



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

**THESE**

**Pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences  
Spécialité : Génie Mécanique  
Option : Matériaux  
Présenté par : M<sup>r</sup> FEGHOUL . A**

**Thème**

***Optimisation et conception architecturale des stratifiés  
pour la charge maximale de flambage***

**Soutenue devant la commission du Jury:**

**Directeur de Thèse :**

Mr. LOUSDAD Abdelkader

Professeur à l'U.D. L de Sidi Bel-Abbès

**Président :**

Mr Elajrami Mohamed

Professeur à l'U.D. L de Sidi Bel-Abbès

**Examineurs :**

Mr. SAHLI Abderrahmane

MCA à l' U.D.L Sidi Bel-Abbès

Mr. AMIRAT Mohamed

MCA à l'U. Ain Temouchent

Mr. BOURDIM Mokhtar

MCA au C. U. de Relizane

Mr. GHAZI Abdelkader

MCA à l'U. Mascara



## RESUME

Cette thèse a pour objectif une optimisation de la configuration structurale des stratifiés. L'objectif principal en terme de conception est la maximisation de la résistance au flambage des stratifiés sous l'effet des contraintes uni-axiale et bi-axiale. Le paramètre de conception prédominant concerne l'orientation des fibres dans les couches du stratifié. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé est utilisée dans la formulation mathématique pour l'analyse du flambage des plaques composites stratifiées. A cet effet un programme est élaboré sous MATLAB basé sur la méthode d'Algorithme Génétique pour le calcul des charges maximales au flambage et la détermination de la configuration architecturale optimale en prenant en considération différents facteurs : ratio géométrique, nombre de plis, orientations des fibres, types de chargements et conditions aux limites.

**Mots clés :** stratifié, plis, orientation des fibres, charge, flambage, optimisation, algorithme génétique, programmation.

## ABSTRACT

This thesis aims to optimize the structural configuration of laminates. The main objective in terms of design is the maximization of the buckling resistance of laminates under the effect of uni-axial and bi-axial stresses. The predominant design parameters is the orientation of the fibers in the layers of the laminate. High order shear deformation theory is used in the mathematical formulation in the buckling analysis of laminated composite plates. For this purpose a program is developed under MATLAB based on the Genetic Algorithm( GA) to compute the maximum resistance load to buckling and the determination of the optimal structural architectural configuration taking into consideration different factors: geometric ratio, number of plies, the orientation of fibers, loading types and boundary conditions.

**Keywords:** Composite laminate, ply, fiber orientation , load, buckling, optimization, genetic algorithm, programming.

## ملخص

تهدف هذه الأطروحة إلى تحسين التكوين الهيكلي للرقائق. الهدف الرئيسي للتصميم هو زيادة مقاومة الانحناء للرقائق تحت تأثير

ضغوط أحادي المحور وثنائي المحور. معلمة التصميم السائدة هي اتجاه الألياف نظرية إجهاد القص عالي الرتبة في الصيغة الرياضية في تحليل الالتواء للألواح المركبة المصفحة. لهذا الغرض، سيتم وضع في طبقات الرقائق. تُستخدم برنامج يأخذ في الاعتبار العوامل المختلفة: والنسبة الهندسية.

**الكلمات الرئيسية:** التحسين، التصفيح، التواء اتجاه الألياف

## **DEDICACE**

### ***A mes Parents,***

*Vous avez veillé sur moi depuis ma naissance jusqu'à ce que je suis ; vous m'avez assuré une vie digne ; vous avez manifesté beaucoup de sacrifices afin de me voir grandir devant vos yeux. Aujourd'hui, vient mon tour pour vous remercier en vous offrant ce travail qui est le fruit de vos sacrifices. **Maman, Papa,** je vous dois toute ma vie !*

*"Seuls les faibles blâment leurs parents, leur race, l'époque où ils sont nés, le manque de chance ou les aléas du destin. Mais chacun d'entre nous a le pouvoir de dire : « Voici ce que je suis aujourd'hui et voilà ce que je serai demain »."*

AMOUR LOUIS

### ***A mes proches,***

*J'apprécie beaucoup la grande affection que vous tenez pour moi. A cette reconnaissance, je vous manifeste mes meilleurs sentiments en vous offrant le fruit de mon travail.*

### ***A mes amis,***

*" L'apprentissage de la vie, c'est de se donner les moyens de surmonter cette angoisse qu'on a d'elle, en se structurant, en prenant ses responsabilités, en se disciplinant."*

BOTHOREL JEAN

### ***A mes collègues,***

*" Le savoir que l'on ne complète pas chaque jour diminue tous les jours."*

Proverbe Chinois

## **REMERCIEMENTS**

Avant tout merci à Dieu qui m'a donné le courage et la volonté pour accomplir et réaliser ce travail de recherche et finaliser ma Thèse de Doctorat.

Ce travail de recherche scientifique a été réalisé au niveau du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides (**LMSS**) du Département de Génie Mécanique de la Faculté de Technologie de l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel-Abbes sous la direction du Professeur **Lousdad Abdelkader**.

- Je tiens à exprimer mes remerciements les plus vifs et les plus sincères:

- Au Professeur **LOUSDAD Abdelkader**, mon Encadreur et Directeur de Thèse pour m'avoir donné l'occasion de réaliser cette recherche dans des excellentes conditions et également pour m'avoir soutenu et conseillé tout au long de ce travail. Je tiens à lui mentionner mon profond respect et ma profonde reconnaissance pour le soutien et l'aide apporté pour la réalisation de cette Thèse de Doctorat. C'est grâce à ses qualités Humaines, Scientifiques, ses expériences et Compétences Professionnelles Industrielles que j'ai pu continuer et mener à bien ce travail de recherche scientifique. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

- J'adresse mes remerciements les plus sincères au Professeur **ELAJRAMI Mohamed** du Département de Génie Mécanique de la Faculté de Technologie de l'Université de Sidi Bel-Abbes d'avoir accepté la Présidence du Jury de cette Thèse de Doctorat.

- Mes plus vifs remerciements vont également :

- Au Dr. **SAHLI Abderahmane** du Département de Génie Mécanique de la Faculté de Technologie de l'Université de Sidi Bel-Abbes.

- Au Dr. **GHAZI Abdelkader** Maître de conférences A de l'Université de Mascara

- Au Dr. **AMIRAT Mohamed** Maître de conférences A de l'Université d'Ain Témouchent

- Au Dr. **BOURDIM Mokhtar** Maître de conférences A du C. Universitaire de Relizane pour l'intérêt qu'ils ont porté à l'évaluation de ce travail et pour avoir accepté de faire partie de mon Jury

- Je tiens à remercier vivement Professeur **A. Megueni** et Dr. **Azzeddine Belaziz** Maître de Conférences du Département de Génie Mécanique de la Faculté de Technologie de l'Université de Sidi Bel-Abbes pour leur soutien scientifique et leur aides précieuses pour la réalisation de ce travail de Recherche.

# SOMMAIRE

Résumé.....	1
Dédicace.....	1
Remerciements.....	1
Liste des tableaux.....	1
Liste des figures.....	1
Liste des symboles.....	1
Introduction générale.....	01

## ***Chapitre 1 Théorie de l'instabilité élastique des plaques***

I.	Instabilité des plaques.....	7
I. 1	Généralités .....	7
I. 2	Formulation générale .....	7
I. 3	Instabilité élastique des plaques minces.....	8
I.3.1	Evaluation de l'énergie potentielle pour l'état d'équilibre 1.....	10
I.3.1.1	Relation déformations - déplacements .....	10
I.3.1.2	Evaluation de l'énergie potentielle .....	11

## ***Chapitre 2 Mécaniques des stratifiés***

II.1	Introduction.....	15
II.2	Nomenclature d'une structure stratifiée.....	17
II.3	L'hypothèse de Kirchoff.....	19
II.4	Relations contraintes vs déformations.....	21
II.5	Relations efforts résultants vs déformations.....	22
II.6	Déformations dans chaque pli.....	24
II.7	Comportement des plaques stratifiées.....	26

## ***Chapitre 3 Flambement des plaques orthotropes***

III.1	Flambement de plaques orthotropes soumises à une compression bi-axiale .....	31
III.2	Compression uni axiale .....	34
III.3	Plaque carrée soumise a une compression bi-axiale.....	35

## ***Chapitre 4 Les algorithmes génétiques***

IV.1	Introduction.....	37
IV.2	Les schèmes.....	39
IV.3	Représentation génétique des stratifiés.....	40
IV.4	Génération de la population initiale.....	41
IV.5	Evaluation des individus.....	45
IV.6	Classement des individus.....	50
IV.7	Génération de l'ensemble de reproduction.....	50
IV.8	La reproduction.....	53

IV.8.1	Chromosomes discrets.....	54
IV.8.2	Chromosomes continus.....	57
IV.9	La mutation.....	58
IV.9.1	Chromosomes discrets.....	58
IV.9.2	Chromosomes continus.....	60
IV.10	Epaisseur variable.....	61
IV.11	Evaluation des enfants.....	62
IV.12	Construction de la nouvelle génération.....	63
IV.13	Convergence.....	65

## ***Chapitre 5 Résultats et interprétation***

V.1	Introduction.....	68
V.2	Formulation du problème .....	68
V.3	Plaque stratifiée orthotrope.....	66
V.4	Procédure d optimisation.....	69
V.4.1	Algorithme Génétique Simple.....	69
V.5	Résultats et discussion.....	69
V.6	Une compression unie axiale.....	71
V.7	Synthèse .....	78
	Conclusion générale.....	80
	Références bibliographique.....	83
	Annexe A.....	86
	Annexe B.....	87

**Liste des tableaux**

4.1 :	Quatre individus et leur mesure de performance.....	39
4.2 :	Codage d'un individu en utilisant deux chromosomes.....	42
4.3 :	Décodage d'un individu composé de deux chromosomes.....	42
4.4 :	Codage du domaine discret $i$ par le domaine discret.....	43
4.5 :	Exemple d'un stratifié de 12 plis codé a l'aide d'un seul chromosome.....	43
4.6 :	Population initiale.....	45
4.7 :	Formulation du problème d'optimisation avec des variables continues.....	48
4.8 :	Solution optimale.....	48
4.9 :	Représentation d'un stratifié symétrique de six plis avec trois variables.....	49
4.10 :	Représentation d'un stratifié équilibré de six plis avec trois variables.....	50
4.11 :	Comparaison entre les deux méthodes de sélection.....	53
4.12 :	Opérateur a un point de croisement.....	55
4.13 :	Opérateur a deux points de croisement.....	55
4.14 :	Représentation de deux individus d'épaisseurs différentes.....	56
4.15 :	Opérateur a un point de croisement a partir du plus épais.....	57
4.16 :	Opérateur a un point de croisement a partir du plus mince.....	57
4.17 :	Exemple d'une mutation simple.....	59
4.18 :	Exemple d'une permutation.....	59
4.19 :	Exemple de l'addition d'un pli.....	62
4.20 :	Exemple de la soustraction d'un pli.....	63
4.21 :	Critères d'arrêt.....	66
5.1 :	les résultats obtenu pour les charges critiques de flambement et l'angle d'orientation des plis optimal pour une compression uni axiale en fixant $n=1$ , $m=1$ et en varie la valeur de $R$ de 1 a 4	72
5.2 :	la charge critique de flambement et l'angle d'orientation des plis pour compression bi axiale pour $n=1$ ; $m=1$ ; $\alpha=1$ et en varie la valeur de $R$	74
5.3 :	les résultats obtenu pour des charges critiques de flambement et les angles d'orientation des plis optimal pour une compression bi axiale en fixant $n=1$ , $m=1$ , $R=1$ pour $\alpha= 2$ et 3	77

Liste des figures

1.1	schématisation des résultantes en membrane des actions exercés sur un stratifié .....	09
2.1. a	Nomenclature d'un stratifié– structure d un stratifié.....	15
2.1.b	Nomenclature d'un stratifié – Orientation d'un pli.....	16
2.2	Représentation d'un stratifié $[(\pm 45, 0)_2]_T$ .....	17
2.3	Représentation d'un stratifié $[\pm 45, 0]_S$ .....	19
2.4	Forme déformée (plan (x, z)) .....	20
2.5	Forme déformée (plan (y, z)) .....	21
2.6	Plaque simplement supportée .....	27
3.1	Déformée latérale d'élément d'une plaque sous l'action des contraintes.....	31
3.2	Contrainte résultante pour plaques symétriques orthotropes en compression uni-axiale en	35
4.1	Structure de l'algorithme génétique .....	38
4.2	Représentation génétique .....	41
5.1	Géométrie de la plaque.....	68
5.2	Diagramme d un algorithme génétique simple.....	70
5.3	La variation de la charge critique de flambement uni-axial optimise en fonction de nombre de nombre plis.....	73
5.4	Variation de la charge critique .....	74
5.5	La variation de la charge critique de flambement bi-axiale en fonction de nombre de plis.....	75
5.6	La variation de la charge critique de flambement bi axial en fonction de R .....	76
5.7	La variation de la charge critique de flambement bi-axial en fonction de rapport de rapport de Charge de compression ( $\alpha = \frac{N_x}{N_y}$ )	78

**Liste des symboles**

$[A]$	Matrice de rigidité en membrane
$a$	Dimension de la plaque le long de l'axe $x$ (m)
$[B]$	Matrice de couplage membrane-flexion
$b$	Dimension de la plaque le long de l'axe $y$ (m)
$b_i$	Borne inférieure du domaine d'une variable continue
$b_s$	Borne supérieure du domaine d'une variable continue
$C_j$	Chromosome $j$ de l'individu $x$
$[D]$	Matrice de rigidité en flexion
$d$	Nombre aléatoire compris entre ]0, 1[
$E$	Ensemble d'enfants
$E_x, E_y$	Modules de Young apparents
$E_1$	Module longitudinal
$E_2$	Module transverse
$e_i$	Enfant $i$
$F(x)$	Fonction d'évaluation de l'individu $x$
$F_\beta$	Valeur de la fonction d'évaluation d'un optimum connu au problème
$f(x)$	Objectif du problème d'optimisation de l'individu $x$
$G_{xy}$	Module de cisaillement apparent
$G_{12}$	Module de cisaillement dans le plan
$g_c$	Somme de la valeur des $s$ contraintes d'un individu
$H$	Epaisseur totale
$h$	Epaisseur d'un pli
$M_x$	Moment de flexion autour de l'axe $x$ (N·m/m)
$M_y$	Moment de flexion autour de l'axe $y$ (N·m/m)
$M_{xy}$	Moment de torsion (N·m/m)
$m$	Nombre de demi-sinus dans la direction $x$
$mat_k$	Matériau du pli $k$
$N$	Nombre d'individus dans la population
$N_k$	Nombre d'individus élites conservés d'une génération à l'autre

---

$N_x$	Chargement applique a l'axe neutre de la plaque et perpendiculaire au cote $b$ (N/m)
$N_y$	Chargement applique a l'axe neutre de la plaque et perpendiculaire au cote $a$ (N/m)
$N_{xy}$	Cisaillement applique a l'axe neutre de la plaque (N/m)
$N_{xf}$	Charge de flambement critique dans la direction $x$
$N_{yf}$	Charge de flambement critique dans la direction $y$
$n$	Nombre de demi-sinus dans la direction $y$
$n_c$	Nombre de chromosomes d'un individu
$n_g$	Nombre de genes d'un chromosome
$n_p$	Nombre total de plis d'un stratifie
$n_{pv}$	Nombre genes d'un chromosome representant un pli vide
$P$	Population, ensemble d'individus
$P_i$	Parent $i$
$P_s(x)$	Probabilite de selection de l'individu $x$
$\mathcal{R}$	Ensemble de reproduction
$r$	Nombre d'enfants dans $E$ et nombre de couple de parents dans $R$
$S$	Somme de la valeur des contraintes qui sont violees d'un individu
$s$	Nombre de contraintes du probleme d'optimisation
$T$	Nombre de generations maximal
$t$	Age de la population (generation courante)
$u^0$	Deplacement du plan moyen du point $(x, y)$ dans la direction $x$
$v^0$	Deplacement du plan moyen du point $(x, y)$ dans la direction
$v_k$	Gene $k$ d'un chromosome
$w^0$	Deplacement transverse du plan moyen au point $(x, y)$
$(x, y, z)$	Coordonnees d'un point
$X$	Individu de la population $P$
$Y$	Voisin de $X$
$N_{cr}$	La charge critique de flambement correspond aux valeurs de $m$ et $n$
$R = \frac{a}{b}$	Est le rapport longueur sur largeur de la plaque

$m$	Nombre de demi-onde sinusoïdale dans la direction parallèle au chargement
$n$	Nombre de demi-onde sinusoïdale dans la direction perpendiculaire au chargement
$b$	Cote de la plaque perpendiculaire ou chargement
$a$	Cote de la plaque parallèle ou chargement

**Introduction**

**générale**

## ***Introduction générale***

L'utilisation des matériaux composites est très répandue dans divers domaines tels l'aérospatiale, l'aéronautique, l'industrie automobile, nautique, dans le génie civil de même que dans l'industrie sportive. Ces matériaux sont prisés en raison de leur grand rapport rigidité/poids et résistance/poids de même que pour certaines de leurs propriétés mécaniques comme la résistance à la corrosion par exemple. De plus, l'utilisation des matériaux composites peut être avantageuse par rapport aux matériaux traditionnels, car elle permet la conception de structures aux propriétés globales qui répondent mieux aux besoins particuliers d'une situation. C'est pourquoi de nombreux chercheurs ont choisi la résistance au flambement comme objectif de conception.

Les orientations des plis et les séquences d'empilement sont prises comme variables de conception. En 1993 Le Riche et al. [1], Soremekun et al. (2001) [2] et Aymeriah et al. (2008) [3] ont optimisé la plaque composite rectangulaire simplement supportée afin de maximiser la résistance au flambement. La force de flambement de la configuration de la séquence d'empilement a été calculée analytiquement en utilisant la théorie CLPT. La plaque a été supposée symétrique et équilibrée, de sorte que 3/4 des variables de conception ont été réduites. Les couches de même orientation ont été regroupées dans les séquences d'empilement optimales car elles utilisaient les angles de couche classiques ( $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$ ) comme variables de calcul. Rama Mohan Rao et al. (2005) [4] ont maximisé la résistance au flambement des plaques composites rectangulaires symétriques soumises à un chargement en compression dans le plan. Ils ont également utilisé les angles de plis conventionnels comme variable de calcul et la théorie CLPT pour modéliser la résistance au flambement. Sebay et al. (2011) ont optimisé les séquences d'empilement symétriques et symétriques d'une plaque composite rectangulaire soumise à un chargement bi-axial afin de maximiser la résistance au flambement. Ils ont augmenté l'espace de conception avec le choix de la couche dispersée.

Erdal et al. (2005) [5] ont déclaré que le flambement est le mode de défaillance critique des plaques composites stratifiées soumises à un chargement en compression dans le plan et ont optimisé la séquence d'empilement pour augmenter la résistance au flambement de la plaque composite rectangulaire. Les angles de couche conventionnels ont été utilisés comme variables de conception. Nicholas et al. (2012) [6] ont déclaré que le groupement de plis de même orientation entraînerait des contraintes inter laminai, même en cas de chargement dans le plan. Ils ont également mentionné que le regroupement des plis peut être minimisé en utilisant les intervalles d'angle de pli réduits. Les variables de conception telles que l'angle et l'épaisseur de couche ont des valeurs discrètes et la technique d'optimisation discrète doit donc être appliquée pour optimiser la plaque composite stratifiée.

Différents algorithmes évolutifs ont été appliqués avec succès pour optimiser les structures composites stratifiées. Rama Mohan Rao et Arvind (2005) [7] ont utilisé la méthode de recherche par dispersion, qui est l'une des méthodes métaheuristiques basées sur la population. Dans la méthode de recherche scatter, un ensemble de références est généré à partir de la population, puis un sous-ensemble est choisi avec soin dans cet ensemble de références. La procédure est améliorée en sélectionnant les solutions et en les combinant. Le résultat de l'amélioration peut motiver la mise à jour de l'ensemble de référence et même la mise à jour de la population de solutions. Ozgur Erdal et Fazil (2005) et Mustafa et Fazil (2008) ont mis en œuvre une version améliorée du recuit simulé, connue sous le nom de recuit simulé à recherche directe, afin d'optimiser la séquence d'empilement de la structure composite.

En effet, les propriétés globales d'une structure stratifiée dépendent du design de celle-ci. C'est-à-dire, elles dépendent de l'épaisseur, de l'orientation et du matériau de chaque pli ainsi que la séquence d'empilement de ces plis. Ce caractère indéterminé est avantageux par rapport à d'autres matériaux, car il donne la possibilité à l'ingénieur de concevoir des

structures aux propriétés répondant à des besoins précis. Cependant, cette liberté, à l'étape de la conception, rend la tâche de l'ingénieur plus complexe compte tenu des nombreux choix qu'il doit faire afin de déterminer la structure globale du stratifié. D'autres parts, les structures faites de matériaux composites coutent cher. C'est pourquoi il faut en utiliser le moins possible afin de diminuer les couts. Ainsi, dans un monde ou la compétitivité est un facteur prédominant et ou les exigences de l'industrie sont de plus en plus pointues, ces choix ont une importance majeure sur la qualité du produit final. C'est pourquoi des outils d'optimisation sont utilisés afin d'aider la prise de décision et concevoir des structures aux propriétés optimisées. Le but de ce travail est de concevoir un programme fiable et pratique pouvant être utilise pour optimiser la forme architecturale la plus résistante au phénomène de flambement d'un stratifié. La fiabilité du programme est déterminée en fonction de sa capacité à obtenir une solution optimale. L'idée ici est de donner au concepteur la solution optimale d'orientation des plis qui permet au stratifié de prendre la forme la plus résistante au flambement dans les deux cas uni-axiale et bi-axiale. La démarche utilisée est de tester le programme développe sur une série de problèmes varies appliques a l'optimisation de structures composites. La méthode d'optimisation préconisée dans ces travaux est basée sur les algorithmes génétiques.

La présente thèse s'organise autour de cinq chapitres :

A partir d'une étude bibliographique, le premier chapitre présente une étude théorie de l'instabilité élastique des plaques.

Le deuxième chapitre , en vu d'approfondir les connaissances , la théorie classique des stratifiées est présentée.

Le troisième chapitre est consacré à l'élaborations des équations avec les quelles s'effectuent les calculs du flambement pour les deux cas uni-axial et bi-axial.

Dans le quatrième chapitre la méthode des Algorithmes Génétique (A.G) est présentée en détail ainsi que son application qui nous a permis d'optimiser la forme architecturale adéquate d'un stratifié la plus résistante au flambement.

Le cinquième chapitre est consacré à l'application de l'Algorithme Génétique, à la description du problème ainsi qu'à l'interprétation et l'analyse des résultats obtenus concernant l'optimisation de la configuration structurale la plus résistante au flambement.

En conclusion, nous présentons l'état d'avancement des travaux effectués ainsi que des propositions sur la continuité des travaux en guise de perspective.

# Chapitre 1

Théorie de l'instabilité élastique des plaques

## I. Instabilité des plaques :

### I.1 Généralités :

Le but de ce chapitre est de formuler les équations de base pour représenter les problèmes liés à la flexion, aux effets de membrane et à l'instabilité élastique des plaques minces. Nous définissons également, l'énergie potentielle, sa première et seconde variation pour chacun des cas.

### I.2. Formulation générale :

Les développements qui suivent peuvent être retrouvés dans les ouvrages d'Almroth [08], Timoshenko [09], Chajes [10]. Avant de formuler le problème spécifique de l'instabilité des plaques, nous allons formuler celui de l'instabilité en général, d'après Rubinstein [11].

Notons l'état d'une structure en équilibre sous l'action de charges externes comme l'état d'équilibre 1, pour vérifier si c'est un état d'équilibre stable, nous cherchons d'abord l'énergie potentielle d'un autre état, disons 2, produit par une perturbation arbitraire.

Par convention, pour une structure à un degré de liberté ( $w$ ) nous représentons les états 1 et 2 comme suite :

Etat 1 :  $w$  ,  $\Pi(w)$

Etat 2 :  $w + \delta w$ ,  $\Pi(w + \delta w)$  où ( $\delta w$ ) est la perturbation ainsi définie.

La variation de l'énergie potentielle  $\Delta\Pi$  est définie par:

$$\Delta\Pi = \Pi(w + \delta w) - \Pi(w) \quad (1.1)$$

En utilisant la série de Taylor,  $\Delta\Pi$  peut être écrite sous la forme:

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \delta^2\Pi + O\delta^3 \quad (1.2)$$

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial W} * \delta W$$

Dans la quelle :

$$\delta^2\Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial^2 W} * (\delta W)^2 \quad (1.3)$$

$O\delta^3$  : Sont les termes d'ordre supérieur ou égal à trois que nous négligeons. Pour l'équilibre à l'état 1,  $\Pi(w)$  doit être stationnaire d'où

$$\delta\Pi(w) = 0 \quad \text{où} \quad \frac{\partial\Pi}{\partial w} = 0 \quad \text{pour} \quad \delta W \neq 0 \quad (1.4)$$

Pour que cet équilibre 1 soit stable,  $\Pi(w)$  doit être minimum. Pour garantir cette stabilité de l'équilibre 1, la seconde variation  $\delta^2\Pi$  doit être définie positive d'où:

$$\text{Equilibre stable: } \delta^2\Pi > 0 \quad \text{où} \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial^2 w} > 0 \quad \text{puisque} \quad (\delta w)^2 \text{ est positif} \quad (1.5)$$

Pour un équilibre instable au stade 1, la structure ne tendra pas à retourner vers le stade1, quand une perturbation vers le stade 2 survient. Ceci a lieu quand la seconde variation du potentiel  $\delta^2\Pi$  est nulle ou négative. La ligne de démarcation, ou bifurcation entre la condition de stabilité et d'instabilité de l'équilibre, correspond à :

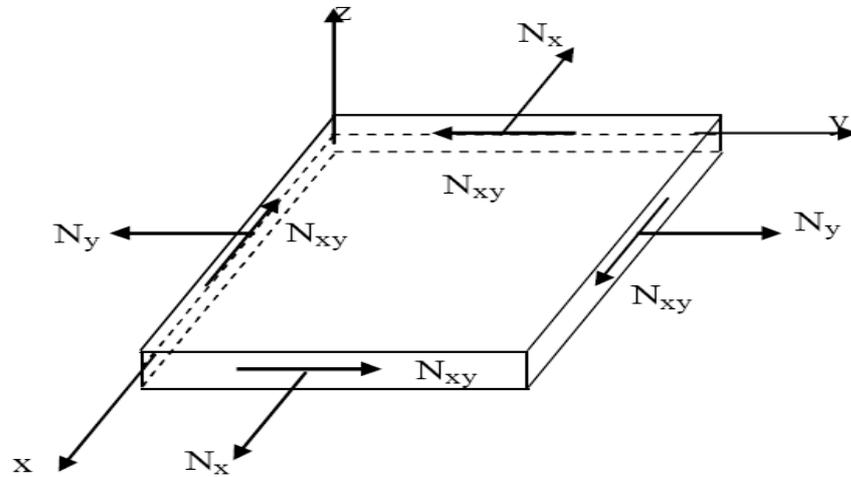
$$\delta^2\Pi = 0, \text{ d'où pour un équilibre instable } \delta^2\Pi = 0 \text{ ou } \frac{\partial^2\Pi}{\partial^2 w} = 0 \quad (1.6)$$

Nous constatons donc que l'étude d'équilibre se limite à l'étude de la première variation  $\delta^2\Pi$  et celui de l'instabilité à la seconde variation  $\delta^2\Pi$ .

### I.3 Instabilité élastique des plaques minces

Considérons un stratifié avec un système d'axes tel que représenté sur la figure (1.1)

La plaque est soumise à un chargement d'intensité arbitraire dans le plan (xy) qui provoque une compression de la plaque. Par l'élasticité plane, et pour ce chargement d'intensité arbitraire, nous trouvons en chaque point de coordonnées (x, y, z) un vecteur d'efforts internes  $\{N\}$  par unité de longueur, où  $\{N\}$  est défini comme ci-dessous.



**Figure** : 1.1 : schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un stratifié

$$\langle N \rangle = \langle N_x + N_y + N_{xy} \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \langle \sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy} \rangle dz \quad (1.7)$$

Où:

$h$  est l'épaisseur de la plaque,  $\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}$  sont les contraintes planes dans le plan (xy) et

$N_x + N_y + N_{xy}$  : les efforts internes correspondants, par unité de longueur.

Afin d'étudier l'instabilité élastique des plaques, pour laquelle l'intensité du chargement axial lors du flambement est inconnue, nous considérons qu'au flambement, cette intensité est représentée par  $\lambda$  fois l'intensité arbitrairement choisie qui donne le vecteur  $\langle N \rangle \lambda$  étant une constante.

La plaque considérée est maintenant soumise à une distribution d'efforts internes  $\lambda \{N\}$ . En appliquant un chargement de flexion transversale, en examinant l'équilibre pour une position légèrement fléchie de la plaque, et en supposant que : Le vecteur  $\lambda \{N\}$  reste constant durant la flexion. Cet état d'équilibre correspond à l'état d'équilibre 1 tel que défini au paragraphe (I.1) pour savoir si cet état d'équilibre est stable ou non, nous allons évaluer la

seconde variation de l'énergie potentielle  $\delta^2\Pi$  entre l'état 1 , et un état d'équilibre voisin obtenu par une légère perturbation de l'état 1.

### I.3.1 Evaluation de l'énergie potentielle pour l'état d'équilibre 1

Dans l'évaluation de l'énergie potentielle, nous négligeons, pour les plaques minces l'énergie interne due aux déformations de cisaillement. Les relations qui suivent sont établies pour une position fléchie de la plaque.

#### I.3.1.1 Relation déformations - déplacements

Les déformations  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  pour un point de coordonnées  $(x, y, z)$  qui s'est déplacé de  $u, v, w$  suivant les axes  $x, y$  et  $z$ , respectivement, sont :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_m \rangle + \langle \varepsilon_{nl} \rangle + z \langle k \rangle \quad (1.8a)$$

Où:  $\langle \varepsilon \rangle$  est le vecteur de déformation total

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \rangle \quad (1.8b)$$

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle \quad (1.8c)$$

$\langle \varepsilon_m \rangle$  : est les vecteurs de déformations linéaires de membrane

$\langle \varepsilon_{nl} \rangle$  Est le vecteur de déformations non linéaires de membrane

$$\langle \varepsilon_{nl} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \quad (1.8b)$$

$\langle K \rangle$ : est le vecteur de déformations de flexion

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right\rangle$$

Tel que :

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} ; \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.8e)$$

$\beta_x$  et  $\beta_y$  étant les rotations des plans  $yz$  et  $xz$  autour de  $x$  et  $y$ , respectivement.

Les équations (1.8) sont les relations cinématiques de la plaque.

Les variations  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  sont fonctions de  $x$  et  $y$  seulement et se réfèrent au plan moyen ( $xy$ ).

### 1.3.1.2 Evaluation de l'énergie potentielle

L'énergie interne  $U$  est exprimée par:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle [D] \{ \varepsilon \} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} U = & \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon_m \rangle [D] \{ \varepsilon_m \} dV}_1 + \underbrace{\int_V \langle \varepsilon_{nl} \rangle [D] \{ \varepsilon_m \} dV}_2 + \underbrace{\int_V z \langle K \rangle [D] \{ \varepsilon_m \} dV}_3 + \\ & \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon_{nl} \rangle [D] \{ \varepsilon_{nl} \} dV}_4 + \underbrace{\int_V z \langle K \rangle [D] \{ \varepsilon_{nl} \} dV}_5 + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V z^2 \langle K \rangle [D] \{ K \} dV}_6 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nous cherchons la deuxième variation  $\partial^2 U$  pour une perturbation,  $\partial w$  et en gardant que les termes quadratiques de ( $w$ ) et de ses dérivées afin de linéariser le problème de l'instabilité. Par conséquent, le terme (1) de l'équation (1.10) qui ne contient pas de termes de  $w$  ou de ses dérivées est abandonné.

Les termes (3) et (5) sont nuls pour une matrice  $[D]$  constante ou symétrique par rapport au plan moyen car :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = 0$$

Le terme (4) qui est du quatrième ordre est négligé.

Pour des plaques minces orthotropes ou isotropes, l'énergie  $U$  qui varie avec  $w$  se réduit donc aux termes (2) et (6), qui pour une intégrale sur l'aire  $A$  devient:

$$U = \int_V \langle \varepsilon_{nl} \rangle [D_m] \{ \varepsilon_m \} dA + \frac{1}{2} \int_V \langle K \rangle [D_f] \{ K \} dA \quad (1.11)$$

Comme  $\lambda \{ N \} = [D_m] \{ \varepsilon_m \} dA$  où  $\{ N \}$  est défini par l'équation (1.7) nous obtenons:

$$U = \lambda \int_A \langle \varepsilon_{nl} \rangle \{N\} dA + \frac{1}{2} \int_A \langle K \rangle [D_f] \{K\} dA \quad (1.12)$$

Si nous considérons les notations suivantes :

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \quad \text{et} \quad [N_\sigma] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{yx} & N_y \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

L'équation (1.11) devient:

$$U = \frac{1}{2} \lambda \int_V \langle \varepsilon_n \rangle [N_\sigma] \{ \varepsilon_N \} dA + \frac{1}{2} \int_V \langle K \rangle [D_f] \{ K \} dA \quad (1.14)$$

Pour un matériau isotrope, l'expression (1.11) devient :

$$U = \lambda \int_A \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 N_x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 N_y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right) N_{xy} dA + \left( \frac{Eh^3}{24(1+\nu^2)} \int_A \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 \right) dA \quad (1.15)$$

Nous avons vu au paragraphe (1.1) que l'état d'équilibre est instable si :

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U + \delta^2 \Phi = 0 \quad (1.16)$$

Mais comme les charges externes sont conservatives alors :

$$\delta^2 \Phi = 0 \quad (1.17)$$

Utilisons la relation (1.13), l'équation (1.14) :

$$\delta^2 \Pi = \lambda \int_A \langle \delta \varepsilon_n \rangle [N_\sigma] \{ \delta \varepsilon_n \} dA + \int_A \langle \delta K \rangle [D_f] \{ \delta K \} dA = 0 \quad (1.18)$$

La discrétisation de la plaque par éléments finis permet de mettre l'équation (1.18) sous la forme d'un problème de valeur propre.

$$([K] + \lambda [K_G]) [U_n] = 0 \quad (1.19)$$

Où:  $[K]$  et  $[K_G]$  sont respectivement, la matrice de rigidité de flexion et la matrice géométrique.

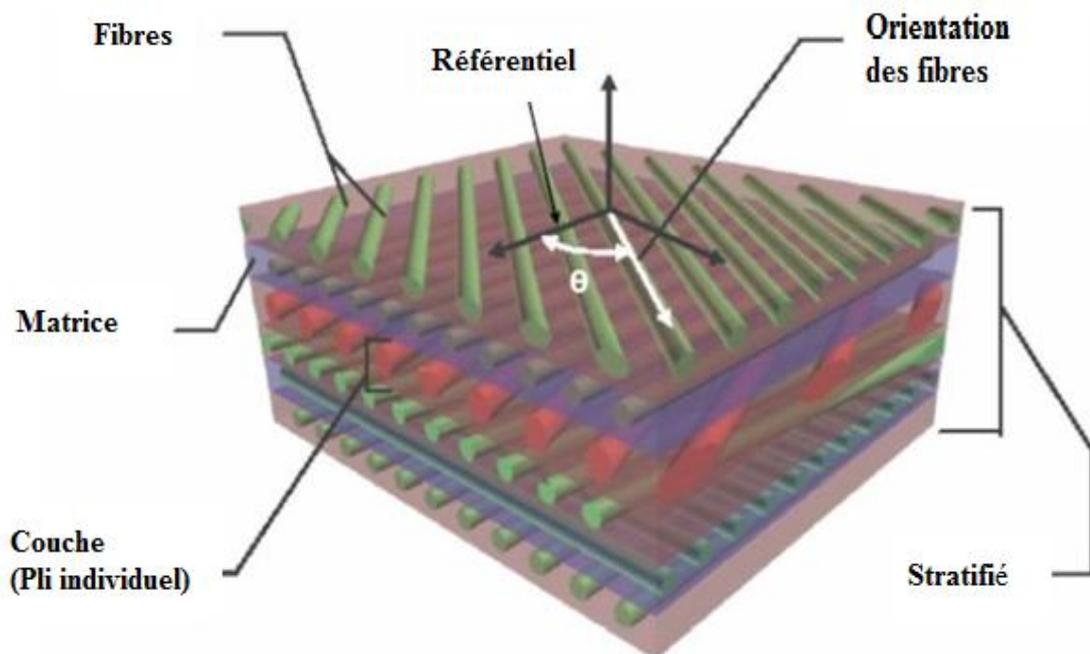
$[U_n]$  Représente les vecteurs déplacements correspondant au mode de flambement dont l'intensité de la charge critique est donné par  $\lambda$ .

# Chapitre 2

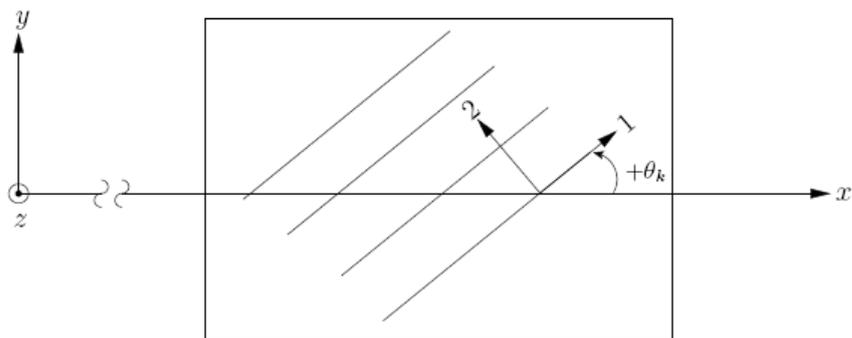
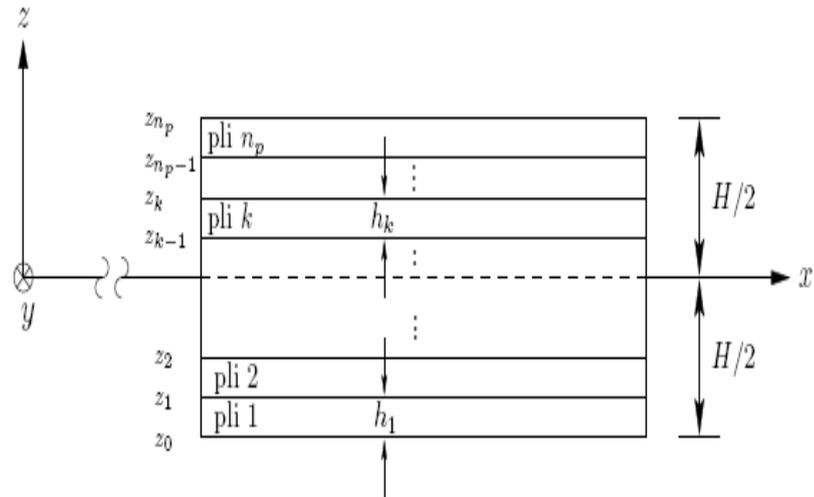
Mécanique des stratifiés

## II.1 Introduction

Le but de cette thèse est de présenter une approche d'optimisation de structures stratifiées de diverses configurations architecturales pour l'obtention d'une résistance maximale au phénomène de flambement. Avant d'aborder ce sujet, un résumé de la théorie classique des stratifiés est présenté dans ce chapitre. Précisons cependant que seul un résumé est présenté, de plus amples détails peuvent être trouvés dans les ouvrages de Berthelot [12], Hyer [13] et de Jones [14]. Dans la première section de ce chapitre, on décrit la nomenclature utilisée afin de décrire une structure stratifiée. Dans la seconde, l'hypothèse de Kirchhoff est détaillée. Les deux sections suivantes donnent les équations qui relient les déformations aux contraintes en premier lieu et aux efforts ensuite. La cinquième section décrit le calcul des déformations dans chaque pli de même que le critère de rupture par déformation maximale. Finalement, la sixième section décrit certains comportements des plaques stratifiées utilisés dans cette Thèse.



**Figure 2.1.a:** Nomenclature d'un stratifié– structure d'un stratifié



**Figure 2.1.b:** Nomenclature d'un stratifié– Orientation d'un pli

## II.2 Nomenclature d'une structure stratifiée

Tout d'abord, une structure stratifiée, d'épaisseur  $H$ , est constituée d'une certaine quantité  $n_p$  de plis qui sont empilés les uns sur les autres tels que montrés sur la figure 2.1. Chaque couche est définie par une épaisseur ( $h_k$ ), une orientation ( $\theta_k$ ) et un matériau ( $mat_k$ ). Le repère global de la structure est définie par les axes  $x, y$  et  $z$  tel que représenté sur la figure. L'axe  $x$  étant orienté le long de la longueur de la structure, l'axe  $y$  le long de sa largeur et finalement l'axe  $z$  à travers son épaisseur. L'origine de l'axe  $z$  est située au plan moyen de la structure. Le premier pli (pli 1) est situé à l'extrémité inférieure de la structure (à  $z = -\frac{H}{2}$ ) tandis que le dernier pli (pli  $n_p$ ) est celui situé à l'extrémité supérieur (à  $z = +\frac{H}{2}$ ).

Le repère local d'un pli est défini par les axes 1 et axe 2 qui lui sont propres et qui sont orientés respectivement de façon parallèle et perpendiculaire à la direction des fibres. En fait, (1,2) est un repère dans lequel on a mesuré les propriétés. Tel que montré sur la figure 2.1

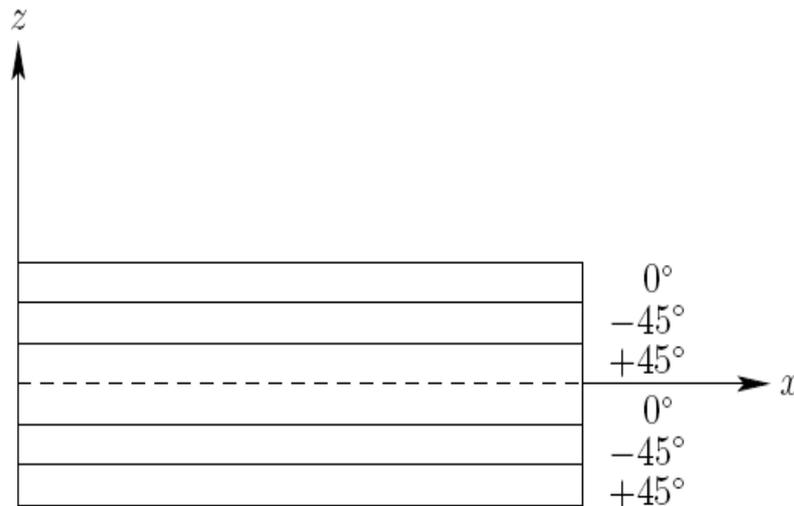


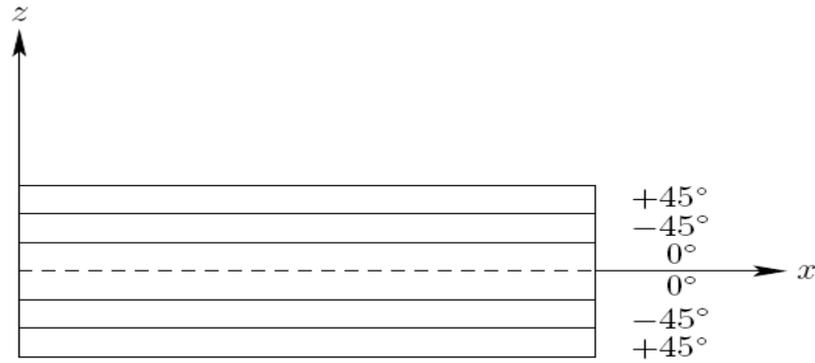
Figure 2.2: Représentation d'un stratifié  $[(\pm 45, 0)_2]_T$

L'orientation  $\theta_k$  du pli  $k$  est définie par l'angle que fait son repère local (1,2) par rapport au repère global ( $x, y$ ) de la structure. Les propriétés globales du stratifié dépendent

des propriétés du matériau de chaque pli, de son épaisseur et de l'orientation de celui-ci. Donc, c'est en variant l'orientation des plis et en choisissant les matériaux appropriés que l'on peut concevoir une structure stratifiée aux propriétés désirées.

Afin de pouvoir caractériser une structure stratifiée, il faut connaître la séquence d'empilement des plis qui la constitue. C'est-à-dire, il faut déterminer l'orientation de chaque pli et l'ordre dans lequel ils sont empilés. Si on considère des structures stratifiées dont les plis sont d'épaisseur constante et sont composés d'un même matériau. La séquence d'empilement du stratifié montré à la figure 2.2 est  $[+45,-45,0,+45,-45,0]T$ . L'orientation de chaque pli est définie entre les crochets en commençant par le pli extérieur inférieur, en passant par le plan moyen jusqu'au pli extérieur supérieur. L'indice  $T$  à l'extérieur des crochets signifie que la séquence est définie au complet. Toutefois, on peut simplifier cette représentation en regroupant les séquences qui se répètent à l'intérieur de l'empilement en utilisant un indice signifiant le nombre de fois que cette séquence est répétée. Dans ce cas, la séquence  $(+45, -45, 0)$  est répétée deux fois à l'intérieur de la structure. De plus, si deux plis consécutifs sont de mêmes orientations mais de signes opposés, on peut utiliser le signe  $\pm$  devant cette orientation afin d'alléger la représentation. La nomenclature simplifiée de ce stratifié est alors  $[(\pm 45, 0)2]T$ .

On peut réduire davantage la nomenclature d'une structure stratifiée si celle-ci est symétrique par rapport au plan moyen ( $z = 0$ ). La façon de faire est de simplement représenter la première moitié de la séquence et d'utiliser l'indice  $S$  à l'extérieur des crochets afin d'indiquer la symétrie. Par exemple, la séquence d'empilement du stratifié donné à la figure 2.3 est la suivante  $[+45, -45, 0, 0, -45, +45]T$ . Ce stratifié est symétrique par rapport à son plan moyen et peut alors être représenté de façon simplifiée par  $[\pm 45, 0]S$ . Concentrons-nous maintenant sur la mécanique des structures stratifiées.



**Figure 2.3:** Représentation d'un stratifié  $[\pm 45, 0]_S$

### II.3 L'hypothèse de Kirchoff

Les fondements de la théorie classique des stratifiés se basent sur l'hypothèse de Kirchoff qui stipule que toute section perpendiculaire au plan moyen reste plane et perpendiculaire à ce plan moyen déformé. De plus, comme les structures stratifiées sont minces, on suppose aussi un état plan de contraintes. L'hypothèse de Kirchoff est illustrée aux figures 2.4 et 2.5. Elle se traduit analytiquement par l'équation des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  d'un point  $(x, y, z)$  en fonction des déplacements du plan moyen ( $u^0$ ,  $v^0$  et  $w^0$ ) et de la coordonnée  $z$  de ce point par rapport au plan moyen et sont définis par l'équation (2.1):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) - z \frac{\partial \omega^0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) - z \frac{\partial \omega^0}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x, y)$$

Les déformations  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  sont calculées en dérivant les expressions de (2.1). Le résultat de cette dérivation est donné par l'expression (2.2). Cette dernière peut être écrite de façon

plus compacte par l'équation (2.3) avec l'introduction des courbures  $k_x^0, k_y^0$  et  $k_{xy}^0$  définies par l'équation (2.4). Finalement, les déformations du plan moyen sont données par les variables  $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$  et  $\gamma_{xy}^0$ .

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \omega^0}{\partial x^2} \\ \epsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \omega^0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 \omega^0}{\partial xy} + \frac{\partial^2 \omega^0}{\partial xy} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, y, z) &= \epsilon_x^0(x, y) + z k_x^0(x, y) \\ \epsilon_y(x, y, z) &= \epsilon_y^0(x, y) + z k_y^0(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \gamma_{xy}^0(x, y) + z k_{xy}^0(x, y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$k_x^0 = \frac{\partial^2 \omega^0}{\partial x^2} \quad k_y^0 = -\frac{\partial^2 \omega^0}{\partial y^2} \quad k_{xy}^0 = -2 \frac{\partial^2 \omega^0}{\partial x \partial y} \quad (2.4)$$

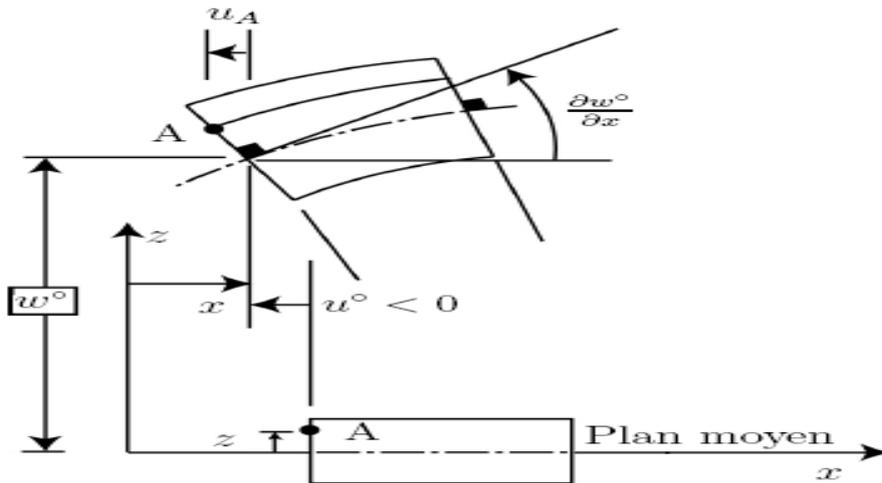


Figure 2.4. Forme déformée (plan (x,z))

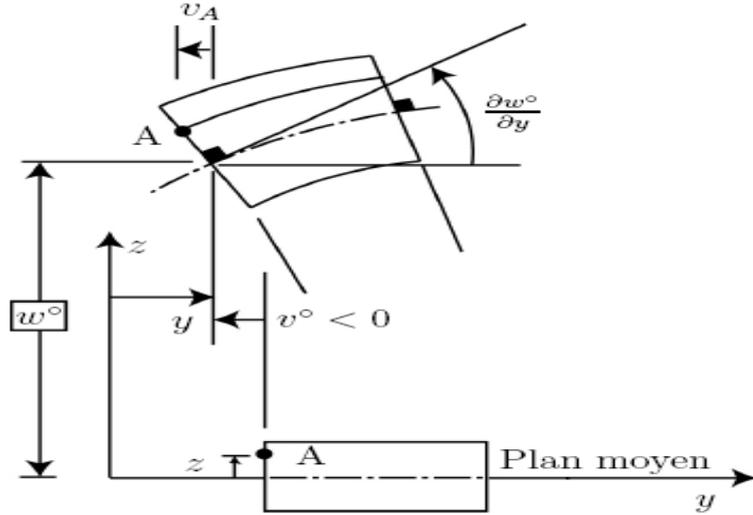


Figure 2.5: Forme déformée (plan (y, z))

## II.4 Relations contraintes et déformations

Les relations entre les déformations ( $\epsilon_1, \epsilon_2$  et  $\gamma_{12}$ ) et les contraintes ( $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\tau_{12}$ ) dans le repère local (1,2), sont données par l'équation (2.5). On rappelle que chaque pli possède son repère local dans lequel les propriétés mécaniques ont été mesurées. Les composantes de la matrice  $Q$  sont données par les équations (2.6) à (2.9).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.6)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.7)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.8)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (2.9)$$

Les relations entre les déformations et les contraintes dans le repère global ( $x, y$ ) sont, quant à elles, définies par l'équation (2.10). Les éléments de la matrice  $\bar{Q}$  sont calculés à partir de

l'équation (2.11). Celle-ci dépend de la matrice  $Q$  calculée précédemment et de la matrice de changement de repère  $T$  définie par équation (2.12). De plus, on relie les déformations dans le repère global  $(\epsilon_x, \epsilon_y \text{ et } \gamma_{xy})$  aux déformations dans le repère local  $(\epsilon_1, \epsilon_2 \text{ et } \gamma_{12})$  de chaque couche par l'équation (2.13).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T] \quad (2.11)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

## II.5 Relations efforts résultants et déformations

Les équations (2.14) et (2.15) définissent la relation entre les forces et les déformations  $(\epsilon_x^0, \epsilon_y^0 \text{ et } \gamma_{xy}^0)$  et entre les moments et les courbures  $(k_x^0, k_y^0)$ . L'exposant 0 signifie que les déformations et les courbures sont définies au plan moyen ( $Z = 0$ ). Les composantes  $A_{ij}$  de la matrice  $[A]$  sont données par l'équation (2.16) tandis que les composantes  $B_{ij}$  de la matrice  $[B]$  sont données par l'équation (2.17) et finalement les composantes  $D_{ij}$  de la matrice  $[D]$  par l'équation (2.18). La matrice  $[A]$  est appelée matrice de rigidité en membrane, la matrice  $[D]$

est appelée matrice de rigidité en flexion et la matrice  $[B]$  est appelée matrice de couplage membrane-flexion.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.16)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p} (\bar{Q}_{ij})_k \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2} \quad (2.17)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n_p} (\bar{Q}_{ij})_k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \quad (2.18)$$

Pour un stratifié symétrique, la matrice couplage membrane-flexion  $[B]$  est nulle. De plus, si le stratifié est équilibré, les coefficients  $A_{16}$  et  $A_{26}$  sont aussi nuls. On qualifie un stratifié d'équilibré lorsqu'il compte le même nombre de plis orientés à  $+\theta_k$  qu'à  $-\theta_k$  sans tenir compte des orientations à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ . Par exemple, le stratifié  $[30, 0, 25, 90, -25, -30]_T$  est équilibré tandis que le

stratifié  $[30, 30, 0, 25, 90, -25, -30]_T$  ne l'est pas, car il ne compte pas autant de plis à  $+30^0$  qu'à  $-30^0$ . Ce dernier devient équilibré si un pli à  $-30^0$  est ajouté a la séquence.

Par conséquent, lorsqu'un stratifié est symétrique et équilibré, les équations (2.14) et (2.15) sont simplifiées et sont représentées par les équations (2.19) et (2.20).

L'utilisation de ce type de stratifiés est répandue, car leur comportement ressemble à certains égards à celui d'un matériau isotrope. C'est ce genre de structure qui est étudié dans cette thèse. De plus, certaines propriétés deviennent alors faciles à calculer de façon analytique. C'est le cas des charges de flambement et de la fréquence naturelle par exemple.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

## II.6 Déformations dans chaque pli

Les termes des matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[D]$  sont souvent groupés à l'intérieur d'une seule matrice  $[ABD]$  aux dimensions  $6 \times 6$ . En calculant l'inverse de  $[ABD]$ , on peut relier les déformations du plan moyen d'un stratifié en fonction des forces et des moments appliqués sur ce plan moyen. Cette relation est donnée par l'équation (2.21).

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} = [ABD]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Après avoir déterminé les déformations du plan moyen, on peut calculer les déformations  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  d'un pli  $k$  en fonction de la position  $z$  par rapport au plan moyen de ce pli avec l'équation (2.22).

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Ces déformations sont ensuite multipliées par la matrice  $[\bar{Q}]$  de ce pli afin d'obtenir les contraintes dans le système de coordonnées  $(x, y)$ . De plus, un changement de repère peut être effectué sur ces déformations afin de passer du repère  $(x, y)$  au repère  $(1, 2)$ . Finalement, les contraintes dans le système de coordonnées  $(1, 2)$  peuvent être calculées en multipliant les déformations par la matrice  $[Q]$  de ce pli.

Plusieurs critères ont été proposés afin de prédire la rupture d'un stratifié. Nous présentons ici le critère de déformation maximale souvent utilisé en pratique. Selon ce critère, la rupture survient lorsqu'une des trois équations (2.23) n'est pas vérifiée. Lors de la rupture, le stratifié subit des déformations dans le repère local  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12})$  dépassant une des limites ultimes admises en compression  $(\epsilon_{1C}, \epsilon_{2C})$ , en traction  $(\epsilon_{1T}, \epsilon_{2T})$  ou en cisaillement  $(\gamma_{12F}, -\gamma_{12F})$ . Le facteur de rupture par déformation maximale  $\lambda_\epsilon$  est défini par l'équation (2.24). Dans cette équation, on attribue à  $\epsilon_{1F}$  la valeur de la limite ultime de déformation en traction dans la

direction 1 ( $\epsilon_{1T}$ ) si  $\epsilon_1$  est positif et la limite ultime de déformation en compression ( $\epsilon_{1C}$ ) si  $\epsilon_{1C}$  est négatif. Le même principe est appliqué à ( $\epsilon_{2F}$ ) et à  $\gamma_{2F}$ . C'est-à-dire que ( $\epsilon_{2F}$ ) prend la valeur de la limite ultime de déformation en compression ou en traction en fonction du signe de  $\epsilon_2$  et que  $\gamma_{12F}$  prend une valeur positive ou négative de la limite admise en cisaillement en fonction du signe de  $\gamma_{12}$ . Ensuite, pour chaque pli on détermine le rapport entre les limites ultimes de déformations et les déformations calculées dans leurs directions respectives. Le plus petit de ces rapports détermine la direction dans laquelle la déformation est la plus proche de la limite ultime pour ce pli. Ainsi, le pli ayant le plus petit de ces rapports est celui le plus près de la rupture. C'est alors ce rapport qui détermine le facteur de rupture par déformation :  $\lambda_\epsilon$ .

$$\epsilon_{1C} < \epsilon_1 < \epsilon_{1T}$$

$$\epsilon_{2C} < \epsilon_2 < \epsilon_{2T} \quad (2.23)$$

$$-\gamma_{12F} < \gamma_{12} < \gamma_{12F}$$

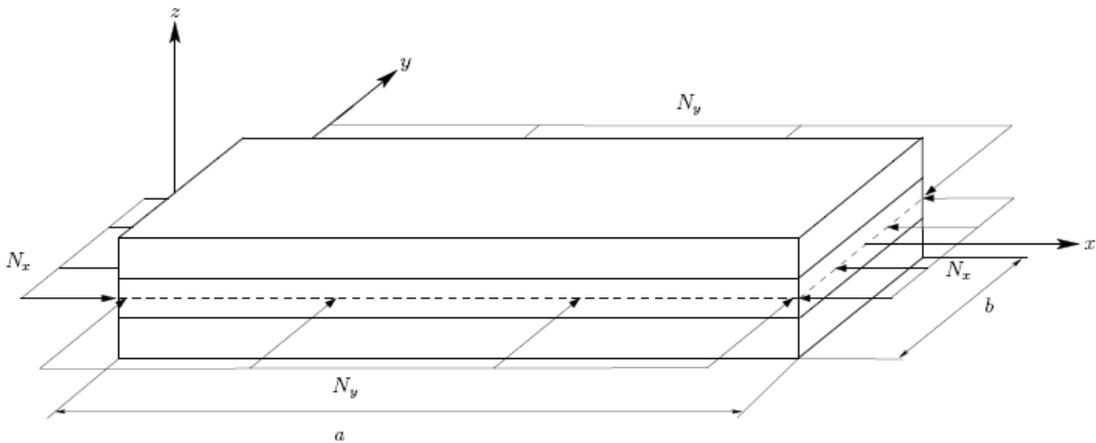
$$\lambda_\epsilon = \min \left[ \min \left( \frac{\epsilon_{1F}}{\epsilon_1}, \frac{\epsilon_{2F}}{\epsilon_2}, \frac{\gamma_{12F}}{\gamma_{12}} \right) \right] \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, \dots, n_p \quad (2.24)$$

## II.7 Comportement des plaques stratifiées

L'équation (2.25) donne le facteur de flambement ( $\lambda_f(m, n)$ ) d'une plaque rectangulaire équilibrée et symétrique de dimensions  $a \times b$ , qui est simplement supportée et soumise à des chargements  $N_x$  et  $N_y$  en compression telle que représenté sur la figure 2.6. Les charges  $N_x$  et  $N_y$  sont alors appliquées sur le plan moyen des cotes  $b$  et  $a$  de la structure. La plaque stratifiée flambe alors en  $m$  et  $n$  demi-sinus dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement lorsque les charges atteignent  $\lambda_f N_x$  et  $\lambda_f N_y$ . La plus petite valeur de  $\lambda_f$  parmi toutes les combinaisons possibles de  $m$  et de  $n$  détermine le facteur de flambement

critique  $\lambda_{fc}$  exprimé par l'équation (2.26). Le facteur de flambement critique est utilisé afin de déterminer les charges de flambement critiques  $N_{xf}$  et  $N_{yf}$  définies par l'équation (2.27) qui causeront le flambement.

$$\frac{\lambda_f(m, n)}{\pi^2} = \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4}{N_x \left(\frac{m}{a}\right)^2 + N_y \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (2.25)$$



**Figure 2.6:** Plaque simplement supportée

$$\lambda_{fc} = \min \left( \lambda_f(m, n) \right), \quad \forall (m, n) \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} N_{xf} \\ N_{yf} \end{bmatrix} = \lambda_{fc} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Pour cette même plaque (figure 2.6), l'équation (2.28) donne les fréquences de vibrations ( $f(m, n)$ ) de celle-ci. Les valeurs de  $m$  et de  $n$  déterminent les modes de vibration de la plaque. La plus petite valeur de  $f(m, n)$  définit la première fréquence naturelle de la structure exprimé par l'équation (2.29). Cette fréquence dépend alors des dimensions  $a$  et  $b$  de la plaque, de son épaisseur totale  $H$  (définie par la somme des épaisseurs  $h_k$  des  $n_p$  plis,

exprimé par l'équation (2.30), de la matrice  $[D]$  et de la densité  $\rho$ . Lorsqu'une plaque est constituée de différents matériaux,  $\rho$  est déterminé en calculant le rapport de la somme des densités de chaque pli et du nombre total  $n_p$  de plis tel que défini par l'équation (2.31).

$$f(m, n) = \frac{\pi}{2\sqrt{\rho H}} \sqrt{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{11} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4} \quad (2.28)$$

$$f_n = \min(f(m, n)) , \quad \forall(m, n) \quad (2.29)$$

$$H = \sum_{k=1}^{n_p} h_k \quad (2.30)$$

$$\rho = \frac{\sum_{k=1}^{n_p} \rho_k}{n_p} \quad (2.31)$$

De plus, pour une structure stratifiée symétrique et équilibrée, on peut définir des propriétés équivalentes de la structure à partir des coefficients de la matrice de rigidité en membrane  $A$  (équation (2.16)). Les équations (2.32) et (2.33) définissent respectivement les modules d'Young apparents de la structure dans les directions  $x$  et  $y$ . L'équation (2.34) définit le module de cisaillement apparent et l'équation (2.35) le coefficient de Poisson apparent de la structure.

$$E_x = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}H} \quad (2.32)$$

$$E_y = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}H} \quad (2.33)$$

$$G_{xy} = \frac{A_{66}}{H} \quad (2.34)$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (2.35)$$

Dans ce chapitre nous avons donné un aperçu sur la théorie classique des stratifiés afin d'approfondir les connaissances et de permettre d'étudier et d'analyser le comportement de telles structures.

# Chapitre 3

Flambement des plaques orthotropes

### III.1. Flambement de plaques orthotropes soumises à une compression bi-axiale

Lors du développement des équations d'équilibre des plaques [12], les déplacements suivant la direction Z, causés par les contraintes résultantes dans le plan du stratifié de composite  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont négligés. Cependant, il est connu que les charges de compression suffisamment fortes engendrent des déplacements perpendiculaires au plan du stratifié pouvant causer sa rupture ou une flèche très importante. Ce phénomène est connu comme le flambement ou instabilité élastique. Notons que la contrainte normale  $\sigma_{cr}$  correspond à la charge de compression appliquée  $N_{cr}$  est bien inférieure à la résistance en compression du composite.

Afin d'analyser le flambement d'un stratifié de composite, il est nécessaire de développer des équations en tenant compte du déplacement latéral causé par les contraintes résultantes en membrane.

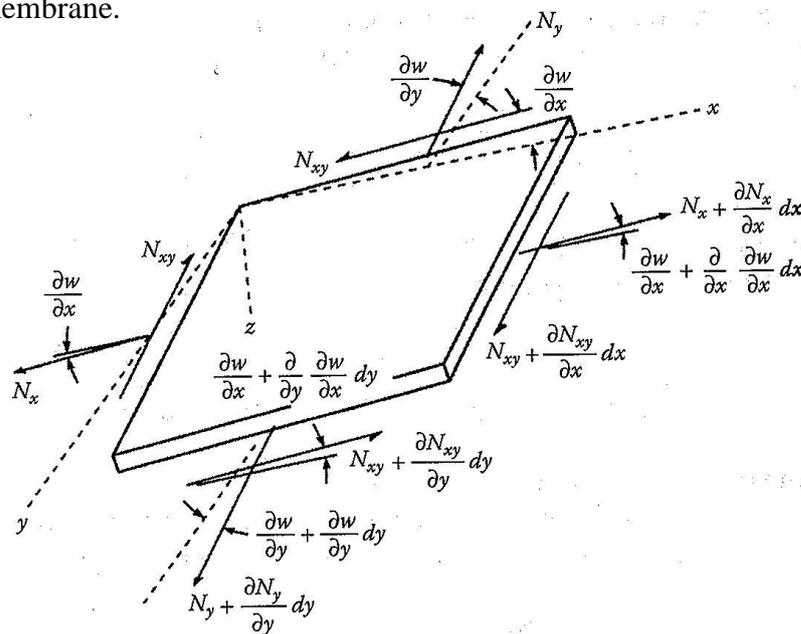


Figure 3.1: Déformée latérale d'élément d'une plaque sous l'action des contraintes

La déformation suivant la direction  $Z$  du stratifié soumis aux contraintes résultantes  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  [23] peut se calculer en considérant l'équilibre du stratifié illustré sur la figure

(3.1)

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

En tenant compte des contraintes résultantes de cisaillement transverse  $Q_x$ ,  $Q_y$  et la charge unitaire transversale  $q(x, y)$  la déformation totale suivant la direction  $Z$  du stratifié devient :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(x, y) = 0 \quad (3.2)$$

Sachant que

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y$$

L'équation (3.1) devient par conséquent :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(x, y) = 0 \quad (3.3)$$

En considérant les relations déformations-déplacements et courbures dans un stratifié

l'équation (3.3) est remplacée par :

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\ & + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 U^0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 U^0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 U^0}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 U^0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 V^0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 V^0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 V^0}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$-B_{22} \frac{\partial^3 V^0}{\partial y^3} = q(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Dans le cas d'un plaque rectangulaire de stratifié de composite symétrique orthogonal en simple support aux quatre côtés, qui est soumise à une compression bi-axiale

où:  $N_x = -N_{x0}$  et  $N_y = -N_{y0}$ ;  $N_{xy} = q(x, y) = 0$ ;  $B_{ij} = 0$  et  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ ,

l'équation (3.4) devient :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -N_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

Les conditions aux frontières sont :

Sur les côtés où  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$w_0 = 0 \quad \text{d ou} \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

Sur les côtés  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$w_0 = 0 \quad \text{d ou} \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0$$

Les conditions sont satisfaites avec une flèche de la forme :

$$w_0(x, y) = w_{min} * \sin \frac{m * \pi * x}{a} * \sin \frac{n * \pi * y}{b} \quad (3.6)$$

La déformée de la plaque causée par le flambement dépend des valeurs de m et de n qui désigne respectivement le nombre des demi-sinusoïdes suivant les directions x et y.

En rapportant (3.6) dans (3.5), l'équation suivante est obtenue :

$$\pi^2 w_{min} [D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^4 R^4] = w_{min} (N_{x0} m^2 + N_{y0} n^2 R^2) a^2$$

Où:  $R = a/b$

Une solution non nulle de cette équation conduit à la relation suivante :

$$N_{x0}m^2 + N_{y0}n^2R^2 = \frac{\pi^2}{a} [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4] \quad (3.7)$$

### III.2 Compression uni-axiale

Dans le cas d'une compression uni-axiale suivant x, la contrainte résultante

$$N_{x0} = N_0 \text{ et } N_{y0} = 0.$$

Équation (3.7) devient :

$$N_0(m, n) = \frac{\pi^2}{m^2a^2} [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4] \quad (3.8)$$

La contrainte résultante critique causant le flambement de la plaque peut être déterminée en utilisant une combinaison quelconque de m et n. Pour une valeur fixe de m, il est constaté que  $N_0$  est minimale lorsque  $n = 1$ .

L'équation (3.8) devient :

$$N_0(m, 1) = \frac{\pi^2}{m^2a^2} [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2R^2 + D_{22}R^4] \quad (3.9)$$

La valeur de  $N_0$  pour un facteur m quelconque dépend de la rigidité de la plaque et le rapport géométrique  $R = a/b$ .

Pour le cas où :  $D_{11}/D_{22} = 10$  et  $(D_{12} + 2D_{66})/D_{22} = 1$ ,

l'équation (3.9) est réduite à :

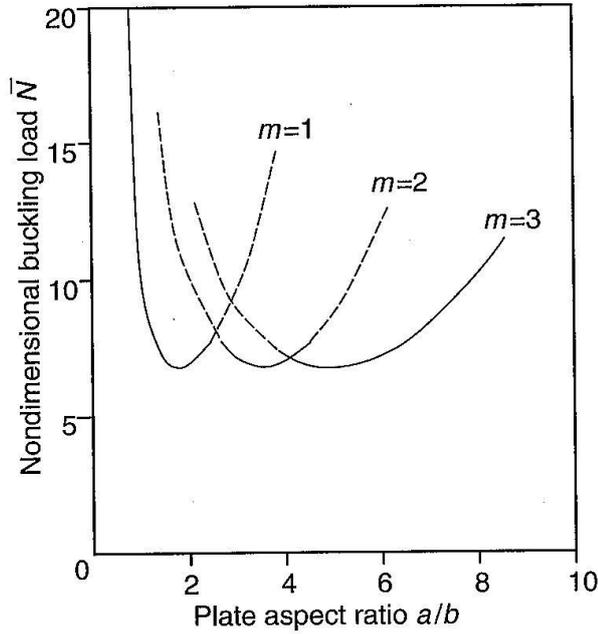
$$N_0(m, 1) = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ 10m^2 \left(\frac{1}{R}\right)^2 + 2 + \frac{1}{m^2} R^2 \right] \quad (3.10)$$

La contrainte résultante critique peut être définie comme :

$$\overline{N}_{cr} = \frac{N_0 b^2}{b^2} = \left[ 10m^2 \left(\frac{1}{R}\right)^2 + 2 + \frac{1}{m^2} R^2 \right] \quad (3.11)$$

La figure 3.2 présente  $\overline{N}_{cr} = \text{fontion} (m, R)$ .

Chacune des valeurs de  $m$  correspond à un mode de déformation particulier



**Figure 3.2:** Contrainte résultante pour plaques symétriques orthotropes en compression uni-axiale en fonction du facteur  $m$  [1].

### III.3 Plaque carrée soumise à une compression bi-axiale

Dans le cas d'une plaque carrée soumise à une compression bi-axiale de valeurs identiques sur les deux côtés :  $N_{x0} = N_{y0} = N_0$  et  $R = 1$ , l'équation (3.7) devient :

$$N_0(m, n) = \frac{\pi^2}{a^2} \left[ \frac{D_{11}m^2 + 2(D_{12} + 2D_{22})n^2 + D_{22}\left(\frac{n^4}{m^2}\right)}{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} \right] \quad (3.12)$$

Si  $D_{11} \geq D_{22}$ , il est connu que le flambement est causé lorsque  $m = 1$ .

La contrainte résultante critique est alors :

$$N_0(1, n) = \frac{\pi^2}{a^2} \left[ \frac{D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})n^2 + D_{22}n^4}{1 + n^2} \right] \quad (3.12)$$

# Chapitre 4

Optimisation architecturale par les algorithmes génétiques

## **IV.1. Introduction**

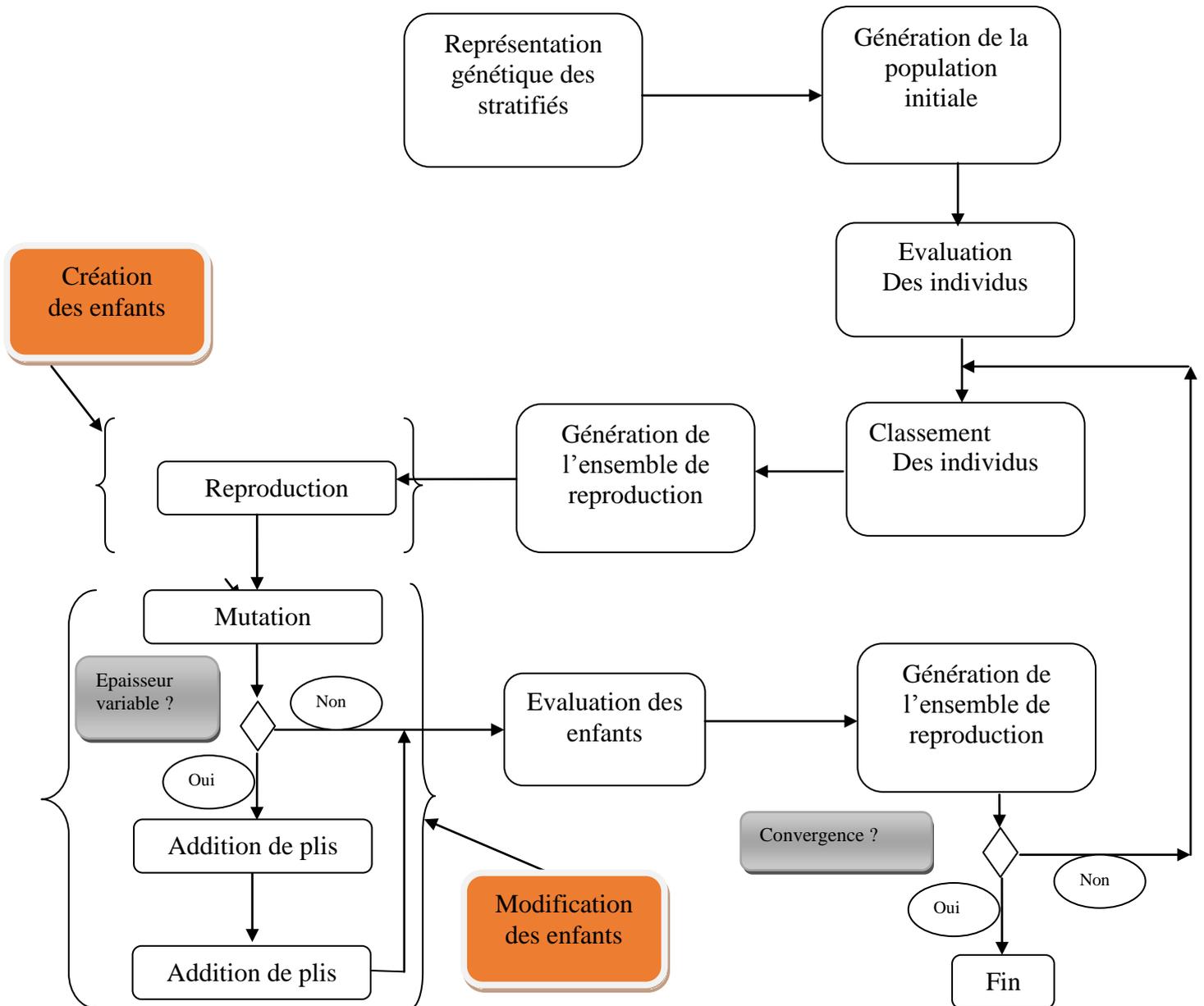
Cette thèse porte sur l'optimisation de la configuration architecturale des stratifiés pour l'obtention d'une résistance maximale au flambage en utilisant les équations de la théorie classique des stratifiés présenté au chapitre précédent. Un programme d'optimisation est développé en se basant sur la méthode des Algorithmes Génétiques (AG). Ce programme est développé avec le logiciel MATLAB dont le détail du code élaboré est donné aux annexes A et B. Les algorithmes génétiques font appel aux mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique, en ce sens qu'ils simulent la survie des individus les mieux adaptés d'une population ainsi que la transmission des gènes des parents aux enfants par des processus de reproduction et de mutation. Ce chapitre décrit de façon détaillée chacune des étapes de l'algorithme génétique utilisé dans cette étude.

La figure 4.1 illustre les étapes définissant l'algorithme génétique. Tout d'abord, un ensemble de solutions ou d'individus est généré afin de former la population initiale.

La séquence des différentes étapes est définie selon la figure 4.1. Première étape :

figure 4.1 : *Génération de la population initiale*). Par la suite, les individus de la population sont évalués (figure 4.1 : *Evaluation des individus*) et sont classés dans la population (figure 4.1 : *Classement des individus*). Ensuite, un sous-ensemble de parents est créé de façon à favoriser les meilleures solutions (figure 4.1 : *Génération de l'ensemble de reproduction*). A partir de cet ensemble, un groupe d'enfants est généré par des mécanismes de reproduction (voir figure 4.1 : *Reproduction*) et des modifications aléatoires sont ensuite appliquées à ces enfants (voir figure 4.1 : *Mutation*). Lorsque l'épaisseur des stratifiés est une variable du problème, les opérateurs d'addition et de soustraction de plis entrent en jeu (figure 4.1 : *Addition de plis* et *Soustraction de plis*). Après avoir créé et modifié l'ensemble d'enfants, la performance de ceux-ci est évaluée (figure 4.1 : *Evaluation des enfants*) afin de comparer leur degré de performance par rapport au reste de la population et pour ainsi guider la construction de la nouvelle génération (figure 4.1 : *Construction de la nouvelle génération*).

Ensuite, le processus se répète à partir de cette nouvelle génération jusqu'à ce que le critère d'arrêt défini au départ soit atteint (figure 4.1 : *Convergence* )



**Figure. 4.1** – Structure de l’algorithme génétique

## **IV.2 Les schèmes**

Avant de procéder à la description des étapes de l’algorithme génétique mentionnées sur la figure 4.1, il est important d’introduire le concept des schèmes. En fait, un schème est un groupe de gènes à l’intérieur d’une série de gènes qui définit un individu (voir Goldberg [15], Holland [16] et Davis [17]). Prenons l’exemple du tableau 4.1 où quatre individus sont présentés. En regardant les gènes de ces individus, on remarque que les deux premiers possèdent certaines similitudes. En effet, les gènes aux positions 1, 2 et 5, qui valent respectivement 5, 2 et 3, sont communs à ces deux individus. On dit alors que ces deux individus partagent le schème 52##3. Le caractère « # » signifie que le gène à cette position peut prendre n’importe quelle valeur. Dans ce tableau, on peut identifier un second schème qui est commun aux deux derniers individus, soit le schème 1###4.

**Tableau 4.1** – Quatre individus et leur mesure de performance

Individu	Gènes	$F(x)$
1	5 2 1 5 3	150
2	5 2 2 1 3	145
3	1 3 2 3 4	60
4	1 1 4 5 4	55

Sommairement, l’algorithme génétique oriente la recherche par la création de nouveaux individus à partir d’anciens individus considérés comme performants par rapport à une certaine fonction d’évaluation  $F(x)$ . Plus précisément, l’algorithme génétique identifie les schèmes performants des individus déjà parcourus et construit de nouveaux individus en combinant ces schèmes entre eux. Un schème performant est défini comme un groupe de gènes qui, lorsque présent chez un individu, permet à celui-ci d’obtenir un degré de performance élevé, ou un  $F(x)$  élève, par rapport aux autres individus de la population. Dans l’exemple précédent, le premier schème identifié est plus performant que le second car il permet aux deux premiers individus d’obtenir une plus grande performance par rapport à la

fonction d'évaluation  $F(x)$  (voir tableau 4.1). Finalement, c'est par des processus pseudo-aléatoires que l'algorithme génétique réussit à trouver et à combiner entre eux les schèmes performants. Cela est fait en favorisant la reproduction des individus les plus performants qui peuvent alors transmettre leurs bons schèmes à leur progéniture. Lors de la reproduction, il est possible que les enfants combinent les schèmes performants et distincts de chacun des parents pour former un nouveau schème encore plus performant. Ce nouveau schème aura alors tendance à être de plus en plus présent dans la population, compte tenu de sa performance, ce qui aura pour effet d'augmenter la qualité des individus.

### **IV.3 Représentation génétique des stratifiés**

Une des caractéristiques des algorithmes génétiques est qu'ils peuvent fonctionner à partir d'un codage des paramètres d'un problème et non pas seulement avec les paramètres eux-mêmes. Le codage des stratifiés est fait en se basant sur les concepts de la génétique (figure 4.2). Le but est alors de représenter tous les stratifiés de façon similaire à ce qui est fait dans la nature. Pour y arriver, l'algorithme génétique considère une population de  $N$  individus qu'elle fait évoluer par des mécanismes de reproduction et de mutation. Un individu est équivalent à un stratifié et conséquemment, la population fait référence à un groupe de stratifiés. Un individu peut alors être représenté par un ou plusieurs chromosomes (figure 4.2). Chaque chromosome contient une chaîne de gènes de même type représentant les variables codées du problème. Le nombre de chromosomes ( $\eta_c$ ) de même que le nombre de gènes ( $\eta_g$ ) de chaque chromosome  $i$  nécessaires pour la représentation d'un individu dépendent spécifiquement du problème étudié et de la méthode utilisée.

Pour des problèmes d'optimisation appliqués aux structures stratifiés par exemple, on peut décider de représenter des solutions par deux chromosomes (voir tableau 4.2). Dans cet exemple, le premier chromosome contient les gènes définissant l'orientation de chaque pli  $k$  tandis que le second contient les gènes définissant le matériau de ces plis. Par conséquent, le

stratifié représenté par ce codage en est un de trois plis aux orientations et matériaux définis par les gènes des chromosomes respectifs (voir tableau 4.3). Lorsqu'un individu est composé d'un seul chromosome, on considère que l'individu est en fait composé de  $(\eta_g)$  gènes.

Les caractéristiques que ces gènes peuvent prendre sont définies par l'alphabet des gènes. En fait, l'alphabet des gènes est l'ensemble des valeurs  $(\Omega_i)$  que peuvent prendre Les allèles des gènes pour coder le domaine  $(\Omega_i)$  des variables que représentent ces gènes.

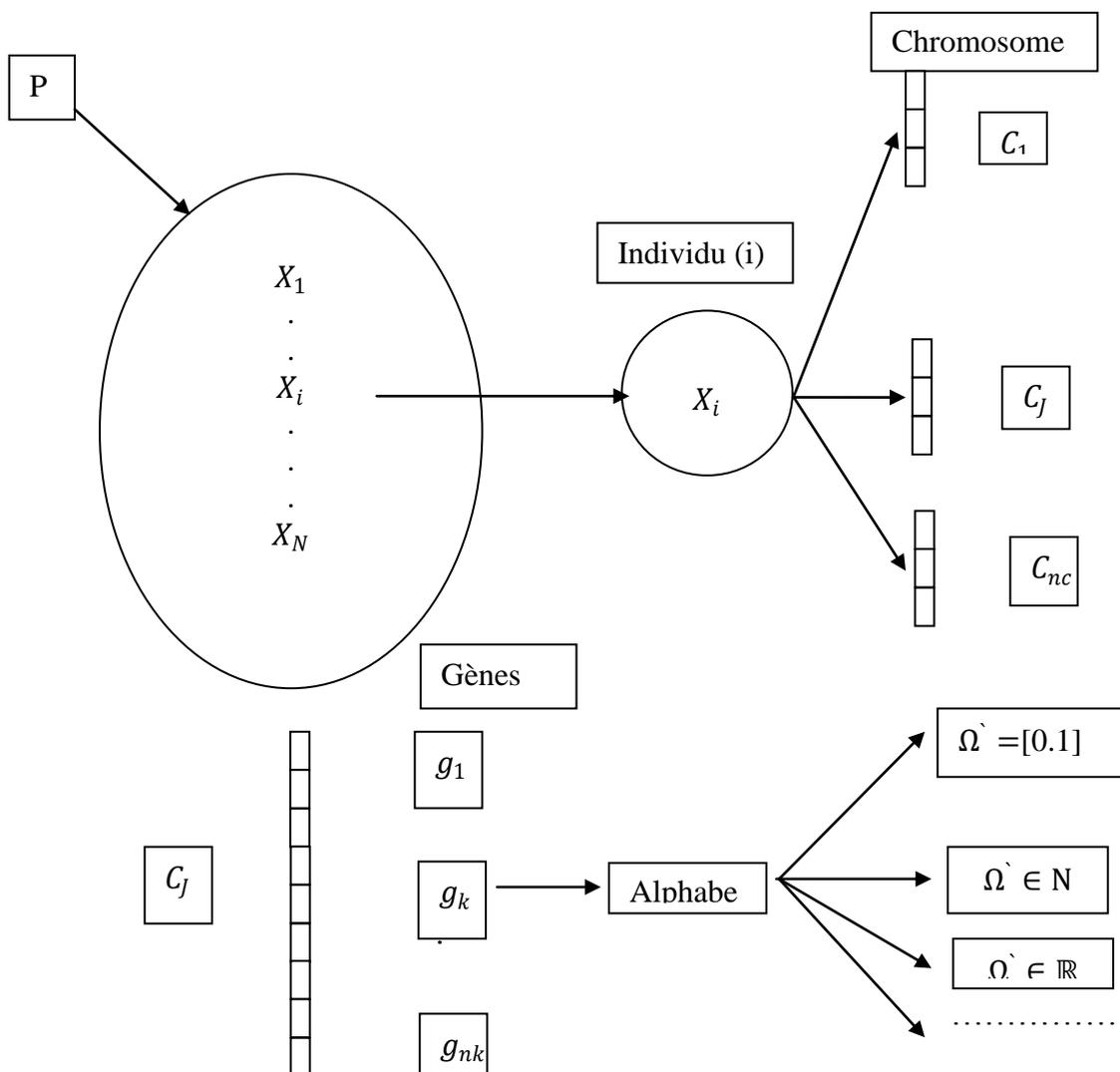


Figure 4.2: Représentation génétique

**Tableau 4.2:** Codage d'un individu en utilisant deux chromosomes

Chromosome	Type	Gène		
		1	2	3
1	O r i e n t a t i o n	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
2	M a t é r i a u	mat1	mat2	mat3

**Tableau 4.3:** Décodage d'un individu composé de deux chromosomes

Pli	Chromosome 1	Chromosome 2
Pli	Chromosome 1	Chromosome 2
1	$\theta_1$	mat1
2	$\theta_2$	mat2
3	$\theta_3$	mat3

Originellement, les gènes étaient représentés par un alphabet binaire ( $\Omega = \{0,1\}$ ). Plus tard, d'autres alphabets ont été utilisés pour représenter un domaine  $\Omega$  quelconque. Par exemple, si  $\Omega$  est un domaine de  $n$  valeurs discrètes ( $\Omega \in \mathbb{N}$ ), on peut utiliser un alphabet de  $n$  entiers ( $\Omega = \{1,2, \dots, n\}$ ) et si  $\Omega$  est un domaine continu, on peut utiliser directement un alphabet de valeurs continues ( $\Omega \in \mathbb{R}$ ). De plus, Michalewicz [18] démontre que la représentation de variables, appartenant à un domaine continu, est plus efficacement faite en utilisant un alphabet continu comparativement à un alphabet binaire. Une des raisons est que la représentation binaire discrétise le domaine continu en intervalles égaux. Ce sont alors ces intervalles qui définissent la précision des variables. Ainsi, pour un domaine donné, il faut augmenter le nombre de bits nécessaires à la représentation de chaque gène afin d'augmenter la précision. Par conséquent, la taille des chaînes définissant les individus devient rapidement élevée. Cela a pour effet d'alourdir

l’algorithme comparativement à la représentation par un alphabet de valeurs continues qui ne nécessite qu’un seul gène par variable. C’est une des raisons pour lesquelles on utilise un alphabet continu pour représenter des variables du domaine continu dans ces travaux Prenons un exemple appliqué aux structures stratifiées. Lorsque le domaine  $\Omega$  comprend quatre orientations discrètes possibles (0, +45, -45 et 90), il est nécessaire d’utiliser un alphabet de quatre allèles 1, 2, 3 et 4 (voir tableau 4.4). Le tableau 4.5 donne un exemple du codage et du décodage d’un individu selon cette représentation.

**Tableau. 4.4:** Codage du domaine discret  $\Omega_i$  par le domaine discret  $\Omega'_i$

Domaine	Variables/allèles			
$\Omega_i$ (décodé)	0	+45	-45	90
$\Omega'_i$ (codé)	1	2	3	4

**Tableau. 4.5:** Représentation d’un stratifié de 12 plis codé à l’aide d’un seul chromosome

Représentation	Gènes/Variables
Codée	[2 1 3 1 4 4 2 3 2 3 1 1]
Décodée	[+45, 0, -45, 0, 90, ±45, 0, 0]T

#### **IV.4 Génération de la population initiale**

La population initiale  $P_0$  (voir figure 4.1 : *Génération de la population initiale*) est générée de façon aléatoire selon le nombre de chromosome  $n_c$  de chaque individu, le nombre de gènes de chaque chromosome  $n_g(i)$ , le domaine des gènes de chaque chromosome  $\Omega_i$  et

le nombre d'individus dans la population  $N$ . Ainsi, pour tous les individus de la population, on attribue aléatoirement un allèle appartenant à  $\Omega_i$  à chaque gène de chaque chromosome  $i$ .

De plus, si l'optimisation s'applique à des stratifiés ou l'épaisseur est une variable au problème, on inclut un certain nombre de plis vides ( $n_{pv}$ ), déterminé aléatoirement, que l'on insère dans les premiers gènes des chromosomes (extrémité gauche). Pour un individu donné, il faut inclure le même nombre d'allèle « 0 » à tous les chromosomes. Par exemple, si l'on représenté les individus sur deux chromosomes, le premier représentant les orientations et le second le matériau de chaque pli, il faut que le nombre de gènes représentant des plis vides soit le même pour les deux chromosomes. Le tableau 4.6 donne un exemple d'une population initiale ( $P_0$ ) de cinq individus ( $N = 5$ ) représentés par deux chromosomes. Dans ce tableau, les domaines des gènes du chromosome 1 et celui des gènes du chromosome 2 sont respectivement  $\Omega_1 = \{1,2,3\}$  et  $\Omega_2 = \{1,2\}$ . Par exemple, le premier individu compte deux plis vides ( $n_{pv} = 2$ ) et le second en compte quatre ( $n_{pv} = 4$ ). Ces deux nombres ont été déterminés aléatoirement entre les valeurs 0 et  $n_g - 1$  afin d'empêcher la génération d'un individu constitué seulement de plis vides. Par conséquent, les deux chromosomes de ces deux individus comptent 2 et 4 allèles « 0 » respectivement (voir tableau 4.6 : individus 1 et 2). Le premier individu est alors plus épais que le second. Pour des problèmes où le nombre de plis est déterminé,  $n_{pv}$  est nul et aucun allèle représentant des plis vides ne sont inséré dans la population. Dans ce cas, chaque gène prend une valeur choisie aléatoirement à l'intérieur du domaine. L'étape suivante est l'évaluation de ces individus afin de déterminer les valeurs de leur performance  $F(x)$  respective.

**Tableau 4.6 :** Population initiale  $P_0$ , ( $N = 5$ ,  $\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$  et  $\Omega_2 = \{1, 2\}$ )

$P_0(i)$	Chromosome 1, ( $c_1$ )								Chromosome 2, ( $c_2$ )						$F(x)$		
	Orientations								Matériaux								
1	0	0	1	2	3	3	2	1	0	0	2	2	2	1	1	1	$F_1$
2	0	0	0	0	3	1	2	3	0	0	0	0	1	1	2	1	$F_2$
3	0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	2	2	$F_3$
4	1	3	1	2	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	$F_4$
5	0	0	0	2	1	2	3	2	0	0	0	1	1	2	1	2	$F_5$

### IV.5 Evaluation des individus.

Une des caractéristiques des algorithmes génétiques est que la recherche se base seulement sur la valeur de performance  $F(x)$  des individus et aucunement sur les dérivées de la fonction objectif  $f(x)$  et des contraintes  $g_i(x)$ . C'est cette particularité qui rend cette méthode pratique et efficace pour la résolution de problèmes avec des variables discrètes. De plus, l'algorithme génétique n'a pas besoin de connaître la nature du problème pour être fonctionnel. Tout ce qu'il voit et tout ce qu'il a besoin de voir est un ensemble de solutions auxquelles est associée une valeur numérique  $F(x)$  comme présenté au tableau 4.6. Cette valeur numérique est l'outil qui permet de différencier les solutions entre elles. Celles ayant un plus grand  $F(x)$  étant meilleures que celles ayant un plus faible  $F(x)$ . De façon générale, les algorithmes génétiques maximisent la valeur de performance  $F(x)$  des individus de la population. Pour attribuer cette valeur de performance, il faut procéder à l'évaluation des individus générés par l'algorithme génétique. La façon dont l'évaluation des individus est faite doit être définie avant de lancer l'algorithme. Lors de cette étape, l'algorithme génétique communique avec le programme de calcul des structures composites afin de calculer les propriétés de cet individu. C'est avec ces propriétés que la valeur de performance peut être déterminée selon l'objectif et les contraintes du problème.

Pour des problèmes d'optimisation non contraints, la valeur de performance  $F(x)$  est reliée directement à l'objectif  $f(x)$  du problème. D'autre part, si l'objectif d'un

problème est la maximisation de la charge de rupture ( $f(x) = \lambda_\epsilon$ ), alors le programme de calcul des structures composites détermine cette valeur (voir équation (2.24)) et fixe la performance de cet individu avec celle-ci ( $F(x) = \lambda_\epsilon(x)$ ). Toutefois, la procédure est différente pour des problèmes qui sont contraints. En effet, il faut alors déterminer une façon d'inclure ces contraintes à même l'évaluation de la performance. Une manière d'y arriver est d'utiliser une fonction de pénalisation. Cette technique est la plus répandue, car elle peut s'appliquer à la plupart des contraintes. La fonction de pénalisation a pour but de défavoriser un individu ne respectant pas une ou des contraintes au problème par rapport à un autre qui les respecte. La façon d'y arriver est d'altérer la qualité réelle d'un individu violant une ou des contraintes en diminuant l'objectif de celui-ci de façon à ce qu'il soit moins intéressant qu'un autre individu appartenant au domaine réalisable. Cet individu pénalisé aura donc moins de chance de se reproduire et tendra à disparaître de la population. On peut formuler de différentes façons la fonction de pénalisation. L'équation (4.1) pose le problème d'optimisation de façon générale tandis que l'équation (4.2) définit la fonction de pénalisation linéaire  $F(x)$  associée à ce problème.

Maximiser :  $f(x)$

Sous les contraintes :

$$g_i(x) \geq 0 \quad , \quad i = 1 \dots \dots , s \quad (4.1)$$

$$F = f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \min\{0, g_i(x)\} \quad (4.2)$$

$$F = f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \min\{0, g_i(x)\} \quad (4.2)$$

Dans ces équations,  $f(x)$  est l'objectif du problème d'optimisation tandis que  $x$  représente une solution (un individu) à ce problème. Les  $s$  contraintes  $g_i(x)$  sont définies de façon à ce qu'elles soient inférieures à 0 lorsqu'elles sont violées. Donc, la fonction de pénalisation  $F$  est diminuée proportionnellement aux facteurs de pénalisation  $\lambda_i$  associés à ces contraintes lorsque celles-ci ne sont pas respectées.  $F(x)$  vaut directement  $f(x)$  pour une solution appartenant au domaine réalisable.

Il faut déterminer les facteurs de pénalisation  $\lambda_i$  (équation (4.2)) de façon à affecter suffisamment l'objectif  $f(x)$  afin que l'algorithme ne considère pas des solutions irréalisables. En effet, souvent la solution optimale d'un problème d'optimisation possède une ou des contraintes qui sont actives. Lorsqu'une contrainte d'une solution est active, c'est que la solution se situe sur une des limites qui sépare le domaine réalisable du domaine non réalisable. Par exemple, considérons le problème d'optimisation donné au tableau 4.7. L'objectif de ce problème est la maximisation du module de rigidité  $E_x$  (voir équation (2.32)) tout en ayant un module de cisaillement  $G_{xy}$  (voir équation (2.34)) supérieur à 12 GPa et un coefficient de Poisson  $\nu_{xy}$  (voir équation (2.35)) inférieur à 0,50. La solution optimale de ce problème, selon Luersen et coll. [19], possède deux contraintes actives (voir tableau 4.8). En effet, le module de cisaillement  $G_{xy}$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{xy}$  de la solution optimale valent respectivement 12,0 GPa et 0,5, soit les limites inférieures et supérieures de ces contraintes. Dans ce cas, une solution violant une des contraintes aura probablement un objectif ( $E_x$ ) supérieur à la solution optimale. C'est pourquoi il faut pénaliser suffisamment cette solution, qui viole la contrainte, afin de la rendre moins attrayante par rapport à des solutions qui ne violent pas la contrainte. Sinon, l'algorithme se concentrera sur une solution non réalisable et, par conséquent, générera une solution violant une ou des contraintes. Par ailleurs, il n'est pas non plus avantageux d'imposer de trop grands facteurs de pénalisation, car cela peut avoir pour effet de limiter

l'espace de recherche. Ces facteurs de pénalisation  $\lambda_i$  sont donc des paramètres propres au problème qu'il faut déterminer adéquatement. C'est souvent l'expérience qui permet de déterminer les valeurs adéquate des  $\lambda_i$ .

D'autre part, certaines contraintes peuvent être éliminées en représentant les variables d'une solution de façon adaptée. Ainsi, les solutions codées sont assurément réalisables par rapport a ces contraintes. Par exemple, si un problème donné doit considérer seulement des stratifiés symétriques ou équilibrés, on peut s'assurer du respect de ces contraintes en codant les stratifiés selon la nomenclature simplifiée des Stratifiés (voir chapitre 3). Pour la contrainte de symétrie, par exemple, on ne code seulement que la moitié du stratifié en question (voir tableau 4.9 : 1).

**Tableau 4.7:** Formulation du problème d'optimisation avec des variables continues

Maximiser :  $E_x$

Sous les contraintes :  $G_{xy} \geq 12 \text{ GPa}$

$$v_{xy} \leq 0.50$$

**Tableau 4.8:** Solution optimale

Objectif	Contraintes	
$E_x$	$G_{xy}$	$v_{xy}$
(GPa)	(GPa)	
14,54	12,00	0,50

On le considère ensuite comme un stratifié symétrique lors du décodage (voir tableau 4.9 : 2). De cette façon, on s'assure que tous les individus générés sont symétriques. De la même façon, on peut représenter les variables de manière à s'assurer que seulement des stratifiés équilibrés soit générés (tableau 4.10 : 1). On y arrive en considérant chaque variable comme étant équivalant à un empilement de deux plis du même angle, mais de signes opposés (tableau 4.10 : 2). Pour des plis orientés à  $0^0$  et  $90^0$ , cela signifie des empilements doubles :  $0_2^0$

et  $90^0_2$ . Il est important de noter ici, qu'il n'est pas nécessaire de doubler les orientations a  $0^0$  et a  $90^0$  pour qu'un stratifié soit équilibré. On procède tout de même de cette façon car certains de nos résultats se basent sur des travaux où les auteurs ont utilisé cette démarche (voir [20] et [21] par exemple). D'autre part, Grosset et coll. [22] ont démontré l'efficacité de l'usage de cette forme de représentation par rapport à une fonction de pénalisation afin s'assurer du caractère équilibré des stratifiés. On peut aussi combiner ces deux formes de représentation pour gérer ces contraintes simultanément. Pour un stratifié équilibré et symétrique, cette façon de faire permet de diminuer le nombre de variables nécessaires au quart du nombre total de plis de ce stratifié. Cela a donc l'avantage de restreindre le domaine réalisable du problème en empêchant l'évaluation de solutions ne respectant pas les contraintes. Cependant, cette méthode de gestion des contraintes est propre au problème et ne peut pas s'appliquer à tous les genres de contraintes. Toutefois, comme elle est efficace pour les contraintes de symétrie et d'équilibrage des plis appliquées aux problèmes d'optimisation de structures stratifiées, c'est cette représentation des variables (tableau 4.9 et tableau 4.10) qui est utilisée dans ces travaux pour gérer ces contraintes.

**Tableau 4.9:** Représentation d'un stratifié symétrique de six plis avec trois variables

1 Représentation avec 3 variables (codage)	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_8$
2 Interprétation (décodage)	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_3/\theta_1]_t$

**Tableau 4.10:** Représentation d'un stratifié équilibré de six plis avec trois variables

1 Représentation avec 3 variables (codage)	$[\pm\theta_1/\pm\theta_2/\pm\theta_3]_t$
2 Interprétation (décodage)	$[+\theta_1/-\theta_1/+\theta_2/-\theta_2/+\theta_3/-\theta_3]_t$

Finalement, il est aussi possible d'utiliser des opérateurs de réparation qui servent à rendre réalisable une solution qui ne l'est pas. Ainsi, ces opérateurs modifient une solution irréalisable par rapport à certaines contraintes afin de la projeter dans le domaine réalisable. Par exemple, Le Riche et Haftka [23] introduisent une forme de mutation (*scaling mutation*) qui utilise ce principe afin de modifier une solution tout dépendant de la contrainte qui est violée. Toutefois, comme ces auteurs n'ont obtenu aucun bénéfice en utilisant cette stratégie, nous n'utiliserons ni cet opérateur ni aucun autre opérateur de réparation dans ces travaux.

#### IV.6 Classement des individus

L'étape suivante est le classement des individus dans la population. Lors de cette étape, les individus sont classés en ordre décroissant par rapport à la valeur de leur fonction d'évaluation  $F(x)$ . Donc, après ce classement, l'individu le plus performant, ou celui possédant la plus grande valeur de  $F(x)$ , est situé à la première position tandis que le moins performant est situé à la position  $N$  de la population. Par conséquent, lorsque le programme se termine, la solution de l'optimisation est celle située à la première position. Toutefois, en ingénierie il est souvent utile d'avoir des choix alternatifs au problème d'optimisation. En ce sens, les autres individus de la population finale peuvent servir à fournir des solutions alternatives au problème. L'étape qui suit le classement des individus est la construction de l'ensemble de reproduction  $\mathcal{R}$ .

#### IV.7 Génération de l'ensemble de reproduction

Dans la nature, les organismes d'une population tendent à s'adapter aux changements de leur environnement. Ce processus d'adaptation peut s'étendre sur de longues périodes et est régi par la sélection naturelle. La mécanique sous-jacente à la sélection naturelle est relativement simple et robuste. En effet, face à certains changements plus ou moins brusques de leur environnement, les individus de la population tentent de survivre. De façon globale, il y a des individus qui meurent et d'autres qui survivent. Parmi les survivants, il y a de fortes chances

qu'une quantité de ceux-ci possèdent des attributs génétiques qui ont joué en leur faveur que ceux qui sont morts ne l'avaient pas. Ainsi, comme ils ont survécu, ils peuvent alors se reproduire entre eux et, par le fait même, transmettre leur bagage génétique à leur progéniture. A ce moment, la probabilité que cette progéniture ait reçu les gènes performants des parents est bonne. C'est en répétant ce processus de génération en génération que la population tend à s'améliorer globalement. C'est donc sur ces principes de la sélection naturelle que se base l'algorithme génétique pour orienter la recherche de solutions avantageuses.

Pour simuler ce mécanisme, l'algorithme génétique favorise la reproduction des individus les mieux adaptés à leur environnement par rapport à d'autres qui le sont moins. Pour y arriver, un certain nombre  $r$  de parents seulement est choisi parmi la population pour former l'ensemble de reproduction (figure 4.1 : *Génération de l'ensemble de reproduction*). Ces parents sont sélectionnés aléatoirement parmi la population avec l'imposition d'un biais afin de rendre plus probable le tirage des meilleurs individus, c'est-à-dire ceux ayant la plus grande valeur de la fonction d'évaluation  $F(x)$  (équation (4.2)). Différentes façons peuvent être utilisées afin de déterminer la probabilité de sélection de chacun des individus. Par exemple, on peut répartir les probabilités proportionnellement au poids des qualités de chaque solution par rapport à la somme totale des qualités de la population (roulette) ou en répartissant linéairement les probabilités selon le rang des individus dans la population.

La répartition des probabilités de sélection des individus selon la méthode de la roulette est donnée par l'équation (4.3). Cette méthode utilise directement la proportion que fait la valeur de la fonction objective  $F(x_i)$  (équation (4.2)), d'un individu  $x_i$ , par rapport à la somme de tous les objectifs des  $N$  individus de la population pour déterminer la probabilité  $P_s$  de sélection de cet individu. De cette façon, plus un individu a une forte qualité  $F$  par rapport au reste de la population, plus celui-ci a de chances de se reproduire. Toutefois, comme la sélection se fait aléatoirement, les moins bons individus ont tout de même une chance de faire partie de l'ensemble de reproduction.

$$p_s = \frac{F(x_i)}{\sum_{k=1}^N F(x_k)} \quad (4.3)$$

Une variante de cette méthode est de déterminer la probabilité  $P_s$  de l'individu  $x_i$  selon son rang  $k$  parmi la population. On rappelle ici que, suite au classement des individus (voir section 4.5), les individus de la population sont positionnés pour que le meilleur soit inséré au premier rang et que le moins bon soit au rang  $k = N$ . Par conséquent, la probabilité de sélection d'un individu  $x_i$  est définie selon son rang  $k$  par l'équation (4.4).

$$p_s(x_i) = \frac{2(N - k + 1)}{N(N + 1)} \quad (4.4)$$

Le tableau 4.11 compare les probabilités de sélection des individus d'une population de trois individus ( $N = 3$ ). Par la suite, chaque individu se voit attribuer un intervalle sur une droite de 0 à 1 qui est défini selon sa probabilité. Par exemple, en utilisant la méthode de linéarisation selon le rang (tableau 4.11), les intervalles sont  $[0 \text{ à } 0,50[$  pour le premier individu,  $[0,50 \text{ à } 0,833[$  pour le second et  $[0,833 \text{ à } 1,0]$  pour le dernier. Ainsi, pour faire la sélection d'un parent, on procède à un tirage aléatoire d'un nombre compris entre 0 et 1 et l'intervalle dans lequel ce nombre se situe détermine l'individu qui devient parent.

La méthode de linéarisation est plus efficace que la méthode de la roulette dans certaines situations (voir Gurdal et coll. [24]). En effet, lorsque les individus de la population ont des objectifs similaires, ce qui survient souvent vers la fin de la recherche, la méthode de la roulette différencie moins les individus entre eux que la méthode selon le rang. Comme les objectifs  $f_i(x)$  se ressemblent, ils ont une probabilité  $P_i$  aussi semblable (voir équation (4.3)) ce qui tend à ralentir la recherche. La méthode de linéarisation selon le rang, quant à elle, ne possède pas cet inconvénient, car elle favorise les individus toujours selon la même

probabilité qui dépend seulement du rang de l'individu parmi la population (voir équation (4.4)). Soremekun et coll. [25] utilisent cette dernière méthode pour définir les probabilités de sélection pour générer l'ensemble de reproduction.

Finalement, l'ensemble de reproduction  $R$  est formé de  $r$  couples de parents. Chaque couple est composé de deux parents distincts choisis aléatoirement avec la méthode de sélection. En effet, le croisement de deux parents identiques ne peut que générer une copie de ces parents. Les opérateurs de reproduction agissent alors avec chaque couple de parents de l'ensemble de reproduction afin de produire les enfants.

**Tableau 4.11:** Comparaison entre les deux méthodes de sélection

$x_i$	$F(x_i)$	Roulette selon le rang	
		$P_s$	
1	1000	82,6%	50,0%
2	200	16,5%	33,3%
3	10	0,8%	16,7%

## **IV.8 La reproduction**

L'étape de la reproduction est le moteur de la recherche faite par l'algorithme génétique. C'est par celle-ci que les caractéristiques dominantes des parents sont transmises aux enfants et que de nouveaux individus plus performants sont possiblement créés. Fidèle au principe général qui guide les algorithmes génétiques, la reproduction se fait en se basant sur une mécanique aléatoire. Il existe une grande quantité d'opérateurs de reproduction. En effet, afin de construire un algorithme génétique efficace, il faut souvent concevoir ou utiliser des opérateurs spécialisés pour répondre aux besoins d'une application particulière. De plus, les opérateurs de croisement diffèrent en fonction du type de gène constituant les chromosomes d'un individu. Plus précisément, il existe des opérateurs de croisements applicables à des

chromosomes constitués de gènes représentés par des variables discrètes et d'autres pour des chromosomes constitués de gènes représentés par des variables continues.

Comme il a été mentionné précédemment, c'est à partir de chaque couple de parents  $(P_1, P_2)$  de l'ensemble de reproduction  $\mathcal{R}$  que les opérateurs de reproduction travaillent. Un enfant  $e$  est créé avec chaque couple de parents. Donc, pour créer les  $r$  enfants de l'ensemble  $E$ , il faut utiliser  $r$  couples de parents. Pour des individus représentés par plusieurs chromosomes  $c_i$ , les opérateurs de reproduction sont appliqués indépendamment entre chaque paires de chromosomes respectifs des parents. Par exemple, pour des individus composés de deux chromosomes, le chromosome  $c_1$  de l'enfant  $e(c_1, c_2)$  est généré par le croisement des chromosomes  $c_1$  des parents  $P_1$  et  $P_2$ . Par le fait même, le chromosome  $c_2$  de l'enfant  $e(c_1, c_2)$  est construit par le croisement des chromosomes  $c_2$  des parents  $P_1$  et  $P_2$ . Dans la littérature, des opérateurs de reproduction générant deux enfants sont fréquemment utilisés. Dans ces travaux, nous avons volontairement décidé, pour des raisons pratiques, de ne créer qu'un seul enfant par opération de reproduction. Définissons maintenant ces opérateurs de reproduction applicables aux chromosomes discrets.

### **IV.8.1 Chromosomes discrets**

Prenons un exemple général afin de visualiser les opérateurs de reproduction. Dans cet exemple, chaque individu est composé d'un seul chromosome. Le domaine des gènes de celui-ci est  $\Omega = \{1,2,3\}$  qui représentent respectivement des plis à  $\theta_2^0$ ,  $\pm 45^\circ$  et  $90^\circ$ . Le tableau 4.12 démontre le croisement à un point ( $X1P$ ) d'un couple de parents  $P_1$  et  $P_2$  tirés de l'ensemble de reproduction  $\mathcal{R}$ . Pour créer l'enfant  $e$ , il faut tout d'abord tirer un nombre au hasard afin de déterminer le point de croisement qui est défini par le caractère « | » dans les prochains tableaux. Ce nombre aléatoire est compris entre 1 et  $n_g - 1$ , ou  $n_g$  est le nombre total de gènes du chromosome. L'enfant  $e$  est alors constitué des gènes du parent 1 ( $P_1$ ) précédant le point de croisement et des gènes du parent 2 ( $P_2$ ) suivant le point de

croisement. L'enfant  $e$  généré par le croisement à un point des parent  $[0_2/\pm 45/90_2/0_2/\pm 45/90_2]_s$  et  $[90_2/\pm 45/0_2/90_2/\pm 45/0_2]_s$  est le stratifié  $[0_2/\pm 45/90_2/0_2/\pm 45/90_2]_s$

Ce genre d'opérateur peut prendre différentes variantes. En effet, on peut générer des enfants en tirant plus d'un point de croisement. C'est-à-dire que si on tire deux points de croisement par exemple (X2P), l'enfant portera les gènes qui précèdent le premier point de croisement et ceux qui suivent le second point de croisement du premier parent, et les gènes compris entre les deux points de croisement du second parent (voir tableau 4.13).

**Tableau 4.12:** Opérateur a un point de croisement (X1P)

$P_1$ :	1	2	3	1		2	3	$e$ :	1	2	3	1		2	1
$P_2$ :	3	2	1	3		2	1								

**Tableau 4.13:** Opérateur a deux points de croisement (X2P)

$P_1$ :	1	2		3	1		2	3	$e$ :	1	2		1	3		2	3
$P_2$ :	3	2		1	3		2	1									

Pour des problèmes où l'épaisseur est une variable de l'optimisation, l'ensemble de reproduction peut contenir des couples de parents d'épaisseurs différentes. On rappelle que pour ce type de problème, l'allèle « 0 » représente un pli vide qui est ignoré lors du décodage. Dans le tableau 4.14, les individus de la population sont représentés par huit gènes. Le premier compte deux gènes représentant des plis vides et est donc plus épais que le second qui lui en possède quatre. Lorsque l'on utilise ce genre de représentation, les gènes qui portent l'allèle « 0 » sont placés au début des chromosomes. Cette façon de faire a pour but d'alléger la structure des données informatiques. Par conséquent, le nombre total de gènes  $n_g$  de chaque individu est le même pour toute la population. Ce n'est que le nombre de gène 0 qui fait varier l'épaisseur des stratifiés.

**Tableau 4.14:** Représentation de deux individus d'épaisseurs différentes a l'aide de 8 gènes

$x_i(c_1)$	Codage de $x_i(c_1)$	Décodage de $x_i(c_1)$
1 :	0 0 1 2 3 1 2 3	$[0_2/\pm 45/90_2/0_2/\pm 45/90_2]_s$
2 :	0 0 0 0 3 2 1 3	$[90_2/\pm 45/0_2/90_2]_s$

Dans ce cas, Le Riche et Haftka [23] proposent l'utilisation d'opérateurs de reproduction spécifiques. Le tableau 4.15 définit l'opérateur à un point de croisement à partir du plus épais des parents (X1P-épais). Donc, le croisement se fait à partir du parent le plus épais. Il faut alors que le parent  $P_1$  soit le plus épais des parents. Ensuite, un point de croisement « | » est tiré au hasard à l'intérieur des gènes différents de « 0 » du parent  $P_2$ . Dans cet exemple, la position de croisement est comprise entre 4 et 7, soit entre la quantité de gènes « 0 » et le nombre total de gène moins 1 ( $n_g - 1$ ). L'enfant  $e$  généré est alors composé des gènes précédents le point de croisement de  $P_1$  et des gènes suivant le point de croisement de  $P_2$ . Le tableau 4.16, quant à lui, définit l'opérateur a un point de croisement à partir du plus mince des parents (X1P-mince). Cet opérateur se comporte de la même façon que le précédent sauf que le parent  $P_1$  est le plus mince des deux et que le point de croisement est sélectionné parmi les gènes différents de «0» de  $P_1$ . L'enfant  $e$  généré est aussi composé des gènes précédant le point de croisement de  $P_1$  et des gènes suivant le point de croisement de  $P_2$ . Lorsque les deux parents  $P_1$  et  $P_2$  ne contiennent aucun gène « 0 », ces opérateurs sont identiques aux opérateurs X1P et X2P (voir tableaux 4.12 et 4.13) tout dépendant du nombre de points de croisement de ceux-ci.

**Tableau 4.15:** Opérateur a un point de croisement à partir du plus épais des parents  
(X1P- épais)

$$\begin{array}{l}
 P_1 : 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ | \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \quad e : 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ | \ 3 \ 2 \ 1 \ 3 \\
 P_2 : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 3 \ 2 \ 1 \ 3
 \end{array}$$

**Tableau 4.16:** Opérateur a un point de croisement à partir du plus mince des parents  
(X1P-mince)

$$\begin{array}{l}
 P_1 : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 2 \ | \ 1 \ 3 \quad e : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 2 \ | \ 2 \ 3 \\
 P_2 : 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ | \ 2 \ 3
 \end{array}$$

### IV.8.2 Chromosomes continus

Deux opérateurs de croisement sont utilisés pour des chromosomes continus. Le premier est identique à l’opérateur à un point de croisement X1P du tableau 4.12 qui transmet à l’enfant  $e$  les gènes du premier parent  $P_1$  précédant le point de croisement et ceux du deuxième parent  $P_2$  suivant ce même point. Le second opérateur se nomme croisement arithmétique et réalise une combinaison linéaire des gènes des deux parents  $P_1$  et  $P_2$ , pour générer l’enfant  $e$  (voir les équations (4.5) et (4.6)). Tout d’abord, il y’a tirage d’un nombre aléatoire  $d$  compris entre 0 et 1. Ensuite, chaque gène  $v_k$  de l’enfant  $e$  est défini en fonction de  $d$  et de la valeur des gènes  $v_k$  des parents  $P_1$  et  $P_2$ .

$$\begin{array}{l}
 P_1 = (v_1, \dots, v_K, \dots, v_{ng}) \\
 P_2 = (v_1, \dots, v_K, \dots, v_{ng})
 \end{array} \tag{4.5}$$

$$\begin{array}{l}
 e = (v_1, \dots, v_K, \dots, v_{ng}) \\
 e(v_k) = dp_1(v_k) + (1 - d)p_2(v_k) \quad \forall k \in \{1, \dots, n_g\} \text{ et } d \in ]0,1[
 \end{array} \tag{4.6}$$

## **IV.9 La mutation**

Comme dans la nature, l'algorithme génétique simule des processus de mutation. La mutation est nécessaire afin de diversifier la recherche et de permettre, à l'occasion, d'introduire dans la population des schèmes nouveaux qui n'auraient pas pu être générés par la simple reproduction. En effet, la mutation modifie certains gènes des individus d'une population de façon aléatoire pour les remplacer par d'autres valeurs déterminées aussi aléatoirement. Dans l'algorithme génétique, les opérateurs de mutation interviennent après l'étape de croisement et s'appliquent à l'ensemble d'enfants  $E$  généré par la reproduction (voir figure 4.1 : *Mutation*).

### **IV.9.1 Chromosomes discrets**

La mutation simple est appliquée à certains enfants de l'ensemble  $E$  selon une probabilité  $P_m$ . Lors de la mutation, un gène  $v_k$  d'un certain enfant  $e$  est choisi au hasard. Ce gène est alors modifié aléatoirement par une valeur différente de  $v_k$  appartenant au domaine  $\hat{\Omega} = \Omega_k \setminus v_k$  (voir tableau 4.17). Dans ce tableau, le quatrième gène ( $v_4$ ) est muté et sa valeur change de 3 à 1. Dans cette situation, cela signifie le remplacement d'un pli à  $90_2$  par un pli à  $0_2$ . Lorsque le problème considère des stratifiés d'épaisseurs variables, la mutation ne s'applique que sur les gènes différents de « 0 » (représentant des plis vides) et elle ne peut non plus introduire le gène « 0 » à un des gènes. En résumé, ce type de mutation n'intervient pas sur l'épaisseur des stratifiés, car d'autres opérateurs jouent ce rôle particulier : les opérateurs d'addition et de soustraction de plis. De plus, la mutation ne peut modifier qu'un gène par individu de la population selon la probabilité  $P_m$  de l'opérateur. En contrepartie, il est parfois souhaitable de perturber davantage les gènes de la population en permettant la mutation de plus d'un gène par individu. Ainsi, la mutation multiple est une variante de la mutation simple. Elle s'applique alors à tous les gènes de chaque individu de la population avec une probabilité plus faible que la mutation simple.

Donc, avec ce dernier opérateur, il est possible que plus d'un gène soit muté à l'intérieur d'un même individu.

**Tableau 4.17:** Cas d'une mutation simple

Codage de $e(i)$	Décodage de $e(i)$
Avant : 0 0 1 2 3 1 2 3	$[0_2/\pm 45/90_2/0_2/\pm 45/90_2]_s$
Après : 0 0 1 2 1 1 2 3	$[0_2/\pm 45/0_2/0_2/\pm 45/90_2]_s$

D'autre part, la séquence dans laquelle les orientations sont ordonnées importe sur certaines propriétés du stratifié. La position des gènes à l'intérieur d'un chromosome influence la performance de cet individu. Par exemple, le stratifié  $[0_2/\pm 45/90_2]_s$  possède des propriétés en flexion différentes de celles du stratifié  $[90_2/0_2/\pm 45]_s$ . Par conséquent,

Le Riche et Haftka [23] ont développé un opérateur de permutation permettant de modifier la séquence par laquelle un individu est représenté. Cet opérateur procède à la permutation de deux gènes déterminés aléatoirement parmi les gènes autres que ceux représentant des plis vides, soit ceux portant l'allèle « 0 » dans notre cas (voir tableau 4.18). Cet opérateur est alors appliqué à tous les enfants  $e_i$  de l'ensemble E selon une certaine probabilité.

**Tableau 4.18:** Exemple d'une permutation

Chromosome	Séquence d'empilement
Avant : 0 0 1 2 3 1 2 3	$[0_2/\pm 45/90_2/0_2/\pm 45/90_2]_s$
Après : 0 0 1 3 3 1 2 2	$[0_2/90_4/0_2/\pm 45_2]_s$

### IV.9.2 Chromosomes continus

Pour des problèmes avec des variables continues, il faut respecter le domaine de ces variables lors de la mutation. En effet, il faut remplacer un gène par un autre gène appartenant au domaine  $\hat{\Omega}$ . Pour des variables continues, le domaine des gènes des chromosomes est le même que le domaine des variables ( $\Omega = \hat{\Omega}$ ). Le domaine  $\Omega$  est défini par une borne inférieure  $b_i$  et une borne supérieure  $b_s$  ( $\Omega = [b_i, b_s]$ ). Pour les problèmes d'optimisation de structures stratifiées pour lesquelles on désire obtenir des stratifiées équilibrées, le domaine continu des variables définissant l'orientation des plis est souvent :  $\Omega = [0,90]^0$ . Donc, la mutation uniforme sélectionne aléatoirement un gène  $v_k$  parmi les  $n$  gènes d'un chromosome  $c_j$  ( $c_j = [v_1 \dots, v_k \dots, v_n]$ ) pour le remplacer par une valeur  $v'_k$  choisie aussi aléatoirement à l'intérieur du domaine  $\hat{\Omega}_j$  du chromosome. La mutation non uniforme (voir Michalewicz [26]), quant à elle, détermine la valeur de  $v'_k$  différemment (voir équation (4.7)). Pour muter un gène  $v_k$ , on doit tirer un nombre aléatoire  $l$  valant soit 0 soit 1 afin de déterminer laquelle des équations (4.7) il faut appliquer. La fonction  $\Lambda(t, y)$  est définie à l'équation (4.8). Cette dernière dépend des deux paramètres fixes  $T$  et  $q$  qui sont respectivement le nombre maximal de générations et le degré de non uniformité de la mutation. La variable  $r$  est un nombre réel aléatoire compris entre 0 et 1 et la variable  $t$  est l'âge de la population (génération courante). Cet opérateur a la propriété de générer des mutations réparties uniformément sur l'espace au début de la recherche ( $t$  étant petit) et des mutations réparties sur un espace plus restreint ou local lorsque  $t$  s'approche du nombre maximal de générations  $T$ .

$$v'_k = \begin{cases} v_k + \Lambda(t, b_s - v_k) & \text{si } l = 0 \\ v_k - \Lambda(t, v_k - b_i) & \text{si } l = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\Lambda(t, y) = y \left( 1 - r^{\left(1 - \frac{1}{T}\right)} \right) \quad r \in ]0,1[ \quad (4.8)$$

Les mutations uniformes et non uniformes s'appliquent subséquentement à chaque individu de la population selon une probabilité qui leur est propre. C'est-à-dire que pour chacune de celles-ci, un test est passé à tous les individus de la population afin de savoir si la mutation est appliquée ou non. Si le test est affirmatif, ces opérateurs sélectionnent un gène aléatoirement parmi ceux de l'individu en question et procèdent à la mutation de ce gène. Des variantes de ces opérateurs peuvent aussi être utilisées. Elles consistent plutôt à tester chacun des gènes de chaque individu de la population afin de déterminer si une mutation est effectuée ou non. Ces mutations peuvent alors modifier plus d'un gène d'un même individu. On nomme alors les variantes de la mutation uniforme et non-uniforme, la mutation uniforme multiple et la mutation non-uniforme multiple.

Un autre opérateur de mutation appliqué aux gènes continus force le gène muté à prendre la valeur de la frontière supérieure  $b_i$  ou inférieure  $b_s$  du domaine  $\Omega_k$ . Cet opérateur se nomme l'opérateur de mutation de frontière.

#### **IV.10 Epaisseur variable**

Pour des problèmes où l'épaisseur des stratifiés est une variable du problème, il faut utiliser deux autres opérateurs afin de faire varier le nombre de plis des solutions.

Le Riche et Haftka [23] ont introduit les opérateurs d'addition et de soustraction de plis (voir figure 4.1 : *Addition de plis et Soustraction de plis*). On rappelle que la représentation génétique de stratifiés d'épaisseur variable se fait avec l'utilisation d'un allèle « 0 » définissant un pli vide (voir tableau 4.14). Donc, l'opérateur d'addition de plis, remplace un gène « 0 » par une valeur appartenant au domaine  $\Omega_k \setminus \{0\}$  qui est déterminée aléatoirement. Ce nouveau gène est ajouté à la fin de la séquence, c'est-à-dire adjacent au plan de symétrie du stratifié, car à cet endroit il influence moins sur les propriétés globales du stratifié. Le tableau 4.19 donne un exemple de l'application de l'opérateur d'addition de plis sur un chromosome d'un enfant. Ainsi, l'allèle 1, choisi

aléatoirement à partir du domaine des gènes de ce chromosome ( $\Omega_k = \{1,2,3\}$ ), est attribué au gène le plus à droite du chromosome ( $v_8$  dans ce cas). Un gène représentant un pli vide est aussi retiré et les autres gènes sont décalés d'une position vers la gauche du chromosome. Dans ce cas, l'application de cet opérateur a pour effet d'ajouter un pli double à  $0_2$  adjacent au plan moyen du stratifié.

Par opposition, un opérateur de soustraction de plis est utilisé pour éliminer un des gènes déterminé aléatoirement en le remplaçant par un allèle « 0 » représentant un pli vide. Les autres gènes sont alors déplacés pour que tous les « 0 » soient situés au début du chromosome (voir tableau 4.20). Pour des problèmes où l'épaisseur des stratifiés est variable, les opérateurs d'addition et de soustraction de plis sont appliqués à tous les enfants de l'ensemble  $E$  selon une probabilité qui leur est propre. Finalement, lorsqu'un de ces deux derniers opérateurs est appliqué à un enfant  $e$  donné, il faut procéder à l'addition ou à la soustraction de plis à tous les chromosomes  $c_j$  de cet enfant. Par exemple, si on applique l'opérateur de soustraction de plis à l'enfant  $e$  et que celui-ci est représenté par deux chromosomes  $(c_1, c_2)$ , le premier pour les orientations et le second pour les matériaux, il faut ajouter un gène portant l'allèle « 0 » aux deux chromosomes  $c_1$  et  $c_2$ .

**Tableau 4.19:** Exemple de l'addition d'un pli

Codage de $e(i)$	Codage de $e(i)$
Avant : 0 0 1 2 3 1 2 3	$[0_2/\pm 45/90_2/0_2/\pm 45/90_2]_s$
Après : 0 1 2 3 1 2 3 1	$[0_2/\pm 45/90_2/0_2/\pm 45/90_2/90_2]_s$

**Tableau 4.20:** Exemple de la soustraction d'un pli

Codage de e(i)	Décodage de e(i)
Avant : 0 0 1 2 3 1 2 3	$[0_2/\pm 45/90_2/0_2/\pm 45/90_2]_s$
Après : 0 0 0 1 2 3 2 3	$[0_2/\pm 45/90_2/\pm 45/90_2]_s$

### IV.11 Evaluation des enfants

L'étape qui suit la création et la modification de l'ensemble d'enfants  $E$  est l'évaluation de la performance de ceux-ci. La performance des enfants est calculée de la même façon qui a été définie à la section 4.5. Par conséquent, à chaque génération le coût de calcul  $n_f$ , défini par le nombre d'appel de la fonction d'évaluation ou par le nombre d'individus évalués, est fonction du nombre d'enfants  $r$  compris dans l'ensemble  $E$ . Comme  $r$  est constant, le coût de calcul du programme, en fonction du nombre de génération effectué  $t$ , est donné par l'équation (4.9).

$$n_f = N + t_r \tag{4.9}$$

### IV.12 Construction de la nouvelle génération

Avec les valeurs de performances des enfants de l'ensemble  $E$ , il est possible de construire la nouvelle génération  $P_{t+1}$ . Pour ce faire, le principe de sélection élitiste est souvent utilisé. Cette technique consiste à transmettre à la nouvelle génération le meilleur individu de la génération précédente et de compléter la population par les  $r$  enfants générés (ou  $r = N - 1$ ). Dans ces travaux, on utilise une variante de cette méthode, étudiée par Soremekun [27] qui est le multi élitisme. Cette méthode consiste à construire la nouvelle génération en conservant plutôt les  $N_k$  meilleurs individus de la population et en complétant la population avec les  $r$  enfants générés (ou  $r = N - N_k$ ). De plus, un enfant est inclus dans la nouvelle génération seulement s'il n'existe pas déjà parmi celle-ci. Cette façon de faire empêche la présence d'individus identiques dans la population et

permet une diversification des solutions et la recherche de plusieurs solutions performantes différentes. Si l'ensemble  $E$  ne permet pas de compléter la nouvelle génération, c'est-à-dire que  $|P_{t+1}| < N$ , les  $N - |P_{t+1}|$  individus manquant sont sélectionnés parmi les individus de la génération précédente ( $P_t$ ) tout en respectant le critère de diversité. Cette technique est une forme générale du principe élitiste. En effet, utiliser un multi-élitisme avec  $N_k$  valant 1 est équivalent à utiliser simplement l'élitisme standard.

Le contrôle de la diversité de la population se fait différemment en fonction du domaine des gènes des chromosomes. En effet, lorsque deux individus sont représentés par des gènes appartenant à un domaine discret  $\Omega_d$ , il suffit qu'un seul gène soit différent pour considérer ces deux individus comme distincts. Il faut toutefois utiliser un autre critère pour différencier deux individus lorsque ceux-ci sont représentés par des gènes appartenant à un domaine continu  $\Omega_c$ . En effet, comme les gènes peuvent prendre n'importe quelle valeur continue appartenant à  $\Omega_c$ , cela implique donc que deux gènes peuvent être différents d'un point de vue mathématique, mais identiques d'un point de vue pratique. Dans notre cas, lorsque  $\Omega_c$  est le domaine des gènes représentant les orientations des plis d'un stratifié, on considère qu'une variation d'un centième sur un seul gène n'est pas assez significative pour que ces deux individus soient traités comme distincts. De plus, dans certains cas, la position relative des gènes dans le chromosome n'importe pas sur l'évaluation des individus. C'est-à-dire que, pour certains problèmes, l'empilement des plis n'a pas d'effet sur l'objectif. Cela se produit lorsque le problème d'optimisation traite des propriétés équivalentes du stratifiés  $E_x$ ,  $G_{xy}$  et  $\nu_{xy}$  par exemple.

A ce moment, l'empilement n'affecte pas ces propriétés, car elles sont calculées à partir de la matrice  $[A]$  (voir équations (2.32) à (2.35)) qui est indépendante de la position des plis dans le stratifié. Pour ces raisons, on utilise l'équation (4.10) qui sert à calculer

$\eta(x_1, x_2)$ , la distance entre les deux individus  $x_1$  et  $x_2$ . Cette distance est calculée à partir des gènes  $g_k$  respectifs des individus  $x_1$  et  $x_2$ . On considère donc les individus  $x_1$  et  $x_2$  comme étant identiques si  $\eta$  est inférieur ou égale à une certaine valeur nominale  $\Delta$  (voir équation (4.11)). Dans ces travaux,  $\Delta$  a été fixé à 0,8.

$$\eta = (x_i, x_i) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_g} (X_1(v_k) - X_2(v_k))^2} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \eta \leq \Delta \quad , \text{ alors} & \quad X_1 = X_2 \\ \text{Sinon} & \quad X_1 \neq X_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

### **IV.13 Convergence**

Afin de mettre fin à l'algorithme génétique, différents critères d'arrêt peuvent être utilisés. Le plus simple est de fixer un nombre de générations maximal  $T$  après lequel la recherche se termine (*Gen. max*). Lorsqu'une solution optimale  $F_\beta$  est connue pour un problème donné, on peut aussi arrêter l'algorithme après l'atteinte d'un optimum pratique à cette solution (*Opt. prat.*). Un optimum pratique est une solution dont l'objectif  $F(x)$  est à l'intérieur d'une certaine distance  $\psi$  de l'objectif de l'optimum connu  $F_\beta$  (voir équation (4.12)). Lorsque cette méthode est utilisée, il est souvent prudent de définir une limite maximale de générations afin de mettre fin à l'algorithme s'il n'arrive pas à trouver cet optimum pratique.

$$\frac{|F_\beta - F(x)|}{F_\beta} \leq \psi \quad (4.12)$$

Un autre critère d'arrêt peut aussi être utilisé. Celui-ci vérifie la création de nouvelles solutions plus performantes parmi la population. Ainsi, si le meilleur individu de la population reste inchangé pendant un nombre donné  $t_n$  de générations, on considère que

l'algorithme a convergé et que cette meilleure solution est l'optimum de cette recherche (*Pas chang.*). Le tableau 4.21 résume les critères d'arrêt détaillé dans cette section.

**Tableau 4.21:** Critères d'arrêt

Nom	Définition
<i>Gén. max</i>	A $t = T$
<i>Opt. prat.</i>	Atteinte d'un optimum pratique ou après $t = T$
<i>Pas chang.</i>	Après $t_n$ générations sans amélioration du meilleur individu

Au cours de ce chapitre, une approche d'optimisation basé sur les principes des algorithmes génétiques a été présenté. Pour la résolution d'une série de problèmes d'optimisation reliés au design de structures composites stratifiées.

# Chapitre 5

Résultats et interprétation

## V.1 Introduction

Dans ce chapitre l'implantation du programme élaboré sur la base d'Algorithme Génétique est faite pour la détermination de la résistance maximale au phénomène de flambage avec optimisation de la configuration architecturale des structures stratifiées. Les résultats obtenus sont analysés et interprétés.

## V.2 Formulation du problème

Une plaque rectangulaire composite soumise à une charge bi-axiale de compression tel que représenté sur la (Figure 5.1) est considéré pour cette étude. La condition limite est appliquée simplement appuyée sur les quatre côtés de la lame. Des séquences symétriques d'empilement sont supposées afin d'éliminer l'effet de couplage. Le nombre des plis et l'épaisseur sont maintenus constants et la séquence d'empilement est modifiée de manière optimale pour maximiser la résistance au flambage.

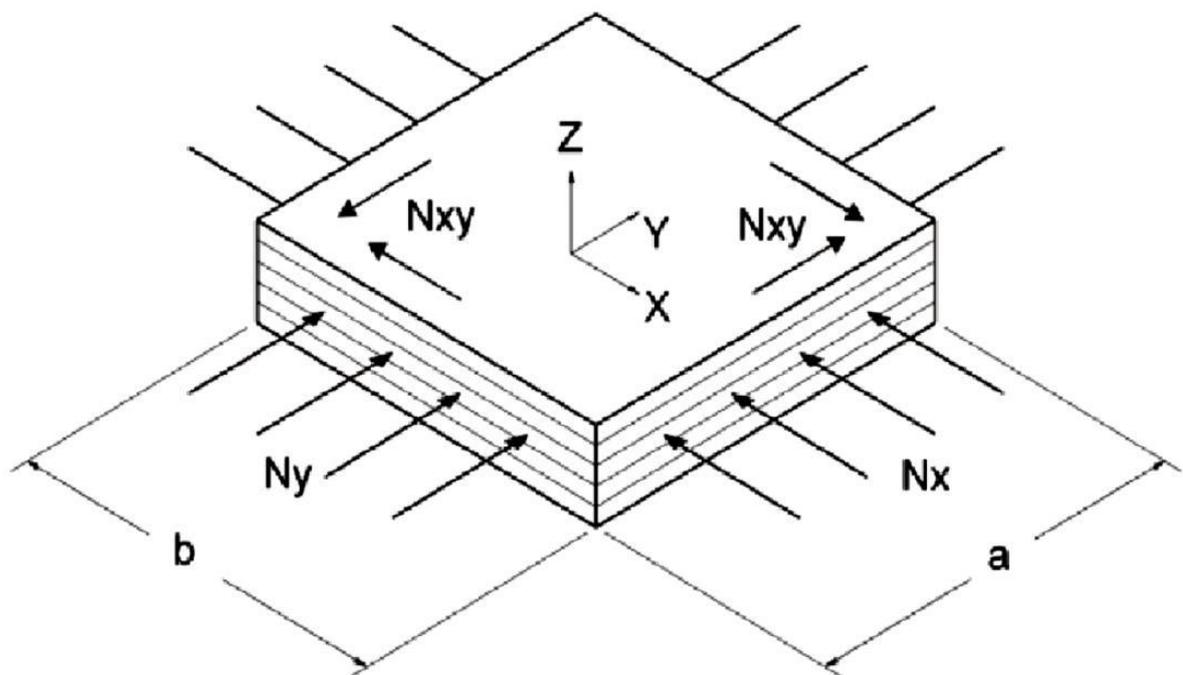


Figure 5.1: Géométrie de la plaque

### V. 3. Plaque stratifiée orthotrope

Pour la plaque stratifiée orthotrope simplement supportée, soumise à une compression uniforme sur chaque coté, de résultantes  $N_x$  et  $N_y$  aucune charge latérale n'étant exercé [12].

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 (m^4 D_{11} + 2m^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22})}{a^2 (m^2 + \alpha n^2 R^2)} \quad (5.1)$$

où:

$N_{cr}$  : La charge critique de flambement correspondant aux valeurs de m et n

$R = \frac{a}{b}$  : Est le rapport longueur sur largeur de la plaque

$m$  : Nombre de demi-onde sinusoïdale dans la direction parallèle au chargement

$n$  : Nombre de demi-onde sinusoïdale dans la direction perpendiculaire au chargement

$b$ : est le côté de la plaque perpendiculaire ou chargement

$a$ : est le côté de la plaque parallèle ou chargement

## V. 4 Procédure d'optimisation

### V.4.1 Algorithme Génétique Simple

Un algorithme génétique simple est appliqué pour optimiser la séquence d'empilement de sorte que, pour maximiser la résistance au flambage. Il fonctionne avec les opérateurs comme la sélection, la croisée et la mutation d'évoluer une solution. La reproduction ou l'opérateur de sélection est le premier opérateur appliqué sur la population. Les chromosomes plus sains de la population actuelle sont choisis pour être les parents à Crossover et produisent la progéniture. Sur de nombreux opérateurs de reproduction existants, la sélection de la roue de la roulette, l'un de l'opérateur le choix le plus largement utilisé est adopté dans ce travail. Crossover est un opérateur génétique qui combine deux chromosomes parents de façon à

produire les nouveaux chromosomes (progéniture). En général, les nouveaux chromosomes peuvent être mieux que les deux parents car il prend les meilleures caractéristiques de leurs parents. Crossover est eu lieu sur la base d'une probabilité définie par l'utilisateur. [ 28]

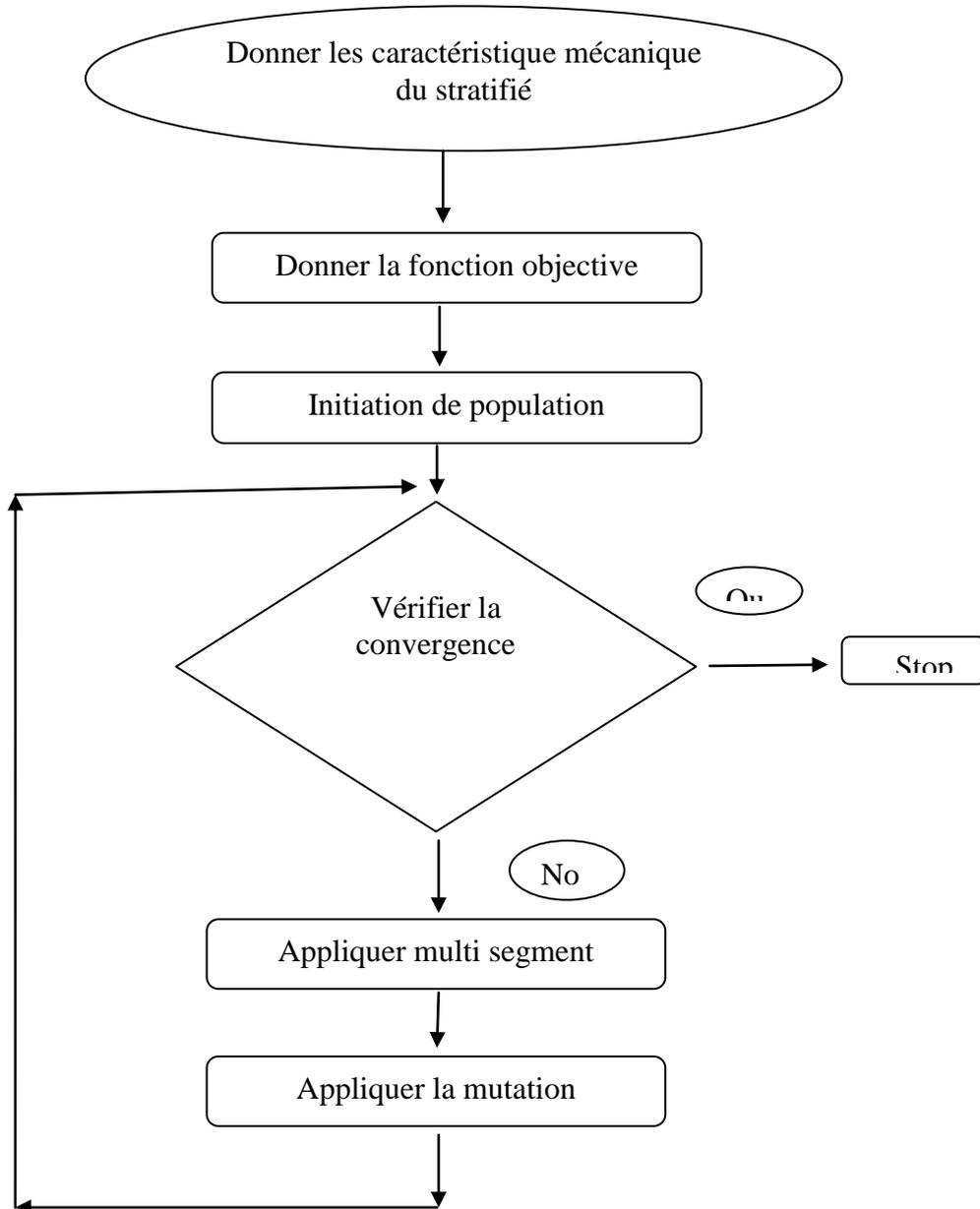


Figure 5.2 : Diagramme d'un algorithme génétique simple

## V.5 Résultats et discussion

On considère une plaque composite stratifiée Carbone/Epoxy simplement supportée sur les quatre côtés dont les dimensions et caractéristiques mécaniques sont représentés ci-dessous:

Longueur (m)	Largeur (m)	Epaisseur (mm)	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
$a = b \cdot R$	$b=1$	0.5	148	10.5	5.61	0.3

L'objectif est d'optimiser la forme architecturale la plus résistante au phénomène de flambement de la plaque sachant qu'elle est soumise à :

## V. 6 Une compression uni-axiale

Dans le cas d'une compression uni-axiale suivant x, nous avons  $\alpha = 0$  l'expression (5.1) devient [12]:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{m^2 a^2} [m^4 D_{11} + 2m^2 R^2 (D_{12} + 2D_{66}) + R^4 D_{22}] \quad (5.2)$$

Le Tableau 5.1 Représente les résultats obtenus pour les charges critiques de flambement et l'angle d'orientation des plis optimal pour une compression uni-axiale en fixant  $n=1$ ,  $m=1$  et en variant la valeur de  $R$  de 1 à 4.

Tableau 5.1: Charges critiques de flambement.

Modèle utilisée	Nombre des plis	R	$N_{cri}$ (N/m)	m	n	$\theta$ (°)
Eq. (6)	2	1	48.5467	1	1	45
	3		48.5473			
	4		48.5470			
	5		48.5428			
	2	2	269.0704			65
	3		269.0576			
	4		269.0624			
	5		268.9758			
	2	3	1268.102			90
	3		1268.082			
	4		1268.080			
	5		1267.640			
	2	4	3968.656			
	3		3968.634			
	4		3968.647			
	5		3968.126			

L'analyse des résultats obtenus montre que la charge critique de flambement pour une compression uni-axiale d'un stratifié est obtenue pour une valeur d'angle d'orientation pour tous les plis, et elle ne varie pas malgré la variation de nombre de plis, pour : R donné, n=1 et m=1.

La figure 5.3 illustre la variation de la charge critique de flambement en fonction du nombre de plis

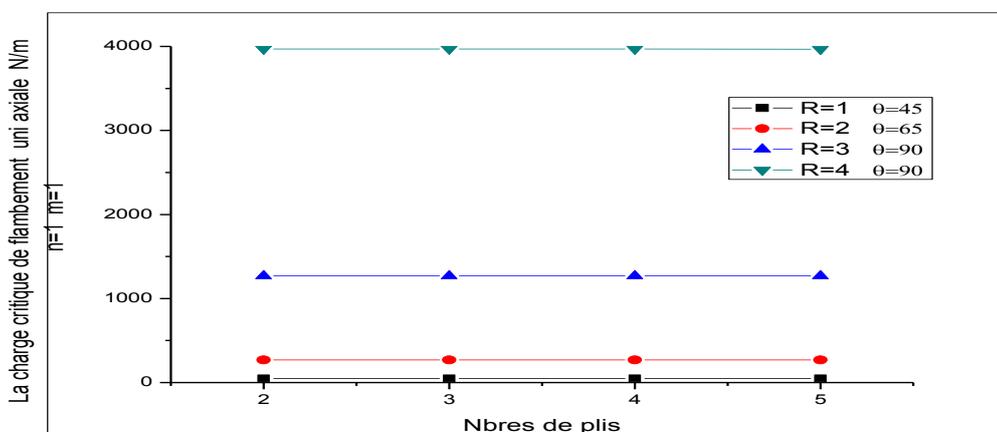
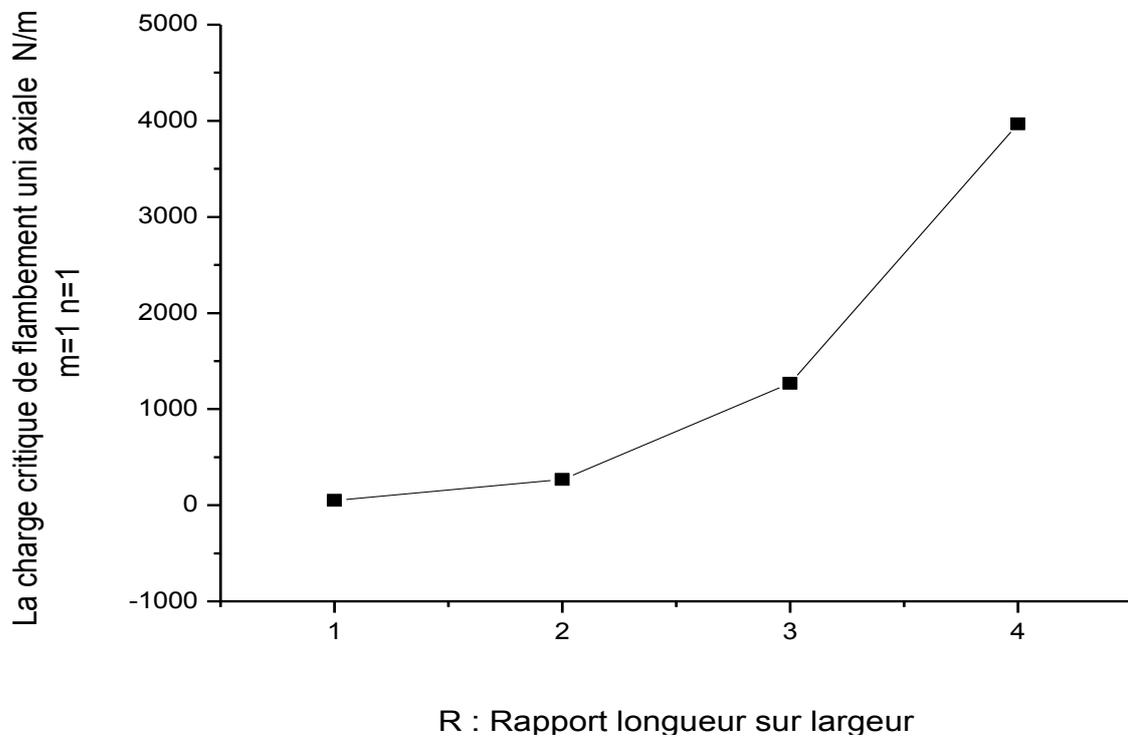


Figure 5. 3: la variation de la charge critique de flambement uni axiale en fonction de nombre de plis

Pour une compression uni-axiale avec  $R$  fixe la charge critique de flambement ne varie pas malgré la variation de nombre de plis, tout en gardant le même angle d'orientation des plis, pour  $R$  donné.

La figure 5.4 montre la variation de la charge critique de flambement uni-axial en fonction du rapport  $R$  (Longueur/Largeur).



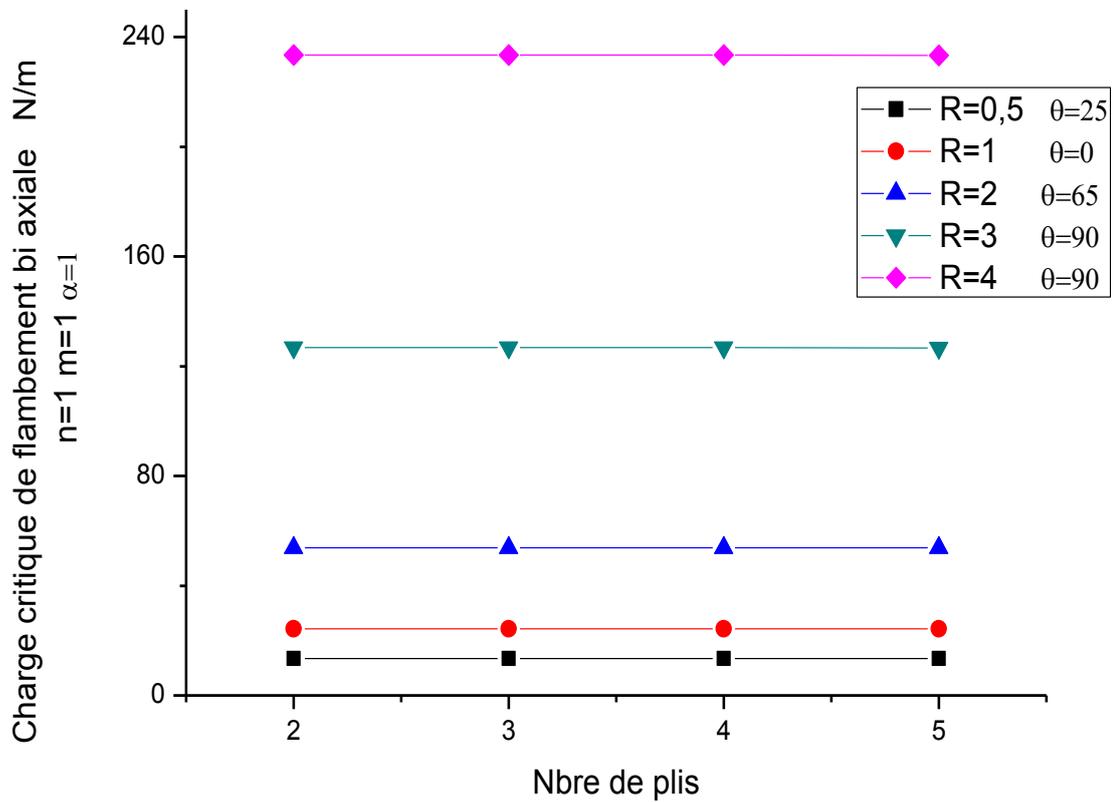
**Figure 5.4:** Variation de la charge critique de flambement uni-axial en fonction de  $R$

Le **Tableau 5.2** présente les résultats obtenus de la charge critique de flambement et l'angle d'orientation des plis pour une compression bi-axia, avec :  $n=1$  ;  $m=1$  ;  $\alpha=1$  et en variant la valeur de R

Modèle utilisée	Nombre des plis	R	$N_{cri}$ (N/m)	m	n	$\theta$ (°)	A
Eq. (5)	2	0.5	13.4535	1	1	25	1
	3		13.4533				
	4		13.4517				
	5		13.4496				
	2	1	24.2738			0	
	3		24.2737				
	4		24.2734				
	5		24.2633				
	2	2	53.8140			65	
	3		53.8133				
	4		53.8128				
	5		53.7993				
	2	3	126.809			90	
	3		126.808				
	4		126.807				
	5		126.669				
	2	4	233.450				
	3		233.442				
	4		233.446				
	5		233.367				

L'analyse des résultats montre que la charge critique de flambement pour une compression bi-axial ne varie pas malgré la variation de nombre de plis, ainsi que les angles d'orientations des plis prennent la même valeur pour  $n=1$  ;  $m=1$  et  $\alpha=1$  et R donné.

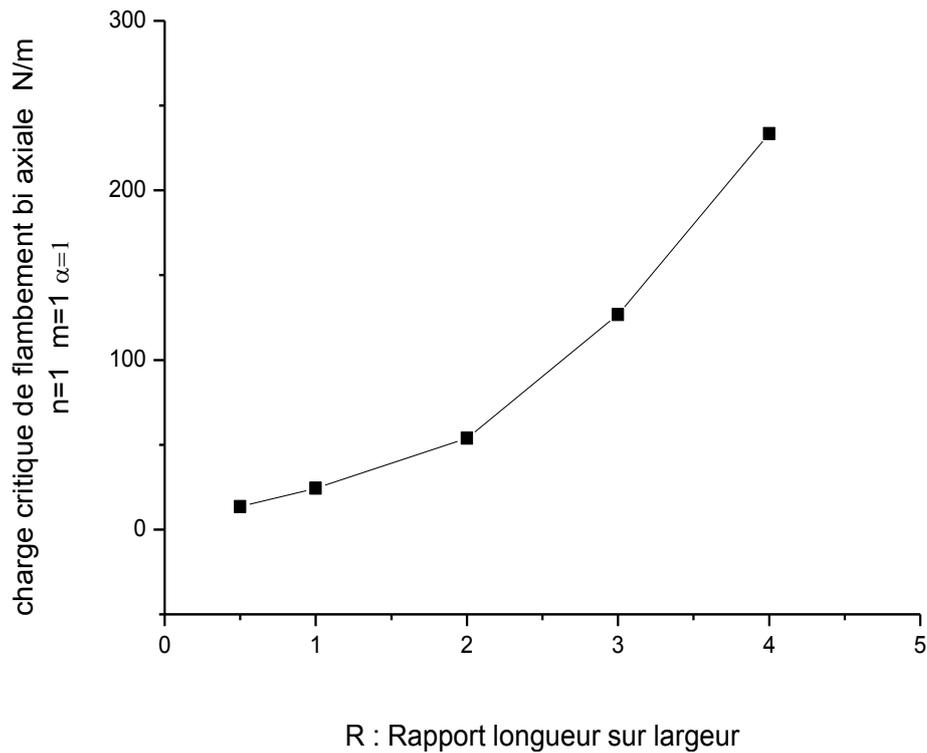
La **Figure 5.5** illustre la variation de la charge critique de flambement bi-axiale en fonction du nombre de plis.



**Figure 5.5** : La variation de la charge critique de flambement bi-axiale en fonction du nombre de plis.

Pour  $n=1$ ,  $m=1$  la charge critique de flambement d'une compression bi-axiale et R donné ne varie pas malgré la variation de nombre de plis qui prennent de même direction.

La Figure 5. 6 montre la variation de la charge critique de flambement bi-axial en fonction de la variation de R .



**Figure 5. 6 :** La variation de la charge critique de flambement bi-axial en fonction de R.

On observe que pour  $n=1$  et  $m=1$  La charge critique de flambement bi-axial devient plus intense pour des valeurs de R croissante et les angles d'orientations des plis prennent la même valeur.

Le Tableau 5.3 présente les résultats obtenus pour les charges critiques de flambement et les angles d'orientation des plis optimaux pour une compression bi-axiale en fixant  $n=1$ ,  $m=1$ ,  $R=1$  pour  $\alpha=2$  et  $3$ .

**Le Tableau 5.3:** Charge critique de flambement pour  $n=1$ ,  $m=1$ ,  $R=1$  avec  $\alpha=2$  et  $3$ .

Modèle utilisée	Nombre des plis	R	$N_{cri}$ (N/m)	m	n	$\theta$ (°)	A
Eq. (5)	2	1	16.1825	1	1	45	2
	3		16.1825				
	4		16.1821				
	5		16.1751				
	2		12.1369				
	3		12.1368				3
	4		12.1821				
	5		12.1299				

On remarque que pour  $n=1$ ,  $m=1$ ,  $R=1$ , la charge critique de flambement dans le cas d'une compression bi-axiale devient plus faible si on augmente le rapport de charge.

La Figure 5.7 . illustre la variation de la charge critique de flambement bi-axial en fonction de rapport de charge de compression ( $\alpha = \frac{N_x}{N_y}$ )

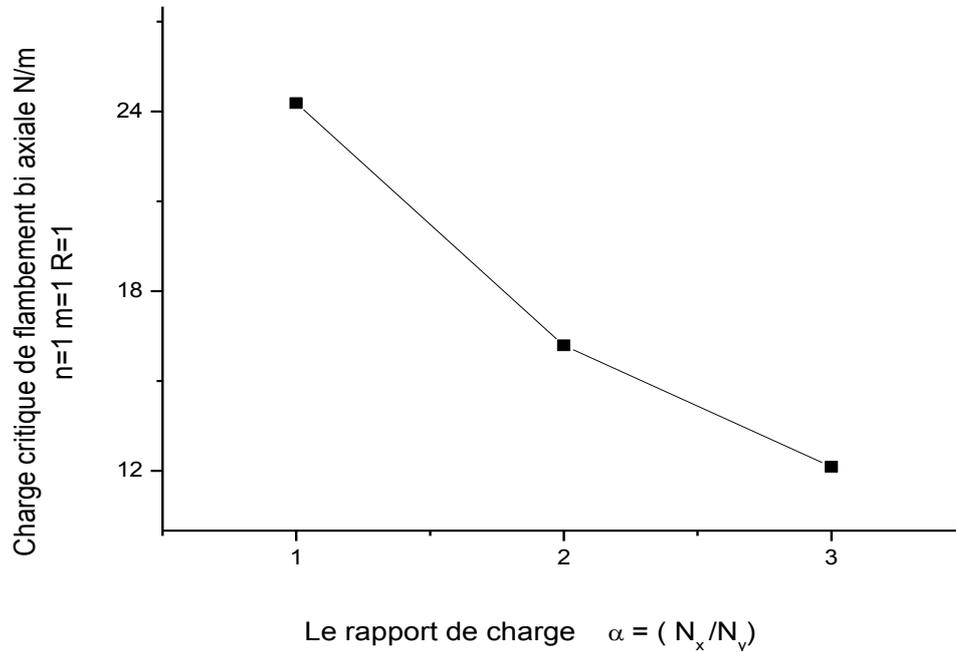


Figure 5.7 : La variation de la charge critique de flambement bi-axial en fonction de rapport de charge de compression ( $\alpha = \frac{N_x}{N_y}$ )

### V.7 Synthèse:

L'implantation de l'approche d'Algorithme Génétique (AG) a été faite pour la détermination de la configuration architecturale des structures stratifiées soumises aux chargements mécaniques axiale et bi-axiale du point de vue résistance au flambement.

Le programme élaboré à cet effet nous a permis de déterminer la configuration architecturale optimale en fonction d'un certain nombre de facteurs: du rapport géométrique, nombre et orientations des plis) pour l'obtention d'une résistance maximale au phénomène de flambage des structures composites stratifiées.

Conclusion

générale

## **Conclusion générale**

L'objectif de cette étude est d'optimiser la forme architecturale la plus résistante au phénomène de flambement indésirable. Pour ce faire, nous avons appliqué la méthode des algorithmes génétiques (A.G.). C'est une technique qui vise à obtenir une solution approchée à un problème d'optimisation lorsqu'il n'existe pas de méthode exacte (ou que la solution est inconnue) pour résoudre un problème en un temps raisonnable.

Un programme a été élaboré en utilisant le logiciel MATLAB.

Ce programme optimise la forme architecturale d'un stratifié la plus résistante au flambement en calculant et optimisant les angles d'orientations des fibres, ainsi qu'il calcule et détermine les efforts linéaires de flambage dans les cas uni-axiale et bi-axiale.

A partir des résultats obtenus les conclusions suivantes sont déduites:

### **Cas d'une compression uni-axiale :**

➤ Pour une compression uni-axiale avec  $R$  fixe la charge critique de flambement ne varie pas malgré la variation de nombre de plis, tout en gardant le même angle d'orientation des plis pour un  $R$  donné.

➤ Ainsi que la relation entre la charge critique  $N$  de flambement et  $R$  est une relation directe plus  $R$  augmente  $N$  augmente.

### **Cas d'une compression bi-axiale :**

➤ La charge critique de flambement pour une compression bi-axiale ne varie pas malgré la variation de nombre de plis, ainsi que les angles d'orientations des plis prennent la même valeur pour :  $n=1$  ;  $m=1$  et  $\alpha=1$  et  $R$  donné.

➤ Pour  $n=1$  et  $m=1$  La charge critique de flambement bi-axiale devient plus intense pour des valeurs de  $R$  croissantes et les angles d'orientations des plis prennent la même valeur.

➤ Pour  $n=1$  ,  $m=1$  ,  $R=1$  , nous avons déduit que la charge critique de flambement pour une compression bi-axiale devient plus faible si on augmente le rapport de charge.

➤ Les perspectives d'étude qui peuvent être menées à la suite de ce travail concernent des études qui tiennent en compte l'influence du facteur thermique sur le flambement des structures composites stratifiées.

# Bibliographie

The word 'Bibliographie' is rendered in a bold, sans-serif font. Each letter is filled with a different color from a rainbow spectrum, starting with purple for 'B', transitioning through red, orange, yellow, green, and blue, and ending with purple for 'e'. The letters are positioned on a white surface, casting a soft, grey shadow to the left and slightly forward, giving the text a three-dimensional appearance.

## Bibliographie

- [1] Le Riche, R., & Haftka, R. T. (1993). Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithm. *AIAA journal*,31(5), 951-956.
- [2] Soremekun, G., Gürdal, Z., Haftka, R. T., & Watson, L. T. (2001). Composite laminate design optimization by genetic algorithm with generalized elitist selection. *Computers & Structures*, 79(2), 131-143.
- [3] Aymerich, F., & Serra, M. (2008). Optimization of laminate stacking sequence for maximum buckling load using the ant colony optimization (ACO) metaheuristic. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 39(2), 262-272.
- [4] Rama Mohan Rao, A., & Arvind, N. (2005). A scatter search algorithm for stacking sequence optimisation of laminate composites. *Composite Structures*,70(4), 383-402. Xie, H. (2001). Sebaey, T. A., Lopes, C. S., Blanco, N., & Costa, J. (2011). Ant colony optimization for dispersed laminated composite panels under biaxial loading. *Composite Structures*, 94(1), 31-36.
- [5] Erdal, O., & Sonmez, F. O. (2005). Optimum design of composite laminates for maximum buckling load capacity using simulated annealing. *Composite Structures*, 71(1), 45-52
- [6] Nicholas, P. E., Padmanaban, K. P., & Sofia, A. S. (2012). Optimization of Dispersed Laminated Composite Plate for Maximum Safety Factor Using Genetic Algorithm and Various Failure Criteria. *Procedia Engineering*, 38, 1209-1217.
- [7] Rama Mohan Rao, A., & Arvind, N. (2005). A scatter search algorithm for stacking sequence optimisation of laminate composites. *Composite Structures*,70(4), 383-402. Xie, H. (2001). Sebaey, T. A., Lopes, C. S., Blanco, N., & Costa, J. (2011). Ant colony optimization for dispersed laminated composite panels under biaxial loading. *Composite Structures*, 94(1), 31-36.
- [08] BRUSH, D .O.Almroth, buckling of Bars, plates and Shells, McGraw hill, New yourk, 1975
- [09] Timoshenko and w, theory of Elastic stability, McGraw Hill, New York, end ed.196
- [10] Chajes ,A.,Principles of structural stability theory , Prentice Hall New Jersey, 1974
- [11] Rubinstein,M.F .,strctural systeme-statics,dynamics,and stability, New jersey,1970
- [12] J.-M. Berthelot. Matériaux composites - Comportement mécanique et analyse des structures. Masson, 2 édition, 1996
- [13] M.W. HYER. Stress analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials. McGraw-Hill,1998.
- [14] R.M. JONES. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis, 2<sup>e</sup> édition, 1999.
- [15] Goldberg, D.E., Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning.

- 
- Addison-Wesley : Reading, MA, 1989.
- [16] Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press : Ann Arbor, 1975.
- [17] L. Davis, *Handbook of Genetic Algorithms*. Van Nostrand Reinhold : New York, 1991.
- [18] Z. Michalewicz, *Genetic Algorithms*. Springer-Verlag : New York, 1992.
- [19] M.A. LUERSEN, R. LE RICHE et F. GUYON. A constrained, globalized, and bounded Nelder-Mead method for engineering optimization . *Struc Multidisc. Optim.*, 27 :43–54,2004.
- [20] R. LE RICHE et J. GAUDIN. Design of dimensionally stable composites by evolutionary optimization . *Composite Structures*, 41 :97–111, 1998.
- [21] R. LE RICHE et R.T. HAFTKA. Improved genetic algorithm for minimum thickness composite laminate design . *Composite Engineering*, 5(2) :143–161, 1995.
- [22] L. GROSSET, S. VENKATARAMAN et R.T. HAFTKA. Genetic optimization of two-material composite laminates . Dans *16th Annual Technical Conference American Society for Composites*, septembre 2001.
- [23] R. LE RICHE et R.T. HAFTKA. Improved genetic algorithm for minimum thickness composite laminate design . *Composite Engineering*, 5(2) :143–161, 1995.
- [24] Z. GURDAL, R.T. HAFTKA et P. HAJELA. *Design and optimization of laminated composite materials*. Wiley-Interscience, 1998.
- [25] G. SOREMEKUN, Z. GURDAL, R.T. HAFTKA et L.T. WATSON. Composite laminate design optimisation by genetic algorithm with generalized elitist selection . *Computers and Structures*, 79 :131–143, 2001.
- [26] Z. MICHALEWICZ. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. Springer-Verlag, 1992.
- [27] G. Soremekun. « *Genetic algorithms for composite laminate design and optimization* ». *Thèse de maîtrise, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997*.
- [28] J. Herecia, R.T. Haftka, P. Weaver, M.I. Friswell, Lay-up: optimization of composite stiffened panels using linear approximations in lamination space. *AIAA J* 46, 2387–2391 (2008)

Annexe

## Annexe A

```

function [Ncr]= Optim2(x)
a=1;
NU12=0.30;
E1=148e9;
E2=10.5e9;
G12=5.61e9;
n=length(x);
H=0.0005;
R=1;
M=1;
h=H/n;
%n=nombre de plis)
%xx=[];
D=zeros(3,3);
h11=0;
for j=1:n+1;
z(j)=(-H/2)+h11;
h11=h+h11;
end
%ReducedStiffness This function returns the reduced stiffness
% matrix for fiber-reinforced materials.
% There are four arguments representing four
% material constants. The size of the reduced
% stiffness matrix is 3 x 3.
NU21 = NU12*E2/E1;
Q=[E1/(1-NU12*NU21) NU12*E2/(1-NU12*NU21) 0;NU12*E2/(1-NU12*NU21) E2/(1-
NU12*NU21) 0;0 0 G12];
for ii=1:length(x);
theta=x(ii);
%function y = Qbar(Q,theta)
%Qbar This function returns the transformed reduced
% stiffness matrix "Qbar" given the reduced
% stiffness matrix Q and the orientation
m = cos(theta*pi/180);
n = sin(theta*pi/180);
T = [m*m n*n 2*m*n ; n*n m*m -2*m*n ; -m*n m*n m*m-n*n];
Tinv = [m*m n*n -2*m*n ; n*n m*m 2*m*n ; m*n -m*n m*m-n*n];
QQ = Tinv*Q*T;
dk=z(ii+1)^3-z(ii)^3;
for i=1:3;
for j=1:3;
D(i,j)=D(i,j)+dk*QQ(i,j);
end
end
end
D=D/3;
Ncr=-
((pi/(M*a))^2)*((D(1,1)*M^4)+(2*((M*R)^2)*(D(1,2)+2*D(3,3)))+D(2,2)*(R^4))
end

```

## Annexe B

```

function [Ncr]= Optim222(x)
a=1;
NU12=0.30;
E1=148e9;
E2=10.5e9;
G12=5.61e9;
n=length(x);
H=0.005;
N=1;
P=1;
R=1;
M=1;
h=H/n;
%n=nombre de plis)
%xx=[];
D=zeros(3,3);
h11=0;
for j=1:n+1;
z(j)=(-H/2)+h11;
h11=h+h11;
end
%ReducedStiffness This function returns the reduced stiffness
% matrix for fiber-reinforced materials.
% There are four arguments representing four
% material constants. The size of the reduced
% stiffness matrix is 3 x 3.
NU21 = NU12*E2/E1;
Q=[E1/(1-NU12*NU21) NU12*E2/(1-NU12*NU21) 0;NU12*E2/(1-NU12*NU21) E2/(1-
NU12*NU21) 0;0 0 G12];
for ii=1:length(x);
theta=x(ii);
%function y = Qbar(Q,theta)
%Qbar This function returns the transformed reduced
% stiffness matrix "Qbar" given the reduced
% stiffness matrix Q and the orientation
m = cos(theta*pi/180);
n = sin(theta*pi/180);
T = [m*m n*n 2*m*n ; n*n m*m -2*m*n ; -m*n m*n m*m-n*n];
Tinv = [m*m n*n -2*m*n ; n*n m*m 2*m*n ; m*n -m*n m*m-n*n];
QQ = Tinv*Q*T;
dk=z(ii+1)^3-z(ii)^3;
for i=1:3;
for j=1:3;
D(i,j)=D(i,j)+dk*QQ(i,j);
end
end
end
D=D/3;
Ncr=-
(pi^2/(a^2*(M^2+P*(N*R)^2)))*((D(1,1)*M^4)+(2*((M*N*R)^2)*(D(1,2)+2*D(3,3)))+D(2,
2)*(R*N)^4));
end

```