICOLAS Feld**. “ Vers un pont micro-méso de la rupture en compression des composites stratifiés ”. Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan cedex, UniverSud paris, France, 2011.
- [69] **David MARSAL**. “ Modélisation multi-échelle de l'endommagement des stratifiés sous sollicitations hors-plan ”. Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan. Laboratoire de Mécanique et Technologie ENS Cachan / CNRS / Université Paris 6.
- [70] **KRANTHICHAND**. “ Inter-laminar fracture analysis of cross ply FRP laminates using FEA. Bachelor thesis. Department of Mechanical Engineering, Prasad V Potluri Siddhratha, Institute of Technology, Vijayawada, India. April 2011.
- [71] **Juan Pedro Berro Ramirez**. “ Caractérisation et modélisation de l'endommagement des composites bobines. Application à la prédiction de l'éclatement des réservoirs bobines hyperbares ”. Thèse pour l'obtention du grade de docteur de l'école nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique.

- [72] **A. Chateauminois**- juin 2000. “ Contraintes résiduelles d’origine thermique dans les stratifiés ”. Cours matériaux composites. www.ebanque-pdf.com/fr_cours-composites.html
- [73] **O. Klinkova, F. Bremond, S. Drapier, J.M. Bergheau**. “ Simulation des contraintes résiduelles dans les structures composites : déformation après cuisson ”. Conference Paper · May 2009. <https://www.researchgate.net/publication/260988279>.
- [74] **CH. EL Hage, R. Younès, Z. Aboura, M. L. Benzeggah, M. Zoater**. “ Analytical and numerical modelling of mechanical characteristics of orthogonal 3D CFRP ”. Composites Science and Technology. Mech. Resp. of FRC, Vol. 69, Jan. 2009, 111-116.
- [75] **N. Laws & G.J. Dvorak**. “ Progressive transverse cracking in composite laminates ”, Journal of composite Materials, Vol. 22, 1988, pp.900-916.
- [76] **A.S.D. Wang**. “ Fracture mechanics of sublaminar cracks in composite materials ”, Composite Technology Review, Vol. 6 (2), 1984, pp. 45-62.
- [77] **Nairn J.A., Mendels D.A.** “ On the use of planar shear-lag methods for stress transfer analysis of multilayered composites ”. Mechanics of Materials 33 (2001) 335-362.
- [78] **Groves, S.E.; Haris, C.E.; Highsmith, A.L.; Allen, D.H.; Norvell, R.G.** “ An experimental and analytical treatment of matrix cracking in cross-ply laminates ”. Exp. Mech. 1987; 27: 73-79.
- [79] **Z. Hashin**. “ Analysis Of Cracked Laminates: A Variational Approach ”. Mechanics of Materials 4 (1985) 121-136. North-Holland.
- [80] **Highsmith AL, Rreifsnider KL**. “ Stiffness-reduction mechanisms in composite laminates ”. In: Rreifsnider KL, editor. Damage in composite materials, ASTM STP 775, 1982; p. 103-17.
- [81] **C.L. Tsai & I.M. Daniel**, “ The behaviour of cracked cross-ply composite laminates under shear loading ”, International Journal of Solids Structures, Vol. 29 (24), 1992, p. 3251-3267.
- [82] **Z. Hashin**. “ Analysis of orthogonally cracked laminates under tension ”. Journal of Applied Mechanics 54 (1987) 872-879.
- [83] **Y.M. Han & H.T. Hahn**. “ Ply cracking property degradations of symmetric balanced laminates under general in-plane loading ”. Composite Science and Technology 35 (1989), 377-397.
- [84] **R. Talreja, S. Yalvac, L.D. Yats and D.G. Wetters**. “ Transverse cracking and stiffness reduction in cross ply laminates of different toughness ”. Journal of Composite Materials 26 (11), 1992, 1644-1663.

[85] Hashin, Z. 1988. “ Thermal expansion coefficients of cracked laminates ”. Composites Science and Technology 31: 247-260.

[86] Mohamed Elseifi. 1998. “A new scheme for the optimum design of stiffened composite panels with geometric imperfections”. Dissertation submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy In Aerospace Engineering.

Annexe

A1. ANNEXE 1

A1.1. Du pli au stratifié

Le code d'un stratifié est défini par ses séquences d'empilement.

- **Stratifié unidirectionnel** : l'orientation des fibres est la même dans tous les plis, exemple : un stratifié unidirectionnel à 0° , $\theta = 0^\circ$ dans les différents plis.
- **Stratifié à plis orientés $\pm \theta$** : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, .../ θ / $-\theta$ / θ / $-\theta$ /... avec $\theta \neq 0^\circ$ ou 90° .
- **Stratifié à plis croisés** : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, .../ 0° / 90° / 0° / 90° /...

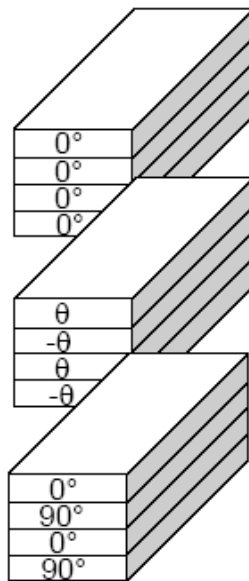


Figure A1. 1 : Types des stratifiés.

- **Stratifié symétrique** : l'orientation des fibres est symétrique par rapport à ligne centrale du stratifié, c.à.d, pour chaque pli à angle θ au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté du plan médian, $\theta(z) = \theta(-z)$.

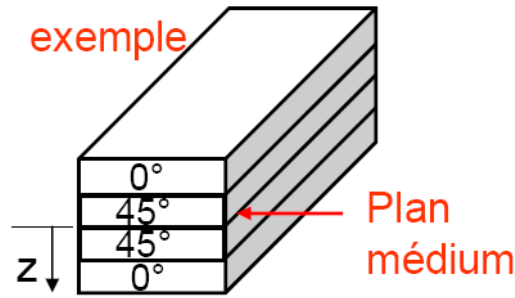


Figure A1. 2 : Stratifié symétrique.

A1.2. Mise en équations de stratifié croisé :

Un stratifié croisé est constitué de couches dont les directions principales sont orientées alternativement à 0° et 90° par rapport aux directions de référence du stratifié. La matrice de rigidité réduite des couches à 0° et 90° sont :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q_{90} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.1})$$

L'équation constitutive d'un stratifié croisé est donné par la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

Les distorsions angulaires sont exprimées en fonction des déplacements [51]

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \quad ; \quad \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \quad ; \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \quad (\text{A1.3})$$

Le 2 vient du calcul de la trace du produit de la contrainte et de la déformation.

$$Tr[\sigma\varepsilon] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.4})$$

$Tr[\sigma\varepsilon] = \sigma \cdot \varepsilon$: Produit de matrice. On a $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$: distorsion ou déviation angulaire.

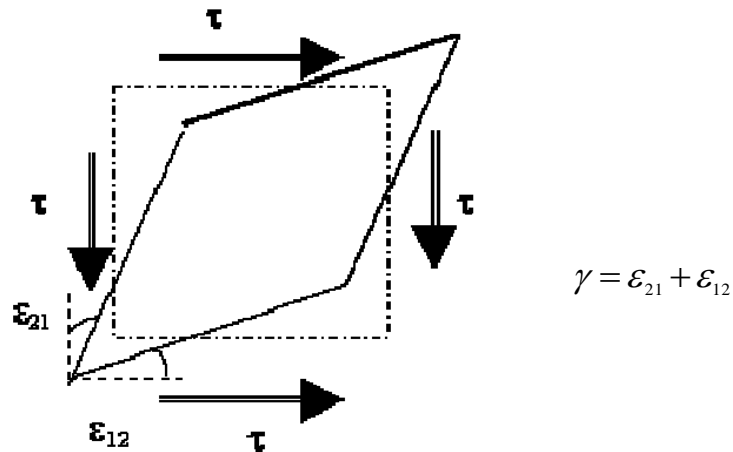


Figure A1.3 : distorsion ou déviation angulaire.

A1.3. Le transfert de charge matrice / fibre

A1.3.1. Le transfert élastique / élastique (modèle de Cox “ shear lag theory ” 1952).

Cas idéalisé, la fibre et la matrice ont un comportement élastique et il y a continuité de la déformation à l'interface. Hypothèse non vérifiée en générale ! applicable que pour les petites déformations et dans le cas où il y a mode de transfert élastique. Le terme « shear lag » signifie littéralement « retard de cisaillement ».

A2. ANNEXE 2

A2.1. Mécanismes de rupture des stratifiés composites à renforts de fibres longues [1]

A2.1.1. Rupture intra-laminaire

la Figure (A2.1) présente un stratifié $[0/90/+45/-45]_S$ d'un Fibre en Graphite / Epoxyde qui subit une traction uni-axiale. La première fissure apparaît dans les plis de 90° . Quand la charge augmente, plus de fissures se développent mais elles restent dans les plis de 90° . Lorsque la charge augmente davantage, des fissures se produisent dans les plis adjacents ($+45^\circ$), puis elles continuent vers les interfaces $+45^\circ/-45^\circ$ [1].

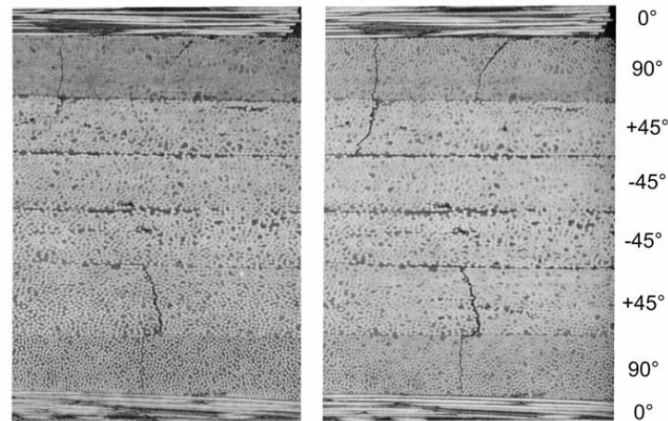


Figure A2. 1 : Evolution de la fissuration transverse [1].

A2.1.2. Origines du délaminage (bord libre) [1]

En ce qui concerne les stratifiés composites multidirectionnelles, les contraintes inter-laminaires se développent à cause de la discontinuité de comportement mécanique entre les plis individuels [47]. Par exemple, un stratifié $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ sous un chargement de traction simple présente une contrainte inter-laminaire au voisinage des bords de l'éprouvette qui devient singulière aux bords libres (Figure A2. 2) [62]. Par conséquent, ce phénomène est nommé « l'effet de bord libre ». L'intensité de cet effet dépend fortement de la séquence d'empilement des stratifiés [1].

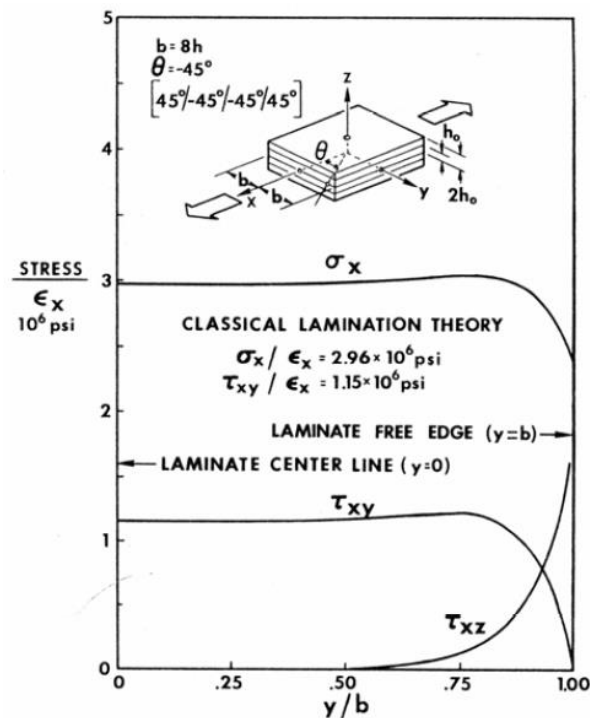


Figure A2. 2 : Evolution des contraintes dans la largeur de l'éprouvette $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ [1].

A2.2. Constants pour prédiction de réduction de la rigidité.

$$g_1 = t_{90} \frac{S_{12}S_{yy}^0 - S_{11}S_{xy}^0}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}} ; \quad f_1 = \frac{S_{11}S_{xy}^0(t_{90} + t_0)}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}} ; \quad m_1 = \frac{\alpha_L t_{90} S_{yy}^0 + \alpha_y^0 t_0 S_{11}}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}} \quad (\text{A2. 1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_2 = S_{22} - \frac{S_{12}(S_{12}t_0 + S_{xy}^0t_{90})}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}} ; \quad f_2 = \frac{S_{12}S_{xy}^0(t_{90} + t_0)}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}} ; \\ m_2 = \alpha_T + (\alpha_y^0 - \alpha_L) \frac{S_{12}t_0}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}} \end{array} \right. \quad (\text{A2. 2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_3 = \frac{t_{90}}{t_0} (S_{xy}^0 \frac{S_{12}t_0 + S_{xy}^0t_{90}}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}} - S_{xx}^0) ; \quad f_3 = \frac{t_{90} + t_0}{t_0} (S_{xx}^0 - \frac{(S_{xy}^0)^2 t_{90}}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}}) ; \\ m_3 = \alpha_x^0 - (\alpha_y^0 - \alpha_L) \frac{S_{xy}t_{90}}{S_{11}t_0 + S_{yy}^0t_{90}} \end{array} \right. \quad (\text{A2. 3})$$

$$a^* = \frac{E_2 t_{90}}{E_x^0 t_0} \left(\frac{1 - \nu_{12} \nu_{xy0}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \right) \left(1 + \nu_{xy}^0 \frac{S_{xy}^0 t_{90} + S_{12} t_0}{S_{yy}^0 t_{90} + S_{11} t_0} \right) \quad (\text{A2. 4})$$

$$c = \frac{E_2 t_{90}}{\nu_{xy0}} \left(\frac{1 - \nu_{12} \nu_{xy0}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \right) \left(\frac{S_{xy}^0 S_{11} - S_{12} S_{yy}^0}{S_{yy}^0 t_{90} + S_{11} t_0} \right) \quad (\text{A2. 5})$$

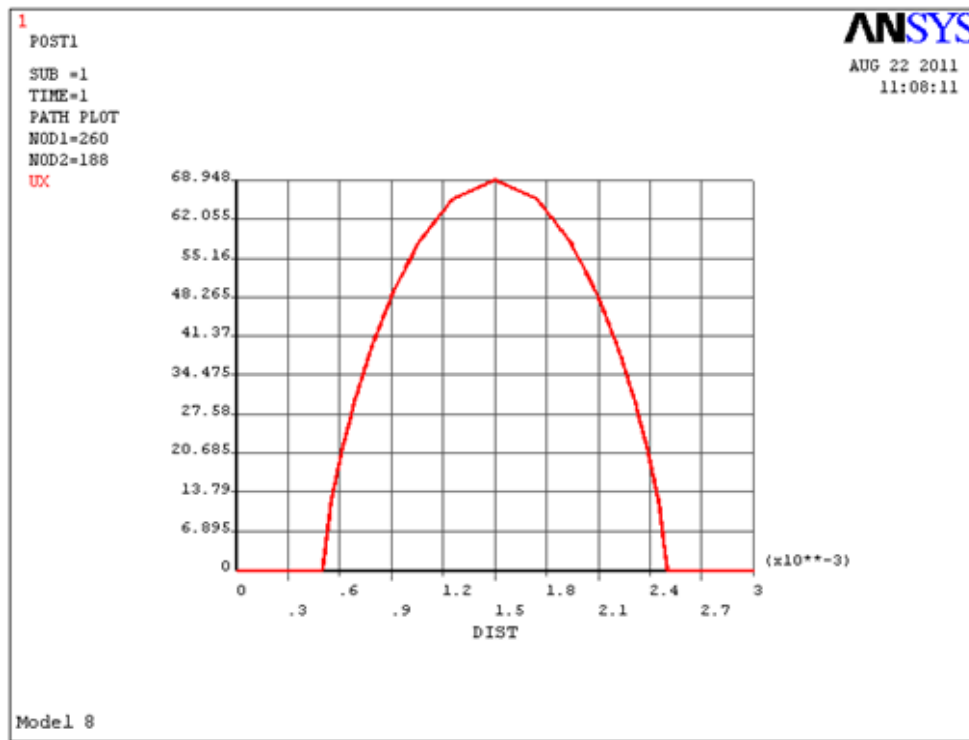
E_x^0 et E_2 ($E_2 = E^{90}$) sont le module d'élasticité des couches à 0° et 90° respectivement et ν_{xy0} est le coefficient de Poisson de stratifié sain (non endommager).

$$e = \frac{E_2 t_{90}}{E_x^0 t_0} \left(\frac{1 - \frac{\alpha_T}{\alpha_{x0}} + \nu_{12} \frac{(\alpha_{y0} - \alpha_L)}{\alpha_{x0}}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \right) \left(1 + \nu_{xy}^0 \frac{S_{xy}^0 t_{90} + S_{12} t_0}{S_{yy}^0 t_{90} + S_{11} t_0} \right) \quad (\text{A2. 6})$$

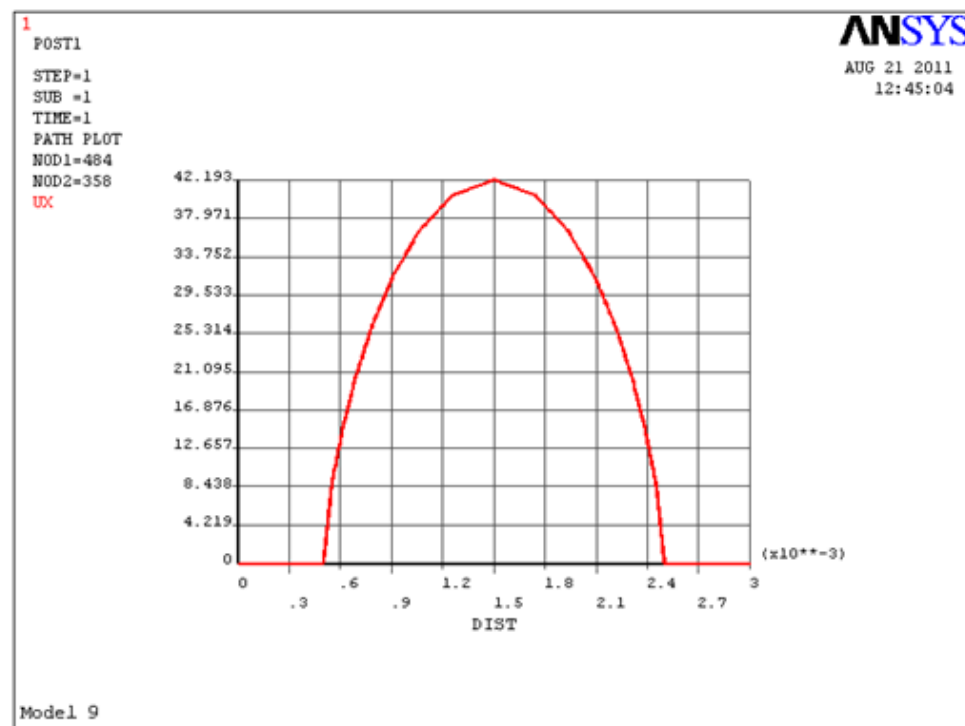
A2. 3. Le déplacement longitudinal à travers de l'épaisseur

| THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM | | | |
|--|--------|--|--------|
| $\bar{a} = 2.5$ ($\rho = 0.2 \text{ mm}^{-1}$) | | $\bar{a} = 5$ ($\rho = 0.2 \text{ mm}^{-1}$) | |
| NODE | UX | NODE | UX |
| 188 | 0.0000 | 358 | 0.0000 |
| 204 | 0.0000 | 384 | 0.0000 |
| 205 | 0.0000 | 385 | 0.0000 |
| 206 | 0.0000 | 386 | 0.0000 |
| 207 | 0.0000 | 387 | 0.0000 |
| 208 | 0.0000 | 388 | 0.0000 |
| 1 | 0.0000 | 2 | 0.0000 |
| 36 | 12.136 | 29 | 8.7048 |
| 35 | 20.825 | 28 | 14.520 |
| 34 | 30.014 | 27 | 20.389 |
| 33 | 39.373 | 26 | 26.050 |
| 32 | 48.941 | 25 | 31.547 |
| 31 | 58.100 | 24 | 36.553 |
| 30 | 65.592 | 23 | 40.480 |
| 20 | 68.948 | 22 | 42.193 |
| 118 | 65.592 | 218 | 40.480 |
| 119 | 58.100 | 219 | 36.553 |
| 120 | 48.941 | 220 | 31.547 |
| 121 | 39.373 | 221 | 26.050 |
| 122 | 30.014 | 222 | 20.389 |
| 123 | 20.825 | 223 | 14.520 |
| 124 | 12.136 | 224 | 8.7048 |
| 108 | 0.0000 | 198 | 0.0000 |
| 274 | 0.0000 | 489 | 0.0000 |
| 273 | 0.0000 | 488 | 0.0000 |
| 272 | 0.0000 | 487 | 0.0000 |
| 271 | 0.0000 | 486 | 0.0000 |
| 270 | 0.0000 | 485 | 0.0000 |
| 260 | 0.0000 | 484 | 0.0000 |

Tableau A2. 1.



(a)



(b)

Figure A2.3 : Variation du déplacement longitudinal à travers l'épaisseur pour deux valeurs du rapport géométrique de fissuration \bar{a} (densité de fissure) : $\bar{a} = 2.5$ (a) et

$\bar{a} = 5$ (b).

A3. ANNEXE 3

A3. 1. Variation de la contrainte longitudinale normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$

| NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL 1 | | | | | | |
|--|-------------|--------------|---------|--------|--------|--------|
| THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES | | | | | | |
| NODE | SX | SY | SZ | SXY | SYZ | SXZ |
| 30 | 0.12339E+06 | 439.61 | 19133. | 21.287 | 0.0000 | 0.0000 |
| 49 | 0.12334E+06 | 447.12 | 19126. | 43.377 | 0.0000 | 0.0000 |
| 48 | 0.12320E+06 | 469.66 | 19105. | 90.045 | 0.0000 | 0.0000 |
| 47 | 0.12295E+06 | 507.42 | 19067. | 143.59 | 0.0000 | 0.0000 |
| 46 | 0.12258E+06 | 560.48 | 19010. | 208.23 | 0.0000 | 0.0000 |
| 45 | 0.12205E+06 | 629.06 | 18929. | 289.20 | 0.0000 | 0.0000 |
| 44 | 0.12133E+06 | 712.94 | 18818. | 393.30 | 0.0000 | 0.0000 |
| 43 | 0.12034E+06 | 812.26 | 18668. | 529.49 | 0.0000 | 0.0000 |
| 42 | 0.11903E+06 | 926.65 | 18466. | 709.96 | 0.0000 | 0.0000 |
| 41 | 0.11726E+06 | 1057.7 | 18194. | 950.98 | 0.0000 | 0.0000 |
| 40 | 0.11488E+06 | 1211.7 | 17829. | 1275.0 | 0.0000 | 0.0000 |
| 39 | 0.11170E+06 | 1400.2 | 17339. | 1711.7 | 0.0000 | 0.0000 |
| 38 | 0.10742E+06 | 1682.4 | 16681. | 2300.1 | 0.0000 | 0.0000 |
| 37 | 0.10169E+06 | 2113.8 | 15800. | 3088.3 | 0.0000 | 0.0000 |
| 36 | 94040. | 3042.9 | 14632. | 4125.0 | 0.0000 | 0.0000 |
| 35 | 83974. | 4655.1 | 13101. | 5444.5 | 0.0000 | 0.0000 |
| 34 | 71024. | 8750.5 | 11168. | 7010.8 | 0.0000 | 0.0000 |
| 33 | 54884. | 14924. | 8778.6 | 8726.9 | 0.0000 | 0.0000 |
| 32 | 35549. | 29520. | 6047.3 | 10436. | 0.0000 | 0.0000 |
| 31 | 16260. | 74809. | 3881.6 | 9220.2 | 0.0000 | 0.0000 |
| 22 | 7419.8 | -0.29690E+06 | -4252.6 | 7178.1 | 0.0000 | 0.0000 |

Tableau A3. 1.

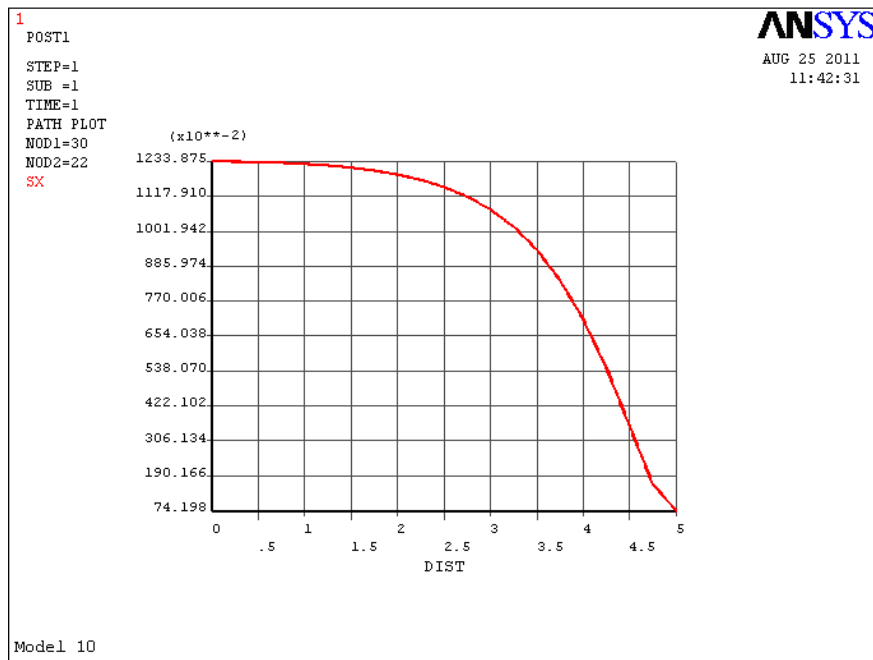


Figure A3. 1 : Distribution de la contrainte normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la couche à 90° au long de l'axe x pour $a = 5$.

NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL 1
THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES

| NODE | SX | SY | SZ | SXY | SYZ | SXZ |
|------|-------------|--------------|---------|--------|--------|--------|
| 20 | 0.10523E+06 | 2298.0 | 16353. | 368.60 | 0.0000 | 0.0000 |
| 29 | 0.10443E+06 | 2329.8 | 16229. | 753.37 | 0.0000 | 0.0000 |
| 28 | 0.10195E+06 | 2472.6 | 15847. | 1574.9 | 0.0000 | 0.0000 |
| 27 | 97573. | 2775.6 | 15174. | 2534.9 | 0.0000 | 0.0000 |
| 26 | 90967. | 3585.3 | 14165. | 3697.5 | 0.0000 | 0.0000 |
| 25 | 81711. | 5088.1 | 12758. | 5108.9 | 0.0000 | 0.0000 |
| 24 | 69403. | 9086.1 | 10923. | 6741.2 | 0.0000 | 0.0000 |
| 23 | 53785. | 15178. | 8612.9 | 8503.2 | 0.0000 | 0.0000 |
| 22 | 34892. | 29747. | 5949.6 | 10242. | 0.0000 | 0.0000 |
| 21 | 15966. | 74929. | 3838.2 | 9067.8 | 0.0000 | 0.0000 |
| 12 | 7283.0 | -0.29268E+06 | -4196.9 | 7056.5 | 0.0000 | 0.0000 |

Tableau A3. 2.

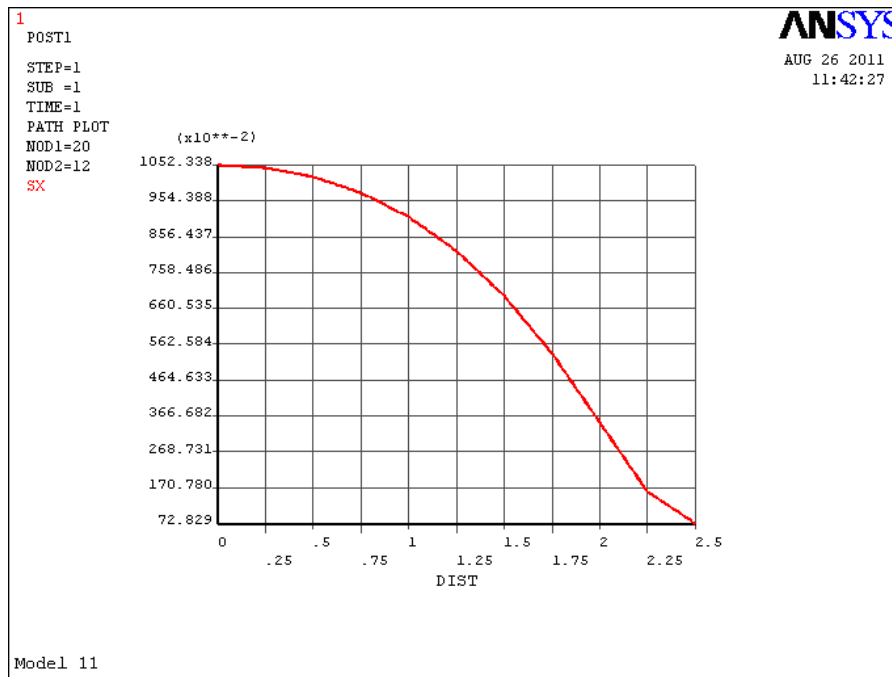


Figure A3. 2 : Distribution de la contrainte normalisée $\sigma_{xx}^{(90)}$ dans la couche à 90° au long de l'axe x pour $a = 2,5$.

A3. 2. Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur du stratifié à $x =$

- a.

| NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL 1 | | | | | | |
|--|-------------|--------------|---------|--------------|--------|--------|
| THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES | | | | | | |
| NODE | SX | SY | SZ | SXY | SYZ | SXZ |
| 12 | 27100. | -0.45484E+06 | -4076.0 | -17707. | 0.0000 | 0.0000 |
| 13 | 30093. | -0.42375E+06 | -3046.4 | -34541. | 0.0000 | 0.0000 |
| 14 | 39583. | -0.34392E+06 | -122.77 | -67284. | 0.0000 | 0.0000 |
| 15 | 54370. | -0.24317E+06 | 4002.4 | -99470. | 0.0000 | 0.0000 |
| 16 | 85746. | -0.13255E+06 | 10879. | -0.13359E+06 | 0.0000 | 0.0000 |
| 17 | 0.12226E+06 | -55188. | 17946. | -0.17215E+06 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2 | 0.26605E+06 | -36443. | 40575. | -0.19287E+06 | 0.0000 | 0.0000 |

Tableau A3. 3.

| NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL 2 | | | | | | |
|--|-------------|--------|--------|---------|--------|--------|
| THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES | | | | | | |
| NODE | SX | SY | SZ | SXY | SYZ | SXZ |
| 2 | 0.40295E+07 | 10883. | 75009. | -69026. | 0.0000 | 0.0000 |
| 94 | 0.35221E+07 | 16525. | 66652. | -40477. | 0.0000 | 0.0000 |
| 93 | 0.32468E+07 | 19708. | 62136. | -5623.5 | 0.0000 | 0.0000 |
| 92 | 0.30672E+07 | 11872. | 57653. | 2498.2 | 0.0000 | 0.0000 |
| 78 | 0.29811E+07 | 6493.4 | 55252. | 4316.4 | 0.0000 | 0.0000 |

Tableau A3. 4.

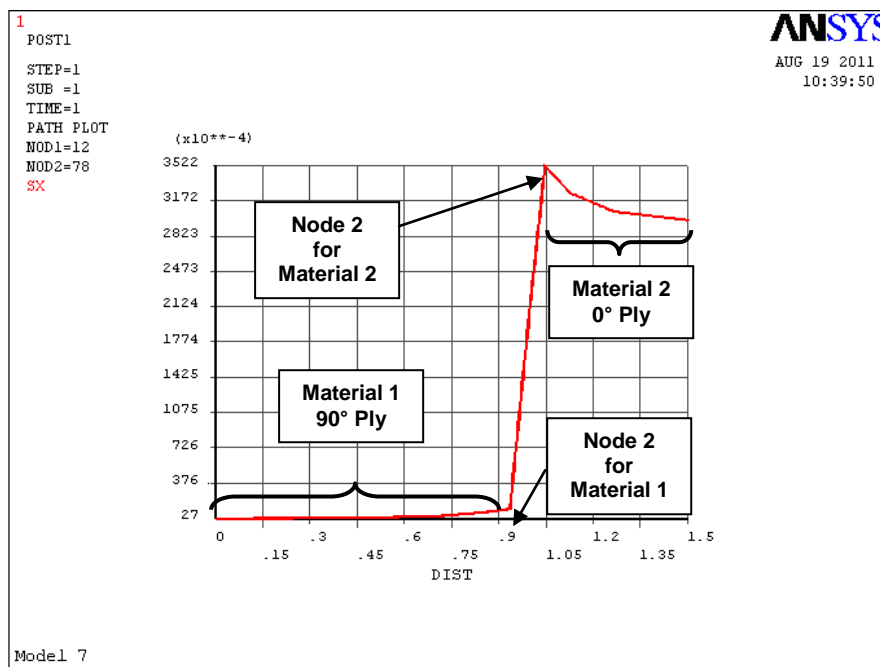


Figure A3. 3 : Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur du stratifié à $x = -a$.

On remarque dans la figure que le changement brutal de valeur de la contrainte longitudinale au niveau de l'interface est varié avec deux valeurs différentes pour le nœud commun 2. Cela est dû aux différents matériaux de plis à 0° et à 90° . Alors, il doit être considéré que la contrainte moyenne est faite pour les nœuds communs de deux matériaux différents. Pour équilibrer cette variation, on prend la valeur moyenne entre ces deux valeurs.

A3. 3. Distribution de la contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$.

| NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL 1 | | | | | | |
|--|-------------|--------------|--------|-------------|--------|--------|
| THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES | | | | | | |
| NODE | SX | SY | SZ | SXY | SYZ | SXZ |
| 1 | 0.12993E+06 | -5076.0 | 20048. | 1319.0 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2 | 0.46691E+06 | 0.34502E+06 | 78649. | 0.23660E+06 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3 | 0.13029E+06 | -4648.1 | 20110. | 2863.6 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4 | 0.13140E+06 | -6526.8 | 20248. | 5879.8 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5 | 0.13353E+06 | -6447.8 | 20580. | 9708.7 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6 | 0.13674E+06 | -10959. | 20995. | 13872. | 0.0000 | 0.0000 |
| 7 | 0.14297E+06 | -10727. | 21965. | 20974. | 0.0000 | 0.0000 |
| 8 | 0.14945E+06 | -14108. | 22908. | 27559. | 0.0000 | 0.0000 |
| 9 | 0.17146E+06 | -26804. | 26088. | 46413. | 0.0000 | 0.0000 |
| 10 | 0.17685E+06 | 28477. | 27930. | 57599. | 0.0000 | 0.0000 |
| 11 | 0.31461E+06 | -0.11823E+06 | 46613. | 0.14391E+06 | 0.0000 | 0.0000 |

Tableau A3. 5.

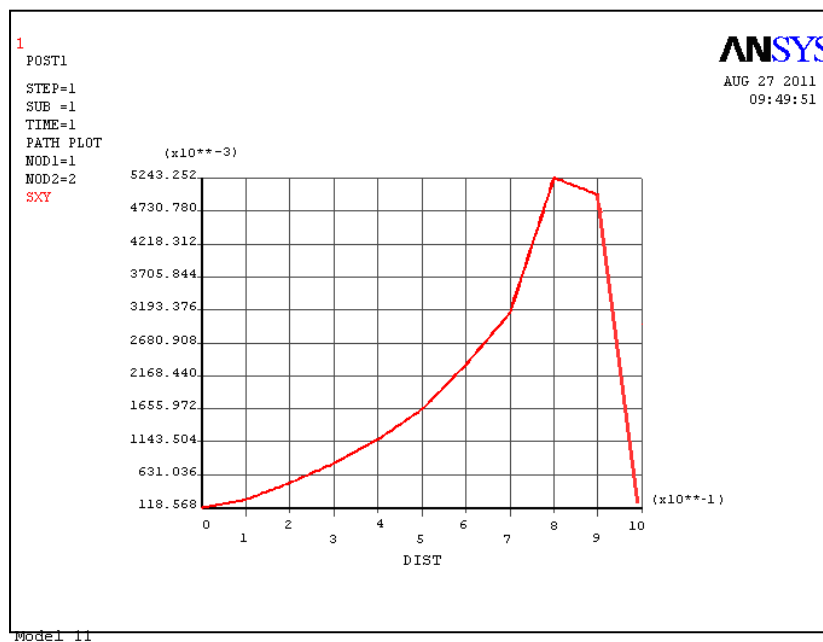


Figure A3. 4 : Distribution de la contrainte de cisaillement inter-laminaire σ_{xz} à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$.

A3. 4. Distribution de la contrainte inter-laminaire σ_{zz} à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$

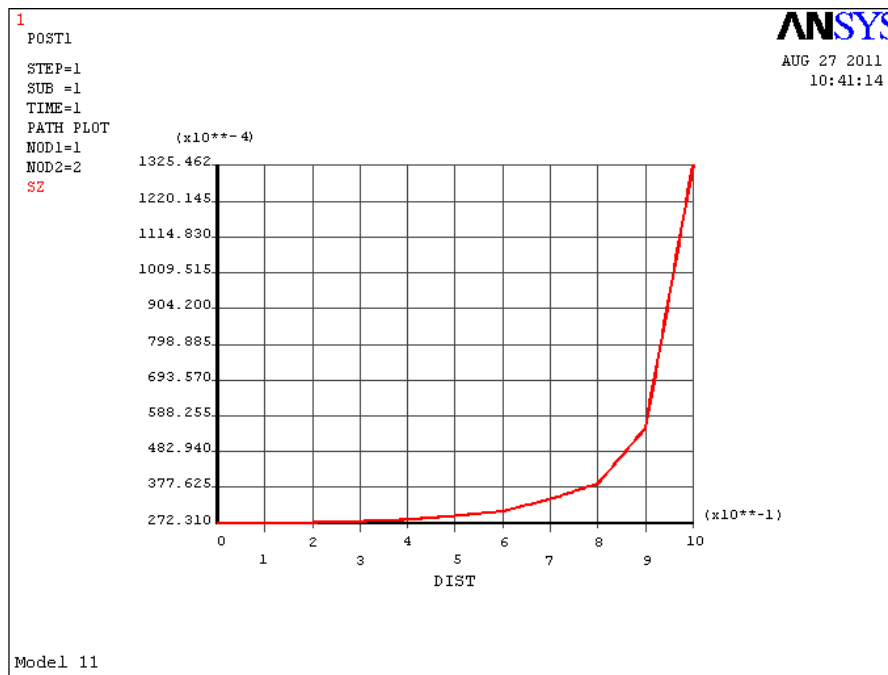


Figure A3. 5. Distribution de la contrainte inter-laminaire σ_{zz} à l'interface ($z = t_{90}$), $a = 5$ (voir valeurs Sz dans le Tab. A3. 5).

A3. 5. Propriétés de stratifié fibre en Graphite / Epoxyde IM7 / 977-3 [86].

| Propriété | Valeur |
|--------------------------------|----------------------------|
| Fiber Areal Weight | 0.215 kg /m ² |
| Min. thickness of prepreg | 1.9812e-4 m |
| Resin mass fraction | 0.32 |
| Density of resin | 1309.44 kg /m ³ |
| Density of fiber | 1779.01 kg /m ³ |
| C_p – Resin | 1.256e3 J/k .K |
| C_p – Fiber | 7.1176e2 J/kg K |
| Thermal conductivity for resin | 0.1525 W/m K |
| Thermal conductivity for fiber | 11.8025 W/m K |
| E_{m1} – initial | 3.31934e6 Pa |
| E_{m1} – final | 3.31934e9 Pa |
| V_{12m} | 0.35 |
| V_{23m} | 0.35 |
| α_{1m} | 5.76e-5 1/C |
| α_{2m} | 5.76e-5 1/C |
| E_{f1} | 2.6366e11 Pa |
| G_{12f} | 2.758e4 MPa |
| G_{23f} | 6.894e3 MPa |
| V_{12f} | 0.2 |
| α_{1f} | -9.00e-7 1/C |
| α_{2f} | 7.20e-6 1/C |

Tableau A3. 6.