

N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
SIDI BEL ABBES

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée par

KEHAILI ABDELKADER

Spécialité : MATHEMATIQUES

Option : EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Intitulée

**Résolution numérique d'un certain type
d'équations aux dérivées partielles d'ordre
quelconque.**

Soutenue le 26/01/2021

Devant le jury composé de :

Président : Benaissa Abbas. Professeur Université Djilali Liabes SBA.

Examineurs : Belghaba Kacem. Professeur Université d'Oran.

Mokeddem Soufiane. Professeur Université Djilali Liabes SBA.

Abdelli Mama. Professeur Université de Mascara.

Directeur de thèse : Hakem Ali. Professeur Université Djilali Liabes SBA.

Co-Directeur de thèse : Benali Abdelkader. MCA Université Hassiba Benbouali
Chlef.

Année universitaire : 2020/2021

Remerciement

De prime abord, je suis profondément redevable à mon superviseur, le conseiller de cette thèse, le Pr. **Ali HAKEM**, qui m'a apporté un soutien permanent et m'a encouragé par son aide, ses conseils et ses encouragements en or sur le choix du thème de ma thèse.

Je suis très sensible à l'honneur qu'a fait Dr. **Benali Abdelkader** en co-encadrant ma thèse. Je le prie de trouver ici l'expression de ma plus grande reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Un merci tout particulier au professeur **Abbes BENAÏSSA** de l'Université de Sidi Bel Abbès pour avoir accepté de présider le jury. Je voudrais également remercier les membres du jury M. Prof. **Soufiane MOKEDDEM** de l'Université de Sidi Bel Abbès, M. Prof. **Kacem BELGHABA** de l'Université Ahmed Ben Bella d'Oran 1, Mme Pr. **Mama ABDELLI** de l'université de Mascara d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie de ce jury, et je les en remercie sincèrement.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mes collègues Dr. **Djilali Medjahed** et Dr. **Haoua Rabah** pour leur aide dans la préparation de ma thèse.

Je voudrais remercier les collègues du département de mathématique de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès pour leur bon traitement et pour nous avoir informés de tout ce qui est nouveau.

Dédicaces

Cette thèse est dédiée :

À mes chères parents.

À ma famille.

À mes soeurs et mon frère.

À mon épouse et mon fils mohamed firas.

À mes amis.

Abstract:

Partial differential equations of fractional order are a generalization of the classic partial differential equations. In this thesis, we applied the method (HPMT) to solve partial differential equations with variable coefficients, then we extend them to the fractional order and to solve systems of fractional differential equations.

To demonstrate the importance of the approximate methods, we compared the approximate solution using the (ADM) method with the accurate solution using the (TANH) analytical method in solving the (BOUSSINESQ) equation.

These methods are effective and applicable, require less mathematical operations, and are much simpler and more practical than others, and this has been demonstrated through studied examples.

Résumé :

Les équations différentielles partielles d'ordre fractionnaire sont une généralisation des équations différentielles partielles classiques. Dans cette thèse, nous avons appliqué la méthode (HPMT) pour résoudre des équations aux dérivées partielles à coefficients variables, puis nous les étendons à l'ordre fractionnaire et pour résoudre des systèmes d'équations aux dérivées fractionnaires.

Pour démontrer l'importance des méthodes approximatives, nous avons comparé la solution approximative en utilisant la méthode (ADM) avec la solution exacte en utilisant la méthode analytique (TANH) pour résoudre l'équation (BOUSSINESQ).

Ces méthodes sont efficaces et applicables, nécessitent moins d'opérations mathématiques et sont beaucoup plus simples et pratiques que d'autres, et cela a été démontré par des exemples étudiés.

ملخص :

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الرتب الكسرية تعميمًا للمعادلات التفاضلية الجزئية الكلاسيكية. في هذه الرسالة طبقنا طريقة (HPMT) لحل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات المعاملات المتغيرة ، ثم قمنا بتوسيعها لترتيب الكسور وحل أنظمة المعادلات التفاضلية الكسرية.

ولنبين أهمية الطرق التقريبية قمنا بمقارنة الحل التقريبي باستخدام طريقة (ADM) مع الحل الدقيق باستخدام الطريقة التحليلية (TANH) في حل معادلة (BOUSSINESQ).

هذه الطرق فعالة وقابلة للتطبيق ، وتتطلب عمليات حسابية أقل ، وهي أبسط بكثير وأكثر عملية من غيرها ، وهذا ما تم توضيحه من خلال الأمثلة المدروسة.

Key words:

Caputo's fractional derivative, Homotopy perturbation transform method, Hyperbolic-like equation, parabolic-like equation, Laplace transform, Nonlinear fractional partial differential equations, Adomian polynomials, Burgers equations, Tanh method .

Introduction :

En mathématiques appliquées et en analyse mathématique, une dérivée fractionnaire est une dérivée de n'importe quel ordre arbitraire, réel ou complexe. Sa première apparition est dans une lettre écrite à Guillaume de l'Hôpital par Gottfried Wilhelm Leibniz en 1695. Le calcul fractionnaire a été introduit dans l'un des premiers articles de Niels Henrik Abel où tous les éléments peuvent être trouvés : l'idée l'intégration et de différenciation d'ordre fractionnaire, la relation mutuellement inverse entre eux, la compréhension que la différenciation et l'intégration d'ordre fractionnaire peuvent être considérée comme la même opération généralisée, et même la notation unifiée pour la différenciation et l'intégration d'un ordre réel arbitraire. Indépendamment, les fondations du sujet ont été posées par Liouville dans un article de 1832. Autodidact Oliver Heaviside a introduit l'utilisation pratique des opérateurs différentiels fractionnaires dans l'analyse des lignes de transmission électrique vers 1890. La théorie et les applications du calcul fractionnaire se sont considérablement développées au cours du 19^{ième} et 20^{ième} siècles, et de nombreux chercheurs ont donné des définitions pour les intégrales et les dérivées fractionnaires.

Les équations de type parabolique et de type hyperbolique peuvent être utilisées pour décrire une grande variété de phénomènes tels que le son, la chaleur, la diffusion, l'électrostatique, l'électrodynamique, la dynamique des fluides, l'élasticité ou la mécanique quantique. Ces phénomènes physiques apparemment distincts peuvent être formalisés de manière similaire en termes d'équations de type parabolique et d'équations de type hyperbolique. Plusieurs auteurs ont résolu ces équations en utilisant plusieurs méthodes [23, 30, 50].

La méthode de perturbation par homotopique a été proposée pour la première fois par le mathématicien chinois Ji-Haun-He en 1999 et appliquée pour résoudre l'équation des oscillateurs avec discontinuités [25]. Dans cette méthode la solution est considérée comme la somme d'une série

infinie qui converge en général rapidement vers la solution exacte [21].

Cette méthode a été appliquée avec succès aux équations différentielles ordinaires, aux équations aux dérivées partielles et à d'autres domaines, voir [16, 19, 21, 23, 24, 26, 29, 30, 42, 54].

La méthode (HPM) combinée avec la transformation de Laplace est introduite par Y. Khan et Q. Wu [32]. Elle a été utilisée efficacement dans plusieurs domaines pour résoudre différents types de problèmes. Par exemple, Cette méthode est utilisé dans [56] pour résoudre les équations de KdV et les équations de Burgers. Cette méthode est appliquée dans [20, 41] pour résoudre des problèmes non linéaires avec des conditions aux limites. Et en raison de son importance pour accélérer les calculs, de nombreux chercheurs l'ont utilisé dans leurs travaux, voir [34, 40, 45].

La méthode (HPTM) est utilisée dans notre article [31], pour résoudre les équations aux dérivées partielles à coefficients variables. Sur la base de cette méthode, nous avons présenté des solutions exactes de certaines équations de type parabolique et hyperbolique, puis nous les étendons à l'ordre fractionnaire. Par conséquent, cette méthode fournit une approche efficace pour résoudre les équations aux dérivées partielles à coefficients variables.

La méthode de tangente hyperbolique (\tanh) sera introduite telle que présentée par Malfliet [37] et par Wazwaz [51, 52]. Il s'est avéré que cette méthode est bien adaptée aux problèmes où les effets de dispersion, les phénomènes de réaction-diffusion et la convection jouent un rôle important. Pour une grande variété d'équations différentielles non linéaires ordinaires et partielles (ODE et PDE), on peut trouver des solutions exactes [35, 38] d'une manière simple et systématique. De nombreux auteurs ont utilisé cette méthode pour résoudre diverses équations [15, 27, 36, 55].

La méthode de décomposition Adomian (ADM) est une méthode semi-analytique pour résoudre des équations différentielles ordinaires et partielles. La méthode a été développée par le mathéma-

ticien américain George Adomian [3]. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré et donne la solution sous forme d'une série infinie, qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe [11].

Objectif de ce travail :

L'objectif de ce travail est de résoudre certains types d'équations comme les équations aux dérivées partielles à coefficients variables, puis nous les étendons à l'ordre fractionnaire, les systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaires et l'équation de Boussinesq en utilisant des nouvelles techniques

1. La méthode de perturbation par homotopie combinée à la transformation de Laplace (HPTM).
2. La méthode de tangente hyperbolique (tanh).
3. La méthode de décomposition d'Adomian (ADM).

Ces nouvelles techniques ont atteint un grand intérêt en mathématiques appliquées, car elles permettent de déterminer les solutions d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires.

La solution, lorsqu'elle s'exprime par ces méthodes, se présente sous la forme d'une série qui converge rapidement.

Plan de travail :

Cette thèse se compose de cinq chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions générales qu'on aura besoin dans la suite de notre travail.

Dans le deuxième chapitre nous avons appliqué la méthode (HPTM) pour résoudre des équations aux dérivées partielles à coefficients variables sous la forme :

$$\begin{cases} u_t + f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz} = 0, & t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = f_4(x, y, z), & t = 0, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

et

$$\begin{cases} u_{tt} + g_1(x, y, z) u_{xx} + g_2(x, y, z) u_{yy} + g_3(x, y, z) u_{zz} = 0, & t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = g_4(x, y, z), u_t(x, y, z, 0) = g_5(x, y, z), & t = 0. \end{cases} \quad (0.0.2)$$

Nous avons expliqué son importance, en l'appliquant à des exemples sélectionnés.

Dans le troisième chapitre, nous avons appliqué la méthode de (HPTM) pour résoudre des équations aux dérivées partielles avec des ordres fractionnaires sous la forme

$$\begin{cases} D_{*t}^\alpha u(x, y, z, t) + f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz} = 0 & t > 0 \\ 0 < \alpha \leq 1, & u(x, y, z, 0) = f_4(x, y, z), & t = 0, \end{cases} \quad (0.0.3)$$

et

$$\begin{cases} D_{*t}^\alpha u(x, y, z, t) + g_1(x, y, z) u_{xx} + g_2(x, y, z) u_{yy} + g_3(x, y, z) u_{zz} = 0, & t > 0 \\ 1 < \alpha \leq 2, & u(x, y, z, 0) = g_4(x, y, z), & u_t(x, y, z, 0) = g_5(x, y, z), & t = 0. \end{cases} \quad (0.0.4)$$

Quand on prend $\alpha = 1$ ($\alpha = 2$) dans les équations (0.0.3) ((0.0.4)), on obtient la solution exacte des équations (0.0.1) ((0.0.2)) successivement.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaires par la méthode de (HPTM).

Dans le cinquième chapitre, nous nous sommes concentrés sur le traitement des solutions précises

et approximatives de l'équation de Boussinesq en suivant les méthodes de (Tanh) et (ADM). Nous avons remarqué la grande convergence entre la solution approximative et la solution exacte.

Table des matières

Introduction	4
Plan de travail	7
1 Préliminaires	13
1.1 Les fonctions spéciales	13
1.1.1 La fonction Gamma	13
1.1.2 La fonction Bêta	14
1.2 Intégration Fractionnaire	14
1.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	14
1.3 Dérivation Fractionnaire	18
1.3.1 Dérivée-Caputo	18
1.4 Transformation de Laplace	19
1.4.1 Transformée inverse de Laplace	21
1.4.2 Transformée de Laplace de dérivées	22
2 Applications de la méthode (HPTM) pour les équations aux dérivées partielles	23

2.1	Description de la méthode (HPM)	23
2.1.1	Convergence de la méthode (HPM)	25
2.2	Description de la méthode (HPTM)	27
2.3	Equation de type parabolique	29
2.3.1	Exemples numériques	30
2.4	Equation de type hyperbolique	34
2.4.1	Exemples numériques	36
3	Applications de la méthode (HPTM) pour les équations aux dérivées partielles d'ordres fractionnaires	41
3.1	Description de la méthode	41
3.2	Les équations de la forme (0.0.3)	43
3.2.1	Exemples numériques	44
3.3	Les équations de la forme (0.0.4)	51
3.3.1	Exemples numériques	52
4	Applications de la méthode (HPTM) pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordres fractionnaires	59
4.1	Introduction	59
4.2	Description de la méthode	59
4.3	Exemples numériques	61
5	L'équation de Boussinesq	69
5.1	Introduction	69

5.2	la méthode de tangente hyperbolique (Tanh)	70
5.2.1	Description de la méthode	70
5.2.2	La solution exacte de l'équation de Boussinesq par la méthode de Tanh . . .	72
5.3	Méthode de décomposition d'Adomian (ADM)	74
5.3.1	Description de la méthode	74
5.3.2	Convergence de la méthode ADM	76
5.3.3	La solution approximative de l'équation de Boussinesq par (ADM)	78
	Bibliographie	85

Preliminaires

1.1 Les fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons certaines fonctions dites fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire. Pour plus de détails, voir [8, 39, 43, 46].

1.1.1 La fonction Gamma

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.1.1)$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma :

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
2. $x \rightarrow \Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < x \leq 1$.
3. La fonction Gamma possède une propriété importante donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x). \quad (1.1.2)$$

On peut démontrer (1.1.2) par une intégration par parties

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \quad (1.1.3)$$

4. La fonction Gamma d'Euler généralise la fonction factorielle car

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4)$$

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.1.2 La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante :

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, \quad x, y \in \mathbb{R}_+^*. \quad (1.1.5)$$

La relation entre la fonction Gamma et Bêta est donnée par la relation suivante :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y, x). \quad (1.1.6)$$

1.2 Intégration Fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entière. La définition de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville se base sur la formule de Cauchy qui calcule n fois l'intégrale répétée d'une fonction causale $t \mapsto f(t)$,

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.2.1)$$

1.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La généralisation de la formule de Cauchy (1.2.1) à un ordre α réel positif, implique le remplacement de la fonction factorielle par la fonction Gamma comme suit :

Définition 1.2.1 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction f continue sur $[a, b)$ est donnée par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où $t \geq 0$, et $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Exemple 1.2.1 *Calculons l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction suivante :*

$$f(t) = (t-a)^\beta, \quad \beta > -1. \quad (1.2.3)$$

En utilisant la définition (1.2.2), on obtient :

$$I_a^\alpha [(t-a)^\beta] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau. \quad (1.2.4)$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + x(t-a)$ et en utilisant la fonction Bêta il résulte que :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [(t-a)^\beta] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a-x(t-a))^{\alpha-1} (x(t-a))^\beta (t-a) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^\beta dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}, \end{aligned}$$

donc

$$I_a^\alpha [(t-a)^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \quad (1.2.5)$$

Par exemple, pour $\alpha = \beta = 1$, on utilise la formule (1.2.5), on obtient :

$$I_a^1 [(t-a)] = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3)} (t-a)^2 = \frac{1}{2} (t-a)^2. \quad (1.2.6)$$

Et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a :

$$I_a^{\frac{1}{2}} [(t-a)^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\frac{1}{2}+1)} (t-a)^{\beta+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\frac{3}{2})} (t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}. \quad (1.2.7)$$

Lemme 1.2.1 [33] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$ on a :

$$I_a^\alpha [I_a^\beta [f(t)]] = I_a^{\alpha+\beta} [f(t)], \quad (1.2.8)$$

et

$$I_a^\alpha [I_a^\beta [f(t)]] = I_a^\beta [I_a^\alpha [f(t)]]. \quad (1.2.9)$$

Preuve: On démontre l'identité (1.2.8).

En effet,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [I_a^\beta [f(t)]] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} I_a^\beta [f(\tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[(x-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-t)^{\beta-1} f(t) dt \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int_a^\tau (\tau-t)^{\beta-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) dt \int_t^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-t)^{\beta-1} d\tau. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\tau = t + (x - t)\rho$ et en utilisant la fonction Bêta, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha \left[I_a^\beta [f(t)] \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) dt \int_0^1 (x-t - (x-t)\rho)^{\alpha-1} ((x-t)\rho)^{\beta-1} (x-t) d\rho \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha+\beta-1} dt \int_0^1 (1-\rho)^{\alpha-1} \rho^{\beta-1} d\rho \\
&= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\
&= I_a^{\alpha+\beta} [f(t)],
\end{aligned}$$

d'où le resultat.

Maintenant pour démontrer (1.2.9), en utilise la propriété précédente (1.2.8). Alors, on a

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta [f(t)] \right] = I_a^{\alpha+\beta} [f(t)] = I_a^{\beta+\alpha} [f(t)] = I_a^\beta \left[I_a^\alpha [f(t)] \right]. \quad (1.2.10)$$

□

Exemple 1.2.2 Si on prend $f(t) = t - a$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta [f(t)] \right] = I_a^\alpha \left[I_a^\beta [(t-a)] \right] = I_a^\alpha \left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)} (t-a)^{\beta+1} \right] = \frac{1}{2} (t-a)^2. \quad (1.2.11)$$

D'autre part, on a :

$$I_a^{\alpha+\beta} [f(t)] = I_a^1 [(t-a)] = \int_a^t (\tau - a) d\tau = \frac{1}{2} (t-a)^2. \quad (1.2.12)$$

1.3 Dérivation Fractionnaire

La dérivée d'ordre fractionnaire est une généralisation des concepts de la dérivée d'ordre entière.

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation d'ordre fractionnaire. On va présenter l'approche de Caputo qui est la plus utilisée.

1.3.1 Dérivée-Caputo

Définition 1.3.1 [56] *La dérivée fractionnaire de $f \in C_{-1}^m$ au sens de Caputo est définie comme*

suit :

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Selon la dérivée de Caputo, nous pouvons facilement obtenir les expressions suivantes :

$$D_*^\alpha C = 0 \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

et

$$D_*^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, & \beta > \alpha - 1, \\ 0, & \alpha = m, \quad \beta \leq \alpha - 1. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Remarque 1.3.1 *Dans cette thèse, nous considérons la dérivée fractionnaire par rapport au temps au sens de Caputo définie lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^+$ par*

$$D_{*t}^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial t^m}(\tau) d\tau, & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \alpha = m. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

1.4 Transformation de Laplace

Définition 1.4.1 Soit f une fonction de t , définie pour $t > 0$. On définit et on note

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ la transformée de Laplace de $f(t)$ comme suit :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.4.1)$$

où s est une variable quelconque réelle ou complexe.

Exemple 1.4.1 Si $f(t) = 1, \forall t > 0$,

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-(x+iy)t}]_0^{\infty} = -\frac{1}{s} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-xt} e^{-iyt} - 1 \right\} = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

si $x > 0$.

Donc on a

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Exemple 1.4.2 Si $f(t) = t^n, \forall t > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

on a

$$\mathcal{L}\{t^n\} = F(s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt,$$

en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt &= -\frac{1}{s} [t^n e^{-st}]_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt \\
 &= 0 + \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 0 \\
 &= \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}\{t^{n-2}\} \\
 &= \dots \\
 &= \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}\{1\} \quad \text{par récurrence sur } n \\
 &= \frac{n!}{s^{n+1}},
 \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.4.3 Si $f(t) = t^\alpha \quad \forall t > 0$ et $\alpha > -1, \quad s > 0$,

on a

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^{\infty} t^\alpha e^{-st} dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = st$ il en résulte que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^\alpha\} &= \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha d\left(\frac{u}{s}\right) \\
 &= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} u^\alpha e^{-u} du \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}.
 \end{aligned}$$

Condition suffisante d'existence de $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Rappelons qu'une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ si pour chaque intervalle

$0 \leq a \leq t \leq b$, il existe un nombre fini de points $t_k, k = 1, 2, \dots, n$ ($t_{k-1} \leq t_k$) sur lesquels f possède des discontinuités et qui est continue sur chaque intervalle ouvert $t_{k-1} < t < t_k$.

Définition 1.4.2 Une fonction est d'ordre exponentiel c s'il existe des constantes c , $M > 0$ et $T > 0$ telles que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, pour tout $t > T$.

Théorème 1.4.1 Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ est d'ordre exponentiel c pour $t > T$ alors $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe pour $s > c$. Attention, ces conditions ne sont pas nécessaires!

Théorème 1.4.2 [44] Si

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (1.4.2)$$

converge pour $t \geq 0$, avec

$$|a_n| \leq \frac{K\alpha^n}{n!}, \quad (1.4.3)$$

pour tous n suffisamment grand et $\alpha > 0$, $K > 0$, alors

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{L}\{t^n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > \alpha). \quad (1.4.4)$$

Théorème 1.4.3 [47] Si c_1 et c_2 sont des constantes quelconques et $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont des fonctions dont les transformées de Laplace sont $F_1(s)$ et $F_2(s)$ respectivement, alors :

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s). \quad (1.4.5)$$

1.4.1 Transformée inverse de Laplace

Définition 1.4.3 Si $F(s)$ représente la transformée de Laplace d'une fonction f , i.e. $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ alors $f(t)$ la transformée de Laplace inverse de $F(s)$ et nous notons $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Transformées inverses de Laplace de quelques fonctions basiques

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n, n \in \mathbb{N}$

3. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3-a} \right\} = e^{at}$
4. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s^2+a^2} \right\} = \sin(\alpha t)$
5. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s^2+a^2} \right\} = \cos(\alpha t)$
6. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s^2-a^2} \right\} = \sinh(\alpha t)$
7. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s^2-a^2} \right\} = \cosh(\alpha t)$
8. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \right\} = t^\alpha, \alpha > -1.$

Théorème 1.4.4 *si c_1 et c_2 sont des constantes quelconques tandis que $F_1(s)$ et $F_2(s)$ sont les transformées de Laplace de $f_1(t)$ et $f_2(t)$ respectivement alors*

$$\mathcal{L}^{-1} \{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1} \{F_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1} \{F_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t). \quad (1.4.6)$$

1.4.2 Transformée de Laplace de dérivées

Théorème 1.4.5 [44] *On suppose que $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ sont continues sur $[0, \infty)$ et d'ordre exponentiel, tandis que $f^{(n)}(t)$ est continue par morceaux sur $[0, \infty)$. Alors*

$$\mathcal{L} \{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L} \{f(t)\} - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+). \quad (1.4.7)$$

Définition 1.4.4 [56] *La transformation de Laplace, $\mathcal{L} \{D_*^\alpha f(t); s\}$ de dérivée fractionnaire de*

Caputo est défini par :

$$\mathcal{L} \{D_*^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (1.4.8)$$

où $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}^*$.

Applications de la méthode (HPTM) pour les équations aux dérivées partielles

2.1 Description de la méthode (HPM)

Pour illustrer le concept de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante [5, 21] :

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.1.1)$$

avec les conditions aux limites :

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.1.2)$$

où A est un opérateur différentiel général, B est un opérateur définissant les conditions aux limites, $f(r)$ est une fonction analytique connue, u est la fonction inconnue et Γ la frontière du domaine Ω . D'une façon générale, l'opérateur A peut être décomposé en deux opérateurs L et N , où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur non-linéaire. Donc l'équation (2.1.1) prend la forme suivante :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (2.1.3)$$

On construit une homotopie $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.1.4)$$

ou

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.1.5)$$

où $p \in [0, 1]$ est le paramètre d'homotopie et u_0 est une approximation initiale de l'équation (2.1.1) qui satisfait les conditions aux limites (2.1.2).

D'après les équations (2.1.4) et (2.1.5) nous avons :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0,$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0.$$

Le changement de p de zéro à l'unité transforme $u_0(r)$ en $u(r)$. Dans la topologie, cela s'appelle l'homotopie. Selon la méthode (HPM), nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre, et supposons que les solutions des équations (2.1.4) et (2.1.5) peuvent être écrites comme une série de puissance de p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i \quad (2.1.6)$$

Pour $p = 1$, la solution de l'équation (2.1.1) devient :

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i \quad (2.1.7)$$

La méthode considère le terme non-linéaire Nu comme

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u), \quad (2.1.8)$$

où $H_n(u)$ sont des polynômes de He, qui peuvent être calculés par la formule suivante [18] :

$$H_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n p^i u_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.9)$$

2.1.1 Convergence de la méthode (HPM)

Pour l'étude de la convergence de la méthode (HPM), voir [4, 6, 7].

En écrivant l'équation (2.1.5) sous la forme suivante

$$L(v) = L(u_0) + p[f(r) - N(v) - L(u_0)], \quad (2.1.10)$$

et appliquant formellement l'opérateur inverse L^{-1} des deux côtés de l'équation (2.1.10), nous obtenons

$$v = u_0 + p[L^{-1}f(r) - L^{-1}N(v) - u_0]. \quad (2.1.11)$$

Supposons que

$$v = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i. \quad (2.1.12)$$

En remplaçant (2.1.12) dans l'équation (2.1.11) devient

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i = u_0 + p[L^{-1}f(r) - L^{-1}N(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i v_i) - u_0]. \quad (2.1.13)$$

Par identification des termes de même puissances de p , nous obtenons

$$p^0 : v_0 = u_0,$$

$$p^1 : v_1 = L^{-1}f(r) - u_0 - L^{-1}(H_0),$$

$$p^2 : v_2 = -L^{-1}(H_1),$$

⋮

$$p^{n+1} : v_{n+1} = -L^{-1}(H_n),$$

⋮

Théorème 2.1.1 (*Condition de convergence suffisante*). Supposons que X et Y soient deux espaces de Banach et $N : X \rightarrow Y$ est une application non-linéaire de contraction, c'est-à-dire :

$$\forall v, v^* \in X, \|N(v) - N(v^*)\| \leq \gamma \|v - v^*\|, 0 < \gamma < 1. \quad (2.1.14)$$

Alors, selon le théorème du point fixe de Banach, N a un unique point fixe u , soit $N(u) = u$.

Supposons que la séquence générée par la méthode de perturbation homotopique puisse être écrite

$$V_n = N(V_{n-1}), V_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} v_i, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.1.15)$$

et suppose que

$$V_0 = v_0 \in B_r(u),$$

où

$$B_r(u) = \{u^* \in X, \|u - u^*\| < r\},$$

alors nous avons les relations suivantes

1. $\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\|$,
2. $V_n \in B_r(u)$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = u$.

Preuve

(1) Par approche inductive, pour $n = 1$ nous avons

$$\|V_1 - u\| = \|N(V_0) - N(u)\| \leq \gamma \|v_0 - u\|. \quad (2.1.16)$$

Supposons que

$$\|V_{n-1} - u\| \leq \gamma^{n-1} \|v_0 - u\|,$$

comme hypothèse d'induction, alors

$$\|V_n - u\| = \|N(V_{n-1}) - N(u)\| \leq \gamma \|V_{n-1} - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\|. \quad (2.1.17)$$

(2) En utilisant (1), nous avons

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\| \leq \gamma^n r < r \Rightarrow V_n \in B_r(u). \quad (2.1.18)$$

(3) Par

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\| \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n = 0,$$

il vient $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| = 0$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = u.$$

2.2 Description de la méthode (HPTM)

Pour illustrer l'idée de base de (HPTM) [32], nous considérons l'équation différentielle non-linéaire générale avec les conditions initiales de la forme :

$$\begin{cases} Du(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \\ u(x, 0) = h(x), \quad u_t(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où D est un opérateur différentiel linéaire de second ordre $D = \partial^2/\partial t^2$, R un opérateur linéaire d'ordre inférieur à celui de D , N est un opérateur non-linéaire et $g(x, t)$ est le terme source.

Prenons la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.2.1) :

$$\mathcal{L}\{Du(x, t)\} + \mathcal{L}\{Ru(x, t)\} + \mathcal{L}\{Nu(x, t)\} = \mathcal{L}\{g(x, t)\}. \quad (2.2.2)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \frac{h(x)}{s} + \frac{f(x)}{s^2} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{Ru(x, t)\} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{Nu(x, t)\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{g(x, t)\}. \quad (2.2.3)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.2.3) nous donne

$$u(x, t) = G(x, t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{Ru(x, t) + Nu(x, t)\}\right\}, \quad (2.2.4)$$

où $G(x, t)$ représente le terme découlant du terme source et des conditions initiales prescrites.

Nous appliquons maintenant la méthode (HPM). Notons par

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t), \quad (2.2.5)$$

la solution cherchée.

Posons

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u), \quad (2.2.6)$$

où $H_n(u)$ désignent les polynômes de He [17, 18], qui sont donnés par la formule suivante :

$$H_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n p^i u_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.7)$$

En remplaçant les équations (2.2.5), (2.2.6) dans l'équation (2.2.4), il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) = G(x, t) - p \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u) \right\} \right\} \right), \quad (2.2.8)$$

qui est la combinaison de la méthode de perturbation homotopique (HPM) et de la transformation de Laplace par utilisation des polynômes de He (HPTM). Par identification des termes de même puissances de p , nous obtenons les approximations suivantes

$$\begin{aligned}
p^0 : u_0(x, t) &= G(x, t) \\
p^1 : u_1(x, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{ Ru_0(x, t) + H_0(u) \} \right\}, \\
p^2 : u_2(x, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{ Ru_1(x, t) + H_1(u) \} \right\}, \\
p^3 : u_3(x, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{ Ru_2(x, t) + H_2(u) \} \right\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Enfin, la solution est

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{+\infty} p^i u_i(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \quad (2.2.9)$$

2.3 Equation de type parabolique

Considérons l'équation de type parabolique en trois dimensions de la forme :

$$\begin{cases} u_t + f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz} = 0, & t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = f_4(x, y, z), & t = 0. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Prenons la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.3.1), nous avons :

$$\mathcal{L}\{u_t\} = -\mathcal{L}\{f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz}\}. \quad (2.3.2)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, y, z, t)\} = s^{-1} f_4(x, y, z) - s^{-1} \mathcal{L}\{f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz}\}. \quad (2.3.3)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.3.3) nous donne :

$$u(x, y, z, t) = f_4(x, y, z) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \{ f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz} \} \right\}. \quad (2.3.4)$$

Par la méthode de (HPM), nous avons :

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y, z, t). \quad (2.3.5)$$

En substituant Eq. (2.3.5) dans Eq. (2.3.4), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = f_4 - p \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ f_1 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} + f_2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} + f_3 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz} \right\} \right\}, \quad (2.3.6)$$

Par identification des termes de même puissances de p , nous obtenons les approximations suivantes :

$$p^0 : u_0(x, y, z, t) = f_4(x, y, z),$$

$$p^1 : u_1(x, y, z, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ f_1 (u_0)_{xx} + f_2 (u_0)_{yy} + f_3 (u_0)_{zz} \right\} \right\},$$

$$p^2 : u_2(x, y, z, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ f_1 (u_1)_{xx} + f_2 (u_1)_{yy} + f_3 (u_1)_{zz} \right\} \right\},$$

⋮

$$p^n : u_n(x, y, z, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ f_1 (u_{n-1})_{xx} + f_2 (u_{n-1})_{yy} + f_3 (u_{n-1})_{zz} \right\} \right\},$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En procédant de la même manière, les autres composants $u_n(x, y, z, t)$, peuvent être complètement obtenue, et la solution en série est ainsi entièrement déterminée. Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, z, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, y, z, t). \quad (2.3.7)$$

2.3.1 Exemples numériques

Exemple 2.3.1 : *Considérons l'équation parabolique unidimensionnelle suivante :*

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)u_{xx} = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 2x^2 - 1, & t = 0. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.3.8), nous avons :

$$\mathcal{L}\{u_t(x, t)\} = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)u_{xx}\right\}. \quad (2.3.9)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = s^{-1}(2x^2 - 1) + s^{-1}\mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)u_{xx}\right\}. \quad (2.3.10)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.3.10) nous donne :

$$u(x, t) = (2x^2 - 1) + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)u_{xx}\right\}\right\}. \quad (2.3.11)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = 2x^2 - 1 + p\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx}(x, t)\right\}\right\}. \quad (2.3.12)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (2.3.12), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= 2x^2 - 1, \\ p^1 : u_1(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)(u_0)_{xx}\right\}\right\}, \\ p^2 : u_2(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)(u_1)_{xx}\right\}\right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)(u_{n-1})_{xx}\right\}\right\}, \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (2.3.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 2x^2 - 1, \\ u_1(x, t) &= (2x^2 - 1)t, \\ u_2(x, t) &= (2x^2 - 1)\frac{t^2}{2!}, \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= (2x^2 - 1)\frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, t)$, par série tronquée :

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, t) = (2x^2 - 1)e^t. \quad (2.3.14)$$

Exemple 2.3.2 : Considérons l'équation parabolique de seconde dimension suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) + \frac{y^2-1}{2}u_{xx} - \frac{x^2+1}{2}u_{yy} = 0, & t > 0 \\ u(x, y, 0) = y^2 - 1, & t = 0. \end{cases} \quad (2.3.15)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.3.15), nous avons :

$$\mathcal{L}\{u_t(x, y, t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2}u_{yy} - \frac{y^2-1}{2}u_{xx}\right\}. \quad (2.3.16)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, y, t)\} = s^{-1}(y^2 - 1) + s^{-1}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2}u_{yy} - \frac{y^2-1}{2}u_{xx}\right\}. \quad (2.3.17)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.3.17), nous donne :

$$u(x, y, t) = y^2 - 1 + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2}u_{yy} - \frac{y^2-1}{2}u_{xx}\right\}\right\}. \quad (2.3.18)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = y^2 - 1 + p\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} - \frac{y^2-1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx}\right\}\right\}. \quad (2.3.19)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (2.3.19), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, t) &= y^2 - 1, \\ p^1 : u_1(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2}(u_0)_{yy} - \frac{y^2-1}{2}(u_0)_{xx}\right\}\right\}, \\ p^2 : u_2(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2}(u_1)_{yy} - \frac{y^2-1}{2}(u_1)_{xx}\right\}\right\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p^n : u_n(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2 + 1}{2} (u_{n-1})_{yy} - \frac{y^2 - 1}{2} (u_{n-1})_{xx} \right\} \right\}, \quad (2.3.20)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (2.3.20), nous obtenons

$$u_0(x, y, t) = y^2 - 1,$$

$$u_1(x, y, t) = (x^2 + 1)t,$$

$$u_2(x, y, t) = -(y^2 - 1) \frac{t^2}{2!},$$

$$u_3(x, y, t) = -(x^2 + 1) \frac{t^3}{3!},$$

⋮

$$u_{2n}(x, y, t) = (-1)^n (y^2 - 1) \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

$$u_{2n+1}(x, y, t) = (-1)^n (x^2 + 1) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, y, t) = (x^2 + 1) \operatorname{sint} + (y^2 - 1) \operatorname{cost}. \quad (2.3.21)$$

Exemple 2.3.3 : Considérons l'équation parabolique de trois dimensions suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, y, z, t) = \frac{x^2}{12} u_{xx} + \frac{y^2}{24} u_{yy} + \frac{z^2}{24} u_{zz}, & t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = 2x^3 y^3 z^3, & t = 0. \end{cases} \quad (2.3.22)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.3.22), nous avons :

$$\mathcal{L}\{u_t(x, y, z, t)\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{x^2}{12} u_{xx} + \frac{y^2}{24} u_{yy} + \frac{z^2}{24} u_{zz} \right\}. \quad (2.3.23)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, y, z, t)\} = s^{-1} (2x^3 y^3 z^3) + s^{-1} \mathcal{L}\left\{ \frac{x^2}{12} u_{xx} + \frac{y^2}{24} u_{yy} + \frac{z^2}{24} u_{zz} \right\}. \quad (2.3.24)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.3.24), nous donne :

$$u(x, y, z, t) = 2x^3 y^3 z^3 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} u_{xx} + \frac{y^2}{24} u_{yy} + \frac{z^2}{24} u_{zz} \right\} \right\}. \quad (2.3.25)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = 2x^3 y^3 z^3 + p \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} + \frac{y^2}{24} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} + \frac{z^2}{24} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz} \right\} \right\}. \quad (2.3.26)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (2.3.26), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, z, t) &= 2x^3 y^3 z^3, \\ p^1 : u_1(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} (u_0)_{xx} + \frac{y^2}{24} (u_0)_{yy} + \frac{z^2}{24} (u_0)_{zz} \right\} \right\}, \\ p^2 : u_2(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} (u_1)_{xx} + \frac{y^2}{24} (u_1)_{yy} + \frac{z^2}{24} (u_1)_{zz} \right\} \right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} (u_{n-1})_{xx} + \frac{y^2}{24} (u_{n-1})_{yy} + \frac{z^2}{24} (u_{n-1})_{zz} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (2.3.27), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z, t) &= 2x^3 y^3 z^3, \\ u_1(x, y, z, t) &= 2x^3 y^3 z^3 t, \\ u_2(x, y, z, t) &= 2x^3 y^3 z^3 \frac{t^2}{2!}, \\ &\vdots \\ u_n(x, y, z, t) &= 2x^3 y^3 z^3 \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, z, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, y, z, t) = 2x^3 y^3 z^3 e^t. \quad (2.3.28)$$

2.4 Equation de type hyperbolique

Considérons l'équation de type hyperbolique en trois dimensions suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} + g_1(x, y, z) u_{xx} + g_2(x, y, z) u_{yy} + g_3(x, y, z) u_{zz} = 0, & t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = g_4(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = g_5(x, y, z), & t = 0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.4.1) , nous avons :

$$\mathcal{L}\{u_{tt}\} = -\mathcal{L}\{g_1(x, y, z)u_{xx} + g_2(x, y, z)u_{yy} + g_3(x, y, z)u_{zz}\}. \quad (2.4.2)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u\} = s^{-1}g_4 + s^{-2}g_5 - s^{-2}\mathcal{L}\{g_1u_{xx} + g_2u_{yy} + g_3u_{zz}\}. \quad (2.4.3)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.4.3) nous donne :

$$u(x, y, z, t) = g_4 + tg_5 - \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\{g_1u_{xx} + g_2u_{yy} + g_3u_{zz}\}\right\}. \quad (2.4.4)$$

Par la méthode de (HPM), nous avons :

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y, z, t), \quad (2.4.5)$$

En substituant Eq. (2.4.5) dans Eq. (2.4.4), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = g_4 + tg_5 - p\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{g_1\sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} + g_2\sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} + g_3\sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz}\right\}\right\}, \quad (2.4.6)$$

Par identification des termes de même puissances de p , nous obtenons les approximations suivantes :

$$p^0 : u_0(x, y, z, t) = g_4 + tg_5,$$

$$p^1 : u_1(x, y, z, t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\{g_1(u_0)_{xx} + g_2(u_0)_{yy} + g_3(u_0)_{zz}\}\right\},$$

$$p^2 : u_2(x, y, z, t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\{g_1(u_1)_{xx} + g_2(u_1)_{yy} + g_3(u_1)_{zz}\}\right\},$$

⋮

$$p^n : u_n(x, y, z, t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\{g_1(u_{n-1})_{xx} + g_2(u_{n-1})_{yy} + g_3(u_{n-1})_{zz}\}\right\},$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En procédant de la même manière, les autres composants $u_n(x, y, z, t)$, peuvent être complètement

obtenue, et la solution en série est ainsi entièrement déterminée. Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, z, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, y, z, t). \quad (2.4.7)$$

2.4.1 Exemples numériques

Exemple 2.4.1 : *Considérons l'équation unidimensionnelle de type hyperbolique suivante :*

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \frac{x^2-1}{2}u_{xx}, & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 - 1, \quad u_t(x, 0) = 0, & t = 0. \end{cases} \quad (2.4.8)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.4.8), nous avons :

$$\mathcal{L}\{u_{tt}(x, t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{x^2-1}{2}u_{xx}\right\}. \quad (2.4.9)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = s^{-1}(x^2 - 1) + s^{-2}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2-1}{2}u_{xx}\right\}. \quad (2.4.10)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.4.10), nous donne :

$$u(x, t) = (x^2 - 1) + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2-1}{2}u_{xx}\right\}\right\}. \quad (2.4.11)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = x^2 - 1 + p\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2-1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx}(x, t)\right\}\right\}. \quad (2.4.12)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (2.4.12), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= x^2 - 1, \\ p^1 : u_1(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2-1}{2}(u_0)_{xx}\right\}\right\}, \\ p^2 : u_2(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{\frac{x^2-1}{2}(u_1)_{xx}\right\}\right\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$p^n : u_n(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-2} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2 - 1}{2} (u_{n-1})_{xx} \right\} \right\}, \quad (2.4.13)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (2.4.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= x^2 - 1, \\ u_1(x, t) &= (x^2 - 1) \frac{t^2}{2!}, \\ u_2(x, t) &= (x^2 - 1) \frac{t^4}{4!}, \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= (x^2 - 1) \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, t)$, par série tronquée :

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, t) = (x^2 - 1) \operatorname{cosht}. \quad (2.4.14)$$

Exemple 2.4.2 : Considérons l'équation de seconde dimensions de type hyperbolique suivante :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = \frac{1}{6}x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}y^2 u_{yy}, & t > 0 \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = x^3 + y^3, & t = 0. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.4.15), nous avons :

$$\mathcal{L}\{u_{tt}(x, y, t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}y^2 u_{yy}\right\}. \quad (2.4.16)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, y, t)\} = s^{-2}(x^3 + y^3) + s^{-2} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}y^2 u_{yy}\right\}. \quad (2.4.17)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.4.17), nous donne :

$$u(x, y, t) = (x^3 + y^3)t + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}y^2 u_{yy}\right\}\right\}. \quad (2.4.18)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = (x^3 + y^3)t + p \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{6} x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} + \frac{1}{6} y^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} \right\} \right\}. \quad (2.4.19)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (2.4.19), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, t) &= (x^3 + y^3)t, \\ p^1 : u_1(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{6} x^2 (u_0)_{xx}(x, y, t) + \frac{1}{6} y^2 (u_0)_{yy}(x, y, t) \right\} \right\}, \\ p^2 : u_2(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{6} x^2 (u_1)_{xx}(x, y, t) + \frac{1}{6} y^2 (u_1)_{yy}(x, y, t) \right\} \right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{6} x^2 (u_{n-1})_{xx}(x, y, t) + \frac{1}{6} y^2 (u_{n-1})_{yy}(x, y, t) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (2.4.20), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= (x^3 + y^3)t, \\ u_1(x, y, t) &= (x^3 + y^3) \frac{t^3}{3!}, \\ u_2(x, y, t) &= (x^3 + y^3) \frac{t^5}{5!}, \\ &\vdots \\ u_n(x, y, t) &= (x^3 + y^3) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, y, t) = (x^3 + y^3) \sinh t. \quad (2.4.21)$$

Exemple 2.4.3 : Considérons l'équation de type hyperbolique de trois dimensions suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, y, z, t) = -\frac{1}{2} x^2 u_{xx} - \frac{1}{2} y^2 u_{yy} - \frac{1}{2} z^2 u_{zz}, & t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, & t = 0. \end{cases} \quad (2.4.22)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (2.4.22), nous avons :

$$\mathcal{L}\{u_n\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{1}{2}x^2u_{xx} - \frac{1}{2}y^2u_{yy} - \frac{1}{2}z^2u_{zz}\right\}. \quad (2.4.23)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, y, z, t)\} = s^{-2}(x^2 + 2y^2 + 3z^2) + s^{-2}\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{2}x^2u_{xx} - \frac{1}{2}y^2u_{yy} - \frac{1}{2}z^2u_{zz}\right\}. \quad (2.4.24)$$

En appliquant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (2.4.24), nous donne :

$$u(x, y, z, t) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)t + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{2}x^2u_{xx} - \frac{1}{2}y^2u_{yy} - \frac{1}{2}z^2u_{zz}\right\}\right\}. \quad (2.4.25)$$

En utilisant la méthode de perturbation d'homotopie, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)t + p\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{2}x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} - \frac{1}{2}y^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} - \frac{1}{2}z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz}\right\}\right\}. \quad (2.4.26)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (2.4.26), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, z, t) &= (x^2 + 2y^2 + 3z^2)t, \\ p^1 : u_1(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{2}x^2(u_0)_{xx} - \frac{1}{2}y^2(u_0)_{yy} - \frac{1}{2}z^2(u_0)_{zz}\right\}\right\}, \\ p^2 : u_2(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{2}x^2(u_1)_{xx} - \frac{1}{2}y^2(u_1)_{yy} - \frac{1}{2}z^2(u_1)_{zz}\right\}\right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-2}\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{2}x^2(u_{n-1})_{xx} - \frac{1}{2}y^2(u_{n-1})_{yy} - \frac{1}{2}z^2(u_{n-1})_{zz}\right\}\right\}, \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (2.4.27), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z, t) &= (x^2 + 2y^2 + 3z^2)t, \\ u_1(x, y, z, t) &= -(x^2 + 2y^2 + 3z^2)\frac{t^3}{3!}, \\ u_2(x, y, z, t) &= (x^2 + 2y^2 + 3z^2)\frac{t^5}{5!}, \\ &\vdots \\ u_n(x, y, z, t) &= (-1)^n(x^2 + 2y^2 + 3z^2)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, z, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, y, z, t) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2) \operatorname{sint}. \quad (2.4.28)$$

Applications de la méthode (HPTM) pour les équations aux dérivées partielles d'ordres fractionnaires

3.1 Description de la méthode

Afin d'élucider la procédure de résolution de la méthode de perturbation d'homotopie fractionnelle de Laplace [56], nous considérons l'équation différentielle fractionnelle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} D_{*t}^{\alpha} u(x, t) + R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t) = q(x, t), & t > 0 \\ 0 < \alpha \leq 1, \quad u(x, 0) = h(x), & t = 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où $D^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$, $R[x]$ est l'opérateur linéaire en x , $N[x]$ est l'opérateur général non-linéaire en x , et

$q(x, t)$ sont des fonctions continues. Maintenant, la méthodologie consiste à appliquer

la transformée de Laplace d'abord des deux côtés de (3.1.1). Ainsi, nous obtenons :

$$\mathcal{L}\{D_{*t}^{\alpha} u(x, t)\} + \mathcal{L}\{R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t)\} = \mathcal{L}\{q(x, t)\}. \quad (3.1.2)$$

Maintenant, en utilisant la propriété de différenciation de la transformée de Laplace, nous avons :

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = s^{-1}h(x) + s^{-1}q(x, t) - s^{-\alpha} \mathcal{L}\{R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t)\}. \quad (3.1.3)$$

En appliquant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.1.3), on obtient :

$$u(x, t) = G(x, t) - \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t)\}\}, \quad (3.1.4)$$

où $G(x, t)$, représente le terme résultant du terme source et des conditions initiales prescrites.

Maintenant, en appliquant la technique de perturbation [21, 22], nous pouvons supposer que la solution peut être exprimée comme une série de puissance en p , comme indiqué ci-dessous :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t), \quad (3.1.5)$$

où le paramètre d'homotopie, p , est considéré comme un petit paramètre $p \in [0, 1]$.

Le terme non-linéaire peut être décomposé comme :

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u), \quad (3.1.6)$$

où $H_n(u)$ désignent les polynômes de He [17, 18] qui sont donnés par la formule suivante :

$$H_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i u_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.7)$$

En substituant Eqs. (3.1.5) et (3.1.6) dans Eq. (3.1.4), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) = G(x, t) - p \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ R \sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n H_n(u) \right\} \right\} \right), \quad (3.1.8)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.1.8), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}
p^0 : u_0(x, t) &= G(x, t), \\
p^1 : u_1(x, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{Ru_0(x, t) + H_0(u)\}\}, \\
p^2 : u_2(x, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{Ru_1(x, t) + H_1(u)\}\}, \\
&\vdots \\
p^n : u_n(x, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{Ru_{n-1}(x, t) + H_{n-1}(u)\}\},
\end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, t)$, par série tronquée :

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, t). \quad (3.1.9)$$

Les solutions en série ci-dessus convergent généralement très rapidement. Une approche classique de convergence de ce type de série est déjà présentée par Abbaoui et Cherruault [2].

3.2 Les équations de la forme (0.0.3)

Considérons l'équation fractionnaire dans le temps suivante avec des coefficients variables :

$$\begin{cases} D_{*t}^\alpha u(x, y, z, t) + f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz} = 0, & t > 0 \\ 0 < \alpha \leq 1, & u(x, y, z, 0) = f_4(x, y, z), \quad t = 0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (3.2.1), nous avons :

$$\mathcal{L} \{D_{*t}^\alpha u(x, y, z, t)\} = -\mathcal{L} \{f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz}\}. \quad (3.2.2)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L} \{u(x, y, z, t)\} = s^{-1} f_4(x, y, z) - s^{-\alpha} \mathcal{L} \{f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz}\}. \quad (3.2.3)$$

En utilisant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.2.3), nous donne :

$$u(x, y, z, t) = f_4(x, y, z) - \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{f_1(x, y, z) u_{xx} + f_2(x, y, z) u_{yy} + f_3(x, y, z) u_{zz}\}\}. \quad (3.2.4)$$

En utilisant maintenant la méthode (HPM). Notons par

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n(x, y, z, t), \quad (3.2.5)$$

la solution cherchée. En substituant Eq. (3.2.5) dans Eq. (3.2.4), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = f_4 - p \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ f_1 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} + f_2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} + f_3 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz} \right\} \right\}. \quad (3.2.6)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.2.6), nous obtenons les approximations suivantes :

$$p^0 : u_0(x, y, z, t) = f_4(x, y, z),$$

⋮

$$p^n : u_n(x, y, z, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ f_1 (u_{n-1})_{xx} + f_2 (u_{n-1})_{yy} + f_3 (u_{n-1})_{zz} \right\} \right\},$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, z, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, y, z, t). \quad (3.2.7)$$

3.2.1 Exemples numériques

Exemple 3.2.1 : *Considérons l'équation fractionnaire dans le temps suivante avec des coefficients variables :*

$$\begin{cases} D_{*t}^\alpha u(x, t) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)u_{xx} = 0, & t > 0 \\ 0 < \alpha \leq 1, & u(x, 0) = 2x^2 - 1, \quad t = 0. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (3.2.8), nous avons :

$$\mathcal{L} \{ D_{*t}^\alpha u(x, t) \} = \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) u_{xx} \right\}. \quad (3.2.9)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L} \{ u(x, t) \} = s^{-1}(2x^2 - 1) + s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) u_{xx} \right\}. \quad (3.2.10)$$

En appliquant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.2.10), nous donne :

$$u(x, t) = 2x^2 - 1 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) u_{xx} \right\} \right\}. \quad (3.2.11)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie précitée, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = 2x^2 - 1 + p \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} \right\} \right\}. \quad (3.2.12)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.2.12), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= 2x^2 - 1, \\ p^1 : u_1(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) (u_0)_{xx} \right\} \right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) (u_{n-1})_{xx} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (3.2.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 2x^2 - 1, \\ u_1(x, t) &= \frac{2x^2 - 1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \\ u_2(x, t) &= \frac{2x^2 - 1}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}, \\ u_3(x, t) &= \frac{2x^2 - 1}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}, \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= \frac{2x^2 - 1}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, t)$, par série tronquée :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x^2 - 1}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}. \quad (3.2.14)$$

Les termes de la solution de décomposition en série, pour le cas spécial $\alpha = 1$, sont donnés par :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x^2 - 1}{n!} t^n = (2x^2 - 1)e^t, \quad (3.2.15)$$

qui est une solution exacte de l'équation (2.3.8).

Figure 10.1

Nous avons tracé ces surfaces en utilisant le logiciel Maple :

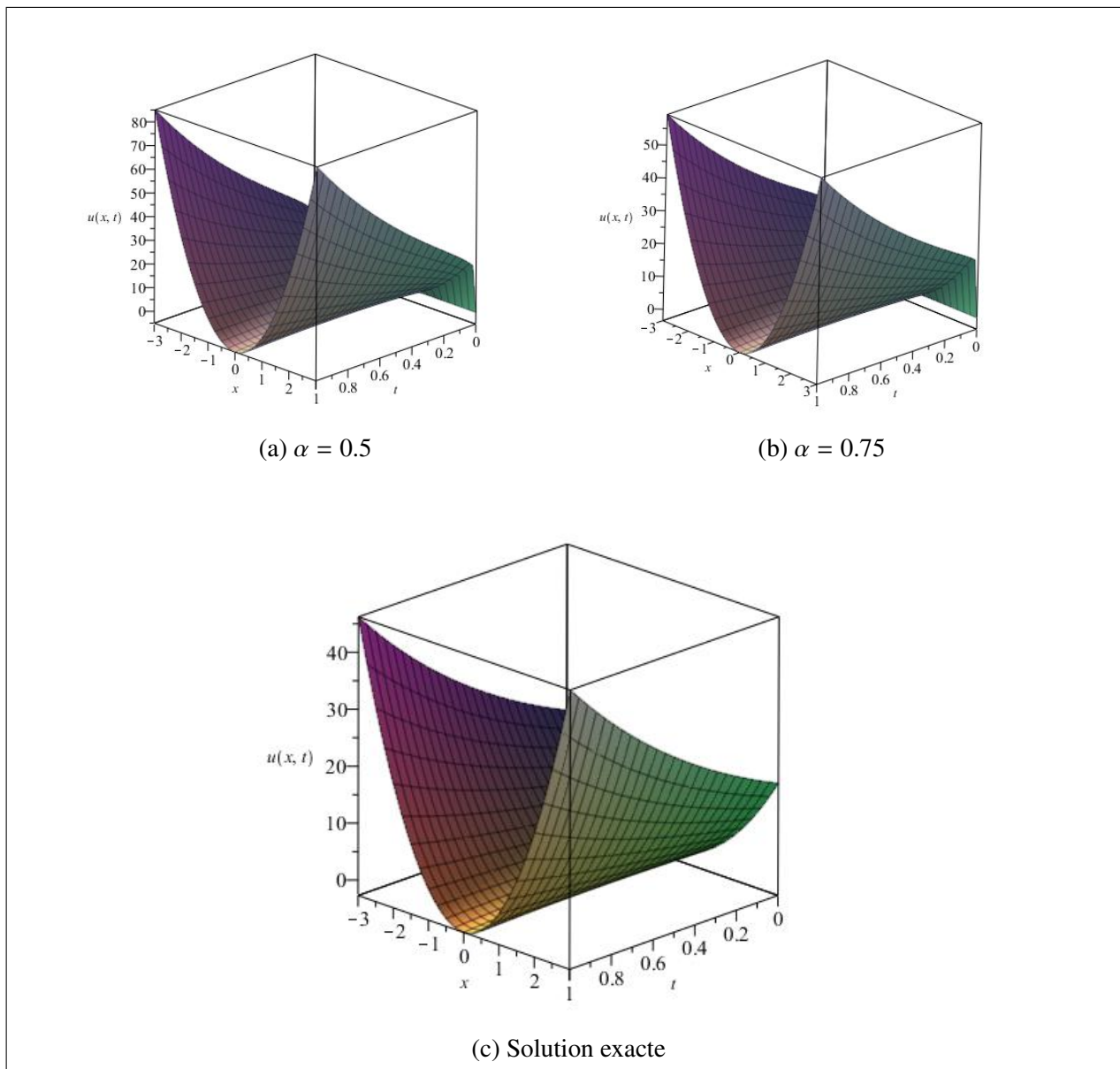


FIGURE 3.1 – Solution d'approximation en série de l'Eq. (3.2.8), lorsque $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$ avec les onze premiers termes et la solution exacte lorsque $\alpha = 1$.

Exemple 3.2.2 : *Considérons l'équation fractionnaire dans le temps suivante avec des coefficients variables :*

$$\begin{cases} D_{*t}^{\alpha} u(x, y, t) + \frac{y^2-1}{2} u_{xx} - \frac{x^2+1}{2} u_{yy} = 0, & t > 0 \\ 0 < \alpha \leq 1, & u(x, y, 0) = y^2 - 1, & t = 0. \end{cases} \quad (3.2.16)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (3.2.16), nous avons :

$$\mathcal{L}\{D_{*t}^{\alpha} u(x, y, t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2} u_{yy} - \frac{y^2-1}{2} u_{xx}\right\}. \quad (3.2.17)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, y, t)\} = s^{-1}(y^2 - 1) + s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2} u_{yy} - \frac{y^2-1}{2} u_{xx}\right\}. \quad (3.2.18)$$

En utilisant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.2.18), nous donne :

$$u(x, y, t) = (y^2 - 1) + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2} u_{yy} - \frac{y^2-1}{2} u_{xx}\right\}\right\}. \quad (3.2.19)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie précitée, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = y^2 - 1 + p \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} - \frac{y^2-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx}\right\}\right\}. \quad (3.2.20)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.2.20), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, t) &= y^2 - 1, \\ p^1 : u_1(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2} (u_0)_{yy}(x, y, t) - \frac{y^2-1}{2} (u_0)_{xx}(x, y, t)\right\}\right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{x^2+1}{2} (u_{n-1})_{yy}(x, y, t) - \frac{y^2-1}{2} (u_{n-1})_{xx}(x, y, t)\right\}\right\}, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (3.2.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= y^2 - 1, \\
u_1(x, y, t) &= \frac{x^2 + 1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \\
u_2(x, y, t) &= -\frac{y^2 - 1}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}, \\
u_3(x, y, t) &= -\frac{x^2 + 1}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}, \\
&\vdots \\
u_{2n}(x, y, t) &= (-1)^n \frac{y^2 - 1}{\Gamma(2n\alpha + 1)} t^{2n\alpha}, \\
u_{2n+1}(x, y, t) &= (-1)^n \frac{x^2 + 1}{\Gamma((2n + 1)\alpha + 1)} t^{(2n+1)\alpha}.
\end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, t) = (y^2 - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n\alpha}}{\Gamma(2n\alpha + 1)} + (x^2 + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{(2n+1)\alpha}}{\Gamma((2n + 1)\alpha + 1)}. \quad (3.2.22)$$

Les termes de la solution de décomposition en série, pour le cas spécial $\alpha = 1$, sont donnés par :

$$u(x, y, t) = (x^2 + 1)\text{sint} + (y^2 - 1)\text{cost}, \quad (3.2.23)$$

qui est une solution exacte de l'équation (2.3.15).

Exemple 3.2.3 : Considérons l'équation fractionnaire dans le temps suivante avec des coefficients variables :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x, y, z, t) = \frac{x^2}{12} u_{xx} + \frac{y^2}{24} u_{yy} + \frac{z^2}{24} u_{zz}, & t > 0 \\ 0 < \alpha \leq 1, & u(x, y, z, 0) = 2x^3 y^3 z^3, & t = 0. \end{cases} \quad (3.2.24)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (3.2.24), nous avons :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha u(x, y, z, t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{x^2}{12} u_{xx} + \frac{y^2}{24} u_{yy} + \frac{z^2}{24} u_{zz}\right\}. \quad (3.2.25)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, y, z, t)\} = s^{-1}(2x^3 y^3 z^3) + s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{x^2}{12} u_{xx} + \frac{y^2}{24} u_{yy} + \frac{z^2}{24} u_{zz}\right\}. \quad (3.2.26)$$

En utilisant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.2.26), nous donne :

$$u(x, y, z, t) = 2x^3y^3z^3 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} u_{xx} + \frac{y^2}{24} u_{yy} + \frac{z^2}{24} u_{zz} \right\} \right\}. \quad (3.2.27)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie précitée, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = 2x^3y^3z^3 + p \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} + \frac{y^2}{24} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} + \frac{z^2}{24} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz} \right\} \right\}. \quad (3.2.28)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.2.28), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, z, t) &= 2x^3y^3z^3, \\ p^1 : u_1(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} (u_0)_{xx}(x, y, z, t) + \frac{y^2}{24} (u_0)_{yy}(x, y, z, t) + \frac{z^2}{24} (u_0)_{zz}(x, y, z, t) \right\} \right\}, \\ p^2 : u_2(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} (u_1)_{xx}(x, y, z, t) + \frac{y^2}{24} (u_1)_{yy}(x, y, z, t) + \frac{z^2}{24} (u_1)_{zz}(x, y, z, t) \right\} \right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, y, z, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2}{12} (u_{n-1})_{xx}(x, y, z, t) + \frac{y^2}{24} (u_{n-1})_{yy}(x, y, z, t) + \frac{z^2}{24} (u_{n-1})_{zz}(x, y, z, t) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (3.2.29), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z, t) &= 2x^3y^3z^3, \\ u_1(x, y, z, t) &= \frac{2x^3y^3z^3}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \\ u_2(x, y, z, t) &= \frac{2x^3y^3z^3}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}, \\ u_3(x, y, z, t) &= \frac{2x^3y^3z^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}, \\ &\vdots \\ u_n(x, y, z, t) &= \frac{2x^3y^3z^3}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, z, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x^3y^3z^3}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}. \quad (3.2.30)$$

Les termes de la solution de décomposition en série, pour le cas spécial $\alpha = 1$, sont donnés par :

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x^3 y^3 z^3}{n!} t^n = 2x^3 y^3 z^3 e^t, \quad (3.2.31)$$

qui est une solution exacte à l'équation (2.3.22).

3.3 Les équations de la forme (0.0.4)

Considérons l'équation fractionnaire dans le temps suivante avec des coefficients variables :

$$\begin{cases} D_{*t}^\alpha u(x, y, z, t) + g_1(x, y, z) u_{xx} + g_2(x, y, z) u_{yy} + g_3(x, y, z) u_{zz} = 0, & t > 0 \\ 1 < \alpha \leq 2, \quad u(x, y, z, 0) = g_4(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = g_5(x, y, z), & t = 0. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (3.3.1), nous avons :

$$\mathcal{L}\{D_{*t}^\alpha u(x, y, z, t)\} = -\mathcal{L}\{g_1(x, y, z) u_{xx} + g_2(x, y, z) u_{yy} + g_3(x, y, z) u_{zz}\}. \quad (3.3.2)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u\} = s^{-1} g_4(x, y, z) + s^{-2} g_5(x, y, z) - s^{-\alpha} \mathcal{L}\{g_1(x, y, z) u_{xx} + g_2(x, y, z) u_{yy} + g_3(x, y, z) u_{zz}\}. \quad (3.3.3)$$

En utilisant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.3.3), nous donne :

$$u(x, y, z, t) = g_4(x, y, z) + t g_5(x, y, z) - \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\{g_1(x, y, z) u_{xx} + g_2(x, y, z) u_{yy} + g_3(x, y, z) u_{zz}\}\right\}. \quad (3.3.4)$$

Appliquons maintenant la méthode (HPM). Notons par

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y, z, t), \quad (3.3.5)$$

la solution cherchée.

En substituant Eq. (3.3.5) dans Eq. (3.3.4), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = g_4 + t g_5 - p \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{g_1 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} + g_2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} + g_3 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz}\right\}\right\}. \quad (3.3.6)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.3.6), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, z, t) &= g_4(x, y, z) + tg_5(x, y, z), \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, y, z, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ g_1(u_{n-1})_{xx} + g_2(u_{n-1})_{yy} + g_3(u_{n-1})_{zz} \right\} \right\}, \end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, z, t)$, par série tronquée :

$$u(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, y, z, t). \quad (3.3.7)$$

3.3.1 Exemples numériques

Exemple 3.3.1 : *Considérons l'équation fractionnaire dans le temps suivante avec des coefficients variables :*

$$\begin{cases} D_{*t}^\alpha u(x, t) = \frac{x^2-1}{2} u_{xx}, & t > 0 \\ 1 < \alpha \leq 2, & u(x, 0) = x^2 - 1, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad t = 0. \end{cases} \quad (3.3.8)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (3.3.8), nous avons :

$$\mathcal{L} \{ D_{*t}^\alpha u(x, t) \} = \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2-1}{2} u_{xx} \right\}. \quad (3.3.9)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L} \{ u(x, t) \} = s^{-1}(x^2 - 1) + s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2-1}{2} u_{xx} \right\}. \quad (3.3.10)$$

En utilisant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.3.10), nous donne :

$$u(x, t) = x^2 - 1 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2-1}{2} u_{xx} \right\} \right\}. \quad (3.3.11)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie précitée, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = x^2 - 1 + p \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx}(x, t) \right\} \right\}. \quad (3.3.12)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.3.12), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}
 p^0 : u_0(x, t) &= x^2 - 1, \\
 p^1 : u_1(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2 - 1}{2} (u_0)_{xx} \right\} \right\}, \\
 &\vdots \\
 p^n : u_n(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{x^2 - 1}{2} (u_{n-1})_{xx} \right\} \right\},
 \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (3.3.13), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= x^2 - 1, \\
 u_1(x, t) &= \frac{x^2 - 1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \\
 u_2(x, t) &= \frac{x^2 - 1}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}, \\
 u_3(x, t) &= \frac{x^2 - 1}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}, \\
 &\vdots \\
 u_n(x, t) &= \frac{x^2 - 1}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}.
 \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, t)$, par série tronquée :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}. \tag{3.3.14}$$

Les termes de la solution de décomposition en série, pour le cas spécial $\alpha = 2$, sont donnés par :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(2n)!} t^{2n} = (x^2 - 1) \cosh t, \tag{3.3.15}$$

qui est une solution exacte à l'équation (2.4.8).

Figure 10.2

Nous avons tracé ces surfaces en utilisant le logiciel Maple :

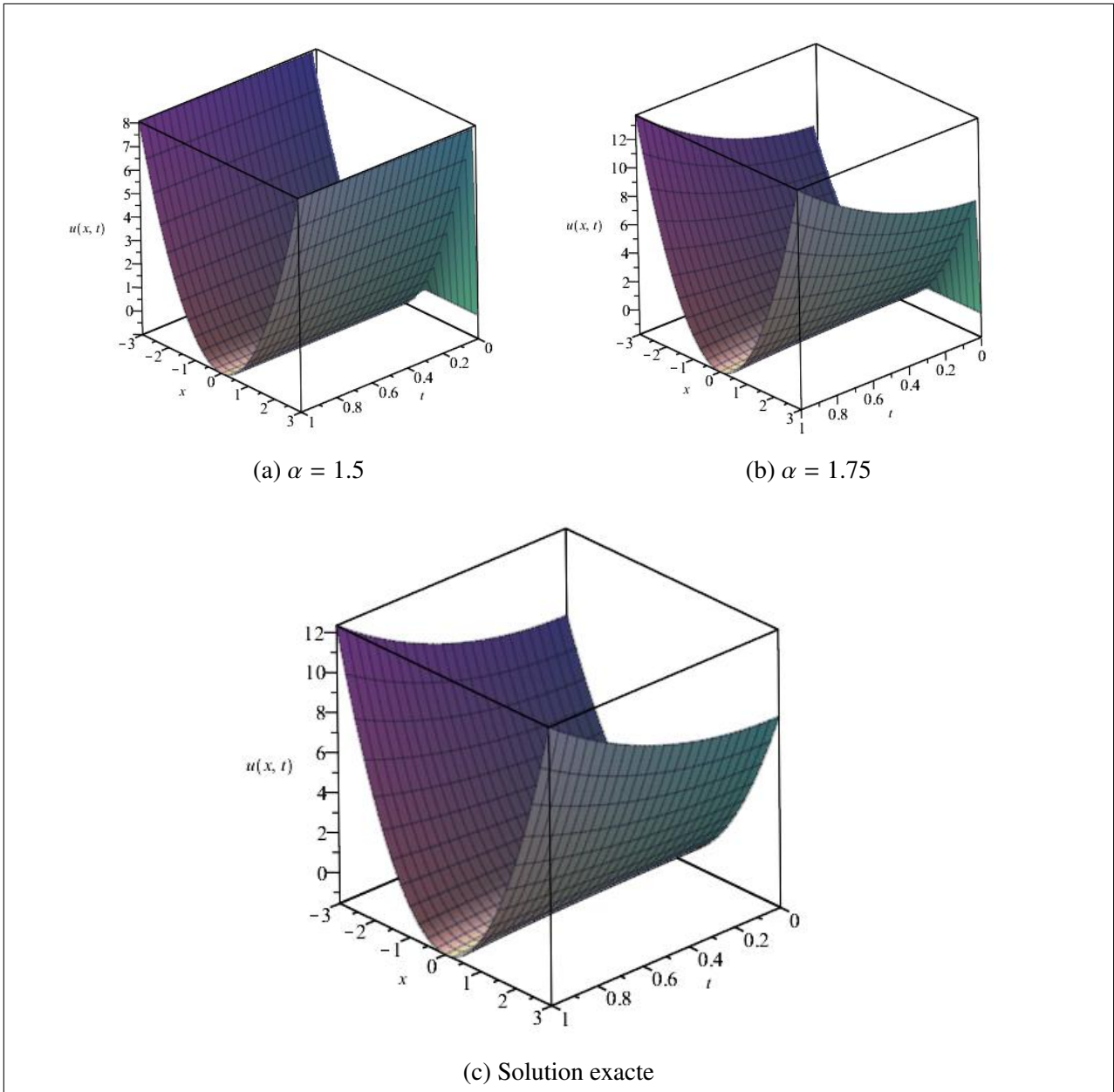


FIGURE 3.2 – Solution d’approximation de série de Eq. (3.3.8), lorsque $\alpha = 1.5$, $\alpha = 1.75$ avec les onze premiers termes et la solution exacte lorsque $\alpha = 2$.

Exemple 3.3.2 : *Considérons l'équation fractionnaire dans le temps suivante avec des coefficients variables :*

$$\begin{cases} D_{*t}^\alpha u(x, y, t) = \frac{1}{6}x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}y^2 u_{yy}, & t > 0 \\ 1 < \alpha \leq 2, & u(x, y, 0) = 0, & u_t(x, y, 0) = x^3 + y^3, & t = 0. \end{cases} \quad (3.3.16)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (3.3.16), nous avons :

$$\mathcal{L}\{D_{*t}^\alpha u(x, y, t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}y^2 u_{yy}\right\}. \quad (3.3.17)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x, y, t)\} = s^{-2}(x^3 + y^3) + s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}y^2 u_{yy}\right\}. \quad (3.3.18)$$

En utilisant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.3.18), nous donne :

$$u(x, y, t) = (x^3 + y^3)t + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}y^2 u_{yy}\right\}\right\}. \quad (3.3.19)$$

En utilisant la méthode de perturbation d'homotopie précitée, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = (x^3 + y^3)t + p \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx}(x, y, t) + \frac{1}{6}y^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy}(x, y, t)\right\}\right\}. \quad (3.3.20)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.3.20), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, t) &= (x^3 + y^3)t, \\ p^1 : u_1(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 (u_0)_{xx} + \frac{1}{6}y^2 (u_0)_{yy}\right\}\right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, y, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{6}x^2 (u_{n-1})_{xx} + \frac{1}{6}y^2 (u_{n-1})_{yy}\right\}\right\}, \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (3.3.21), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= (x^3 + y^3)t, \\ u_1(x, y, t) &= \frac{x^3 + y^3}{\Gamma(\alpha + 2)} t^{(\alpha+1)}, \\ u_2(x, y, t) &= \frac{x^3 + y^3}{\Gamma(2\alpha + 2)} t^{(2\alpha+1)}, \\ u_3(x, y, t) &= \frac{x^3 + y^3}{\Gamma(3\alpha + 2)} t^{(3\alpha+1)}, \\ &\vdots \\ u_n(x, y, t) &= \frac{x^3 + y^3}{\Gamma(n\alpha + 2)} t^{(n\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, t)$, par série tronquée

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^3 + y^3}{\Gamma(n\alpha + 2)} t^{(n\alpha+1)}. \quad (3.3.22)$$

Les termes de la solution de décomposition en série, pour le cas spécial $\alpha = 2$, sont donnés par :

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^3 + y^3}{(2n + 1)!} t^{(2n+1)} = (x^3 + y^3) \sinh t, \quad (3.3.23)$$

qui est une solution exacte à l'équation (2.4.15).

Exemple 3.3.3 : Considérons l'équation fractionnaire dans le temps suivante avec des coefficients variables :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x, y, z, t) = -\frac{1}{2}x^2 u_{xx}(x, y, z, t) - \frac{1}{2}y^2 u_{yy}(x, y, z, t) - \frac{1}{2}z^2 u_{zz}(x, y, z, t), & t > 0 \\ 1 < \alpha \leq 2, \quad u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, & t = 0. \end{cases} \quad (3.3.24)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de l'équation (3.3.24), nous avons :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha u(x, y, z, t)\} = -\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}x^2 u_{xx} + \frac{1}{2}y^2 u_{yy} + \frac{1}{2}z^2 u_{zz}\right\}. \quad (3.3.25)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\mathcal{L}\{u\} = s^{-2}(x^2 + 2y^2 + 3z^2) - s^{-\alpha} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}x^2 u_{xx} + \frac{1}{2}y^2 u_{yy} + \frac{1}{2}z^2 u_{zz}\right\}. \quad (3.3.26)$$

En appliquons l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (3.3.26), nous donne :

$$u = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)t - \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2}x^2 u_{xx} + \frac{1}{2}y^2 u_{yy} + \frac{1}{2}z^2 u_{zz} \right\} \right\}. \quad (3.3.27)$$

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie précitée, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n u_n = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)t - p \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2}x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{xx} + \frac{1}{2}y^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{yy} + \frac{1}{2}z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} p^n (u_n)_{zz} \right\} \right\}. \quad (3.3.28)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (3.3.28), nous obtenons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, y, z, t) &= (x^2 + 2y^2 + 3z^2)t, \\ p^1 : u_1(x, y, z, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2}x^2 (u_0)_{xx} + \frac{1}{2}y^2 (u_0)_{yy} + \frac{1}{2}z^2 (u_0)_{zz} \right\} \right\}, \\ &\vdots \\ p^n : u_n(x, y, z, t) &= -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2}x^2 (u_{n-1})_{xx} + \frac{1}{2}y^2 (u_{n-1})_{yy} + \frac{1}{2}z^2 (u_{n-1})_{zz} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant la formule d'itération (3.3.29), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z, t) &= (x^2 + 2y^2 + 3z^2)t, \\ u_1(x, y, z, t) &= -\frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{\Gamma(\alpha + 2)} t^{(\alpha+1)}, \\ u_2(x, y, z, t) &= \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{\Gamma(2\alpha + 2)} t^{(2\alpha+1)}, \\ u_3(x, y, z, t) &= -\frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{\Gamma(3\alpha + 2)} t^{(3\alpha+1)}, \\ &\vdots \\ u_n(x, y, z, t) &= (-1)^n \left(\frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{\Gamma(n\alpha + 2)} \right) t^{(n\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Enfin, nous approchons la solution analytique $u(x, y, z, t)$, par série tronquée

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{\Gamma(n\alpha + 2)} \right) t^{(n\alpha+1)}. \quad (3.3.30)$$

Les termes de la solution de décomposition en série, pour le cas spécial $\alpha = 2$, sont donnés par :

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2 + 2y^2 + 3z^2) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = (x^2 + 2y^2 + 3z^2) \operatorname{sint}, \quad (3.3.31)$$

qui est une solution exacte à l'équation (2.4.22).

Applications de la méthode (HPTM) pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordres fractionnaires

4.1 Introduction

L'équation de Burgers est une équation aux dérivées partielles issue de la mécanique des fluides. Elle apparaît dans divers domaines des mathématiques appliquées, comme la modélisation de la dynamique des gaz, de l'acoustique ou du trafic routier. Elle doit son nom à Johannes Martinus Burgers qui l'a discutée en 1948. Elle apparaît dans des travaux antérieurs de Andrew Russel Forsyth et Harry Bateman.

4.2 Description de la méthode

Pour illustrer l'idée de base de (HPTM) [32], nous considérons le système d'équations différentielles non linéaires aux dérivées fractionnaires de la forme

$$\begin{cases} D_{*t}^{\alpha} u(x, t) + R_1 u(x, t) + N_1(u, v) = h_1(x, t), & 0 < \alpha \leq 1 \\ D_{*t}^{\beta} v(x, t) + R_2 v(x, t) + N_2(u, v) = h_2(x, t), & 0 < \beta \leq 1, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

dont les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = g_1(x), \\ v(x, 0) = g_2(x), \end{cases} \quad (4.2.2)$$

où $D_{*t}^\alpha u(x, t)$, $D_t^\beta v(x, t)$ sont les dérivées fractionnaires caputo des fonctions $u(x, t)$, $v(x, t)$, respectivement, R_1, R_2 sont des opérateurs linéaires, N_1 et N_2 sont des opérateurs non-linéaires, et h_1 et h_2 sont les termes source. Prenons la transformation de Laplace des deux côtés de (4.2.1), on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{D_{*t}^\alpha u(x, t)\} + \mathcal{L}\{R_1 u(x, t) + N_1(u, v)\} = \mathcal{L}\{h_1(x, t)\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \mathcal{L}\{D_{*t}^\beta v(x, t)\} + \mathcal{L}\{R_2 v(x, t) + N_2(u, v)\} = \mathcal{L}\{h_2(x, t)\}, & 0 < \beta \leq 1, \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Maintenant, en utilisant la propriété de différenciation de la transformée de Laplace, nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = s^{-1}g_1(x) + s^{-\alpha}\mathcal{L}\{h_1(x, t)\} - s^{-\alpha}\mathcal{L}\{R_1 u(x, t) + N_1(u, v)\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \mathcal{L}\{v(x, t)\} = s^{-1}g_2(x) + s^{-\beta}\mathcal{L}\{h_2(x, t)\} - s^{-\beta}\mathcal{L}\{R_2 v(x, t) + N_2(u, v)\}, & 0 < \beta \leq 1, \end{cases} \quad (4.2.4)$$

En appliquant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (4.2.5), on obtient :

$$\begin{cases} u(x, t) = G_1(x, t) - \mathcal{L}^{-1}\{s^{-\alpha}\mathcal{L}\{R_1 u(x, t) + N_1(u, v)\}\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ v(x, t) = G_2(x, t) - \mathcal{L}^{-1}\{s^{-\beta}\mathcal{L}\{R_2 v(x, t) + N_2(u, v)\}\}, & 0 < \beta \leq 1, \end{cases} \quad (4.2.5)$$

où $G_1(x, t)$ et $G_2(x, t)$, représentent les termes résultant des termes source et des conditions initiales prescrites. Maintenant, en appliquant la technique de perturbation classique, nous pouvons supposer que la solution peut être exprimée comme une série de puissance en p , comme indiqué ci-dessous :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t), \quad v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t) \quad (4.2.6)$$

$$N_1(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n, \quad N_2(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n, \quad (4.2.7)$$

où A_n et B_n désignent les polynômes de He [18] qui sont donnés par :

$$A_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N_1 \left(\sum_{i=0}^n p^i u_i, \sum_{i=0}^n p^i v_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.8)$$

$$B_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N_2 \left(\sum_{i=0}^n p^i u_i, \sum_{i=0}^n p^i v_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.9)$$

En substituant Eqs. (4.2.6) et (4.2.7) dans Eq. (4.2.5), et en utilisant (HPM) [21, 22], on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = G_1(x, t) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ R_1 \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n \right\} \right\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t) = G_2(x, t) - \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\beta} \mathcal{L} \left\{ R_2 \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n \right\} \right\}, & 0 < \beta \leq 1, \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (4.2.10), nous obtenons les approximations suivantes :

p^0 :

$$\begin{cases} u_0(x, t) = G_1(x, t) \\ v_0(x, t) = G_2(x, t), \end{cases} \quad (4.2.11)$$

:

p^n :

$$\begin{cases} u_n(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ R_1 u_{n-1}(x, t) + A_{n-1} \right\} \right\}, \\ v_n(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\beta} \mathcal{L} \left\{ R_2 v_{n-1}(x, t) + B_{n-1} \right\} \right\}, \end{cases} \quad (4.2.12)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, les solutions approchées sont données par

$$\begin{cases} u(x, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, t), \\ v(x, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N v_n(x, t), \end{cases} \quad (4.2.13)$$

4.3 Exemples numériques

Exemple 4.3.1 : Considérons le système des équations couplées de Burgers fractionnaires [1] :

$$\begin{cases} D_{*t}^{\alpha} u(x, t) = u_{xx} + 2uu_x - (uv)_x, & 0 < \alpha \leq 1, \\ D_{*t}^{\beta} v(x, t) = v_{xx} + 2vv_x - (uv)_x, & 0 < \beta \leq 1. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} u(x, 0) = \cos x, \\ v(x, 0) = \cos x. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Pour $\alpha = \beta = 1$, la solution exacte de (4.3.1) est donnée par

$$\begin{cases} u(x, t) = e^{-t} \cos x, \\ v(x, t) = e^{-t} \cos x. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de (4.3.1), on a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{D_{*t}^\alpha u(x, t)\} = \mathcal{L}\{u_{xx} + 2uu_x - (uv)_x\}, \\ \mathcal{L}\{D_{*t}^\beta v(x, t)\} = \mathcal{L}\{v_{xx} + 2vv_x - (uv)_x\}. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Maintenant, en utilisant la propriété de différenciation de la transformée de Laplace, nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = s^{-1} \cos x + s^{-\alpha} \mathcal{L}\{u_{xx} + 2uu_x - (uv)_x\}, \\ \mathcal{L}\{v(x, t)\} = s^{-1} \cos x + s^{-\beta} \mathcal{L}\{v_{xx} + 2vv_x - (uv)_x\}. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

En utilisant l'inverse de Laplace des deux côtés de l'équation (4.3.5), on obtient :

$$\begin{cases} u(x, t) = \cos x + \mathcal{L}^{-1}\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\{u_{xx} + 2uu_x - (uv)_x\}\}, \\ v(x, t) = \cos x + \mathcal{L}^{-1}\{s^{-\beta} \mathcal{L}\{v_{xx} + 2vv_x - (uv)_x\}\}. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Maintenant, en appliquant la technique de perturbation classique, nous pouvons supposer que la solution peut être exprimée comme une série de puissance en p , comme indiqué ci-dessous :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t), \quad v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t), \quad (4.3.7)$$

$$2uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n, \quad 2vv_x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n, \quad (uv)_x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n C_n, \quad (4.3.8)$$

où A_n, B_n, C_n sont des polynômes de He représentant les termes non-linéaires.

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie précitée, nous avons :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = \cos x + p \mathcal{L}^{-1}\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} p^n (u_n)_{xx} + \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n - \sum_{n=0}^{\infty} p^n C_n\}\}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, t) = \cos x + p \mathcal{L}^{-1}\{s^{-\beta} \mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} p^n (v_n)_{xx} + \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n - \sum_{n=0}^{\infty} p^n C_n\}\}. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (4.3.9), nous obtenons les approximations suivantes :

p^0 :

$$\begin{cases} u_0(x, t) = \cos x, \\ v_0(x, t) = \cos x, \end{cases} \quad (4.3.10)$$

p^1 :

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{u_{0xx} + A_0 - C_0\}\}, \\ v_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\beta} \mathcal{L} \{v_{0xx} + B_0 - C_0\}\}, \end{cases} \quad (4.3.11)$$

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{-\cos x + 2u_{0x}u_0 - u_0v_{0x} - u_{0x}v_0\}\} = -\cos x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ v_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\beta} \mathcal{L} \{-\cos x + 2v_{0x}v_0 - u_0v_{0x} - u_{0x}v_0\}\} = -\cos x \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, \end{cases} \quad (4.3.12)$$

nous continuons à obtenir

p^2 :

$$\begin{cases} u_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{u_{1xx} + A_1 - C_1\}\}, \\ v_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\beta} \mathcal{L} \{v_{1xx} + B_1 - C_1\}\}, \end{cases} \quad (4.3.13)$$

$$\begin{cases} u_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \cos x + 2u_{0x}u_1 + 2u_0u_{1x} - (u_1v_0 + u_0v_1)_x \right\} \right\}, \\ v_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\beta} \mathcal{L} \left\{ \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \cos x + 2v_{0x}v_1 + 2v_0v_{1x} - (u_1v_0 + u_0v_1)_x \right\} \right\}, \end{cases} \quad (4.3.14)$$

$$\begin{cases} u_2(x, t) = \cos x \left(\frac{(1+2\sin x)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} - \frac{2\sin x}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta} \right), \\ v_2(x, t) = \cos x \left(\frac{(1+2\sin x)}{\Gamma(2\beta+1)} t^{2\beta} - \frac{2\sin x}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta} \right), \end{cases} \quad (4.3.15)$$

Enfin, nous approchons la solution analytique (u, v) , par des séries tronquées :

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t) = \cos x - \cos x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \cos x \left(\frac{(1+2\sin x)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} - \frac{2\sin x}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta} \right) + \dots, \\ v(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x, t) = \cos x - \cos x \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \cos x \left(\frac{(1+2\sin x)}{\Gamma(2\beta+1)} t^{2\beta} - \frac{2\sin x}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta} \right) + \dots, \end{cases} \quad (4.3.16)$$

Lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, la solution de système (4.3.1) est

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t) = \cos x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = e^{-t} \cos x, \\ v(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x, t) = \cos x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = e^{-t} \cos x, \end{cases} \quad (4.3.17)$$

qui est une solution exacte d'un système non-linéaire donné en (4.3.3).

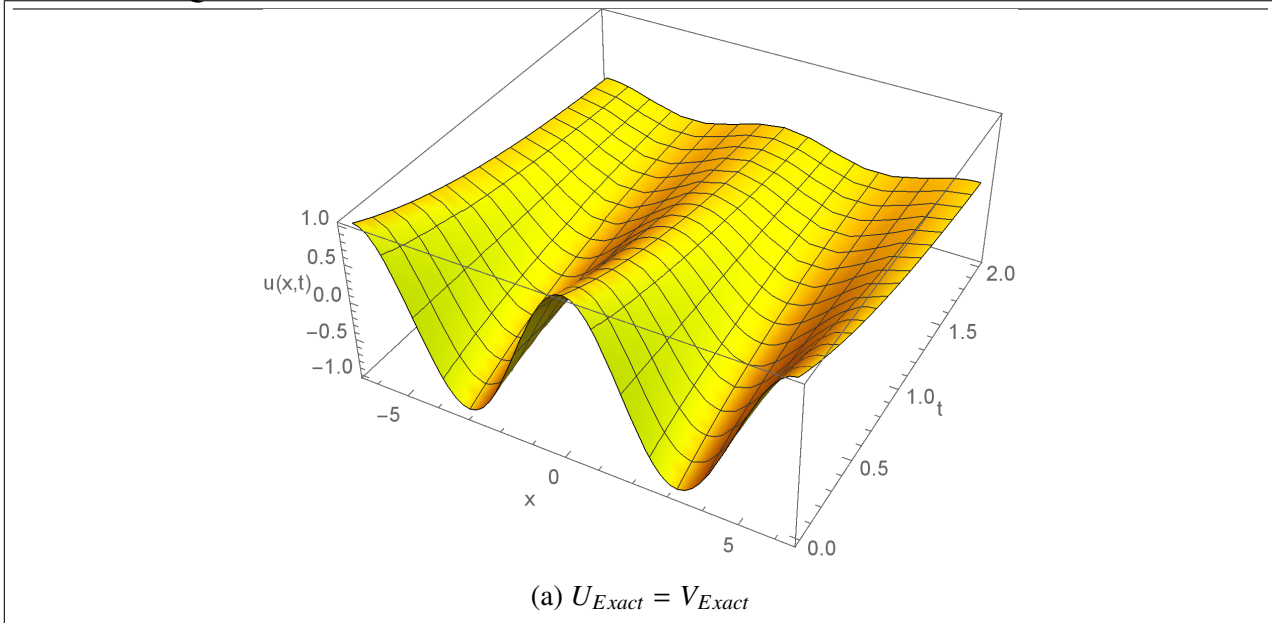


FIGURE 4.1 – La Surface représentative de la solution exacte (4.3.17) du système (4.3.1) pour $\alpha = \beta = 1$ et $(x, t) \in [-2\pi, 2\pi] \times [0, 2]$ (à l'aide de *Mathematica*).

Exemple 4.3.2 : *Considérons le système d'équations différentielles non linéaires aux dérivées fractionnaires :*

$$\begin{cases} D_{*t}^\alpha u(x, y, t) = -u - v_x w_y + v_y w_x, & 0 < \alpha \leq 1 \\ D_{*t}^\beta v(x, y, t) = v, & 0 < \beta \leq 1 \\ D_{*t}^\gamma w(x, y, t) = w - u_x v_y - u_y v_x, & 0 < \gamma \leq 1. \end{cases} \quad (4.3.18)$$

dont les conditions initiales sont données par

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = e^{x+y}, \\ v(x, y, 0) = e^{x-y}, \\ w(x, y, 0) = e^{y-x}. \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Pour $\alpha = \beta = \gamma = 1$, la solution exacte de (4.3.18) est donnée par

$$\begin{cases} u(x, t) = e^{x+y-t}, \\ v(x, t) = e^{x-y+t}, \\ w(x, t) = e^{y-x+t}. \end{cases} \quad (4.3.20)$$

En utilisant la transformation de Laplace des deux côtés de (4.3.18), on a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{D_{*t}^\alpha u(x, y, t)\} = \mathcal{L}\{-u - v_x w_y + v_y w_x\}, \\ \mathcal{L}\{D_{*t}^\beta v(x, y, t)\} = \mathcal{L}\{v\}, \\ \mathcal{L}\{D_{*t}^\gamma w(x, y, t)\} = \mathcal{L}\{w - u_x v_y - u_y v_x\}. \end{cases} \quad (4.3.21)$$

En utilisant la propriété de différenciation de la transformation de Laplace, nous avons

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{u(x, y, t)\} = s^{-1}e^{x+y} + s^{-\alpha}\mathcal{L}\{-u - v_x w_y + v_y w_x\}, \\ \mathcal{L}\{v(x, y, t)\} = s^{-1}e^{x-y} + s^{-\beta}\mathcal{L}\{v\}, \\ \mathcal{L}\{w(x, y, t)\} = s^{-1}e^{y-x} + s^{-\gamma}\mathcal{L}\{w - u_x v_y - u_y v_x\}. \end{cases} \quad (4.3.22)$$

En utilisant l'inverse de Laplace des deux côtés de (4.3.22), on obtient :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = e^{x+y} + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha}\mathcal{L}\{-u - v_x w_y + v_y w_x\}\right\}, \\ v(x, y, t) = e^{x-y} + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\beta}\mathcal{L}\{v\}\right\}, \\ w(x, y, t) = e^{y-x} + \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\gamma}\mathcal{L}\{w - u_x v_y - u_y v_x\}\right\}. \end{cases} \quad (4.3.23)$$

Maintenant, en appliquant la technique de perturbation classique, nous pouvons supposer que la solution peut être exprimée comme une série de puissance en p , comme indiqué ci-dessous :

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y, t), \quad v(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, y, t), \quad w(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x, y, t) \quad (4.3.24)$$

$$v_x w_y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n, \quad v_y w_x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n, \quad u_x v_y = \sum_{n=0}^{\infty} p^n C_n, \quad u_y v_x = \sum_{n=0}^{\infty} p^n D_n \quad (4.3.25)$$

où A_n, B_n, C_n, D_n sont des polynômes de He représentant les termes non-linéaires.

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie précitée, nous avons :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y, t) = e^{x+y} + p\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha}\mathcal{L}\left\{-\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, y, t) - \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n + \sum_{n=0}^{\infty} p^n B_n\right\}\right\}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, y, t) = e^{x-y} + p\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\beta}\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, y, t)\right\}\right\}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x, y, t) = e^{y-x} + p\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\gamma}\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} p^n w_n(x, y, t) - \sum_{n=0}^{\infty} p^n C_n - \sum_{n=0}^{\infty} p^n D_n\right\}\right\}. \end{cases} \quad (4.3.26)$$

Par identification des termes de même puissances de p de l'équation (4.3.26), nous obtenons les approximations suivantes :

p^0 :

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) = e^{x+y}, \\ v_0(x, y, t) = e^{x-y}, \\ w_0(x, y, t) = e^{y-x}. \end{cases} \quad (4.3.27)$$

p^1 :

$$\begin{cases} u_1(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{-u_0 - A_0 + B_0\}\}, \\ v_1(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\beta} \mathcal{L} \{v_0\}\}, \\ w_1(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\gamma} \mathcal{L} \{w_0 - C_0 - D_0\}\}. \end{cases} \quad (4.3.28)$$

$$\begin{cases} u_1(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ -e^{x+y} - v_{0x}w_{0y} + v_{0y}w_{0x} \right\} \right\} = -e^{x+y} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ v_1(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\beta} \mathcal{L} \{e^{x-y}\} \right\} = e^{x-y} \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, \\ w_1(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\gamma} \mathcal{L} \left\{ e^{y-x} - u_{0x}v_{0y} - u_{0y}v_{0x} \right\} \right\} = e^{y-x} \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}. \end{cases} \quad (4.3.29)$$

on obtient de plus

p^2 :

$$\begin{cases} u_2(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\alpha} \mathcal{L} \{-u_1 - A_1 + B_1\}\}, \\ v_2(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\beta} \mathcal{L} \{v_1\}\}, \\ w_2(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^{-\gamma} \mathcal{L} \{w_1 - C_1 - D_1\}\}. \end{cases} \quad (4.3.30)$$

$$\begin{cases} u_2(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \mathcal{L} \left\{ e^{x+y} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - v_{0x}w_{1y} - v_{1x}w_{0y} + v_{0y}w_{1x} + v_{1y}w_{0x} \right\} \right\} = e^{x+y} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}, \\ v_2(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\beta} \mathcal{L} \left\{ e^{x-y} \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right\} \right\} = e^{x-y} \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}, \\ w_2(x, y, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\gamma} \mathcal{L} \left\{ e^{y-x} \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} - u_{1x}v_{0y} - u_{0x}v_{1y} - v_{0x}u_{1y} - v_{1x}u_{0y} \right\} \right\} = e^{y-x} \frac{t^{2\gamma}}{\Gamma(2\gamma+1)}, \end{cases} \quad (4.3.31)$$

nous continuons à obtenir

p^n :

$$\begin{cases} u_n(x, y, t) = (-1)^n e^{x+y} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \\ v_n(x, y, t) = e^{x-y} \frac{t^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}, \\ w_n(x, y, t) = e^{y-x} \frac{t^{n\gamma}}{\Gamma(n\gamma+1)}, \end{cases} \quad (4.3.32)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, nous approchons la solution analytique (u, v, w) , par des séries tronquées :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y, t) = e^{x+y} - e^{x+y} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + e^{x+y} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \dots + (-1)^n e^{x+y} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} + \dots, \\ v(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x, y, t) = e^{x-y} + e^{x-y} \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + e^{x-y} \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} + \dots + e^{x-y} \frac{t^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)} + \dots, \\ w(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(x, y, t) = e^{y-x} + e^{y-x} \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} + e^{y-x} \frac{t^{2\gamma}}{\Gamma(2\gamma+1)} + \dots + e^{y-x} \frac{t^{n\gamma}}{\Gamma(n\gamma+1)} + \dots \end{cases} \quad (4.3.33)$$

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{x+y} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \\ v(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{x-y} \frac{t^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}, \\ w(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{y-x} \frac{t^{n\gamma}}{\Gamma(n\gamma+1)}. \end{cases} \quad (4.3.34)$$

Lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 1$, la solution du système (4.3.18) est

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y, t) = e^{x+y} \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = e^{x+y-t}, \\ v(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x, y, t) = e^{x-y} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = e^{x-y+t}, \\ w(x, y, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(x, y, t) = e^{y-x} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = e^{y-x+t}, \end{cases} \quad (4.3.35)$$

qui est une solution exacte d'un système non-linéaire donné en (4.3.20).

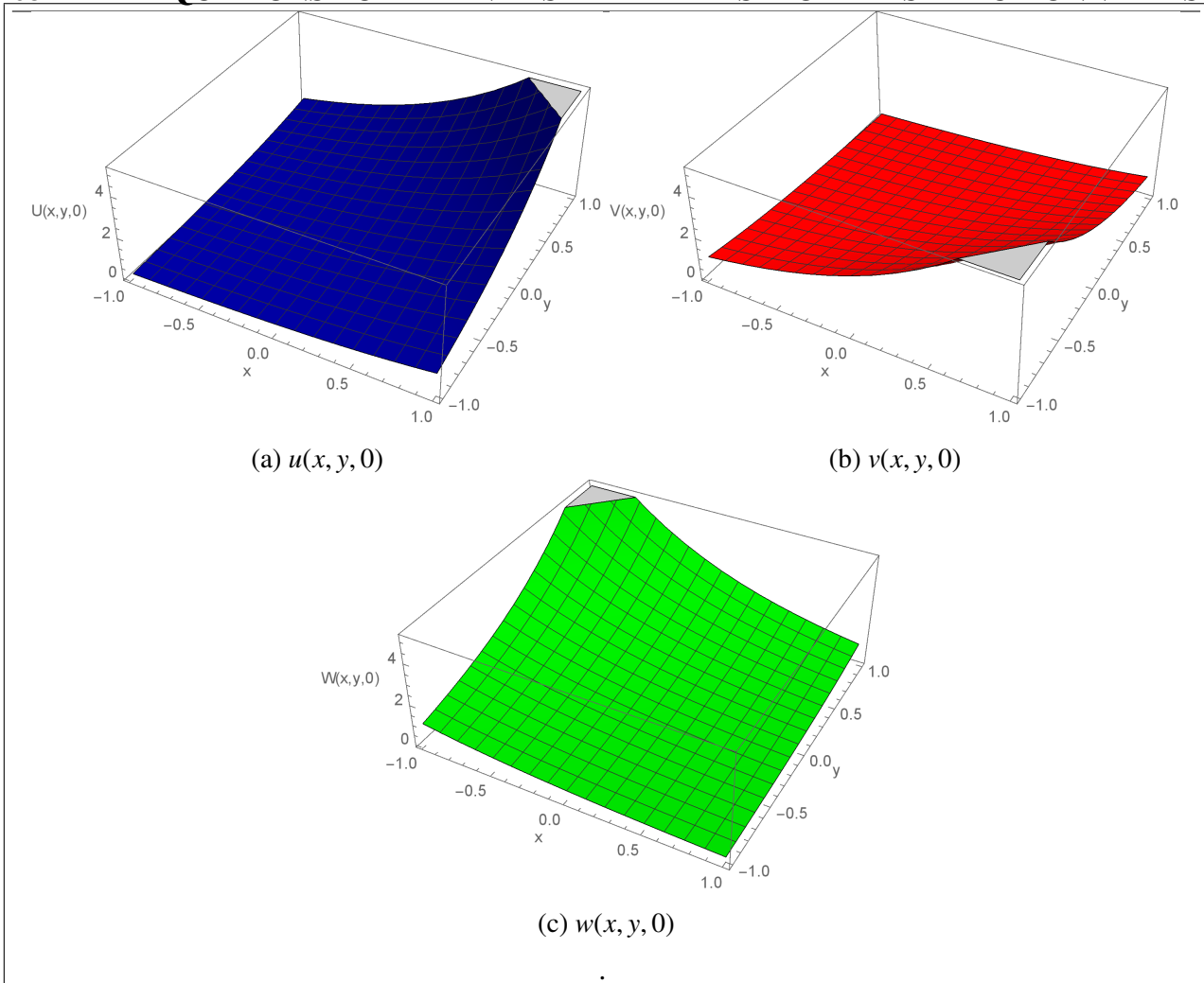


FIGURE 4.2 – Les Surfaces de la solution (4.3.35) du Syst. (4.3.20), pour $t = 0$ et $(x, y) \in [-10, 10] \times [-10, 10]$

L'équation de Boussinesq

5.1 Introduction

Les équations de Boussinesq en mécanique des fluides désignent un système d'équations d'ondes obtenue par approximation des équations d'Euler pour des écoulements incompressibles irrotationnels à surface libre. Elles permettent de prévoir les ondes de gravité comme ondes cnoïdales, ondes de Stokes, houle, tsunamis, solitons, etc. Ces équations ont été introduites par Joseph Boussinesq en 1872 et sont un exemple d'équations aux dérivées partielles dispersives. Dans ce chapitre nous étudierons l'équation de Boussinesq suivante [9, 13, 48] :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u(x, t)^2}{\partial x^2} = 0, \quad (5.1.1)$$

avec $u(x, t)$ est une fonction souvent différentiable. Cette équation a été introduite par Boussinesq pour décrire la propagation des ondes longues en eau peu profonde sous la gravité se propageant dans les deux sens. Il survient également dans d'autres applications physiques telles que les ondes de réseau non-linéaires, les ondes sonores de fer dans un plasma et les vibrations dans une corde non-linéaire. Il est utilisé dans de nombreuses applications physiques telles que la percolation de l'eau dans le sous-sol poreux d'une couche horizontale de matériau. Cette forme particulière de

cette équation présente un intérêt particulier car il est complètement intégrable et admet le formalisme de diffusion inverse. De nombreuses méthodes bien connues, telles que la méthode de transformation de diffusion inverse, le formalisme bilinéaire et la méthode de transformation Bäcklund ont été utilisées pour traiter l'équation de Boussinesq complètement intégrable. Dans ce chapitre, nous nous sommes concentrés sur le traitement des solutions précises et approximatives de l'équation de Boussinesq en suivant les méthodes de tangente hyperbolique (Tanh) et de décomposition Adomian(ADM). Nous avons remarqué la grande convergence entre la solution approximative et la solution exacte.

5.2 la méthode de tangente hyperbolique (Tanh)

5.2.1 Description de la méthode

Pour illustrer l'idée de base de la méthode de tangente hyperbolique (Tanh)[14, 49], nous considérons les équations d'onde et d'évolution non-linéaires (en principe, dans une dimension) suivantes :

$$u_t = [u, u_x, u_{xx}, \dots] \text{ ou } u_{tt} = [u, u_x, u_{xx}, \dots]. \quad (5.2.1)$$

Nous aimons savoir si les ondes progressives (ou les ondes stationnaires) sont des solutions de (5.2.1). La première étape est le changement des variables indépendantes x et t en une variable particulière par la définition $\xi = c(x - vt)$. Ici, ($c > 0$) représente le nombre d'onde et v est la vitesse (inconnue) de l'onde progressive. En conséquence, la quantité $u(x, t)$ est remplacée par $U(\xi)$, de sorte que nous traitons des ODE plutôt que des PDE. De cette façon, les équations comme (5.2.1) sont transformées en

$$-cv \frac{dU}{d\xi} = [U, c \frac{dU}{d\xi}, c^2 \frac{d^2U}{d\xi^2}, \dots] \text{ ou } c^2 v^2 \frac{d^2U}{d\xi^2} = [U, c \frac{dU}{d\xi}, c^2 \frac{d^2U}{d\xi^2}, \dots]. \quad (5.2.2)$$

Notre objectif principal est de trouver des solutions exactes ou au moins approximatives, si possible, pour ces ODE. Nous introduisons donc une nouvelle variable $Y = \tanh \xi$ dans l'ODE. Cette dernière équation dépend alors uniquement de Y , car toutes les dérivées $\frac{d}{d\xi}$, $\frac{d^2}{d\xi^2}$, $\frac{d^3}{d\xi^3}$, ... sont remplacés dans (5.2.2) par :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} &= (1 - Y^2) \frac{d}{dY}, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= -2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2}, \\ \frac{d^3}{d\xi^3} &= 2Y(1 - Y^2)(3Y^2 - 1) \frac{d}{dY} - 6Y(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3}, \\ \frac{d^4}{d\xi^4} &= -8Y(1 - Y^2)(3Y^2 - 2) \frac{d}{dY} + 4(1 - Y^2)^2(9Y^2 - 2) \frac{d^2}{dY^2} - 12Y(1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} + (1 - Y^2)^4 \frac{d^4}{dY^4}, \\ &\vdots\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

La ou le(s) solution(s) que nous recherchons seront écrites comme une série de puissance finie en Y ,

$$u(x, t) = U(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n Y^n.\tag{5.2.4}$$

Pour déterminer N , nous équilibrons généralement les termes linéaires d'ordre le plus élevé dans l'équation résultante avec les termes non linéaires d'ordre le plus élevé en utilisant le schéma suivante.

$$U \longrightarrow N,$$

$$U^n \longrightarrow nN,$$

$$U' \longrightarrow N + 1,$$

$$U^{(r)} \longrightarrow N + r.$$

Supposons que $U^{(s)}$ et $U^p(U^{(\ell)})^r$ les termes linéaires et non-linéaires d'ordre le plus élevé respectivement, nous avons $N + s = pN + r(N + \ell)$ ou équivalent à $N = \frac{s-r\ell}{p+r-1}$. Nous collectons ensuite tous les coefficients de puissances de Y dans l'équation résultante. Cela donnera un système d'équations algébriques impliquant les paramètres a_1, a_2, \dots, a_N . Après avoir déterminé ces paramètres,

nous obtenons une solution analytique $u(x, t)$.

5.2.2 La solution exacte de l'équation de Boussinesq par la méthode de Tanh

Dans cette section, nous appliquerons la méthode de Tanh pour trouver les solutions exactes de l'équation de Boussinesq sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u(x, t)^2}{\partial x^2} = 0. \quad (5.2.5)$$

Nous considérons la transformation des ondes progressives définie par :

$$U(\xi) = u(x, t), \quad \xi = c(x - vt). \quad (5.2.6)$$

En utilisant Eqs. (5.2.6), ensuite (5.2.5) on déduit l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$c^2 v^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} - c^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} + 6c^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} U(\xi) + 6c^2 \left(\frac{dU}{d\xi} \right)^2 - c^4 \frac{d^4 U}{d\xi^4} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(v^2 - 1) \frac{d^2 U}{d\xi^2} + 6c^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} U(\xi) + 6c^2 \left(\frac{dU}{d\xi} \right)^2 - c^4 \frac{d^4 U}{d\xi^4} = 0. \quad (5.2.7)$$

Equilibrer maintenant la dérivée d'ordre le plus élevé $\frac{d^4 U}{d\xi^4}$ et le terme non-linéaire $\frac{d^2 U}{d\xi^2} U(\xi)$, on a

$2N + 2 = N + 4$ ou équivalent à $N = 2$. Donc, l'Eq. (5.2.4) se réduit à

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \tanh(\xi) + a_2 \tanh^2(\xi), \quad (5.2.8)$$

remplacer Eq. (5.2.8) dans Eq. (5.2.7) et en utilisant le logiciel *Mathematica*, on obtient une équation

tion de son côté gauche est un polynôme de $\tanh(\xi)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) suivant :

$$\begin{aligned}
& - 120a_2c^2 \tanh^6(\xi) - 24a_1c^2 \tanh^5(\xi) + 240a_2c^2 \tanh^4(\xi) + 40a_1c^2 \tanh^3(\xi) \\
& - 136a_2c^2 \tanh^2(\xi) - 16a_1c^2 \tanh(\xi) + 16a_2c^2 + 60a_2^2 \tanh^6(\xi) \\
& + 72a_1a_2 \tanh^5(\xi) + 18a_1^2 \tanh^4(\xi) - 96a_2^2 \tanh^4(\xi) + 36a_0a_2 \tanh^4(\xi) \\
& - 6a_2 \tanh^4(\xi) + 12a_0a_1 \tanh^3(\xi) - 2a_1 \tanh^3(\xi) - 108a_1a_2 \tanh^3(\xi) \\
& - 24a_1^2 \tanh^2(\xi) + 36a_2^2 \tanh^2(\xi) - 48a_0a_2 \tanh^2(\xi) + 8a_2 \tanh^2(\xi) \\
& - 12a_0a_1 \tanh(\xi) + 2a_1 \tanh(\xi) + 36a_1a_2 \tanh(\xi) + 6a_2v^2 \tanh^4(\xi) \\
& + 2a_1v^2 \tanh^3(\xi) - 8a_2v^2 \tanh^2(\xi) - 2a_1v^2 \tanh(\xi) + 2a_2v^2 + 6a_1^2 + 12a_0a_2 - 2a_2.
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

En identifiant les coefficients de ce polynôme de mêmes puissances $\tanh(\xi)$ à zéro, nous obtenons un système d'équations algébriques de a_0, a_1, a_2, v et c .

$$\begin{aligned}
16a_2c^2 + 2a_2v^2 + 6a_1^2 + 12a_0a_2 - 2a_2 &= 0, \\
- 16a_1c^2 - 2a_1v^2 - 12a_0a_1 + 2a_1 + 36a_1a_2 &= 0, \\
- 136a_2c^2 - 8a_2v^2 - 24a_1^2 + 36a_2^2 - 48a_0a_2 + 8a_2 &= 0, \\
40a_1c^2 + 2a_1v^2 + 12a_0a_1 - 2a_1 - 108a_1a_2 &= 0, \\
240a_2c^2 + 6a_2v^2 + 18a_1^2 - 96a_2^2 + 36a_0a_2 - 6a_2 &= 0, \\
72a_1a_2 - 24a_1c^2 &= 0, \\
60a_2^2 - 120a_2c^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

où $a_2 \neq 0$.

Les résoudre au moyen de *Mathematica* donne :

$$\left\{ a_0 \rightarrow \frac{1}{6}(-8c^2 - v^2 + 1), a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow 2c^2 \right\}, \tag{5.2.11}$$

substitution en Eq. (5.2.8), résulte

$$u(x, t) = \frac{1}{6} (-8c^2 - v^2 + 1) + 2c^2 \tanh^2(c(x - tv)). \quad (5.2.12)$$

5.3 Méthode de décomposition d'Adomian (ADM)

5.3.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère l'équation fonctionnelle suivante [3] :

$$Fu = g, \quad (5.3.1)$$

où F représente un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non-linéaire comprenant des termes linéaires et non-linéaires et g est une fonction connue. La partie linéaire est généralement décomposée en $L + R$, où L est un opérateur différentiel facilement inversible et R représente le reste de l'opérateur linéaire. Dans ces conditions, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (5.3.2)$$

avec N un opérateur différentiel non-linéaire.

Nous pouvons écrire l'équation (5.3.2) comme suit :

$$Lu = g - Ru - Nu. \quad (5.3.3)$$

L'application de L^{-1} aux deux côtés de (5.3.3) et l'utilisation de la condition initiale on obtient :

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu), \quad (5.3.4)$$

où $L^{-1} = \int \int \dots \int (\cdot)(dt)^n$ est l'inverse de l'opérateur L .

Puisque

$$L^{-1}(Lu) = u - \phi, \quad (5.3.5)$$

et ϕ est la constante de l'intégration.

Par conséquent, l'équation (5.3.4) devient :

$$u = \phi + L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu). \quad (5.3.6)$$

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (5.3.7)$$

puis à décomposer le terme non-linéaire Nu sous forme d'une série :

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (5.3.8)$$

Les termes A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.3.9)$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance. Pour savoir comment calculer les polynômes Adomian, voir [53, 17].

En substituant les équations (5.3.7) et (5.3.8) dans (5.3.6), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \phi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (5.3.10)$$

D'où on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \phi + L^{-1}g, \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n. \end{array} \right. \quad (5.3.11)$$

Il est à noter que cette identification n'est pas unique mais c'est la seule qui permet de définir explicitement les u_n . La relation (5.3.11) permet de calculer tous les termes de la série sans ambiguïté car les A_n ne dépendent que de u_0, u_1, \dots, u_n .

En pratique, il est presque impossible de calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (sauf pour des cas très particulier). Aussi se contente-t-on généralement d'une solution approchée, sous la forme de série tronquée :

$$u(x, t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} u_i, n \geq 1. \quad (5.3.12)$$

Remarque 5.3.1 *La comparaison entre (2.1.9) et (5.3.9) a montré que les polynômes de He ne sont que des polynômes d'Adomian et qu'ils sont calculés comme les polynômes d'Adomian, voir [28].*

5.3.2 Convergence de la méthode ADM

Cherruault [10, 11, 12] a donné la première preuve de convergence de l'ADM et il a utilisé le théorème de point fixe.

En effet, de la relation (5.3.11) on déduit :

Théorème 5.3.1

$$\text{Si } \sum_{n \geq 0} A_n < +\infty \quad \text{alors} \quad \sum_{n \geq 0} u_n < +\infty, \quad (5.3.13)$$

et réciproquement.

Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (5.3.1) se ramène à la recherche d'une suite :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

avec $S_0 = 0$ et vérifiant la relation récurrente suivante :

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), \quad S_0 = 0, \quad u_0 = g, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3.14)$$

On en déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 5.3.2 *Si l'opérateur N est une contraction (c'est-à-dire vérifie $\|N\| < \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence $S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$ avec $S_0 = 0, n \geq 0$ converge vers S solution de $S = N(u_0 + S)$.*

Démonstration.

De la relation (5.3.14), on a :

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \\ &\leq \|N\| \|S_n - S\| \leq \delta \|S_n - S\| \\ &\leq \delta^n \|S_1 - S\|. \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$ vers S . Par ailleurs, on a :

$$\sum_{n \geq 0} A_n = \sum_{n \geq 1} u_n,$$

et comme $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente d'après le Théorème (5.3.1), on a alors le résultat suivant :

Corollaire 5.3.1 *Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes. De plus, $\sum_{n \geq 0} u_n$ est la solution de l'équation :*

$$Fu = g.$$

5.3.3 La solution approximative de l'équation de Boussinesq par (ADM)

Considérons l'équation de Boussinesq

$$u_{tt}(x, t) - u_{4x}(x, t) - u_{2x}(x, t) + 3(u^2)_{xx}(x, t) = 0, \quad (5.3.15)$$

avec des conditions initiales suivantes

$$u(x, 0) = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right). \quad (5.3.16)$$

$$u_t(x, 0) = -\frac{1}{32} \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right). \quad (5.3.17)$$

Comparant (5.3.15) avec Eq. (5.3.2) nous avons $g = 0$, L et Ru et Nu devient :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\cdot), \quad Ru = -u_{4x} - u_{2x}, \quad Nu = 3(u^2)_{xx} = 6(u_x)^2 + 6uu_{2x}. \quad (5.3.18)$$

Nous pouvons écrire l'équation (5.3.15) comme suit :

$$u_{tt}(x, t) = u_{4x}(x, t) + u_{2x}(x, t) - 3(u^2)_{xx}(x, t). \quad (5.3.19)$$

L'application de $L^{-1} = \int_0^t \int_0^t (\cdot)(dt)^2$ aux deux côtés de (5.3.19) et l'utilisation des conditions initiales nous permet d'obtenir :

$$u(x, t) = -\frac{1}{32}t \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{8} \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{24} + L^{-1}(u_{4x} + u_{2x}) - L^{-1}(6(u_x)^2) - L^{-1}(6uu_{2x}). \quad (5.3.20)$$

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (5.3.21)$$

puis à décomposer le terme non-linéaire Nu sous forme d'une série :

$$Nu = N_1u + N_2u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \quad (5.3.22)$$

tel que

$$N_1 u = 6(u_x(x, t))^2 = 6\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n_x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (5.3.23)$$

$$N_2 u = 6u(x, t)u_{2x}(x, t) = 6\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} u_{n_{2x}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (5.3.24)$$

les termes A_n et B_n sont appelés polynômes d'Adomian.

Ainsi, les polynômes d'Adomian A_n et B_n sont sous les formes

$$\begin{aligned} A_0 &= 6u_{0_x}^2, \\ A_1 &= 12u_{0_x}u_{1_x}, \\ A_2 &= 6(u_{1_x}^2 + 2u_{0_x}u_{2_x}), \\ A_3 &= 6(2u_{1_x}u_{2_x} + 2u_{0_x}u_{3_x}), \\ A_4 &= 6(u_{2_x}^2 + 2u_{1_x}u_{3_x} + 2u_{0_x}u_{4_x}), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

et

$$\begin{aligned} B_0 &= 6u_0u_{0_{2x}}, \\ B_1 &= 6(u_1u_{0_{2x}} + u_0u_{1_{2x}}), \\ B_2 &= 6(u_2u_{0_{2x}} + u_1u_{1_{2x}} + u_0u_{2_{2x}}), \\ B_3 &= 6(u_3u_{0_{2x}} + u_2u_{1_{2x}} + u_1u_{2_{2x}} + u_0u_{3_{2x}}), \\ B_4 &= 6(u_4u_{0_{2x}} + u_3u_{1_{2x}} + u_2u_{2_{2x}} + u_1u_{3_{2x}} + u_0u_{4_{2x}}), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

En remplaçant les équations (5.3.21), (5.3.23), (5.3.24) dans l'équation (5.3.20), il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = -\frac{1}{32}t \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{8} \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{24} + L^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (u_n)_{4x} + \sum_{n=0}^{\infty} (u_n)_{2x} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\}. \quad (5.3.27)$$

$$\begin{aligned}
A_1 = & \frac{3t^2 \operatorname{sech}^{12}\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} - \frac{9t^2 \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} - \frac{9t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{12}\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} \\
& + \frac{189t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{262144} + \frac{33t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} \\
& - \frac{3t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} - \frac{135t^2 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} - \frac{207t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} \\
& + \frac{9t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} + \frac{903t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} + \frac{9t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} \\
& + \frac{9t^2 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} + \frac{33t^2 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} + \frac{9t^2 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} \\
& + \frac{21t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{9t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{1024} - \frac{9t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{1024} \\
& - \frac{3t^2 \tanh^8\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{3t^2 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} - \frac{87t^2 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} \\
& + \frac{9t^2 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} + \frac{9t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{2048}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & - \frac{9t^2 \operatorname{sech}^{12}\left(\frac{x}{4}\right)}{524288} - \frac{9t^2 \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} + \frac{17t^2 \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{3t^2 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} - \frac{45t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{12}\left(\frac{x}{4}\right)}{524288} \\
& + \frac{1503t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{1048576} - \frac{165t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{262144} - \frac{9t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} \\
& - \frac{63t^2 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} - \frac{657t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} + \frac{3t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{512} \\
& + \frac{87t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} + \frac{11t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} + \frac{45t^2 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} \\
& + \frac{549t^2 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} + \frac{9t^2 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} - \frac{219t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} \\
& - \frac{45t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} - \frac{27t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} - \frac{51t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} \\
& - \frac{21t^2 \tanh^8\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{45t^2 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} - \frac{267t^2 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} \\
& + \frac{15t^2 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} + \frac{99t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} + \frac{39t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} \\
& + \frac{33t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} + \frac{3t^2 \tanh^9\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} + \frac{3t^2 \tanh^8\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} \\
& - \frac{7t^2 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{7t^2 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} - \frac{3t^2 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{3t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{4096}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & -\frac{195t^4 \operatorname{sech}^{12}\left(\frac{x}{4}\right)}{2097152} - \frac{85t^4 \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{786432} + \frac{11t^4 \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} - \frac{3t^4 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} \\
& + \frac{39t^4 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{12}\left(\frac{x}{4}\right)}{2097152} - \frac{753t^4 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{4194304} + \frac{2361t^4 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{1048576} \\
& - \frac{41t^4 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{98304} + \frac{129t^4 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{524288} - \frac{1209t^4 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{262144} \\
& + \frac{23t^4 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{49152} + \frac{505t^4 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{1572864} + \frac{29t^4 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} \\
& - \frac{27t^4 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{524288} + \frac{171t^4 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} + \frac{29t^4 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} \\
& + \frac{245t^4 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} - \frac{3t^4 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} - \frac{9t^4 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} \\
& - \frac{51t^4 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} - \frac{t^4 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{49152} - \frac{67t^4 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{196608} \\
& - \frac{3t^4 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} - \frac{3t^4 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} + \frac{39t^4 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} \\
& + \frac{33t^4 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} - \frac{t^4 \tanh^9\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{49152} - \frac{t^4 \tanh^8\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{12288} \\
& + \frac{t^4 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} + \frac{t^4 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} - \frac{3t^4 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} \\
& - \frac{3t^4 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{16384}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) \approx u_0 + u_1 + u_2 = & \frac{39t^4 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{12}\left(\frac{x}{4}\right)}{2097152} - \frac{195t^4 \operatorname{sech}^{12}\left(\frac{x}{4}\right)}{2097152} + \frac{2361t^4 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{1048576} \\
& - \frac{41t^4 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{98304} - \frac{85t^4 \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{786432} - \frac{753t^4 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^{10}\left(\frac{x}{4}\right)}{4194304} + \frac{129t^4 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{524288} \\
& + \frac{11t^4 \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} + \frac{23t^4 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{49152} + \frac{505t^4 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{1572864} + \frac{29t^4 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} \\
& - \frac{3t^2 \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{1209t^4 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{4}\right)}{262144} + \frac{171t^4 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} + \frac{29t^4 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} \\
& + \frac{245t^4 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} - \frac{1}{256} t^2 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{9t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} - \frac{1}{256} t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right) \\
& - \frac{3t^4 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} - \frac{9t^4 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} - \frac{3t^4 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{51t^4 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{131072} \\
& - \frac{27t^4 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{4}\right)}{524288} + \frac{39t^4 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} - \frac{1}{512} t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{3}{512} t^2 \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
& + \frac{33t^4 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{32768} + \frac{1}{256} t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{3}{512} t^2 \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right) \\
& - \frac{3t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{2048} - \frac{3t^4 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} - \frac{3t^4 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{8192} \\
& - \frac{t^4 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{49152} - \frac{67t^4 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{4}\right)}{196608} + \frac{t^4 \tanh^7\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} \\
& + \frac{t^4 \tanh^6\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{4096} + \frac{1}{512} t^2 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{128} t^2 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) \\
& - \frac{3}{256} t^2 \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{32} \tanh\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{3t^2 \tanh^3\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{1024} \\
& - \frac{t^4 \tanh^8\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{12288} - \frac{3t^4 \tanh^4\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{16384} - \frac{t^4 \tanh^9\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{49152} \\
& - \frac{3t^4 \tanh^5\left(\frac{x}{4}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{65536} + \frac{1}{8} \tanh^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

(5.3.29)

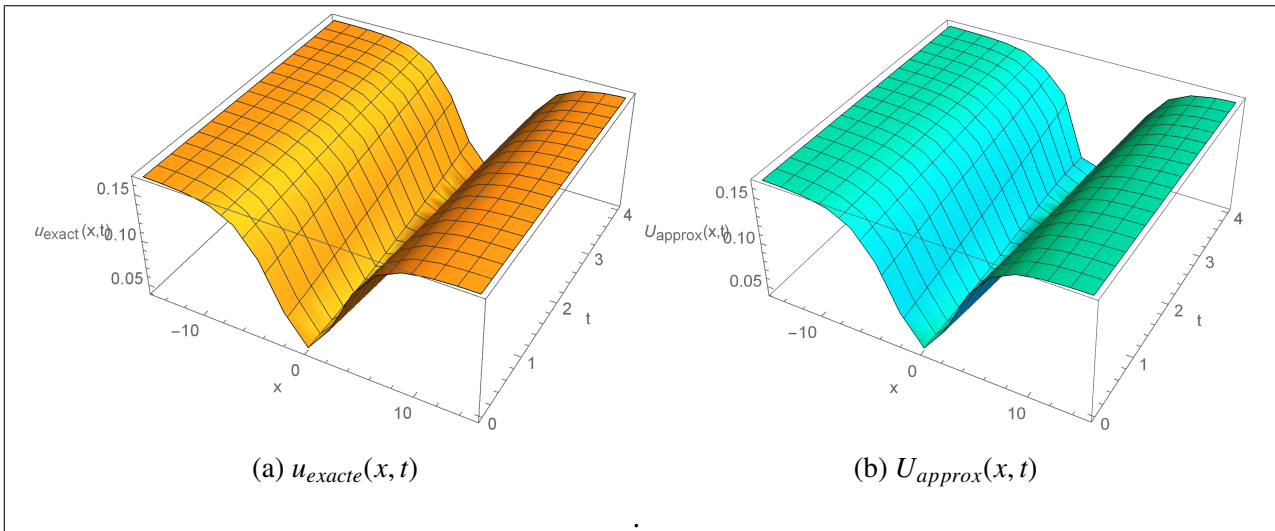


FIGURE 5.1 – Les surfaces représentatives des solutions exactes (5.2.12) quand $c = \frac{1}{4}$ et $\nu = \frac{1}{2}$ et approximative (5.3.29) de Eq. (5.2.5), avec $(x, t) \in [-10, 10] \times [0, 4]$ (à l'aide de *Mathematica*)

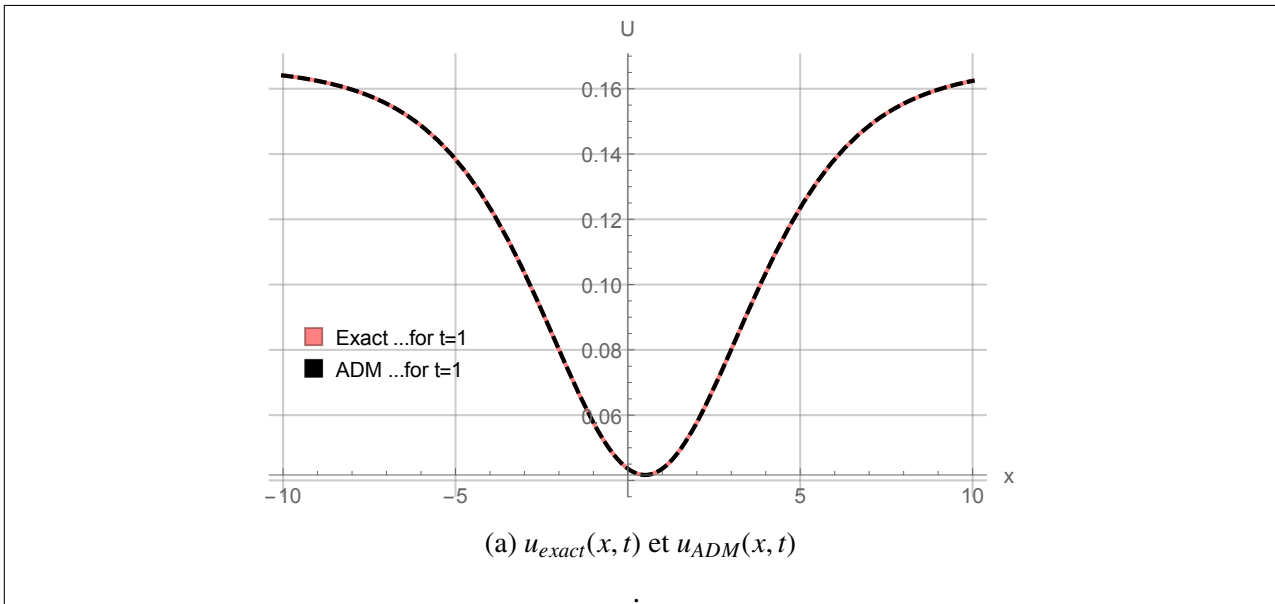


FIGURE 5.2 – Les courbes représentatives des solutions exactes (5.2.12) quand $c = \frac{1}{4}$ et $\nu = \frac{1}{2}$ et approximative (5.3.29) de Eq. (5.2.5), pour $t = 1$ et $x \in [-10, 10]$ (à l'aide de *Mathematica*)

Conclusion :

Notre recherche de la solution approchée de cette équation est de montrer l'importance de la méthode (ADM) utilisée et son efficacité, en comparant et en observant la compatibilité de la solution approximative avec la solution exacte, et c'est ce qu'illustre la représentation graphique des deux solutions.

Bibliographie

- [1] R. ABAZARIA, A. BORHANIFAR., *Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method.* Computers and Mathematics with Applications, 59(2010) 2711-2722.
- [2] K.ABBAOUI, Y. CHERRUAULT., *New ideas for proving convergence of decomposition methods.* Comput. Math. Appl., 29(1995) 103-108.
- [3] G. ADOMIAN., *A review of the decomposition method in applied mathematics.* J. Math. Anal. Appl., 135(2)(1988) 501-544.
- [4] Z. AYATI ,J. BIAZAR., *On the convergence of homotopy perturbation method.* Journal of the Egyptian Mathematical Society, 23(2015) 424-428.
- [5] J. BIAZAR, H. GHAZVINI., *Homotopy perturbation method for solving hyperbolic partial differential equations.* Computers and Mathematics with Applications, 56(2008) 453-458.
- [6] J. BIAZAR, H. GHAZVINI., *Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations.* Nonlinear Analysis : Real World Applications, 10(5)(2009) 2633-2640.

- [7] J. BIAZAR, H. AMINIKHAH., *Study of convergence of homotopy perturbation method for system of partial differential equations*. Computers and Mathematics with Applications, 58(2009) 2221-2230.
- [8] I. PODLUBNY., *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [9] A.G. BRATSOS., *The solution of the Boussinesq equation using the method of lines*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 157(1998) 33-44.
- [10] Y. CHERRUAULT, G. ADOMIAN., *Decomposition Methods : A New Proof of Convergence*. Math. Comput. Modelling, 18(12) (1993) 103-106.
- [11] Y. CHERRUAULT, G. SACCOMANDI, ET B. SOME., *New results for convergence of adomian's method applied to integral equations*. Math. Comput. Modelling, 16(2)(1992) 85-93.
- [12] Y. CHERRUAULT., *Convergence of Adomian's method*. Math. Comput. Modelling, 14(3)(1990) 83-86.
- [13] P. A. CLARKSON, M. D. KRUSKAL., *New similarity reductions of the Boussinesq equation*. J. Math. Phys. 30(1989) 2201-2213.
- [14] M. DJILALI, A. HAKEM, A. BENALI., *Exact Solutions Of Kupershmidt Equation, Approximate Solutions For Time-Fractional Kupershmidt Equation : A Comparaison Study*. International Journal of Analysis and Applications, 18(3)(2020) 493-512.
- [15] E. G. FAN., *Traveling Wave Solutions for Nonlinear Equations Using Symbolic Computation*. N Computers and Mathematics with Applications, 42(4)(2002) 671-680.
- [16] SH. FATEMEH, D. MEHDI., *Solution of Delay Differential Equations via a Homotopy Perturbation Method*. J. Appl. Sc., 8(7)(2008) 1256-1261.

- [17] A. GHORBANI, J. SABERI-NADJA., *perturbation method for calculating Adomian polynomials*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8(2007) 229-232.
- [18] A. GHORBANI., *Adomian polynomials : He polynomials*. Chaos Solitons Fractals, 39(2009) 1486-1492.
- [19] A. R. GHORBANI, A. REZANIA, H. BARARNIA., *Application on Homotopy Perturbation and Variational Iteration Methods for Heat Equation*, Aust. J. Bas. Appl. Sc., 3(3)(2009) 1863-1874.
- [20] V.G. GUPTA, S. GUPTA., *Homotopy Perturbation Transform Method for Solving Initial Boundary Value Problems of Variable Coefficients*, Aust. J. Bas. Appl. Sc., 3(3)(2009) 1863-1874.
- [21] J. H.HE., *Homotopy Perturbation Technique*. comput. Methods Appl. Mech. Eng, 178(1999) 257-262.
- [22] J. H.HE., *A new perturbation technique which is also valid for large parameters*. J. Sound Vib, 229(2000) 1257-1263.
- [23] J. H.HE., *The Homotopy Perturbation Method for solving nonlinear wave equations*. Chaos. Solit. Fract, 26(3)(2005) 695-700.
- [24] J. H.HE., *Homotopy perturbation method : A new nonlinear technique*. Appl. Math. Comput. 135(2003) 73-79.
- [25] J. H.HE., *The Homotopy Perturbation Method for Solving Non-Linear Oscillators with Discontinuities*. Appl. Math. Comput., 151(2004) 287-292.
- [26] J. H.HE , LI-NAZ., *Homotopy Perturbation Method for the Solution of The Electrostatic Potential Differential Equation*. Math. Probl. Engin., 10(2006) 1-6.

- [27] M. A. HELAL, M. S. MEHANNA., *The tanh method and Adomian decomposition method for solving the foam drainage equation*. Applied Mathematics and Computation, 190(2007) 599-609.
- [28] H. JAFARI, S. GHASEMPOOR, C. MASOOD KHALIQUE., *A Comparison between Adomian's Polynomials and He's Polynomials for Nonlinear Functional Equations*. Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume 2013, Article ID 943232, 4 pages.
- [29] B. JAZBI, M. MOINI., *Application of He's homotopy Perturbation Method for Solving Schrodinger Equation*. Iranian J. Math. Sc. Inf., 3(2) (2008) 13-19.
- [30] L. JIN., *Homotopy Perturbation Method for Solving Partial Differential Equations with Variable Coefficients*. Contemp. Math. Sciences, 3(28)(2008) 1395-1407.
- [31] A. KEHAILI, A. HAKEM, A. BENALI., *Homotopy perturbation transform method for solving the partial and the time-fractional differential equations with variable coefficients*. Global journal of pure Applied sciences, 26(2020) 35-55.
- [32] Y. KHAN, Q. WU., *Homotopy perturbation transform method for nonlinear equation using He's polynomials*. Computers and Mathematics with Applications, 61(8)(2011) 1963-1967.
- [33] V. LAKSHMIKANTHAM, A.S.VATSALA., *Basic theory of fractional differential equations*. Nonlinear Anal., 69(8)(2008) 2677-2682.
- [34] M. MADANIA, M. FATHIZADEHA, Y. KHANB, A. YILDIRIM., *On the coupling of the homotopy perturbation method and Laplace transformation*. Mathematical and Computer Modelling, 53(2011) 1937-1945.

- [35] W. MALFLIET., *The tanh method : a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume **164-165**(2004) 529-541.
- [36] W. MALFLIET., *The tanh method : A tool for solving certain classes of non-linear PDEs*. Math. Meth. Appl. Sci., 28(2005) 2031-2035.
- [37] W. MALFLIET., *Solitary wave solutions of nonlinear wave equations*. Am. J. Phys. 60(1992) 650-654.
- [38] W. MALFLIET, W. HEREMAN., *The tanh method : I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations*. Physica Scripta 54(1996) 563-568.
- [39] K.S. MILLER, B. ROSS., *An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations*. Wiley, New York, (1993).
- [40] A. NECIB, A. MERAD., *Laplace transform and homotopy perturbation methods for solving the pseudohyperbolic integrodifferential problems with purely integral conditions*. Kragujevac Journal of Mathematics. 44(2) (2020) 251-272.
- [41] U.F. NINO, H. V. LEAL, Y.KHAN, A.P. SESMA, A. D. SANCHEZ, V. M. J. FERNANDEZ, A. H. MAY, D. P. DIAZ, J. M. M. PEREZ, J. S. OREA., *Laplace transform-homotopy perturbation method as a powerful tool to solve nonlinear problems with boundary conditions defined on finite intervals*. Computational and Applied Mathematics, 34(2015) 1-16.
- [42] H. QARNIA., *Application of Homotopy Perturbation Method to Non Homogeneous Parabolic Partial and Nonlinear Differential Equations*. Worl. J. Model. Simul, 5(3)(2009) 225-231.
- [43] S.G. SAMKO, A.A. KILBAS, O.I. MARICHEV., *Fractional Integrals And Derivatives : Theory And Applications*. Gordon And Breach Science Publishers., Switzerland, (1993).

- [44] JOEL L. SCHIFF., *The laplace Transform, Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York 1999.
- [45] D. SHARMA, P. SINGH, S. CHAUHAN., *Homotopy Perturbation Transform Method with He's Polynomial for Solution of Coupled Nonlinear Partial Differential Equations*. *Nonlinear Engineering*, 5(1)(2016) 17-23.
- [46] J. SPANIER, K.B. OLDHAM., *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, (1974).
- [47] MURRAY R. SPIEGEL., *Laplace transforms*. MCGRAW-HILL, New York 1965.
- [48] D. WANG, W. SUN, C. KONG, H. ZHANG., *New extended rational expansion method and exact solutions of Boussinesq equation and Jimbo-Miwa equations*. *Applied Mathematics and Computation*, 189(2007) 878-886.
- [49] A. M. WAZWAZ., *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).
- [50] A. M. WAZWAZ, A. GORGUIS., *Exact solutions for heat-like and wave-like equations with variable coefficients*. *Applied Mathematics and Computation*, 149(2004) 15-29.
- [51] A. M. WAZWAZ., *Exact and explicit traveling wave solutions for the nonlinear Drinfeld-Sokolov system*. *Comm. Nonlinear Sci. Num. Siml.* 11(3)(2006) 311-325.
- [52] A. M. WAZWAZ., *The tanh method for compact and non-compact solutions for variants of the KdV-Burger equations*. *Phys. D : Nonlinear Phenomena*. 213(2)(2006) 147-151.
- [53] ZHU. YONGGUI, CHANG. QIANSHUN, WU. SHENGCHANG., *A new algorithm for calculating Adomian polynomials*. *Appl. Math. Comput.*, 169(2005) 402-416.
- [54] W. YU-XI, S. HUA-YOU, M. LU-FENG., *Homotopy Perturbation Method for Solving Reaction-Diffusion Equations*. *Math. Probl. Eng.*, 10(2008) 1-5.

-
- [55] S. A. ZAREA., *The tanh method : A tool for solving some mathematical models*. Chaos, Solitons and Fractals, 41(2009) 979-988.
- [56] D. ZIANE, K. BELGHABA, M. HAMDI CHERIF., *Fractional homotopy perturbation transform method for solving the time-fractional KdV, K(2,2) and Burgers equations*. Open Problems Compt. Math, 8(2)(2015) 63-75.