

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE

Pour

l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Mécanique physique

Présentée Par: **GOUASMI Sadek**

Modélisation numérique du comportement en rupture des structures en matériaux composites gradués.

Soutenue le 17/02/2016 devant la commission d'examen :

BOUKHOULDA Farouk Benallal	Professeur	UDL-SBA	Président
REFASSI Kaddour	Professeur	UDL-SBA	Examineur
SERIER Zouaoui	Professeur	USTO-Oran	Examineur
OUHAD Wahid	M.C.A	C.U-Ain Témouchent	Examineur
BOUZIANE Mohamed Mokhtar	M.C.A	U.Mascara	Examineur
MEGUENI Abdelkader	Professeur	UDL.SBA	Directeur de thèse
FEKIRINI Hamida	M.C.A	UDL.SBA	Invitée

2015-2016

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides (LMSS), Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, sous la direction du **Pr A. Megueni**. Je le remercie chaleureusement de m'avoir accueilli au sein de leur groupe de recherches et de m'avoir accordé leur confiance. Etre en leur compagnie, durant la période de recherche dans le domaine des matériaux, a été un réel plaisir.

Merci à mon encadreur **Mr A. Megueni** d'être toujours resté à mon écoute et de m'avoir toujours orienté et soutenu. Je lui suis aussi extrêmement reconnaissant pour sa patience et l'humour dont il a su faire preuve à mon égard afin que je me surpasse. Merci aussi pour sa disponibilité et ses conseils précieux, son expérience, son assistance ainsi que son efficacité qui m'a été d'un grand secours.

Je remercie les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail, le **Professeur. F.B.Boukhoulda** pour m'avoir fait l'honneur de présider ce Jury, les **Professeurs K.Refassi, Z.Serier**, les **Maitres de Conférences W.Oudad** et **M.Bouziane** pour avoir accepté la charge d'examineurs. Merci aussi à M^e FEKIRINI Hamida **Maitres de Conférences** pour avoir accepté l'invitation à ma soutenance.

Je tiens aussi à remercier **Mr A.S Bouchikhi** et **Mr A.Sahli** pour le temps précieux qu'ils m'ont consacré à plusieurs reprises. Je souhaite exprimer toute ma sympathie à mes collègues du Laboratoire LMSS. Merci aussi à **K Zouggar** pour ses interventions. Enfin, je souhaite remercier l'ensemble des membres du laboratoire pour leur accueil et à tous qui ont contribué à faire que cette expérience soit enrichissante et très agréable.

Sommaire

Liste des notations.....	<i>i</i>
Liste des figures.....	1
Liste des tableaux.....	5
Résumés.....	6
Introduction générale.....	7

Chapitre I: Les matériaux à gradient de propriétés

I.1 Introduction	10
I.2 Historique	10
I.3 Idée générale.....	11
I.4 Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	12
I.5 Domaine d'application.....	14
I.6 Elaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	15
I.7 Lois régissant la variation des propriétés d'un FGM.....	15
I.7.1 Propriétés mécanique de la plaque P-FGM	16
I.7.2 Propriétés mécaniques de la plaque S-FGM.....	17
I.7.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	18
I.8 Matériaux à gradient de propriétés Ti-TiB.....	21
I.8.1 Les propriétés de Titane	21
I.8.1.1 Définition	21
I.8.1.2 Propriétés physiques	21
I.8.1.3 Propriétés mécaniques.....	22
I.8.2 la céramique TiB	22
I.8.2.1 Propriétés	22
I.8.3 Système Ti-TiB.....	23
References.....	27

Chapitre II: Concentration de contraintes et rupture des FGM

II.1 Concentration de contraintes autour d'une entaille.....	29
II.1.1 Introduction.....	29
II.1.2 Facteur de concentration de contraintes K_t	30

II.1.3 Concentration des contraintes en fond d'entaille.....	30
II.1.4 Facteur de concentration des contraintes dans le cas de la non-homogénéité.....	32
II.1.4.1 Description de non-homogénéité.....	33
II.1.4.2. Equation différentielle.....	34
II.1.4.3 La forme générale de la fonction de contraintes.....	36
II.1.4.4 Variation spatiale du Q_p	37
II.2 Mécanique de la rupture.....	38
II.2.1 Introduction :	38
II.2.2- Rupture fragile :	38
II.2.3 Rupture ductile:	40
II.2.4 Différents modes de rupture :	40
II.2.4 Comportement linéaire de la mécanique de la rupture.....	41
II.2.5 Critère d'Energie	42
II.2.6 Concept d'intensité des contraintes.....	44
II.2.7 INTEGRALE J.....	46
II.2.7.1 Intégrale J, paramètre indépendant du contour d'intégration.....	47
II.2.7.2 Méthodologie de mesure de l'intégrale J.....	48
II.3 Mécanique de la rupture pour les matériaux à gradient de propriétés	49
II.3.1 Champ de contraintes en fond de fissure	50
II.3.2 Intégrale de l'interaction	50
II.3.3. Formulation de l'interaction intégrale d'un matériau homogène	51
II.3.4 Formulation de l'interaction intégrale dans les FGMs	52
References.....	54

Chapitre III: Modélisation du comportement mécanique d'une plaque entaillée en FGM

III.1.Introduction.....	58
III.2. Formulation du problème.....	59
III.3. Modélisation par éléments finis des FGMs.....	62
III.4 Résultats et analyses.....	65
III.4.1 Distribution des propriétés matériels du FGM Ti-TiB suivant l'axe z.....	68
III.4.2 Effet du rapport du module de Young et la taille de l'entaille	70
III.4.3 Effet d'une bande en FGM	72

Conclusions.....	74
Appendix 1.....	75
Références.....	77

Chapitre IV: Modélisation numérique d'une fissure émanante de l'entaille

IV.I Introduction.....	79
IV.2 Modèle géométrique de la plaque comportant une fissure émanant de l'entaille.....	80
IV.3 Modélisation par éléments finis des plaques en FGMs fissurées.....	83
IV.4 Résultats et analyses.....	85
IV.4.1 Effet du type de distribution sur l'intégrale J.....	85
IV.4.2 Effet de l'épaisseur de la plaque sur l'intégrale J.....	86
IV.4.3 Effet de type de distribution y-FGM sur l'intégrale J.....	87
IV.4.4 Effet du rayon de l'entaille sur l'intégrale J.....	90
IV.4.5 Effet du module de Young sur l'intégrale J.....	91
IV.4.6 Effet du chargement sur l'intégrale J.....	91
IV.4.7 Fissures semi-elliptique et elliptique.....	92
IV.4.7.1 Fissure semi-elliptique.....	92
IV.4.7.2: Interaction entaille-fissure elliptique centrale.....	96
Annexe 1.....	101
Références.....	102
Conclusion générale.....	104

Liste des figures

Chapitre I:

Figure I.1: Concept d'une structure avancée

Figures I.2: Variation des propriétés,

a) Variation discrète des propriétés,

b) Variation continue des propriétés

Figure I.3: Schéma de la variation continue de la microstructure

Figure I.4: Géométrie d'une plaque FGM

Figure I.5 : Variation du module de Young de la plaque P-FGM

Figure I.6: variation du module de Young de la plaque S-FGM

Figure I.7: Variation du module de Young de la plaque E-FGM

Figure I.8: Plaque renforcée par une bande FGM

Figure I.9: Variation du module de Young de la bande en fonction du rayon normalisé

Figure I.10: diagramme d'équilibre Ti-B

Figure I.11: Microstructure TiB, a) Ti 30% TiB, b) Ti 45% TiB et c) Ti 85% TiB

Chapitre II

Figure II.1: Géométrie d'une plaque trouée pour définir les contraintes nominale et maximale

Figure II.2 :Plaque percée d'un trou circulaire de rayon a et soumise à une traction

Figure II.3: Plaque soumise à un champ de contrainte bi axiale

Figure II.4 : Les modes de rupture.

Figure II.5 : Fissure transversale de longueur $2a$ dans une plaque infinie

Figure II.6 : Contraintes près de l'extrémité d'une fissure

Figure II.7 : Comportement élastique non linéaire et comportement réel

Figure II.8 Contour arbitraire autour de l'extrémité d'une fissure

Chapitre III:

Figure III.1 : modèle géométrique de la plaque avec une entaille latérale circulaire,

Figure III.2 : variation exponentielle du module de Young pour différentes combinaisons de constituants

Figure III.3 : direction de variation du module de Young de l'FGM

a) x-FGM variation, b) y-FGM variation, c) r-FGM variation

Figure III.4 Types de variation des propriétés. a) élément homogène b) élément gradué

Figure III.5 : maillage du modèle 13810 éléments C3D20R

Figure III.6 : Variation des contraintes normales normalisées suivant l'axe x normalisé pour différents directions de graduations Ti-TiB FGM ($a/w=0.1$)

Figure III.7 : Contour des contraintes pour différentes directions FGM ($a/w=0.1$)

a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) variation r-FGM

Figure III.8 : Contours des déformation maximales pour différentes directions du FGM ($a/w=0.1$) a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) variation r-FGM

Figure III.9 : Contour des contraintes dans la direction de l'épaisseur FGM ($a/w=0.1$)

Figure III.10 : Variation des contraintes normales normalisées suivant l'axe z normalisé pour différents directions de graduation Ti-TiB FGM ($a/w=0.1$)

Figure III.11 : Variation de facteur de concentration de contraintes en fonction de la taille de l'entaille normalisée a/w pour $t/w=0.1$

Figure III.12 : Variation de facteur de concentration des en fonction de l'épaisseur normalisée t/w pour $a/w =0.1$

Figure III.13 : Variation des contraintes normales normalisées suivant l'axe x normalisé pour différentes combinaisons Métal-TiB FGM ($a/w=0.1$, $t/w=0.1$)

Figure III.14 : Variation du facteur de concentration de contraintes K_t pour différents rapports $E1 / E2$ ($a/w=0.1$, $t/w=0.1$)

Figure III.15 : Variation du facteur de concentration de contraintes en fonction du rayon de l'entaille normalisée pour différents ratios $E1 / E2$ ($t/w=0.1$)

Figure III.16: modèle géométrique d'une plaque en céramique avec une bande FGM

Figure III.17 : variation des contraintes normales normalisées suivant l'axe x normalisé pour différentes largeurs normalisées h/w ($a/w=0.1$, $t/w=0.1$)

Figure III.18 : Variation de K_a et K_b en fonction de la largeur des bandes normalisées h/w ($a/w=0.1$, $t/w=0.1$)

Chapitre IV:

Figure IV.1 : modèle géométrique de la plaque avec une entaille latérale circulaire,

a) la plaque entière, b) la moitié de la plaque

Figure IV.2 : variation exponentielle du module de Young pour différentes combinaisons de constituants

Figure IV.3 : direction de variation du module de Young de l'FGM

a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) r-FGM, d) variation z-FGM

Figure IV.4: Maillages de la plaque (a) et du voisinage de la fissure (b)

Figure IV.5 :Contour de la fonction de variation du domaine

a) variation x-FGM, b) variation y-FGM

c) variation r-FGM, d) variation z-FGM

Figure IV.6: Variation de l'intégrale J le long du front de fissure pour $c/w=0.15$ pour différents types de distributions FGMs Ti-TiB pour $t=2\text{mm}$ et $a/w=0.1$

Figure IV.7: Variation de l'intégrale J maximale en fonction de la longueur de fissure normalisée c/w ($a/w=0.1$) et ($t/w=0.1$) FGM Ti-TiB

Figure IV.8: Variation de l'intégrale J maximale en fonction de l'épaisseur normalisée t/w , ($c/w=0.15$) ($a/w=0.1$) FGM Ti-TiB

Figure IV.9: Représentation du contour FGM. a) l'origine du repère coïncide avec le centre de l'entaille, b) distribution y-FGM, c) Inclinaison de l'axe y d'un angle θ

Figure IV.10: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$) FGM Ti-TiB

Figure IV.11: Variation de l'intégrale J en fonction de l'angle de rotation θ^0 pour une fissure de taille normalisée $c/w=0.15$ $t/w=0.1$ ($a/w=0.1$) FGM Ti-TiB

Figure IV.12: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée pour $t/w=0.1$ d'un r-FGM Ti-TiB

Figure IV.13: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$)

Figure IV.14: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$) pour différents chargement appliqué

Figure IV.15 : Représentation des fissures semi-elliptique

a) fissure centrale, b) fissure latérale

Figure IV.16 Contour de fonction de variable du domaine (E)

a) fissure centrale, b) fissure latérale

Figure IV.17: Variation de l'intégrale J le long du fond de fissure

Figure IV.18: Contour de la contrainte de *Von Mises*;

a) fissure centrale, b) fissure latérale

Figure IV. 19: Variation de l'intégrale J le long du fond de fissure centrale pour différents rapports c/b

Figure IV.20 Représentation de la plaque en r-FGM Ti-TiB avec fissure elliptique centrale

Figure IV.21: Variation de l'intégrale J le long du fond de fissure centrale pour différent inter distance normalisées d/w

Figure IV.22 : Variation de l'intégrale J en pointes de fissures en fonction du rapport d/w .

Figure IV.23 Variation du facteur de concentration des contraintes K_t autour de l'entaille en fonction de l'inter distance d normalisée

Figure IV.24: Contour des contraintes normales

a) $d/w=0.15$, b) $d/w=0.5$

Figure IV.25: Variation du facteur de concentration des contraintes en fonction de l'air de la surface fissure

Liste des tableaux

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Tableau I.2: Propriétés mécaniques de Ti et TiB

Tableau III.1 : Propriétés des constituants du matériau FGM utilisées

Tableau III.2 : Gains des K_a et K_b pour différentes largeurs normalisées h/w

Liste des notations

P_i	<i>Propriété mécanique</i>
V_i	<i>Fraction volumique</i>
E	<i>Module de Young</i>
ν	<i>Coefficient de Poisson</i>
$E(\mathbf{z}), E(\xi)$	<i>Module de Young en fonction de coordonnée spatiale</i>
r, θ	<i>Coordonnées cylindriques</i>
K_t	<i>Facteur de concentration de contrainte</i>
K_f	<i>Facteur de concentration de contrainte</i>
σ^∞, σ_0	<i>Contrainte appliquée</i>
σ_N	<i>Contrainte nominale</i>
σ_{\max}	<i>Contrainte maximale</i>
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$	<i>Champs de contraintes en coordonnées cartésiennes</i>
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$	<i>Champs de contraintes en coordonnées cylindriques</i>
ψ	<i>Fonction de contraintes d'Airy</i>
Δ^2	<i>bi-Laplaciens</i>
∇^2	<i>Laplacien</i>
$Q(\rho)$	<i>Fonction pour évaluer le module d'Young</i>
a	<i>Rayon d'entaille</i>
ρ	<i>Coordonnées cylindriques r normalisée par rapport au rayon a</i>

U, V	<i>Composantes du déplacement</i>
u, v	<i>Composantes du déplacement normalisée par rapport au rayon a</i>
$\varepsilon_q, \varepsilon_\theta, \gamma_{\rho\theta}$	<i>Déformations</i>
K_0	<i>Facteur de concentration de contrainte</i>
Σ_0	<i>Facteur de concentration de contraintes normalisée</i>
w_r	<i>Wronskien</i>
$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$	<i>Fonction de Kummer</i>
G	<i>Energie de Griffith</i>
G_C	<i>Energie de Griffith critique</i>
σ_R	<i>Contrainte à la rupture</i>
a_C	<i>Longueur du défaut critique</i>
K_I	<i>Facteur d'intensité des contraintes en mode I</i>
K_{II}	<i>Facteur d'intensité des contraintes en mode II</i>
K_{III}	<i>Facteur d'intensité des contraintes en mode III</i>
J	<i>L'intégrale de contour</i>
Γ	<i>Contour d'intégration entourant l'extrémité de la fissure</i>
T_i	<i>Composante du vecteur contrainte du vecteur déplacement</i>
u_i	<i>Composante du vecteur déplacement</i>
W	<i>La densité d'énergie de déformation W</i>
σ_{ij}	<i>Composantes du tenseur de contraintes au point courant sur le contour Γ</i>
ε_{ij}	<i>Composantes du tenseur de déformations au point courant sur le contour Γ</i>

J^{aux}	<i>L'intégrale de contour auxiliaire</i>
M	<i>Intégrale d'interaction</i>
σ_{ij}^{aux}	<i>Champs asymptotique de contrainte auxiliaire</i>
ϵ_{ik}^{aux}	<i>Champs asymptotique de déformation auxiliaire</i>
δ_{1j}	<i>Déplacement</i>
$u_{i,1}^{aux}$	<i>Déplacement auxiliaire</i>
q_j	<i>Fonction de poids</i>
C_{ijkl}	<i>Tenseur constitutif qui varie spatialement</i>
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	<i>Matrice des composantes des déplacements au sein de l'élément</i>
$N_i(\mathbf{x})$	<i>Matrice des fonctions de formes</i>
U_i	<i>Déplacements nodaux</i>
\mathbf{K}_e	<i>Matrice de rigidité d'élément</i>
f_i	<i>Forces nodale</i>
\mathbf{J}	<i>Déterminant de la matrice Jacobienne</i>
w_i, w_j	<i>Poids de chaque point de Gauss</i>

ملخص

الهدف من هذا البحث العلمي هو دراسة تأثير تدرج خصائص الميكانيكية (مواد ذات تغير تدريجي للخصائص ميكانيكية و فيزيائية FGM) على عامل تركيز الإجهاد الميكانيكي K_t حول نصف ثقب جانبي ($tailleE$) و على سلوك الميكانيكي لثق منبثق من نصف ثقب جانبي. باستعمال قانون الدالة الأسية لتغيير موديل يونغ ($Young Module$) و معامل بواسون ثابت ($Poisson$). عامل تركيز الإجهاد الميكانيكي K_t و تكامل J يتغيران بدلالة اتجاه تغير تدريجي للخصائص ميكانيكية. استعمال المحاكاة الرقمية و طريقة (MEF) لتحليل و دراسة السلوك الميكانيكي لثق منبثق من نصف ثقب جانبي. دراسة العوامل ميكانيكية و هندسية ل مواد ذات تغير تدريجي للخصائص ميكانيكية (FGM) لتحليل و تحسين عامل تركيز الإجهاد الميكانيكي K_t و الفهم جيد لسلوك ميكانيكي لثق منبثق من نصف ثقب جانبي.

Résumé

L'objectif de cet travail est d'étudier l'effet du gradient des propriétés des FGMs sur la concentration des contraintes autour d'une entaille et sur leur comportement en rupture d'une fissure émanant de l'entaille. En utilisant la loi exponentielle de la variation du module de Young et un coefficient de Poisson constant, le facteur de concentration de contrainte K_t et l'intégrale J dépendent de la direction de la graduation des matériaux constitutifs. La méthode des éléments finis est utilisée pour analyser le comportement mécanique en rupture d'une plaque entaillée . Une étude paramétrique pour les paramètres mécaniques , géométriques et le rapport des constituants du FGM est analysée afin d'optimiser le facteur K_t et mieux comprendre le comportement en rupture des FGMs.

Introduction générale

L'industrie est en constante évolution et en quête obsessionnelle de la perfection des produits . Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels.

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base d'un matériau. Depuis le début de la révolution industrielle, le moteur de la découverte de nouveaux matériaux a plus ou moins obéi à une démarche d'investigation . Cette investigation est associée aux problèmes que l'homme doit résoudre pour améliorer le développement industriel d'une part et d'autre part à son besoin intellectuel de connaître et de comprendre comment trouver des solutions techniques et optimales. Il y a donc des classes de matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique bien spécifique. Les matériaux conventionnels utilisés dans l'industrie ont montré leurs limites face à des problématiques inévitables, tel que le type de sollicitation des contraintes de plus en plus complexes, les conditions exigées par l'environnement du matériau , les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces défis . Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Ces matériaux sont constitués généralement d'une matrice et des fibres qu'on appelle (renfort). Ces derniers ont des propriétés très élevés que la matrice telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids et bien d'autres améliorations. Les matériaux composites sont généralement constitués de plusieurs matériaux ou des couches (stratifiés), ont un problème majeur telle que la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces entre les constituants du composite conventionnel. Cette discontinuité provoque des concentrations de contraintes élevées , des fissurations interfaciales ainsi qu'un problème de délaminage dus à la transition brutale des propriétés mécaniques et thermiques, en particulier dans un environnement à haute température.

Le développement de nouveaux matériaux performants (grande dureté, résistance à la corrosion, conductivité thermique optimale, etc.) est un enjeu industriel important de nos jours.

Ces performances dépendent en grande partie des propriétés du matériau, mais aussi de l'optimisation de l'architecture des phases en présence. Une variété de méthodes a été proposée dans la littérature pour la production de nouveaux matériaux. Parmi celles qui suscitent un intérêt particulier, il y a la réalisation des matériaux à gradient de propriétés (FGMs, Functionally Graded Materials). En effet, les FGMs sont une classe de composites particuliers caractérisée par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle dans le matériau, conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés. Cette graduation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels. Cette nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant ces trois dernières décennies grâce à l'avantage de la continuité graduée des propriétés physiques. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vu leur composition en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme celles de la médecine, de l'électricité, du nucléaire, etc.

Les FGMs de type céramique/métal deviennent de plus en plus importants en technologie moderne, ils sont utilisés afin de satisfaire à des exigences industrielles, parce qu'ils combinent entre les propriétés des métaux (la ductilité, la conductivité électrique et thermique élevée) et les propriétés de la céramique (la dureté élevée, la résistance à la corrosion et la température). Leur comportement en rupture nécessite une étude particulière car ils ont la particularité d'être un mélange des fractions volumiques des deux matériaux, de propriétés mécaniques physiques et thermiques radicalement différentes. En outre, la présence des entailles au sien du FGM constitue non seulement une discontinuité géométrique mais également une source d'amorçage de fissures et de concentration de contraintes pouvant conduire à un endommagement du matériaux à gradient de propriétés par rupture fragile ou ductile.

La rupture des FGM est un mode de rupture fréquemment observé, ce type de rupture limite souvent la fiabilité des deux matériaux (céramique, métal). La connaissance des champs contraintes et de déformations autour de l'entaille et ainsi au font de fissure est nécessaire afin de développer une compréhension fondamentale de processus de rupture.

Le but de notre travail est de modéliser le comportement en rupture d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés comportant une entaille latérale. Ce travail est constitué de quatre chapitres.

Le premier chapitre porte sur une étude bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, ainsi que leurs domaines d'application. Il s'agit d'une synthèse bibliographique présentant les notions fondamentales sur les FGMs.

Le second chapitre est consacré à un rappel sur les théories et les notions fondamentales du comportement mécanique des plaques entaillées (fonction d'Airy), facteur de concentrations de contraintes et champs de contraintes et les lois de la mécanique de la rupture appliquées aux matériaux FGMs .

Le troisième chapitre traite de la modélisation par la méthode des éléments finis, du comportement mécanique d'une plaque en FGM comportant une entaille semi-circulaire latérale. Nous mettons en évidence l'influence de la loi régissant la variation spatiale des propriétés mécaniques sur le facteur de concentration des contraintes K_t . L'effet d'une bande FGM dans une céramique autour d'une entaille circulaire a été analysé dans le but d'optimiser sa performance.

Le dernier chapitre sera consacré à l'analyse numérique du comportement en rupture des fissures émanant de l'entaille. Les effets des directions de gradation des propriétés, les paramètres géométriques et mécaniques sur le comportement de la fissure émanant de l'entaille sont étudiés.

I.1 Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des matériaux composites s'est considérablement développé dans l'industrie automobile, la construction et l'aéronautique.. etc. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels: légèreté, résistance mécanique et chimique, durée de vie prolongée. Mais l'inconvénient c'est l'existence de concentrations des contraintes résiduelles et mécaniques au niveau des interfaces entre les constituants en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques des constituants.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques de différents matériaux au sein d'une même pièce. Les matériaux à gradient de propriétés (**Functionally Graded Materials FGM**) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites non conventionnels dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure.

Par exemple dans le cas d'association d'une céramique avec un matériau tenace comme le métal, pose un problème de création des contraintes d'interfaces. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés est recherchée, par un gradient de composition, qui permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (FGM).

Ce sont des matériaux composites avancés ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces en préservant les caractéristiques physiques et mécanique des constituants. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans changer leur nature.

I.2 Historique

Récemment, cette nouvelle classe de matériaux composites non conventionnels a attiré l'attention du milieu technologique et scientifique. Ces matériaux représentent un des derniers développement technologique. La révolution et la conception de ces types de matériaux sont

définies à la fin du XX^{ème} siècle. Ils sont utilisés pour des emplois dans une large variété d'applications.

Les matériaux à gradient de propriétés ont connu une évolution importante dans le temps. D'abord, ils ont été proposés à la fin de 1984 par deux chercheurs dont l'un étudiait l'aéronautique et l'autre s'intéressait aux matériaux avancés. Ces chercheurs parlaient de leur rêve concernant un avion spatial exposé à un environnement à très haute température 1800°C. En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet de recherche scientifique sur les matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

I.3 Idée générale

Au retour d'une navette spatiale ou d'un avion hypersonique dans l'atmosphère (figure I.1), la structure superficielle de l'appareil est soumise à des températures très élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que la surface inférieure. Pour cette raison les matériaux de revêtement, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1000°C. Il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique. La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des FGMs, matériaux à gradient de fonction. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température qui posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, telle une céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur, comme le métal. Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de propriétés, à la fois dans les laboratoires de la NASA puis de manière plus formalisée au Japon après la mise en place d'un comité de réflexion en 1986 entre des chercheurs du NAL (National Aerospace Laboratory, STA), de l'université du Tohoku et du GIRI du Tohoku (Gouvernemental Industrial Research Institute, MITI). Le matériau FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés

structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

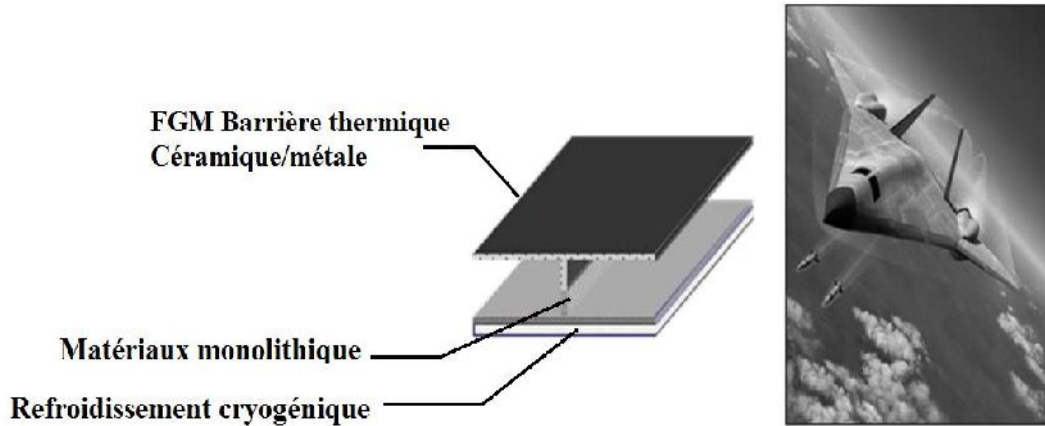
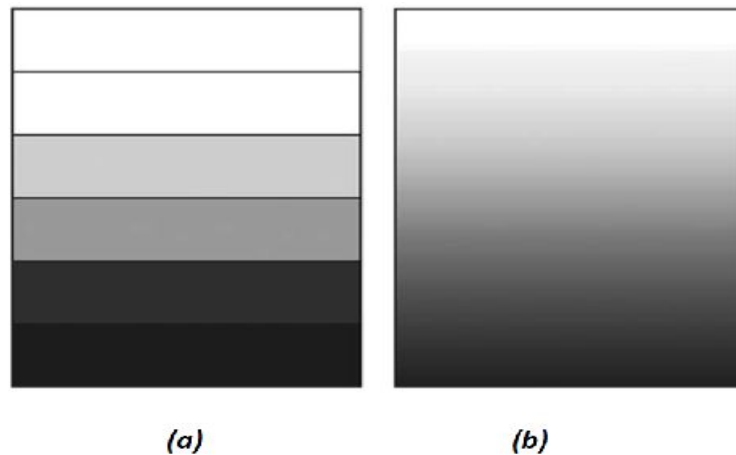


Figure I.1: Concept d'une structure avancée

I.4 Concept des matériaux à gradient de propriétés

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace, conçue pour optimiser la distribution des propriétés matérielles correspondantes, dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction discrète (figure I.2.a) ou continue (figure I.2.b) à travers l'épaisseur [1]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage ou les problèmes liés à l'interface) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de différents types de matériaux.



Figures I.2 : Variation des propriétés, a)Variation discrète des propriétés, b) Variation continue des propriétés

a) Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure I.2 . a) ;

b) Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure I.2 . b), et la fraction volumique du métal (céramique) peut être représentée comme une fonction de coordonnée suivant l'épaisseur ;

La variation continue des propriétés (figure I.3) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

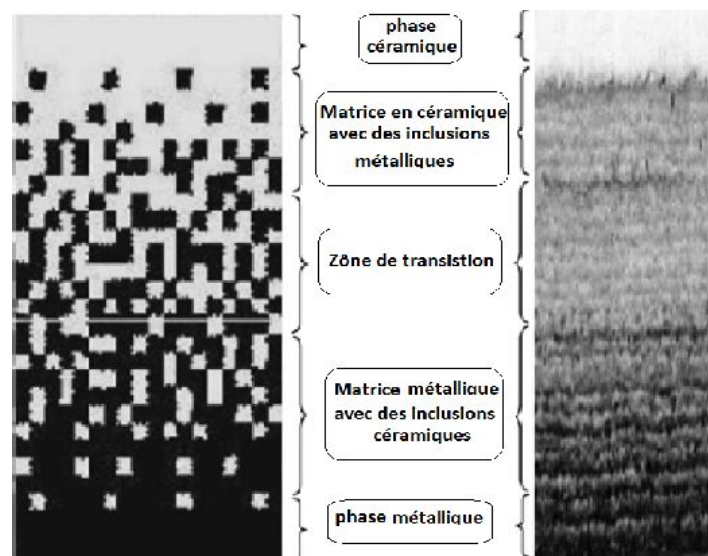


Figure I.3: Schéma de la variation continue de la microstructure

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques et thermique sont consignées dans le tableau I.1. Dans notre travail, notre choix s'est porté sur un matériau **FGM** du type TiB-Ti dont les propriétés physiques et chimiques seront établies dans le chapitre III.

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique -Bonne résistance à l'oxydation -Faible conductivité thermique
Couches intermédiaires	Céramique-Métal	-Réduction des contraintes d'interface -Elimination des problèmes d'interface
Face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique - Conductivité thermique élevée - Très bonne ténacité.

I.5 Domaine d'application

Les FGMs sont utilisés en raison de leurs performances supérieures à celles des matériaux composites traditionnels. Après plus de 30 années de recherches, l'application des FGMs livrent des solutions attendus au profit de la société et inattendus. L'avantage de ce type de matériau est qu'il peut être adapté selon les besoins, le concept des FGMs a été initialement conçu pour le domaine aérospatial, mais au cours des dernières décennies, les chercheurs ont montré son application dans d'autres domaines, comme les matériaux industriels, de l'optoélectronique, les biomatériaux et les matériaux énergétiques.

- **Aérospatial:** Corps des avions spatiaux, composants de moteur fusée.
- **Industrie:** Outils de coupe Éléments de machine.
- **Optiques:** Fibres optiques, Lentilles
- **Médical :** Implant dentaire, prothèse hanche, os artificiel.
- **L'énergie nucléaire:** Composants des réacteurs nucléaires.
- **Électronique:** Semi-conducteur à bande graduée.
- **Conversion d'énergie:** Générateur thermoélectrique, pile à combustible.

I.6 Elaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène (graduation) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (consolidation). Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux précurseurs ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGMs sont : [6,7]

- Le coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)
- Le coulage en bande (Tape Casting)
- La projection thermique (plasma),
- Les dépôts chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) .

I.7 Lois régissant la variation des propriétés d'un FGM

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) peuvent être produits en changeant sans interruption les constituants des matériaux FGM avec microstructure non-uniformes et des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs utilisent la fonction puissance (**P.FGM**) , la fonction sigmoïde (**S.FGM**) ou la fonction exponentielle (**E.FGM**), pour décrire les fractions de volume. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [2].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

Où P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : la céramique et le métal en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (I.3)$$

Considérant une plaque FGM (figure I.4). Les coordonnées x et y définissent le plan médian de la plaque, et l'axe z dans la direction d'épaisseur. Les propriétés mécaniques, le module de Young et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieure et inférieure, sont différents. Cependant, le module de Young et le coefficient de Poisson de la plaque changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z). Delale et Erdogan [3] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Ainsi, on suppose en général que le coefficient de Poisson de la plaque est constant.

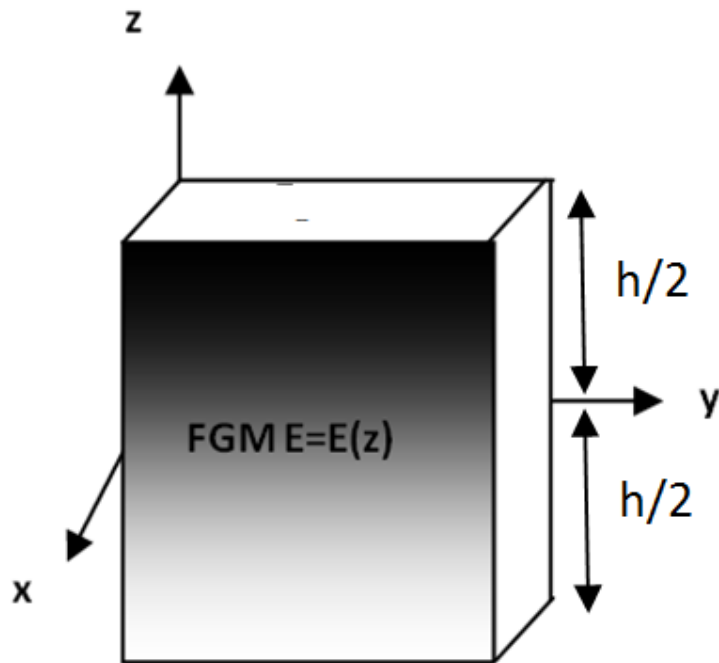


Figure I.4 : Géométrie d'une plaque FGM

I.7.1 Propriétés mécanique de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^n \quad (I.4)$$

Où n est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque **P-FGM** peuvent être déterminées par la loi des mélanges [4].

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)] E_2 \quad (I.5)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure et de la surface supérieure de la plaque **FGM**. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur **P-FGM** est représentée sur la figure I.5.

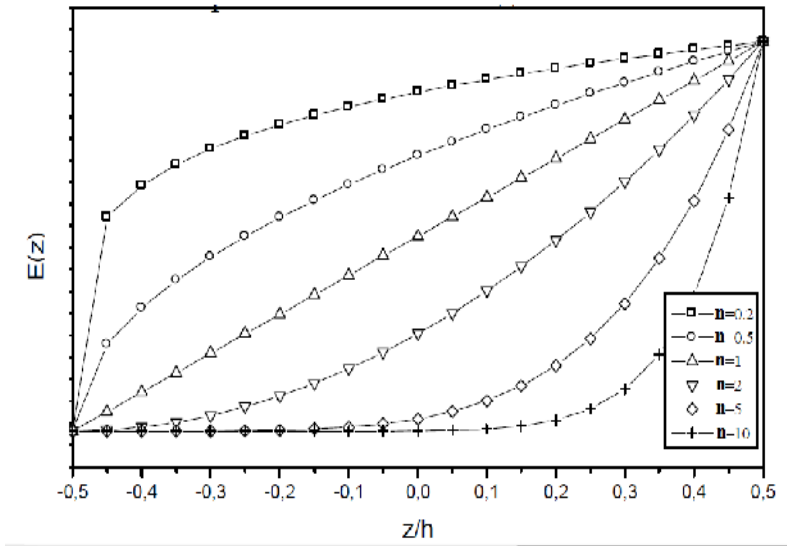


Figure I.5 : Variation du module de Young de la plaque **P-FGM**

I.7.2 Propriétés mécaniques de la plaque **S-FGM**

Chung et chi (2003) [5] ont défini la fraction de volume de la plaque **FGM** en utilisant deux fonctions de loi puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^n \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^n \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.6)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (a)$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (b) \quad (1.7)$$

La figure I.6 montre que la variation du module de Young (équations a) et b) représente des distributions sigmoïdes, donc la plaque **FGM** est ainsi appelée (plaque **S-FGM**).

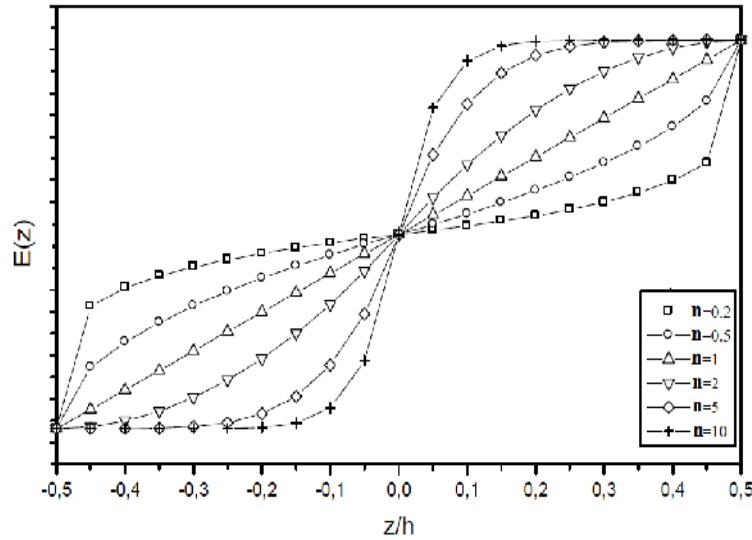


Figure I.6: variation du module de Young de la plaque **S-FGM**

I.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme:

$$E(z) = E_1 e^{\beta(z+h/2)} \quad (1.8)$$

avec

$$\beta = \frac{1}{h} \operatorname{Ln} \left(\frac{E_2}{E_1} \right)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.7.

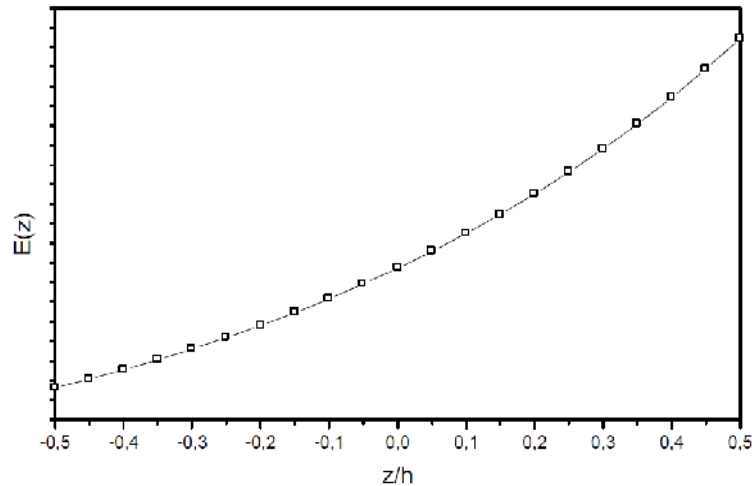


Figure I.7: Variation du module de Young de la plaque E-FGM

Remarque: Certains auteurs utilisent d'autres lois. Roberta Sbrulati [16,17] préconise la loi suivante:

$$E(r) = E_b \left(\frac{r}{b} \right)^m \quad (I.9)$$

Cette loi est utilisée pour analyser et optimiser le facteur de concentration de contraintes (fig.I.8) autour d'un trou dans une plaque homogène (céramique).

E_b : Module de Young de la plaque

r : coordonnée polaire

b : rayon extérieur de la bande FGM

a : rayon intérieur de la bande FGM

m : paramètre du matériau

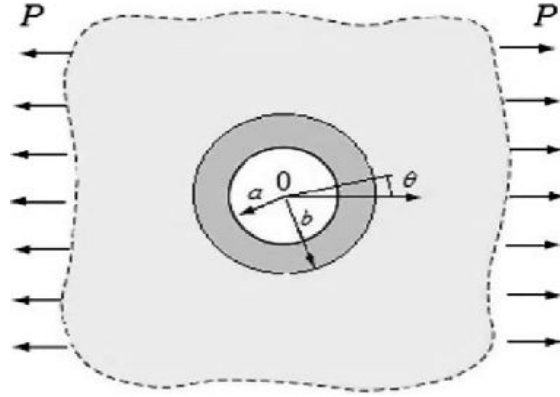


Figure I.8: Plaque renforcée par une bande FGM

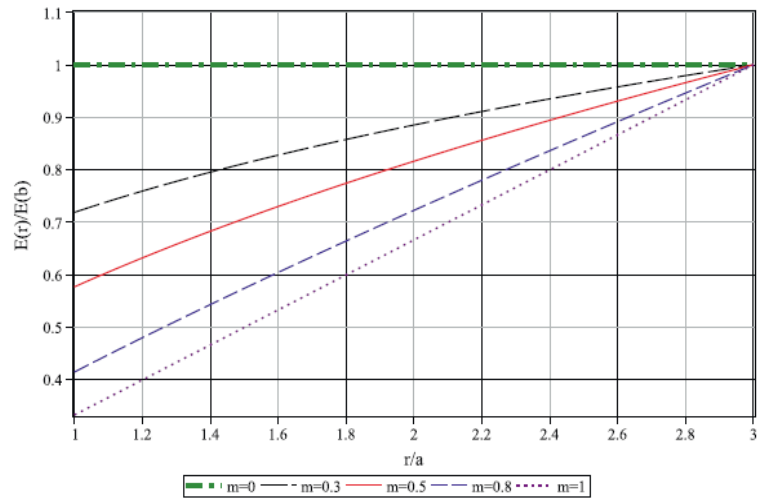


Figure I.9: Variation du module de Young de la bande en fonction du rayon normalisé [16,17]

I.6 Matériaux à gradient de propriétés Ti-TiB

Dont ce travail, notre choix c'est porté sur un matériau **FGM** titane - monoborure de titane (Ti-TiB).

I.6.1 Les propriétés de Titane

I.6.1.1 Définition

Le **Titane** est un élément chimique métallique de symbole Ti et de numéro atomique 22. C'est un métal de transition léger, résistant, d'un aspect blanc métallique, qui résiste à la corrosion. Les propriétés industriellement intéressantes du titane sont sa résistance à la corrosion, souvent associée à la résistance à l'érosion et au feu, la biocompatibilité, mais aussi ses propriétés mécaniques (résistance, ductilité, fatigue, etc.) qui permettent notamment de façonner des pièces fines et légères comme les articles de sport, mais aussi des prothèses orthopédiques et les implant dentaires.

I.6.1.2 Propriétés physiques

Caractéristiques physiques du titane :

- Sa masse volumique est environ 60 % de celle de l'acier.
- Sa tenue à la corrosion est exceptionnelle dans de nombreux milieux tels que l'eau de mer ou l'organisme humain.
- Ses caractéristiques mécaniques restent élevées jusqu'à une température d'environ 600 °C et restent excellentes jusqu'aux températures cryogéniques.
- Il est disponible sous des formes et des types de produits très variés : lingots, billettes, barres, fils, tubes, tôles.
- Sa valeur de susceptibilité magnétique ($1,8$ à $2,3 \times 10^{-4}$) est très inférieure à celle du fer (3×10^5). C'est donc un matériau avantageux en cas de diagnostic par IRM : diminution des artefacts.
- Son coefficient de dilatation, légèrement inférieur à celui de l'acier, est moitié moins que celui de l'aluminium. On prendra pour valeur moyenne un coefficient de dilatation de $8,5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.
- Son module de Young ou module d'élasticité longitudinal se situe entre 100 000 MPa et 110 000 MPa. Cette valeur assez faible comparée à

l'acier inox (220 000 MPa) en fait un matériau particulièrement intéressant pour sa biocompatibilité.

I.6.1.3 Propriétés mécaniques

Le titane est considéré comme un métal ayant une résistance mécanique importante et une bonne ductilité dans les conditions normales de température. Sa résistance spécifique (rapport résistance à la traction / densité) est, par exemple, plus élevée que celle de l'aluminium ou l'acier. Sa résistance est décroissante à la température avec un replat entre -25 °C et 400 °C . En dessous de -50 °C , dans les domaines de températures cryogéniques, sa résistance augmente et sa ductilité diminue grandement. Sans qu'il n'y ait aucun fondement théorique, l'endurance en fatigue vaut environ 70 % de la résistance à la traction.

I.6.2 Les propriétés du Mono-borure de Titane TiB

Le **mono-borure de titane** (formule chimique TiB) est un composé du titane et du bore, très dur, avec une excellente résistance aux frottements. TiB est aussi un bon conducteur électrique. L'application courante de TiB semble être limitée dans des domaines restreints, comme les armures résistantes aux impacts, les outils coupants, les revêtements résistants à l'usure et comme barrière thermique. Des couches minces de TiB peuvent être utilisées pour améliorer la résistance à l'usure et à l'oxydation aux substrats.

I.6.2.1 Propriétés

- Liaisons fortes
- Module d'Young élevé : 375 GPa
- Comportement fragile et rupture sans déformation plastique
- Faible résistance à la rupture en traction ; par contre meilleur comportement en compression : dureté élevée en corrosifs, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usur.

Tableau I.2: Propriétés mécaniques de Ti et TiB [14,15].

Nature	Module de Young (GPa)	Coefficient. de Poisson	Contrainte à la rupture (MPa)	J _{IC} critique (kJ/m ²)
Ti	110	0.34	450	24
TiB	375	0.14		0.14

I.7 Système Ti-TiB

En plus des modèles de matériaux, des systèmes de **matériaux à gradient de propriétés du type** métal/métal, métal/céramique et métal/polymère ont été faites et évaluées. on s'intéresse dans cette étude à un FGM composé de Titane pur **Ti** et de Monoborure de Titane **TiB**. Un certain nombre de programmes de recherche ont étudié les propriétés mécaniques [8, 9] et les caractéristiques microstructurales de ce matériau. des expériences associées et des analyses ont étudié les propriétés et les caractéristiques microstructurales des divers composés du Bore et des alliages de Titane comme le Ti-6Al plus B et Ti-6Al-4V plus B [10,11] pour de très faibles fractions de poids du Bore diagramme d'équilibre Ti-B figure I.10, généralement moins de 2,5 % en poids. Ces résultats, bien que non directement applicable à la présente recherche, donnent un aperçu du comportement possible du FGM Ti plus TiB courant pour de faible fractions de poids du Bore. En particulier, l'ajout de moins de 0,05 % de bore, soit 11 % du TiB, augmente la ductilité et la résistance des Ti-6Al et des alliages Ti-6Al-4V [10].

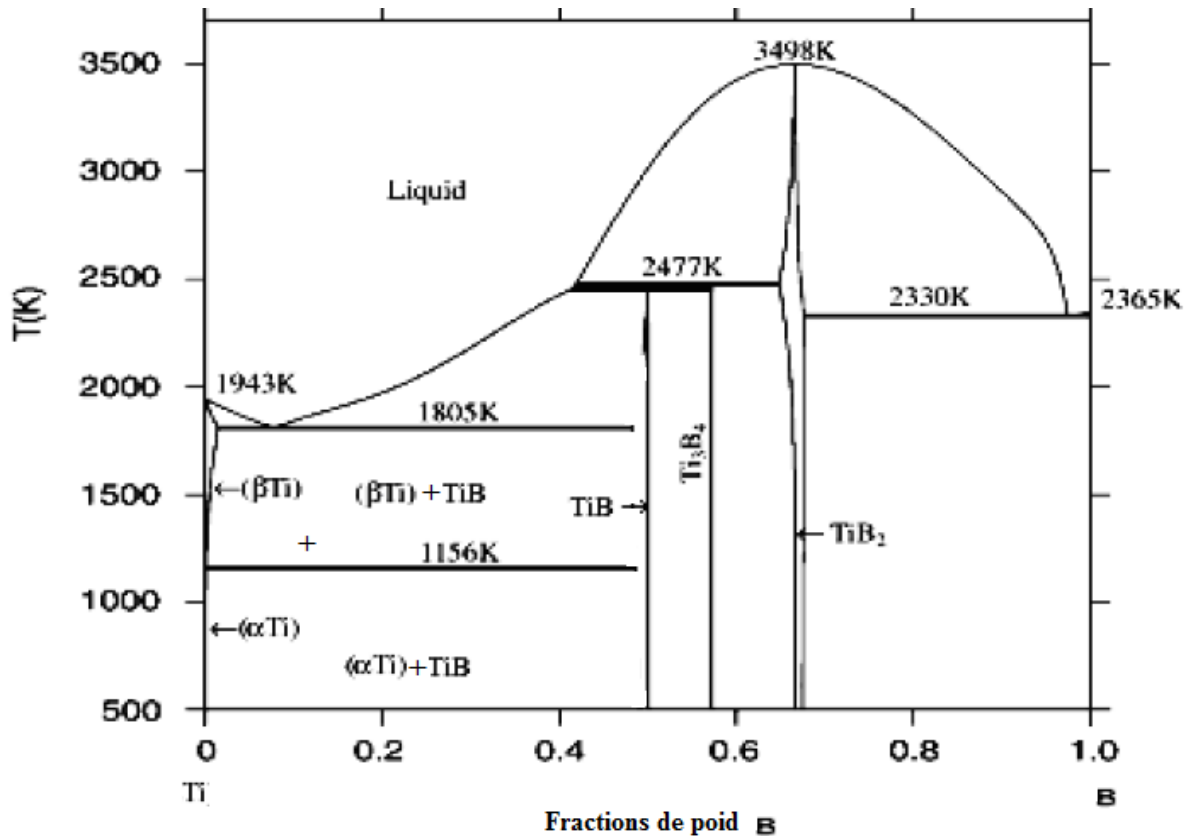
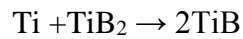
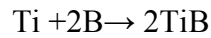
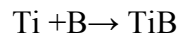


Figure I.10: diagramme d'équilibre Ti-B

Au-dessus de 0,05 % de bore, la ductilité diminue rapidement tandis que la contrainte de rupture ne cesse d'augmenter, avec le degré de changement dépendant fortement de l'alliage de Titane en particulier. Pour Ti-6Al plus de 2,5 % en poids B, la ductilité diminue de 72 % par rapport au maximum. En revanche, la contrainte de rupture augmente d'un facteur de deux ou plus. En outre, pour l'addition du Bore jusqu'à 0,05 % en poids, la microstructure n'inclut pas les aiguilles de TiB observées pour l'accroissement des additions de Bore.

Toutefois, plus d'intérêt pour les recherches sur les aspects microstructures de titane pur avec l'ajout de bore à des concentrations qui produisent du matériau Ti-TiB monolithique avec une fraction volumique égale ou supérieurs à 15 pour cent. La recherche est particulièrement importante sur les matériaux Ti-TiB monolithiques et les matériaux fonctionnellement gradués produit à partir des poudres mélangées de Ti et TiB_2 . Dans cette approche de traitement, la poudre de dimension particulière moyenne de Ti entre 28 et 45 μm est mélangée à la poudre TiB_2 de dimension particulière moyenne d'environ 10 μm . Les poudres mélangées, constituées de couches de différentes fractions volumiques de TiB_2 , sont chauffées et pressées pour former TiB selon la réaction:



Les résultats rapportés [11-13] discutent des propriétés et de la morphologie microstructurale de Ti-TiB monolithique avec une concentrations de TiB allant de 15 à plus de 86 % produites à l'aide de la thermo-compression. D'après des observations microstructurales dans la littérature et dans les matériaux actuels, il est clair qu'un certain nombre de modifications microstructurales dans Ti-TiB microstructure se produit au cours de cette gamme de proportions volumiques de TiB. Dans le cas où d'un matériau Ti-TiB monolithique ou d'un matériau fonctionnellement gradué contient moins de 30 % en volume TiB, la réaction de Ti et TiB₂ produit des aiguilles individuelles de TiB de longueur 50 µm et 5 µm de large (Figure I.11. a). Au-dessus de 30 % en volume TiB, une phase de TiB 10 µm domine le matériau en raison de la quantité de particules TiB₂ autour de chaque particule de Ti et la réduction dans le libre parcours moyen de croissance des aiguilles résultant de multiples sites d'initiation de TiB.

La microstructure typique au-dessus de cette fraction de volume inclut des grappes d'aiguilles petites de 1 à 10 µm et des aiguilles relativement peu grosses de TiB (figure I.11.b). Une troisième transformation dans la microstructure survient lorsque la fraction volumique de TiB atteint environ 70 pour cent. À environ 70 % en volume TiB la phase est dominée par des aiguilles de 1 à 3 µm et peu ou pas d'aiguilles de 50 µm et une petite population d'aiguilles répartie de 10 µm (figure I.11. c).

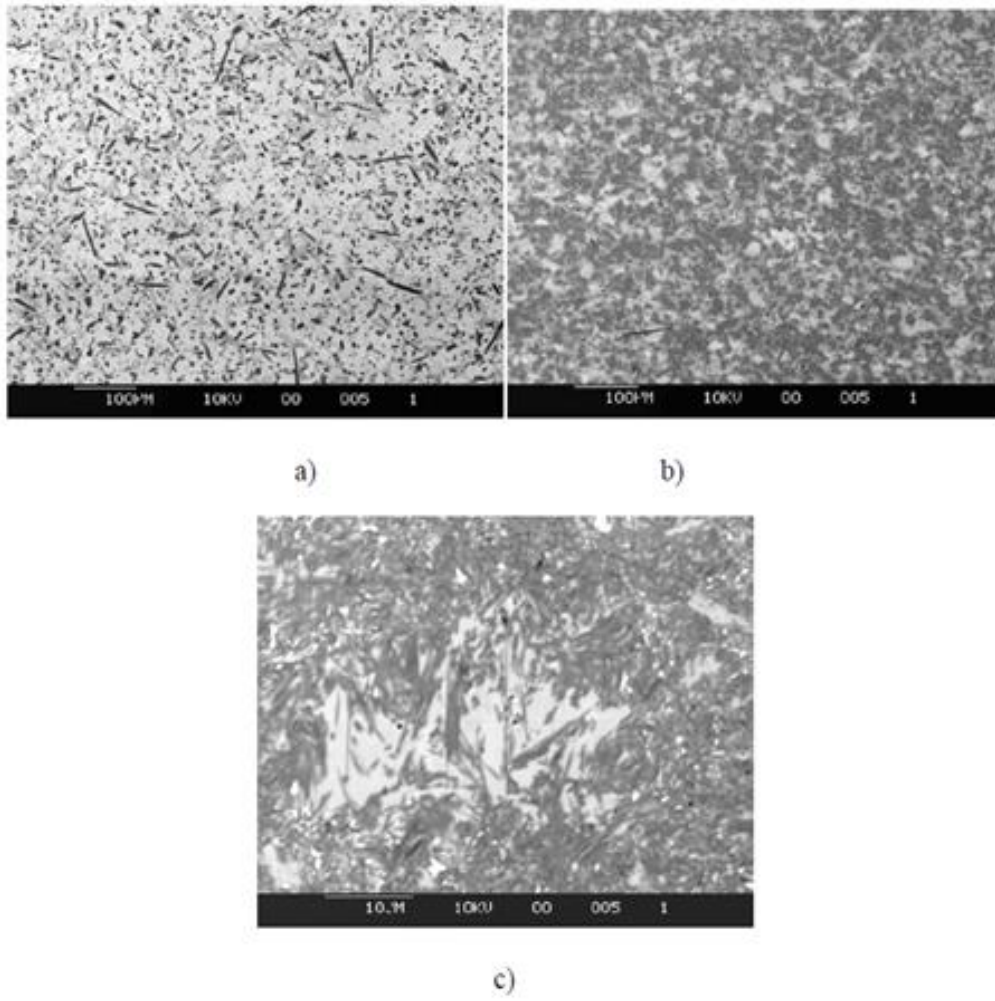


Figure I.11: Microstructure TiB, a) Ti 30% TiB, b) Ti 45% TiB et c) Ti 85% TiB

References

- [1] Hirai, T. "Functional gradient materials", Processing of ceramics—Part 2, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; p. 293–341.
- [2] Shen, H.-S. , "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [3] F. Delale, F. Erdogan, ASME Journal of Applied Mechanics 50 (1983) 609–614.
- [4] G. Bao, L. Wang, International Journal of Solids and Structure 32 (1995) 2853-2871.
- [5] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), —Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243.
- [6] U.Gururaja, S.S.Rao,K.V.Gangadharan, Functionally graded composite material: an overview, Procedia Mater.Sci.5(2014)1291–1299.
- [7] Y.Fukui, Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force, JSMEInt.J.Ser.III34(1991) 144–148.
- [8] Quast JP [et al.] (2008) A microstructure and sonic fatigue investigation of Ti–TiB functionally graded materials. Materials Science and Engineering A. Vol. 497. No. 1-2:1-9
- [9] Tuegel EJ, Byrd LW and Bebernis TJ (2008) Prediction of dynamic response for Ti/TiB functionally graded beams. In: Paulino GH (ed) Proceedings of the international conference FGM IX, Multiscale and functionally graded materials. American Institute of Physics, New York, pp 416-422
- [10]. Bilous OO [et al.] (2005) Effect of boron on the structure and mechanical properties of Ti-6Al and Ti-6Al-4V. *Material Science and Engineering A*. Vol. 402:76-83.
- [11].Ravi Chandran KS, Panda KB and Sahay SS (2004) TiBw-reinforced Ti composites: processing, properties, applications and research needs. The Minerals, Metals and Materials Society, Vol. 56. No. 5:76-83
- [12]. Sahay SS [et al.] (1999) Evolutions of microstructure and phases in-situ processed Ti-TiB composites containing high volume fractions of TiB whiskers. Journal of Materials Research. Vol. 14. No. 11:4214-4223
- [13].Panda KB and Ravi Chandran KS (2003) Titanium-titanium boride (Ti-TiB) functionally graded materials through reaction sintering; synthesis microstructure, and properties. Metallurgical and Materials Transactions A. Vol. 34A:1993-2003

- [14] Jin, Z.-H., Paulino, G.H. and Dodds Jr., R.H. (2003). Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics* **70**, 1885–1912.
- [15] Carpenter, R.D., Liang, W.W., Paulino, G.H., Gibeling, J.C. and Munir, Z.A. (1999). Fracture testing and analysis of a layered functionally graded Ti/TiB beam in 3-point bending. *Materials Science Forum* **308–311**, 837–842.
- [16] R. Sburlati , S.R. Atashipour , S.A. Atashipour . 'Reduction of the stress concentration factor in a homogeneous panel with hole by using a functionally graded layer. *Composites: Part B* **61** (2014) 99–109.
- [17] Roberta Sburlati 'Stress concentration factor due to a functionally graded ring around a hole in an isotropic plate '*International Journal of Solids and Structures* **50** (2013) 3649–3658.

II.1 Concentration de contraintes autour d'une entaille

II.1.1 Introduction

Dans une structure, il est difficile d'éviter la présence de discontinuités géométriques. La sollicitation et la présence d'un défaut provoquent un champ de contraintes non uniforme à l'endroit de la discontinuité. Les ruptures surviennent souvent à partir de l'endroit où le matériau présente une concentration de contraintes, cette concentration est due à la présence d'un défaut de géométrie, en général une entaille ou un trou, etc. Ces derniers ont un effet de d'affaiblissement sur la structure, en raison de sur-contraintes locales, appelées concentrations de contrainte. Il est donc bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Cette présence de concentration de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître la grandeur de cette concentration associée à chaque géométrie, afin de dimensionner les structures.

La concentration de contraintes est un facteur déterminant dans le comportement mécanique des structures où la présence d'entailles est inévitable, car la rupture apparaît toujours au niveau d'un défaut ou d'une discontinuité. Pour la détermination de cette concentration de contraintes on introduit deux facteurs, le premier est noté K_t déterminé à partir de la théorie linéaire élastique, le second facteur noté K_f , souvent moins important que K_t .

II.1.2 Facteur de concentration de contraintes K_t .

Le facteur de concentration de contrainte K_t est défini de deux façons différentes :

-La première est le rapport de la contrainte maximale σ_{max} en fond d'entaille à la contrainte nominale σ_N au droite de l'entaille (fig II.1).

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_N} \quad (II.1)$$

-La seconde est le rapport entre la contrainte maximale σ_{max} et la contrainte appliquée globale σ^∞ .

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma^\infty} \quad (II.2)$$

la deuxième formule du facteur de concentration contrainte K_t est la plus utilisée.

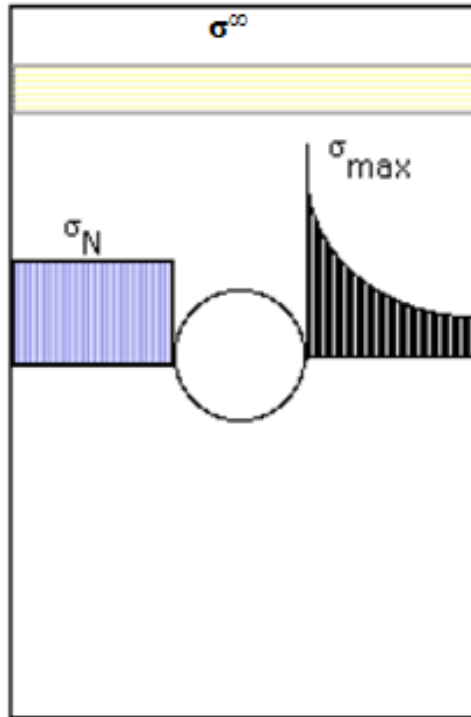


Figure II.1: Géométrie d'une plaque trouée pour définir les contraintes nominale et maximale

II.1.3 Concentration des contraintes en fond d'entaille

La résolution d'un problème bidimensionnel d'élasticité isotrope linéarisé peut se ramener à la recherche d'une fonction, appelée fonction de contraintes d'Airy ψ , qui est une fonction bi-harmonique, utilisée pour résoudre les problèmes d'élasticité. En coordonnées cartésiennes dans une base orthonormée et dans le cas où les contraintes sont recherchées sous la forme : $\sigma_{11}(x, y)$, $\sigma_{22}(x, y)$, $\sigma_{12}(x, y)$.

En l'absence d'efforts volumiques, il existe une fonction $\psi(x, y)$ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (\text{II.3})$$

L'équation de compatibilité exige alors que cette fonction soit biharmonique:

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad (\text{II.4})$$

Les relations précédentes peuvent être traduites dans un système de coordonnées cylindriques (fig II.2), pour un champ de contraintes recherché de forme:

$$\sigma_{rr}(r, \theta), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta), \sigma_{r\theta}(r, \theta)$$

Il existe une fonction de contraintes $\psi(r, \theta)$ telle que :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (\text{II.5})$$

L'opérateur bi-Laplacien s'écrit :

$$\Delta^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (\text{II.6})$$

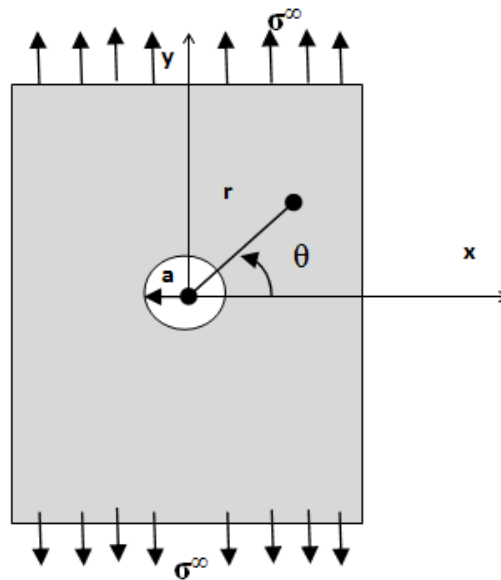


Figure II.2 :Plaque percée d'un trou circulaire de rayon a et soumise à une traction

La forme générale de la fonction d'Airy $\psi(r, \theta)$ pour une plaque trouée s'écrit sous la forme

$$\psi(r, \theta) = A \log r + B r^2 \log r + C r^2 + \left(A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2 \right) \cos 2\theta \quad (\text{II.7})$$

où A, B, C, A_2 , B_2 , C_2 , et D_2 sont des constantes à déterminer à partir des conditions aux limites. D'après les relations (II.5) (II.7), l'expression générale du champ de contraintes s'écrit :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{A}{r^2} + 2B \log r + B + 2C + \left(-2A_2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{A}{r^2} + 2B \log r + 3B + 2C + \left(2A_2 + 12 B_2 r^2 - \frac{6C_2}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= 2 \sin 2\theta \left(A_2 + 3B_2 r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2}\right)\end{aligned}\quad (\text{II.8})$$

Ainsi le facteur de concentration des contraintes est déterminé directement par le rapport de contrainte angulaire maximale à $r=a$ et $\theta = 0$ sur la contrainte appliquée σ^∞

$$K_t = \frac{\sigma_{\theta\theta \max}}{\sigma^\infty} \quad (\text{II.9})$$

II.1.4 Facteur de concentration des contraintes dans le cas de la non-homogénéité

Plusieurs auteurs ont traité le comportement mécanique des plaques FGMs comportant des discontinuités géométriques. Les méthodes basées sur la résolution différentielle de la fonction de contraintes (fonction d'Airy) ont été appliquées aux matériaux fonctionnellement gradués. Roberta Sburlati [1,2], a analysé le champ de contraintes au voisinage d'un trou entouré par une couche en FGM dans une plaque en matériau homogène dont le but de réduire la concentration de contraintes pour une plaque sans couche FGM. D.V. Kubair et al [3] a étudié et analysé le comportement des plaques FGMs comportant un pressage centrale, il a fait varier la graduation des propriétés matérielles sur le concept des couches graduées autour de l'entaille.

Mohsen Mohammadi [4] a donné une approximation par une méthode analytique pour calculer le facteur de concentration de contraintes dans une plaque en matériau non homogène. L'approche analytique basée sur la résolution des fonctions complexes est utilisée pour déterminer la concentration de contraintes [5]. D'autres auteurs ont analysé par la méthode des éléments fini le comportement et la concentration de contraintes en présence de trou dans des plaques FGMs [6-9].

II.1.4.1 Description de non-homogénéité[4][44].

Une plaque infinie avec un trou circulaire de rayon a est soumise à un champ de contraintes uniforme σ^∞ . La présence d'un trou modifie le champ de contraintes au voisinage de la discontinuité géométrique, les coordonnées polaires sont utilisés. La coordonnée radiale r est normalisée par rapport au rayon du trou a (fig II.3), $\rho = r / a$. La plaque est supposée élastique et non homogène, les propriétés matérielles variables. Les propriétés matérielles

changent dans le sens radial. La non-homogénéité est due à des raisons de fonctionnalité (FGM). Avec cette non-homogénéité, le comportement du matériau obéit à une fonction sans dimension $Q(\rho)$ introduite pour évaluer le module d'Young E .

$$E = E_{\infty} Q(\rho) \quad (\text{II.10})$$

De même, le coefficient de Poisson est exprimée par:

$$\nu = \nu_0 + (\nu_{\infty} - \nu_0)Q(\rho) \quad (\text{II.11})$$

Il existe de nombreuses fonctions Q qui peuvent être utilisées pour décrire le comportement de non-homogénéité. $Q(\infty) = 1$, $Q_1 \equiv \frac{E_1}{E_{\infty}}$ noté $Q(1) > 0$

Lorsque $\rho \longrightarrow \infty$, on a:

$$E = E_{\infty} \text{ et } \nu = \nu_{\infty}.$$

Alors dans le périphérie du trou, on a:

$$E_1 = E_{\infty} Q_1 \text{ et } \nu_1 = \nu_0 + (\nu_{\infty} - \nu_0)Q_1.$$

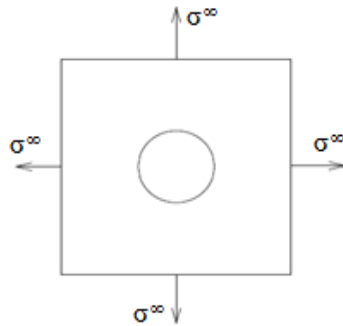


Figure II.3: Plaque soumise à un champ de contrainte bi axiale

II.1.4.2. Equation différentielle

Supposons que la plaque est soumise à un champ de contrainte uniforme loin du trou. Les lois d'élasticité linéaire pour un état de contraintes planes sont données par les équations (II.12, II.13, II.14) . Les composantes du déplacement U et V , dans les deux directions de l'espace, sont respectivement normalisées par rapport au rayon a telles que:

$$u = U/a \text{ et } v = V/a.$$

Les équations des déformations sont données par Timoshenko et Goodier, (1970) [10].

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad (\text{II.12})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (\text{II.13})$$

$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{II.14})$$

Tels que ε_ρ , ε_θ et $\gamma_{\rho\theta}$ sont respectivement les déformations normales et de cisaillement, l'équation de compatibilité est donnée par Wang (1953) [11]. et est écrite sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial(\rho\varepsilon_\theta)}{\partial \rho} - \varepsilon_\theta \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial\gamma_{\rho\theta}}{\partial \rho} - \frac{\gamma_{\rho\theta}}{\rho} \right) \quad (\text{II.15})$$

Où σ_ρ , σ_θ , et $\tau_{\rho\theta}$ sont les contraintes normales et de cisaillement. Les deux équations d'équilibre sont données par Timoshenko et Goodier (1970) [10]:

$$\text{Suivant le rayon } \rho : \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\text{Suivant l'angle } \theta : \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Le solide est un matériau élastique linéaire dans un état de contraintes planes; La loi de Hooke s'exprime par relations suivantes:

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \nu \sigma_\theta) \quad (\text{II.18})$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_\rho) \quad (\text{II.19})$$

$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\rho\theta} \quad (\text{II.20})$$

où E et ν sont définis par les équations. (II.10) et (II.11).

Si $\psi(\rho, \theta)$ la fonction d'Airy de contraintes, on peut déterminer les contraintes par:

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (\text{II.21})$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \quad (\text{II.22})$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} \quad (\text{II.23})$$

Il est bien connu que les composantes des contraintes de cette façon vérifient les équations d'équilibre [11]. En combinant les équations précédentes, les déformations peuvent être écrites en termes de la fonction de contraintes:

$$E_{\infty}\varepsilon_{\rho} = \frac{1}{Q} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \nu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \right) - (\nu_{\infty} - \nu_0) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \right) \quad (\text{II.24})$$

$$E_{\infty}\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{\nu_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\nu_0}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) - (\nu_{\infty} - \nu_0) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\nu_0}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{II.25})$$

$$E_{\infty}\gamma_{\rho\theta} = \frac{1(1+\nu_0)}{Q} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} \right) + 2(\nu_{\infty} - \nu_0) \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} \right) \quad (\text{II.26})$$

Où Q , ν_{∞} et ν_0 sont définis dans les équations (II.10) et (II.11). En insérant les équations (II.24) et (II.26) dans la condition de compatibilité (II.15), l'équation différentielle partielle pour la fonction de contrainte est obtenue:

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi - \frac{Q'}{Q} \left[2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \rho^3} + \left(\frac{1-\nu_0}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{3}{\rho^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^2 \partial \rho} \right] + \frac{2Q'^2 - Q''Q}{Q^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{\nu_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\nu_0}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (\text{II.27})$$

Où Q' et Q'' sont les dérivées premières et secondes par rapport à ρ . L'équation $\nabla^2 \nabla^2 \psi$ biharmonique est définie par

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{II.28})$$

Dans le cas de matériaux homogènes, Q est constant et l'équation (II.27) est réduite à $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$ [10]. Il faut noter que les termes contenant $\nu_{\infty} - \nu_0$ n'entrent dans l'équation différentielle finale (II.27) et la fonction de contraintes dépend uniquement de ν_0 .

II.1.4.3 La forme générale de la fonction de contraintes

La fonction de contrainte ψ est écrite sous forme séparable

$$\psi(\rho, \theta) = f(\rho) \cos(m\theta) \quad (\text{II.28bis})$$

En la remplaçant dans l'équation (II.27), cette dernière est réduite à une équation différentielle ordinaire qui est:

$$\rho^4 f'''' + \rho^3 [2 - 2g] f'''' + \rho^2 [g(\nu_0 - 2) + h - 1 - 2m^2] f'' + \rho [(g - 1)(1 + 2m^2) - h\nu_0] f' + [m^4 + m^2(h\nu_0 - 3g - 4)] f = 0 \quad (\text{II.29})$$

Où g et h sont des fonctions qui décrivent la dimension de non-homogénéité:

$$g = \frac{\rho Q'}{Q} \quad (\text{II.30})$$

$$h = g^2 + g - g'\rho \quad (\text{II.31})$$

Ici, on s'intéresse au calcul du facteur de concentration de contraintes autour d'un trou soumis à un chargement biaxial avec $m = 0$ (fig. II.3) [4]. L'équation différentielle (II.29) devient:

$$\rho^4 f'''' + \rho^3 [2 - 2g] f'''' + \rho^2 [g(v_0 - 2) + h - 1] f'' + \rho [g + 1 - hv_0] f' = 0 \quad (\text{II.32})$$

et cela représente un champ de contraintes de révolution. Après des transformations algébriques, il l'équation (II.32) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\left[\frac{\rho}{Q} \left(f''' + \left(\frac{1-g}{\rho} \right) f'' - \left(\frac{1-v_0 g}{\rho^2} \right) f' \right) \right]' = 0 \quad (\text{II.33})$$

Posons $p = f'$, l'équation différentielle est alors réduite à

$$p'' + \left(\frac{1-g}{\rho} \right) p' - \left(\frac{1-v_0 g}{\rho^2} \right) p = \frac{\varepsilon Q}{\rho} \quad (\text{II.34})$$

Où le coefficient ε est la constante d'intégration. La solution particulière de l'équation (II.34) associée à la constante ε correspond à la flexion non requis ici. La périphérie du trou est sans contrainte et la contrainte radiale est égal à σ_0 à l'infini; par conséquent, les conditions aux limites de ce problème sont

$$p(1) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{p}{\rho} = \sigma_0 \quad (\text{II.35})$$

Supposons que p_1 et p_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (II.34) où la constante ε est égale à zéro. Compte tenu de la condition aux limites (II.35), la fonction de contraintes s'écrit comme suit:

$$p = \sigma_0 \left(\frac{p_1(\rho) p_2(1) - p_2(\rho) p_1(1)}{p_2(1)} \right) \quad (\text{II.36})$$

Le facteur de concentration de contrainte, K_0 , correspondant à une charge hydrostatique peut être trouvé à partir de cette fonction de contraintes. Le facteur K_0 est défini comme le rapport de la contrainte circonférentielle maximale qui se produit à $\rho = 1$ par σ_0 (contrainte de

référence) (Pilkey et Pilkey, 2008) [12]. En utilisant les équations (II.22) et (II.36), il en résulte que :

$$K_0 = \frac{p_1'(1) p_2(1) - p_2'(1) p_1(1)}{p_2(1)} \quad (\text{II.37})$$

Le numérateur de l'équation (II.37) est égale au Wronskien évaluée à $\rho = 1$, (Braun, 1993) [13]. Dans ce cas, le Wronskien, $w_r = p_1' p_2 - p_2' p_1 = CQ(\rho)/\rho$

Où $Q(\rho)$ est défini dans l'équation (II.10). Les propriétés élastiques deviennent uniformes à loin du trou, à savoir $Q(\infty) = 1$ de sorte que les solutions doivent être tels que $p_1 \sim \rho$ et $p_2 \sim 1/\rho$. Il en résulte alors que la constante $C = 2$ et le Wronskien peut être écrit comme $w_r = 2Q(\rho)/\rho$. Le facteur de concentration de contrainte est alors exprimé par:

$$K_0 = 2 \left(\frac{E_1}{E_\infty} \right) \Sigma_0 \quad (\text{II.38})$$

Où Σ_0 est le facteur de concentration de contraintes normalisée:

$$\Sigma_0 = \frac{1}{p_2(1)}$$

Il est à noter que, Σ_0 est une fonction de s , v_0 , et E_1/E_∞ . Afin d'obtenir une expression analytique de K_0 , une forme définitive doit être affecté à la fonction $Q(\rho)$.

II.1.4.4 Variation spatiale du $Q(\rho)$

Pour l'hétérogénéité envisagée dans ce document il y a deux caractéristiques principales. Tout d'abord, il y a la valeur de la rigidité à la périphérie trou, et d'autre part, il y a le taux à laquelle l'hétérogénéité décroît fortement loin du trou. Ces deux caractéristiques peuvent être exprimées par l'expression suivante:

$$Q(\rho) = \exp(x) \quad \text{avec } x = \eta \rho^s \quad (\text{II.39})$$

Où η et $s < 0$ sont des paramètres réglables. Le paramètre η détermine la rigidité au niveau du périmètre et s détermine le taux de décroissance loin du trou. La fonction $Q(\rho)$ tend vers l'unité de façon monotone lorsque ρ augmente. Pour la variation spatiale $E = E_\infty[\eta \rho^s]$, les solutions p_1 et p_2 sont connus (Mohammadi et Dryden, 2009) [14] [44]. Elles sont données par:

$$p_1(\rho) = \rho M\left(\frac{1-\nu_0}{s}, 1 + \frac{2}{s}, \eta\rho^s\right)$$

$$p_2(\rho) = \frac{1}{\rho} M\left(-\frac{1-\nu_0}{s}, 1 - \frac{2}{s}, \eta\rho^s\right) \quad (\text{II.40})$$

Où $M(a, b, x)$ est la fonction de Kummer et une partie des propriétés de base de la fonction de Kummer peuvent être trouvées dans les références (Handbook of Mathematical Functions, 1972; Erdelyi, 1981) [15]. En utilisant les équations. (II.38), Asy (II.39) et (II.40), K_0 s'écrit:

$$K_0 = 2 \exp(\eta) \Sigma_0 \quad (\text{II.41})$$

Et Σ_0 est le facteur de concentration de contraintes normalisée donnée par

$$\Sigma_0 = \frac{1}{M\left(-\frac{1-\nu_0}{s}, 1 - \frac{2}{s}, \eta\right)} \quad (\text{II.42})$$

Si cette expression pour Σ_0 est étendu comme une série de puissance dans g , il devient clair qu'il y a deux cas limites correspondants à des valeurs petites et grandes de $|s|$.

$$\Sigma_0 \sim \begin{cases} 1 & s \gg 1 \\ \exp[-(1 + \nu_0)\eta/2] & s \ll 1 \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Dans le cas des matériaux homogènes, $\eta = 0$, et le facteur de concentration de contraintes est réduit au résultat bien connu, Pilkey et Pilkey, 2008 [12], $K_0 = 2$.

II.2 Mécanique de la rupture

II.2.1 Introduction :

La rupture est un problème auquel l'homme aura à faire face aussi longtemps qu'il construira des édifices ou fabriquera des structures. Ce problème est actuellement plus crucial avec le développement de structures complexes lié au progrès technologique. Les avancées dans la connaissance de la mécanique de la rupture permettent aujourd'hui et plus précisément depuis le milieu du 20e siècle, de mieux prévenir le risque de rupture.

Cependant, beaucoup de mécanismes de rupture sont encore mal connus notamment lorsqu'on utilise de nouveaux matériaux ou de nouveaux procédés. Le coût des ruptures catastrophiques représente, d'après une étude économique du début des années 80, près de 4% dans les pays industriels développés. On pourrait réduire ce coût d'environ 30% si on appliquait correctement les concepts connus de la mécanique de la rupture et de 25% supplémentaires

par le développement des recherches dans le domaine de la rupture. On distingue deux catégories de rupture des structures :

- 1- soit une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure
- 2- soit l'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue.

Dans le premier cas, le risque de rupture peut être évité dès lors que la structure est bien dimensionnée avec un choix de matériaux adaptés et que les chargements sont correctement évalués.

Dans le deuxième cas, la prévention de la rupture est plus délicate. Lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours car la mise en oeuvre de nouvelles techniques, bien qu'elle procure des avantages, conduit inévitablement à des problèmes potentiels.

Durant les dernières décennies, le développement de la mécanique de la rupture a incontestablement conduit à une meilleure fiabilité des structures, il est difficile d'estimer ce que cela représente en termes de coût et surtout de vies humaines sauvées. Lorsque les concepts de la mécanique de la rupture sont correctement appliqués, le type 1 de rupture peut être évité et la fréquence des ruptures de type 2 peut aussi être réduite.

Certaines ruptures catastrophiques récentes sont à la fois de type 1 et 2. Ainsi par exemple l'accident survenu sur la navette spatiale Challenger qui explosa en 1986 avec des passagers à bord parce qu'un joint de bague dans un des propulseurs n'a pas bien répondu à la baisse de température avec l'altitude. La navette utilise des technologies nouvelles ce qui peut conduire à des défaillances de type 2 ; cependant avant la catastrophe, certains ingénieurs voulaient retarder le lancement de la navette car ils suspectaient un problème potentiel dans les joints de bague avec risque de rupture (type 1 donc dans ce cas).

La rupture d'un matériau peut être de type ductile, fragile ou mixte. La dimension et la géométrie du défaut (entaille, fissure, discontinuité géométrique) amenant à la rupture du matériau dépendantes de la propagation, la rupture dépend directement de toute phase d'évolution de la fissure.

L'évolution d'une fissure peut être divisée en trois phases :

- L'initiation (ou amorçage) de la fissure,
- La propagation stable,
- La propagation rapide, conduisant à la rupture de l'élément.

II.2.2- Rupture fragile :

Dans le cas des matériaux fragiles à faible déformation plastique ou l'inexistence du domaine plastique le cas des céramique, les valeurs très élevées des contraintes locales peuvent provoquer la rupture fragile. Du point de vue énergétique, le taux de restitution d'énergie G représente l'énergie nécessaire à faire se propager une fissure de taille (a) de (da) . Si ce taux est plus grand que l'énergie nécessaire à engendrer une fissure de (da) , cette fissure (da) provoquera la rupture fragile.

II.2.3 Rupture ductile:

La rupture ductile est celle qui intervient généralement dans les opérations de mise en forme, ou plus simplement au cours d'un essai de traction uni axiale. Elle se caractérise par une localisation préalable plus ou moins importante de la déformation plastique locale plus ou moins élevée au moment où se produit la rupture finale. L'exemple type est celui d'une éprouvette de traction cylindrique, à partir d'un certain taux d'allongement, qui dépend de la capacité de consolidation du matériau, la déformation plastique se localise donnant lieu à la striction. Si on interrompt la traction à cet instant on constate la présence de décohésions internes au voisinage de l'axe de l'éprouvette. Ces décohésions se produisent notamment au niveau des inclusions éventuelles (oxydes, sulfures, silicates,...) , la rupture s'effectue en trois stades :

- 1- Formation de petites cavités plus ou moins proches selon la nature du matériau,
- 2- Croissance de ces cavités,
- 3- Rupture finale par cisaillement à 45° .

Les faciès types de rupture ductile se caractérisent par la présence de cupules aux sommets desquelles se trouvent généralement les traces des inclusions, ou les inclusions elles-mêmes.

II.2.4 Différents modes de rupture

D'un point de vue macroscopique, on peut considérer deux modes principaux de rupture :

La rupture plate et la rupture inclinée.

- La rupture plate correspond à une surface de rupture globalement perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale.

- La rupture inclinée dans le sens transversal par rapport à la direction de propagation s'accompagne souvent de grandes déformations.

On montre que toute fissuration peut être ramenée à l'un des trois modes simples ou à leur superposition. Il existe donc trois modes de fissuration élémentaires (fig II.4) :

a) Mode I : Mode d'ouverture de la fissure, les déplacements aux lèvres de la fissure y sont perpendiculaires à la direction de propagation de fissure.

b) Mode II : Mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.

c) Mode III : Mode par déchirement, les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de la fissure.

Pour chacun des modes, on détermine le comportement à la fissuration de chaque solide en calculant l'état des champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage de la fissure.

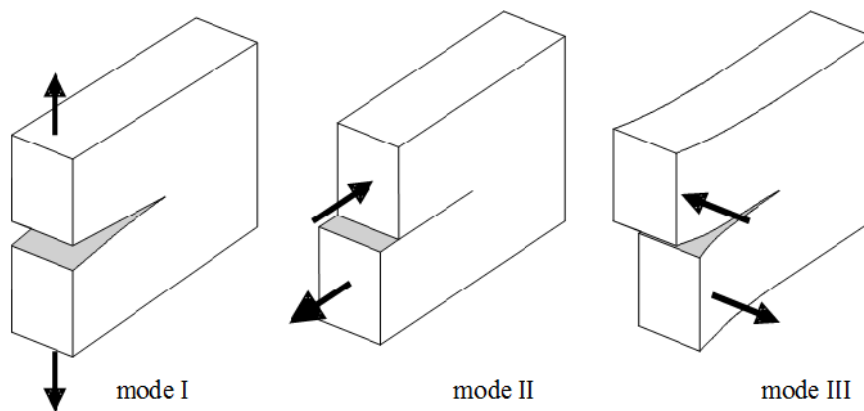


Figure II.4 : Les modes de rupture.

II.2.4 Comportement linéaire de la mécanique de la rupture

La loi de comportement élastique linéaire est une relation entre les composantes de la contrainte et les composantes de la déformation. Cette relation ne dépend que des grandeurs intrinsèques au matériau. En fait, il a été observé expérimentalement lors des essais de

traction simple sur éprouvettes unidimensionnelles que la déformation ε varie en fonction de la contrainte σ .

Hook a observé lors d'un chargement simple générant une petite valeur de σ que la déformation ε est linéairement liée à σ avec :

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \times \sigma \quad (\text{II.44})$$

Avec E est appelé module d'élasticité (module de Young), et le facteur $\left(\frac{1}{E}\right)$ est appelé module de complaisance élastique.

II.2.5 Critère d'Énergie

L'approche énergétique est basée sur le postulat suivant, l'extension d'une fissure qui conduit à la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau, cette résistance se compose de l'énergie de création de surface, de l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure.

Griffith fut le premier à proposer un critère d'énergie pour la rupture des matériaux fragiles, qui fut ensuite étendu aux matériaux ductiles par d'autres auteurs : Irwin et Orowan.

L'énergie de Griffith notée G (qu'on appelle aussi taux de restitution d'énergie) est définie par la variation d'énergie par unité de surface fissurée, associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique. La rupture se produit lorsque G atteint une valeur critique G_C ; G_C est une mesure de la ténacité du matériau.

Pour une fissure de longueur $2a$ (figure II.5) dans une plaque de dimensions infinies (ce qui équivaut à dire que la longueur de fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque dans la plan de chargement), constituée d'un matériau de module d'Young E et soumise à une contrainte de traction σ^∞ , l'énergie de Griffith G par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} \quad (\text{II.45})$$



Figure II.5 :Fissure transversante de longueur $2a$ dans une plaque infinie

Si on continue à augmenter la contrainte appliquée σ^∞ , la rupture se produira lorsque l'énergie G atteint sa valeur critique pour une contrainte appliquée σ_R . On a alors d'après la relation précédente :

$$G_C = \frac{\pi(\sigma_R)^2 a}{E} \quad (\text{II.46})$$

On peut noter qu'à valeur de G_C fixée, la contrainte à rupture σ_R varie avec $a^{-1/2}$; de même à G_C et σ^∞ fixées, la longueur critique de défaut a_C est donnée par :

$$a_C = \frac{EG_C}{\pi(\sigma^\infty)^2} \quad (\text{II.46})$$

L'énergie de Griffith G est la force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est donnée par G_C . Par analogie avec l'approche basée sur la limite d'élasticité où c'est la contrainte qui joue le rôle de force motrice dans un matériau dont la résistance à la déformation plastique est donnée par la limite d'élasticité σ_E .

Cette analogie est utilisée aussi pour illustrer le concept de similitude. La limite d'élasticité d'un matériau mesurée à partir d'essais sur des éprouvettes de laboratoire est indépendante de

la taille des éprouvettes et peut donc être utilisée pour des structures de tailles différentes dès lors que le matériau est raisonnablement homogène. Ce principe de similitude est une des hypothèses fondamentales de la mécanique de la rupture : la ténacité d'un matériau (mesurée par G_C) est indépendante de la taille et de la géométrie de la structure fissurée. Cette hypothèse de similitude reste valable tant que le comportement du matériau demeure linéaire élastique.

II.2.2 Concept d'intensité des contraintes

La figure II.6 représente schématiquement les contraintes sur un élément centré sur un point M repéré par les coordonnées polaires r, θ par rapport à une extrémité d'une fissure sollicitée en mode d'ouverture ou mode I.

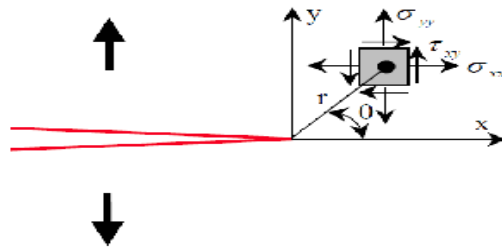


Figure II.6 : Contraintes près de l'extrémité d'une fissure

Ces contraintes s'expriment à partir d'un paramètre noté K_I et appelé facteur d'intensité des contraintes (FIC) en mode I.

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

L'expression du FIC K_I dans le cas du mode d'ouverture figure II.6.

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (\text{II.47})$$

Au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$, c'est à dire lorsque $r \rightarrow 0$ elles tendent vers l'infini comme $1/\sqrt{r}$. La zone la plus critique est donc le voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure et on ne considère alors que les termes en $1/\sqrt{r}$, autrement dit que les champs de contraintes asymptotiques qui sont donc de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (\text{II.48})$$

Ces champs asymptotiques peuvent être décrits à l'aide de l'approche de Westergaard (annexe A). Selon le mode de sollicitation considéré - mode I, II ou III, ils s'expriment à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} ou K_{III} :

En mode II, les contraintes sont données comme suite:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.49})$$

En mode III, les contraintes sont données comme suite:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.50})$$

Dans l'approche basée sur le concept de FIC de la mécanique linéaire de la rupture, la rupture se produit lorsque le FIC K_I atteint la valeur critique K_{IC} qui correspond à la ténacité du matériau. Dans cette approche, le K_I est la force motrice dans un matériau dont la résistance à

la rupture est caractérisée par la ténacité K_{IC} . Le principe de similitude est supposé vérifié comme dans le cas de l'approche énergétique. Les deux approches sont équivalentes pour un matériau dont le comportement est linéaire élastique. En comparant les formules (II.46) et (II.47), il apparaît que :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{et} \quad G_C = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad (\text{II.51})$$

II.2.3 Intégrale J

L'intégrale de contour J utilisée comme paramètre caractéristique de l'état de contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans les matériaux dont le comportement est linéaire et non linéaire, a connu un grand succès. Rice qui proposa ce paramètre, assimile le comportement élasto-plastique à un comportement élastique non linéaire. L'approche de Rice qui repose sur une telle hypothèse doit être utilisée avec précaution lorsqu'on a des décharges élastiques par exemple. La figure II.7, illustre la différence de comportement entre un matériau élastoplastique et un matériau élastique non linéaire. Lors de la décharge, le chemin suivi par le matériau élastique non linéaire est différent du chemin réel que l'on observe dans les matériaux élasto-plastiques. Une relation unique lie la contrainte et la déformation dans un matériau élastique, linéaire ou non, mais une déformation donnée dans un matériau élastoplastique peut correspondre à plusieurs contraintes si le matériau est déchargé ou soumis à des sollicitations cycliques. Il est donc plus aisé de considérer un matériau élastique qu'un matériau où les déformations sont irréversibles.

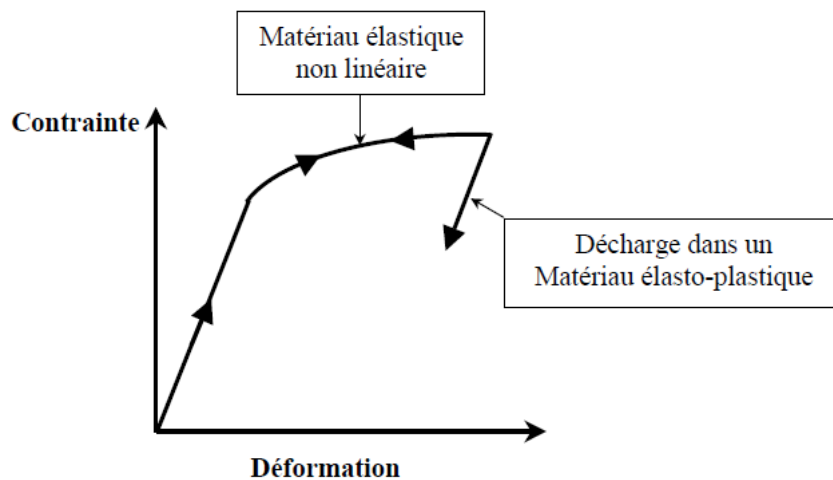


Figure II.7 : Comportement élastique non linéaire et comportement réel

On voit bien sur la figure II.7 que les deux matériaux donnent la même réponse tant que les contraintes augmentent de façon monotone. Cette réponse peut cependant ne pas être la même lorsqu'on traite des problèmes 3D, mais dans beaucoup de cas l'assimilation des deux réponses constitue une hypothèse acceptable. Ainsi donc l'analyse qui suppose un comportement élastique non linéaire, peut être valable pour un matériau élasto-plastique en l'absence de décharges. La théorie de la déformation de la plasticité qui propose une relation unique entre les déformations totales et les contraintes dans un matériau, est équivalente à l'élasticité non linéaire.

Rice a appliqué la théorie de la déformation pour analyser un solide fissuré. Il a démontré que le taux de restitution d'énergie non linéaire noté J , peut être déterminé à partir d'une intégrale de contour indépendante du contour d'intégration. Hutchinson, Rice et Rosengreen ont ensuite montré que ce paramètre J caractérise de façon unique les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau non linéaire.

L'intégrale J peut donc être considérée à la fois comme un paramètre d'énergie et un paramètre d'intensité des contraintes, comme en MLR où le FIC K et l'énergie de Griffith G sont deux paramètres qui décrivent de manière équivalente la répartition des contraintes.

I.2.3.1 Intégrale J , paramètre indépendant du contour d'intégration

Le paramètre J est défini à partir de l'intégrale de contour suivante :

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (\text{II.52})$$

Où Γ est un contour d'intégration entourant l'extrémité de la fissure (figure II.8), ds l'élément de longueur sur Γ , T_i et u_i les composantes du vecteur contrainte et du vecteur déplacement en un point de Γ . La densité d'énergie de déformation W est définie quant à elle par :

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{II.53})$$

où σ_{ij} et ε_{ij} sont les composantes des tenseurs de contraintes et de déformations au point courant sur le contour Γ .

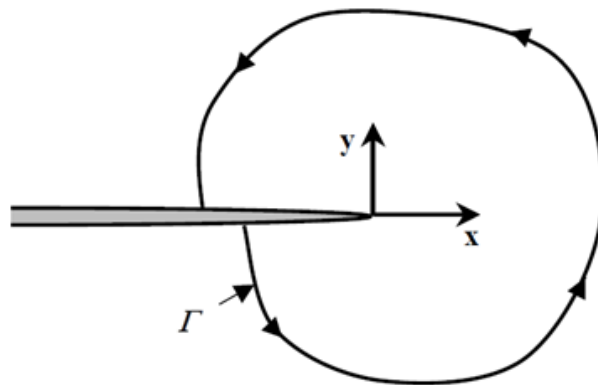


Figure II.8 Contour arbitraire autour de l'extrémité d'une fissure

II.2.3.2 Méthodologie de mesure de l'intégrale J

Tant que le comportement du matériau est linéaire, l'intégrale J correspond à l'énergie de Griffith qui est directement reliée au FIC K lui-même proportionnel à la charge appliquée et pouvant être calculé à partir des conditions de chargement et de la taille de la fissure.

Les choses se compliquent lorsque le comportement est non linéaire. Le principe de superposition n'est plus vérifié et l'intégrale J n'est plus proportionnelle à la charge appliquée. Aussi il n'existe pas de relation simple entre J , la charge appliquée et la taille de la fissure.

Une manière de déterminer J consiste à appliquer la définition de cette intégrale, donnée par la relation (II.52), à la configuration de chargement. Les premières mesures de l'intégrale J sur des plaques fissurées, utilisaient un ensemble de jauges de déformations collées sur un contour entourant la fissure. Comme l'intégrale J est indépendante du contour d'intégration, on choisissait un contour de collage des jauges de telle sorte que les mesures soient le plus simples possible. Cette méthode était également utilisée pour les calculs par éléments finis où l'on détermine les contraintes, les déformations et les déplacements le long d'un contour généralement circulaire pour ensuite calculer l'intégrale J à partir de la relation (II.52). Les approches numériques modernes utilisent toutefois une extension virtuelle de la fissure qui donne des résultats plus précis.

Cependant cette méthode de contour est impraticable dans beaucoup de cas. L'instrumentation requise est coûteuse et elle devient acrobatique lorsque les structures sont

complexes. La méthode beaucoup plus appliquée actuellement utilise la définition du paramètre J donnée par la relation (II.52) [16].

II.3 Mécanique de la rupture pour les matériaux à gradient de propriétés

Un certain nombre de méthodes a été développé permettant de calculer les conditions à l'extrémité d'une fissure pour prédire le comportement en rupture. Les méthodes avancées basées sur des modèles de zone cohésives ont été appliqués aux matériaux monolithiques et étendus aux matériaux à gradient de propriétés . Ural [17] a simulé la propagation d'une fissure de fatigue dans un matériau monolithique à l'aide d'un modèle de zone cohésive axée sur l' endommagement. Jin et Paulino [18, 19] ont mis au point des modèles de zone cohésive pour prédire la propagation de la fissure en FGMs. Les méthodes classiques d'évaluation d'intensité de contraintes analytiquement, numériquement (basées sur l'analyse par éléments finis) et expérimentalement ont été également étendues pour inclure les matériaux fonctionnellement gradués.

Les méthodes d'analyse basées sur des méthodes d'équation intégrale [20, 21] ont été développés pour un certain nombre de problèmes de propagation de fissure, fournissant une méthode pour vérifier les résultats des autres méthodes. Dans d'autres travaux, les méthodes numériques basées sur l'intégrale J et l'intégrale d'interaction ont été développées. Rao [22] présente une méthode d'analyse de maillage libre de Galerkin pour l'intensité de contraintes fondée sur l'intégrale de l'interaction.

Paulino et al ont étendu la méthode de l'intégrale J et l'intégrale d'interaction pour évaluer le mode I et les facteur d'intensité de contraintes en mode mixte, respectivement, dans les matériaux fonctionnellement gradués en utilisant l'analyse par éléments finis classiques [17-30].

Couplé avec le développement de l'intégrale d' interaction modifiée permettant d'évaluer les matériaux fonctionnellement gradués, Kim a mis au point des éléments finis pour les matériaux non homogènes [31]. Chi a évalué le profil d'intensité de contraintes dans les couches des FGMs en utilisant l'analyse par éléments finis. Pour évaluer les données expérimentales et calculer l'intensité de contraintes, des méthodes expérimentales basées sur les champs de déplacement en pointe de fissure ont été étudiées pour le calcul d'intensité de contrainte dans les structures FGMs.

II.3.1 Champ de contraintes en fond de fissure

En 1987, Eischen [32] a publié des résultats démontrant que les champs en 2D des contraintes de déformations et de déplacements pour les FGMs continus et généralement continûment différentiables sont, pour r tendant vers zéro, en partie identiques à ceux développés par Williams [33, 34] pour les matériaux monolithiques. En particulier, les termes r^0 , $r^{1/2}$ et r des équations de déplacement restent inchangés, sauf que le module de Young et coefficient de Poisson doivent être évalués à la pointe de la fissure. Les termes d'ordre supérieur, sont cependant affectés par le gradient du matériau. L'équation résultante pour l'ouverture de fissure due à K_I est:

$$u_y = \frac{K_I}{2G_{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{3-\nu_{tip}}{1+\nu_{tip}} - \cos(\theta) \right) - \frac{2C_{12} \nu_{tip}}{G_{tip}(1+\nu_{tip})} r \sin \theta + A_1 \cos \theta + u_{y_0} + O(r^{3/2}) \quad (\text{II.54})$$

Où A_1 et u_{y_0} sont respectivement les termes de rotation et de translation du corps rigide. Erdogan [35,36] modifia plus tard, les équations du champ de contraintes en fond de fissure pour tenir compte explicitement du gradient exponentiel du matériau pour une inclinaison arbitraire à la direction de la fissure.

$$\sigma_{ij} = e^{\beta x} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2r\pi}} f_{1ij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2r\pi}} f_{2ij}(\theta) \right) + T + O(r^{1/2}) \quad (\text{II.54})$$

Toutefois, pour les matériaux à gradients de propriétés simplifiés étudiés dans la littérature, cette forme de l'équation n'est pas souvent utilisée. Des études expérimentales et numériques des intensités de contraintes en fond de fissure dans les matériaux FGMs sont basées sur une forme plus simple développée par Eischen[32].

Menjivar et Tippur [37], a évalué l'applicabilité du champ homogène en pointe de fissure dans les FGMs et trouvé que la taille du champ homogène diminue lorsque le gradient du matériau augmente. Plus récemment, Shukla et ses étudiants ont développé des champs de contraintes de pointe de fissure pour les matériaux fonctionnellement gradués à l'aide d'une analyse asymptotique de la fonction de contraintes de Westergaard [38, 39].

II.3.2 Intégrale de l'interaction

Dans les matériaux monolithiques, les deux méthodes les plus courantes pour lesquelles le facteur d'intensité des contraintes est calculé sont des formes finies des méthodes d'analyse et méthodes de l'intégrales J. Une répartition similaire des méthodes est possible pour les

FGMs ; Cependant, ces méthodes doivent maintenant représenter le matériau gradué. Pour expliquer le gradient de la matière, les méthodes d'analyse de forme finie deviennent plus complexes et nécessitent des hypothèses simplificatrices. De même, l'interaction standard intégrée dans la plupart des programmes par éléments finis doit être reformulée pour tenir compte des matériaux gradués. Normalement au cours de la formulation de l'interaction intégrale, des termes tels que la dérivée de l'équation sont ignorées. Pour un matériau monolithique, la dérivée de l'équation est égale à zéro et ne contribue en rien au calcul des facteurs d'intensité de contraintes . Cependant, ceci et autres conditions sont non nulles dans le cas d'un matériau en permanence gradué et doit être conservé pour maintenir l'indépendance du contour de l'intégrale. Dans une perspective de recherche, chaque méthode a ses avantages. Les méthodes basées sur l'interaction intégrale demeurent de nature générale et peuvent être appliqués à n'importe quelle combinaison de gradient continu de matière, et de conditions de géométrie et de chargement, en autorisant les gradients de matière réelles et des formes arbitraires à analyser. Les méthodes d'analyse sont généralement considérés comme étant exacts.

II.3.3. Formulation de l'interaction intégrale d'un matériau homogène

l'interaction intégrale, telle qu'implémentée dans la plupart des codes de calcul MEF, est dérivée de l'intégrale J en supposant que les propriétés des matériaux sont homogènes. Le calcul de l'intégrale d'interaction implique une superposition des contraintes analytiques et champs de déplacement données par l'équation (II.55), avec les champs d'éléments finis dérivés créant une formulation intégrale J

$$J^s = \int_A \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{ij} + u_{i,1}^{aux}) - \frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux}) (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j} \right] q_{,j} dA$$

$$+ \int_A \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{ij} + u_{i,1}^{aux}) - \frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux}) (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j} \right]_{,j} dA \quad (II.55)$$

Cela dépend de champs (auxiliaires) analytiques et numériques [24-28]. Algébriquement , cette formulation peut être séparée en trois termes :

- L'élément fini basée sur J-Intégrale
- Le champ auxiliaire sur J-Intégrale
- l'interaction intégrale (M-intégrale)

$$J^S = J + J^{aux} + M \quad (II.56)$$

où l'interaction intégrale est donnée par :

$$\begin{aligned} M = & \int_A [(\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}) - (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j}] q_{,j} dA \\ & + \int_A (\sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,1} - C_{ijkl,1} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}^{aux})) q dA \end{aligned} \quad (II.57)$$

Le deuxième terme de l'équation (II.6) comprend l'équation d'équilibre et de la dérivée de l'équation constitutive, termes qui disparaissent d'un matériau homogène. Ainsi, l'équation intégrale de l'interaction standard se simplifie en:

$$M = \int_A [(\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}) - (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j}] q_{,j} dA \quad (II.58)$$

L'influence de l'interaction intégrale, c'est qu'il ne comprend que les termes croisés entre les champs numériques et auxiliaires et par conséquent, avec une sélection appropriée des champs auxiliaires, les valeurs facteurs d'intensité de contraintes KI et KII peuvent être déterminées uniquement d'après les résultats numériques par éléments finis.

$$M = \frac{2(K_I . K_I^{aux} + K_{II} . K_{II}^{aux})}{E} \quad (II.59)$$

II.3.4 Formulation de l'interaction intégrale dans les FGMs

Pour les FGMs, le terme d'équilibre et de la dérivée de l'équation sont nulles. Pour maintenir le chemin du contour de l'indépendance ces termes doit être conservés. Plusieurs formulations équivalentes de l'intégrale d'interaction non homogènes ont été développées [24, 25, 27]: la formulation de non-équilibre, la formulation de l'incompatibilité et l'élaboration constante de tenseur constitutive. Des trois formes, la formulation de non-équilibre

$$\begin{aligned} M = & \int_A [(\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}) - (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j}] q_{,j} dA \\ & + \int_A (\sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,1} - C_{ijkl,1} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}^{aux})) q dA \end{aligned} \quad (II.60)$$

est la plus simple et a été mise en place dans le code d'éléments finis code IFranc[40].

Comme la formulation homogène, cette forme de l'interaction intégrale, avec une sélection appropriée des champs auxiliaires, permet d'extraire les valeurs d'intensité de contraintes de l'équation (II.59). La vérification de l'exactitude des facteurs d'intensité de contrainte calculés à l'aide de l'intégrale d'interaction modifiée a été réalisée par comparaison avec les méthodes d'analyse « exactes » et autres méthodes numériques [41].

La figure I.12 montre la variation de la densités de l'énergie critiques de rupture en fonction de la fraction volumique Ti dans un système FGM Ti-TiB [14, 15].

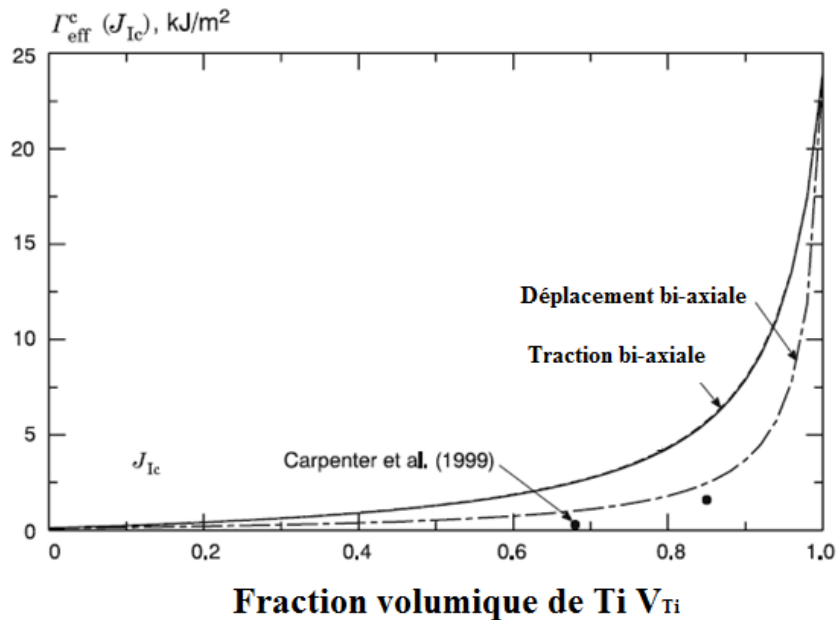


Figure II.12: Densités de l'énergie critiques calculées à partir des modèles de zone cohésive en fonction V_{Ti} . Les valeurs J_{1c} pour deux valeurs spécifiques de V_{Ti} [42,43] pour la comparaison.

References

- [1] R. Sburlati , S.R. Atashipour , S.A. Atashipour . 'Reduction of the stress concentration factor in a homogeneous panel with hole by using a functionally graded layer. *Composites: Part B* 61 (2014) 99–109.
- [2] Roberta Sburlati 'Stress concentration factor due to a functionally graded ring around a hole in an isotropic plate '*International Journal of Solids and Structures* 50 (2013) 3649–3658.
- [3] D.V. Kubair, B. Bhanu Chandar 'Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension' *International Journal of Mechanical Sciences* 50 (2008) 732–742
- [4] Mohsen Mohammadi, John R. Dryden, Liying Jiang 'Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate' *International Journal of Solids and Structures* 48 (2011) 483–491.
- [5] Ankitkumar B. Makwana¹, Khushbu C. Panchal², Anish H. Gandhi 'Stress Analysis of Functionally Graded Material Plate with Cut-out' *International Journal of Advanced Mechanical Engineering*. ISSN 2250-3234 Volume 4, Number 5 (2014), pp. 495-500
- [6]. Tawakol A. Enab , *Stress concentration analysis in functionally graded plates with elliptic holes under biaxial loadings* , Ain Shams Engineering Journal (2014).
- [7]. Yang QuanQuan, Gao CunFa, Chen WenTao. *Stress concentration in a finite functionally graded material plate* , *Physics, Mechanics & Astronomy*, July 2012 ,Vol.55 No.7: 1263–1271
- [8]. Parveen K. Saini, Mayank Kushwaha , *Stress Variation around a Circular Hole in Functionally Graded Plate under Bending*, *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering* Vol:8 No:3, 2014
- [9]. Manneth, V., *Numerical Studies on Stress Concentration in Functionally Graded Materials*, Master's Thesis, University of Rhode Island, 2009.
- [10]. Timoshenko, S., Goodier, J.N., 1970. *Theory of Elasticity*, third ed. McGraw-Hill, New York.
- Tutuncu, N., 2007. Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially varying properties. *Eng. Struct.* 29, 2032–2035.
- [11] Wang, C., 1953. *Applied Elasticity*. McGraw-Hill, New York.
- [12] Pilkey, W.D., Pilkey, D.F., 2008. *Peterson's Stress Concentration Factors*, third ed. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey.

- [13] Braun, M., 1993. *Differential Equations and Their Applications*, fourth ed. Springer, New York.
- [14]. Mohammadi, M., Dryden, J.R., 2009. Influence of the spatial variation of Poisson's ratio upon the elastic field in nonhomogeneous axisymmetric bodies. *Int. J. Solids. Struct.* 46, 225–232.
- [15]. Erdelyi, A., 1981. *Higher Transcendental Functions, vol. 1.* Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.
- [16] A. ZEGHLOUL Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture
- [17] Ural A (2004) Modeling and simulation of fatigue crack growth in metals using LEFM and a damage-based cohesive model, these *Cornell University*
- [18]. Jin ZH, Paulino GH and Dodds Jr RH (2002) Finite element investigation of quasi-static crack growth in functionally graded materials using a novel cohesive zone fracture model. *Transactions of the ASME. Vol.69:307-379*
- [19]. Jin ZH, Paulino GH and Dodds Jr RH (2003) Cohesive fracture modeling of elastic–plastic crack growth in functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics. Vol. 70:1885-1912*
- [20]. Konda N and Erdogan F (1994) The mixed mode crack problem in a non-homogeneous elastic medium. *Engineering Fracture Mechanics. Vol. 47 No. 4:533-545*
- [21]. Chan YS, Fannjang AC and Paulino GH (2003) Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science, Vol. 41:683-720*
- [22]. Rao BN and Rahman S (2003) Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics. Vol. 70:1-27*
- [23]. Walters MC, Paulino GH and Dodds Jr RH (2004) Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading. *International Journal of Solids and Structures. Vol. 41:1081-1118*
- [24]. Kim JH and Paulino GH (2005) Consistent Formulations of the interaction integral method for fracture of functionally graded materials. *Journal of Applied Mechanics. Vol. 72:351-364*
- [25]. Kim JH (2000) Mixed-mode crack propagation in functionally graded materials. *University of Illinois at Urbana-Champaign*

- [26]. Kim JH and Paulino GH (2002) Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 53:1903-1935
- [27]. Kim JH and Paulino GH (2003) T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 11-12 : Vol. 192 No. 11-12:1463-1494
- [28]. Kim JH and Paulino GH (2003) An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. Vol. 58. :1457-1497
- [29]. Paulino GH and Kim JH (2004) A new approach to compute T -stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method. *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 71:1907-1950
- [30]. Shim DJ, Paulino HG and Dodds Jr RH (2006) A boundary layer framework considering material gradation effects. *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 73. No. 5:593-615
- [31]. Kim JH and Paulino GH (2002) Isoparametric graded finite elements for non-homogeneous isotropic and orthotropic materials. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 69:502-514
- [32]. Eischen JW (1987) Fracture of non homogeneous materials. *International Journal of Fracture*. Vol. 34:3-22
- [33]. Williams ML (1957) On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 24:109-114
- [34]. Sanford RJ (2003) Principles of fracture mechanics. Person Education Inc., NJ
- [35]. Erdogan F (1996) Fracture mechanics of functionally graded materials. Final technical report. Bethlehem: Lehigh University
- [36]. Erdogan F (1998) Some basic problems on the mechanics of functionally graded materials. Bethlehem: Lehigh University
- [37]. Marur PR and Tippur HV (2000) Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient. *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 37:5353-5370

- [38]. Jain N, Rousseau CE and Shukla A (2004) Crack-Tip stress fields in functionally graded materials with linearly varying properties. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. Vol. 42:155-170
- [39]. Parameswaran V and Shukla A (2002) Asymptotic stress fields for stationary cracks along the gradient in functionally graded materials. *Journal of Materials Science*. Vol. 69 No. 3:240-243
- [40]. Kim JH and Paulino GH, Software - IFranc functionally graded material finite element code.
- [41]. Brett Kenneth Hauber, M.S. These 'Fatigue crack propagation in functionally graded materials' The School of Engineering of the University Of Dayton
- [42] Jin, Z.-H., Paulino, G.H. and Dodds Jr., R.H. (2003). Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics* **70**, 1885–1912.
- [43] Carpenter, R.D., Liang, W.W., Paulino, G.H., Gibeling, J.C. and Munir, Z.A. (1999). Fracture testing and analysis of a layered functionally graded Ti/TiB beam in 3-point bending. *Materials Science Forum* 308–311, 837–842.
- [44] Mohsen Mohammadi , John Dryden. stress concentration around a circular hole in a FG plate under biaxial loading Faculty of Engineering, University of Western Ontario, London, Canada, N6A 5B9

III.1.Introduction

Les matériaux composites à gradient de propriétés (FGM) sont des matériaux composites produits en changeant sans interruption les fractions volumiques dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité des propriétés matérielles et de réduire les contraintes résiduelles thermiques. Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux [1]. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement discontinu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels [2]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [3].

La méthode des éléments finis a été utilisée pour la modélisation numérique [14].

L'effet d'une bande en FGM autour d'un trou dans une plaque homogène a été analysée pour la réduction du facteur de concentration de contrainte sous chargement bi axiales [4]. De nombreux chercheurs s'intéressaient dans le calcul du facteur de concentration de contrainte (SCF) dans les plaques en FGM pour deux types de trous (circulaires, elliptiques)[5-13].

L'objectif de cet travail est d'étudier et analyser le comportement mécanique des plaque en FGMs comportent une entaille latérale semi-circulaire. En utilisant la loi exponentielle de la variation du module de Young et un coefficient de Poisson considéré constant, le facteur de concentration de contrainte (SCF) dépend de la direction de la graduation des matériaux constitutifs. Nous avons 'étudier l'effet d'une bande en matériaux à gradient de propriétés (FGM) sur la réduction de facteur de concentration de contraintes autour d'une entaille dans une plaque en céramique. La méthode des éléments finis est utilisée pour étudier le rendement

d'une bande FGM entourant une entaille dans une plaque sollicitée en traction. Une étude paramétrique pour plusieurs paramètres mécaniques et géométriques tels que la largeur de la bande FGM et le rapport des composants de cette dernière a permis d'optimiser la réduction du SCF. L'effet du rayon de l'entaille est également étudié.

Le présent travail, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour calculer le facteur de concentration de contraintes au bord d'une entaille latérale semi-circulaire dans une plaque en céramique homogène TiB et un FGM à base TiB pour différentes combinaisons céramique-métal. Le calcul des SCF's est fait pour les trois types de directions de gradation de l'FGM x, y, z et dans la direction du rayon de l'entaille. Pour réduire l'SCF, nous avons utilisé une bande en FGM autour de l'entaille dans une plaque en céramique.

III.2. Formulation du problème

Une plaque FGM avec une entaille latérale semi circulaire est soumise à une traction uniaxiale égale à $\sigma_0 = 100$ MPa. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont :

Largeur $W = 20$ mm; hauteur $H = 2W$ et l'épaisseur $t = 2$ mm. L'encoche latérale possède un rayon $r = a$.

L'origine des coordonnées coïncide avec le centre de l'entaille. Pour des raisons de symétrie du chargement et de la géométrie, la moitié de la plaque a été étudiée (fig.1). Les conditions aux limites du modèle ont été imposées en restreignant les déplacements en y ($U_2 = 0$) à $y = 0$ et des rotations autour des axes OX et OZ ($UR_3 = 0$ et $UR_2 = 0$) à $y = 0$ dans le plan de symétrie Oxz du modèle complet. Les propriétés des différents constituants de la plaque FGM (métal, céramique) utilisés sont indiqués dans le tableau 1.

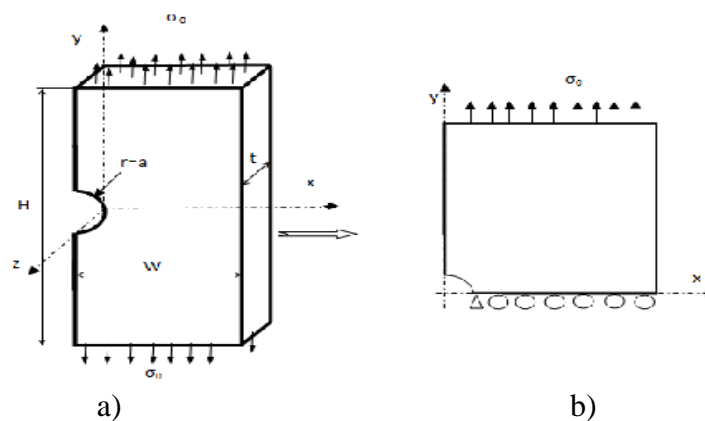


Figure III.1 : modèle géométrique de la plaque avec une entaille latérale circulaire,

a) la plaque entière, b) la moitié de la plaque

Tableau III : propriétés des constituants du matériau FGM utilisées dans les calculs.

Nature	Module de Young (GPa)	Coefficient. de Poisson
Al	72	0.3
Ti	110	0.3
Cu	124	0.3
Ni	215	0.3
TiB	375	0.3

La figure 2 montre la variation du module de Young pour différentes combinaisons de métal_céramique. La variation est exprimée par la loi exponentielle e-FGM :

$$E(\xi) = E_2 e^{\beta \xi} \quad (\text{III.1})$$

Avec : $\beta = \frac{1}{L} \log \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$

Où $E_2 = E(0)$ est le module de Young du métal et E_1 Le module de Young de céramique.

Différentes configurations du matériau à gradient de propriété peuvent être obtenues. Selon les directions désirées (fig.3) :

$\xi = x$ and $L=W$ pour x-FGM (fig.3.a).

$\xi = y$ and $L=W$ pour y-FGM (fig.3.b).

$\xi = \sqrt{x^2 + y^2} - a$ et $L=W\sqrt{2}$ pour r-FGM (fig.3c).

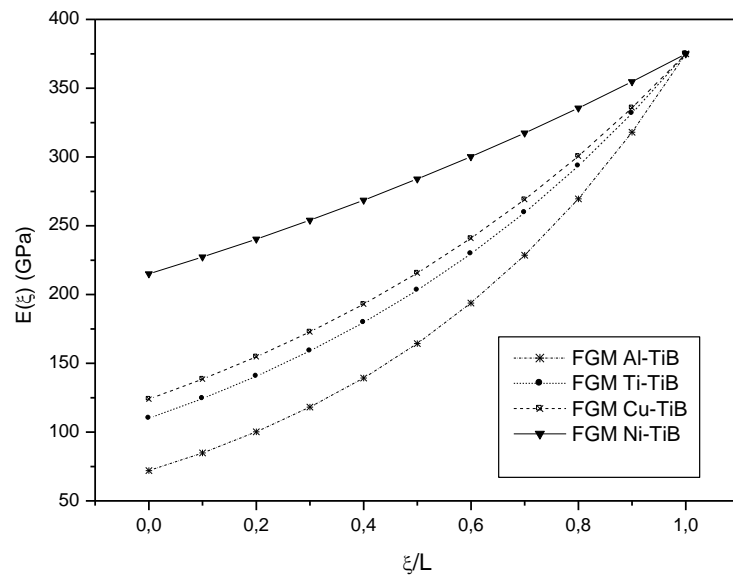


Figure III.2 : variation exponentielle du module de Young pour différentes combinaisons de constituants

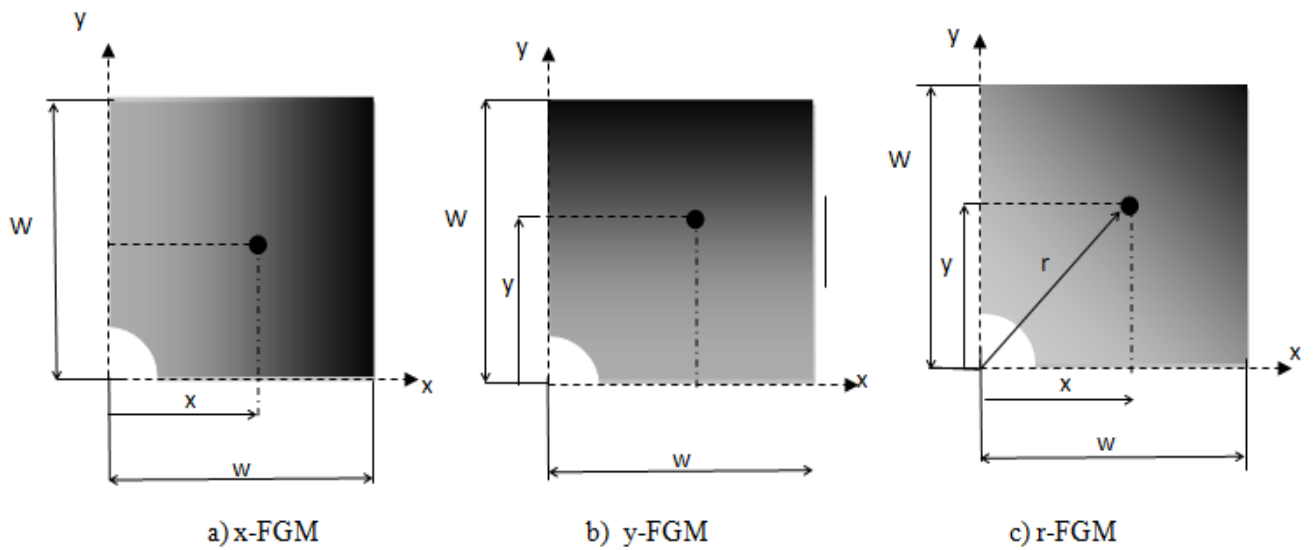


Figure III.3 : direction de variation du module de Young de l'FGM

a) x-FGM variation, b) y-FGM variation, c) r-FGM variation,

III.3. Modélisation par éléments finis des FGMs

Il y a généralement deux approches pour modéliser les matériaux fonctionnellement gradués, la première approche utilise des éléments homogènes de telle façon que ces éléments soient assemblés dans des couches rectangulaires alignées suivant la direction de la graduation des propriétés mécaniques. A chaque ligne d'éléments homogènes est assignée une propriété matérielle. Ceci produit une approche par étapes où la matrice de rigidité d'un élément spécifique est supposée constante (fig. III.4-a).

Bien que l'utilisation des éléments homogènes peut fournir des résultats raisonnables, elle ne se prête pas à une géométrie qui n'est pas de forme rectangulaire. En outre, en raison des gradients de fortes contraintes inévitables des problèmes de concentration de contraintes (entaille, trou, etc...), la deuxième méthode est plus précise pour évaluer le gradient de propriétés. Cette dernière utilise des éléments isoparamétriques où les variations spatiales des propriétés peuvent être affecter à chaque point de Gauss dans l'élément, où les éléments de la matrice de rigidité K_e , contiennent normalement des propriétés matérielles pour un élément. En assignant spatialement les propriétés à chaque point de Gauss, la matrice de rigidité fournit la variation dans l'élément, ce qui entraîne une transition graduée entre chaque élément (figure III.4-b).

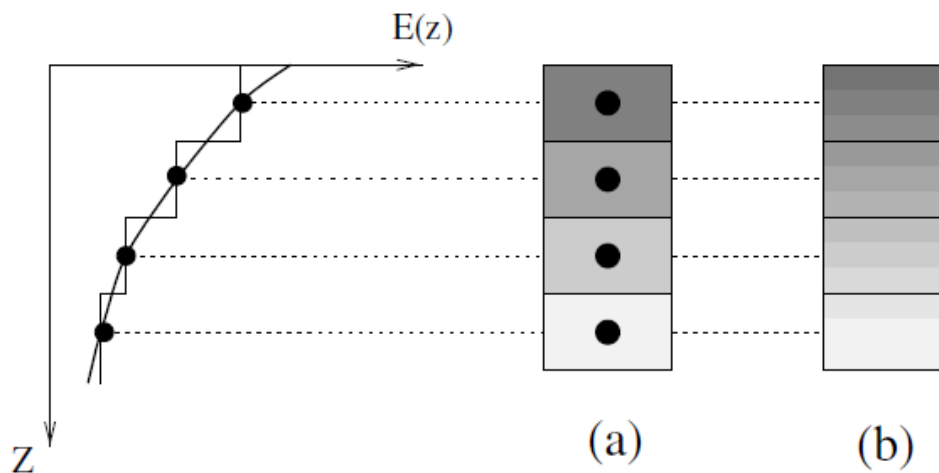


Figure III.4 Types de variation des propriétés. a) élément homogène b) élément gradué

le type d'élément utilisé dans cette étude est l'élément C3D20R. C'est un élément isoparamétrique quadratique. Cet élément prend en charge l'utilisation du sous-programme UMAT. Pour élaborer la matrice de rigidité, un ensemble de fonctions de forme est établi ayant pour résultat la matrice des composantes de déplacements suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i \quad (\text{III. 2})$$

Où $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est la matrice des composantes des déplacements au sein de l'élément, $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$ est la matrice des fonctions de formes et \mathbf{U}_i sont les déplacements nodaux, n prenant le nombre fonctions de forme. le champ de déformation est donné par l'équation (III.3).

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i \quad (\text{III. 3})$$

où $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ représentent les dérivés de $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$.

En chaque point, les contraintes sont calculées à partir de la matrice de rigidité et le vecteur de déformation selon la loi de Hooke.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (\text{III. 4})$$

Pour le cas non homogène (FGM), la matrice de rigidité du matériau $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, consiste en un ensemble de propriétés qui sont spatialement indépendantes. La matrice de rigidité d'élément, \mathbf{K}_e , est alors définie comme la fonction linéaire qui relie les déplacements nodaux \mathbf{U}_i aux forces nodales f_i ,

$$f_i = K_e U_i \quad (\text{III. 5})$$

Par le principe des travaux virtuels, le travail effectué par les forces nodales doit égalier le travail de déformations dans l'élément. En utilisant ces propriétés, la matrice de rigidité s'écrit:

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) dV \quad (\text{III. 6})$$

Où l'intégrale est prise dans le volume de l'élément.

La méthode requise pour établir la matrice de rigidité requiert équation (III.6) à intégrer numériquement en utilisant

$$\mathbf{K}_e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{B}^T(x_i, y_j) \mathbf{C}(x_i, y_j) \mathbf{B}(x_i, y_j) \mathbf{J}(x_i, y_j) \mathbf{w}_i \mathbf{w}_j \quad (\text{III. 7})$$

Où i et j correspondent aux points d'intégration de l'élément, \mathbf{J} est le déterminant de la matrice Jacobienne et \mathbf{w}_i et \mathbf{w}_j sont les poids de chaque point de Gauss.

Pour modéliser la variation du module de Young dans le sens désiré. La subroutine UMAT a été utilisée (Appendix 1). La subroutine est écrite en langage FORTRAN et fonctionne en parallèle avec Abaqus. Elle nous permet d'établir un algorithme pour calculer la variable utilisée par le solveur Abaqus. Le sous-programme a été programmé de sorte que les matrices de rigidité du matériau soient établies avec les propriétés matérielles appropriées, notamment le module de Young. Dans cette étude, le coefficient de Poisson est supposé constant, puisqu'il a été démontré que la variation du coefficient de poisson est beaucoup moins important que le module de Young (Sadd, 2009) [12]. Le calcul de la matrice de rigidité exige l'utilisation de la quadrature Gaussienne (Manneth, 2009) [13]. Un modèle symétrique de demi-plaque $20 \times 20 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur $t = 2 \text{ mm}$ comporte une entaille semi-circulaire de rayon (a) figure 5. Le maillage a été raffiné autour de l'entaille centrale et graduer dans le sens éloigné de l'entaille vers les limites extérieures de la zone d'élaboration. Le maillage initial comprend 13810 éléments quadratiques à 20 nœuds C3D20R. La base du module d'Young TiB $E1 = 375 \text{ GPa}$ et $E2$ est le module de Young du métal. Le coefficient de Poisson est considéré constant égal à 0,3.

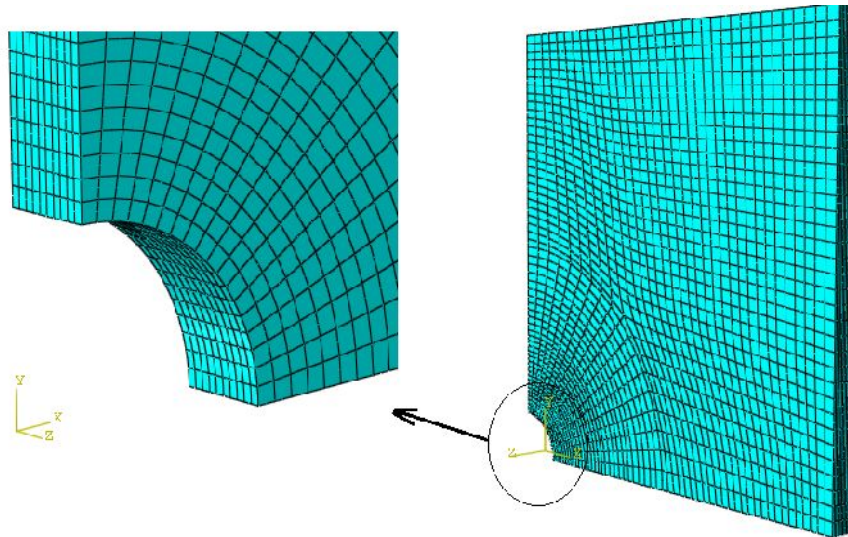


Figure III.5 : maillage du modèle 13810 éléments C3D20R.

III.4 Résultats et analyses

La méthode des éléments finis nous a permis de calculer le facteur de concentration de contraintes dans une plaque d'épaisseur normalisée constante ($t/W=0.1$) entaillée noté K_t (SCF) pour différentes directions de graduation du FGM. Ce facteur K_t est défini par le rapport entre la contrainte maximale à la contrainte appliquée σ_0 :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \quad (III.8)$$

La figure 6 montre la distribution de la contrainte normalisée σ_{22} suivant l'axe x à partir du bord de l'entaille. Dans notre cas, la contrainte σ_{max} représente la contrainte normale σ_{22} , au bord de l'entaille à $y = 0$ et notée σ_{22max} . La valeur de σ_{22max} est prise dans le milieu de l'épaisseur où elle est maximale (fig.III.7). Les valeurs maximales sont naturellement obtenues au niveau du bord de l'encoche (fig.8). Elle représentent les facteurs K_t pour les trois directions du FGM. On déduit que la direction r-FGM le long r donne la valeur minimale de K_t . Nous notons que le type r-FGM sera utilisé pour le reste de l'étude. Le gain K_t d'un r-FGM au bord de l'entaille est de 44 %, comparativement à une plaque en céramique homogène.

Le champ de déformations dans la plaque est de forme semblable à la distribution du module de Young pour les trois directions (fig.III.7), la déformation la plus faible est obtenue pour une distribution radiale de la graduation du matériau dans le cas de r-FGM.

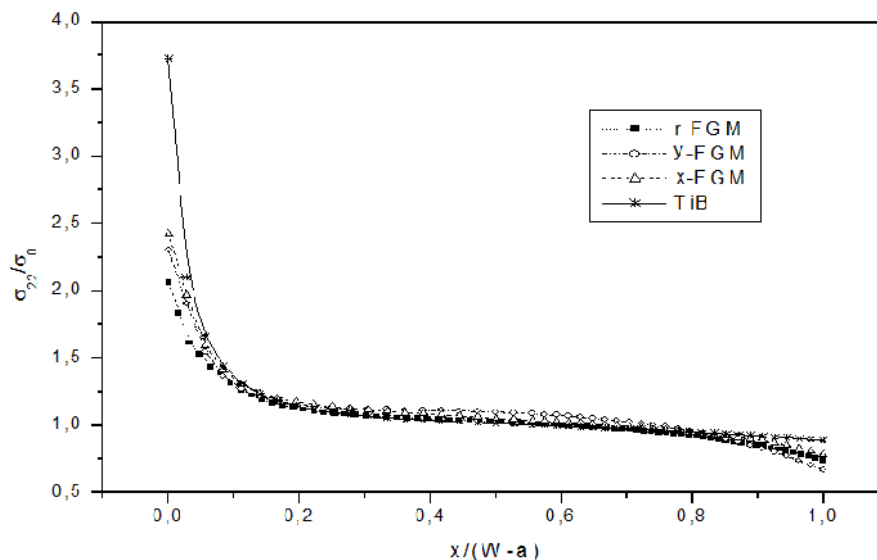


Figure III.6 : Variation des contraintes normales normalisées suivant l'axe x normalisé pour différents directions de graduations Ti-TiB FGM ($a/w=0.1$)

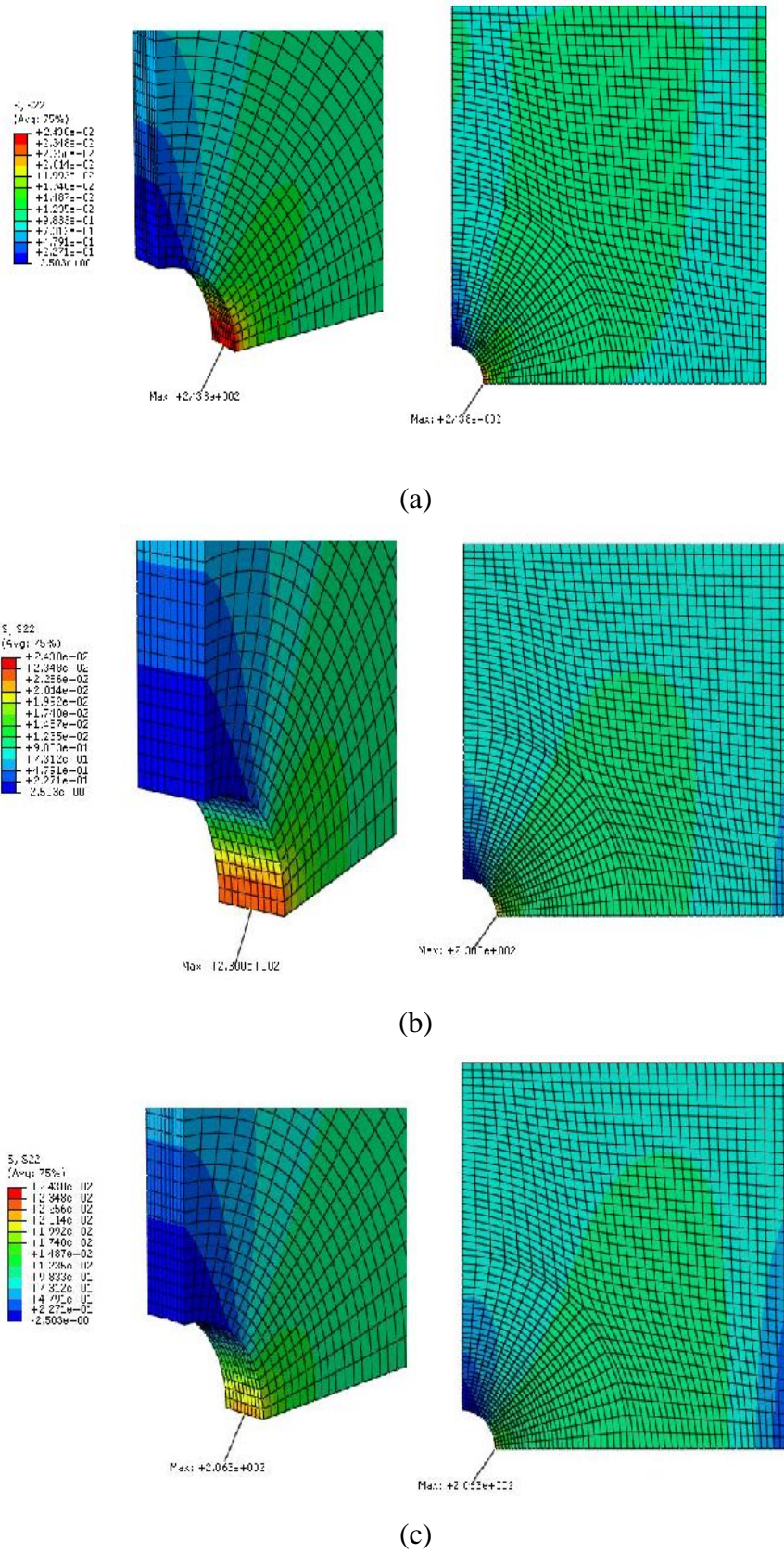
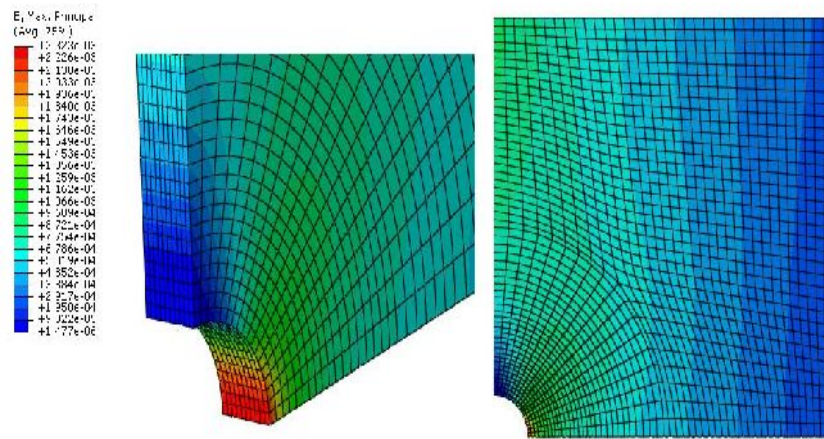
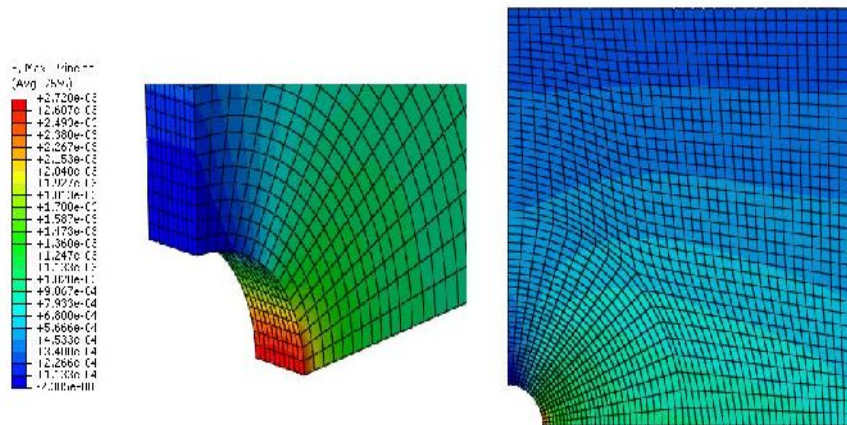


Figure III.7 : Contour des contraintes pour différentes directions FGM ($a/w=0.1$)

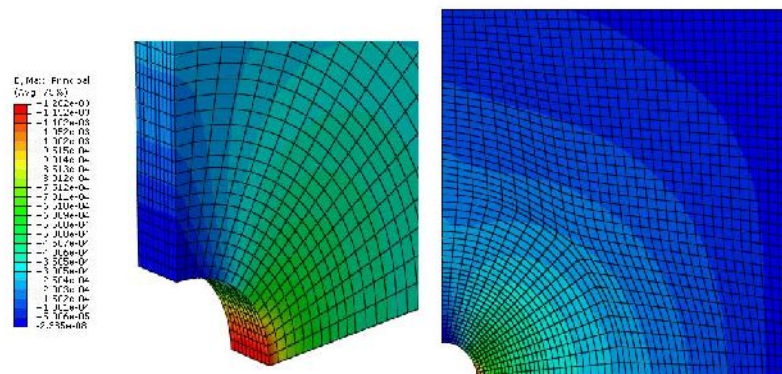
a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) variation r-FGM,



(a)



(b)



(c)

Figure III.8 : Contours des déformation maximales pour différentes directions du FGM (a/w=0.1) a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) variation r-FGM.

III.4.1 Distribution des propriétés matériels du FGM Ti-TiB suivant l'axe z

Dans le cas d'une distribution des propriétés du FGM Ti-TiB dans la direction z (épaisseur), la contrainte normalisée est maximale sur la face extérieure du bord de l'entaille du fait de la présence de la céramique, tandis qu'elle est quasiment constante le long de l'épaisseur pour les autres direction de graduation (fig. III.9, III.10)

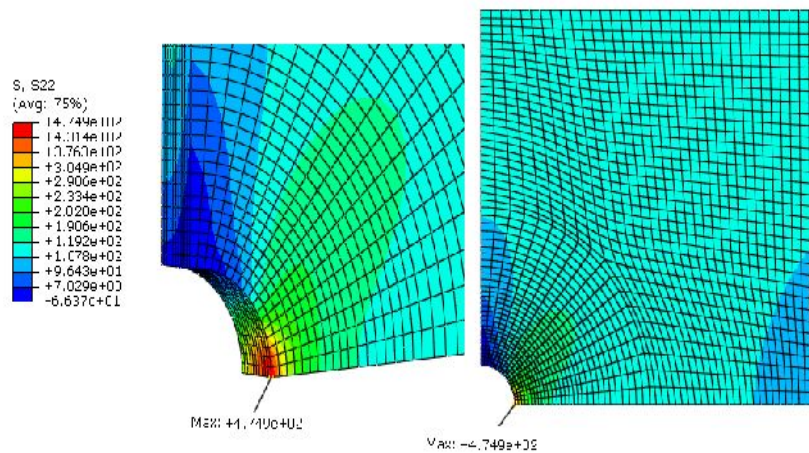


Figure III.9 : Contour des contraintes dans la direction de l'épaisseur FGM ($a/w=0.1$)

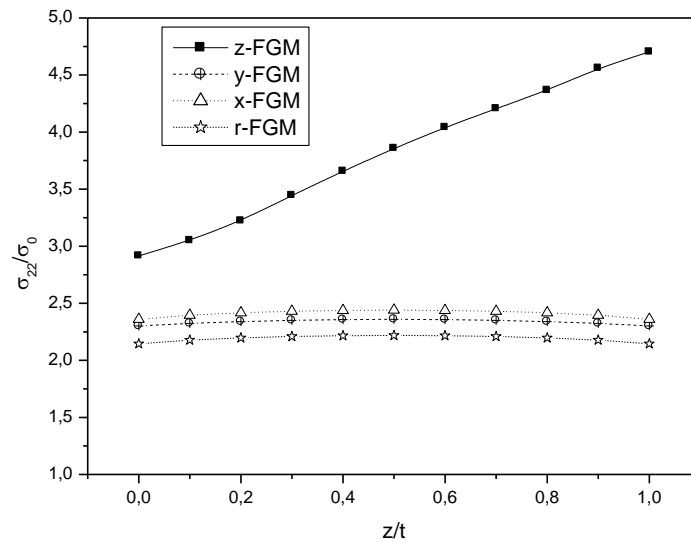


Figure III.10 : Variation des contraintes normales normalisées suivant l'axe z normalisé pour différents directions de graduation Ti-TiB FGM ($a/w=0.1$)

La figure III.11 représente la variation de K_t en fonction du rayon d'entaille normalisé, pour différents configurations du matériau à gradient de propriétés. On remarque que le facteur de concentration de contraintes varie proportionnellement avec le rayon d'entaille pour les quatre cas de figure (x-FGM, y-FGM, z-FGM, et r-FGM). Nos résultats montrent que les valeurs maximales de K_t sont obtenues pour une distribution des propriétés suivant l'axe z (z-FGM) ceci quel que soit le rapport a/w . Cette répartition est défavorable pour les plaques de faible épaisseur où s'établit la plus grande concentration de contraintes coté céramique. Par contre pour les autres types de distributions la variation du facteur de concentration est moins rapide et présente un écart d'environ $\Delta K_t = 5$ pour une taille normalisée d'entaille $a/w=0.5$ avec la distribution z-FGM.

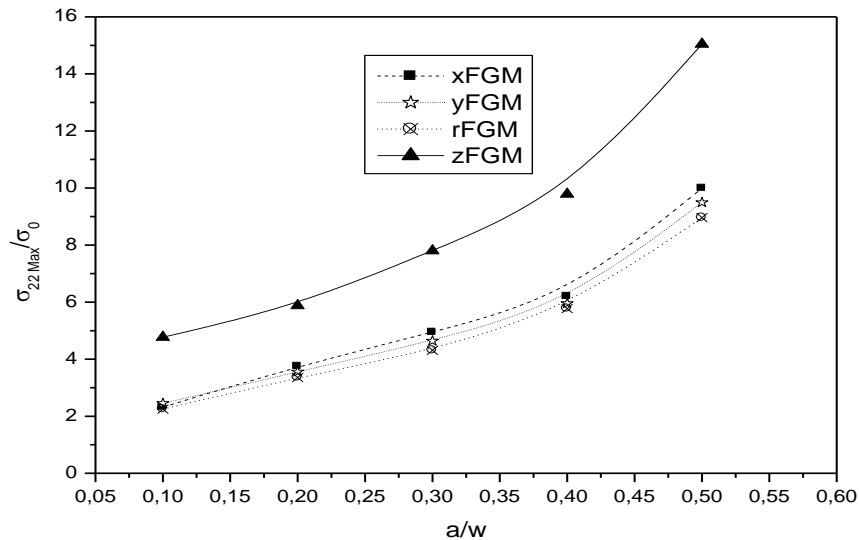


Figure III.11 : Variation de facteur de concentration de contraintes en fonction de la taille de l'entaille normalisée a/w pour $t/w=0.1$

La figure III.12 illustre la variation du facteur de concentration des contraintes en fonction de l'épaisseur normalisée de la plaque t/w , cette dernière montre que quel que soit l'épaisseur de la plaque, les valeurs de K_t restent quasi constantes pour les trois distributions r-FGM, x-FGM et y-FGM. Dans le cas où la distribution des propriétés matérielles est suivant l'axe z, on remarque que le facteur de concentration de contraintes est inversement proportionnel à l'épaisseur de la plaque, les valeurs maximales sont obtenues pour de faibles épaisseurs pour un rapport $t/w=0,1$ puis décroît avec l'augmentation de l'épaisseur et se stabilise pour des

rappports t/w supérieurs à 0.4. Ainsi, l'effet d'épaisseur sur le facteur de concentration de contraintes s'annule et le K_t tend vers des valeurs asymptotiques de l'ordre de $K_t=3$.

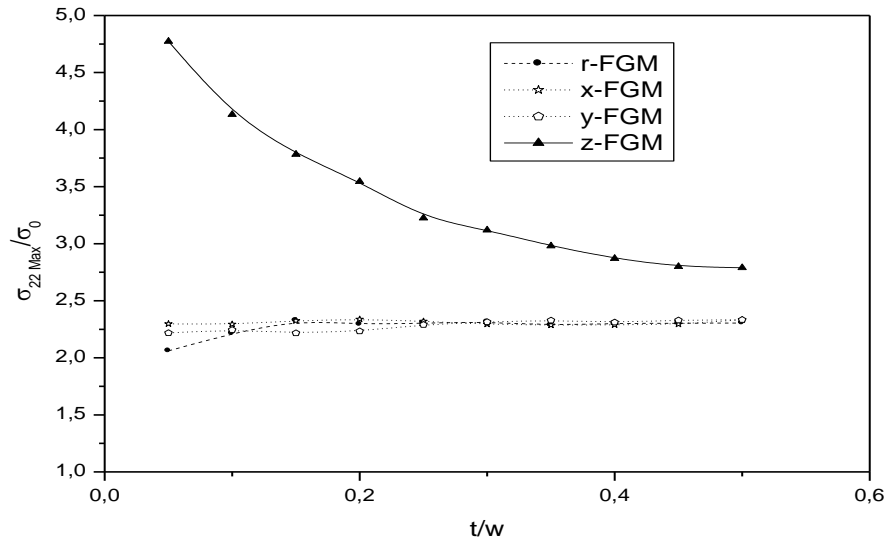


Figure III.12 : Variation de facteur de concentration des en fonction de l'épaisseur normalisée t/w pour $a/w = 0.1$

III.4.2 Effet du rapport du module de Young et la taille de l'entaille

Le profil de la distribution de la contrainte σ_{22} normalisée le long de l'axe des x est la même pour les différentes combinaisons de métal-céramique. La diminution du facteur de concentration de contraintes au bord de l'entaille est proportionnelle à la diminution du rapport $E1/E2$. Pour une profondeur normalisée de FGM entre 0.4 et 0.7, la contrainte normalisée tendent vers la valeur 1, pour une profondeur de graduation normalisée supérieure à 0.7, les contraintes diminuent légèrement (fig. III.13). La plus grande réduction du facteur de concentration de contraintes est obtenue pour la combinaison Al-TiB est d'environ 60 % par rapport à la céramique TiB (fig. III.14). La figure III.15 montre l'évolution de K_t en fonction de la taille normalisée de l'entaille pour différentes combinaisons céramique métal. K_t augmente proportionnellement avec le rayon de l'entaille pour toutes les combinaisons.

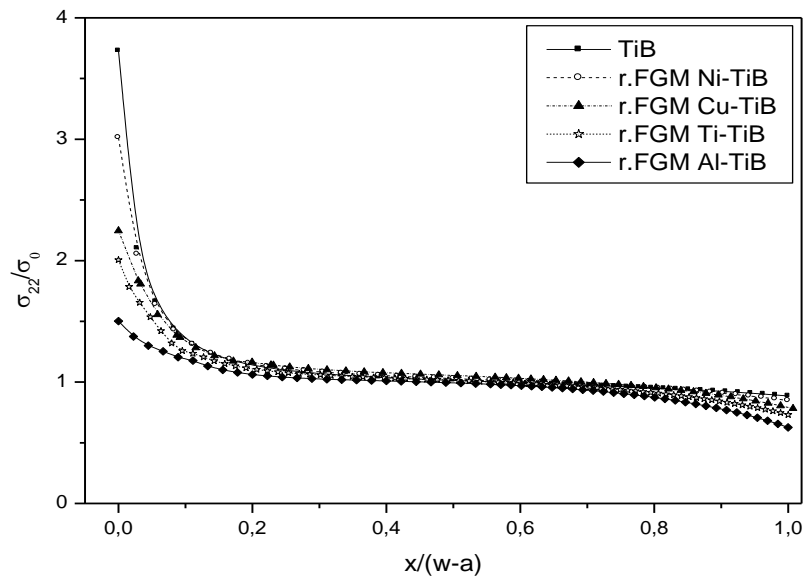


Figure III.13 : Variation des contraintes normales normalisées suivant l'axe x normalisé pour différentes combinaisons Métal-TiB FGM ($a/w=0.1$, $t/w=0.1$)

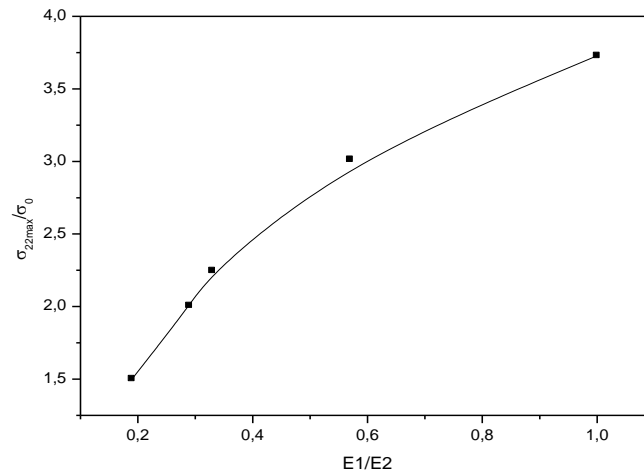


Figure III.14 : Variation du facteur de concentration de contraintes K_t pour différents rapports $E1 / E2$ ($a/w=0.1$, $t/w=0.1$)

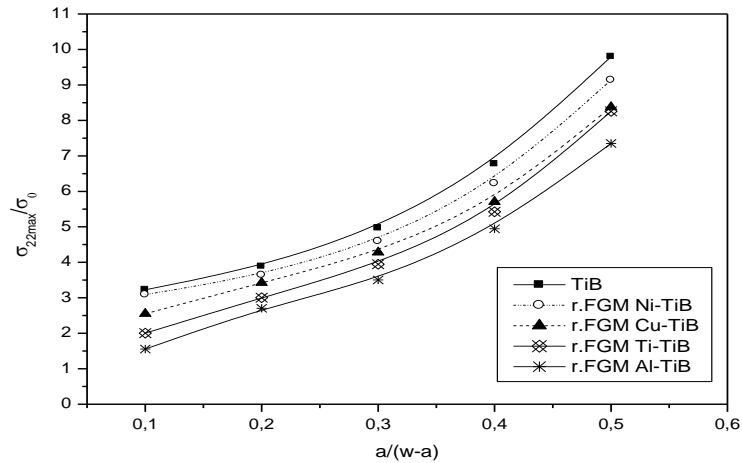


Figure III.15 : Variation du facteur de concentration de contraintes en fonction du rayon de l'entaille normalisée pour différents ratios $E1 / E2$ ($t/w=0.1$)

III.4.3 Effet d'une bande en FGM

Pour analyser l'effet d'une bande en FGM sur la réduction du facteur de concentration de contraintes K_t , nous avons pris le modèle géométrique d'une plaque en céramique TiB contenant une couche FGM (r-FGM Ti-TiB) autour d'une entaille circulaire de rayon a , la bande est de largeur h ($h=b-a$) (fig. III.16).

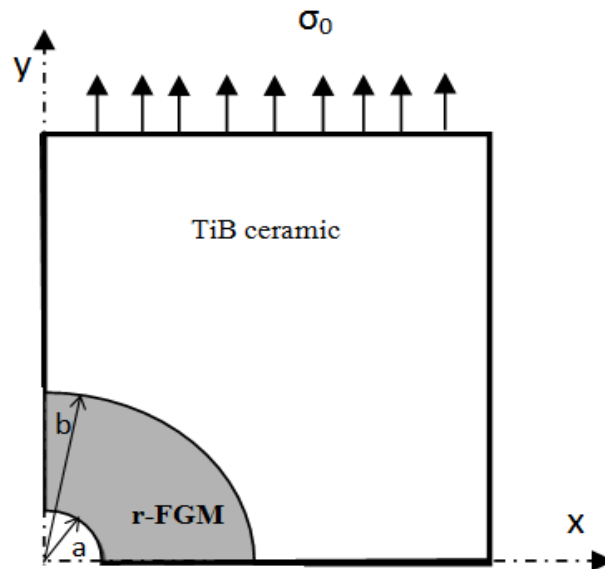


Figure III.16: modèle géométrique d'une plaque en céramique avec une bande FGM

La figure III.17 illustre la distribution des contraintes normales normalisées le long de l'axe x pour différentes largeurs de bande. Ces contraintes sont maximales au bord de l'entaille. Nous observons qu'une augmentation de la largeur h correspond à une diminution de la valeur de K_a qui représente le K_t autour de l'entaille et en même temps, nous avons une augmentation des contraintes normalisées à l'interface céramique-FGM noté K_b (fig. III.17). L'utilisation d'une couche en r-FGM Ti-TiB de taille ($h/w = 0.4$) entraîne une diminution significative du facteur de concentration K_a avec un gain de 41 % et un gain de 64% pour K_b à l'interface céramique-FGM. Nous observons aussi que la valeur de K_t est égale à 2.02 pour une plaque r-FGM complet, cette valeur est proche de celle d'une bande en FGM ($K_a = 2.2$) d'une plaque comportant la même taille d'entaille. La figure III.18 montre l'évolution de K_a et K_b en fonction de la largeur de la bande h/w . Les valeurs obtenues pour une largeur $h/w = 0.4$ de K_a et K_b sont respectivement 2.2 et 1.32. Les gains de K_a et K_b sont résumés dans le tableau 2.

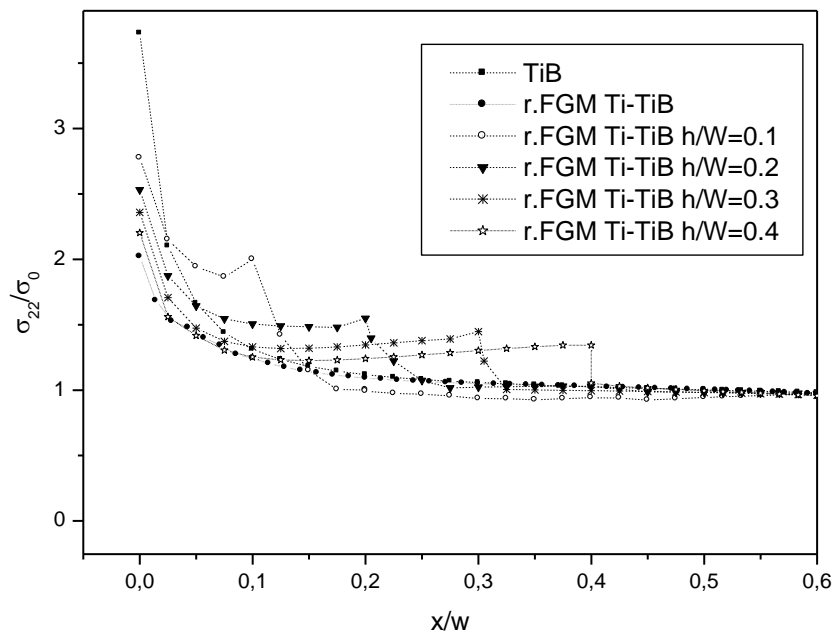


Figure III.17 : variation des contraintes normales normalisées suivant l'axe x normalisé pour différentes largeurs normalisées h/w ($a/w=0.1$, $t/w=0.1$)

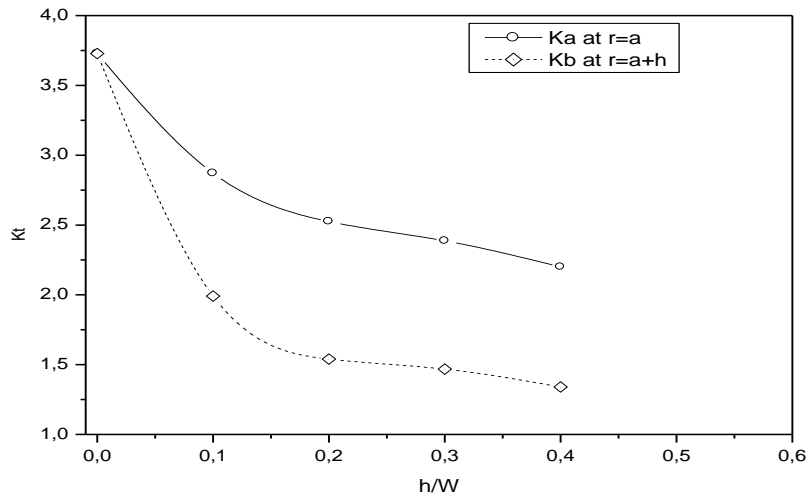


Figure III.18 : Variation de K_a et K_b en fonction de la largeur des bandes normalisées h/w ($a/w=0.1$, $t/w=0.1$)

Tableau III2 : les gains des K_a et K_b pour différents largeurs normalisée h/w .

Normalisé h/w	Gain (%)	
	$\Delta K_a/K_t$	$\Delta K_b/K_t$
0.1	25,24	46.50
0.2	32.26	22.41
0.3	36,83	60.75
0.4	41	64

Conclusions

L'utilisation d'une plaque r-FGM ou d'une bande r-FGM dans une céramique ont permis de tirer les conclusions suivantes

- La variation des propriétés du FGM dans la direction du rayon de l'encoche (r-FGM) offre le meilleur facteur de concentration de contraintes favorable comparativement à d'autres directions.
- Le plus petit rapport E_1 / E_2 est celui qui donne la meilleure garantie.
- L'utilisation d'une bande en FGM autour de l'entaille d'une largeur normalisée d'au moins 0.5 donne la meilleure performance possible.

Appendix : User subroutine UMAT x-FGM

```

c Usersubrotine for implementation of a continuous variation
c of the material elastic properties between integration
c points.
c
c ABAQUS 6.11 - user subroutine UMAT for functionally graded
c materials
c where E(X)
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
2 STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
3 NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
4 CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
c
c   INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
c
c   CHARACTER*80 CMNAME
c   DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
1 DDSDDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
c
c   E1=props(1)
c   E2=props(2)
c   ANU=props(3)
c   X= COORDS(1)
c   Y= COORDS(2)
c   W= 20
c
c   W is Width of plate and a is radus of lateral notch
c Determine L
      L=W
c Determine material properties based on global coordinates of
c gauss points.
c COORDS(1) is X-coordinates of gauss points.
c PROPS is defined by users.
c The function can be also defined by users.
      E=E2*exp(log(E1/E2)/L)*X
c
c   COMPUTE JACOBIAN
c
c   amu=E/2.0d0/(1.0d0+ANU)
c   alambda=E*ANU/(1.0d0+ANU)/(1.0d0-2.0d0*ANU)
c
c   do i=1, ndi
c     do j=1, ndi
c       if (i.eq.j) then
c         ddsdde(i,i)=alambda+2.0d0*amu

```

```
        else
            ddsdde(i,j)=alambda
        endif
    enddo
enddo
do i=ndi+1, ntens
    ddsdde(i,i)=amu
enddo
c
c STRESSES AND STRAINS AT END OF TIME STEP
c
    do i=1, ntens
do j=1, ntens
        stress(i)=stress(i)+ddsdde(i,j)*dstran(j)
    enddo
enddo
c
    return
end
```

Références

- [1] MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R, Functionally Graded Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters*, 1992, Vol. 14, p.333-35.
- [2] Koizumi M. The concept of FGM .ceramic transaction, *functionally graded materials*(1992)34,3- 10.
- [3] ABDIZADEH, H., *Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'Alumine»*, Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I-France, 1997, 212p.
- [4] Katarzyna Pietrzak *, Dariusz Kaliński, Marcin Chmielewski *Interlayer of Al₂O₃–Cr functionally graded material for reduction of thermal stresses in alumina–heat resisting steel joints* Institute of Electronic Materials Technology, 133 Wolczynska Str., 01-919 Warsaw, Poland
- [5]. Roberta Sburlati , *Stress concentration factor due to a functionally graded ring around a hole in an isotropic plate*, *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013) 3649–3658.
- [6]. Ankitkumar B. Makwana¹, Khushbu C. Panchal, Anish H. Gandhi, *Stress Analysis of Functionally Graded Material Plate with Cut-out*, *International Journal of Advanced Mechanical Engineering*. ISSN 2250-3234 Volume 4, Number 5 (2014), pp. 495-500.
- [7]. Tawakol A. Enab , *Stress concentration analysis in functionally graded plates with elliptic holes under biaxial loadings* , *Ain Shams Engineering Journal* (2014).
- [8]. D.V. Kubair, B. Bhanu-Chandar , *Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension*, *International Journal of Mechanical Sciences* 50 (2008) 732–742.
- [9]. Yang QuanQuan, Gao CunFa, Chen WenTao. *Stress concentration in a finite functionally graded material plate* , *Physics, Mechanics & Astronomy*, July 2012 ,Vol.55 No.7: 1263–1271
- [10]. Parveen K. Saini, Mayank Kushwaha , *Stress Variation around a Circular Hole in Functionally Graded Plate under Bending*, *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering* Vol:8 No:3, 2014

- [11]. William G. Buttlar, Glaucio H. Paulino, Seong Hyeok Song, . *Application of Graded Finite Elements for Asphalt Pavements*, Journal of engineering mechanics, ASCE, march 2006
- [12]. Sadd, M. H., *Elasticity, Theory, Applications & Numerics*, Elsevier Academic Press, Boston, 2009.
- [13]. Manneth, V., *Numerical Studies on Stress Concentration in Functionally Graded Materials*, Master's Thesis, University of Rhode Island, 2009.
- [14]. ABAQUS (2011); *ABAQUS manual*, Version 6.10, Pawtucket, R.I.

IV.I Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) de type céramique-métal sont bien connus comme étant des matériaux dans lesquels une composition matérielle varie progressivement dans une ou plusieurs directions afin d'optimiser les propriétés mécaniques et thermiques. Ces matériaux peuvent être conçus pour réduire les contraintes résiduelles d'origine thermique et utilisées comme barrière thermique et résistent à la corrosion coté céramique, le coté métal offre une résistance mécanique à cause de la forte ténacité des métaux [1, 2].

L'étude du comportement en rupture des FGMs de type céramique-métal est compliquée en raison du gradient des propriétés mécaniques et thermiques. Dans les matériaux FGMs de type céramique-métal, les fissures se comportent de plusieurs façons selon les conditions de variation des propriétés graduées et du chargement appliqué. L'apparition des fissures est observée dans les FGMs céramique-métal sollicités sous des chocs thermiques ou fatigue thermique [3-6]. L'amorçage de fissure est observée le long de l'interface d'un multicouches FGMs [3-7].

La rupture et l'évaluation d'une fissure dans les structures en FGM, nécessitent des connaissances du comportement en rupture de ces matériaux. La plupart des études sur la rupture des FGMs, a mis l'accent sur le comportement élastique linéaire de ces matériaux. Erdogan [8] a étudié divers problèmes de rupture des FGMs et a présenté un certain nombre de solutions du facteur d'intensité des contraintes (FIC). Plusieurs améliorations sont proposées. Jin et Noda [5] ont montré que la singularité à la tête de fissure est l'inverse de la racine carrée du rayon r dans les FGMs, pour une variation par couches de module de Youngs et de coefficient de Poisson, qui est une extension des résultats d'Eischens [9] pour un matériau non-homogène. Honein et Herrmann [10] ont proposé certains chemins d'intégration indépendants des intégrales J pour un matériau non-homogène avec une variation exponentielle où une fonction de puissance du module de cisaillement dans l'espace. Gu et Asaro [11], ont choisi une zone assez proche du front de fissure afin de considérer le matériau homogène dans cette zone et ainsi se ramener à un calcul classique de l'intégrale J , or, cela nécessite une discrétisation spéciale très fine proche du front de fissure et des calculs très volumineux. Becker et al [12], a étudié les déviations des fissures dans les FGMs. Jin et Batra [12], et Marur Tippur [14], et Anlas et al [15], ont étudié le problème K-dominant dans les FGMs.

A l'inverse des études relativement approfondies sur le comportement élastique linéaire de FGM fissurés, seulement quelques investigations étudient la rupture élasto-plastique des FGMs [16]. Kim et Suresh [17] ont étudié le renforcement de tête de fissure par une couche de matériau gradué entre deux couches de matériaux homogènes. Jin et al [18] emploie un modèle de zone cohésive pour étudier la propagation de fissure par rapport à la charge appliquée pour un spécimen TiB/Ti. Ils ont examiné en détail la procédure d'étalonnage pour les paramètres classés dans leur modèle.

Le travail proposé dans ce chapitre a pour objectif l'étude et l'analyse tridimensionnelles du comportement en rupture d'une plaque en FGMs comportant une fissure émanant d'une entaille latérale semi-circulaire, la plaque est sollicitée en traction. Cette étude est basée sur le concept de l'intégrale J. Cette dernière est évaluée en utilisant le code de calcul ABAQUS exploitant la méthode des éléments finis. En utilisant la loi exponentielle de la variation du module de Young et un coefficient de Poisson supposé constant, l'intégrale J en fond de fissure dépend de la direction de la graduation des matériaux constitutifs et de la taille de fissure. Une étude paramétrique pour plusieurs paramètres mécaniques et géométriques tels que l'épaisseur de la plaque et le rapport des composants de cette dernière a permis d'évaluer l'intégrale J.

IV.2 Modèle géométrique de la plaque comportant une fissure émanant de l'entaille

Un modèle de plaque FGM $20 \times 40 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur $t=2 \text{ mm}$ comporte une fissure débouchant de longueur c émanant d'une entaille semi-circulaire de rayon a , soumise à une traction uniaxiale égale à $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont :

Largeur $W = 20 \text{ mm}$ et hauteur $H = 2W$.

L'origine des coordonnées coïncide avec le centre de l'entaille. Pour des raisons de symétrie du chargement et de la géométrie, la moitié de la plaque a été analysée (fig. IV.1). Les conditions aux limites du modèle ont été imposées en restreignant les déplacements en y ($U_2 = 0$) à $y = 0$ et des rotations autour des axes OX et OZ ($UR_3 = 0$ et $UR_2 = 0$) à $y = 0$ dans le plan de symétrie Oxz du modèle complet. Les propriétés des différents constituants de la plaque FGM (métal, céramique) utilisés sont indiqués dans le tableau III.1(Chap. III). La variation des propriétés est exprimée par la loi exponentielle E-FGM (Equ.IV.1, fig.IV.2) :

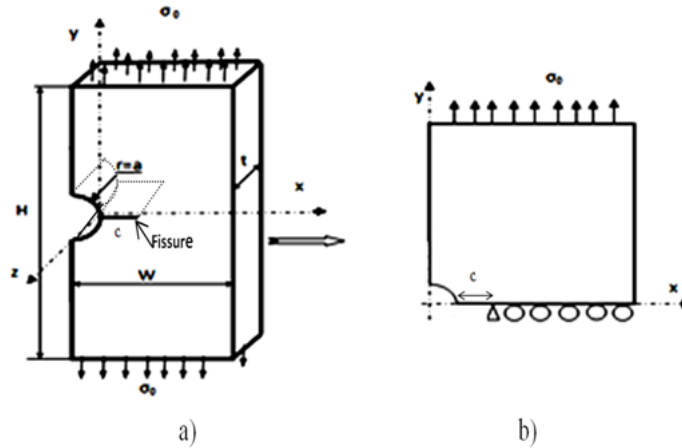


Figure IV.1 : modèle géométrique de la plaque avec une entaille latérale circulaire,
a) la plaque entière, b) la moitié de la plaque

$$E(\xi) = E_2 e^{\beta \xi} \quad (IV.1)$$

Avec : $\beta = \frac{1}{L} \log \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$

Où $E_2 = E(0)$ est le module de Young du métal et E_1 Le module de Young de céramique.
Différentes configurations du matériau à gradient de propriétés peuvent être obtenues. Selon les directions désirées (fig.IV.3) :

$\xi = x$ avec $L=W$ pour x-FGM (fig.3.a).

$\xi = y$ avec $L=W$ pour y-FGM (fig.3.b).

$\xi = \sqrt{x^2 + y^2} - a$ et $L=W\sqrt{2}$ pour r-FGM (fig.3.c).

$\xi = z$ avec $L=W$ pour z-FGM (fig.3. d).

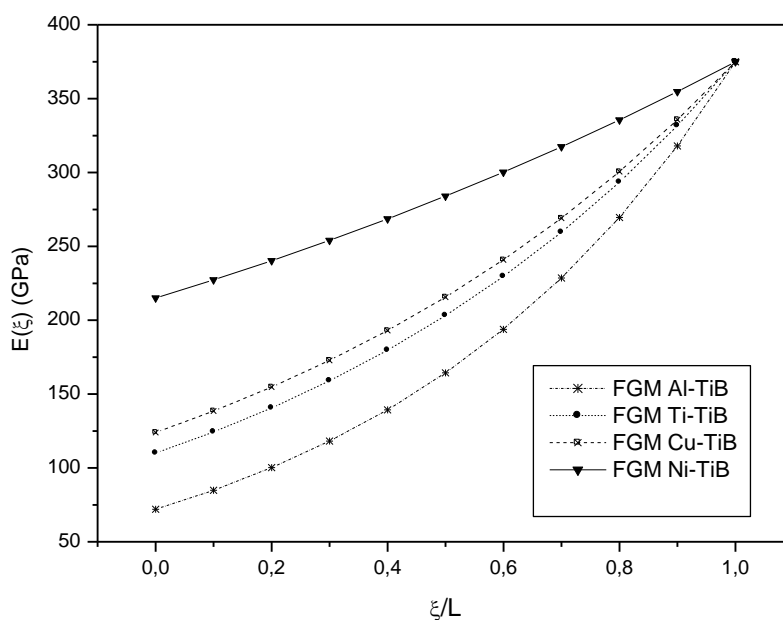


Figure IV.2 : variation exponentielle du module de Young pour différentes combinaisons de constituants

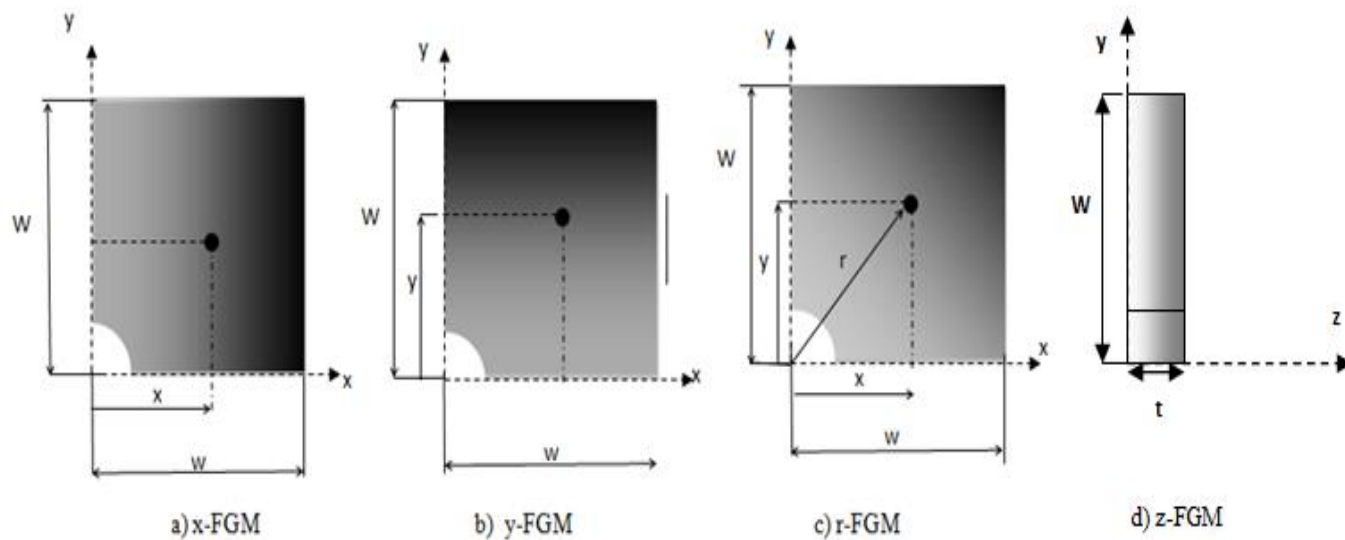


Figure IV.3 : direction de variation du module de Young de l'FGM

a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) r-FGM, d) variation z-FGM

IV.3 Modélisation par éléments finis des plaques en FGMs fissurées.

La résolution par voie analytique sur n'importe quelle structure est généralement difficile. On doit donc faire appel à des méthodes approchées dont la formulation demande l'utilisation de l'outil informatique. La méthode des éléments finis, est l'une de ces méthodes approchées, elle est l'une des techniques approximatives pour l'analyse des structures en FGMs, bi et tridimensionnelle grâce à l'évolution de l'informatique. Elle fut un outil de travail efficace pour l'analyse des problèmes mécaniques afin de connaître le comportement statique ou dynamique des systèmes et la répartition des contraintes et des déformations dans les solides. Les problèmes traités par la méthode des éléments finis sont de l'ordre de difficulté supérieure, ce qui nécessite une discrétisation de la structure en éléments finis, et cela, selon la précision et le type du problème traité.

La déclaration du gradient de propriétés peut être faite, avec l'utilisation de deux sous-programmes UMAT ou USDFLD, car les deux sont appelées pour décrire la variation des propriétés matérielles du matériau dans le sens désiré. Pour analyser et calculer l'intégrale J dans notre travail, le gradient des propriétés est mis en place par un sous-programme USDFLD où les propriétés élastiques des matériaux sont définies comme une fonction de la variable du domaine (fig. IV.5) et sa variation tout au long du sens de graduation voulu, pour modéliser la variation du module de Young dans le sens désiré. La subroutine USDFLD a été utilisé (Annexe 1) [20] est programmé dans un sous-programme USDFLD. Le sous-programme est écrit en langage FORTRAN et fonctionne en parallèle avec Abaqus[21]. Il nous permet de varier la variable utilisée par le solveur Abaqus. Le sous-programme a été programmé de sorte que les domaines soient établis avec les propriétés matérielles appropriées, notamment le module de Young.

Un modèle symétrique de demi-plaque $20 \times 20 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur $t= 2 \text{ mm}$ comporte une fissure de taille c émanant d'une entaille semi-circulaire de rayon a (fig. IV.1). Le maillage a été raffiné autour de la tête de fissure (fig IV.2.a, figIV.2.b), il comprend des éléments quadratiques à 20 nœuds C3D20R.

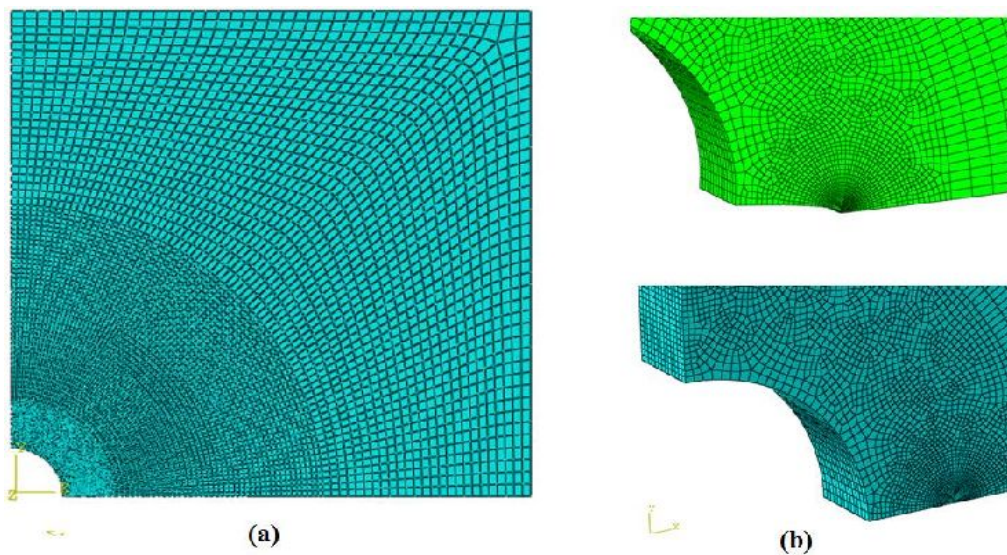


Figure IV.4: Maillages de la plaque (a) et du voisinage de la fissure (b)

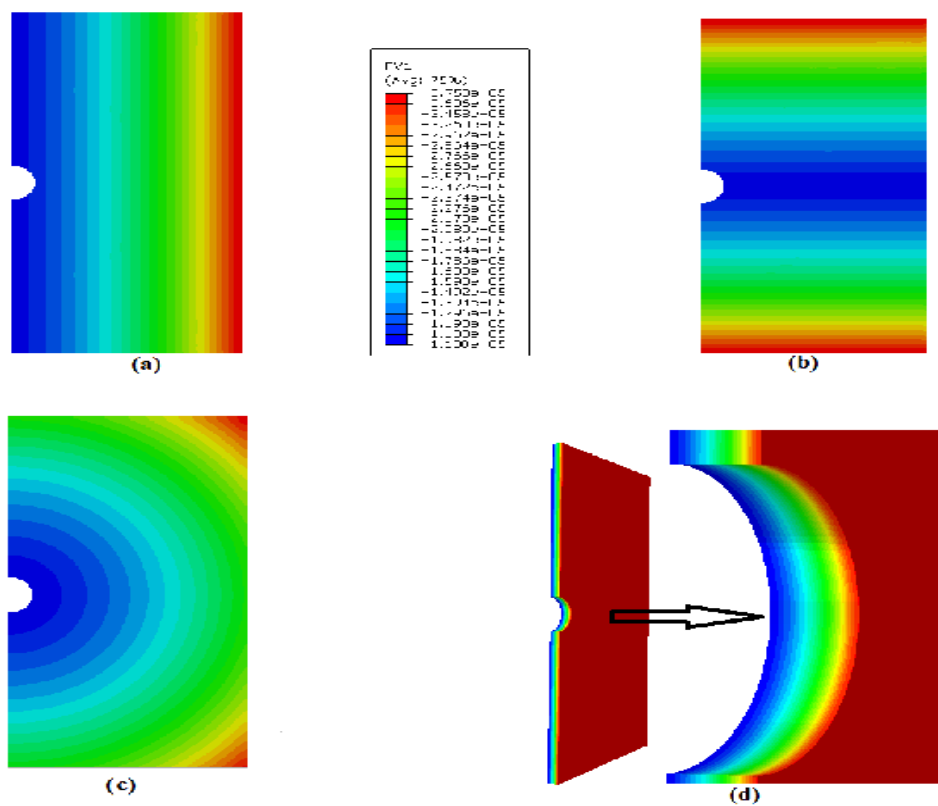


Figure IV.5 :Contour de la fonction de variation du domaine (E)

a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) variation r-FGM, d) variation z-FGM

IV.4 Résultats et analyses

IV.4.1 Effet du type de distribution sur l'intégrale J

Les résultats obtenus numériquement par la méthode des éléments finis sont représentés dans la figure IV.6. Cette dernière illustre la variation de l'intégrale J le long du front de fissure de taille normalisée $b/w = 0.15$ et d'épaisseur de la plaque normalisée $t/w=0.1$, pour différentes distributions du FGM.

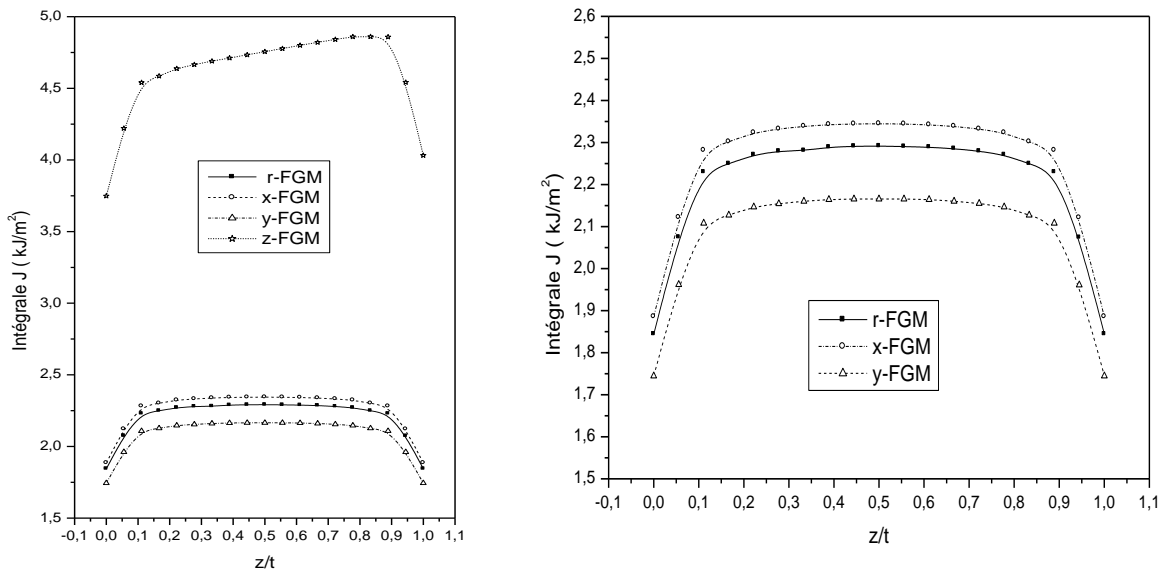


Figure IV.6: Variation de l'intégrale J le long du front de fissure pour $c/w=0.15$ pour différents types de distributions FGMs Ti-TiB pour $t=2\text{mm}$ et $a/w=0.1$

Nous constatons que la valeur maximale de l'intégrale J est obtenue pour une distribution des propriétés matérielles suivant l'axe z (z-FGM) proche de la zone de forte fraction volumique de la céramique $J=4.88 \text{ kJ/m}^2$. Ceci est dû essentiellement à la rigidité de la céramique qui peut provoquer la rupture brutale du matériau [3-6]. Les autres types de distributions présentent un maximum au milieu du front de fissure et des valeurs minimales aux bords. La valeur maximale est obtenue pour une distribution x-FGM de l'ordre de 2.34 kJ/m^2 et la valeur minimale pour une distribution y-FGM 2.16 kJ/m^2 tandis que l'intégrale J pour une distribution r-FGM présente un profil intermédiaire tendant vers le profil x-FGM.

La figure IV.7, montre la variation du maximum de l'intégrale J en fonction de la longueur de la fissure normalisée c/w pour différents types de FGMs. Nous observons sur la figure IV.7 que l'effet de la direction de distribution apparaît à partir d'une longueur de fissure normalisée égale à $c/w=0,15$. Pour les faibles tailles de fissure, le paramètre J est presque constant, sauf pour le cas de la distribution suivant z (z-FGM) où l'intégrale J est maximale (fig. IV.6).

On remarque que la direction y-FGM offre de faibles valeurs d'intégrale J par rapport aux deux autres types (x-FGM, r-FGM), ce phénomène est dû à la présence de fissure dans un domaine où la phase métallique est dominante. En effet, nous constatons un écart des valeurs de l'intégrale J, de l'ordre de 40 % entre x-FGM et y-FGM. On remarque également que le profil de variation de l'intégrale J en fonction de c/w pour un r-FGM est intermédiaire et proche de celui de x-FGM

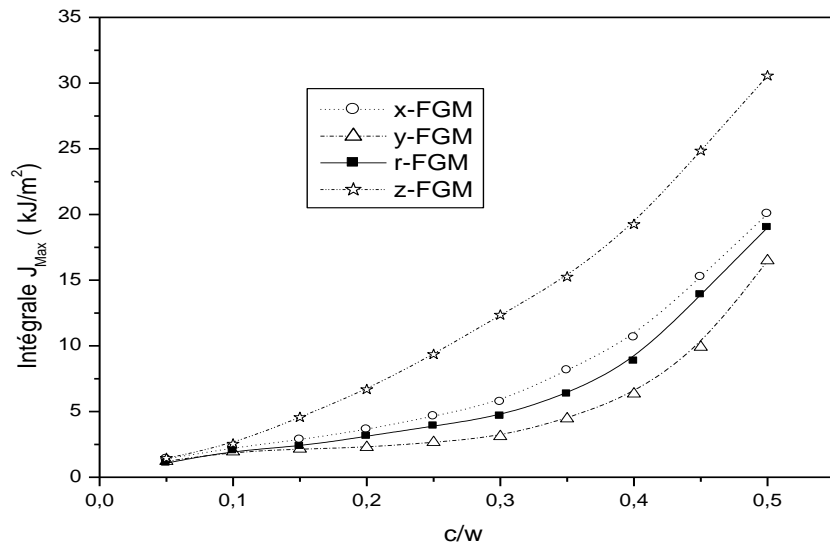


Figure IV.7: Variation de l'intégrale J maximale en fonction de la longueur de fissure normalisée c/w ($a/w=0,1$) et ($t/w=0,1$) FGM Ti-TiB

IV.4.2 Effet de l'épaisseur de la plaque sur l'intégrale J

La figure IV.8 illustre l'évolution de l'intégrale J en fonction de l'épaisseur normalisée (t/w) pour différentes directions de FGM. Les résultats illustrés sur la figure IV.8 montrent que l'intégrale J dépend non seulement de la longueur de la fissure mais aussi de

l'épaisseur t . En effet, l'augmentation de l'épaisseur t entraîne une diminution du paramètre J . Cet effet est plus marqué lorsque l'épaisseur normalisée dépasse $t/w=0.55$ pour z-FGM et est de l'ordre de 60% pour une longueur de fissure normalisée $c/w=0.15$.

Cet intégrale diminue aussi pour les autres configurations du FGM, et on note une diminution de l'ordre de 50% presque égaux pour une épaisseur normalisée supérieure à 0.55. Par conséquent l'augmentation de l'épaisseur suivant la direction du front de fissure, joue un rôle déterminant sur la résistance à la rupture des matériaux fonctionnellement gradués.

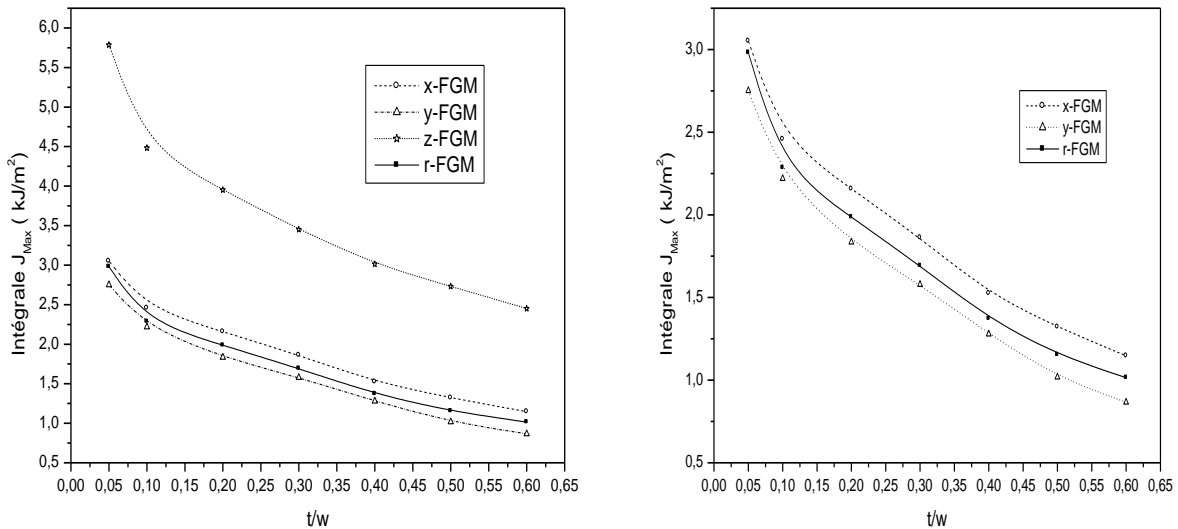


Figure IV.8: Variation de l'intégrale J maximale en fonction de l'épaisseur normalisée t/w , ($c/w=0.15$) ($a/w=0.1$) FGM Ti-TiB

IV.4.3 Effet de type de distribution y-FGM sur l'intégrale J

Dans un premier cas, on considère que l'origine du repère est au centre de l'entaille (fig IV.9.a), la variation des propriétés du FGM Ti-TiB est parallèle à l'axe x . Dans le second cas, l'origine du repère est déplacée du centre de l'entaille vers l'extrémité basse de la plaque (fig IV.9. b) pour $\theta=0^\circ$. Les autres cas sont obtenues pour un angle θ arbitraire (fig IV.9. c), la direction du

FGM est inclinée d'un angle θ autour de l'axe z . Cette analyse porte sur un FGM de même dimensions et même chargement mécanique, que le FGM étudié précédemment. La variation est exprimée par la loi exponentielle E-FGM (équ.IV.1) sauf pour L égale à:

$\xi = L$ avec $L = W$ pour y-FGM (fig IV.9.a).

$\xi = L$ avec $L = 2W$ pour y-FGM (fig IV.9.b).

$\xi = L$ avec $L = W(2\cos\theta + \sin\theta)$ pour FGM (θ) ((fig IV .9.c).

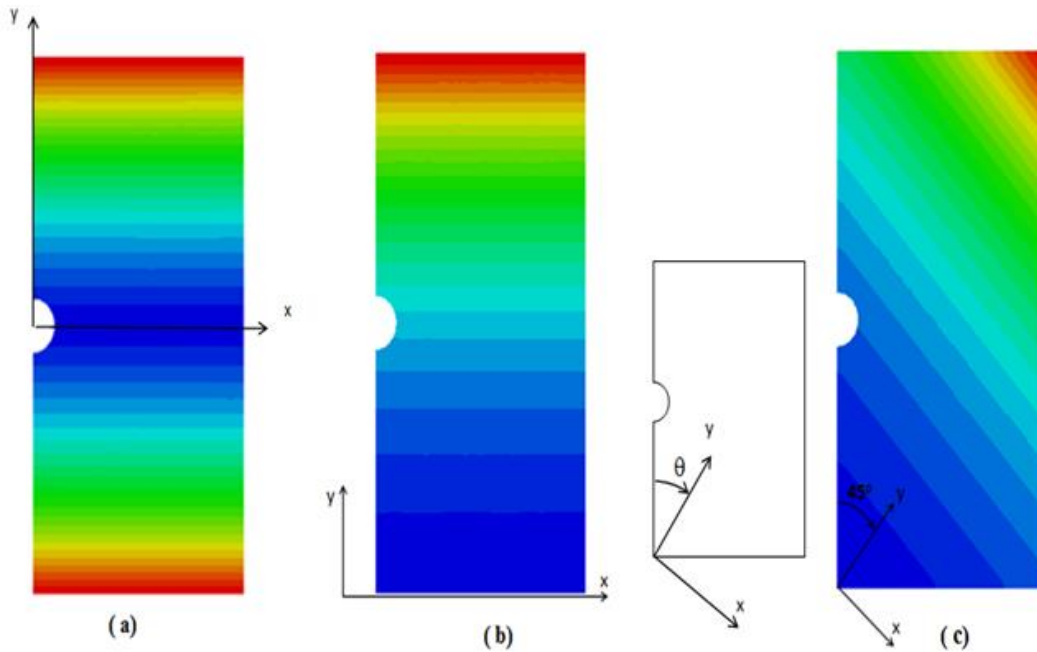


Figure IV.9: Représentation du contour FGM. a) l'origine du repère coïncide avec le centre de l'entaille, b) distribution y-FGM, c) Inclinaison de l'axe y d'un angle θ

La figure IV.10 montre la variation de l'intégrale J en fonction de la taille de fissure normalisée pour un y-FGM symétrique (fig.IV.9.a), pour un y-FGM (fig.IV.9.b) et pour un FGM de direction y inclinée de angle $\theta=45^\circ$ (fig.IV.9.c).

Nos résultats montrent que l'intégrale J augmente avec l'augmentation de la taille de fissure pour les différents cas. la variation de J est significative à partir de 30% de la largeur de la plaque. Les valeurs les plus faibles sont obtenues pour un y-FGM symétrique avec un gain maximal de l'ordre de . La figure IV.11 représente la variation de l'intégrale J en fonction l'inclinaison de distribution θ du FGM pour une taille de fissure normalisée. J diminue progressivement avec

l'augmentation de l'angle d'inclinaison. La valeur minimale de J est obtenue pour $\theta=\pi/2$, ce qui correspond à une distribution x-FGM. Le gain obtenu est alors estimé à 45%.

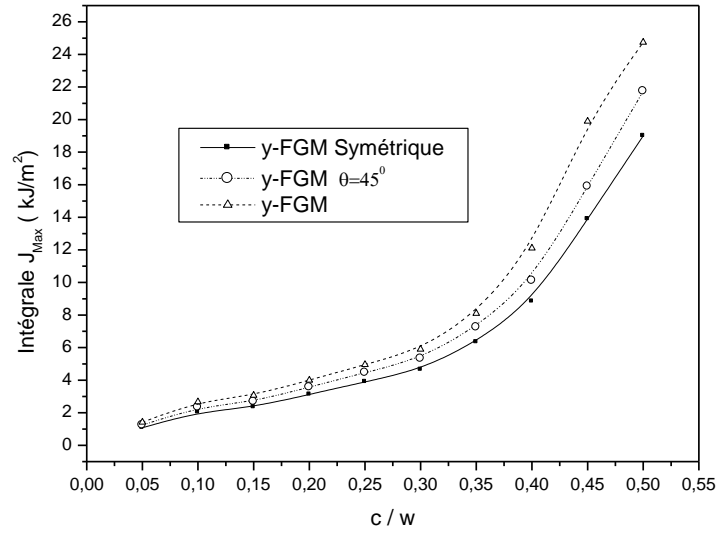


Figure IV.10: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$) FGM Ti-TiB

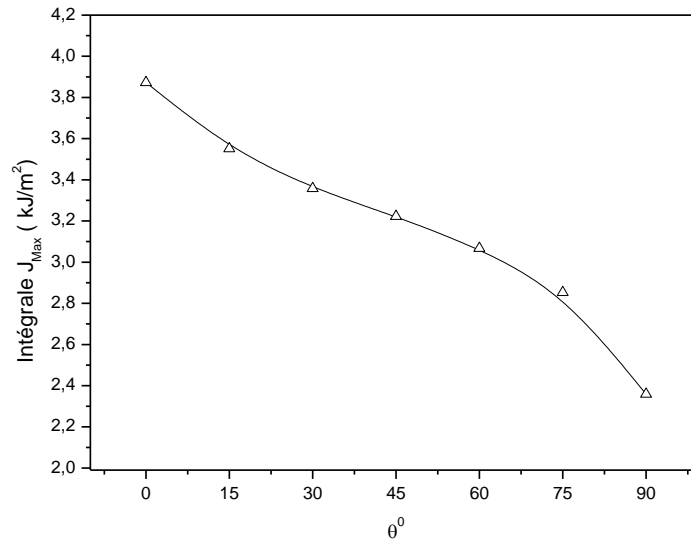


Figure IV.11: Variation de l'intégrale J en fonction de l'angle de rotation θ^0 pour une fissure de taille normalisée $c/w=0.15$ $t/w=0.1$ ($a/w=0.1$) FGM Ti-TiB

IV.4.4 Effet du rayon de l'entaille sur l'intégrale J

La figure IV.12 montre la variation de J d'un r-FGM du type Ti-TiB en fonction de la taille normalisée d'une fissure pour plusieurs rayons normalisés de l'entaille a/w . J augmente avec l'augmentation de la longueur de la fissure. L'augmentation est d'autant plus sensible que le rayon de l'entaille est grand. La variation de J est très faible lorsqu'il n'y a pas d'entaille. Pour une fissure normalisée de 0.3, la valeur de J passe de à , lorsque le rayon normalisé passe de 0.1 à 0.5 soit une perte relative de J d'environ

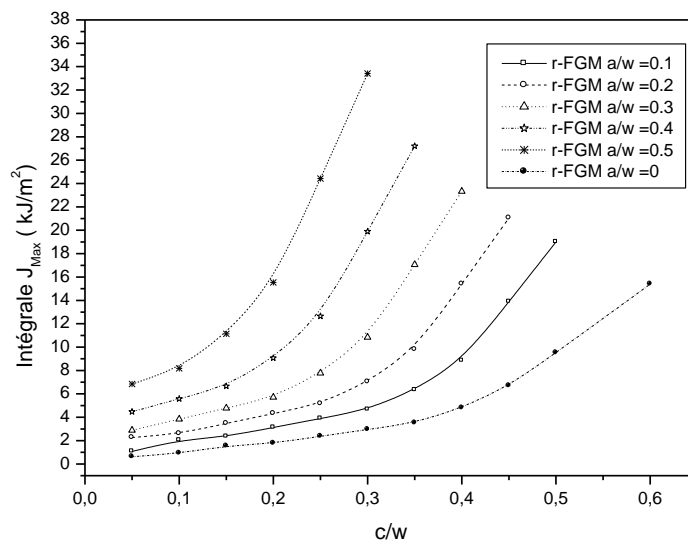


Figure IV.12: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée pour $t/w=0.1$ d'un r-FGM Ti-TiB

IV.4.5 Effet du module de Young sur l'intégrale J

La figure IV.13 montre la variation de J d'un r-FGM de différents types en fonction de la taille normalisée d'une fissure . Les différents types de FGM présentent le même profil. Le plus favorable est celui du type Al-TiB. Pour une fissure normalisée de 50%, le gain obtenu de J pour Al-TiB par rapport à celui de Ni-TiB est d'environ .

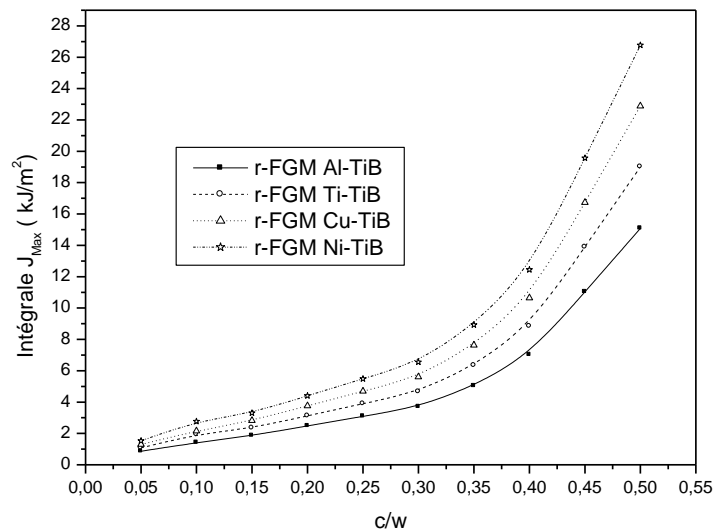


Figure IV.13: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$)

IV.4.6 Effet du chargement sur l'intégrale J

La figure IV.14 met naturellement l'effet du chargement axial de la plaque sur l'intégrale J. Cette dernière est d'autant plus grande que la valeur du chargement l'est. Pour une fissure normalisée de 50%, l'intégrale J passe de 14 kJ/m^2 à 35 kJ/m^2 lorsque la charge appliquée est multipliée par quatre.

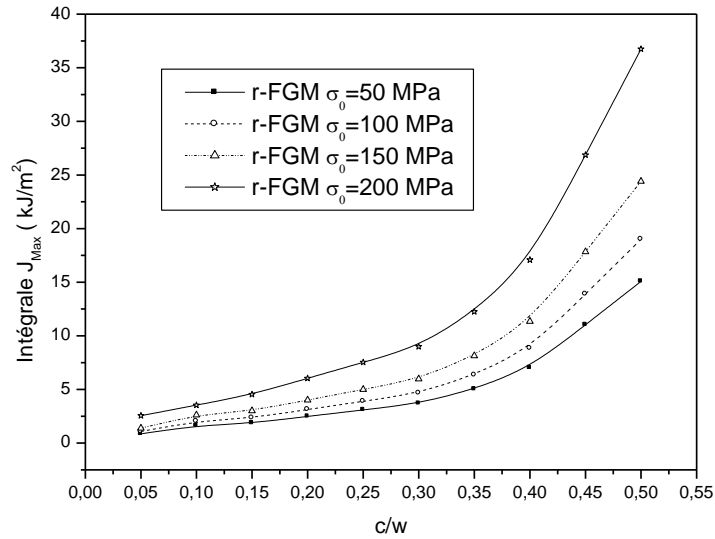


Figure IV.14: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$) pour différents chargement appliqué

IV.4.7 Fissures semi-elliptique et elliptique

IV.4.7.1 Fissure semi-elliptique

Dans cette partie, nous avons considéré que la fissure émanant de l'entaille est de forme semi-elliptique de longueur c et de largeur b d'une plaque FGM (fig.IV.15). Cette dernière est d'épaisseur $t=6$ mm et conserve les mêmes dimensions que lors du premier cas, la plaque est soumise à un effort de traction uni axiale de 100 MPa avec une distribution des propriétés matérielles r-FGM (fig. IV.16). Deux cas de figure sont analysés le premier cas pour une fissure centrale et le second cas pour une fissure située au bord latéral de la plaque Figure IV.15.

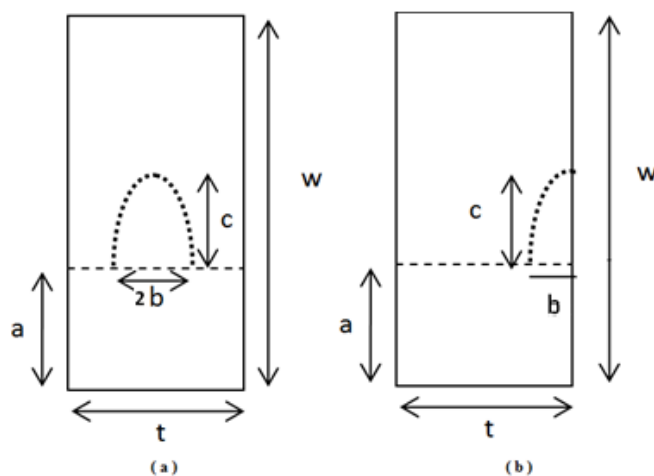


Figure IV.15 : Représentation des fissures semi-elliptique

a) fissure centrale, b) fissure latérale

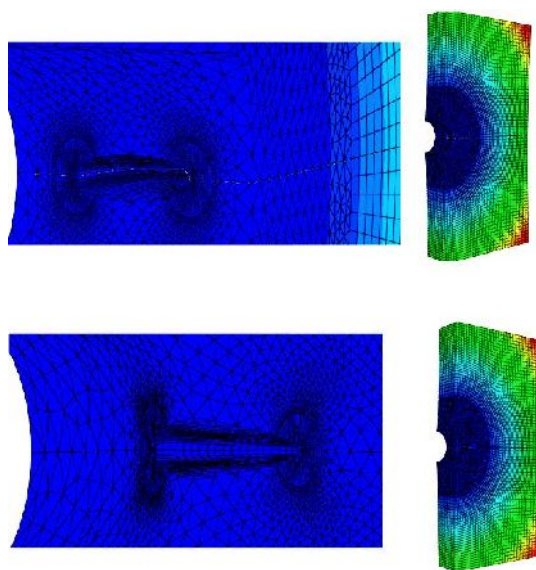


Figure IV.16 Contour de fonction de variable du domaine (E)

a) fissure centrale, b) fissure latérale

La figure IV.17 illustre la variation de l'intégrale J le long du fond de fissure (χ) pour les deux cas fissure centrale et fissure latérale $c/b=1.5$ avec $b/t=0.25$, $t/w=0.3$ et $a/w=0.1$. On remarque dans ces conditions que les valeurs maximales de l'intégrale J sont obtenues aux bords du fond de l'entaille, ceci est dû à la concentration de contrainte provoquée par l'entaille, la position de

fissure centrale conduit à des valeurs plus élevées que celles de la position latérale. Ce phénomène peut s'expliquer par la dimension de l'épaisseur non fissurée de la fissure latérale et aux faibles champs de contraintes (fig. IV.18).

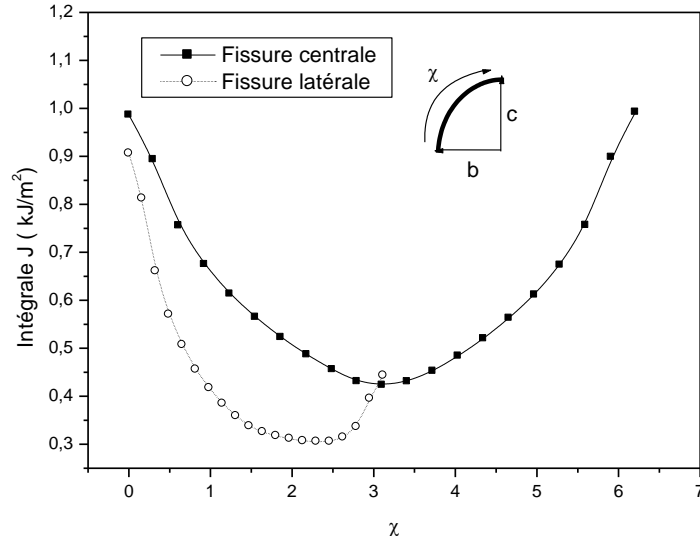


Figure IV.17: Variation de l'intégrale J le long du fond de fissure

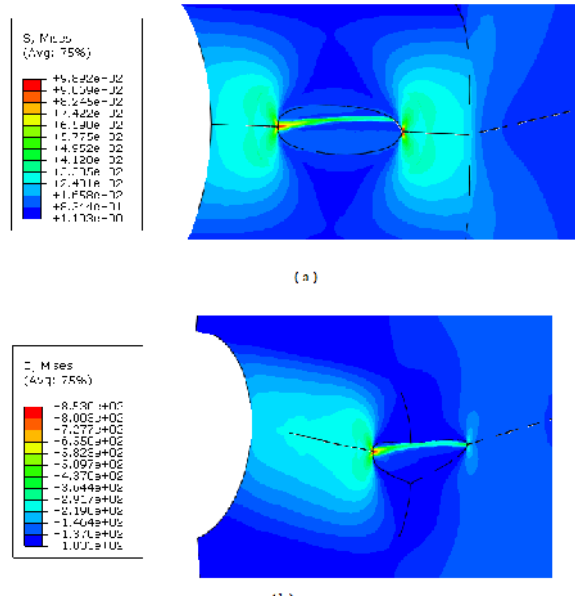


Figure IV.18: Contour de la contrainte de Von Mises; a) fissure centrale, b) fissure latérale

Les résultats représentés sur la figure IV.17 nous ont conduit à étudier l'influence de la configuration de la fissure sur l'intégrale J. Nous avons illustré sur la figure IV.19 la variation de l'intégrale J le long du fond de fissure semi-elliptique centrale pour quatre valeurs du rapport c/b avec $b/t=0.25$, $t/w=0.3$ et $a/w=0.1$. Nous remarquons que la géométrie de la fissure a un effet déterminant sur l'intégrale J. En effet, pour un rapport c/b égal à 1, autrement dit, lorsque la configuration de la fissure tend vers une forme circulaire, l'allure de la variation de l'intégrale J est presque la même que celle de $c/b=1.5$ mais avec des valeurs inférieures et on note un écart de 0.3 kJ/m^2 à l'extrémité de fissure au fond d'entaille. Pour des rapports c/w inférieurs à 1 les valeurs maximales de l'intégrale J sont obtenues au milieu du fond de fissure, comme une fissure de forme rectangulaire débouchant de l'entaille. On constate d'après nos résultats que la diminution du rapport c/b provoque une diminution remarquable de l'intégrale J et elle est de l'ordre de 0.9 kJ/m^2 pour c/b variant de 0.5 à 1.5.

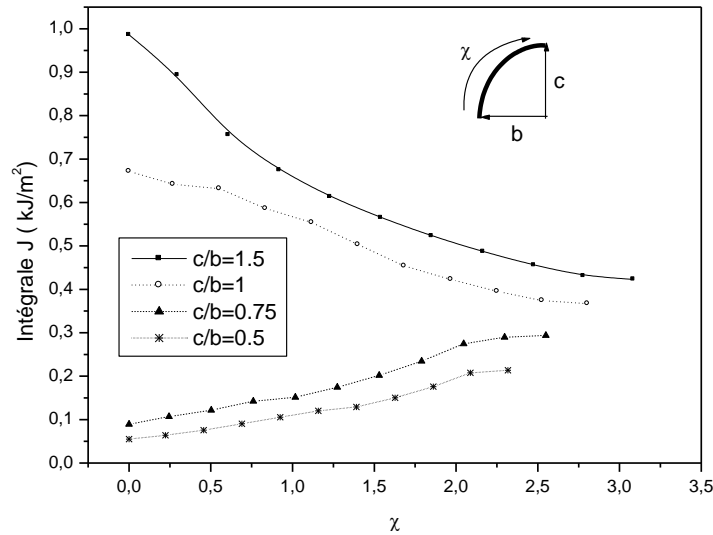


Figure IV. 19: Variation de l'intégrale J le long du fond de fissure centrale pour différents rapports c/b

IV.4.7.2: Interaction entaille-fissure elliptique centrale

L'objet de cette partie est d'analyser l'effet d'interaction entre une fissure de forme elliptique centrale et l'entaille. Nous supposons que la taille de la fissure reste invariable ($b=0.75$ mm $c=1.125$ mm $t=6$ mm $a=2$ mm et $w=20$ mm), seule l'inter-distance (d) entre la fissure et l'entaille varie comme l'indique la figure IV.20. La plaque est soumise à une chargement axiale $\sigma_0=100$ MPa .

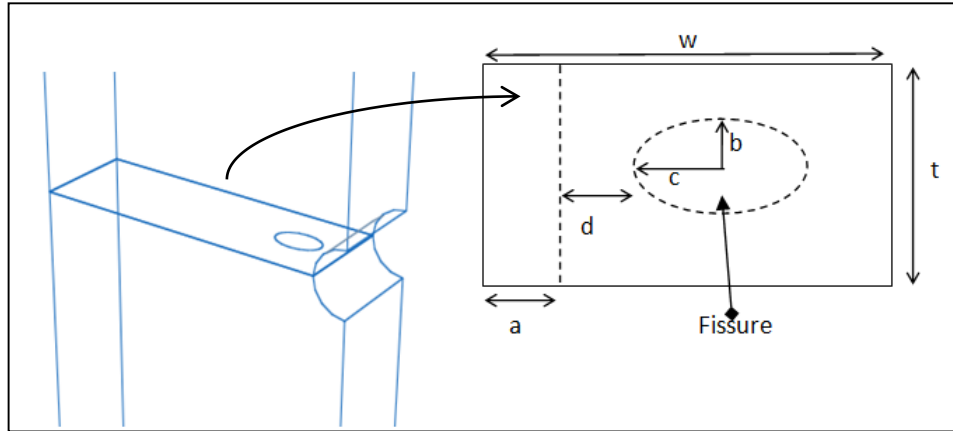


Figure IV.20 Représentation de la plaque en r-FGM Ti-TiB avec fissure elliptique centrale

Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure IV.21. Cette dernière montre la variation de l'intégrale J le long du contour de la fissure en fonction de l'inter-distance normalisée d/w , pour une fissure elliptique se déplaçant dans la plaque suivant la direction de l'axe x . Nous remarquons que l'intégrale J décroît très sensiblement avec le rapport d/w puis elle augmente légèrement à partir de $d/w = 0,6$, ceci est dû à la proximité de la fissure avec une zone où la rigidité du matériau est élevée. Le maximum de cette intégrale est atteint pour une inter distance $d/w = 0,15$. Ce phénomène est confirmé par les résultats représentés sur la figure IV.22. Cette dernière montre les variations des intégrale J aux extrémités A et B de la fissure elliptique.

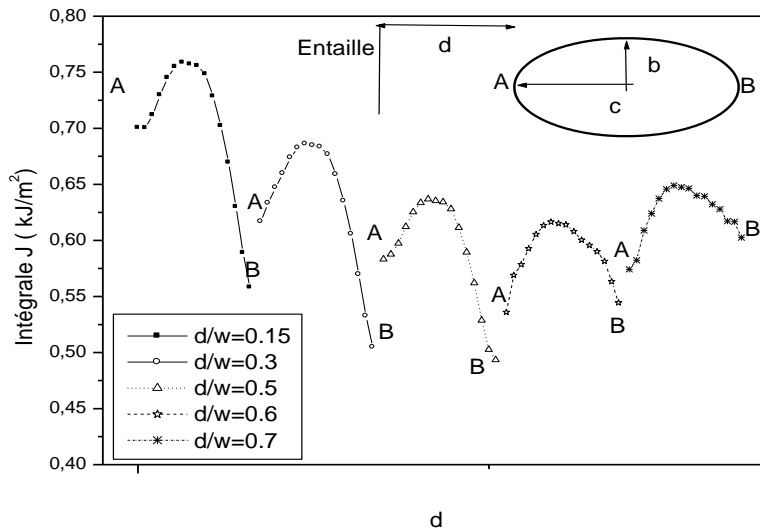


Figure IV.21: Variation de l'intégrale J le long du fond de fissure centrale pour différents rapports d/w

Nous observons que l'intégrale J de l'extrémité A de la fissure elliptique décroît lorsque celle-ci s'éloigne de l'entaille puis augmente légèrement pour des rapports d/w supérieurs à 0,6. On remarque aussi que les valeurs de l'intégrale J à l'extrémité A sont supérieures à celles de l'extrémité B, résultant du fait de la position du point A au voisinage proche de l'entaille. On observe qu'au point B de la fissure elliptique, l'intégrale diminue avec l'augmentation de l'inter-distance puis elle croît rapidement et dépasse les valeurs du point A pour d/w supérieur à 0.5. Ce phénomène est dû à la présence du point B dans une zone riche en céramique et proche du bord de la plaque.

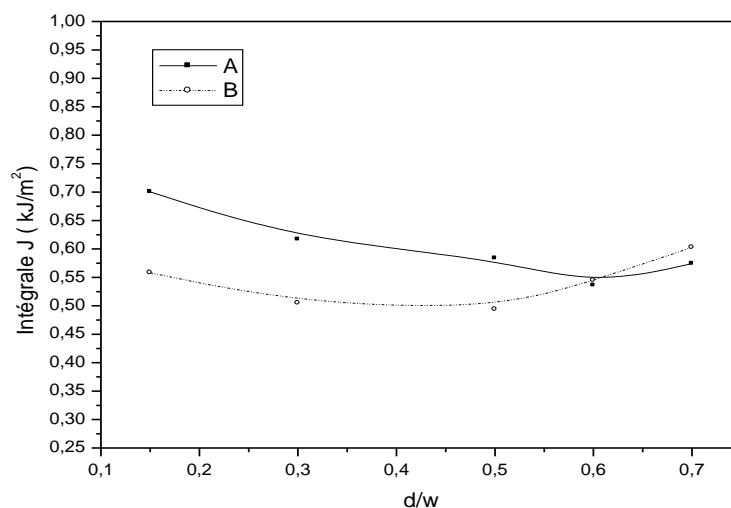


Figure IV.22 : Variation de l'intégrale J en pointes de fissures en fonction du rapport d/w.

Nos résultats montrent que l'inter-distance d entre la fissure et la l'entaille détermine l'effet d'interaction entre ces deux dernières . En effet, lorsque la fissure se rapproche de l'entaille, l'intégrale J en tête de fissure croît considérablement et tend vers son maximum. Cette augmentation est provoquée par un champ de contraintes en pointe de fissure et au fond de l'entaille. Les résultats illustrés sur la figure IV.23, IV.24 , confirment ce phénomène. Ces figures montre la variation du facteur de concentration des contraintes au fond de l'entaille en fonction de l'inter-distance d/w.

Nos résultats montrent que l'augmentation de l'inter-distance provoque une diminution remarquable du facteur Kt et l'effet du rapport d/w disparaît pour $d/w > 0,5$ et se stabilise

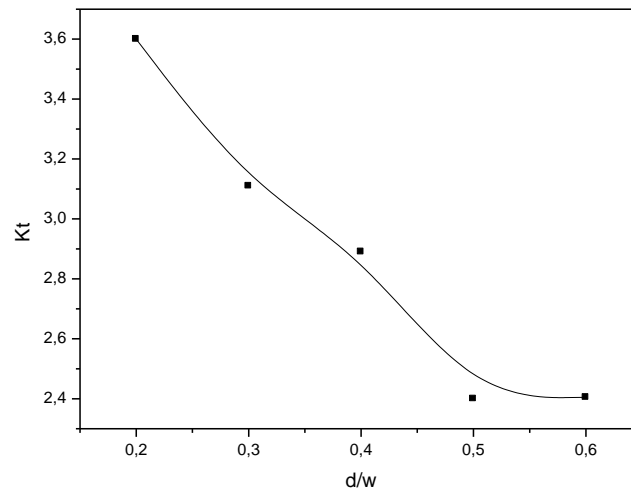


Figure IV.23 Variation du facteur de concentration des contraintes K_t autour de l'entaille en fonction de l'inter distance d normalisée

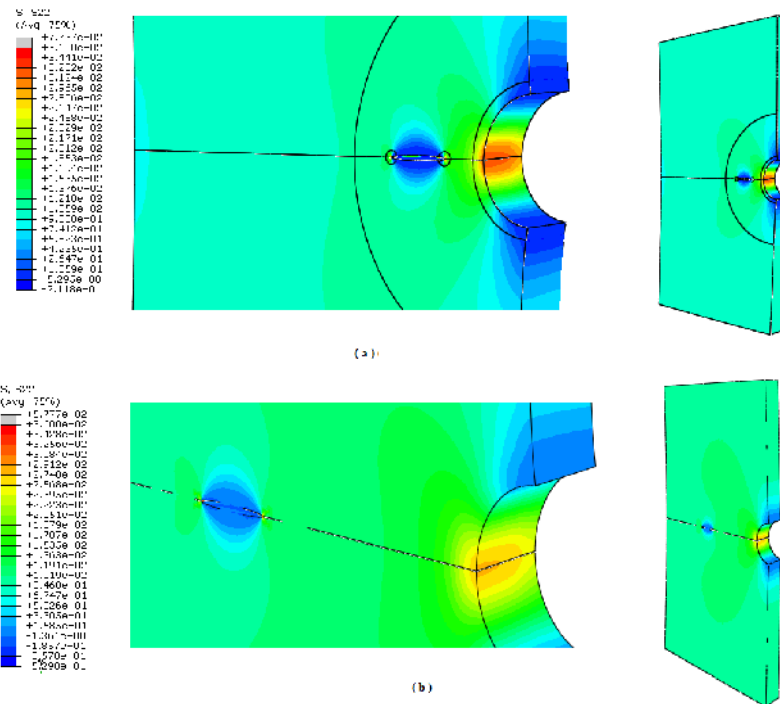


Figure IV.24: Contour des contraintes normales

a) $d/w=0.15$, b) $d/w=0.5$

Nous avons noté précédemment la sensibilité de l'intégrale J en tête de fissure à l'inter-distance la séparant de l'entaille. Afin de mieux illustrer ce comportement, nous avons étudié l'effet de la taille de la fissure elliptique centrale proche de l'entaille sur le facteur de concentration des contraintes autour de l'entaille.

Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure IV.25. Cette dernière montre la variation de du paramètre K_t en fonction de l'aire normalisée de la fissure elliptique proche de l'entaille d'une distance $d/w = 0.15$.

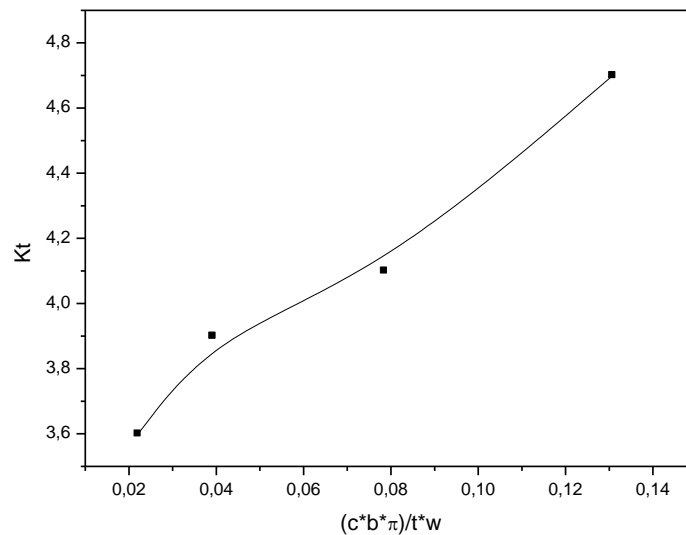


Figure IV.25: Variation du facteur de concentration des contraintes en fonction de l'air de la surface fissure

Nos résultats montre clairement que l'augmentation de la taille d'un défaut au voisinage de l'entaille conduit à l'augmentation du champ de contraintes. Ainsi la croissance rapide du facteur K_t augmente le risque de propagation de fissure.

Annexe 1: User subroutine USDFLD x-FGM

```

*****
**  USDFLD FOR x-FGMs          *****
*****
**USER SUBROUTINE

  SUBROUTINE USDFLD(FIELD, STATEV, PNEWDT, DIRECT, T, CELENT,
1  TIME, DTIME, CMNAME, ORNAME, NFIELD, NSTATV, NOEL, NPT, LAYER,
2  KSPT, KSTEP, KINC, NDI, NSHR, COORD, JMAC, JMATYP, MATLAYO, LACCFLA)

C
  INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'

C
  CHARACTER*80 CMNAME, ORNAME
  CHARACTER*3  FLGRAY(15)
  DIMENSION FIELD(NFIELD), STATEV(NSTATV), DIRECT(3,3),
1  T(3,3), TIME(2)
  DIMENSION ARRAY(15), JARRAY(15), JMAC(*), JMATYP(*), COORD(*)
C  DIMENSION INTV(1), REALV(1)
  W= 20
  L= W
  E1=375000
  E2=110000
  X=COORD(1)
  Y=COORD(2)
  Z=COORD(3)
  R=(((X)**2)+(Y)**2)**0.5)
  FIELD(1)=E2*exp(log(E1/E2)/L)*X

  RETURN
  END

```

References

- [1] Takahashi H, Hashida T. "Development of an evaluation method of functionally gradient materials". *JSME Int. J., Ser. A*, Vol.33, pp 281-287, 1990.
- [2] Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., and Ford R.G. "*Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*", Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [3] Kawasaki A., Watanabe R., Yuuki M., Nakanishi Y. and Onabe H. "Effects of microstructure on thermal shock cracking of functionally graded thermal barrier coatings studied by burner heating test. Materials". *Trans. JIM*, Vol.37, pp 788-795, 1996.
- [4] Kawasaki A. and Watanabe R. "Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials". *Eng. Frac. Mech.*, Vol.69, pp 1713-1728, 2002.
- [5] Rangaraj S. and Kokini K. "Estimating the fracture resistance of functionally graded thermal barrier coatings from thermal shock tests". *Surf. Coat. Technol.*, Vol. 173, pp 201-212, 2003.
- [6] Bahr H.A., Balke H., Fett T., Hofinger I., Kirchhoff G., Munz D., Neubrand A., Semenov A.S., Weiss H.J. and Yang Y.Y. "Cracks in functionally graded materials". *Mater. Sci. Eng.*, Vol. A362, pp 2-16, 2003.
- [7] Tohgo K. and Hadano A. "Characterization of Fracture Process in Ceramic-Metal Functionally Graded Material under Three-Point-Bending". *JSME Int. J., Ser. A*, Vol.49, pp 321-330, 2006.
- [8] Erdogan F. Fracture mechanics of functionally graded materials. *Compos Engng* 1995;5:753–70.
- [9] Jin ZH, Noda N. Crack-tip singular fields in nonhomogeneous materials. *ASME J Appl Mech* 1994;61:738–40.
- [10] Eischen JW. Fracture of nonhomogeneous materials. *Int J Fract* 1987;34:3–22.
- [11] Honein T, Herrmann G. Conservation laws in nonhomogeneous plane elastostatics. *J Mech Phys Solids* 1997;45:789–908.
- [12] Gu P, Asaro RJ. Crack deflection in functionally graded materials. *Int J Solids Struct* 1997;34:3085–98.
- [13] Becker Jr TL, Cannon RM, Ritchie RO. Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials. *Int J Solids Struct* 2001;38:5545–63.

- [14] Jin ZH, Batra RC. Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials. *JMech Phys Solids* 1996;44:1221–35.
- [15] Marur PR, Tippur HV. Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient. *Int J Solids Struct* 2000;37:5353–70.
- [16] Anlas G, Lambros J, Santare MH. Dominance of asymptotic crack tip fields in elastic functionally graded materials. *Int J Fract* 2002;115:193–204.
- [17] Kim AS, Suresh S. Plasticity effects on fracture normal to interfaces with homogeneous and graded compositions. *Int J Solids Struct* 1997;34:3415–32.
- [18] Jin ZH, Paulino GH, Dodds Jr RH. Cohesive fracture modeling of elastic–plastic crack growth in functionally graded materials. *Engng Fract Mech* 2003;70:1885–912.
- [19]Z.-H. Jin a, R.H. Dodds Jr. "Crack growth resistance behavior of a functionally graded material: computational studies" *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004) 1651–1672
- [20] E. Martinez-Panéda • R. Gallego "Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials" *Int J Mech Mater Des* DOI 10.1007/s10999-014-9265-y
- [21] ABAQUS (2011); *ABAQUS manual*, Version 6.10, Pawtucket, R.I.

Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse est scindé en deux grandes parties. La première partie a pour objectif l'étude par la méthode des éléments finis du champ de contraintes autour d'une entaille semi-circulaire latérale dans un matériaux fonctionnellement gradué de type métal-céramique (Ti-TiB), prenant en compte les effets des directions de distribution des propriétés mécaniques sur le facteur de concentration des contraintes K_t . Dans un deuxième temps, nous avons analysé par la méthode des éléments finis (MEF), le comportement en rupture d'une fissure émanant de l'entaille en calculant l'intégrale J en fond de fissure. Les résultats obtenus numériquement par la MEF permettent de tirer les conclusions suivantes :

1. Concernant la concentration des contraintes autour de l'entaille

- ✓ La meilleure direction du FGM est celle de r-FGM puisqu'elle présente des concentrations de contraintes autour de l'entaille les plus faibles par rapport aux autres direction, elle offre un gain de 45% de K_t par rapport à une plaque homogène en céramique TiB.
- ✓ L'augmentation de l'épaisseur t de la plaque entraîne une diminution du facteur de concentration des contraintes K_t dans le cas d'une distribution des propriétés matérielles suivant l'axe z . L'épaisseur t n'a pratiquement pas d'effet sur K_t pour les autres directions
- ✓ Le plus petit rapport E_1/E_2 est celui qui donne la meilleure garantie et une réduction du facteur de concentration des contraintes.
- ✓ L'utilisation d'une bande r-FGM autour de l'entaille dans une plaque homogène en céramique d'une largeur normalisée d'au moins 0.5 réduit considérablement le champs de contraintes autour de l'entaille et ainsi le facteur K_t .

2. Du point de vue comportement en rupture

- ✓ L'intégrale J en fond de fissure émanant d'une entaille dépend, à la fois de la taille de la fissure et du type de direction du FGM dans la plaque. On note que y-FGM

symétrique offre une meilleure ténacité comparativement aux autres distributions. La distribution des propriétés matérielles suivant l'axe z pour des faibles épaisseurs présente des valeurs maximales de l'intégrale J , d'écart de 4 kJ/m^2 avec celle de la distribution y -symétrique et conduit à la rupture brutale du matériau.

- ✓ L'augmentation de l'épaisseur t entraîne une diminution du paramètre J . Cette diminution est très significative lorsque l'épaisseur normalisée dépasse $t/w=0.55$ pour z -FGM et est de l'ordre de 60% pour une longueur de fissure normalisée $c/w=0.15$.
- ✓ L'inclinaison de la distribution $y(\theta)$ du y -FGM pour une taille de fissure normalisée entraîne une diminution de l'intégrale J . Cette diminution est progressive avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison.
- ✓ L'augmentation du rayon de l'entaille entraîne une croissance rapide du paramètre J .
- ✓ La valeur de l'intégrale J (caractéristique de la propagation de la fissure dans les FGMs) est étroitement liée au module de Young du métal. On retient que pour des taux faibles des modules de Young l'intégrale J est minimale.
- ✓ Pour une configuration de fissure elliptique les valeurs de l'intégrale J sont faibles pour une fissure semi-elliptique latérale comparées à celles d'une fissure semi-elliptique centrale.
- ✓ La proximité d'une fissure avec l'entaille augmente le risque de rupture du matériau.