

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides

THESE

Présentée pour l'obtention du
Diplôme de Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Sciences Des Matériaux

Par :

Monsieur BOUSSOULA ABDERRAFIK

Intitulé de la thèse

Modélisation du comportement thermomécanique des plaques sandwiches FGM en utilisant des théories d'ordre élevé avancé.

Soutenu le/2021 devant le Jury composé de :

| | | | |
|---------------------------------|------------|---------------------|---------------------------|
| M^r .A.LOUSDAD | Pr | UDL-SBA | Président |
| M^r .B.BOUCAM | Pr | UDL-SBA | Directeur de thèse |
| M^r .L.BOUMIA | MCA | U-TISSEMSILT | Examineur |
| M^r .H.ACHACHE | MCA | U-ORAN2 | Examineur |

Année Universitaire: 2019-2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je remercie en premier et en dernier lieu, DIEU tout, puissant de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides (LMSS), université Djillali Liabes de SIDI BEL ABBES, en collaboration avec le Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH), des sciences et technologie de SIDI BEL ABBES université Djilali Liabès,

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Monsieur **B. BOUCHAM** maître de conférence au Département de Génie Mécanique de Sidi Bel Abbes pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordées tout au long de ce travail. Je le remercie pour ses conseils, ses recommandations et sa confiance, sa patience, sa disponibilité, sa générosité et sa grande compétence qui m'ont beaucoup aidé à surmonter les obstacles. Monsieur je vous suis très reconnaissant, c'est un grand honneur pour moi.

Mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur **A. TOUNSI**, pour ses conseils scientifiques précieux, son suivi et ses conseils avisés qui ont facilité l'aboutissement de ce travail.

J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Mr **M. BOURAADA**. Je le remercie pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce travail au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie (LMH).

Mes vifs remerciements s'adressent aussi aux membres de jury, qui nous feront l'honneur d'accepter de juger ce modeste travail et d'apporter leurs réflexions et leurs critiques scientifiques.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur **BOURAADA FOUAD** docteur au Centre Universitaire de Tissemsilt qui a apporté un soutien scientifique et moral à mon travail de recherche avisé d'aplanir bien des difficultés.

Merci à toute ma famille, à mon frère et mes sœurs, à mes amis, à mes collègues et à tous ceux qui comptent énormément pour moi.

Finalement je remercie chaleureusement ma mère pour son soutien, qui, sans elle, je n'aurais pu réussir mes études.

DIDICACES

Je dédie cette thèse à:

Mer très chers parents pour leurs tendresses, sacrifices,
aides et leur soutien tout au long de mes études.

Et à toute ma famille sans exception.

Ainsi à tous mes amis.

A mon encadreur monsieur BOUCHAM Belhadj

Et enfin à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à
accomplir ce travail

ABDERRAFIK

Résumé :

Dans ce travail, l'analyse thermomécanique en flexion des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriétés (FGM) dont la première configuration composée de deux faces supérieure et inférieure en P-FGM avec un noyau en E-FGM et la deuxième configuration avec un noyau S-FGM symétrique est réalisée à l'aide d'une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre élevé avancé.

En utilisant seulement quatre variables inconnues, les équations qui régissent sont déduites sur la base du principe du travail virtuel, puis ces équations sont résolues via l'approche de Navier.

La solution de Navier est utilisée pour obtenir des solutions analytiques des plaques simplement appuyées en FGM.

On suppose dans notre cas que les propriétés matérielles telles que: le module d'élasticité et le coefficient de Poisson de la plaque varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance.

Les effets de la variation de la fraction volumique (p), le rapport des dimensions de la plaque (a/b), le rapport longueur-épaisseur (a/h), des paramètres géométriques et de la charge thermique sur le comportement thermomécanique en flexion des plaques sandwich FGM symétriques sont étudiés.

La validité de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats déterminés par cette théorie à ceux obtenus par la théorie de premier ordre FSDT et la théorie raffinée de la déformation par cisaillement.

Les résultats numériques des déplacements et des contraintes normales adimensionnelles des plaques sandwiches fonctionnellement graduées ont été présentés et discutés.

On peut conclure que la présente théorie est précise, et simple pour étudier le comportement flexionnel des plaques fonctionnellement graduées soumises à un chargement thermomécanique.

Mots clés : Plaques sandwiches, Thermomécanique, Modélisation analytique, Matériaux à gradient de propriétés, Théorie d'ordre élevé avancé.

Abstract:

In this work, thermomechanical flexural analysis of functionally graded material sandwich plates with P-FGM face sheets and E-FGM and symmetric S-FGM core is performed by employing a n th-order shear deformation theory. A novel type of S-FGM sandwich plates, namely, both P-FGM face sheets and a symmetric S-FGM hard core are considered. By employing only four unknown variables, the governing equations are obtained based on the principle of virtual work and then Navier method is used to solve these equations. Analytical solutions are deduced to compute the stresses and deflections of simply supported S-FGM sandwich plates. The effects of volume fraction variation, geometrical parameters and thermal load on thermomechanical flexural behavior of the symmetric FGM sandwich plates are investigated.

Keywords *Sandwich plate; thermomechanical; analytical modeling; functionally graded material.*

المخلص

الهدف من هذه الأطروحة هو تحليل السلوك الميكانيكي الحراري لصفائح متعددة الطبقات سندوتش من مواد متدرجة وظيفيا FGM لذلك العمل يحقق في تحليل الانحناء الميكانيكي الحراري للوح مركب من ثلاث طبقات الحالة الأولى الطبقتين العليا والسفلى موزعة وفق قانون القوة P-FGM و الطبقة الوسطى وفق E-FGM. أما الحالة الثانية الطبقتين العليا والسفلى موزعة وفق قانون القوة P-FGM والطبقة الوسطى وفق S-FGM متناظرتين .

أستعمل أربعة مجاهيل المعادلات حصلت من خلال اعتمادنا قانون توزيع الطاقة للعمل الافتراضي، و حلت هذه المعادلات بتطبيق نهج نافيه Navier .

نقترح الخصائص المادية لصفحة FGM تتغير بدون انقطاع في اتجاه السمك وفق لتوزيع بسيط لقانون القوة بدلالة جزء حجمي للمكونات.

تأثيرات تغير مؤشر القوة الجزء الحجمي (K,P) حاصل قسمة أبعاد الصفحة ,حاصل قسمة طول-سمك (a/h) الحمولة الحرارية على السلوك الميكانيكي الحراري لانحناء طبقات سندوتش متناظرة. تلقى نجاعة النظرية المقترحة بمقارنة النتائج المتحصل عليها من طرف النظريات الأخرى.

على السلوك الميكانيكي الحراري لانحناء طبقات سندوتش متناظرة. تلقى نجاعة النظرية المقترحة بمقارنة النتائج المتحصل عليها من طرف النظريات الأخرى .

النتائج الرقمية الانحناء و الجهد العادي بدون أبعاد للوحات سندوتش معروضة و مناقشة. نستطيع أن نهتم بان النظرية الحالية دقيقة و سهلة لدراسة انحناء لوحة سندوتش مطبق عليها قوة ميكانيكية و حرارية في نفس الوقت.

الكلمات المفتاحية:

لوحة سندوتش، السلوك الميكانيكي الحراري، المواد ذات الخصائص المتغيرة تدريجيا، نظرية التريب المتقدم.

TABLE DES MATIERES

| | |
|---|----------|
| Remerciements | |
| Dédicace | |
| Résumé | |
| Abstract | |
| ملخص | |
| Liste des Figures | |
| Liste des Tableaux | |
| Liste des Notations | |
| Introduction generale | 1 |
| Références Bibliographiques | 8 |
| Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et les structures sandwiches | |
| 1-Les composites | |
| 1) Définition d'un matériau composite..... | 11 |
| 2) Définitions géométriques et physiques..... | 12 |
| 2.1. Type de matériau..... | 12 |
| 2.2. Homogénéité..... | 12 |
| 2.3. Hétérogénéité ou Inhomogénéité..... | 13 |
| 2.4. Isotropie..... | 13 |
| 2.5. Anisotropie / Orthotropie..... | 14 |
| 3) Constituants des matériaux composites | 14 |
| 3.1. Les fibres..... | 15 |
| 3.1.1. Fibres de verre..... | 15 |
| 3.1.2. Fibre de Carbone..... | 16 |
| 3.1.3. Fibre d'Aramide..... | 17 |
| 3.1.4. Fibre de Bore..... | 17 |
| 3.2. Les matrices..... | 18 |
| 3.2.1. Résines thermodurcissables (TD)..... | 19 |
| 3.2.2. Résines thermoplastiques (TP)..... | 20 |
| 3.3. Interfaces | 20 |
| 4) Classification des matériaux composites..... | 21 |
| 4.1. Composites à fibres..... | 21 |
| 4.2. Composite à particules..... | 21 |
| 5) Avantages et inconvénients des matériaux composites..... | 22 |

| | |
|--|----|
| 5.1. Avantages des composites..... | 22 |
| 5.2. Inconvénients des composites..... | 23 |
| 6) Les Matériaux Composites Structuraux..... | 25 |
| 6.1. Monocouche ou pli..... | 25 |
| 6.2. Stratifié..... | 25 |
| 6.3. Sandwichs..... | 28 |
| 6.4. Autres architectures..... | 28 |
| 7) Endommagement des composites..... | 29 |
| 7.1. Définition d'endommagement..... | 29 |
| 7.2. Mécanismes d'endommagement..... | 29 |
| 7.2.1. Fissuration matricielle..... | 30 |
| 7.2.2. Rupture de fibre..... | 30 |
| 7.2.3. Décohésion fibre-matrice..... | 31 |
| 7.2.4. Délaminage..... | 32 |
| 8) Lois de comportement des composites..... | 34 |
| 8.1. Matériau anisotrope..... | 34 |
| 8.2. Matériau monoclinique..... | 34 |
| 8.3. Matériau orthotrope..... | 35 |
| 8.4. Matériau transversalement isotrope unidirectionnel..... | 35 |
| 8.5. Matériau isotrope..... | 36 |
| 9) Secteurs d'application des composites..... | 36 |
| 9.1. Construction aéronautique..... | 36 |
| 9.2. Construction automobile..... | 37 |
| 9.3. Secteur du bâtiment Applications des matériaux composites au génie civil..... | 37 |
| 9.4. Loisirs et sports..... | 38 |
| 9.5. Autres domaines d'utilisation des composites..... | 38 |

2- Les structures sandwichs

| | |
|--|----|
| 1) Introduction..... | 39 |
| 2) Définition..... | 40 |
| 3) Éléments constituant les matériaux sandwichs..... | 41 |
| 3.1. Peaux..... | 42 |
| 3.2. L'âme..... | 43 |
| 3.3. L'interface..... | 45 |
| 4) Domaines d'Utilisation..... | 45 |
| 5) Procédés de fabrication..... | 46 |

| | |
|--|-----------|
| 5.1. Technologies par voie humide (imprégnation directe)..... | 46 |
| 5.2. Technologies par voie sèche (imprégnation indirecte)..... | 47 |
| 5.3. Assemblage par collage..... | 47 |
| 5.3.1. Le collage de peau sur l'âme..... | 47 |
| 5.3.2. Technique de pliage..... | 48 |
| 5.4. Moussage (in situ)..... | 49 |
| 5.5. Moulage de panneaux en continu..... | 49 |
| 6) Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs..... | 49 |
| 6.1. Flambement Généralisé des Peaux..... | 50 |
| 6.2. Rupture des peaux en traction ou en compression..... | 51 |
| 6.3. Modes locaux de rupture..... | 51 |
| 6.4. Rupture de l'âme par cisaillement..... | 52 |
| 6.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »..... | 52 |
| 6.6. Flambement localisé « wrinkling » ou « dimpling »..... | 53 |
| 6.7. Délaminage..... | 54 |
| 6.8. Dégradation de l'adhésif..... | 54 |
| 7) Conclusion..... | 55 |
| Références Bibliographiques..... | 56 |

Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés FGM

| | |
|---|----|
| 1) Introduction..... | 61 |
| 2) La Définition et le concept d'un matériau à gradient évalué (FGM)..... | 62 |
| 2.1. Définition des matériaux FGM..... | 62 |
| 2.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés..... | 62 |
| 3) Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels..... | 66 |
| 4) L'historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués..... | 68 |
| 5) Les Lois de mélange des plaques FGM..... | 70 |
| 5.1. Loi de mélange en puissance P-FGM..... | 72 |
| 5.2. Loi de mélange sigmoïde S-FGM..... | 73 |
| 5.3. Loi de mélange exponentielle E-FGM..... | 74 |
| 5.4. Modèle de Mori-Tanaka..... | 75 |
| 5.5. Modèle auto-cohérent de Hill..... | 76 |
| 6) Procédés d'Elaboration des Matériaux à Gradient de Propriétés..... | 78 |
| 6.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)..... | 78 |
| 6.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)..... | 79 |
| 6.3. La Métallurgie des Poudres PM (Powder metallurgy)..... | 80 |
| 6.4. Compaction Sèche des Poudres..... | 82 |
| 6.5. Projection Plasma..... | 82 |
| 6.6. Frittage et Infiltration (Sintering)..... | 83 |
| 6.7. Dépôt par Electrophorèse..... | 84 |
| 6.8. Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)..... | 84 |
| 6.9. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)..... | 85 |
| 6.10. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)..... | 86 |
| 7) Avantages et Inconvénients des FGMS..... | 87 |
| 7.1. Avantages des FGM..... | 87 |
| 7.2. Inconvénients des FGM..... | 88 |
| 8) Domaines d'applications des matériaux à gradient évalué..... | 88 |
| 8.1. Dans l'aérospatiale et l'automobile..... | 89 |
| 8.2. La médecine..... | 89 |
| 8.3. La défense..... | 90 |
| 8.4. L'électronique..... | 90 |

| | |
|---|-----------|
| 8.5. L'énergie..... | 90 |
| 8.6. Outils de coupe..... | 91 |
| 8.7. Articles de sports..... | 91 |
| 9) Conclusion..... | 91 |
| Références Bibliographiques..... | 93 |

Chapitre III: Rappel sur les théories des Plaques

| | |
|--|------------|
| 1) Introduction..... | 98 |
| 2) Historique des plaques..... | 99 |
| 3) Définition d'une plaque..... | 101 |
| 4) Les équations d'équilibre..... | 102 |
| 5) Hypothèses cinématiques..... | 103 |
| 6) Les différentes théories des plaques..... | 103 |
| 6.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)..... | 103 |
| 6.2. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (First Order Shear Plate Theory FSDT)..... | 104 |
| 6.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)..... | 106 |
| 6.3.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé..... | 110 |
| 6.4. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques..... | 113 |
| 6.5. La théorie de déformation des plaques quasi-3D..... | 113 |
| 7) Conclusion..... | 115 |
| Références Bibliographiques..... | 116 |

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'Analyse thermomécanique des plaques sandwichs en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

| | |
|--|-----|
| 1) Introduction..... | 121 |
| 2) Formulation théorique..... | 124 |
| 2.1. Hypothèses de base pour la présente théorie..... | 124 |
| 2.2. Configuration géométrique..... | 125 |
| 2.3. Propriétés matérielles des plaques FGM..... | 126 |
| 3) Cinématique et équation constitutives..... | 131 |
| 3.1. Champs de déplacement..... | 131 |
| 3.2. Une nouvelle théorie des plaques raffinée à quatre variables..... | 131 |
| 3.3 Champs de déformation..... | 132 |

| | |
|---|------------|
| 3.4. Les équations constitutives..... | 133 |
| 3.5. Détermination des équations d'équilibre..... | 134 |
| 3.6. Les équations gouvernantes de la plaque..... | 136 |
| 4) Solution exacte pour une plaque en FGM..... | 138 |
| 5) Conclusion..... | 140 |
| Références Bibliographiques..... | 141 |

Chapitre V : Résultats et discussion de l'Analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé avancé

| | |
|--|------------|
| 1) Introduction..... | 148 |
| 2) Présentation du logiciel de calcul | 148 |
| 3) Résultats numériques et discussions..... | 151 |
| 3.1. Analyse de la flexion d'une plaque sandwich avec deux faces en FGM et un noyau homogène $(k=0)$ soumis a des charges thermomécaniques..... | 152 |
| 3.2. Analyse de la flexion d'une plaque sandwich avec deux faces homogènes $(p=0)$ et un noyau en FGM soumis a des charges thermomécaniques..... | 156 |
| 3.3. analyse de la flexion d'une plaque sandwich avec deux faces en FGM et un noyau en FGM $(k \neq 0)$ soumis a des charges thermomécaniques..... | 163 |
| 4) conclusion..... | 169 |
| Références Bibliographiques..... | 171 |
| Conclusion générale..... | 174 |

LISTE DES FIGURES

Chapitre I : Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et les structures sandwiches

Figure I.1: Exemple d'un matériau composite.

Figure I.2 : Observations macroscopiques (A,B) et microscopiques (a, b) pour une couche unidirectionnelle.

Figure I.3 : Différents matériaux des renforts.

Figure I.4 : Exemples des fibres du renfort.

Figure I.5 : Différentes familles de matrices

Figure I.6 : Interface

Figure I.7 : Structure d'un matériau monocouche.

Figure I.8 : Schéma d'un stratifié.

Figure I.9 : Schéma d'un matériau sandwich.

Figure I.10 : Différents types de fissuration de la matrice (longitudinale, transversale).

Figure I.11 : Mécanisme de rupture de fibre.

Figure I.12 : Phénomène de propagation de la fissure (cas d'une très bonne interface).

Figure I.13 : Phénomène de propagation de la fissure.

Figure I.14 : Phénomène de propagation de la fissure (cas d'une bonne interface).

Figure I.15 : Evolution de défauts

Figure I.16 : Mécanismes de l'endommagement accompagnant le délaminage

Figure I.17 : Mécanismes de rupture dans un stratifié

Figure I.18 : Schéma d'un sandwich.

Figure I.19: Matériaux pour les peaux.

Figure I.20: Différentes natures d'âmes.

Figure I.21: Mécanismes d'adhésion.

Figure I.22: Panneaux réalisés par collage à partir de divers profils.

Figure I.23 : Pliage de panneaux sandwichs

Figure I.24 : Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.

Figure I.25 : Mode de ruine par « flambement généralisé » des peaux du sandwich.

Figure I.26 : Mode de dégradation par rupture des peaux du sandwich.

Figure I.27 : Mode de rupture par indentation localisée.

Figure I.28 : Mode de rupture par cisaillement de l'âme.

Figure I.29 : Mode de ruine par flambement généralisé de l'âme du sandwich.

Figure I.30 : Mode rupture par flambement localisé « wrinkling ».

Figure I.31 : Mode rupture par flambement localisé « dimpling ».

Figure I.32 : Types de dégradation de l'adhésif

Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés FGM

Figure II.1 : Type d'un matériau FGM en céramique et métal.

Figure II.2 : Variation continue des propriétés

Figure II.3 : Variation discrète des propriétés

Figure II.4 : Variation continue de la microstructure (schématisée)

Figure II.5 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

Figure II.6 : Protection thermique.

Figure II.7 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites

Figure II.8 : La distribution composante des matériaux.

Figure II.9 : Géométrie d'une plaque en FGM

Figure II.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

Figure II.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

Figure II.12 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

Figure II.13 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière.

Figure II.14 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique.

Figure II.15 : Principe de la méthode coulage en bande.

Figure II.16 : Principe du coulage par barbotine.

Figure II.17 : Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres.

Figure II.18 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma.

Figure II.19 : Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel

Figure II.20 : Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux

Figure II.21 : Le coulage centrifuge des poudres mixtes.

Figure II.22 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Chapitre III : Rappels sur Les Théories Des Plaques

Figure III.1 : Approximation des cisaillements transversales : constantes (théorie du premier ordre) et quadratiques (ordre supérieur)

Figure III.2 : Distribution de τ_{xz} selon les trois théories

Figure III.3 : Géométrie d'une plaque quelconque.

Figure III.4 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.

Figure III.5 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.

Figure III.6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques

Figure III.7 : Variation de la Fonction de Forme $\Psi (z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

Figure III.8 : Variation de la Dérivée de la Fonction de Forme $\Psi' (z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

Figure III.9 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

Figure IV.1 : Dimensions de la plaque sandwich en FGM.

Figure IV.2 : Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM.

Figure IV.3 : Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes configurations des plaques sandwiches avec $p = 0.1, 0.2, 0.5, 2, 5$ et $k = 0$

Chapitre V : Résultats et discussions de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé avancé

Figure V.1 : Organigramme effectué pour notre calcul.

Figure V. 2 : L'effet de l'indice de puissance (k) sur la flèche centrale adimensionnelle (\bar{w}) des plaques sandwiches (type B) avec faces homogènes ($p = 0$) et à âme en S-FGM symétrique pour différentes configurations: (2-1-2), (1-1-1) , (1-2-1) et (1-3-1).

Figure V. 3 : L'effet des charges thermiques sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, h/2)$ de la plaque sandwich (1-2-1) (type B) à faces homogènes et noyau symétrique S-FGM ($k = 2$) en fonction du (a/b) .

Figure V. 4 : L'effet des charges thermiques sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, h/2)$ de la plaque sandwich (1-2-1) (type B) à faces homogènes et noyau symétrique S-FGM ($k = 2$) en fonction du (a/h) .

Figure V. 5 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwiches ($a/h = 5$, Type B) à faces homogènes ($p = 0$) et noyau S-FGM symétrique pour différentes configurations: (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1).

Figure V. 6 : L'effet de l'indice de puissance (k) sur la flèche centrale adimensionnelle (\bar{w}) des plaques sandwiches (type B) à faces en FGM et noyau S-FGM symétrique pour différentes configurations: (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1).

Figure V. 7 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwiches ($a/h=5$, type B) à faces en FGM et noyau S-FGM symétrique ($k=0.5$) pour différentes configurations: (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1).

Figure V. 8 : L'effet de la charge thermique t_3 sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich carrée (1-3-1) (type B) avec deux faces en FGM ($p=1.5$) et noyau S-FGM symétrique ($k=1.5$).

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés FGM

Tableau II.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Tableau II.2: Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM.

Chapitre III : Rappel sur Les Théories Des Plaques

Tableau III.1: Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour des plaques FGM

Chapitre V : Résultats et discussion de l'Analyse thermomécanique des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé avancé

Tableau V. 1: Propriétés matérielles du métal et de la céramique

Tableau V. 2: Comparaison de la flèche adimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque sandwich carrée (type A) avec deux faces supérieure et inférieure en FGM et un noyau homogène ($k=0$) soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

Tableau V. 3: L'Effet du rapport de dimension (a/b) sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ plaque sandwich (type A) avec deux faces supérieure et inférieure en FGM et un noyau homogène ($k=0$) soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10, p=3$)

Tableau V. 4: Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) de la plaque sandwich carrée ($a/b=1$, type A) avec deux faces en FGM et un noyau homogène ($k=0$) soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

Tableau V. 5: Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une plaque sandwich carrée ($a/b=1$, type A) avec deux faces supérieure et inférieure homogènes ($p=0$) et un noyau en FGM soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

Tableau V. 6: L'Effet du rapport de forme (a/b) sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une plaque sandwich (type A) avec deux faces supérieure et inférieure homogènes ($p=0$) et un noyau en FGM soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10, k=1$)

Tableau V. 7: Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) de la plaque sandwich carrée ($a/b=1$, type A) avec deux faces homogènes ($p=0$) et un noyau en FGM soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

Tableau V. 8: La flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une la plaque sandwich carrée (type A) avec deux faces supérieure et inférieure en P-FGM et un noyau E-FGM soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

Tableau V. 9: L'Effet du rapport de forme (a/b) sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une plaque sandwich (type A) avec deux faces supérieure et inférieure en P-FGM et un noyau E-FGM soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10, p=3, k=1$)

Tableau V. 10: Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) de la plaque sandwich carrée (type A) avec deux faces en P-FGM et un noyau en E-FGM soumis à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

LISTE DES NOTATIONS

| | |
|--|--|
| $E(z)$ | Module de Young suivant (Z) |
| P_c | Propriété Matérielle de la céramique |
| P_m | Propriété Matérielle du métal |
| E_m | Module de Young du métal |
| E_c | Module de Young de céramique |
| $G(z)$ | Module de cisaillement en fonction de « z » |
| α | Coefficient de dilatation thermique ; |
| $\mu(z)$ | Coefficient de Poisson |
| $V(z)$ | Fraction volumique |
| p, k | Paramètres du matériau |
| a | Longueur de la plaque |
| b | Largeur de la plaque |
| h | Epaisseur de la plaque |
| u_0, v_0, w_0 | Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque |
| u, v, w | Les déplacements dans les directions (x, y, z) . |
| ϕ_x, ϕ_y | Les rotations autour des axes x, y et z. |
| $f(z)$ | Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse) |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | Contraintes normales |
| $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ | Contraintes de cisaillement |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | Déformation dans la direction x, y et z |
| $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$ | Déformations de distorsion |
| $f'(z)$ | La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z |
| $\psi(z)$ | La deuxième dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z |
| $\delta U, \delta V, \delta k$ | Champ virtuel de déplacement |
| δU | Travail virtuel intérieur |
| δk | Travail virtuel extérieur |
| δT | Variation de l'énergie cinétique. |
| $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$ | Champ de déformation longitudinal virtuel |

| | |
|--|---|
| $\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$ | Champ de déformation transversal virtuel |
| N_x, N_y, N_{xy} | Efforts normaux |
| M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b | Moments de flexion |
| M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s | Moment supplémentaire du au cisaillement transverse |
| Q_{yz}^s, Q_{xz}^s | Efforts de cisaillement |
| ∂ | Dérivée partielle |
| $i, j, k, l \text{ et } m$ | Nombres naturels. |
| A_{ij} | Termes de rigidité de la matrice de membrane |
| B_{ij} | Termes de rigidité de la matrice de couplage |
| D_{ij} | Termes de la matrice de flexion |
| H_{ij} | Termes de rigidité de la matrice |
| $\int \theta(x, y) dx, \int \theta(x, y) dy$ | Les variables intégrales indéterminées |
| k_1, k_2 | Les coefficients dépendant de la géométrie des plaques |
| $T(x, y, z)$ | Chargement thermique Distribution de la température à travers l'épaisseur ; |
| $q(x, y)$ | Charge transversale |
| $\{ \}$ | Vecteur colonne |
| $[]$ | Matrice |
| $\{\Delta\}$ | Le vecteur des déplacements généralisés |
| $\{f\}$ | Le vecteur des efforts généralisés |

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux sont considérés comme une composante de recherche prometteuse, car on trouve leurs applications dans tous les domaines. A cet effet, le développement de ces matériaux engendre systématiquement la révolution du monde de l'industrie, vu leur importance pour répondre au besoin technologique.

Une nouvelle classe des matériaux apparaît sous le nom « matériaux composites » qui offrent un grand challenge vis-à-vis les matériaux classiques. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes, faible coût d'entretien, excellente durabilité et excellente dureté. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Ils deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la marine, le transport, la navigation, les sports, les applications aérospatiales et ils ont été utilisés récemment dans les structures de génie civil comme des compléments aux matériaux classiques (acier, bois et béton).

Un matériau composite est constitué de deux ou plusieurs matériaux de types différents, dont la performance de combinaison est meilleure que ces composants pris séparément [1,2].

Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage [3] dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Une technique a été élaborée vers la fin des années 80 par un groupe de chercheurs japonais tels que Niino au laboratoire national d'Aerospace à Tokyo en 1984 [4]. Pour surmonter ces effets nuisibles ; il consiste à utiliser un matériau à gradient évalué, sa signification originale est FGM : Functionaly Graded Material.

Durant ces trois dernières décennies, les matériaux FGM ont captivé une attention particulière et un intérêt en raison de leurs caractéristiques exceptionnelles telles que leur rapport rigidité / résistance élevé, leur résistance au poids et leur faible coût de maintenance;

de ce fait leur utilisation est en surcroît dans plusieurs domaines comme l'aéronautique, aérospatiale (la rampe de lancement de fusée, le véhicule spatial, l'avion,...etc.), l'électronique, les réacteurs nucléaires, les constructions navales et aussi comme source d'énergie biomécanique [5, 6, 7].

L'idée de ce matériau ainsi que son procédé d'industrialisation sont assez nouveaux dans le domaine de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites particuliers ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, donnant des changements des propriétés insensibles d'un point à un autre [7], éliminant les problèmes d'interfaces tandis que les caractéristiques des matériaux constituants restent intactes. A travers son épaisseur un changement s'opère en fraction matérielle pour avoir un matériau avec deux facettes : une métallique est une deuxième céramique ; le changement s'effectue entre ces deux facettes par une loi décrivant le procédé de fabrication du matériau. Et c'est ainsi soit combiné la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur et à l'oxydation de la céramique.

Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et au Japon en 1996.

Dans le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM pendant le 21^{ème} siècle.

Le programme Japonais a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM.

Au cours de ces dernières années, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont été pris en compte dans les industries des structures sandwichs sous la forme de plaques et poutres et qui s'est considérablement développé jusqu'à nos jours dans plusieurs domaines. Ces structures présentent des avantages de réduction des coûts, de légèreté, de résistance mécanique et à la corrosion et permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application souhaitée.

Les matériaux sandwichs ont été imposés pour que la nouvelle structure doive être économique à construire et à faire fonctionner, fiable et confortable. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Ils sont des matériaux solides, inhomogènes et anisotropes, constitués par l'association à l'échelle microscopique de deux couches ou peaux, de faibles épaisseurs et de haute résistance et une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité dont le tri-couche est relié par un collage pour assurer la continuation des contraintes entre les trois

couches. Cette association leur confère à l'échelle macroscopique un ensemble de propriétés notamment mécanique, que chacun des constituants pris séparément ne possède pas.

En revanche, le sandwich en FGM peut atténuer la grande variation dans la distribution de la contrainte tangentielle, en raison de la variation progressive des propriétés des matériaux à l'interface de surface-âme. En effet, les avantages considérables offerts par les matériaux à gradient de propriétés (FGM) par rapport aux matériaux traditionnels et la nécessité de surmonter les défis techniques impliquant des environnements à haute température ont incité une utilisation accrue des structures sandwiches, et l'incorporation dans leur construction de FGM que des feuilles de faces. Ce qui conduit à éliminer les variations brutes des propriétés mécaniques [8, 9].

Le principal inconvénient des matériaux sandwichs tient dans leur « nouveauté ». Cette nouveauté nécessite, aussi, le développement de nouveaux domaines d'applications et l'augmentation du degré d'automatisation de la fabrication. Actuellement, les ingénieurs et les concepteurs n'ont pas suffisamment de connaissances des avantages et des utilisations des matériaux sandwichs malgré les multitudes d'applications assez variées, mais toujours en tant qu'éléments non primaires. A titre d'exemples, on peut citer quelques domaines d'utilisation des matériaux sandwich :

Les structures sandwiches existent généralement en deux types: deux revêtements en FGM et qui couvrent un noyau homogène ou bien deux revêtements homogènes qui couvrent un noyau en FGM. Pour le cas d'un noyau homogène, il est généralement employé en raison de la légèreté et la rigidité à la flexion dans la conception structurelle; pour le type noyau lourd, il est également utilisé dans d'autres domaines tels que barrière dans les environnements thermiques. L'utilisation des structures sandwiches en tant qu'élément structural nous incite à la compréhension des phénomènes tels que vibration ou flambage des structures sandwiches.

De grandes applications de structures fonctionnellement graduées ont encouragé le développement de diverses théories des plaques pour étudier avec précision leurs comportements de flexion, de stabilité et de vibration. On peut citer quelques théories qui sont les suivantes: la théorie classique des plaques (CPT) c'est une théorie qui se base sur les hypothèses de Kirchhoff [10], elle néglige l'effet de la déformation de cisaillement transversal, néanmoins elle fournit des résultats raisonnables pour les plaques minces. Cependant, la théorie de Reissner [11] ou Mindlin [12] est connue comme la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), elle prend en compte l'effet de cisaillement transversal par le moyen d'une variation linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur.[13-15]

produit des résultats raisonnables, mais nécessite un coefficient de correction de cisaillement qui est difficile à évaluer correctement en raison de sa dépendance de plusieurs paramètres tel que les conditions aux limites et les conditions de chargement.

A cet effet, la FSDT fournit un résultat suffisamment précis pour les plaques épaisses et modérément épaisses, mais son utilisation n'est aussi assez pratique à cause de la difficulté de la détermination de la valeur correcte du facteur de correction de cisaillement.

Afin d'éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, de nombreuses théories de déformation de cisaillement de plaques à ordre élevé ont été élaborées, comme la théorie de déformation de cisaillement de plaques du troisième ordre (TSDT) de Reddy [16] dans laquelle les contraintes de cisaillement transverses varient d'une façon quadratique à travers l'épaisseur, et par conséquent elle n'exige aucun facteur de correction de cisaillement telle que la théorie de plaque de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) [17] et la théorie de plaque de déformation de cisaillement exponentielle (ESDT) [18]. La théorie de la plaque déformable à cisaillement hyperbolique (HDT) [19, 20] et la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre élevé (HSDT) proposent un gauchissement de la section par l'introduction d'une forme cubique du déplacement. Elles sont plus réalistes puisqu'elles vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieures et inférieures de la structure contrairement à celles du premier ordre de Mindlin-Reissner dans les plaques. Elles donnent donc lieu à des déformations et des contraintes de cisaillement non homogènes dans l'épaisseur.

Les théories quasi-3D sont des théories d'ordres élevés HSDT dans lesquelles la flèche est présentée comme une distribution d'ordre supérieur à travers l'épaisseur de la plaque, et par conséquent l'influence de l'étirement de l'épaisseur est incorporée. Le déplacement transversal est supposé dépendant des coordonnées d'épaisseur obéissant à la recommandation de Koiter [21]. Saidi et al. [22] ont étudié la réponse de flexion thermomécanique des plaques sandwiches FGM en considérant un champ de déplacement ayant 6 variables avec un effet d'étirement d'épaisseur.

Hamidi et al. [23] ont proposé une théorie des plaques sinusoïdales à 5 variables et un effet d'étirement pour la flexion thermomécanique de plaques sandwiches FGM. Récemment, Houari et al. [24] ont proposé une nouvelle théorie simple de déformation à cisaillement sinusoïdal à trois inconnus pour les plaques fonctionnellement graduées.

On peut trouver plusieurs modèles quasi-3D développés dans la littérature. Par exemple, Vel et Batra [25] ont présenté une solution exacte en 3D pour les déformations thermo-élastiques des plaques FGM simplement appuyées de dimensions finies. Kant et

Swaminathan [26] ont développé une théorie quasi-3D en exprimant tous les composants de déplacement par une variation cubique à travers l'épaisseur. [27, 28 et 23] ont utilisés des fonctions trigonométriques pour le déplacement en plan et transversal. [29, 30] ont utilisé des fonctions sinusoidales et hyperboliques pour les déplacements dans le plan, tandis que le déplacement transversal est modélisé par les fonctions polynomiales. Récemment, une formulation généralisée est proposée par [31] dans laquelle de nombreux modèles quasi-3D hybrides avec six variables peuvent être obtenus. Bien que les modèles quasi-3D hybrides de Mantari et Guedes Soares [31] contiennent six variables, elles sont encore plus compliquées que la FSDT.

L'importance de l'influence de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques FG a été démontrée dans l'article présenté par Carrera et al [32].

Récemment, une théorie raffinée des plaques à deux variables (RPT) a été développée pour les plaques isotropes par Shimpi [33]. Ensuite cette théorie a été étendue aux plaques orthotropes par [34]. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement et possède de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques (CLPT) dans certains aspects tels que les équations d'équilibre, les conditions aux limites et les expressions du moment. Par conséquent, il semble important d'étendre cette théorie à l'analyse de déformation thermomécanique des plaques sandwichs en FGM.

La progression dans l'application des FGMs nécessite des modèles mathématiques exacts pour envisager leurs réponses. L'aspect consiste à déterminer le milieu où la structure se trouve. Pour une modélisation correcte, il faut savoir la nature et les divers types de sollicitations imposées, afin d'étudier la réponse de la structure. La compréhension de la nature de problème traité permet d'obtenir des résultats à une précision très convenable et l'évaluation correcte des risques liés aux problèmes d'ingénierie ainsi que leurs conséquences sur la réponse globale ou/et locale de la structure.

Finalement, l'analyse et la conception des plaques sandwichs en FGM exigent la bonne connaissance de la loi de comportement matériel des matériaux anisotropes, les théories structurelles adéquates et les critères de rupture avec/sans délaminage.

En effet, de nos jours, plusieurs investigations ont été accomplies dans ce domaine afin de résoudre le problème en question.

La déformation thermomécanique des structures en FGM ont attiré l'attention de nombreux chercheurs au cours des dernières années dans différentes applications [23] qui ont développé une théorie pour la plaque sinusoidale avec cinq inconnus avec prise en compte de

l'effet d'étirement pour la flexion thermomécanique des plaques sandwiches à gradation fonctionnelle.

Cependant, Tounsi et al., [35] ont étudié analytiquement le problème de flexion thermo-élastique de plaques en sandwichs FGM basé sur la théorie trigonométrique raffinée de déformation de cisaillement. Tandis que [36, 37] ont présenté un modèle tridimensionnel pour une plaque en FGM soumise à des charges mécaniques et thermiques, toutes les deux appliquées au sommet de la plaque. Benbakhti et al. [38] ont également développé un nouveau HSDT à cinq inconnus de type quasi 3D pour l'analyse de la flexion thermomécanique de plaques sandwich FGM.

Le but de cette étude est d'analyser le comportement en flexion des plaques sandwiches en FGM soumises à un chargement thermomécanique. Cette plaque est composée de trois couches dont le module de Young et le coefficient de dilatation thermique varient à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants de la plaque. Tandis que, le coefficient de Poisson est supposé constant. La solution de Navier est utilisée pour obtenir des solutions analytiques des plaques simplement appuyées en FGM. Les effets de la variation de la fraction volumique des matériaux constituants et des rapports longueur/épaisseur et longueur/largeur et de la charge thermique sur les flèches, les distributions de la contrainte axiale sont étudiés en détail. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente théorie d'ordre élevé avancé en comparant les résultats obtenus avec ceux déterminés par d'autres théories.

Le présent travail comprend deux volets : le premier consiste en une partie bibliographique qu'elle est structurée en trois chapitres :

Le premier chapitre consiste à présenter des généralités sur les matériaux composites en décrivant leurs lois de comportement, leurs éléments constituants, types et classification, y compris une aperçu sur les structures sandwiches, leurs types, leurs procédés de fabrication, les éléments constituants des matériaux sandwiches, mécanismes d'endommagement ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Le deuxième chapitre illustre d'une manière synthétique les matériaux à gradient de propriétés, en montrant leurs origines, leurs avantages et inconvénients, motivation et développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application, et les différents modèles des plaques FGMs selon les principales lois de mélange.

Le troisième chapitre sera dédié à un rappel sur les théories des plaques existantes en montrant leur différence et leur limitation à savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques, et enfin la théorie quasi-3D de déformation des plaques.

Le second volet consiste un aspect analytique qui est scindé en deux chapitres :

Le quatrième chapitre présente une formulation théorique du modèle proposé des plaques sandwiches simplement appuyées en FGM en se basant sur une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé avancé pour l'analyse du comportement thermomécanique tout en assumant que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction de volume des matériaux constitutifs basés sur la fonction de loi de puissance.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation du modèle utilisé à travers quelques exemples connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion de deux types de plaques sandwiches dont la première configuration est composée de deux faces supérieure et inférieure en P-FGM avec un noyau en E-FGM et la deuxième configuration avec noyau S-FGM symétrique en comparant les résultats obtenus avec d'autres qui sont dans la littérature.

Cette thèse se termine par des conclusions relatives à ce travail de recherche, et qui envisage des perspectives pour les futurs travaux.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES (Introduction générale)

- [1] Murali M., Ratna D., Samui A.B., Chakraborty B.C., « *Synthesis, Characterization, and Evaluation of Carboxyl-Terminated Poly (ethylene glycol) Adipate-Modified Epoxy networks : Effect of Molecular Weight* », Journal of Applied Polymer Science, vol. 103, (2007), pp. 1723-1730.
- [2] Ratna D., Manoj N.R., Varley R., Singh Raman R.K., Simon G.P., « *Clay- reinforced Epoxy Nanocomposites* », Polymer International, vol.52, (2003), pp. 1403-1407.
- [3] Vel, SS, Batra, RC, "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plate", J Sound Vib, 272, 703–730, 2004.
- [4] Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Uroishi. (1988), " Method of producing a functionally gradient material". U.S. Patent 457,1099.
- [5] Celebi, K., Yarimpabuc, D., Keles, I. (2016), "A unified method for stresses in FGM sphere with exponentially-varying properties", Struct. Eng. Mech., 57(5), 823-835.
- [6] Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015b), "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel", Steel Compos. Struct., Int. J., 18(3), 693-709.
- [7] Koizumi, M . (1993) "The concept of FGM". Ceram Trans Funct Grad Mater ;34:3–10.
- [8] Birman, V., Keil, T., Hosder, S, "Functionally graded materials in engineering", In: Thomopoulos S, Birman V, Genin GM, editors. Structural interfaces and attachments in biology. New York: Springer; 19– 41, 2013.
- [9] Swaminathan, K, Naveenkumar, D.T, Zenkour, A.M, Carrera, E, "Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates: a state-of-the-art review", Compos Struct, 120, 10 – 31, 2015.
- [10] Kirchhoff, G.R., "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", J. Reine Angew. Math. (Crelle), 1850.
- [11] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77.
- [12] Mindlin. R.D. (1951) „ Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates“. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [13] Nguyen, T.K., Sab, K., Bonnet, G. (2008), "First-order shear deformation plate models for functionally graded materials", Compos. Struct, 83(1), 25–36.
- [14] Zhao, X., Lee, Y.Y., Liew, K.M. (2009), "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp–Ritz method", J. Sound Vib., 319(3–5), 918–939.
- [15] Mantari J.L. (2015), A refined theory with stretching effect for the dynamics analysis of advanced composites on elastic foundation. Mech Mater; 86:31–43.

- [16] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [17] M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916, 1991.
- [18] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [19] Jha, DK, Kant, T, Singh, RK, “Free vibration response of functionally graded thick plates with shear and normal deformations effects”, *Compos Struct*, 96, 799–823, 2013.
- [20] Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A, “A new 3-unknowns nonpolynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547 – 565, 2016.
- [21] Koiter, W.T. “A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells”, *Proceedings of 1st Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells*, Amsterdam, North-Holland.1959.
- [22] Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), “Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 15(2), 221-245.2013.
- [23] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- [24] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. “A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 22(2),257-276.2016.
- [25] Vel S.S, Batra RC. «*Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates*». *AIAA J* 2002;40(7):1421–33
- [26] Kant, K. Swaminathan, «*Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory*». *Composite Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.
- [27] Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Polit, O. (2011), “Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations”, *Compos. Part B*, 42(5), 1276–1284.
- [28] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *International Journal of Computational Methods*, 11(6), 1350082.
- [29] Neves, A.M.A, Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C., Cinefra, M., Jorge, R.M.N., et al. (2012a): “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Composites: Part B*, 43, 711–725.

- [30] Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., et al. (2012b): "A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos Struct*, 94, 1814–1825.
- [31] Mantari JL, Guedes Soares C. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos Struct*; 94(8):2561–75, 2012.
- [32] E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefra, M. Soave. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Comp. Part B: Eng* 42 (2011)123-133.
- [33] Shimpi RP, Patel HG. «*A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis*». *Int J Solids Struct*;43(22):6783–99, 2006.
- [34] Shimpi RP, Patel HG. «*Free vibrations of plate using two variable refined plate theory*». *J Sound Vib*; 296(4–5):979–99, 2006.
- [35] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- [36] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions" *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- [37] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2001) "Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates", *Euro. J. Mech. A Solids*, 20(5), 841-855.
- [38] Benbakhti, A., Bachir Bouiadjra, M., Retiel, N., Tounsi, A. (2016), "A new five unknown quasi-3D type HSDT for thermomechanical bending analysis of FGM sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, 22(5), 975 – 999.

Chapitre I
Généralités sur les matériaux
composites et les structures
sandwiches

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites et les structures sandwiches

Les matériaux composites

1) Définition d'un matériau composite

Un matériau composite peut être défini comme une association de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes à l'échelle microstructurale.

Cet assemblage conduit à un matériau dont les performances et les propriétés mécaniques sont conçues pour être supérieures à celles des matériaux constitutifs agissant de manière indépendante [1, 2].

On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces, tandis que les renforts, sous forme de fibres, contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés [3]. Parfois, en raison des interactions chimiques ou d'autres effets de transformation, une phase supplémentaire, appelée interphase, existe entre les renforts et la matrice. Les propriétés d'un matériau composite dépendent des propriétés des constituants, la géométrie et la distribution des phases.

Donc un matériau composite est constitué généralement d'une matrice et d'un renfort (Figure I.1), qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser et qu'ils sont très hétérogènes et anisotropes [4].

Il faut différencier entre charges et renforts. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance au ultraviolet, le comportement au feu...etc.).

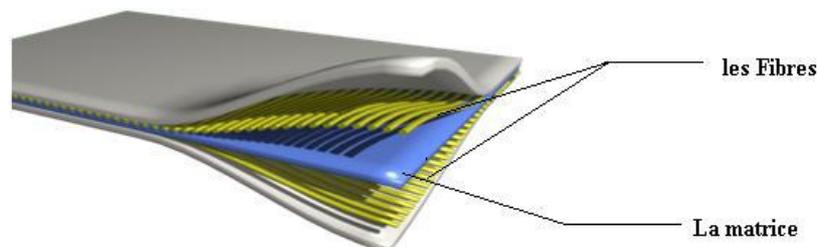


Figure I.1: Exemple d'un matériau composite.

Un des paramètres les plus importants est la fraction volumique (ou poids) de renfort, ou taux volumique des fibres. La distribution de renfort détermine l'homogénéité ou uniformité du système matériel, ainsi que leur géométrie et orientation affectent l'anisotropie du système. Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique). Parmi les composites, on distingue deux types : les composites à grande diffusion (GD) et les composites à haute performance (HP).

Les GD : Représentent actuellement les plus gros volumes d'emploi avec un bon compromis performance/coût voisin du coût du matériau de base (qui représentent 95% des composites utilisés). Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, avec un taux de renforcement voisin de 30% (en masse). Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins.

Les HP : Principalement utilisés dans l'aéronautique et qui sont d'un coût élevé et peu développés. Ils sont issus surtout des associations de fibres longues de verre R, carbone ou aramide (kevlar) avec des résines époxydes, et des taux élevés de renfort, supérieurs à 50%.

Leurs propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celle des matériaux conventionnels, contrairement aux GD. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP.

2) Définitions géométriques et physiques

2.1. Type de matériau

En fonction du nombre de ses constituants ou ses phases, un matériau est appelé monophasé (ou monolithique), biphasé (ou à deux phases), triphasé, ou multiphasé. Les différentes phases d'un composite ont des propriétés physiques et mécaniques et des dimensions caractéristiques distinctes beaucoup plus grandes que les dimensions des molécules ou des grains.

2.2. Homogénéité

Un objet ou un matériau est dit homogène lorsque ses propriétés sont uniformes, à chaque point ou sont indépendantes de l'emplacement.

L'homogénéité est associée à un volume caractéristique et à la définition des propriétés concernées. Selon le volume observé, le matériau peut être homogène ou moins homogène. Si une faible variabilité existe d'un point à l'autre à l'échelle macroscopique, le matériau est considéré comme quasi homogène.

2.3. Hétérogénéité ou inhomogénéité

Un matériau est hétérogène ou inhomogène si ses propriétés varient d'un point à un autre ou dépendent de la localisation. Comme dans le cas ci-dessus, le concept d'hétérogénéité est associé à un volume ou à une échelle caractéristique. Quand cette échelle diminue, le même matériau peut être considéré comme homogène, quasi-homogène ou hétérogène.

Par exemple, la figure I.2 montre que le matériau est homogène et anisotrope à l'échelle macroscopique, car il a une composition semblable à différents endroits (A et B), mais ses propriétés varient avec l'orientation. Sur une échelle microscopique, le matériau est hétérogène et isotrope, ayant des propriétés différentes mais indépendantes de l'orientation (a et b).

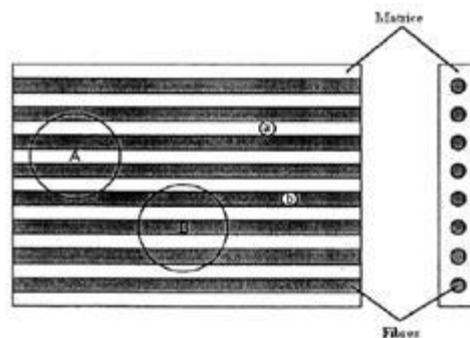


Figure I.2 : Observations macroscopiques (A et B) et microscopiques (a et b) pour une couche unidirectionnelle.

2.4. Isotropie

Un milieu est dit isotrope si ses propriétés tels que la rigidité, la résistance, la dilatation thermique et la conductivité thermique sont identiques dans toutes les directions. Un système sera qualifié d'isotrope si ses propriétés (macroscopiques) sont invariantes par rapport à une direction particulière et donc, si aucune d'entre elles ne possède de dépendance

directionnelle. Dans le cas où une seule de ses propriétés est directionnelle, le système cesse d'être isotrope, il est anisotrope.

2.5. Anisotropie / Orthotropie

Un matériau est anisotrope lorsque ses propriétés en un point varient avec la direction ou dépendent de l'orientation des axes de référence. Si les propriétés du matériau selon une direction quelconque sont les mêmes que ceux dans une direction symétrique par rapport à un plan, alors ce plan est défini comme un plan de symétrie du matériau.

Un matériau peut avoir zéro, un, deux, trois ou nombre infini de plans de symétrie à travers un point. Un matériau sans aucun plan de symétrie est appelée anisotrope général.

A l'autre extrémité, un matériau isotrope a un nombre infini de plans de symétrie.

Dans les matériaux composites on trouve des matériaux orthotropes, c'est à dire, les matériaux ayant au moins trois plans perpendiculaires de symétrie. Les intersections de ces plans définissent trois axes perpendiculaires, appelées axes principaux de symétrie.

3) Constituants des matériaux composites

Les matériaux composites seront parfois appelés « composites fibreux ». Les propriétés mécaniques des composites sont directement liées aux caractéristiques mécaniques de leurs constituants : la fibre, la matrice, ainsi que l'interphase. La résistance et la rigidité d'un composite sont assurées principalement par les fibres qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice.

Cette dernière, quant à elle, réunit les fibres et donne la forme géométrique de la structure. La matrice sert également à transférer les efforts mécaniques entre les fibres et les protéger contre les environnements.

L'interphase est la zone créée par l'adhérence et la réaction entre les fibres et la matrice. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice [5].

La disponibilité d'un grand choix de fibres et de matrices permet de réaliser des composites ayant diverses propriétés. Nous présenterons rapidement quelques-uns des constituants les plus couramment utilisés.

3.1. Les fibres

Les composites sont souvent désignés selon le type de renfort. Les renforts forment les armatures du matériau composite, se présentent sous plusieurs formes : soit des fibres continues ou discontinues (fibres coupées, fibres courtes...etc.) [6], et c'est leur arrangement et leur orientation qui aident à améliorer la résistance mécanique et la rigidité et la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait...etc. Les matériaux en forme de fibre sont intrinsèquement plus résistants à la rupture qu'en forme massive car la taille des défauts est limitée par le diamètre faible [7]. Dans un composite fibreux, la tenue mécanique est assurée principalement par les fibres.

Les fibres les plus souvent rencontrées dans les composites sont les suivantes:

- Fibres de verre
- Fibres de carbone
- Fibres aramides
- Fibres de bore

Les différents types de renforts sont cités dans l'organigramme ci-dessous

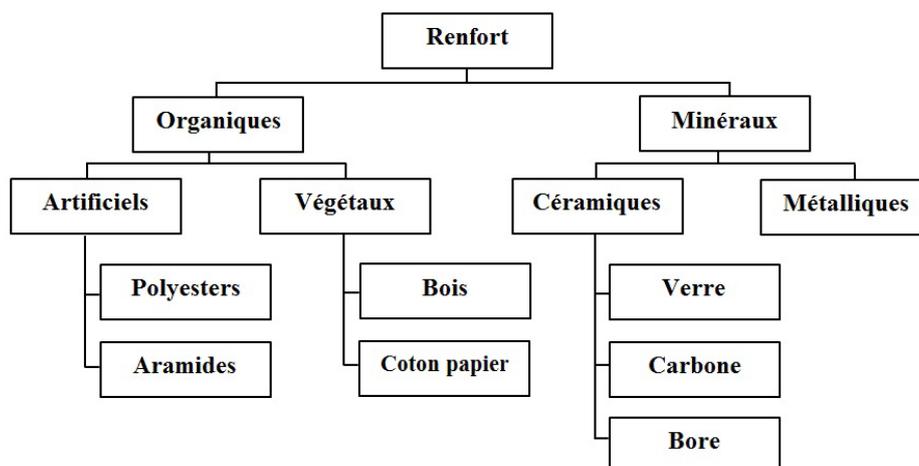


Figure I.3 : Différents matériaux des renforts.

La figure I.3 présente les familles des renforts, parmi les plus utilisées on peut citer :

3.1.1. Fibres de verre

Sont les plus utilisés depuis les années quarante dans la construction de structures composites grâce à leur excellent rapport performance/prix .Elles sont fabriquées par étirage

rapide de baguettes de verre avec une gamme de diamètres habituellement compris entre 5 et 25 μ m et une grande vitesse de l'ordre 250m/s, sortant d'une filière chauffée par l'effet de Joule.

En général, le plus grand problème associé à ces fibres est leur haute sensibilité aux endommagements superficiels, en particulier les rayures qui limitent leur résistance mécanique et créent des zones de concentration de contraintes. Cela est évité lors de la fabrication en recouvrant les fibres d'un enduit qui a pour second rôle de favoriser l'adhésion entre les fibres et la matrice.

L'étirage peut être produit suivant les deux méthodes suivantes :

- le procédé mécanique, dénommé Silionne, dans lequel l'étirage est réalisé par la traction due à l'enroulement du fil sur une broche tournant à grande vitesse ; on obtient des fils continus ;
- le procédé pneumatique, dénommé Verranne, dans lequel l'étirage est produit par entraînement des fibres sous l'action d'un jet d'air sous pression ; on obtient des fibres de faible longueur.

Il existe, dans chaque procédé, suivant les compositions chimiques, plusieurs types de verre dont les propriétés caractéristiques sont les suivantes :

- verre E** : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ; bonnes propriétés électriques ;
- verre D** : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques). [8, 9].
- verre C** : bonne résistance chimique ;
- verres R ou S** : pour les composites à hautes performances ;

La fibre de verre R et S a une résistance mécanique élevée et une rigidité moyenne. Sa densité relativement élevée par rapport aux autres fibres explique sa position assez moyenne lorsqu'on la compare du point de vue des propriétés spécifiques aux autres fibres.

3.1.2. Fibre de Carbone

C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances en aéronautique, en construction industrielle et dans les sports et loisirs. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Le précurseur est oxydé à une température de l'ordre de 300°C puis ensuite chauffé en atmosphère neutre.

Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- **fibres haute résistance (HR)** : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ;
- **fibres haut module (HM)** : pour une température de combustion de 1800 à 2000°C.

Les fibres de carbone sont des fibres conductrices, de masse volumique faible, ayant de très bonnes propriétés mécaniques mais sont moins chères et plus fines et un coefficient de dilatation négatif, d'autre part elles sont anti-oxydantes.

3.1.3. Fibre d'Aramide

Appelée aussi KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- **Les fibres bas module** : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;
- **La fibre haute module** : employées dans le renforcement pour les composites à hautes performances.

Malgré leur résistance mécanique en traction, Elles résistent mal en compression et dans le sens normal à l'axe de la fibre, une forte reprise d'humidité et d'être sensibles aux rayons ultraviolets. De ce fait, elles sont noyées dans une matrice où sont mélangées d'autres fibres pour améliorer la tenue au choc d'une structure composite.

Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- d'une adhérence moyenne entre matrice et fibres,
- d'un prix encore trop élevé : le prix de base est encore de l'ordre de 40 \$/kg et de 160 \$/kg pour la nouvelle fibre Zylon (PBO).

3.1.4. Fibre de Bore

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures. La fabrication de ces fibres est réalisée par un dépôt en phase vapeur du bore sur un filament de tungstène. Elles peuvent être noyées sans difficulté dans des matrices métalliques et également organiques.

Le bore est dur, fragile, rigide et ne peut pas être étiré. Ces fibres chères ont de très bonnes caractéristiques mécaniques. Leur utilisation se restreint au profit des fibres de carbone.



a- Fibre de verre

b- Fibre de carbone

c- Fibre de kevlar

Figure I.4 : Exemples des fibres du renfort [10].

3.2. Les matrices

La matrice réunit les fibres par ses caractéristiques cohésive et adhésive, elle est l'un des constituants de base des matériaux composites, elle a pour rôle de :

- Donner la forme désirée au produit,
- De maintenir les fibres dans leur orientation et leur position prévues pour les charges appliquées.
- Distribuer les efforts entre les fibres, fournir une résistance à la propagation de fissure, et fournir toutes les résistances en cisaillement du composite [1].
- Apporter la tenue chimique de la structure,
- Protéger les renforts vis-à-vis du milieu extérieur (chocs thermiques ou mécaniques), et la résistance à la compression et au cisaillement inter-laminaire [11].

On utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes se développe fortement.

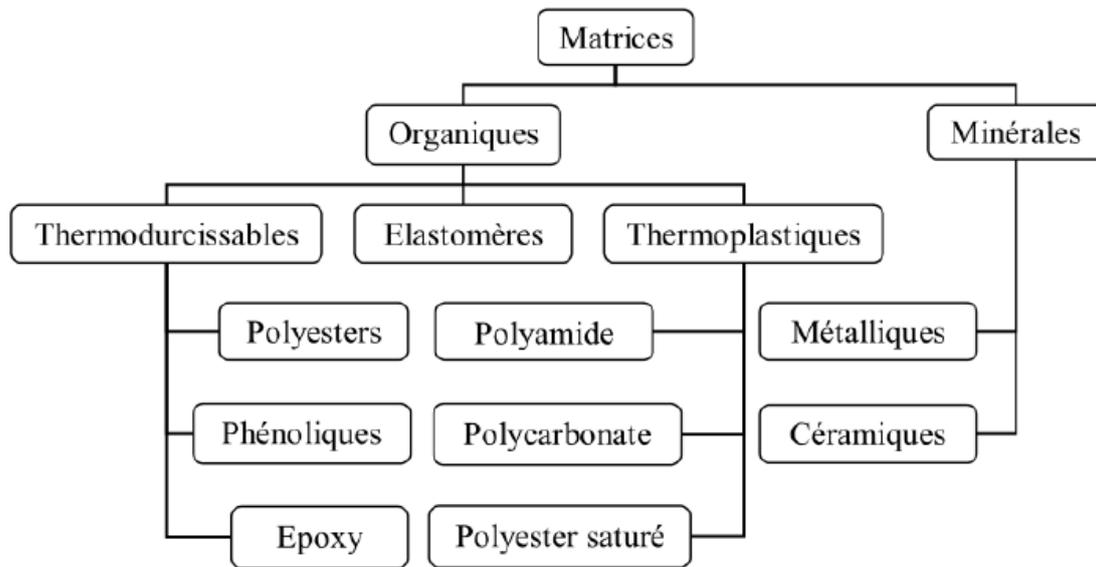


Figure I.5 : Différentes familles de matrice

3.2.1. Résines thermodurcissables (TD)

Les thermodurcissables, sont mis en forme par chauffage lors d'une transformation irréversible[12].

Les résines thermodurcissables sont, en général, associées avec des fibres longues, qui, après un traitement thermique ou physico-chimique (catalyseur et durcisseur), qui possèdent la propriété de passer de façon irréversible d'un état liquide à un état solide, elles se transforment en des produits essentiellement infusibles et insolubles. Ces résines ont donc la particularité de ne pouvoir être mises en forme qu'une seule fois.

Les principales résines thermodurcissables sont les polyesters insaturés, très largement utilisés, les résines époxydes et les résines phénoliques.

-Résine polyester : elle présente un bon accrochage sur les fibres, un prix réduit, mais a un retrait important et une tenue réduite à la chaleur humide. Elles présentent le grand défaut d'émettre des vapeurs de styrène au cours de la polymérisation et d'être difficiles à stocker [13].

-Résine phénolique : Les résines phénoliques sont obtenues par la polycondensation du phénol et du formol ; elles présentent une très bonne tenue au feu, sans fumée (d'où leur utilisation dans le ferroviaire). Elles sont fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à mettre en œuvre [14, 15, 16], ayant de moins bonnes propriétés mécaniques que les résines époxydes.

-**Résine polyimide** : d'un emploi relativement difficile, elle a l'avantage de garder de bonnes caractéristiques sur un large intervalle de température (de 100 + 260°C).

-**Résine époxyde** : c'est la plus utilisée dans l'industrie aéronautique. Elle présente un bon accrochage sur les fibres, un faible retrait au moulage (de l'ordre de 0,5%) et de bonnes propriétés mécaniques. Elle possède de bonnes propriétés jusqu'à une température de 170°C mais elle est plus coûteuse que la résine polyester [17, 18].

3.2.2. Résines thermoplastiques (TP)

Elles se présentent sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible [19].

Les thermoplastiques représentent le plus grand tonnage en termes de production à cause de leur facilité de mise en œuvre et des faibles coûts. Ce sont principalement les plastiques traditionnels (le polychlorure de vinyle PVC, le polyéthylène PVC, le polyéthylène PE, le polypropylène PP, le polyamide PA, les polycarbonates PC, ...etc.). Il existe aussi des thermoplastiques à usage spécifique qui peuvent résister à des températures de l'ordre de 200°C et même plus.

-possibilité de retransformation ; il est possible de créer des semi-produits (tôle par exemple) qui seront transformables à chaud. – les polyéther-éthercétones (PEEC).

Elles ont, de plus, une meilleure ténacité que les résines thermodurcissables. Elles devraient donc permettre d'améliorer la tenue au choc des composites. Les résines thermoplastiques avaient au départ deux graves défauts : une faible tenue en température et peu de résistance aux solvants.

L'imprégnation de fibres à l'aide de ces produits est assez complexe et leur rigidité à température ambiante rend assez difficile le drapage des pièces. Il faut remarquer que l'industrialisation n'en est qu'à son début et l'on peut penser que ces résines auront un développement important.

3.3. Interfaces

Afin d'assurer une compatibilité entre le renfort et la matrice l'utilisation d'une couche d'interface est indispensable qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Ces produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique notamment, la

résistance au cisaillement inter laminaire, la résistance à la corrosion et au vieillissement, et la tenue en fatigue et aux chocs, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite. + couche désigne couche supérieure, - couche désigne couche inférieure.

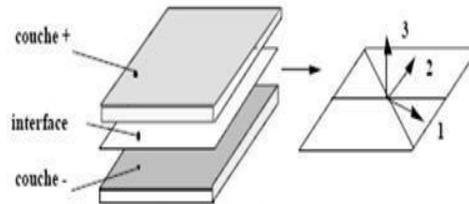


Figure I.6 : Interface

4) Classification des matériaux composites

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes, les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

4.1. Composites à fibres

Les matériaux composites à renfort de fibre sont sous forme de fibres continues, ou discontinues comme fibres coupées et fibres courtes...etc.

L'arrangement des fibres, leur orientation permettant de moduler à la carte des propriétés mécaniques des matériaux composites pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc un type de matériaux dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécaniques et physiques en jouant sur :

- * La nature des constituants.
- * La proportion des constituants.
- * L'orientation des fibres.

4.2. Composite à particules

Les matériaux composites sont des matériaux à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule; par opposition aux fibres, ne possède pas de dimensions privilégiées.

Le rôle des particules est très important dans l'interprétation de composite, c'est d'améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'élaboration, la diminution des retraits...etc.

Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût des matériaux sans en diminuer les caractéristiques.

Les composites à particules peuvent être constitués de particules non métalliques dans des matrices non métalliques (béton, verre renforcé avec des écailles de mica et les polymères renforcés par des particules fragiles au caoutchouc); particules métalliques dans des matrices non métalliques (Particules d'aluminium en caoutchouc polyuréthane); particules métalliques dans des matrices métalliques (particules de plomb dans les alliages de cuivre pour améliorer l'usinabilité), et des particules non métalliques dans des matrices métalliques (silicium des particules de carbure de aluminium, le SiCp/Al).

5) Avantages et inconvénients des matériaux composites

Dans la conception des produits, il est essentiel d'évaluer et comparer les composites avec les matériaux conventionnels pour bien choisir les matériaux. Les avantages et les inconvénients principaux des matériaux composites sont présentés ci-dessous.

5.1. Avantages des composites

- **Propriétés mécaniques adaptables Haute résistance et haut module d'élasticité**

Un composite capable de résister à diverses sollicitations grâce à ces propriétés mécaniques élevées, notamment la résistance et sa rigidité.

- **Production**

Les matériaux composites permettent de simplifier l'assemblage de la structure, ce qui compense partiellement leur prix élevé. La réduction du nombre de pièces par rapport aux matériaux conventionnels peut être substantielle. Par exemple, un tronçon de fuselage qui réclame typiquement mille pièces et plusieurs milliers de fixations est fabriqué en un seul morceau pour le Boeing 787 [20].

• Poids

Les matériaux composites à haute performance ont une densité de l'ordre de 1,6 contre 2,7 pour les alliages d'aluminium. Selon Airbus, ils autorisent un gain de 10 à 30 % sur les éléments de structure [20]. Ce gain de masse permet d'employer des moteurs plus puissants.

• Maintenance

Les composites ont besoin de moins d'entretien que les alliages métalliques par exemple, l'intervalle entre deux révisions complètes du Boeing 787, qui utilise massivement des matériaux composites, est porté à douze ans au lieu de dix ans sur un 777 [20].

D'une part, ils ne sont pas sensibles à la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone) et ils ont un faible vieillissement sous l'action de l'humidité et de la chaleur (meilleure tenue au feu) et une résistance à l'usure. D'autre part, la tenue en fatigue est très bonne, ils sont insensibles aux produits chimiques couramment utilisés dans la mécanique comme les graisses, huiles, peintures, solvants, pétrole... etc.

5.2. Inconvénients des composites

Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage parce que ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

• Assemblage

Les matériaux composites sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, la redistribution des contraintes autour des sites de concentration telle que le trou est moins efficace. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne peuvent pas toujours être entièrement transférées par un joint. Le trou est donc souvent renforcé par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié dans la partie trouée [21]. De tels renforcements entraînent du poids supplémentaire pour la structure.

Le problème d'assemblage est donc critique pour le succès de l'emploi des matériaux composites.

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température.
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes.

- **Tolérance aux dommages**

Un des points faibles les plus importants des matériaux composites est la tolérance aux dommages.

En règle générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer l'impact car la ductilité fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont tendance de se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement

Les dommages sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages diminue considérablement la résistance en compression de la pièce endommagée. Les dommages des fibres diminuent la résistance en compression ainsi qu'en traction. Les outils pour évaluer la tolérance aux dommages des structures sont le programme d'inspection, l'analyse de la résistance résiduelle, et l'analyse de la propagation des dommages [22].

- **Coût**

Les matériaux composites à hautes performances ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale où le coût élevé peut être toléré en échange de matériaux plus performants. Par conséquent, le transfert de la technologie des composites aux produits de grande consommation est lent, à quelques exceptions comme les équipements de sports où la performance prime également sur le coût.

- **Conception et analyse**

Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux conventionnels.

L'hétérogénéité impose l'analyse selon au moins deux points de vue. La micromécanique examine l'interaction des constituants à l'échelle microscopique. La macromécanique suppose que le composite est homogène et s'intéresse aux propriétés apparentes du matériau.

Les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation (les lois de comportement). Ces propriétés sont déterminées selon les directions principales du pli élémentaire (directions parallèle et perpendiculaire à l'orientation des fibres) [21].

6) Les Matériaux Composites Structuraux

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc.

Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches ;
 - Les stratifiés ;
 - Les sandwichs.
- Autres structures (structures 3D).

6.1. Monocouche ou pli

Les monocouches ou nappes (lamina), ils représentent l'élément de base de la structure composite (couches planes ou incurvées). Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes.

Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère (**Figure I.7**). Taux de déséquilibre très grand.

Généralement les structures monolithiques sont réservées à des pièces de faibles épaisseurs (entre 3 et 5 mm).

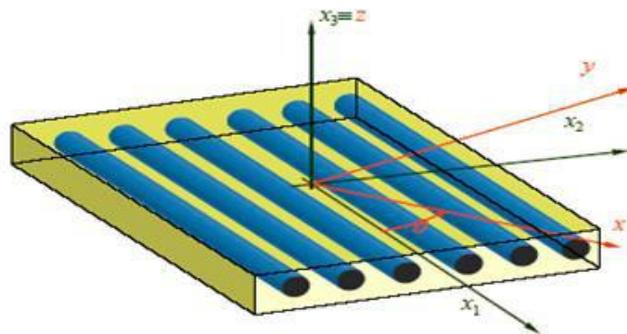


Figure I.7 : Structure d'un matériau monocouche.

6.2. Stratifié

Un stratifié est constitué de l'empilement de deux ou plusieurs couches (appelées également plis) entreposées successivement, et se comportant comme une seule entité structurale. Chaque couche est formée de fibres de faible section imprégnées de résine, et est

désignée par son orientation, qui est l'angle que fait la direction des fibres avec la direction de référence (qui est généralement la direction des fibres unidirectionnelles orientées à 0°).

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant:

- Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents ;
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique ;
- Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre ;
- Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.

Les stratifiés sont désignés de manière indiquant le nombre, le type, l'orientation et la séquence d'empilement des couches. La configuration du stratifié indiquant la composition de ses couches est appelé drapage (lay-up). La configuration indiquant, en plus de la composition de couche, l'emplacement exact ou la séquence des différentes couches est appelé la séquence d'empilement (stacking sequence). Voici quelques exemples de désignations des stratifiés : ou les symboles signifient :

| | |
|-------------------------|--|
| unidirectional 6-ply | $[0/0/0/0/0/0]=[0]_6$ |
| Cross ply symmetric | $[0/90/90/0]=[0/90]_S$, $[0/90/0]=[0/90]_S$ |
| angle-ply symmetric | $[45/-45/-45/45]=[±45]_S$, $[30/-30/30/-30/-30/30/-30/30]=[±30]_{2S}$ |
| angle-ply asymmetric | $[30/-30/30/-30/30/-30]=[±30]_4$ |
| multi directional | $[0/45/-45/-45/45/0]=[0/±45]_S$, $[0/0/45/-45/0/0/0/0/-45/45/0/0]=[0_2/±45/0_2]_S$ $[0/15/-15/15/-15/0]=[0/±15/±15/0]_T = [0/(±15)_2/0]_T$ |
| hybrid | $[0^K/0^K/45^C/-45^C/90^G/-45^C/45^C/0^K/0^K]_T = [0_2^K/±45^C/90^G]_S$ |

le nombre : nombre de couches

s : symétrique

T : total

- : montre que ce stratifié est symétrique par rapport à l'axe de cette couche.

Dans le cas des stratifiés hybrides, les lettres signifient le matériau constituant les fibres de la couche.

K : Kevlar, C : Carbon, G : Verre).

Ainsi, un stratifié est dit unidirectionnel si, l'angle entre deux couches consécutives est nul, c'est-à-dire, toutes les fibres sont alignées selon une seule direction. Par contre, un stratifié est multidirectionnel si les couches successives, sont orientées les unes par rapport aux autres à des angles autres que 0° tel, les multidirectionnels $[0/ +45/ -45/ 90/ 90/ +45/ -45/ 0]$. On pourra avoir des stratifiés de type :

* **Équilibré** : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+ \theta$ que de couches orientées suivant la direction $- \theta$.

* **Symétrique** : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen, ayant la même orientation des fibres. En général on a tendance à utiliser une stratification symétrique afin de garantir une bonne planéité du stratifié après démoulage [23].

* **Antisymétrique** : stratifié comportant des couches ayant des orientations de fibres opposées.

* **Orthogonal** : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

* **Hybride** : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride (hybrid composite). Par exemple, un stratifié peut être constitué de couches unidirectionnelles verre /époxy, carbone / époxy et aramide /époxy empilées dans un ordre spécifié. L'hybridation permet aux concepteurs d'adapter les propriétés du composites aux besoins exacts de la structure sous considération [24-28].

Il existe plusieurs types de composites hybrides en fonction de la manière dont les matériaux constitutifs sont mélangés [27-28], à savoir :

(i) hybride entre couches où les couches de deux (ou plusieurs) renforts homogènes sont empilés ;

(ii) intraply hybrides dans lesquels deux (ou plusieurs) types de fibres sont mélangées dans la même couche;

(iii) hybrides intimement mélangés où les fibres constitutives sont mélangées de façon aussi aléatoire que possible afin qu'aucune concentration de chaque type soit présente dans le matériau ;

(iv) des composites super hybrides qui sont constitués de feuilles de métal ou de nappes métalliques empilées selon une orientation et une séquence spécifiée.

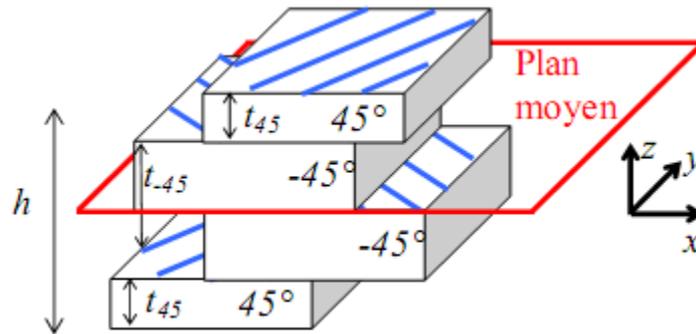


Figure I.8 : Schéma d'un stratifié.

6.3. Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux), de grande rigidité et de faible épaisseur, enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande résistance en flexion et en torsion et c'est un excellent isolant thermique.

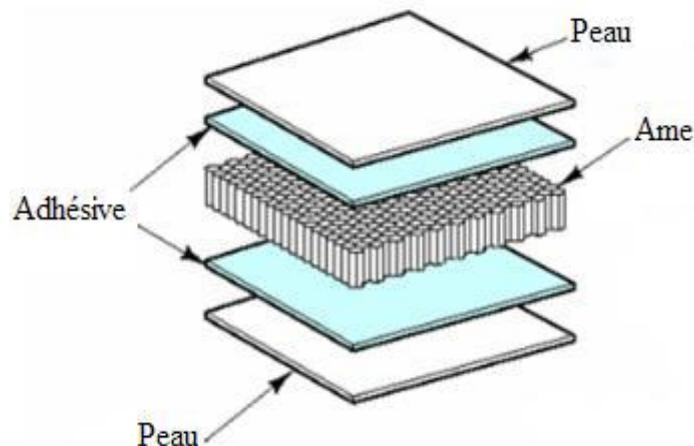


Figure I.9 : Schéma d'un matériau sandwich.

6.4. Autres architectures

En plus des structures citées ci-dessus, on trouve aussi :

-Les plaques renforcées : elles sont constituées de résines ou matrices dans les quelles sont introduits des renforts de types : fibres courtes, billes pleines ou creuses, poudre métallique ou de graphite, ces renforts permettent d'augmenter le module d'élasticité de 2 à 5 fois. Et le comportement mécanique de ces matériaux peut être homogénéisé et son étude est ramenée à celle d'un matériau usuel isotrope.

-composites volumiques : ils ont été introduits pour des besoins spécifiques de l'aéronautique, ils sont élaborés à partir de tissage volumique. Ces matériaux sont très onéreux, ils permettent d'obtenir des caractéristiques mécaniques très élevées avec un comportement sensiblement isotrope en volume.

7) Endommagement des composites

7.1. Définition d'endommagement

Lors d'une sollicitation quelconque sur un matériau composite, le développement au sein du matériau commence assez tôt. Dans un composite les premiers endommagements détectés commencent à se développer à l'échelle microscopique lorsque l'effort localisé atteint la limite de rupture d'un des constituants ou celle de l'interface les reliant. Les microfissures qui se développent sont habituellement très petites pour causer la rupture finale du composite, ainsi un nombre très important de ces microfissures s'accumulent dans le composite avant la rupture finale. Les paramètres, tel que la fraction volumique, l'orientation des fibres, l'épaisseur des plis et l'espacement entre les fibres, jouent un rôle très important dans la progression des endommagements. En conséquence, le procédé global de la rupture dans les composites est souvent considéré comme un processus d'accumulation de différents types d'endommagements.

7.2. Mécanismes d'endommagement

L'identification des dommages par la microscopie a permis de développer l'analyse d'endommagement. La perte de rigidité du matériau endommagé permet de définir et de déterminer un seuil critique de déformations ou de contraintes qui amorce les mécanismes d'endommagement.

Il a été montré que la température, la vitesse de sollicitation, les chocs, la nature chimique d'un environnement agressif, le chargement monotone ou cyclique influencent l'évolution de l'endommagement. La ténacité de la matrice et la qualité de l'interface influence la résistance aux dommages [29]. Les mécanismes d'endommagement potentiels d'un matériau hétérogène, notamment les composites soumis à une sollicitation mécanique, peuvent se regrouper en quatre principaux modes différents [30] selon le site où ils opèrent :

7.2.1. Fissuration matricielle

La complexité des matériaux composites introduit plusieurs types d'endommagement à l'échelle microscopique. Les microfissures se produisant au sein de la matrice apparaissent aux niveaux des porosités et des inclusions soit par fissuration transverse soit par fissuration longitudinale. Ce dernier mode de rupture se produit lorsque la contrainte de décohesion est supérieure à celle de cisaillement. Cette fissuration se propage selon la direction perpendiculaire à la sollicitation et elle peut provoquer une décohesion fibre-matrice.

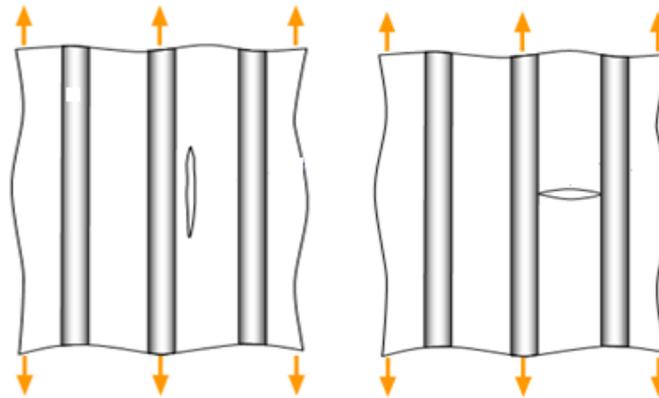


Figure I.10 : Différents types de fissuration de la matrice (longitudinale, transversale).

7.2.2. Rupture de fibre

La rupture de fibre intervient lorsque la contrainte de traction dans une fibre atteint la contrainte de la rupture de la fibre. Elle se produit souvent dans les plis les moins désorientés par rapport à la direction de sollicitation. L'excès d'effort provoquera la rupture des constituants voisins, et ce de proche en proche jusqu'à la ruine du volume sollicité.

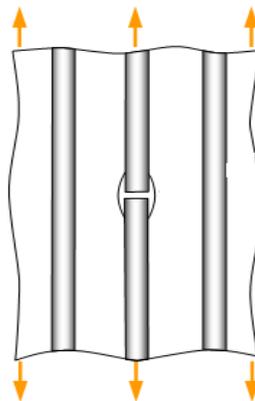


Figure I.11 : Mécanisme de rupture de fibre.

7.2.3. Décohésion fibre-matrice (décohésion étendue intra plis)

C'est dans la zone de l'interface où s'effectue le transfert de charge de la matrice vers le renfort ou vis versa. Après initiation, la propagation de la rupture change suivant la nature de l'adhésion fibre-matrice. Dans le cas d'un composite à fibres unidirectionnelles sollicité parallèlement aux fibres on peut distinguer les cas suivantes

*cas d'une interface très forte si l'adhérence entre fibre et matrice est très forte, on aura une propagation d'une fissure initiée soit par rupture de fibre soit par rupture de la matrice comme si elle n'avait pas rencontré un obstacle, la rupture observée sera de type fragile.

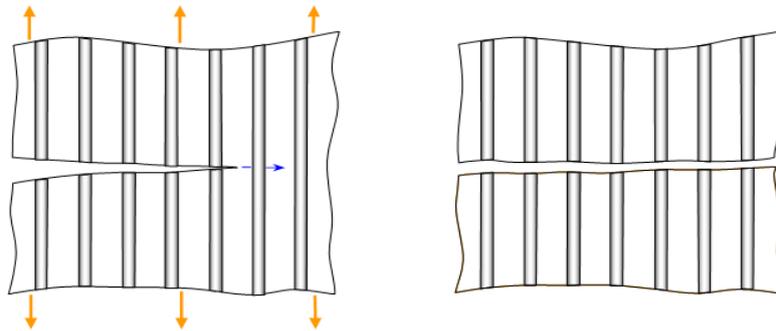


Figure I.12 : Phénomène de propagation de la fissure (cas d'une très bonne interface).

*cas d'une interface très faible, la fissuration matricielle est déviée à l'interface, la décohésion fibre-matrice s'étend sur une très grande distance.

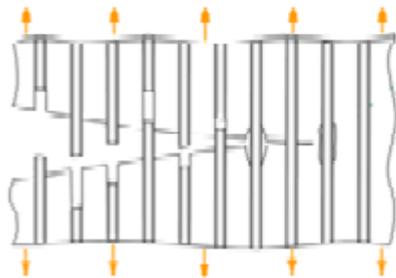


Figure I.13 : Phénomène de propagation de la fissure.

* cas d'une interface ayant des propriétés intermédiaires, la fissure au contact d'une fibre se dévie dans un plan perpendiculaire en provoquant un décollement de la matrice au niveau de l'interface.

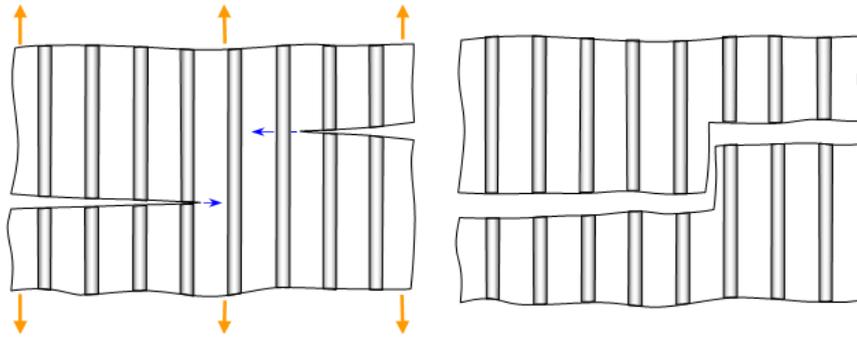


Figure I.14 : Phénomène de propagation de la fissure (cas d'une bonne interface).

7.2.4. Délaminage

Dans le cas de stratifiés, aux mécanismes décrit précédemment (fissuration matricielle, rupture des fibres, décohésion,...etc.) s'ajoute un autre mécanisme d'endommagement entre couche appelé délaminage [31]. Le processus de délaminage est le résultat d'une chronologie de divers types d'endommagement.

Les propriétés mécaniques de la matrice et des fibres ainsi que les propriétés adhésives et cohésives de l'interface gèrent cette chronologie en révélant des types d'endommagement fréquemment rencontrés comme la microfissuration de la matrice, la rupture des fibres et la rupture des interfaces.

Les premiers défauts sont la microfissuration de la matrice et la décohésion fibre/matrice à l'échelle microscopique (Figure I.15.a). Ensuite, ces défauts s'agrandissent de façon stable à l'échelle du pli par coalescence (Figure I.15.b). Les fissures transverses peuvent parvenir à l'interface des plis et provoquent le délaminage sous l'effet des contraintes inter-laminaires (Figure I.15.c). Ces défauts et leur évolution dépendent de l'empilement, du nombre de plis, du chargement, de la taille et de la forme de la structure considérée.

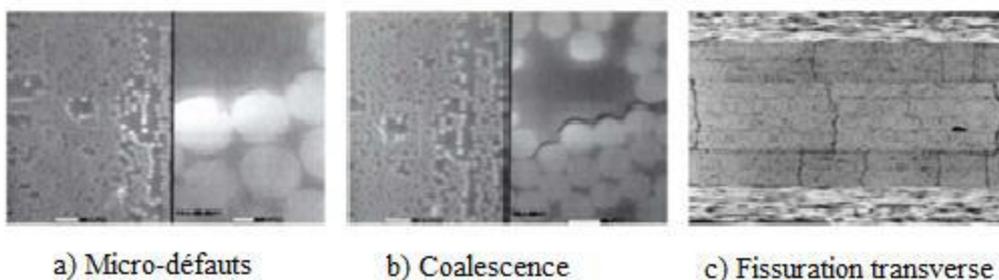


Figure I.15 : Evolution des défauts [8]

Les micro-mécanismes principaux de l'endommagement qui accompagnent un délaminage sont présentés schématiquement dans la (Figure I.16) [32]. Ils incluent :

- **Zone endommagée** : La forte concentration de contraintes autour de la pointe de fissure provoque une zone endommagée où se trouvent la déformation plastique et/ou des microfissures de la matrice.
- **Fissures latérales** : Après le passage de la fissure, les microfissures dans la zone endommagée peuvent se transformer en des fissures latérales de la matrice autour du plan de délaminage.
- **Pontage de fibres** : La présence de fissures au dessus ou en dessous du plan de délaminage facilite la création de ponts de fibres reliant les deux surfaces délaminées. Certains ponts de fibres se rompent pendant l'avancée du délaminage.

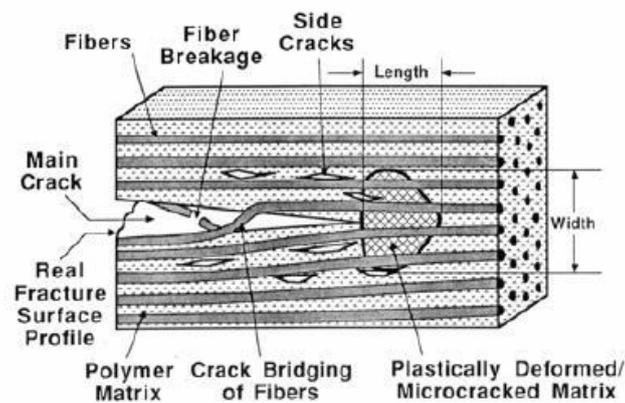


Figure I.16 : Mécanismes de l'endommagement accompagnant le délaminage [32]

Les stratifiés ont trois types de rupture : rupture intra-laminaire, rupture inter-laminaire, et rupture translaminaire [33].

Ces trois mécanismes de rupture (Figure I.17) définissent le plan de rupture par rapport aux constituants du matériau. La rupture intra-laminaire se trouve à l'intérieur d'un pli tandis que la rupture inter-laminaire décrit une rupture entre deux plis adjacents. La rupture translaminaire est orientée transversalement à l'orientation de fibres dans le pli endommagé.

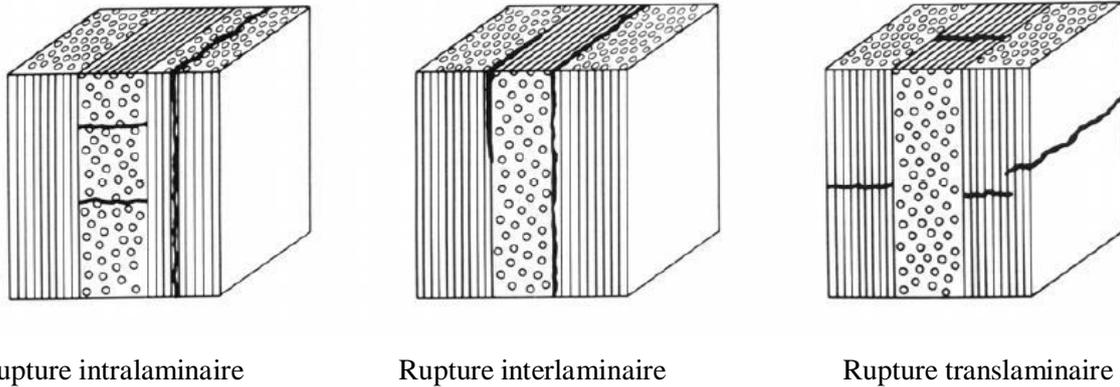


Figure I.17 : Mécanismes de rupture dans un stratifié [33]

8) Lois de comportement des composites

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. La relation d'élasticité linéaire reliant la matrice de rigidité à celle de déformation peut s'écrire sous la forme condensée : $\sigma = c.\varepsilon$ ou matriciellement : [34]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Cette loi est appelée loi de HOOKE généralisée, elle introduit une matrice de rigidité symétrique constituée dans le cas général- de 21 constantes de rigidité C_{ij} .

8.1. Matériau anisotrope

Ou matériau triclinique, c'est un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie, et la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes.

8.2. Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan [34]. La loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse à la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

8.3. Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère [34]. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie :

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

8.4. Matériau transversalement isotrope unidirectionnel

C'est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe 1. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{22} - c_{33}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope a 5 constantes.

8.5. Matériau isotrope

C'est un matériau qui ne possède aucune direction privilégiée et ses propriétés sont indépendantes du choix de l'axe de référence. Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux. La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

9) Secteurs d'application des composites

Les composites sont largement utilisés dans l'industrie aéronautique, aérospatiale, automobile, ferroviaire, les conduites souterraines et des conteneurs, bateaux, sports et loisirs, les produits biomédicaux, bâtiment et génie civil parce qu'ils présentent de bonnes caractéristiques telles la rigidité, légèreté et résistance à des contraintes d'origine mécanique ainsi qu'à celles d'origine thermique. [35]

9.1. Construction aéronautique

Le marché des composites carbone/carbone est principalement lié à l'aéronautique : les tuyères de fusées et les freins de l'avion. D'autres applications incluent : les éléments chauffants du four, les composants d'engins spatiaux et d'avions, les échangeurs thermiques, les composants de moteurs aérobies hypersoniques.

Les matériaux composites sont essentiellement utilisés pour la conception et réalisation des propulseurs à poudre des lanceurs de satellites et de leur tuyère d'éjection des gaz de propulsion, obtenue par bobinage de fibres de verre, de kevlar ou de carbone [36], afin de résister à la pression interne résultant de la combustion du propergol solide et aux efforts de lancement qui, dans certain cas, se traduisent par des chocs et des vibrations.

L'utilisation des matériaux composites dans les constructions aéronautiques entraîne un gain de poids substantiel. Leur emploi permet, à performances égales, des gains de masse variant de 10% à 20%.

Le poids de l'avion moyen-courrier Boeing 767 a été réduit, par l'emploi des composites, de 921 kilogrammes par rapport à la solution conventionnelle.

Sur les avions commerciaux, les premiers appareils produits industriellement en grande série utilisaient essentiellement des alliages d'aluminium, de l'acier et du titane, aujourd'hui ; les avions commerciaux les plus récents utilisent en masse encore 54% d'alliage d'aluminium, mais 20% de matériaux composites ont été introduits dans la structure, 13% d'acier, 6% de titane et 7% de matériaux divers.

9.2. Construction automobile

L'utilisation des composites dans le secteur automobile remonte à des origines relativement anciennes (fin des années 1980), mais ne s'est généralisée que très récemment, chez les grands constructeurs étrangers (Volvo, Mercedes) pour développer des coffres et hayons.

La société LOHEAC de transports routiers [37], a pu réduire substantiellement sa consommation de carburant grâce à l'économie de poids obtenue en remplaçant les cabines conventionnelles de ses tracteurs par de nouveaux éléments moulés en une seule pièce renforcés de fibre à haute résistance [38].

Les composites sont choisis pour la conception de ressorts à lames [13]. Ce sont des pièces de suspension routières très sollicitées, utilisées par les véhicules de gros tonnage et dont la lame secondaire, assurant 80% de la fonction suspension en évitant des ruptures brutales. [39]

9.3. Applications des matériaux composites au génie civil

Les composites ont relativement peu pénétré le secteur du BTP, notamment sous forme de nombreux produits présentés : • Fenêtres, • Portes, • Substituts d'ardoise, • Renforts de poutres, ...etc.

- Construction d'édifices et d'ouvrage d'art léger ;
- Renforcement structurel d'édifices existants, afin de respecter de nouvelles normes ou en prévision d'utilisation nouvelle d'un bâtiment (ajout d'étage, changement du type d'exploitation). Par exemple:
 - L'utilisation des ancrages en fibre de carbone pour l'amélioration de la résistance au cisaillement et à la flexion dédiés aux renforcements de poutres, poteaux et dalles.
 - L'utilisation d'un système carbonique pour le renforcement et de réparations de conduites de gros diamètre de 800 mm de diamètre et plus, en béton précontraint, béton armé et de

segments de conduites en acier. Cela inclut le renforcement des conduites contre l'éclatement sous pression, ainsi que la protection contre la corrosion.

- Réalisation de formes complexes de grande portée ;
- Elaboration de matériaux hybrides avec des matériaux traditionnels ;
- Transmission et distribution d'électricité temporaire et durable, pylônes électriques modulables et déplaçables ;
- Structures destinées aux réservations d'eau ;
- Panneaux pour murs et planchers ;
- Produits dérivés du bois : bois aggloméré, lamellé collé, panneaux OSB,...etc.
- Géotextiles : pour les opérations de drainage, stabilisation de sol et construction de barrages.

9.4. Loisirs et sports

De part leur légèreté, leur bonne tenue à la fatigue statique et dynamique et leur stabilité dimensionnelle, les matériaux composites sont des matériaux idéaux pour la fabrication et la conception de très nombreux articles de sports et de loisirs tel que les raquettes de tennis, les cannes à pêche et de hockey,...etc.

9.5. Autres domaines d'utilisation des composites

Les matériels ferroviaires présentent de nombreuses possibilités d'utilisation des matériaux composites.

L'adaptation de composites, dans l'industrie maritime, permet de diminuer le poids des structures de bateaux rapides (patrouilleurs, bateaux d'intervention ou de service) tout en ayant une résistance suffisante afin d'avoir pour résultat soit une augmentation de la vitesse pour une puissance donnée, soit une meilleure rentabilité pour la même vitesse ou soit l'utilisation d'une motrice moins puissante et moins onéreuse [40].

L'équipement industriel (boîtes de stockage, isolation) et l'équipement électronique, représentent déjà 26% du marché des composites à matrice organique. Les composites à matrice métallique connus sous le nom de cermets (ce qui signifie combinaison : céramique-métal) qui contiennent une fraction volumique faible des particules céramique sont utilisés dans les outils de coupe tels que les perceuses.

En électronique, les boîtiers céramiques pour microprocesseurs d'Agide, récemment introduits [41]. Les composites à matrice polymère avec des particules de métal sont utilisés pour les interconnexions électriques.

Les composites jouent un rôle croissant dans les applications biomédicales comprennent des implants (les hanches, les valves cardiaques, la peau et les dents), des dispositifs chirurgicaux et de diagnostic, des stimulateurs cardiaques (dispositifs connectés par des fils électriques à la paroi du cœur, ce qui permet le contrôle électrique du rythme cardiaque), des dispositifs pour l'équipement d'exercice pour les handicapés, emballage pharmaceutique (pour la libération contrôlée du médicament dans le corps par exemple) et l'instrumentation d'analyse et de diagnostic chimique (tels que l'équipement d'analyse de sang et l'urine). Les implants sont particulièrement difficiles, car ils doivent être faits de matériaux qui sont biocompatibles (compatible avec des fluides tels que le sang), résistant à la corrosion, résistant à l'usure, résistant à la fatigue, et qui sont en mesure de maintenir ces propriétés sur des dizaines d'années.

Les structures sandwichs

1) Introduction

Dès la seconde guerre Mondiale, les structures sandwichs sont apparues dans les structures de l'avion «Mosquito » [42]. L'introduction des composites sandwichs dans la plupart des secteurs d'activités a conduit les chercheurs à développer des théories de plaques sandwichs, dédiées à l'analyse et à la prévision de leur comportement et de leur tenue en service. D'autre part, le concept sandwich est très répandu dans la nature.

Les structures sandwichs dont l'utilisation n'a cessé d'augmenter depuis un demi-siècle, sont les composites les plus utilisés en tant que pièces de structures travaillantes, grâce à des propriétés de flexion supérieures à celles des composites monolithiques ou stratifiés.

En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique, des satellites, des aéronefs, des navires, des automobiles, des wagons et de l'industrie du bâtiment [43].

Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions.

Leur introduction dans le secteur ferroviaire est d'actualité avec la conception et la réalisation d'un premier prototype de TGV 2 niveaux en composite sandwich [44, 45].

Les principes fondamentaux des constructions sandwiches et des examens des méthodes expérimentales et analytiques sont décrits dans les premiers travaux par [45, 3, 23, 46-48]. Leurs résultats évaluent l'évolution des matériaux composites.

Les chercheurs du milieu de la construction navale ont trouvé des champs d'applications pour la réalisation des coques, de ponts, de superstructures et cloisons. En général, la fabrication d'un sandwich met en jeu trois couches de natures différentes liées par un film de colle ou par soudure; la liaison entre deux couches successives est communément appelée interface.

2) Définition

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles (ou peaux) et d'un matériau d'âme (ou cœur) (Figure I.18). Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé et grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble [49].

Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et bonne résistance au flambement et au cisaillement [11, 50], ainsi possèdent de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique.

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

L'adhérence des peaux et le cœur est un autre critère important pour le transfert des charges et pour le fonctionnement de la structure sandwich dans son ensemble [51].

De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le

rapport t_f/t_c (t_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,01 et 0,1. D'après Allen [47], on peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_f (d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = t_f + t_c$.

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante :

- Si le rapport d/t_f est supérieur à 100, on parle de sandwichs à peaux très fines ;
- Pour un rapport d/t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où d/t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

Ces bornes limites sont définies par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

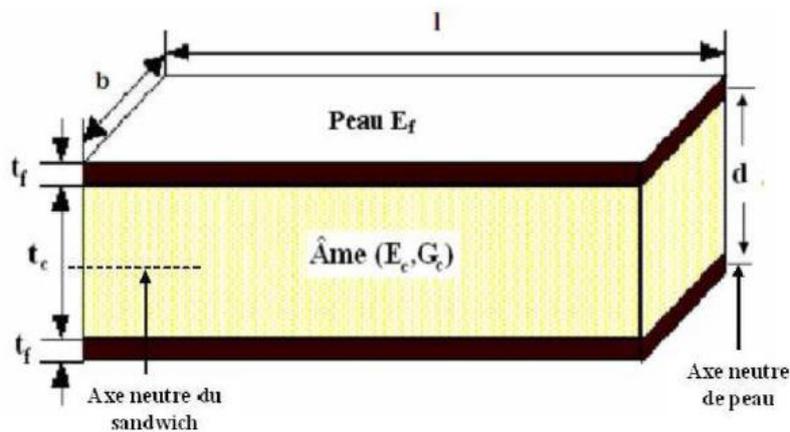


Figure I.18 : Schéma d'un sandwich [52].

3) Éléments constituant les matériaux sandwichs

Une structure sandwich présente une solution de compromis permettant à la fois de rigidifier et d'alléger une structure. La performance globale des structures en sandwich dépend des propriétés des matériaux constitutifs (feuilles de face, adhésif et noyau), des dimensions géométriques et du type de chargement.

3.1. Peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature de la peau s'effectue principalement en fonction des performances mécaniques exigées.

Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression) [53].

Les peaux des sandwichs sont généralement constituées de fibres (mat ou tissu) enrobées d'une matrice à base de résine.

-Les peaux peuvent être identiques ou différentes en épaisseur et en propriétés mécaniques. Cependant, dans des cas spéciaux les peaux doivent être différentes car l'une des deux peaux doit être le porteur des charges primaires exercées à une basse température quand à l'autre face elle doit résister à la haute température et à la corrosion de l'environnement...etc.

Ces faces peuvent être fabriquées par aramide, les fibres de verre, les fibres de carbone, acier inoxydable et l'aluminium, donnant une surface durable à la structure. Les propriétés demandées pour les faces sont [54]:

- Haute rigidité
- Haut module de Young pour la compression et la traction
- résistance à l'impact
- résistance environnementale
- résistance d'usage.

La **Figure I.19** illustre les différents matériaux de fabrication des peaux.

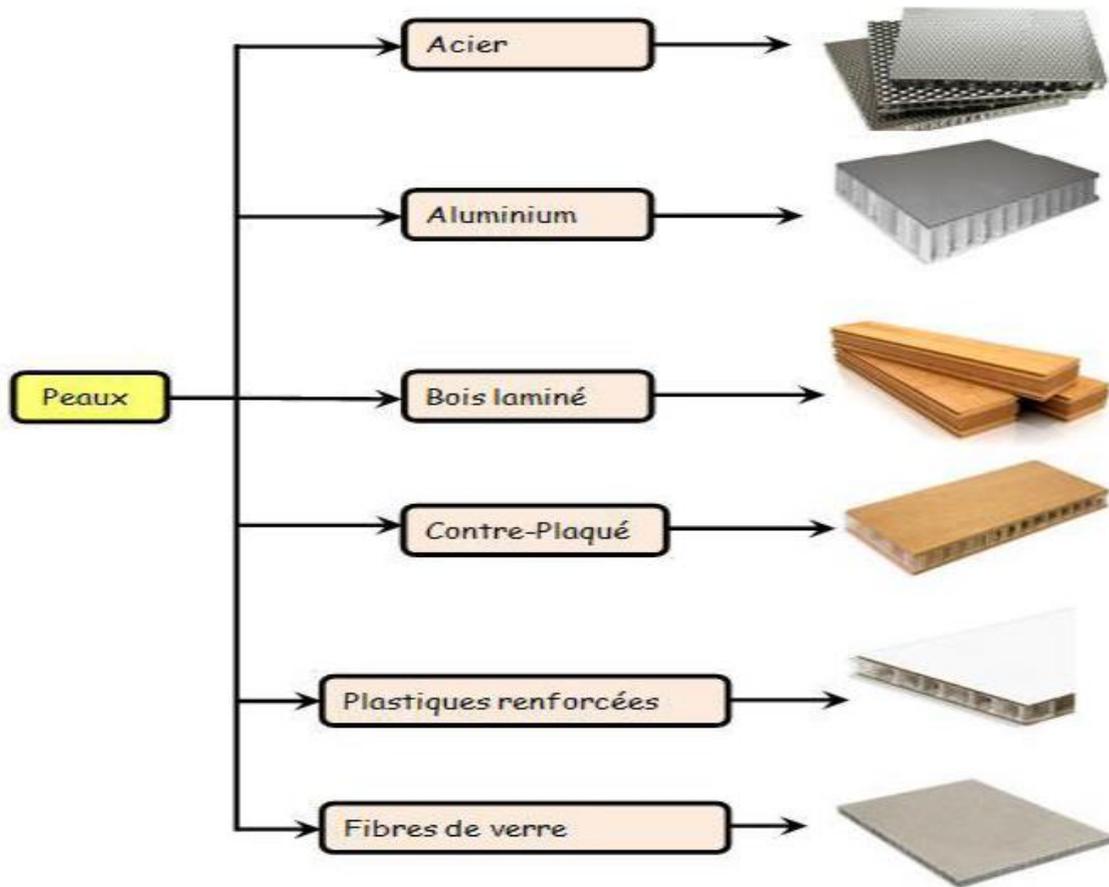


Figure I.19: Matériaux pour les peaux.

3.2. L'âme

C'est l'élément central d'une structure sandwich. Elle se caractérise par une faible masse et des faibles caractéristiques mécaniques. Son rôle principal est de supporter les efforts de compression et de cisaillement engendrés suite au mouvement de glissement des peaux sous chargement, et de maintenir leur écartement [43, 23]. En effet, si l'épaisseur des panneaux n'est pas maintenue constante, il en résulte une diminution des capacités des peaux externes à résister à la flexion. L'épaisseur élevée de l'âme a pour but d'accroître le moment d'inertie du panneau sans augmenter la masse volumique.

Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants [54] :

Mousses : se sont les plus fréquemment utilisées. Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécanique. Elles sont thermo formables et permettent donc de réaliser des pièces de formes complexes.

Balsa : est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités telles que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques. Il est utilisé pour sa très bonne résistance à la compression

notamment pour les supports d'accastillage. Le bois est le matériau le moins cher, mais il est le plus poreux.

Nid d'abeille : l'âme en nid d'abeilles, connue sous le nom «Nida », c'est une structure hexagonale qui peut être réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bandes régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' nid d'abeille ' par expansion.

Il existe deux types d'âmes (Figure I.20) :

➤ **Les âmes pleines** parmi laquelle on retrouve :

1. Le Balsa ou bois cellulaires
2. Diverses mousses cellulaires
3. Des résines chargées de microsphères creuses de verres appelées mousses syntactiques.

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions : 2 constantes indépendantes suffisent alors pour définir la loi de comportement du matériau).

➤ **Les âmes creuses**, essentiellement de type nid d'abeilles elles sont :

4. Des alliages métalliques légers
5. Des papiers kraft (enduit ou non de résine)
6. Du papier polyamide, type papier Nomex.

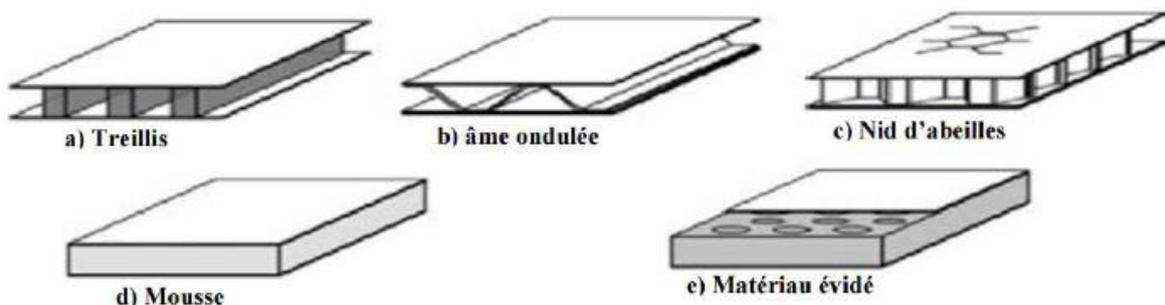


Figure I.20: Différentes natures d'âmes

3.3. L'interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisée par collage, soudage ou brasage [23]. Aussi est-il supposé que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait.

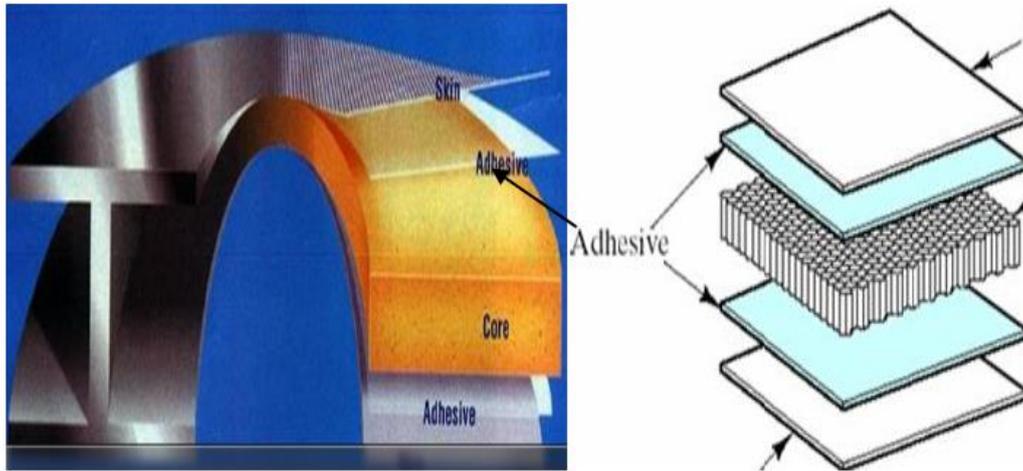


Figure I.21: Mécanismes d'adhésion [55].

Cet élément est d'une importance cruciale, il solidarise l'âme et les peaux. Il doit permettre un bon assemblage de la structure en formant une liaison continue, non poreuse et d'épaisseur constante. Par ailleurs, une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre est nécessaire. Pour cela, la principale caractéristique de l'adhésif doit être une bonne résistance au cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

4) Domaines d'utilisation

L'usage des structures sandwiches, continue à augmenter rapidement pour diverses applications qui vont des satellites, avions, bateaux, automobiles, voitures sur rail, éoliennes et construction de ponts.

Le sandwich est utilisé par une large gamme de constructions navales et maritimes et de nouveaux marchés sont encore à venir.

Les conceptions de terres d'aujourd'hui permettent uniquement l'utilisation du béton, de l'acier et de quelques alliages d'aluminium.

Les matériaux sandwichs sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction automobile et ferroviaire. Dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié de verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé.

Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwichs. Les portes d'accès sont en panneaux sandwichs avec des peaux en composites verre/ polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwichs avec âme en nida aluminium ou nomex.

Dans la construction aérospatiale les panneaux sandwichs et par cocuisson de stratifiés composites (carbone/ époxyde, kevlar /époxyde) sont utilisées pour les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets).

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwichs constitués de peaux en carbone / époxyde collés sur des âmes en nida aluminium.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwichs avec peaux en composites collées sur nida [56].

Dans les domaines astronautique et d'armement, on a besoin de la tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/époxyde et l'âme en nida nomex. Dans le futur le concept du sandwich peut être introduit comme matériau de substitution pour différents modules composant ces structures, telles que les chambres de stockage et l'isolation en période hivernale.

5) Procédés de fabrication

La fabrication des structures sandwichs fait appel, dans un grand nombre de cas, à des technologies de transformation standard des composites (moulage au contact, moulage au sac sous vide, moulage par injection de résine, moulage à la presse, moulage par enroulement filamentaire ou centrifugation...etc.), qui permettent d'intégrer une âme dans l'épaisseur de la structure ainsi fabriquée. On citera dans cette partie les procédés les plus utilisés pour l'élaboration d'un sandwich. [54]

5.1. Technologies par voie humide (imprégnation directe)

-Les sandwichs peuvent être obtenus par des procédés de mise en œuvre dits par « voie humide », les renforts secs étant imprégnés par la résine thermodurcissable au cours de la

mise en forme, soit par moulage au contact, soit par projection simultanée, soit encore par injection de résine, ou par enroulement filamentaire.

Les structures obtenues par contact ou projection simultanée présentent des propriétés mécaniques moyennes, en particulier si les peaux ont été fabriquées à partir de fibres coupées.

Le taux de résine, le taux de porosité et plus généralement, la qualité du stratifié, dépendent de l'habileté du mouleur.

Celles produites par enroulement filamentaire ou par injection de résine (sous vide ou sous pression) présentent des propriétés mécaniques les plus élevées du fait de l'utilisation possible de renforts à fibres continues (unidirectionnels, tissus) et de l'obtention de taux de fibres plus importants.

5.2. Technologies par voie sèche (imprégnation indirecte)

-Les procédés de mise en œuvre par voie sèche (procédés d'imprégnation indirecte) consistent à réaliser des structures sandwiches dont les peaux sont obtenues à partir de pré imprégnés.

La mise en œuvre peut s'effectuer sous vide en étuve, sous presse chauffante, ou sous vide en autoclave. Le recours aux pré-imprégnés permet de garantir une imprégnation des renforts uniforme et de qualité, et confère à la pièce sandwich de bonnes propriétés mécaniques résultant du taux de fibres élevé. L'excès de résine contenu dans le pré-imprégné, qui sera extrait par l'application de la pression et de la température adéquates, peut être utilisé pour assurer le collage âme/peau.

5.3. Assemblage par collage

5.3.1 Le collage de peau sur l'âme

Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme –peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux utilisés (Figure **I.22**). La préparation des surfaces est une étape importante qui permet d'assurer une adhésion de qualité :

- Nettoyage afin d'éliminer les matières grasses ou la poussière ;
- Augmentation de la rugosité ;
- Apprêt par attaque chimique des peaux métalliques...etc.

L'adhésif, dont la nature est fonction des matériaux constitutifs du sandwich, doit être appliqué uniformément. L'empilement (âme + adhésif + peaux) est chauffé et mis sous pression, l'application de la pression pouvant se faire à la presse, en autoclave sous vide, par moulage au sac.

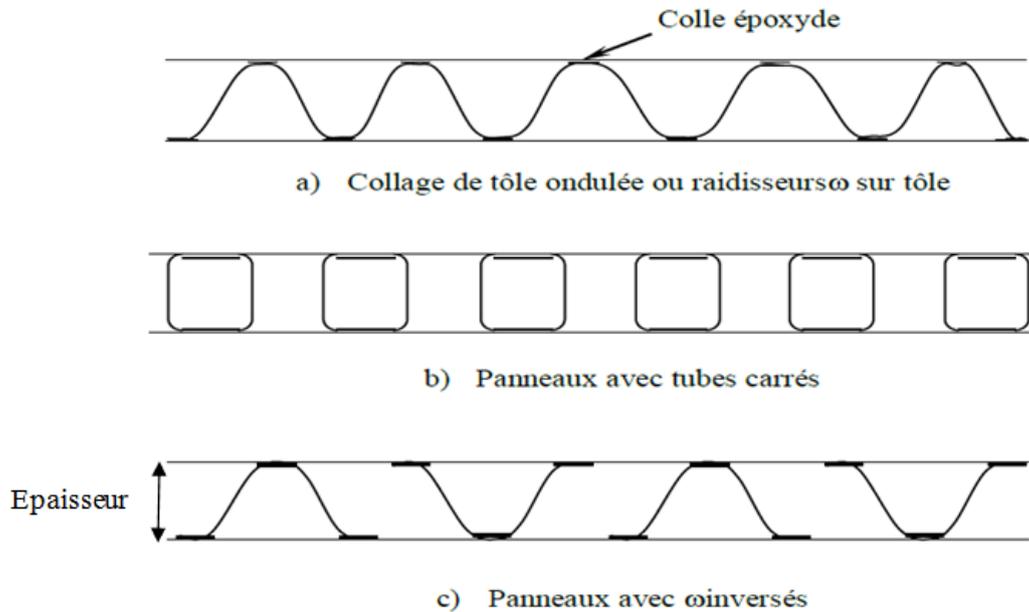


Figure I.22: panneaux réalisés par collage à partir de divers profils. [57]

5.3.2 Technique de pliage

Après mise en œuvre les panneaux sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure I.23).

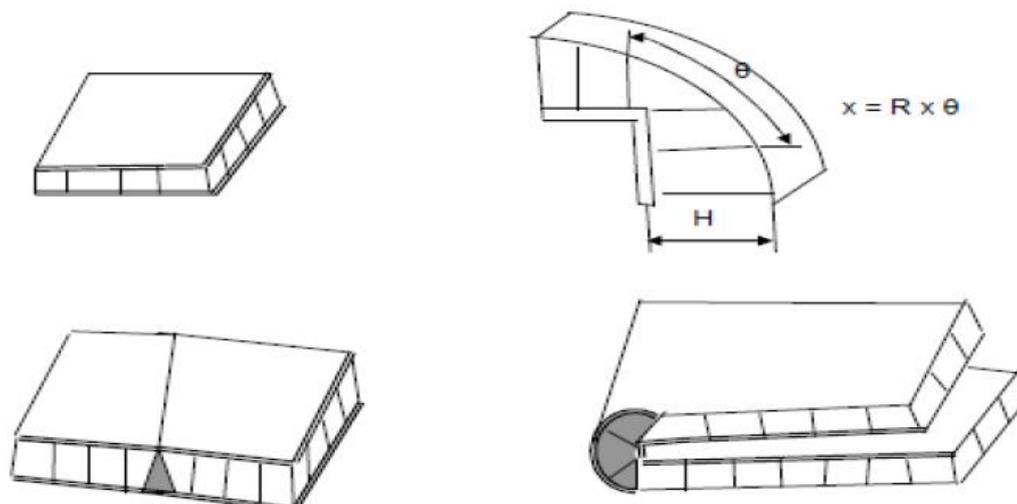


Figure I.23 : Pliage de panneaux sandwichs

On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est en fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.

5.4. Moussage (in situ)

La mise en œuvre de sandwichs par expansion « in situ » de la mousse formant l'âme est un procédé appliqué aux mousses polyuréthanes et phénoliques.

Le principe consiste à injecter le polymère d'âme mélangé à son agent gonflant entre les peaux préformées préalablement positionnées dans un moule ou un caisson de coulée.

Cette technologie permet d'obtenir aisément des pièces présentant un bon aspect de surface avec des géométries complexes avec des variations d'épaisseurs. Elle conduit cependant à la fabrication de structures pouvant présenter des âmes à densités hétérogènes.

5.5. Moulage de panneaux en continu

La fabrication de panneaux sandwichs peut être réalisée en continu, au moyen d'un procédé pouvant être totalement automatisé. Une grande liberté est laissée au concepteur quant au choix des matériaux constitutifs des peaux (feuilles métalliques, pré-imprégnés, tissus secs, polymères...etc.) qui se présentent sous forme de rouleaux. Un film adhésif est inséré, si nécessaire, entre l'âme et les peaux. La mise en forme des panneaux s'effectue généralement par compression entre rouleaux de calandrage. L'ensemble est dans un premier temps, chauffé sous pression afin d'assurer l'adhésion entre l'âme et les peaux, puis refroidi, toujours sous pression, de manière à consolider le sandwich [54].

6) Sollicitations et Modes de dégradations des sandwichs

Les modes d'endommagement et ruine des structures sandwiches ont été étudiés par plusieurs chercheurs dans le domaine [58-62] et [63,64], ont montré que le processus des modes d'endommagement lors du chargement en flexion en trois points, dépend de la charge, du rapport de la longueur entre appuis et de l'épaisseur des peaux et de la densité du cœur [65]. Ils existent plusieurs modes principaux de dégradation :

- Déformation plastique de la peau,
- Flambement de la peau en compression ou "Wrinkling",
- Flambement des cellules du cœur (l'âme),
- Rupture en cisaillement du cœur,

- Indentation du cœur et de la peau au point d'application de la charge centrale.

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- Moment de flexion,
- Moment de torsion,
- Effort normal,
- Effort tranchant.

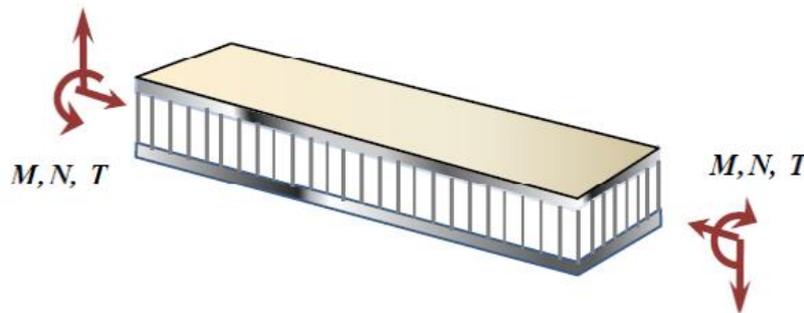


Figure I.24 : Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.

6.1. Flambement généralisé des Peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Figure I.25). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives.

La charge qui cause le flambement du sandwich dépend des paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, et l'épaisseur de l'âme [66], ou encore utiliser pour l'âme un matériau de module de cisaillement plus élevé .

Ce type de déformation est causé par une épaisseur insuffisante de la structure, ou la faible rigidité de l'âme.

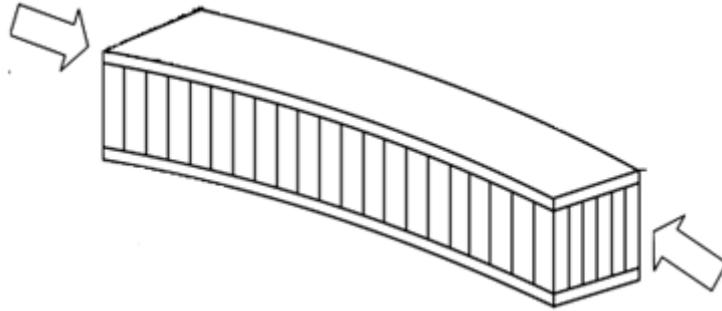


Figure I.25 : Mode de ruine par « flambement généralisé » des peaux du sandwich [56].

6.2. Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour matériaux constituant les peaux (Figure I.26).

Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, ou en augmentant l'épaisseur des peaux, ce qui réduit les contraintes appliquées, ou en augmentant l'épaisseur de l'âme, ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux.

En général, on augmente l'épaisseur de l'âme. Par contre, si l'âme est plus rigide, elle n'affecte pas les contraintes dans la peau. [66]

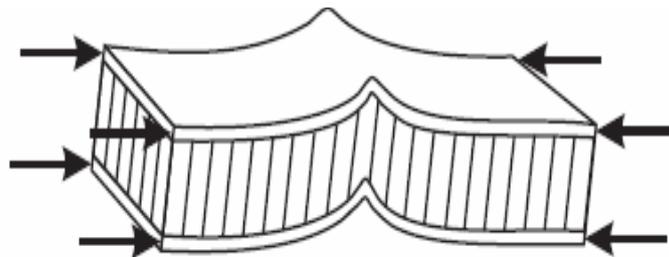


Figure I.26 : Mode de dégradation par rupture des peaux du sandwich [56].

6.3. Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Figure I.27).

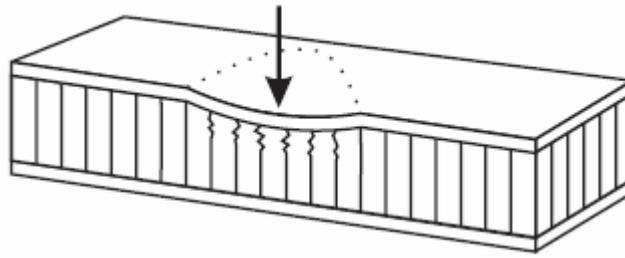


Figure I.27 : Mode de rupture par indentation localisée [56].

6.4. Rupture de l'âme par cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau constituant l'âme, il y a rupture de l'âme (Figure I.28). Pour cela, on peut soit utiliser un matériau qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. [66]

Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur, n'aura aucun effet.

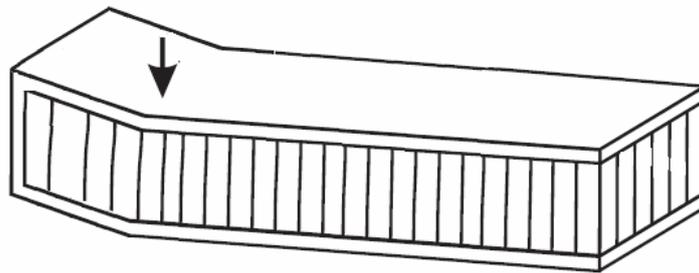


Figure I.28 : Mode de rupture par cisaillement de l'âme

6.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme (Figure I.29). Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé. [66]

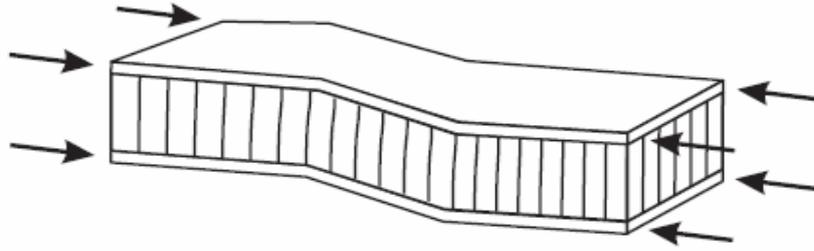


Figure I.29 : Mode de ruine par flambement généralisé de l'âme du sandwich [56].

6.6. Flambement localisé des peaux « wrinkling » ou « dimpling »

Connu également comme le flambage intercellulaire, ce phénomène d'instabilité peut se produire en structures de sandwich avec le nid d'abeilles ou les noyaux ondulés.

Les peaux considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement. Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » se produit (Figure I.30).

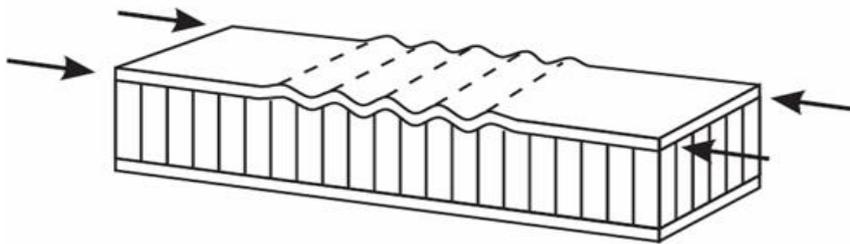


Figure I.30 : Mode rupture par flambement localisé « wrinkling » [56].

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes, qui ne dépendent ni de la géométrie de la structure ni des conditions aux limites. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme [66], et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux un matériau de module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme un matériau présentant des propriétés élastique plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelée « dimpling » (Figure I.31).

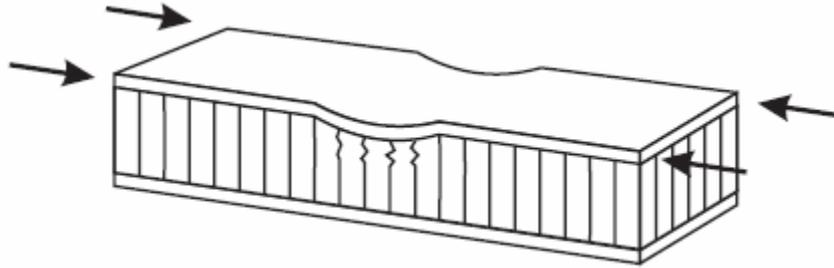


Figure I.31 : Mode rupture par flambement localisé « dimpling » [56].

6.7. Délaminage

L'endommagement du lien entre les faces et le noyau s'appelle le délaminage, il est dû à la surcharge. L'effort de cisaillement dans la ligne de liaison est presque aussi haut qu'au milieu du noyau, et si le joint adhésif a moins de résistance que le noyau il endommage avant le noyau. Ceci devrait être évité en choisissant le meilleur adhésif et les bonnes méthodes de mise en œuvre. Le lien sera également soumis aux efforts élevés exercés à hautes températures sur les faces, par exemple le soleil.

Le joint adhésif endommagera également en raison de la fatigue, de l'impact ou du vieillissement. Le problème principal de l'endommagement de l'adhésif est qu'il est occulté. Il peut commencer à accroître et atteindre des niveaux critiques avant d'être détecté.

6.8. Dégradation de l'adhésif

La dégradation de l'adhésif est répartie en trois types :

- dégradation de l'adhésif entre les peaux et l'âme ;
- dégradation de l'attachement des cellules de l'âme ;
- dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure I.32 illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich. [66]

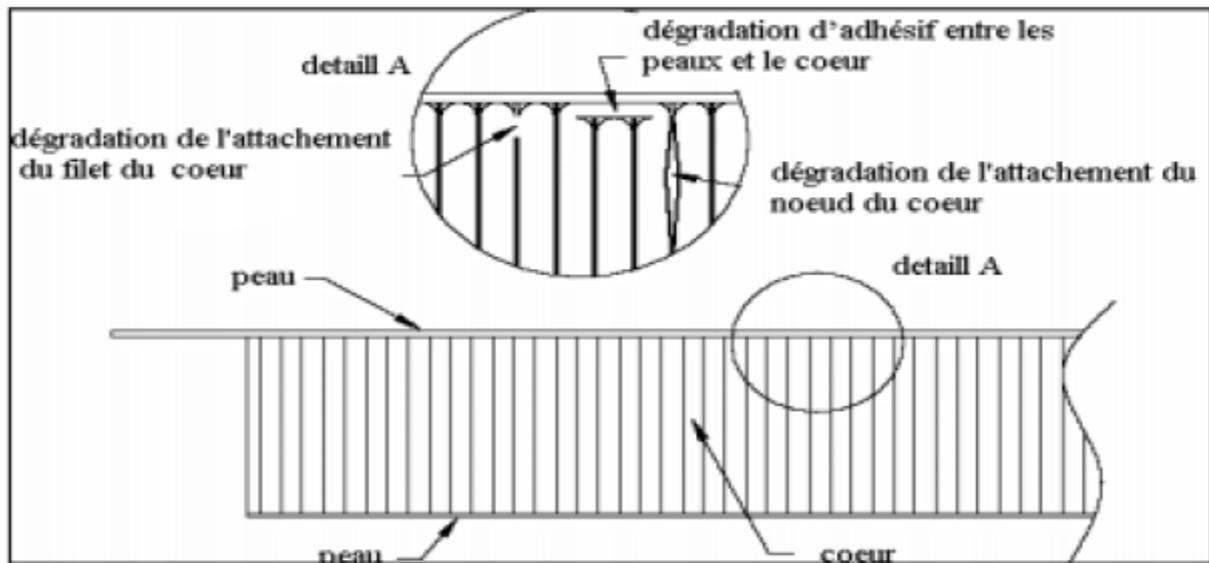


Figure I.32 : Type de dégradation de l'adhésif

7) Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les structures sandwiches : les types, leurs utilisations, les sollicitations et les modes de dégradations des sandwiches. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés «FGM» tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES (Chapitre I)

- [1] Berthelot, 2012, Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 5^{ème} Edition, Lavoisier ,2012
- [2] Maurice Reyne, Technologies des composites, 3^è édition revue et augmentée, éditions Hermes, Paris, 1998.
- [3] Gay D. « Matériaux Composites ». 3^e édition revue et augmentée, édition Hermès Paris 1991
- [4] SAIDI Hayat « Analyse de l'influence du cisaillement transverse et des déformations normales sur le comportement thermomécanique des plaques FGM» Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2015
- [5] Kim, J.K. and Mai, Y.W. (1998), Engineered interfaces in fiber reinforced composites, Pays-Bas: Elsevier Science Ltd.416 p. ISBN 0080426956.
- [6] Steven S., Guy V.A, Bruno V.M., « *Reaction Kinetics Modeling and Thermal Properties of Epoxy-Amines as Measured by Modulated-Temperature DSC. I. Linear Step-Growth Polymerization of DGEBA + Aniline* », Journal of Applied Polymer Science, vol. 91, (2004), pp. 2798-2813.
- [7] Reinhart, T.J. and Clements, L.L. (1993), Introduction to composites. Engineered materials handbook - Volume 1: Composites, Ohio, USA: ASM International, p. 27- 34. ISBN 0871702797 (v.1).
- [8] Ait ATMANE, Ait ATMANE,H. « Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [9] Khelifa. Z (2016) «Analyse et modélisation de l'influence de cisaillement transverse sur le comportement statique et dynamique des poutres FGM » thèse de doctorat, univervité djillali liabes de SIDI BEL ABBES.
- [10] Centre d'animation regional en matériaux avancés C.A.R.M.A : « Glossaire des matériaux composites » actualisation octobre 2004.
- [11] Maurice Reyne R Hermès, «Technologie des Composites», 1995
- [12] Penn L.S., Wang H., « *Epoxy Resin* », Handbook of Composite, Edited by S.T. Peters, Published in 1998 by Chapman & Hall, London, ISBN 0412 540207.
- [13] Narayanan S., Schadler L.S., « *Mechanisms of Kink-band Formation in Graphite/Epoxy Composites: a Micromechanical Experimental Study* », Composite Materials and Technology, vol. 59, (1999), pp. 2201-2213.

- [14] Potter K., « *Beyond the Pin Jointed Net: Maximising the Deformability of Aligned Continuous Fibre Reinforcements* », *Composites Part A Applied Science and Manufacturing*, vol. 33, (2002), pp. 677-683.
- [15] Wang J., Page J.R., Patod R., « *Experimental Investigation of the Draping Properties of Reinforcement Fabrics* », *Composites Science and Technology*, vol. 58, (1998), pp. 229-231.
- [16] CHEVALIER.M, « *Phénoplastesouphénols-formols PF* », *Techniques de l'Ingénieur*, vol. A3435.
- [17] Karkanis P.I., Partridge I.K., Attwood D., « *Modeling the Cure of a Commercial Epoxy Resin for Applications in Resin Transfer Moulding* », *Polymer International*, vol. 41, (1996), pp. 183-191.
- [18] BARDONNET.P, « *Résines époxydes (EP)* », *Techniques de l'Ingénieur*, vol. A3465.
- [19] Vijay I.R., Palmese G.R., « *Influence of TetraHydrofuran on Epoxy–Amine Polymerization* », *Macromolecules*, vol. 38, (2005), pp. 6923-6930.
- [20] Dubois, T. (2005), Boeing 787 : Les belles promesses de la légèreté. *Science & vie*, hors-série N° 231, p. 22-29.
- [21] Jones, R.M. (1975), *Mechanics of composite materials*, Washington D.C., USA: Scripta Book Company, 355 p. ISBN 0070327904.
- [22] Horton, R.E. and Mccarty, J.E. (1993), *Damage tolerance of composites. Engineered materials handbook - Volume 1: Composites*. Ohio, USA: ASM International, p. 259- 267. ISBN 0871702797 (v.1).
- [23] BERTHELOT.J.-M, « *Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures*»,1999.
- [24] J. Reddy, «*Analysis of functionally graded plates,*» *Int J Num Methods Eng*, vol. 47, p. 663–684, 2000.
- [25] G. N. Praveen et J. N. Reddy, «*Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic– plates,*» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, pp. 3357-3376, 1998.
- [26] J. N. Reddy et C. Chin, « *Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates,*» *Journal of Thermal Stresses* , vol. 21, pp. 593-626, 1998.
- [27] C. T. L. K. Y. a. R. J. N. Loy, «*Vibration of functionally graded cylindrical shells,*» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 31, pp. 309-323, 1999.
- [28] Z.-Q. Cheng et R. C. Batra, «*Deflection relationships between the homogeneous plate theory and different functionally graded plate theories,*» *Arch Mech*, vol. 52, p. 143–158, 2000.

- [29] R. El Guerjouma, J.C. Baboux, D. Ducret, N. Godin, P. Guy, S. Huguet, Y. Jayet, T. Monnier, « Non destructive evaluation of damage and failure of fiber reinforced polymer composites using ultrasonic waves and acoustic emission, *Advanced engineering materials* », vol.3, 2001, pp.601-608.
- [30] P-E Bourban, « Endommagement, rupture et corrosion des composites thermodurcissables de mats de fibres de verre », thèse N° 1148 (1993),
- [31] Payan, J. (2004), Etude du comportement de composites stratifiés sous chargement statique et de fatigue, Thèse : Mécanique. Marseille : Université de la Méditerranée Aix- Marseille II, 139 p.
- [32] Friedrich, K. (1989), *Fractographic analysis of polymer composites. Application of fracture mechanics to composite materials*. Ed. par K. FRIEDRICH. Amsterdam, Pays-Bas: Elsevier Science Publishers B.V. p. 425-487. ISBN 0444872868 (vol. 6)
- [33] Smith, B.W. (1993), *Fractography for continuous fiber composites: Engineered materials handbook - Volume 1: Composites*. Ohio, USA: ASM International, p. 786- 793. ISBN 0871702797 (v.1).
- [34] Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 4^{ème} Edition, Lavoisier ,2005
- [35] M. Savoia et J. Reddy, «Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates,» *Int. J; Solids Structures*, vol. 5, n° %132 , pp. 593-608, 1995.
- [36] Cherdoud-Chihani A., Mouzali M., Abadie M.J.M., « *Study of Cross linking AMS/DGEBA System by FTIR* », *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 69, (1998), pp. 1167-1178.
- [37] Puglia D., Valentini L., Kenny J.M., « *Analysis of the Cure Reaction of Carbon Nanotubes/Epoxy Resin Composites Through Thermal Analysis and Raman Spectroscopy* », *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 88, (2003), pp. 452-458.
- [38] Liang G., Zuo R., Lu T., Wang J., « *Modification of Vanyl Ester Resin by a New Thermoset Liquid crystalline Diacrylate* », *Journal of Materials Science*, vol. 40, (2005), pp. 2089-2091.
- [39] Laine M.R., Kim S.G., Rush J., Mollan M., Sun H.J., Lodaya M., « *Ring- opening Polymerization of Epoxy end-terminated Poly (Ethylene Oxide) as a Route to Highly Crosslinked Materials with Exceptional Swelling Behavior (II)* », *Polymer International*, vol. 56, (2007), pp.1006- 1015.
- [40] Yang H., James Lee L., « *Effect of Resin Chemistry on Redox Polymerization of Unsaturated Polyester Resins* », *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 84, (2002), pp. 211-227.
- [41] Wallace M., Attwood D., Day R.J., Heatley F., « *Investigation of the Microwave Curing of the PR500 Epoxy resin System* », *Journal Mater Sciences*, vol. 41, (2006), pp. 5862-5869.
- [42] Zinkert D. « *The Handbook of Sandwich Constrution* ». Emas publishing. 1997.
- [43] Hamelin P., « *Le dimensionnement des structures sandwichs - Méthodologie et études de cas* » Workshop Comett, Nevers, 1994.

[44] Cléon L.M., « Allégement des structures de caisse: faisabilité de structures en matériaux composites », Comptes-rendus du Congrès Mondial de la Recherche Ferroviaire '94 (WCRR94), Vol.2, pp.673-680, 1994.

[45] Erguez R., « Mutation de produit: Conception et modélisation de caisse de TGV à 2 niveaux en matériaux composites », Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 1992.

[46] Zinkert D., “An Introduction to sandwich Construction”, Emas , Solihull,UK, 1995.

[47] Allen H. G., “Analysis And Design of Structural Sandwich Panels”, Pergamon Press, Oxford. 1969.

[48] Clark S. D., Shenoï R. A., Allen H. G. 1999 “Modelling the fatigue behaviour of sandwich beams under monotonic, 2 step and block loading regimes”, Composites Science and Technology, Vol. 59, pp. 471-486.

[49] D. Zenkert, The Handbook of Sandwich Construction, Engineering Materials Advisory Service Ltd., London, 1997.

[50] Vinson JR., 1999, “the Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials”, Technomic Publishing USA.

[51] Rocca SV., Nanni A., 2005, “Mechanical characterization of sandwich structure comprised of glass fiber reinforced” core: Part 1 Third International Conference Composites in Construction Lyon, France, July 11 – 13, 2005.

[52] Alan Baker, Francis Rose, Rhys Jones, Advances in the bonded composite repair of metallic aircraft structures. ISBN: 0-08-042699-9. Vol 1.Elsevier 2002.

[53] Sezgin FE., Tanoglu M., Egilmez OO. Donmez C., 2010, “Mechanical Behavior of Polypropylene-based Honeycomb-Core Composite Sandwich Structures“. Reinforced Plastics and Composites, 10: 1569-157

[54] M. LADFAR, influence des caractéristiques mécaniques sur les comportements mécanique des structures sandwich, Ouargla, 2013.

[55] L.MARCE,F.MANUEL,S.ARLINDO ,sandwich construction , instituto superior tecnico,2004

[56] C. Hexcel, «HexWeb tm honeycomb sandwich design technology.,» 2004. [En ligne]. Available: <http://www.hexcel.composite.com>.

[57] Y.AMINANDA ,contribution à l'analyse et à la modélisation de structures sandwichs impactées ,thèse, l'école nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace,2004.

[58] Triantafillou T. C, Gibson L. J., Materials Science and Engng, 95:37-53, 1987.

- [59] Jin Dai, Hahn H., composite structure, 61: 247-253, 2003.
- [60] Avila A. F., composite structures, 81: 323-330, 2007.
- [61] Yoshi A., Advanced Composite Materials, 2(4): 289-305, 1992.
- [62] Thomesen O. T., Composite structures, 30: 85-101, 1995.
- [63] Petras A., Sutcliffe M.P.F., Indentation failure Analysis of sandwich Beams. Composite Structures 50, 2000, pp 311-318.
- [64] Petras A., Sutcliffe M.P.F., Indentation resistance of sandwich Beams. Composite structures 46 (1999), pp 413-424.
- [65] Triantafillou T.C, Gibson L.J., Materials Science and Engng, 95:37-53, 1987.
- [66] Jamal Eddine ARBAOUI, Etude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwichs multicouches, thèse de doctorat, Université de Metz, France, 2009.

Chapitre II
Généralités sur les matériaux
à gradient de propriétés
FGM

Chapitre II : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés FGM

1) Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes ou une grande contrainte interlaminaire conduisant à des délaminages, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ") c'était la mise en œuvre d'un matériau dont une face exposée à très haute température faite par une céramique, et dont la face intérieure serait à la fois une bonne conductrice de chaleur et qui a une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, réalisé par un métal.

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est né le dans les années 80 du vingtième siècle par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. Au début les FGM ont été conçus en tant que matériaux de barrière dans les applications et les réacteurs, c'est par suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, automobile, biomédical, l'industrie des semi-conducteurs et toutes utilisations dans un environnement à haute température.

Ces matériaux (FGM) sont de matériaux composites produits en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques[1] ainsi d'améliorer la rigidité, la tenue à la fatigue, la résistance à la corrosion ou la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant même d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales [2, 3] ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [4] .

2) Définition et concept d'un matériau à gradient évalué (FGM)

2.1. Définition des matériaux FGM

Un matériau à gradient évalué c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructures qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables.

Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGMs sont généralement fait à partir d'un mélange de métal et de céramique (Figure II.1) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté doivent être élevés.

En revanche, la céramique riche qui a une faible conductivité et peut résister aux températures plus élevées, est placée dans les régions à grand gradient de température.

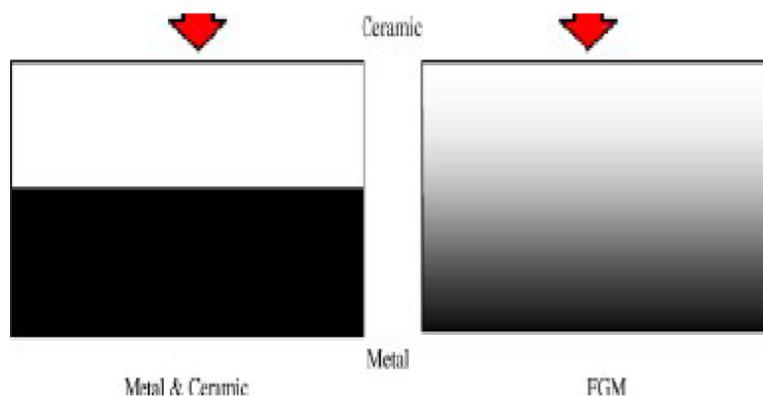
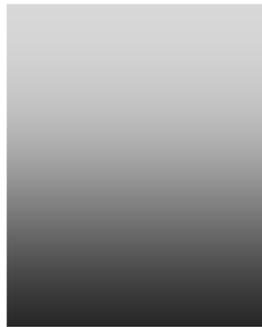


Figure II.1 : Type d'un matériau FGM en céramique et métal.

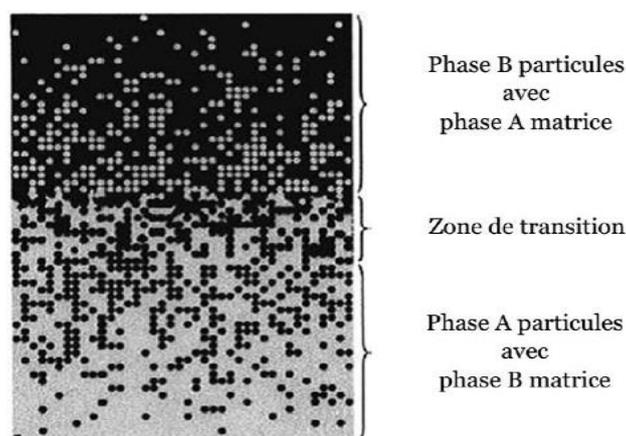
2.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (Figure II.2) ou discrète (Figure II.3) à travers l'épaisseur [5]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

**Figure II.2 :** Variation continue des propriétés**Figure II.3 :** Variation discrète des propriétés

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

**Figure II.4 :** Variation continue de la microstructure (schématisée)

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu [6, 7].

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [8]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau II.1.

Tableau II.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

| | | |
|--|-----------------|--|
| La face à haute température | Céramique | -Bonne résistance thermique -Bonne résistance a l'oxydation -Faible conductivité thermique |
| Continuité du matériau d'un point à l'autre « couche intermédiaires» | Céramique-métal | -Elimination des problèmes de l'interface -Relaxer les contraintes thermiques |
| La face à basse température | Métal | -Bonne résistance mécanique -Conductivité thermique élevée -Très bonne ténacité |

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la Figure II.5. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [9].

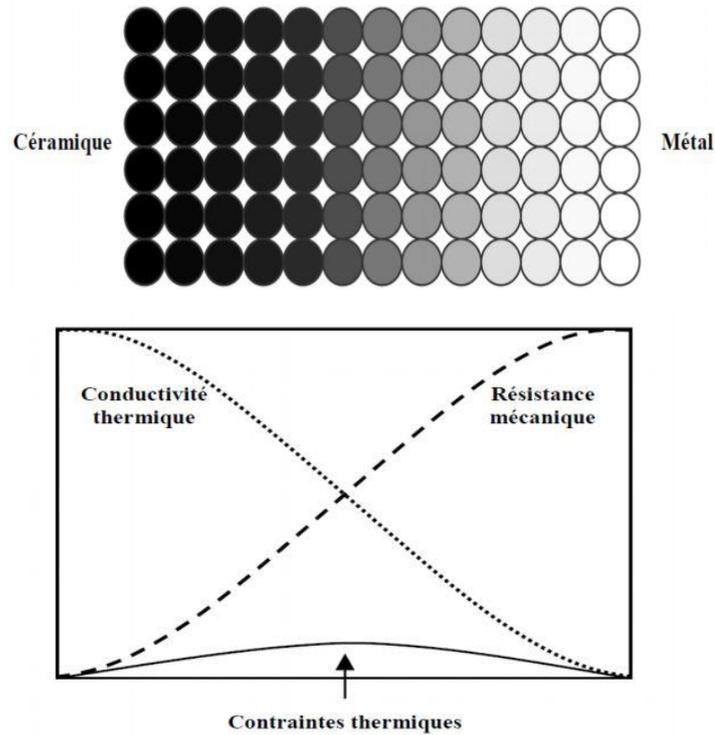


Figure II.5 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La **Figure II.6** montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutal de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

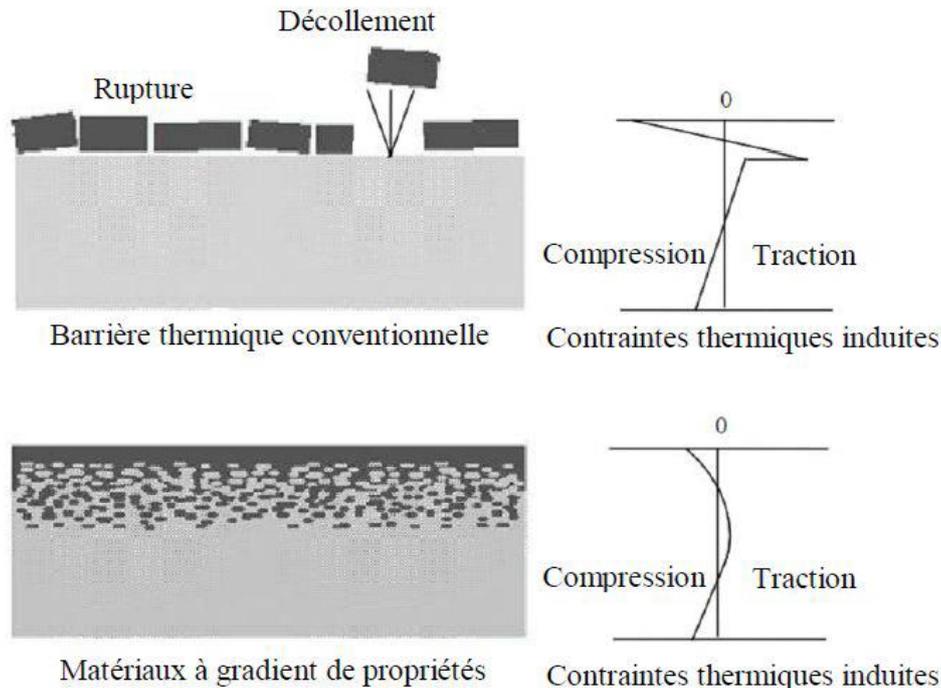


Figure II.6 : Protection thermique.

Deux systèmes de matériaux de recherche importants dans la technologie de fabrication des FGMs sont : alumine Al_2O_3 [10] et zircon ZrO_2 [11], des couches de protection en céramique extérieure sur un substrat de pose Ni-superaliage 'NiCrAlY'. Par conséquent, les revêtements ont été déposés par diverses techniques métallurgiques. Les FGMs peuvent également trouver des applications dans les techniques de communication et d'information.

Comme une dernière observation concernant les FGMs, on peut noter que ce concept de matériaux à gradient fonctionnel a démontré que la composition graduelle micro/macro structurelle peut non seulement rejeter les effets indésirables tels que la concentration de contrainte, mais peut aussi générer une fonction unique sans pareille [12].

3) Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (Figure II.7) [13]. Il en résulte un

gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [9].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatiales hypersoniques) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

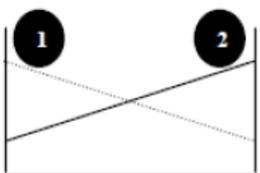
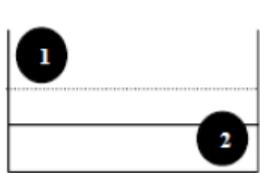
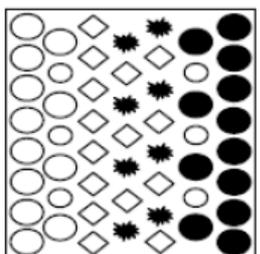
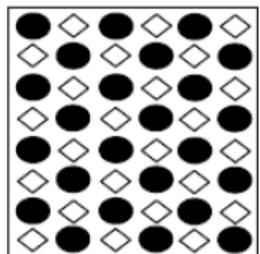
| | | | |
|-------------------|--|--|---|
| Propriétés | <p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p> |  |  |
| Structure | <p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇</p> |  |  |
| Matériaux | exemple | FGM | NON-FGM |

Figure II.7 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites [13]

[14] a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux les plus conventionnels (Figure II.8).

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGMs attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du

métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

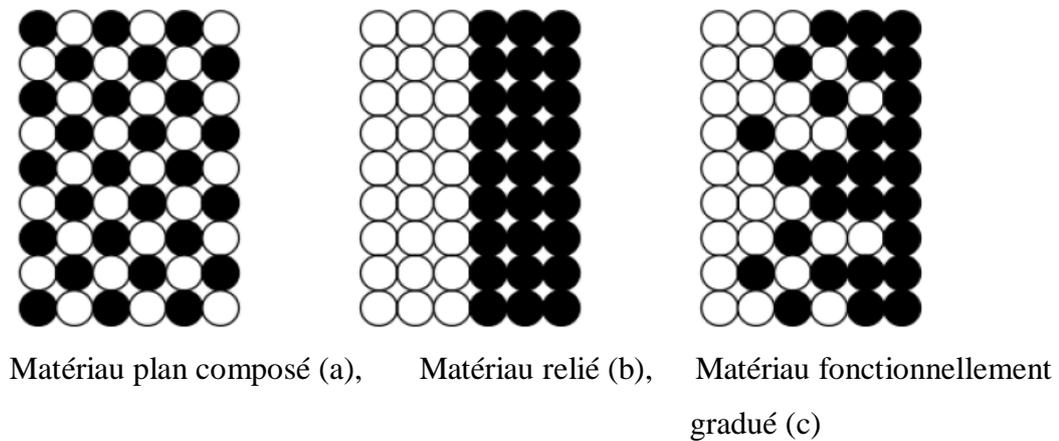


Figure II.8 : La distribution composante des matériaux [14].

4) L'historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des "Matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai sur l'île de Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, les Etats-Unis, la Chine et la Russie. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [15]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [13]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz et couches minces optiques [16].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagés dans ce projet [13].

Trois caractéristiques étaient prises en compte pour la conception d'un matériau pour résister à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [17].

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapor deposition C.V.D)
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
- Le système TiB_2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Le système $(Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO_2-Y_2O_3)$ par projection plasma à double torches [18].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques et technologie de capteur optique [18].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique et thermonucléaire [19]. A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel à gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et de

technologie. Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon. Dans le programme allemand, 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM pendant le 21ème siècle. Le programme Japonais a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM. Cependant, la continuité et la communication entre les chercheurs et la recherche en groupe s'avère d'une grande importance pour développer l'architecture des FGM. Une nouvelle technologie des matériaux gradués non homogènes est née comme conséquence du développement des applications pratiques et des recherches pendant le 21ème siècle.

5) Les Lois de mélange des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clés à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt. [20].

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (\text{II-1})$$

Où P_i et V_{Fi} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants qui donne l'unité 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (\text{II-2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (\text{II-3})$$

$$V_m + V_c = 1 \quad (\text{II-4})$$

Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume suivant l'application recherchée et la méthode de synthèse utilisée. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

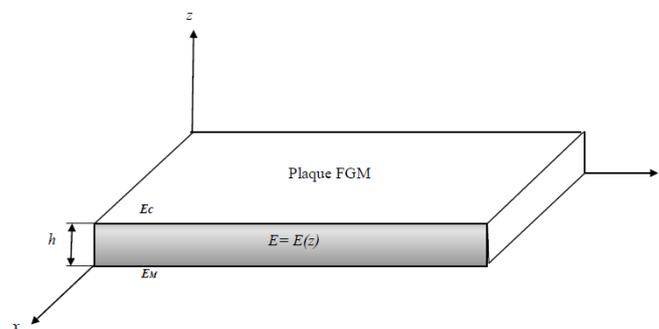


Figure II.9 : Géométrie d'une plaque en FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur (**Figure II.9**). Les propriétés du matériau dont le module de Young E et le coefficient de Poisson ν changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z), soit $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$.

Ces lois de mélange sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure.

[21, 22] ont indiqué que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (PFGM), de la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

De ce fait plusieurs modèles permettant d'évaluer les propriétés globales ont été développés on peut citer le modèle basé sur le schéma de Mori et Tanaka[23] ou la méthode du schéma auto-cohérent de Hill[24].

5.1. Loi de mélange en puissance P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^k \quad (\text{II-5})$$

5)

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges ; [25] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{II-6})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure «métal» ($z = -h/2$) et de la surface supérieure «céramique» ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la **Figure II.10**. On remarque d'après la **Figure II.10** que le module de Young décroît dans la direction de l'extrémité inférieure de la plaque ($p > 1$), et s'accroît en allant vers l'extrémité supérieure ($p < 1$) et pour $p = 1$, la variation du module de Young devient linéaire.

On constate aussi que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans la plaque, et vis versa : la plaque devient de moins résistance si son module de Young est faible, et ceci est dû à la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal.

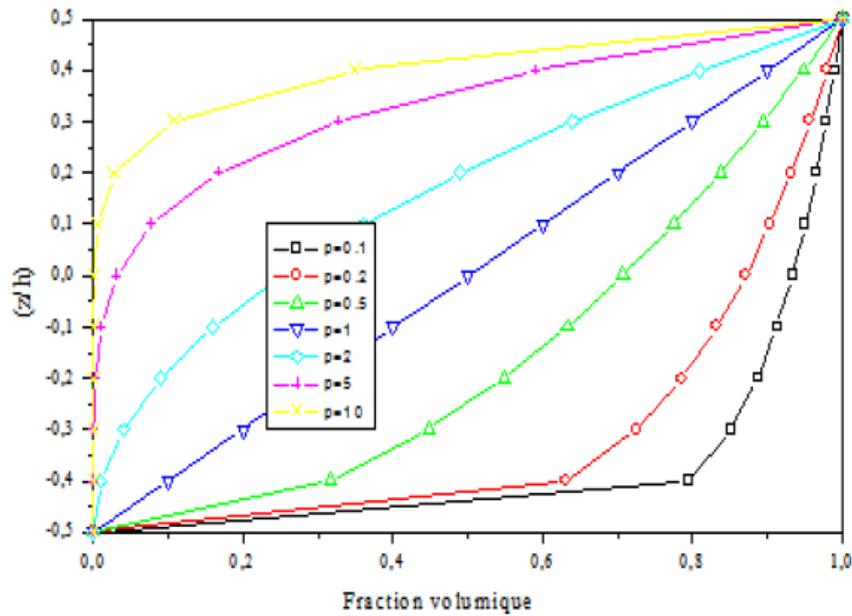


Figure II.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [25, 26].

5.2. Loi de mélange sigmoïde S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [25]. Par conséquent, [27] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k, \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{II-7})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^k, \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II-8})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2, \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{II-9})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2, \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II-10})$$

La Figure II.11 montre que la variation de la fraction volumique représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (plaque S-FGM)

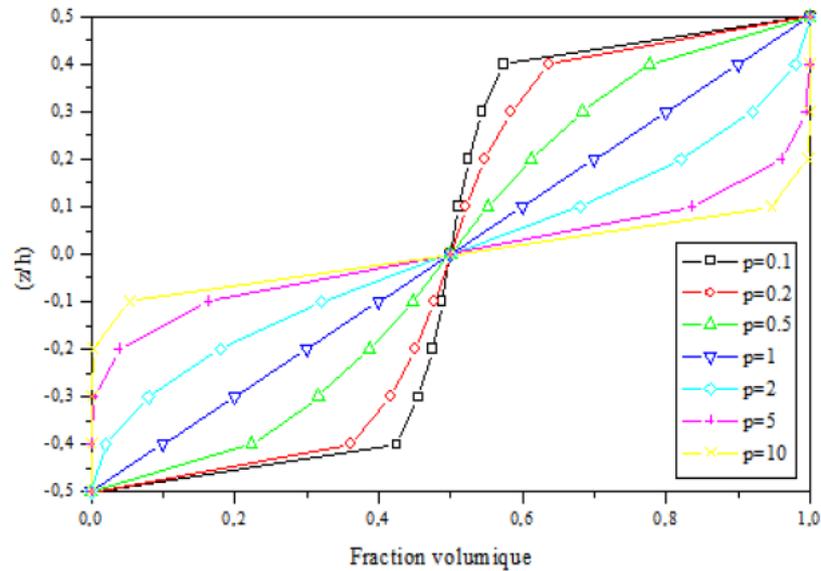


Figure II.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM. [26, 27].

5.3. Loi de mélange exponentielle E-FGM

Cette méthode est utilisée généralement pour les plaques épaisses ou avec forte épaisseur [28].

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGMs est très répandue dans les études de mécanique de la rupture [3]

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [29]:

$$E(z) = E_2 e^{\beta \left(z + \frac{h}{2} \right)} \quad (\text{II-11})$$

$$\text{Avec } \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (\text{II-12})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure II.12.

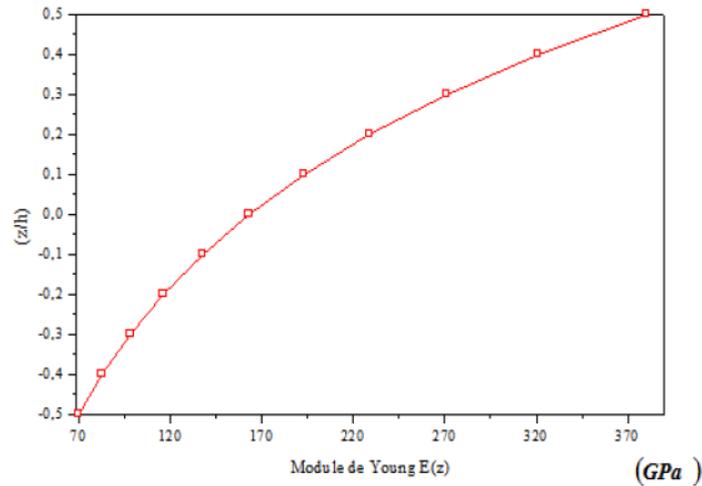


Figure II.12 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM [26, 29].

D'après la Figure II.12, on remarque que l'augmentation du module de Young est proportionnelle à l'augmentation de la quantité de la céramique par rapport à celle du métal (Al) tout en allant vers l'extrémité supérieure de la plaque.

5.4. Modèle de Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur le schéma de Mori et Tanaka[23] qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues Figure II.13. Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulière dénotée par l'indice 2.

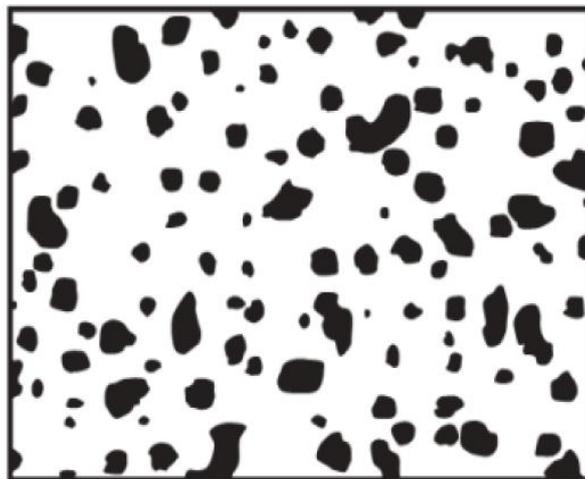


Figure II.13 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière [23]

Si on note par \mathbf{K} le module de compressibilité, par \mathbf{G} le module de cisaillement, par \mathbf{V} la fraction volumique et par α le coefficient de dilatation thermique. Les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka [23], pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par [30, 20]:

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1) / \left(K_1 + \frac{4}{3}G_1\right)} \quad (\text{II-13})$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1) / (G_1 + f_1)} \quad (\text{II-14})$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad (\text{II-15})$$

5.5. Modèle auto-cohérent de Hill

Cette méthode suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite. Cette méthode ne permet pas de distinguer entre la matrice et les phases de renforcement et le même module d'ensemble sont prévus dans un autre composite, dans lequel les rôles respectifs des deux phases sont permutés. Cela le rend particulièrement approprié pour la détermination des modules effectifs dans les régions qui ont du squelette en microstructure interconnecté comme représenté sur la (Figure II.14).

Les modules élastiques locale K et μ par la méthode d'auto-cohérent sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{(K - K_2)} + \frac{V_2}{(K - K_1)} \quad (\text{II-16})$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{(G - G_2)} + \frac{V_2}{(G - G_1)} \quad (\text{II-17})$$

Ou : g et η sont définis par: $g = \frac{K}{K_1 + \frac{4}{3}G}$ (II-18)

$$\eta = \frac{1}{5}(3 - g) \quad (\text{II-19})$$

A partir des équations (II.18) et (II.19), l'expression du module de compressibilité est obtenue par :

$$K = \frac{1}{V_1 / \left(K_1 + \frac{4}{3}G\right) + V_2 / \left(K_2 + \frac{4}{3}G\right)} - \frac{4}{3}G \quad (\text{II-20})$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{K_1 + \frac{4}{3}G} + \frac{V_2 K_2}{K_2 + \frac{4}{3}G} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_1}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_2}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad (\text{II-21})$$

Pour les deux modèles précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par :

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (\text{II-22})$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (\text{II-23})$$

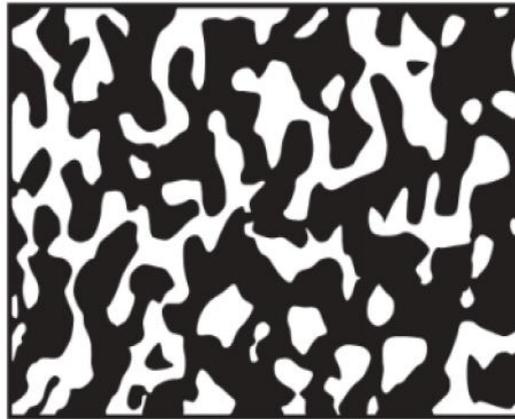


Figure II.14 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique [24]

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

Tableau II.2 : Propriétés mécaniques des céramiques et métaux utilisés dans les FGM. [31]

| | Matériaux | Module d'élasticité $E(GPa)$ | Coefficient de dilatation thermique $\alpha(10^{-6}/K)$ | Densité $(10^3 Kg/m^3)$ |
|-----------|----------------------|---------------------------------|---|----------------------------|
| Céramique | Zircone | 100 - 250 | 1.7 - 2.7 | 5 - 6.15 |
| | Alumine | 215 - 413 | 4.5 - 10.9 | 3.5 - 3.98 |
| | Silicium | 140 - 180 | 7-8 | 2.28 - 2.38 |
| | Carbure de tungstène | 600 - 686 | 28 - 88 | 15.25 - 15.88 |
| | Carbure de bore | 362 - 472 | 17 - 42 | 2.35 - 2.55 |
| Métal | Fers | 80 - 150 | 11 - 13 | 6.9 - 7.35 |
| | Alliages d'aluminium | 68 - 82 | 21 - 24 | 2.5 - 2.9 |
| | Alliages de zinc | 68 - 95 | 23 - 28 | 4.95 - 7 |
| | Alliages de nickel | 150 - 245 | 9 - 16 | 7.75 - 8.65 |
| | Aciers | 189 - 203 | 16 - 18 | 7.85 - 8.1 |

6) Procédés d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants de la recherche sur les FGM, peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Une grande partie des travaux a été consacrée au développement des méthodes de production et traitement des FGM. La plupart des procédés de production de FGM sont basés sur une variante de procédés de traitement classiques déjà bien établis. Les procédés qui sont capables de recevoir une étape de gradation comprennent la métallurgie des poudres [32] et les procédés de compaction sèche des poudres. En général, les procédés d'élaboration les plus utilisés incluent le coulage centrifuge [33], le coulage par barbotine, le coulage en bande [34], le frittage et la projection plasma. Le choix de la méthode de production la plus appropriée dépend principalement de la combinaison de matière, du type de la loi de mélange requise et de la géométrie de la composante souhaitée [2, 35, 36].

6.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est devenu une technique largement utilisée pour la fabrication de feuilles métalliques ou céramiques. Le coulage en bande est une technique de mise en forme

par voie liquide qui consiste à laminé une suspension sur un support fixe à l'aide d'un sabot de coulage.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support Figure II.15, ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur.

La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande.

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermisssement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

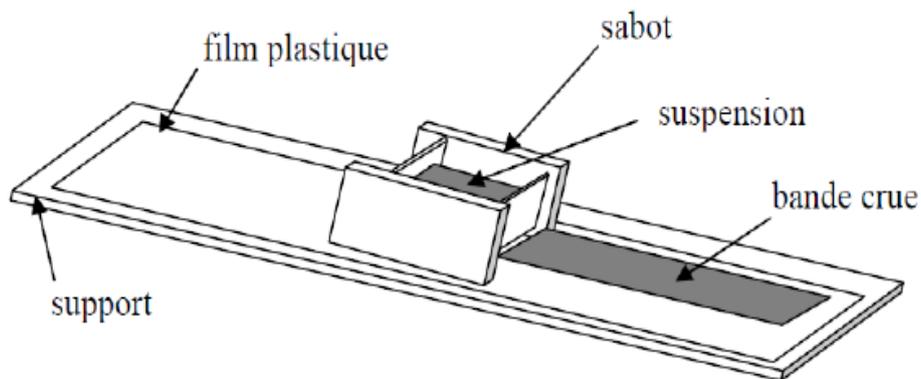


Figure II.15 : Principe de la méthode coulage en bande [37].

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [38]; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [9].

6.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou "prise" ;
- Consolidation du tesson ou "raffermisssement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet de pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) [39] ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

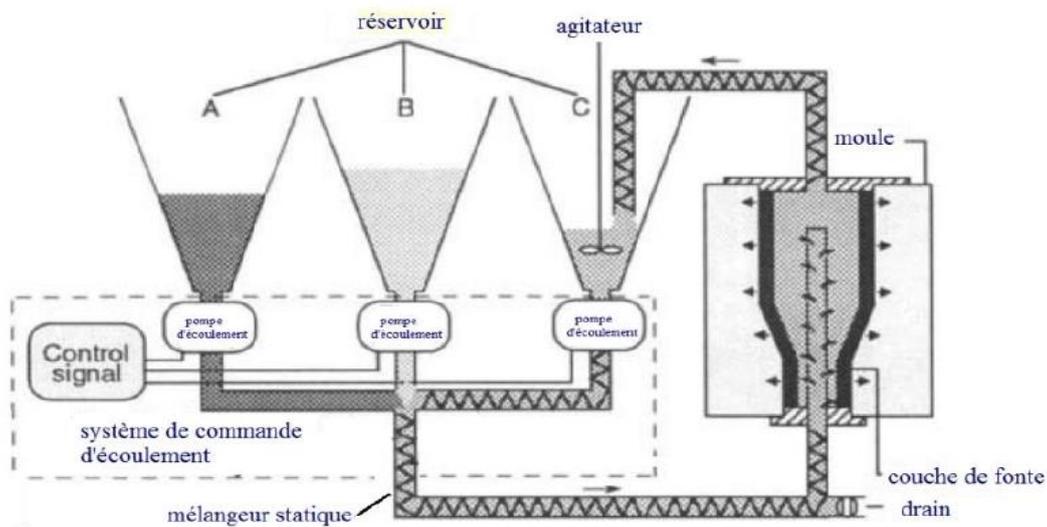


Figure II.16 : Principe du coulage par barbotine [39].

6.3. La métallurgie des poudres (Powder metallurgy) PM

La métallurgie en poudre est une technique pour fabriquer les matériaux fonctionnellement gradués, par trois étapes de base notamment : la pesée et le mélange de la poudre (a,b), le jalonnement de la poudre pré-mélangée (c) et finalement le frittage(d) ; [40]

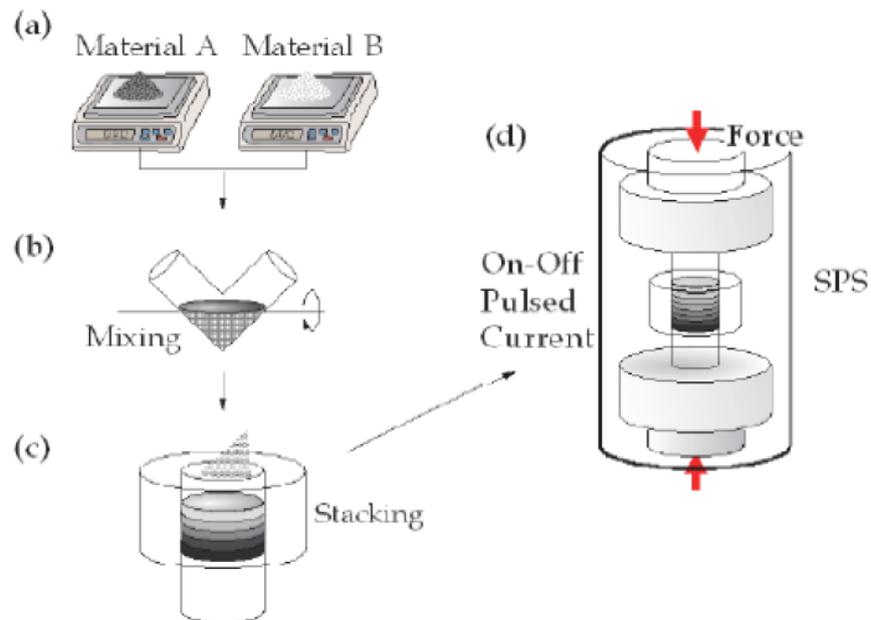


Figure II.17 : Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres [41].

La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes [42, 43, 44].

Cette technique a beaucoup d'avantages, on cite brièvement ci-dessous quelques uns d'entre eux :

- Le procédé permet la réalisation de pièces à partir de métaux dont les méthodes classiques de fusion sont impossibles à adapter.
- Une structure métallurgique fine et homogène
- Ce procédé de mise en forme des matériaux limite le nombre d'étape pour la production de produits finis usinés. La diminution des étapes a un impact direct sur les coûts de production.
- Obtention d'un produit de grande qualité à des prix compétitifs.

Des études en biomécanique ont constaté que les FGM utilisées dans les prothèses articulaires avec des épaisseurs de couche inférieure à 1,0 mm présentaient une faible résistance à l'usure [45]. Néanmoins des FGM ayant une épaisseur de couche supérieure à 2 mm produits par projection plasma et par frittage et infiltration ont des propriétés mécaniques et tribologiques meilleures et conviennent mieux pour l'utilisation dans des prothèses

articulaires car ils présentaient un faible niveau de porosité et par conséquent des échantillons entièrement denses [46].

6.4. Compaction sèche des poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée, Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [47].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

6.5. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique) atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m/s, se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [48].

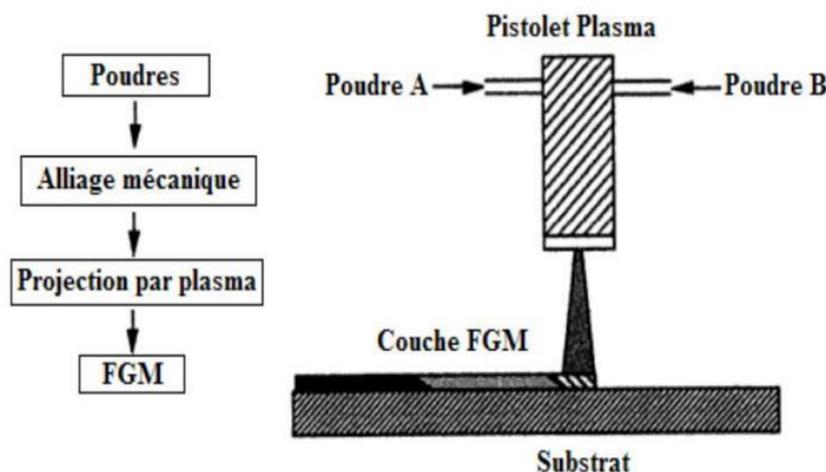


Figure II.18 : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma [48].

6.6. Frittage et infiltration (Sintering)

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [49]. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapports aux autres.

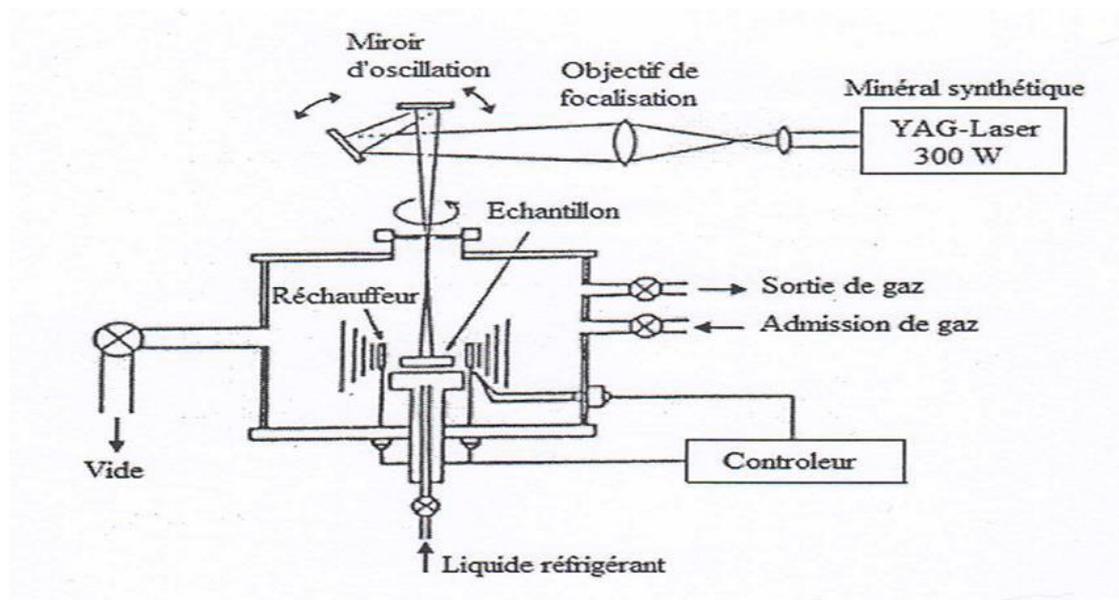


Figure II.19 : Disposition du procédé frittage laser différentiel ; [48]

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. [48] a utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo . La Figure II.19 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé.

6.7. Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM [50], ce qu'on appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Dès lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux à gradients évalués peuvent être obtenus tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique-métal, WC/Co . Une installation générale de ce principe est illustrée sur la **Figure II.20**.

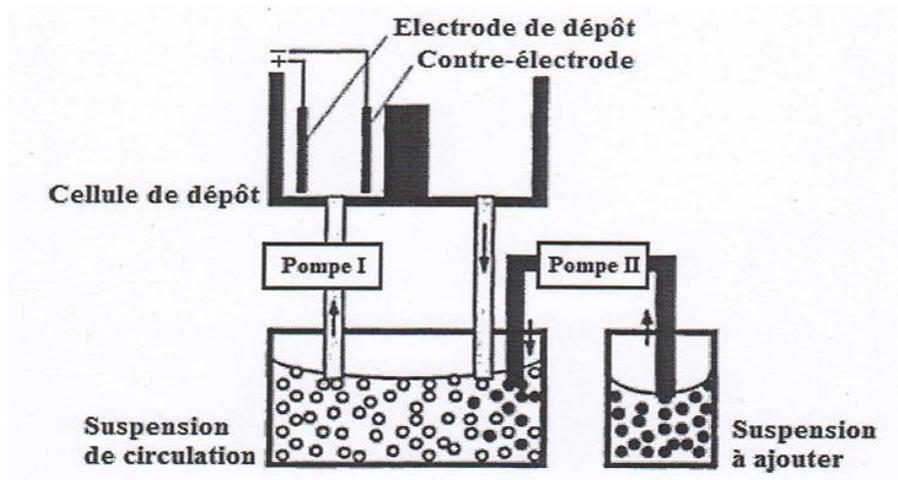


Figure II.20 : Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux

6.8. Le coulage centrifuge (Centrifugal casting)

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des machines de coulée centrifuge sont : les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal, et le type vertical, qui tourne autour d'un axe vertical. Les machines de coulée centrifuge horizontale sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des

douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La coulée centrifuge est un procédé dans lequel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant (habituellement de 700 à 1300 tr/min). La rotation de la matrice crée une force centrifuge qui pousse le métal vers la paroi du moule. La distribution graduelle dans les FGM fabriquées par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tels que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification [51]. La méthode centrifuge de poudres mixtes montrée dans la Figure II.21 est une autre méthode introduite en tant que solution à la limitation de la méthode de coulée centrifuge dans la fabrication de FGM contenant des particules de taille nano [52].

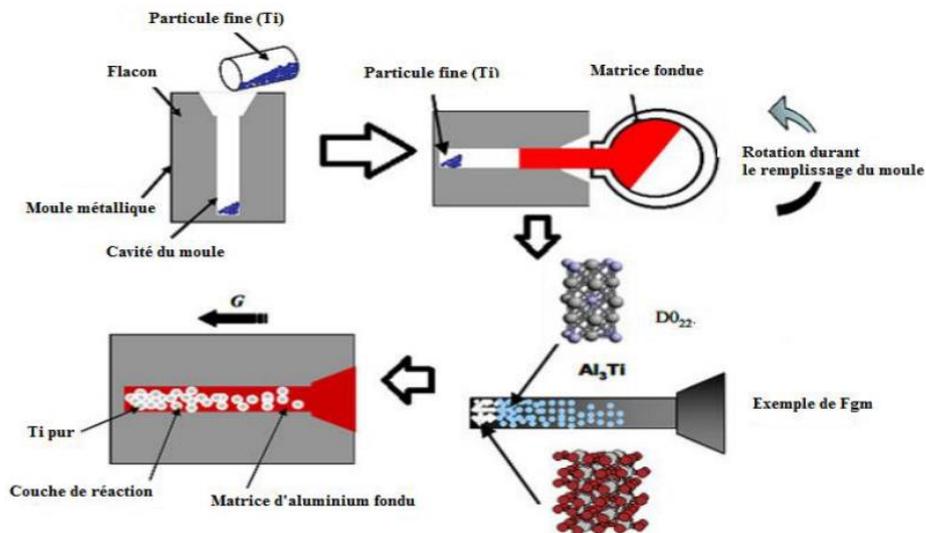


Figure II.21 : Coulée centrifuge des poudres mixtes [52].

6.9. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD est que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, qui n'exigent pas la fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermique par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc.

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM. Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique; dans le cas de la zircone ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique.

6.10. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la Figure II.22, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma.

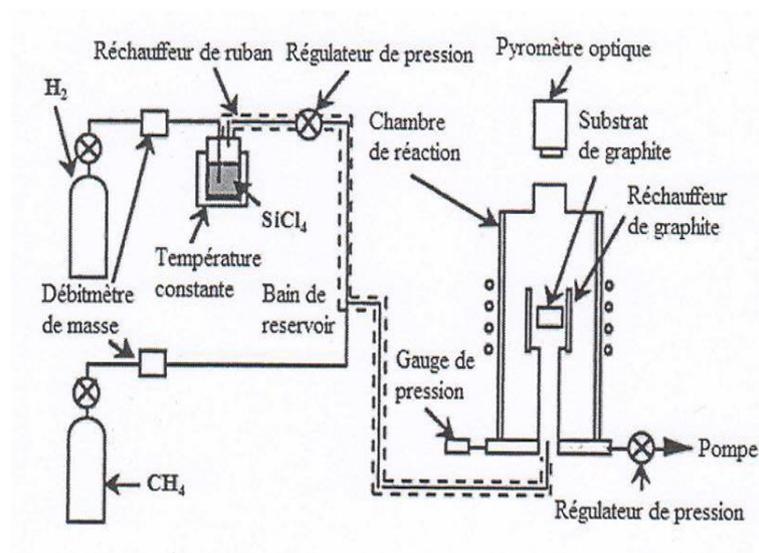


Figure II.22 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

7) Avantages et inconvénients des FGMs

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients :

7.1. Avantages des FGMs

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement; [53] et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, ...etc.
- L'absence d'une forte interface entre deux matériaux différents, par exemple les métaux et les matériaux céramiques, alors la transition graduelle dans la composition à travers une interface peut être utilisée pour distribuer les contraintes thermiques ce qui permet la limitation des contraintes critique et supprimant ainsi le début de la déformation plastique, des dommages ou fissures.

- Singularités des contraintes à une intersection entre les bords libres et les interfaces peuvent être évités en utilisant la transition graduelle, qui peuvent par ailleurs initier une fissure interfaciale, conduisant à une insuffisance de délaminage.
- La force motrice pour la croissance locale de la fissure à travers une interface peut être manipulée en modifiant les gradients de propriétés élastiques et plastiques à travers l'interface.

7.2. Inconvénients des FGMs

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, ...etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants, ces structures ont des applications en générale limitées. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [53].

8) Domaines d'applications des matériaux à gradient évalué

Les FGMs (Functionally Graded Materials) sont des matériaux composites sophistiqués dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, générant ainsi des changements en conséquence au niveau des propriétés des matériaux.

Le concept du FGM est applicable à de nombreux domaines. Dans les applications d'ingénierie à des outils de coupe, pièces de machines, et les composants du moteur, des propriétés incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et résistance à la corrosion [54], ainsi que la ténacité et l'usinage sont incorporés dans une seule pièce. Le

potentiel d'exploitation commerciale touche un vaste éventail d'applications industrielles telles que l'aéronautique, les usines chimiques et les réacteurs nucléaires.

Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que :

8.1. Dans l'aérospatiale et l'automobile

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec moins d'éléments de connexion est une solution. En outre la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM.

[54] a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les aubes de distributeur de turbine. Le nitrure de silicium supporte des températures élevées, mais a un coût de traitement élevé et faible résistance aux chocs. Des travaux ultérieurs présentés par [55] appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales [56, 44].

Les cylindres de moteur de voiture sont faits de FGM. Leur phase interne est en céramique et la phase externe est métallique ;

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être utilisés dans des conditions de haute température avec une de ses constituants à faible conductivité thermique. Ils peuvent résister à des gradients thermiques élevés, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés beaucoup dans les structures aérospatiales comme les composants de véhicules spatiaux (moteur de fusée, corps des avions spatiaux ainsi pour les composants de moteur des fusées [54]).

8.2. La médecine

Les matériaux FGM ont trouvés une large gamme d'application dans les chirurgies dentaires et orthopédiques car ces tissus vivants, tels que les os et les dents, sont caractérisés comme des matériaux fonctionnellement gradués de la nature [57], et pour les remplacer un matériau compatible est nécessaire d'où l'intérêt d'utilisation des matériaux

fonctionnellement gradués. La technologie FGM est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents. La technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer aussi.

[58] ont présenté un procédé pour la fabrication d'implants dentaires en titane et hydroxyapatite en céramique. La base de l'implant a été faite de l'hydroxyapatite à insérer dans la mâchoire. L'implant était en titane gradué vers le haut, afin de recevoir la prothèse dentaire.

8.3. La défense

L'une des caractéristiques les plus importantes d'un matériau fonctionnellement gradué est sa capacité à empêcher la propagation des fissures. Cette propriété le rend utile dans l'application militaire, en tant que matériaux résistants à la pénétration d'armures des équipements et les gilets pare-balles [59]

Une des compositions disponible de matériaux à gradient de propriétés est la combinaison entre le titane et le titane diboride, combinant la céramique capable à absorber l'énergie avec la ténacité du métal- idéal pour les solutions de blindage du véhicule [56, 44].

8.4. L'électronique

Les FGM trouvent également leurs utilités dans l'électronique telles que les fibres optiques utilisées pour la transmission à haute vitesse d'onde. Par conséquent, il sera capable de propager un système de communication optique jusqu'au niveau des ménages et des cartes de circuits imprimés.

8.5. L'énergie

Les FGM sont employés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique, ils sont utilisés en tant qu'enduit protecteur sur des lames de turbine dans les turbomoteurs [60], le moteur à turbine à gaz [61]; et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires et pastilles de combustible. Les parois internes des réacteurs nucléaires sont faites avec des FGM (céramique / métal).

8.6. Outils de coupe

Les FGM sont utilisés dans les outils de coupe car ils améliorent la résistance thermique. La fissure se produit près de l'interface pointe-tige dans le type conventionnel mais avec les outils de coupe en FGM elle se produit par la relaxation dans la concentration de contrainte [62].

8.7. Articles de sports

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisés pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradués avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui captent la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces de came [56, 44].

9) Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et ainsi élimine les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés. La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et la concentration des contraintes.

Le changement continu de leurs propriétés a pour but d'améliorer les performances structurelles, ils sont développés pour adapter l'architecture du matériau à l'échelle microscopique afin d'optimiser certaines propriétés fonctionnelles globales des structures et d'améliorer des propriétés spécifiques dans la direction préférée, les rendant ainsi meilleurs que les matériaux homogènes constitués de composants similaires.

Dans ce chapitre, nous avons défini dans un premier temps les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs principales méthodes d'élaboration, les avantages et leurs inconvénients ainsi leurs domaines d'application et à la fin nous avons terminés par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient

de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances (P-FGM), exponentielles (E-FGM) ou même sigmoïdes (S-FGM).

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES (Chapitre II)

- [1] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.
- [2] Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), «*Functionally Graded Materials Design*». Processing and Applications.
- [3] Suresh S, Mortensen A. *Fundamentals of functionally graded materials*. 1st ed. London: IOM Communications; 1998.
- [4] Öchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S. (2008), «*Cellular and Porous Materials*», WILEY-VCH, 398-417.
- [5] Hirai, T. (1996), «*Functional gradient materials*», *Processing of ceramics*»Part 2, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; p. 293–341.
- [6] Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995), «*Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method*», *Composites Engineering*, (1995), 879–889.
- [7] Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), «*Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials*», *Composites Part B, Engineering*, 29–35.
- [8] K. Kokini., Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.
- [9] P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂Laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192,1986.
- [10] Finot M, Suresh S. Small and large deformation of thick and thinfilm multilayers: effect of layer geometry, plasticity and compositional gradients. *J MechPhys Solids* 1996; 44:683–721.
- [11] Trung-Kien Nguyen, quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectives des plaques hétérogènes, thèse de doctorat université paris-est ,2008 page 30-31.
- [12] Krell T, Schulz U, Peters M, Kaysser WA. Graded EB-PVD alumina–zirconia thermal barrier coatings-an experimental approach. *Mater Sci Forum* 1999; 311: 396–401.
- [13] Koizumi, M. (1996),—FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.
- [14] Yoshihisa Uchida (2004), «*Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications*», 39- 51-B, Vol. 39-B.
- [15] M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333- 347, 1992.

- [16] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [17] Abdizadeh, H., (1997), *Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'Alumine*, Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon IFrance, 212p.
- [18] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- [19] Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003.
- [20] Shen, H.-S. (2009), «*Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells*», New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [21] Jin, Z. H, Batra, R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339.
- [22] H. Ziou, H. Guenfoud, M. Guenfoud (2016), Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. *International Journal of Structural Engineering*; 7(3), 239-261.
- [23] Mori, T. et Tanaka, K., "Average stress in matrix and average elastic energy of material with misfitting inclusions", *Acta Metall*, 571–574, 1973.
- [24] Hill, R., "A self-consistent mechanics of composite materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 213-222, 1995.
- [25] Bao.G, Wang. L. (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- [26] Houari MSA, *Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances*. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [27] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. «*Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings*». *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243,(2003).
- [28] A.H. Akbarzadeh, A. Abedini, Z.T. Chen, Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates, *Compos. Struct.* 119 (2015) 598–609
- [29] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983
- [30] Vel, S.S. et Batra, R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 703-730, 2004.
- [31] K. Swaminathan, D.M. Sangeetha, "Thermal Analysis of FGM Plates – A Critical Review of Various Modelling Techniques and Solution Methods" *Composite Structures*, 2016.

- [32] X. Jin, L. Wu, L. Guo, H. Yu, and Y. Sun, "Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO₂/NiCr functionally graded materials," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76(12), pp.1800-1810, 2009.
- [33] Torii S., Tanaka S., Yano, T., Watanabe, Y., *J Trans. Phenomena*, 6 189, 2004.
- [34] Yeo J, Jung Y., Choi S., Zirconia-stainless steel functionally graded material by tape casting *J Europ. Ceram. Soci.* 18 1281, 1998.
- [35] Kiebeck, B. Neubrand, A. Riedel, H. (2003), "Processing techniques for functionally graded materials". *Mat. Sci. Eng. A* 3 62, 81-105.
- [36] Jamaludin, S N S. Faizal, Mustapha. Dewan, Muhammad Nuruzzaman and Shah Nor Basri. (2013), "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828- 840, 4 June.
- [37] Na, K.-S. and Kim, J.-H. (2004), "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials", *Compos., Part B, Eng.*, 35(5), 429-437.
- [38] R. E. Mistler, High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, 1973.
- [39] J.S. Moya, A.J. Sanchez-Herencia., J. Requena., R. MORENO, Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.
- [40] Rasheedat M. Mahamood, Esther T. Akinlabi Member, IAENG, Mukul Shukla and Sisa Pityana, (2012) "Functionally Graded Material: An Overview", *Proceedings of the World Congress on Engineering 2012 Vol III, WCE 2012, July 4 - 6, London, U.K.*
- [41] Barka Merbouha, (2012) « Investigation de la stabilité thermique des plaques FGM sigmoïdes », mémoire de magister, Université de Sidi Bel Abbès, Octobre .
- [42] Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James. (2015), "Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication", *Engineering and Technology*, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore.
- [43] El-Wazery, M. S. A. R, El-Desouky. O. A, Hamed. N. A, Mansour. and Ahmed. A. Hassan. (2012), "Preparation and Mechanical Properties of Zirconia/Nickel Functionally Graded materials". *Arab Journal of Nuclear Sciences and Applications*, 45(2), 435-446.
- [44] Saiyathi brahim, A. Mohamed, Nazirudeen, (2015), "S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded materials- Areview. International conference on systems, sciences, control, communication", *engineering and technology*.
- [45] Mishina H., Inumaru Y., Kaitoku K.,(2008) —Fabrication of ZrO₂/AISI316L functionally graded materials for joint prostheses *Matl. Sci. & Eng. A* 475 141.
- [46] El-wazery M., El-Desouky A., *J Appl.*(2014) —Fabrication and Characteristics of 8YSZ/Ni Functionally Graded Materials by Applying Spark Plasma Sintering Procedure *Sci. & Eng.* 12 313.

- [47] Bishop A., Lin C.Y., Navaratnam M., Rawlings R.D., McShane H.B., A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.
- [48] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90- Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- [49] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya, Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.
- [50] Sarkar , p. Nicholson (1996) ,,".electrophoretic deposition mechanisms, kinetics, and application to ceramics ,," , *volume 79N*°8.
- [51] Xiong, H.-P., Kawasaki, A., Kang, Y.-S., and Watanabe, R., "Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature," *Surf. Coat. Technol.*, vol.194, pp. 203–214.
- [52] Xiong H., Kawasaki A., Kang Y., Watanabe R .Synthesis and characterization of in-situ reinforced Fe-TiC steel FGMs, *Surf & Coat. Technol.* 194 203, 2005.
- [53] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi , ,(2011)."Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; *John Wiley & Sons*;page 110, 4 août
- [54] L. Marin, "Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials," *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351, 2005.
- [55] Arnold,S.M.(2001),"Higher-order-theory structural/microanalysis code (HOT-SMAC) developed, in *Research and Technology 2000*, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9.
- [56] Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dckens, (2006), "P.M. Rpaid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age". John Wiley and Sons, Ltd .
- [57] S. Matsuo, F. Watari, and N. Ohata,(2001) —Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root,— *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274.
- [58] Vel, S.S. et Batra, Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M. Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T. (2003), "Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application". *Mater. Sci. Forum*, 423- 425:321-326.
- [59] L. Lu, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin and G. Villain, "Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer, *NDT & E International*, Volume 44, Issue 2, Pages 169-177, March 2011.
- [60] M. Niino, K. Kisara and M. Mori , , (2005) "Feasibility study of FGM technology in space solar power systems (SPSS)," *Mater Sci Forum*, vol. 492, pp. 163–168.
- [61] E. Müller, C. Drašar, J. Schilz, and W.A. Kaysser,(2003) —Functionally graded materials for sensor and energy applications,|| *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 17-30.

[62] M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky, "A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials Mater. Environ. Sci. 6 (5) 1369-1376. ISSN: 2028-2508,2015.

Chapitre III

Rappels sur les théories des plaques

CHAPITRE III Rappels sur les théories des plaques

1) Introduction

Les solides minces sont des solides tridimensionnels ayant des caractéristiques particulières au niveau géométrique, cinématique et mécanique. Un solide 3D est un objet massif dont les trois dimensions sont du même ordre de grandeur. Ces structures ont au moins une dimension, appelée épaisseur, petite par rapport aux autres dimensions. On distingue : Plaque, Coque, Poutre droite, Arc ou poutre courbée. Les structures minces de type poutre, arc, plaque et coque sont très répandues dans le milieu naturel (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) et dans les réalisations humaines les plus diverses (charpentes, voûtes, réservoirs, caissons, tabliers de ponts, carrosseries automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions, etc.).

L'analyse du comportement et la conception des ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques.

À travers ce chapitre, nous allons faire une représentation des différents modèles sur les théories des plaques pour pouvoir étudier un comportement quel que soit statique ou dynamique des structures ayant comme éléments structuraux des poutres, des plaques ou des coques en FGM, il est nécessaire de bien choisir la théorie adéquate qui peut décrire correctement leurs comportements vis-à-vis des charges mécaniques et/ou thermiques pour qu'on puisse ainsi résoudre les différents problèmes de structures.

La théorie des plaques permet de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. Quatre classes d'équations dans un modèle de mécanique des solides, y compris la théorie des plaques, comportent :

- Les équations du mouvement ;
- Relations déformations-déplacements (et rotations) ;
- Loi de comportement les relations de contraintes-déformations ;
- Les équations de compatibilité.

Dans un premier temps nous rappellerons l'historique et la définition des plaques qui nous donne une idée sur les théories des plaques. Ensuite nous présentons les différentes théories utilisées pour l'étude de comportement mécanique des plaques FGM : Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3D), la théorie classique des plaques (CPT) qui est dédiée aux plaques minces, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) qui est

dédiée aux plaques semi-épaisses, ensuite vient les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDT) qui est dédiée aux plaques dans leur épaisseur est plus important et enfin la théorie HSDT quasi-3D.

2) Historique des plaques

En 1888 le mathématicien anglais Augustus Edward Hough Love a développé une nouvelle théorie pour des plaques minces connue sous le nom de la théorie classique des plaques « Classical plate theory (CPT) » [1] en utilisant les hypothèses de Gustav Kirchhoff [2] qui elles-mêmes sont inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres. Après en se basant sur des travaux de [3, 4, 5, 6], que Mindlin a pu fonder une théorie pour des plaques minces et moyennement épaisses appelée la théorie de déformations du premier ordre « First order shear deformation theory (FSDT) » [7].

Ensuite, des théories d'ordre supérieur «High-order shear deformation theory (HSDT)» sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque [8].

Le plus simple est le modèle de la théorie classique des plaques (CPT), également connue sous le nom de théorie de Love-Kirchhoff [1], qui ne tient pas compte du cisaillement et des effets de déformation normale. Ainsi, il n'est adapté que pour les plaques FGM minces.

La théorie suivante dans la hiérarchie des modèles des plaques monocouches «Equivalent single layer theory ESL » est la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) développée par Mindlin [7]. La FSDT prend en considération la déformation de cisaillement par la voie d'une variation linéaire et des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur, de ce fait un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire. Le facteur de correction de cisaillement est difficile à déterminer car elle ne dépend pas seulement des paramètres géométriques mais aussi du chargement et des conditions aux limites, et pour éviter l'utilisation de ce facteur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion/CT (Figure III.1). Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction γ sont introduits.

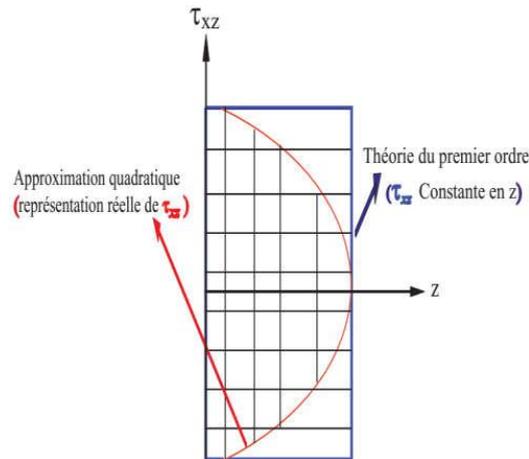


Figure III.1 : Approximation des cisaillements transversales : constantes (théorie du premier ordre) et quadratiques (ordre supérieur) [24]

Les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été introduites. Les théories HSDT peuvent être développées en élargissant les composantes de déplacement en séries de puissances de l'épaisseur et de coordonnées. Parmi les théories de déformation de cisaillement HSDT, la théorie de troisième ordre (TSDT) de Reddy [9] est largement la plus employée en raison de sa simplicité et de sa précision.

Le principal objectif de toutes ses théories de plaques sont plus ou moins le même, certaines se distinguent par rapport aux autres en termes de précisions, particulièrement sur les contraintes de cisaillement.

Les caractéristiques de base de toutes ses théories sont la considération d'une variation parabolique des déformations et des contraintes de τ_{xz} à travers l'épaisseur et en même temps, la discontinuité des contraintes sur les couches interfaces du stratifié. Nous présentons sur la figure III.2 la distribution des contraintes de cisaillement transversal τ_{xz} à travers l'épaisseur, obtenue par trois théories différentes.

Des revues bibliographiques récentes sur les différentes théories pour la modélisation des structures multicouches sont données par [10-18]. Une comparaison intéressante entre les différentes théories est donnée par [10-17]. Des travaux très récents, basés sur la théorie du troisième ordre ont également fait l'objet de publication [19].

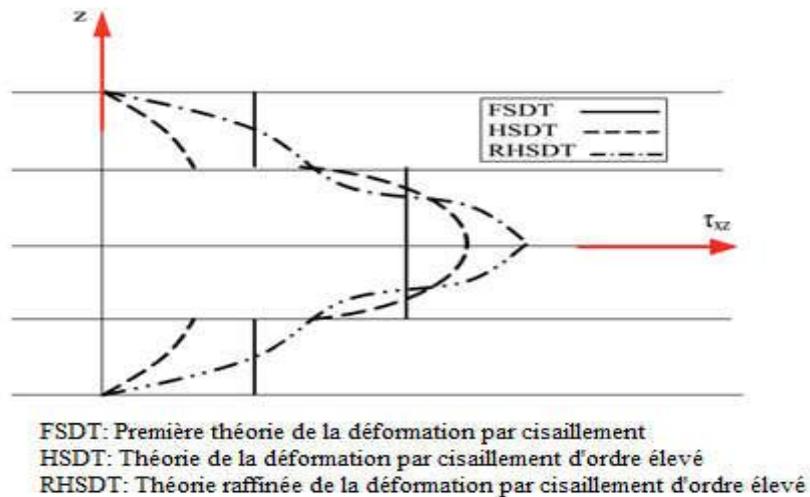


Figure III.2 : Distribution de τ_{xy} selon les trois théories [19]

3) Définition d'une plaque

Une plaque est un solide tridimensionnel défini par une surface de référence plane (x,y) et une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions à savoir sa longueur et sa largeur (Figure III.3). On définit :

- **Le plan moyen (plan médian)** : plan situé à équidistance entre les faces.
- **La fibre neutre** : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y) , avec $z = 0$.
- **Une fibre normale** : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .
- **L'épaisseur h** : l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

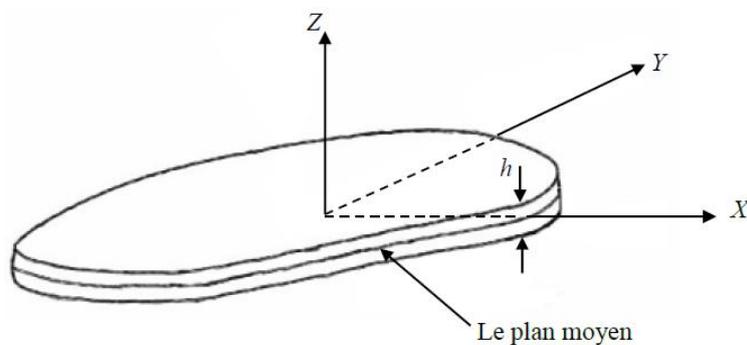


Figure III.3 : Géométrie d'une plaque quelconque.

Suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur h par rapport aux autres dimensions, on introduit parfois l'adjectif mince ou épais. Cette qualification n'implique pas seulement une caractéristique géométrique mais sous-entend également un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal.

4) Les équations d'équilibre

Les équations de mouvement d'une plaque sont obtenues par l'intégration des équations du mouvement pour un solide élastique tridimensionnel. Les définitions des résultantes de force et moment sont introduites dans le calcul et les équations obtenues sont valables pour toutes les trois théories considérées ici. Les équations du mouvement pour le solide élastique linéaire sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

En intégrant les deux côtés par z , les forces résultantes sont :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (\text{III.2})$$

Et les forces de cisaillement transversales égalent à :

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz \quad (\text{III.3})$$

Les moments de flexion et de torsion valent :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (\text{III.4})$$

5) Hypothèses cinématiques

La théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) peuvent être dérivées à partir de deux hypothèses de base.

La première hypothèse est que la contrainte transversale normale est égale à zéro :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.5})$$

La deuxième hypothèse concerne la variation de déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Différentes hypothèses sont réalisées : dans la théorie classique des plaques (CPT) les contraintes de cisaillement transversales sont supposées être zéro; dans la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) elles sont supposées constantes à travers l'épaisseur de la plaque; dans la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) les contraintes de cisaillement transversales sont supposées variées de façon parabolique à travers l'épaisseur et nulles sur les surfaces supérieure et inférieure.

6) Les différentes théories des plaques

6.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$) devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'éclatement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure III.4), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Ce modèle de plaque peut être référé en [20-22].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.7}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$) .

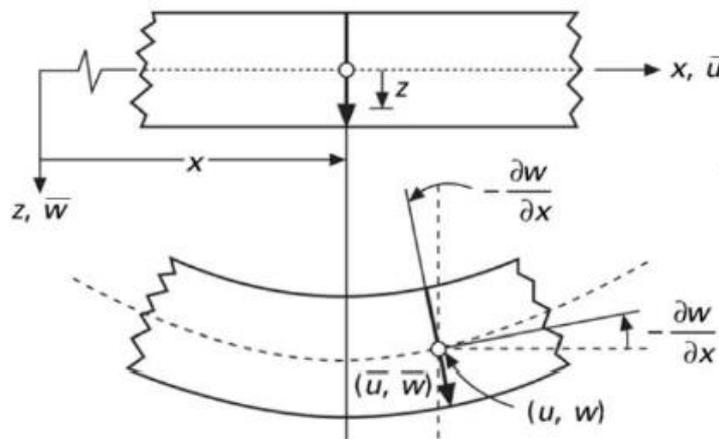


Figure III.4 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [21].

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [23, 24].

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses. À cet effet survient la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre.

6.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (First Order Shear Plate Theory FSDT): (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement qui est difficile à

déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites imposées.

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouvées dans les références [5, 7, 25] qui ont abouti que les contraintes de cisaillement transversales sont supposées constantes à travers l'épaisseur au modèle de Reissner-Mindlin ainsi que d'autres travaux comme [20-22, 26].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{III.8}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et $(\phi_x$ et $\phi_y)$ sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x , respectivement.

Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement de

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{III.9}$$

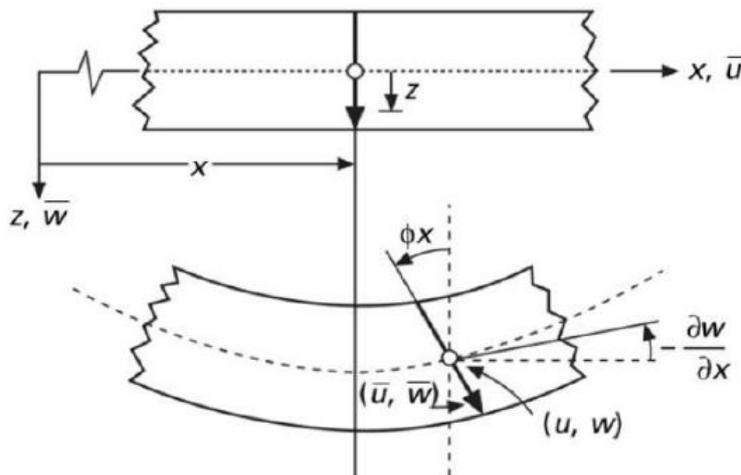


Figure III.5 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [21].

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes suivant z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de

l'énergie, les effets de cisaillement transversal [27]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

Dans la littérature on peut trouver trois approches d'approximation pour les plaques épaisses à savoir [5, 7, 28]. L'approche de Reissner [5] suppose un champ de déplacement mixte contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement.

L'approche de Henchy-Mindlin [7] suppose un champ de déplacement linéaire dans le plan à travers l'épaisseur, tandis que l'approche d'Ambartsumyan [28] suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement.

Et afin d'améliorer ces méthodes et d'éviter d'introduire le facteur de correction de cisaillement, des théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur ont été développées pour remédier à ce problème.

6.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [9, 25, 27, 29-35].

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaques utilisés pour analyser le comportement des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

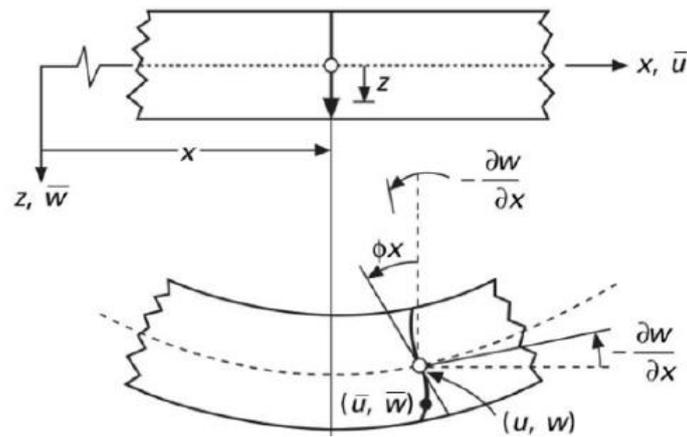


Figure III.6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.10}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x , respectivement, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenue en prenant $f(z)=0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Le champ de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy [21, 22] est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right)
 \tag{III.11}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique et à disparaître sur les surfaces supérieure et inférieure à travers l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [33] parvient à développer un nouveau modèle SSDT (The sinusoidal shear deformation plate theory) en se basant sur une fonction trigonométrique sinusoidale par rapport aux autres modèles d'ordre élevé qui utilise des fonctions polynomiales est qui permet une modélisation des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.12})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

[36] ont développé un modèle basé sur une fonction exponentielle pour la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT), en utilisant la fonction suivante :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{III.13})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [37] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \quad (\text{III.14})$$

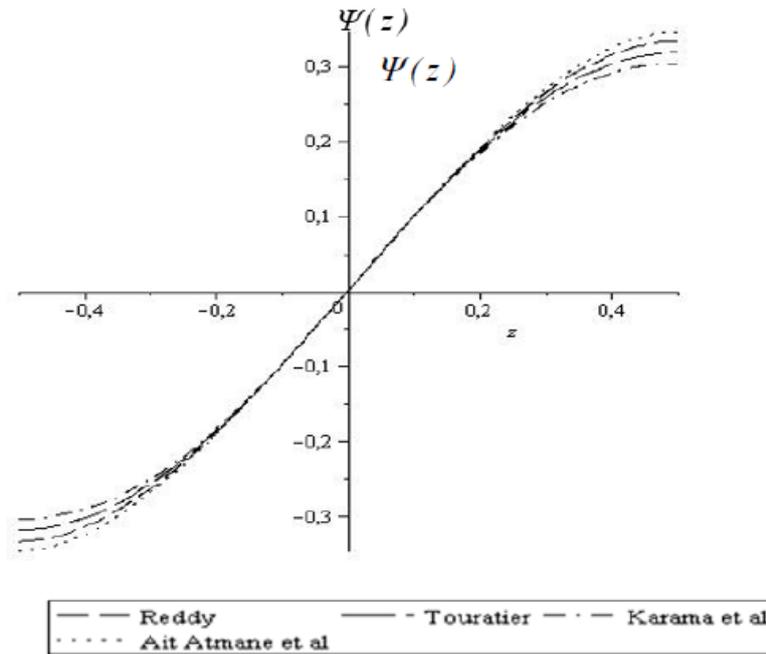


Figure III.7 : Variation de la fonction de forme $\Psi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur. [37]

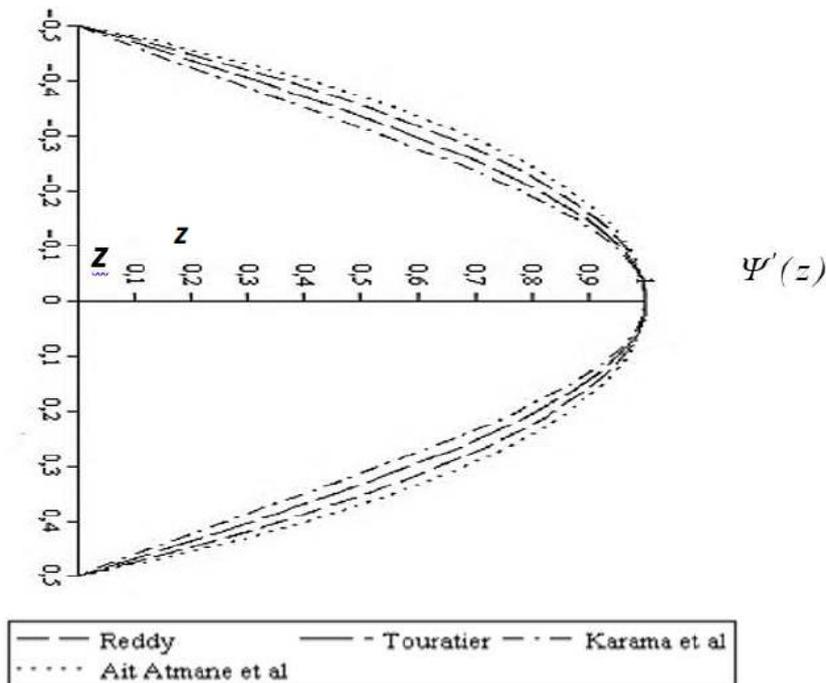


Figure III.8 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $\Psi(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur. [37]

6.3.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée [27, 33, 38, 39]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [28] avec ; $f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$ (III.15)

- L'approche de Reissner [5] avec ; $f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$ (III.16)

- L'approche de Levinson [40], Murthy [41] et Reddy [9] Avec ; $f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$ (III.17)

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant [9]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [42].

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par [31].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevé puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [33]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1}$$

$$= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right)$$
(III.18)

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par

rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy [9]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six noeuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par [43, 44].

Récemment, Afaq [45] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante:

$$f(z) = z.e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.19})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance paire et impaire de la variable z , alors que la fonction (sinus) de Touratier [33] ne permet qu'un développement en puissance impaire.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes [42].

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Tableau III.1 : Différentes fonctions de forme des théories HSDT pour des plaques FGM

| Théorie | intitulé | Fonction de Cisaillement f(z) | Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z | Coefficient De correction De cisaillement | Domaine de validité |
|--|--|--|---|--|---|
| CPT, Kirchhoff (Kirchhoff, G.R. 1850 a) et (Kirchhoff, G.R. 1850 b) | Théorie classique des plaques | 0 | | | Plaques minces |
| FSDT, Mindlin (Mindlin. R.D 1951) | Théorie de Déformation des plaques du 1er ordre | Z | Constante | Requis | Plaques minces et moyennement épaisses |
| Ambartsumian (Ambartsumian,S.A. 1958) | Théorie d'ordre supérieur | $\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$ | Quadratique | Non Requis | Plaques minces et moyennement épaisses |
| Reissner (Reissner. E 1975) | Théorie d'ordre supérieur | $\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$ | Parabolique | Non Requis | Plaques minces et épaisses |
| TSDPT, Touratier (Touratier. M 1991) | Théorie de déformation trigonométrique des plaques | $\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$ | Parabolique | Non Requis | Plaques minces et épaisses |
| ESDPT, Karama et al. (Karama et al. 2003) | Théorie de déformation exponentielle des plaques | $ze^{-2(z/h)^2}$ | Parabolique | Non Requis | Plaques minces et épaisses |
| PSDPT, Levinson (Levinson, M. 1980), Reddy (Reddy. J.N, 1984) | Théorie de déformation parabolique des plaques | $z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$ | Parabolique | Non Requis | Plaques minces et épaisses |
| Aydogdu (Aydogdu, M. 2009) | Théorie de déformation exponentielle des plaques | $z\alpha^{-\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}}, \alpha > 0$ | Parabolique | Non Requis | Plaques minces et épaisses |
| El meiche, Tounsi et al. (El Meiche et al.2011) | Théorie raffinée des plaques | $\frac{(h/\pi)\sin(hz/\pi) - z}{(\cosh(\pi/2) - 1)}$ | Parabolique | Non Requis | Plaques minces et épaisses |
| Ait Atmane et al. (Ait Atmane et al. 2010) | Théorie raffinée des plaques | $\frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$ | Parabolique | Non Requis | Plaques minces et épaisses |
| Shimpi (Shimpi, R.P. 2002) | Théorie raffinée des plaques | $h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$ | Parabolique | Non Requis | Plaques minces et épaisses |

6.4. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories d'ordre élevé, Shimpi [46] a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteurs de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque.

Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. La fiabilité de cette méthode a été démontrée par [37, 46, 47] pour le cas de la flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque FGM. Récemment [48, 49] ont adapté la RPT avec succès au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.

(w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse

6.5. Théorie de déformation des plaques quasi-3D

En divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et en prenant en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque en anglais: « stretching effect », [50] ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. [51-60] ont proposé à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnus quasi-3D. En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-

variables que Zenkour a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre variables pour les plaques : FGM (2013), les plaques sandwiches [61] et des plaques composites stratifiées [62]. [63] ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement graduées en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Cette théorie est donnée par le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.21}$$

Où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.

(w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement).

$g(z), f(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse avec :

$$g(z) = 1 - f'(z)
 \tag{III.22}$$

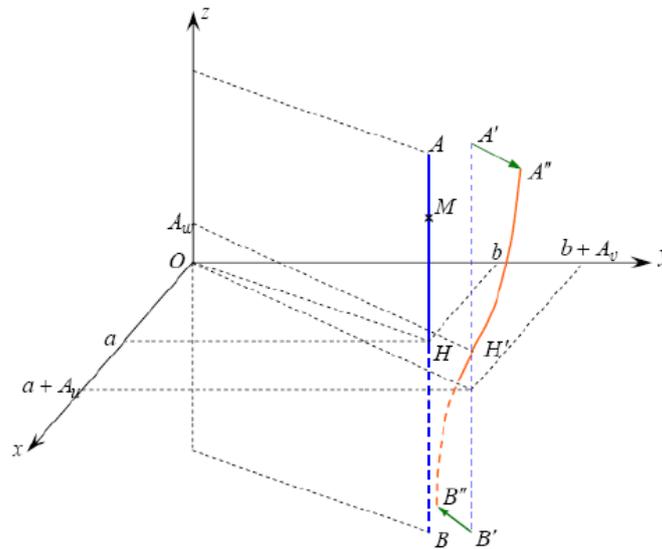


Figure III.9 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur

7) Conclusion

Ce chapitre était dédié à donner une lecture sur la littérature des différentes théories des plaques monocouches existante pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques à savoir : la théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT) utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et la théorie raffinée de déformation des plaques (RPT). Ensuite nous avons présenté la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur et qui permet de réduire le nombre d'inconnus ce qui implique l'optimisation du temps de calcul. La dérivation des équations du mouvement a souligné les points communs entre les théories et leurs différences fondées sur diverses hypothèses faites.

Dans le cadre de ce travail de recherche. On a choisi d'appliquer la théorie de déformation d'ordre élevé avancé pour analyser la flexion des plaques sandwiches en FGM sous effet d'un chargement thermomécanique et pour sa validation, on comparera les résultats avec ceux obtenus avec les différentes théories trouvées dans la littérature.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES (Chapitre III)

- [1] Love, A.E.H., "On the small free vibrations and deformations of elastic shells", London: Philosophical trans. of the Royal Society, 1888.
- [2] Kirchhoff, G.R., "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", J. Reine Angew. Math. (Crelle), 1850.
- [3] Rayleigh, L., "Theory of sound": Dover Pub, 1945.
- [4] Timoshenko, S., "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", Philosophical Magazine, Vol. 41 (series 46), 1921.
- [5] Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME, 69–77, 1945.
- [6] Uflyand, Y.S., "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates", 12, 287–300, 1948.
- [7] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. J Appl Mech,18(1):31–8, 1951.
- [8] Amale MAHI, (2012)—Analyse et étude des plaques composites FGM en vibrations libres. *Thèse de Doctorat, Université de Blida, Algérie.*
- [9] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. J Appl Mech; 51:745–52,1984.
- [10] I. Katili. A new discret kirshhoff- mindlin element based on mindlin reissner plate theory and assumed shear strain fields- Part ii: "An extend dkq element for thick plate bending analysis". Int. Jou. Num. Meth. Eng. 36:1885-1903.1993.
- [11] N.J. Pagano. "Stress field in composite laminates". Int. Jou.Sol. Str,14: 385-400.1978.
- [12] M.Cho and R.Parameter. "Efficient higher order composite plate theory For general lamination configuration". Ame.Int.Aer.Ast,31,n°7: 1299-1306.1993.
- [13] M. Di Scuiua. "A Refined transvers shear deformation theory for multilayered anisotropic plates". Atti.Accad.Sci. Torino, 118: 279-295.1984.
- [14] M. Di Scuiua and U Icardi. "Discrete-layer models for multilayered shells accounting for interlayer continuity". Meccanica, 28 : 281-291.1993.
- [15] E.Carrera. "On the use of transvers shear stress homogenous and non homogeneous conditions in the third-order orthotropic plate theory". Com.Str, 77: 341-352. 2007

- [16] F. Daghia, S. Miranada, F. Ubertini and E. Viola. "A hybrid stress approach for laminated composite plates within the first order shear deformation theory". *Int. Jou. Soli .Str*, 45: 1766-1787. 2008.
- [17] H. Hu, S. Belouettar, M.Potier-Ferry, and E.Daya. "Review and assesement of various theories for modeling sandwich composites". *Com.Str* 84: 282292.2008.
- [18] F. Maleiro, C.M. Mota Soares, C.A Mota Soares, and J.N Reddy. "Mixed Leastsquares finite element model for the static analysis of laminated composite". *Com.Str*.73826-838. 2008.
- [19] Shi Guangyu. "A new simple third- order shear deformation theory of plate". *Int.Jou.Sol.Str*, 44: 43994417. 2007.
- [20] S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [21] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [22] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [23] E. Reissner and Y. Stavsky. "Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aeolotropic elastic plates". *J. Appl. Meth*, 28: 402-408. 1961
- [24] P.C. Yang, C.H. Norris, and Y. Stavsky. "Elasti wave propagation in heteroge-neous plate". *Int. Jou. Sol. Struct*, 2: 665-684. 1966
- [25] Reissner, E.(1975), " On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation". *Int. J. Solids Struct*. 11, 569-573.
- [26] Miara, B., Podio-Guidugli, P. (2006), "Une approche formelle unifiée des théories de plaques et poutres linéairement élastiques". *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 343, 375-678.
- [27] Whitney J.M. (1973) —Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads. *J. Applied Mechanics*. 1973, Vol. 40, pp. 302-304.
- [28] Ambartsumian. S.A, (1969). —*Theory of anisotropic platel*. Technomic Publishing Co.
- [29] Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949). —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. N°:1833*.
- [30] Naghdi. P. M, (1957). —On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369- 380.
- [31] Kant, K. Swaminathan, «*Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory*». *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.
- [32] Liberscu L. (1967) —On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*. 1967, Vol. 3, pp. 53-68.

- [33] M. Touratier, (1991), —An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916.
- [34] Nguyen., Viet.Tung. (2004) —Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques. *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées. ParisTech, France, 2004.*
- [35] Sheikholeslami, SA, Saidi, AR. (2013), —Vibration analysis of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory, *Comp Struct*, 106, 350 – 361.
- [36] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- [37] Ait Atmane. H, A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, (2010). —Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- [38] Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974). —A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, pages 177-183.
- [39] Lo. K.H & R.M. Christensen, (1977). «*A higher order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plate's*». *journal of applied mechanics*, Vol.44, N° 4, pages 669-676.
- [40] Levinson, M.,(1980), An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, *Mechanics Research Communications*, 7 (6) 343-350.
- [41] Murthy .M.V.V., An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate,. *Rapport technique, NASA, 1981.*
- [42] Duong, V.A., Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites. *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008, 196 pp.*
- [43] Polit. O and M. Touratier: Un nouvel élément triangulaire Interface fini laminé pour assurer la continuité des déplacements et stresses. *Composite Structures*, 38(1-4):37-44, 1997.
- [44] Dau. F, O. Polit, and M. Touratier «*C1 plate and shell finite elements for geometrically non linear analysis of multilayered structures*». *Computers and Structures*, 84:1264-1274, (2006).
- [45] Afaq. K.S, «*Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord* ». PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, (2003);
- [46] Shimpi, R.P., "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137– 146, 2002.
- [47] Kim, S.E., Thai, H.T. et Lee, J., "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", 47(4), 455–462, 2009.
- [48] Thai, H.-T. et Kim, S.-E., "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746, 2011.

- [49] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A., "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–94, 2011.
- [50] Thai HT, Kim SE. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Compos Struct*; 99:172–80, 2013.
- [51] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), —A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded platesl, *J. Eng. Mech.*, ASCE, 140(2), 374- 383.
- [52] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.*, 18(1), 235-253.
- [53] Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK.(2014) —A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded platesl. *Acta Mech*; 225(3):951–64.
- [54] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Compos.: Part B*, 60, 274-283.
- [55] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- [56] Abdelaziz, H.H., Ait Amar Meziane, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabri, A.S. (2017), “An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions”, *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704.
- [57] Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R, (2018), “A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Struct. Eng. Mech.*, 65(1), 19-31.
- [58] Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Mahmoud, S.R. (2018), “Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates”, *Struct. Eng. Mech.*
- [59] Meksi, R, Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, SR.(2018), “An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates”, *J. Sandw . Struct.Mater.*, 1099636217698443.
- [60] Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2018), “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates ” , *Compos. Struct.*, 184, 688-697.
- [61] Zenkour AM. A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2013;37(20–21):9041–51.
- [62] Zenkour AM. (2015), “Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using fourunknown shear and normal deformations theory”. *Compos Struct*; 122:260–70.

[63] Mantari JL, Granados EV, Hinojosa MA, Guedes Soares C. Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Compos Struct*; 118:455–71, 2014.

Chapitre IV

**Formulations théoriques de
l'analyse thermomécanique
des plaques sandwiches en
FGM en utilisant une théorie
d'ordre élevé avancé**

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

1) Introduction

Les structures en sandwichs, en raison de leur rigidité élevée et de leur faible poids, ainsi que de leur capacité d'absorption d'énergie, ont été largement utilisées dans les domaines des systèmes aéronautiques, aérospatiaux, navals/maritimes, de la construction, des transports et de l'énergie éolienne [1–3]. Ils peuvent allier entre les propriétés des deux constituants ou plus totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. Ils sont ainsi utilisés comme revêtements de barrière thermique [4] et comme zones interfaciales pour améliorer la résistance de la liaison et réduire les contraintes résiduelles [5]. En raison de la continuité des propriétés des matériaux au niveau des interfaces, les plaques sandwiches ont récemment été mises au point pour atténuer les problèmes d'interface entre les faces et le cœur des structures sandwiches classiques. Avec la découverte de nouveaux matériaux avancés, des matériaux fonctionnellement gradués dits (FGM) sont actuellement utilisés dans la conception de structures en sandwichs afin de sélectionner la meilleure configuration [6-25].

Bien que les structures en sandwich offrent des avantages par rapport aux autres types de structures, la modification abrupte des propriétés des matériaux aux interfaces et le noyau peut entraîner de fortes contraintes interlaminaires, conduisant souvent à un délaminage qui est l'un des problèmes majeurs dans les structures sandwiches classiques.

Par conséquent, de nombreux chercheurs ont accordé une grande attention au comportement thermomécanique des plaques sandwiches en FGM sous plusieurs types. Zenkour [26] a utilisé une théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale pour étudier la flexion d'une plaque sandwich simple appuyée avec deux surfaces en FGM et un noyau en céramique isotrope homogène.

Le plus largement utilisé est la structure en sandwich avec des faces homogènes et un noyau homogène [27]. Les plaques sandwiches FGM existent généralement en deux types : les faces en FGM et un noyau homogène [26, 28-31] ou avec des faces homogènes et un noyau de FGM ont été proposées et étudiées [31-34]. Reddy et Cheng [35] ont étudié des déformations thermomécaniques tridimensionnelles des plaques rectangulaires simple appuyées en FGM en utilisant une méthode asymptotique. Kashtalyan M et Menshykova M. [32] ont étudié des déformations thermomécaniques tridimensionnelles des plaques

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'analyse thermomécanique des plaques sandwichs en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

rectangulaires simplement appuyées avec un noyau en FGM. Shariyat [36] a proposé une étude de flexion linéaire et non linéaire de la plaque sandwich sous des charges thermomécaniques basées sur la théorie locale de superposition double 3D généralisée. Matsunaga [37] a modélisé le champ de déplacement avec la série de puissance des coordonnées d'épaisseur pour l'étude des plaques FG soumises à des charges thermiques et mécaniques basées sur une théorie 2D HSDT.

Vel et Batra [38, 39] ont présenté une solution exacte pour les déformations tridimensionnelles des plaques épaisses ou minces rectangulaires, classées de manière fonctionnelle et simplement appuyées soumises à des charges mécaniques et thermiques. Woo et Meguid [40] ont fourni une solution analytique pour le couplage important de grandes déflexions de plaques et de coques peu profondes en FGM soumises à une charge mécanique transversale et à un champ de températures. Shen [41] a étudié la réponse à la flexion non linéaire d'une plaque simplement appuyée soumise à des charges transversales et dans des environnements thermiques utilisant une technique mixte de perturbation de Galerkin. Zenkour et al. [42] ont utilisé la théorie des plaques de cisaillement trigonométrique et des déformations normales pour étudier l'analyse de flexion thermomécanique des plaques rectangulaires épaisses à gradient exponentiel reposant sur des fondations élastiques de Pasternak.

Récemment, Tounsi et al. [43] ont réalisé une analyse de flexion thermoélastique des plaques sandwichs à faces homogènes isotropes et cœur en FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée. Zidi et al. [44] ont étudié la réponse en flexion des plaques FG sous un chargement thermomécanique. Houari et al. [45] ont développé une nouvelle théorie du cisaillement d'ordre supérieur HSDT avec une influence d'étirement d'épaisseur et de la déformation normale pour la flexion thermoélastique des plaques sandwichs avec des faces FGM et le noyau homogène isotrope. On peut citer quelques travaux comme ceux menés par Saidi et al. [46] qui ont étudié la réponse de flexion thermomécanique des plaques sandwichs FGM en considérant un champ de déplacement ayant six variables avec un effet d'étirement d'épaisseur. Mahi et al. [47] ont développé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique pour la flexion et l'analyse par vibration libre des plaques composites isotropes à gradations fonctionnelles sandwichs et stratifiées. Boudarba et al. [48] ont analysé la réponse statique thermomécanique des plaques épaisses FGM reposant sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak. Hamidi et al. [49] ont proposé une théorie des plaques sinusoïdales à 5 variables et un effet d'étirement pour la flexion thermomécanique des plaques sandwichs FG. Bouchafa et al. [50] ont étudié les contraintes thermiques et les déflexions des plaques sandwichs FG en utilisant une nouvelle théorie de déformation à cisaillement hyperbolique raffinée.

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

L'analyse de la flexion des plaques sandwiches FGM soumises à la fois à des charges mécaniques et à des charges thermiques est rare dans la littérature. Zenkour [51] a présenté une analyse de flexion thermomécanique pour un support simplement appuyée pour des plaques sandwiches rectangulaires utilisant la théorie des plaques de déformation par cisaillement sinusoïdale raffinée.

Zenkour et Alghamdi [52,53] ont analysé les déformations et les contraintes des plaques sandwiches en FGM symétriques et non symétriques sous l'effet des charges mécaniques et thermiques. Dans leurs études, le nombre de fonctions inconnues impliquées est de cinq et les plaques sandwiches se composent de deux faces FGM et d'un noyau homogène.

D'autre part, au cours des dernières années pas mal de chercheurs indiens se sont intéressés à l'étude des plaques FGM. Kar et Panda [54] ont étudié la réponse de flexion de déformation importante de la coque sphérique en FGM en utilisant la méthode des éléments finis « MEF ». Ils ont étudié après le comportement de flexion non linéaire du panneau plat composite stratifié sous charge hygro-thermomécanique [55]. Ensuite, Kar et Panda [56] ont étudié le comportement thermomécanique non linéaire d'un panneau de carcasse cylindrique / hyperbolique / elliptique à gradient fonctionnel fonctionnant en fonction de la température et indépendant de la température. De plus, Mahapatra et al. [57] ont analysé l'analyse de flexion non linéaire du panneau composite stratifié sous charge hygro-thermo-mécanique.

Li et al. [58] ont étudié la flexion thermomécanique de deux types de plaques sandwiches en FGM en se basant sur une théorie raffinée des plaques à quatre variables. Alibeigloo et al [59] ont contribué à l'analyse statique d'un panneau sandwich simplement appuyé avec un noyau en FGM soumis à un chargement thermomécanique.

Ce chapitre on a proposé une formulation analytique du problème statique des plaques sandwiches en FGM sous un chargement thermomécanique en utilisant un nouveau type de théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé avancé. L'addition du terme intégral dans le champ de déplacement conduit à une réduction du nombre de variables et des équations gouvernantes ce qui permet d'économiser le temps de calcul.

Cette théorie utilisée pour résoudre un problème de la mécanique des milieux continus a comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base d'un système d'équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites sur les bords de la structure, complétée par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées, Elle ne nécessite pas un facteur de correction de cisaillement, et donne lieu à une

contrainte de cisaillement transversale parabolique à travers l'épaisseur et satisfaisant les conditions de nullités sur les surfaces libres.

Contrairement à toutes autres théories de déformation en cisaillement, le nombre de fonctions inconnues impliquées est seulement quatre au lieu de cinq.

Cependant, la présente étude traite un type de plaques sandwiches en trois couches, dont les deux faces supérieure et inférieure en FGM et le noyau en P-FGM et S-FGM symétrique.

2) Formulation théorique

2.1. Hypothèses de base pour la présente théorie

Contrairement aux autres théories, le nombre des inconnus dans la théorie raffinée est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement [52, 60-63] le nombre d'inconnus est cinq. La théorie utilisée est variationnellement consistante, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et mène à une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur en satisfaisant les conditions des surfaces libres.

Pour la présente théorie on suppose les hypothèses suivantes :

- Le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires u, v, w à la surface, coïncidant avec la surface médiane de la plaque.
 - L'origine du système cartésien est prise à la surface neutre de la couche médiane de la plaque sandwich fonctionnellement graduée (Figure IV.1).
 - Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur « h » de la plaque, par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.
 - La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes σ_x et σ_y .
- Les déplacements (u) dans la direction des x et (v) dans la direction des y se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements u et v dans les directions (x) et (y) peuvent être divisées en trois termes :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + u_b(x, y) + u_s(x, y) \quad (IV.1)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + v_b(x, y) + v_s(x, y) \quad (IV.2)$$

Les premières composantes u_0 et v_0 représentent les déplacements en membrane.

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

Les deuxièmes composantes u_b et v_b sont les composantes de la flèche similaire aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Leurs expressions sont données par:

$$u_b(x, y) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \quad v_b(x, y) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \quad (\text{IV.3})$$

Les termes u_s et v_s sont les constituantes de cisaillement, elles permettent d'avoir des variations paraboliques de déformations de cisaillement γ_{xz}, γ_{yz} et des contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque qui sont nulles aux bords inférieur et supérieur de la plaque.

Le nombre de variables est réduit par l'utilisation de l'intégral d'où les expressions u_s et v_s dépendent et sont attribuées par :

$$u_s = k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx, \quad v_s = k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV.4})$$

Les expressions des composantes ϕ_x et ϕ_y dépendent du terme intégral qui réduit ainsi le nombre de variables à 5 par rapport aux théories d'ordre élevé conventionnelles, et elles sont donnée par :

$$\phi_x = \int \theta(x, y) dx, \quad \phi_y = \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV.5})$$

• La composante du déplacement transversal (w) comprend un terme (w_0) qui représente la flèche pure de la plaque÷

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.6})$$

2.2. Configuration géométrique

La plaque sandwich FGM rectangulaire de longueur a , de largeur b et d'épaisseur uniforme h . Cette plaque est composée de deux faces supérieure et inférieure et un noyau. Ces trois couches sont définies par «Couche1», «Couche2» et «Couche3» de la couche inférieure à la couche supérieure (Figure **IV.1**). Les ordonnées verticales du bas en haut des deux interfaces limitant la couche centrale sont désignées par : $h_0 = -h/2$, $h_2 = -h_1$, et $h_3 = h/2$, respectivement. Dans la présente étude, la plaque sandwich est soumise à une charge mécanique transversale appliquée sur la surface supérieure et à une charge thermique variée dans l'épaisseur.

La face inférieure varie d'une surface riche en métal ($z = h_0$) à une surface riche en céramique, tandis que la face supérieure varie d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal ($z = h_3$).

Deux types de plaques sont proposés, la « plaque A » composée de deux faces supérieure et inférieure en P-FGM et un noyau E-FGM et la « plaque B » composée de deux faces supérieure et inférieure en P-FGM et un noyau symétrique en S-FGM, comme illustré à la figure IV.1. Le plan de la plaque sandwich FGM est défini par $z = 0$ et ses surfaces libres étant définies par (la surface inférieure) et (la surface supérieure).

Le rapport d'épaisseur de chaque couche de bas en haut est désigné par la combinaison de trois chiffres, à savoir : (1-0-1), (1-1-1), (1-2-1)... et ainsi de suite...

Le type des plaques sandwiches utilisées dans notre étude est illustré dans la figure IV.2.

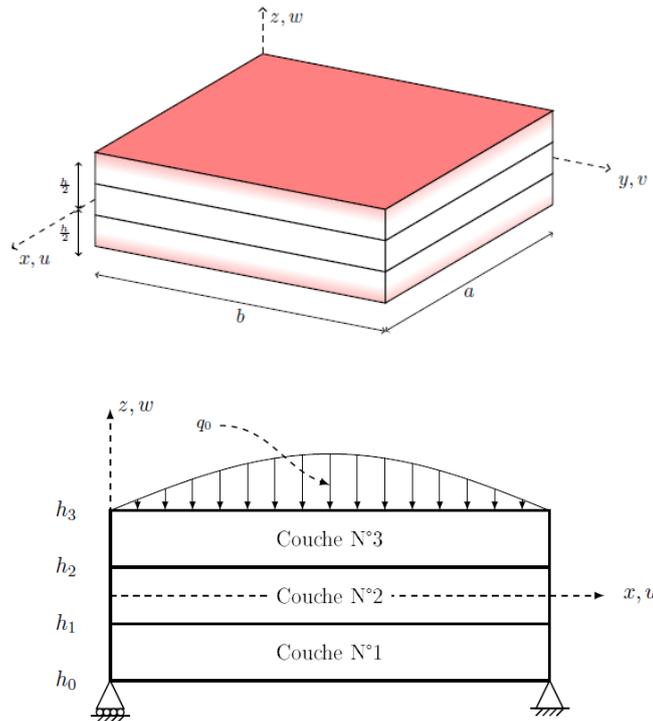


Figure IV.1: Dimensions de la plaque sandwich en FGM.

2.3. Propriétés matérielles des plaques FGM

Dans les deux types de plaques, la couche de face supérieure varie d'une surface riche en alumine à une surface riche en métal et la couche de la face inférieure varie d'une surface riche en métal à une surface riche en céramique. La fraction de volume des deux couches de face supérieure et inférieure suit une fonction de loi de puissance à travers l'épaisseur [45, 64-66] peut être définie comme suit :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p \quad z \in [h_0, h_1] \quad (\text{IV.7.a})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.7.b})$$

Où $V^{(1)}, V^{(3)}$ sont les fractions volumique des couches inférieure et supérieure respectivement, et p est un paramètre du matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la plaque et qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro ($p \geq 0$). Il est appelé aussi l'indice matériel.

Delale et Erdogan [67] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Alors, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque sandwich est constant dans tous les points de la plaque.

Les propriétés matérielles effectives des deux faces, telles que le module de Young $E^{(n)}$, le coefficient de Poisson $\mu^{(n)}$ et le coefficient de dilatation thermique $\alpha^{(n)}$ en un point peuvent être déterminées par la loi du mélange, donnés par [52, 68, 69] et peuvent être exprimées comme:

$$P^{(n)}(z) = P_m + (E_c - E_m)V^{(n)} \quad \text{avec } (n=1,3) \quad (\text{IV.8})$$

Avec $P^{(n)}$ est la caractéristique efficace du matériau FGM à la couche n . P_m et P_c sont respectivement les caractéristiques correspondantes du métal et de la céramique de la plaque sandwich en FGM. P_m et P_c définissent respectivement la propriété des faces inférieure et supérieure de la couche 1 ($h_0 \leq z \leq h_1$) et ainsi pour la couche 3 ($h_2 \leq z \leq h_3$) en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$ ($n=1,3$).

Où m et c sont des indices qui représentent respectivement le métal et la céramique. La fraction volumique du noyau sandwich est donnée comme :

$$V^{(2)} = \left(\frac{2|z|}{h_2 - h_1} \right)^k \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.9})$$

Où ($k \geq 0$): est un paramètre de matériau du noyau sandwich (plaque A) qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. Le noyau de la plaque FGM «A» présente des propriétés

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

matérielles réelles qui varient de manière exponentielle le long de l'épaisseur de la couche [70, 71]:

$$P^{(2)}(z) = P_m \exp(\beta V^{(2)}) \quad (\text{IV.10.a})$$

Avec

$$\beta = \ln \frac{P_c}{P_m} \quad (\text{IV.10.b})$$

Où $P^{(2)}$: présente les propriétés matérielles effectives du noyau, P_m et P_c font références aux propriétés matérielles effectives du métal et de la céramique, respectivement.

La fraction volumique du noyau sandwich symétrique S-FGM (plaque B) est donnée par :

$$V_m(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z+h_1}{h_1} \right)^k & \text{Pour } z \in [h_1, 0] \\ \left(\frac{-2z+h_2}{h_2} \right)^k & \text{Pour } z \in [0, h_2] \end{cases} : V_c(z) = 1 - V_m(z) \quad (\text{IV.11})$$

De même ($k \geq 0$) est un paramètre du noyau du matériau sandwich symétrique S-FGM (plaque B).

Le noyau FGM de la plaque « B » a des propriétés effectives du matériau qui varient symétriquement le long de l'épaisseur de la couche:

$$P^{(2)}(z) = P_c V_c(z) + P_m V_m(z) \quad (\text{IV.12})$$

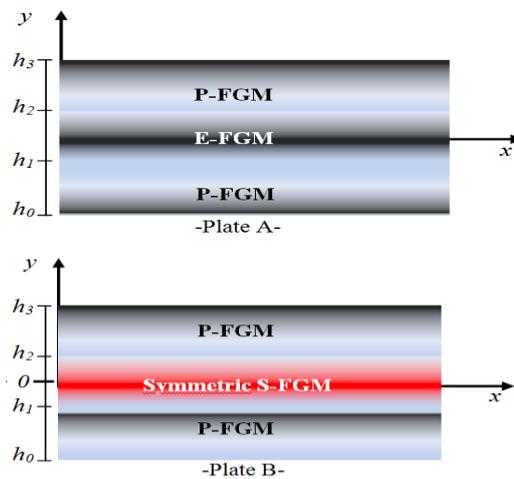


Figure IV.2: Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich en FGM.

Les deux interfaces entre le noyau et les deux faces (h_1, h_2) varient selon la configuration de la plaque comme suit:

Plaque sandwich en FGM (1-0-1)

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique, elle est constituée seulement de deux couches en FGM de même épaisseur. C'est à dire que la couche isotrope centrale en céramique est absente : $(h_1 = 0, h_2 = 0)$ (Figure **VI.3.a**).

Plaque sandwich en FGM (1-1-1)

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et se compose de trois couches de mêmes épaisseurs. Dans ce cas, nous avons: $(h_1 = -h/6, h_2 = h/6)$. (Figure **VI.3.b**)

Plaque sandwich en FGM (1-2-1)

Comme il est montré pour cette configuration, la plaque est symétrique. On y trouve l'épaisseur de la couche centrale égale à la somme des épaisseurs des deux couches (supérieure et inférieure). Ainsi, $(h_1 = -h/4, h_2 = h/4)$. (Figure **IV.3.c**)

Plaque sandwich en FGM (2-1-2)

Dans ce type de sandwich, la plaque est également symétrique, l'épaisseur de la couche centrale est égale à la moitié de l'épaisseur des deux couches supérieure et inférieure. Ainsi, $(h_1 = -h/10, h_2 = h/10)$. (Figure **IV.3.d**)

Plaque sandwich en FGM (3-1-3)

Dans ce type de sandwich, la plaque est également symétrique, l'épaisseur de la couche centrale est égale à un tiers de l'épaisseur des deux couches supérieure et inférieure. Ainsi, $(h_1 = -h/14, h_2 = h/14)$. (Figure **IV.3.e**)

Plaque sandwich en FGM (1-3-1)

Dans ce cas, la plaque est symétrique, l'épaisseur de la couche centrale est égale à trois fois celle de la couche inférieure ou supérieure, alors $(h_1 = -3h/10, h_2 = 3h/10)$ (Figure **IV.3.f**)

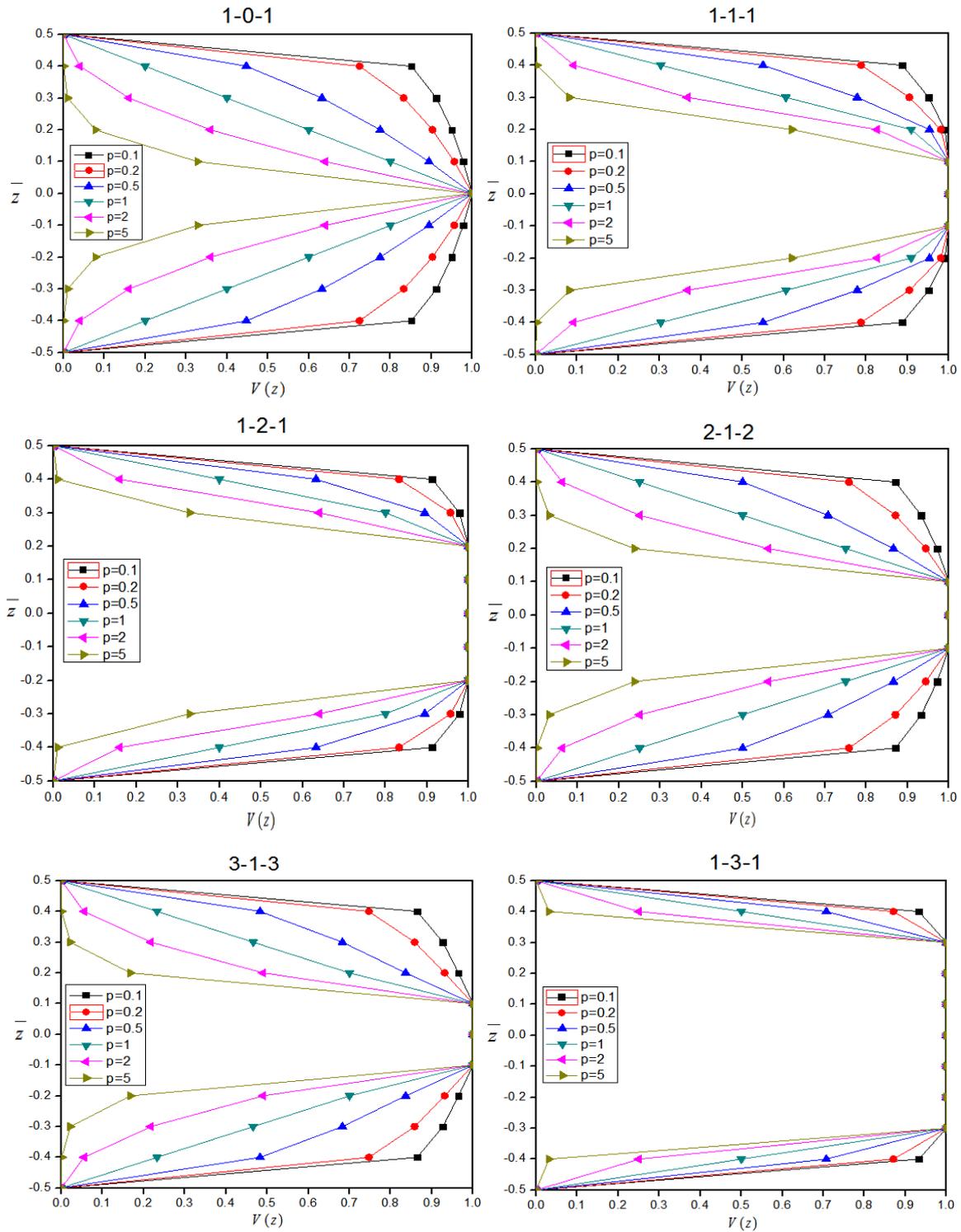


Figure IV.3 : Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes configurations des plaques sandwiches avec $p = 0.1, 0.2, 0.5, 2, 5$ et

$$k = 0$$

- (a) Plaque sandwichée en FGM (1-0-1), (b) Plaque sandwichée en FGM (1-1-1),
- (c) Plaque sandwichée en FGM (1-2-1), (d) Plaque sandwichée en FGM (2-1-2),
- (e) Plaque sandwichée en FGM (3-1-3), (f) Plaque sandwichée en FGM (1-3-1).

3) Cinématique et équation constitutives

3.1. Champ de déplacement

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement de la théorie classique de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur peut être exprimé par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z) \theta_x(x, y) \quad (\text{IV.13.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z) \theta_y(x, y) \quad (\text{IV.13.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.13.c})$$

Où u_0 ; v_0 ; w_0 , $\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$ sont les cinq déplacements inconnus du plan médian de la plaque et $\psi(z)$ est la fonction définissant la variation des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur.

3.2. Une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables

En supposant que les rotations de la yz et xz causées par le cisaillement $\phi_x = \int \theta(x, y) dx$, $\phi_y = \int \theta(x, y) dy$ et la cinématique de la théorie raffinée à quatre variables actuelles peuvent être trouvées sous une forme plus simple comme [72-77] :

Notre champ de déplacement est obtenu en s'appuyant sur les hypothèses suscitées, en utilisant les équations:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{IV.14.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV.14.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.14.c})$$

Où k_1 et k_2 sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque et $f(z)$ représente la fonction de forme définissant la variation des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur. Dans notre travail, la fonction de forme est considérée sur la base de la fonction hyperbolique donnée par :

$$f(z) = z - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} z^n, \quad n = (3, 5, 7, 9, \dots) \quad (\text{IV.15})$$

Tel que dérivé de cette fonction égale numériquement à la rotation de la section transversale en incluant la fonction $g(z)$ qui est donnée par l'équation (IV.16):

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.16})$$

3.3. Champ de déformation

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements définis dans l'équation (IV.14.a-c)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.18.a})$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.18.b})$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier et peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.19})$$

Les coefficients A' et B' sont formulés en fonction de la méthode de Navier et sont définis par :

$$A' = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad B' = -\frac{1}{\mu^2}, \quad k_1 = \lambda^2, \quad k_2 = \mu^2 \quad (\text{IV.20})$$

Où λ et μ sont définis dans l'expression (IV.21).

$$\lambda = \pi / a, \quad \mu = \pi / b \quad (IV.21)$$

3.4. Les équations constitutives

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour les plaques sandwiches en FGM peut être déterminée par les relations contrainte-déformation de la n^{th} couche pour l'état de contrainte plane, y compris les influences thermiques comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{Avec } (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (IV.22)$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. En utilisant la loi des mélanges définis dans l'équation (IV.8), les coefficients de rigidité, $c_{ij}^{(n)}$ sont exprimées par :

$$c_{11}^{(n)} = c_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\mu^{(n)})^2}, \quad (IV.23.a)$$

$$c_{12}^{(n)} = \mu^{(n)} c_{11}^{(n)} \quad (IV.23.b)$$

$$c_{44}^{(n)} = c_{55}^{(n)} = c_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1 + \mu^{(n)})} \quad (IV.23.c)$$

Le module de Young, les coefficients de rigidité $c_{ij}(z)$ et les coefficients de dilatation thermique $\alpha(z)$ varient selon la loi de mélange définis dans l'épaisseur selon l'équation (IV.8). Le champ de température généralisé qui varie sur l'épaisseur de la plaque peut être écrit comme suit :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{f(z)}{h} T_3(x, y) \quad (IV.24)$$

Où T_1, T_2 et T_3 sont des charges thermiques.

3.5. Détermination des équations d'équilibre

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites, le principe des travaux virtuels dit le principe d'énergie d'Hamilton est appliqué, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels pour le problème de flexion thermomécanique d'une plaque sandwich fonctionnellement graduée est exprimé comme suit [78-86] :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (IV.25)$$

Où δU est l'énergie de déformation virtuelle, δV est le travail virtuel externe sous l'effet d'un chargement externe appliqué à la plaque.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[\begin{array}{l} \sigma_x^{(n)} (\varepsilon_x - \alpha T)^{(n)} + \sigma_y^{(n)} (\varepsilon_y - \alpha T)^{(n)} + \\ \tau_{xy}^{(n)} \gamma_{xy}^{(n)} + \tau_{yz}^{(n)} \gamma_{yz}^{(n)} + \tau_{xz}^{(n)} \gamma_{xz}^{(n)} \end{array} \right] dV \quad (IV.26)$$

En substituant les expressions énergétiques appropriées on peut déterminer :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \left[\begin{array}{l} \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z M_x^b \delta k_x^b + \\ + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \end{array} \right] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w_0 d\Omega = 0 \quad (IV.27)$$

Où Ω est la surface supérieure et q est la charge transversale répartie.

Substituons les équations (IV.17) et (IV.22) dans l'équation (IV.27) et en l'intégrant dans l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV.27) selon le principe du travail virtuel peut être réécrite comme suit :

$$\int_{\Omega} \left[\begin{array}{l} N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + \\ M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + \\ M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \end{array} \right] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w_0 d\Omega = 0 \quad (IV.28)$$

Avec

$$\begin{aligned} (N_i, M_i^b, M_i^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (1, z, f(z)) \sigma_i^{(n)} dz, (i = x, y, xy) \\ (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} g(z) (\tau_{yz}, \tau_{xz})^{(n)} dz \end{aligned} \quad (IV.29)$$

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

Où N , M et Q sont les résultantes des contraintes, h_n et h_{n-1} sont les coordonnées supérieure et inférieure de la nième couche n^{th} de la plaque suivant l'épaisseur (l'axe z).

En Substituant l'équation (IV.17) et l'équation (IV.22) dans l'équation (IV.28) et ensuite en intégrant l'équation résultante par parties, on peut obtenir le résultat du moment M et de la contrainte N comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M^b\} \\ \{M^s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [C] \\ [B] & [D] & [F] \\ [C] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{k^b\} \\ \{k^s\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^{bT}\} \\ \{M^{sT}\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{44} & 0 \\ 0 & J_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (IV.30)$$

Avec

$$\{N\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T, \quad \{M^b\} = \{M_x^b \ M_y^b \ M_{xy}^b\}^T, \quad \{M^s\} = \{M_x^s \ M_y^s \ M_{xy}^s\}^T, \quad (IV.31.a)$$

$$N = \{N_x^T \ N_y^T \ 0\}^T, \quad \{M^{bT}\} = \{M_x^{bT} \ M_y^{bT} \ 0\}^T, \quad \{M^{sT}\} = \{M_x^{sT} \ M_y^{sT} \ 0\}^T, \quad (IV.31.b)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0 \ \varepsilon_y^0 \ \gamma_{xy}^0\}^T, \quad k^b = \{k_x^b \ k_y^b \ k_{xy}^b\}^T, \quad k^s = \{k_x^s \ k_y^s \ k_{xy}^s\}^T, \quad (IV.31.c)$$

D'où les contraintes peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) .

On peut déduire les équations suivantes:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & C_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & F_{66} \\ C_{11} & C_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 & H_{11} & H_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & F_{12} & F_{22} & 0 & H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & F_{66} & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^T \\ M_y^T \\ 0 \\ M_x^T \\ M_y^T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.32.a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{44} & 0 \\ 0 & J_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (IV.32.b)$$

A_{ij} , D_{ij} et B_{ij} sont respectivement la rigidité en extension, en flexion et en flexion / extension. C_{ij} , F_{ij} , H_{ij} sont les composantes de rigidité associées aux effets de cisaillement transversal. Elles sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} & \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} = \\ & \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} c_{ij}^{(n)} \{1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)\} dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \end{aligned} \quad (IV.33)$$

Et

$$J_{ii} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} c_{ii}^{(n)} [g(z)]^2 dz, \quad (i = 4, 5) \quad (IV.34)$$

Les contraintes et les moments résultants du chargement thermique ($N_x^T, N_y^T, M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT}$ et M_y^{sT}) sont définis par:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} (c_{11} + c_{12}) \alpha T \\ (c_{12} + c_{22}) \alpha T \end{Bmatrix}^{(n)} dz \quad (IV.35.a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} (c_{11} + c_{12}) \alpha T \\ (c_{12} + c_{22}) \alpha T \end{Bmatrix}^{(n)} z dz \quad (IV.35.b)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^{sT} \\ M_y^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} (c_{11} + c_{12}) \alpha T \\ (c_{12} + c_{22}) \alpha T \end{Bmatrix}^{(n)} f(z) dz \quad (IV.35.c)$$

3.6. Les équations gouvernantes de la plaque

En substituant les expressions de déplacements-déformations ainsi que les contraintes-déformations qui sont définies respectivement par les équations (IV.17) et (IV.18) et les expressions contraintes-déformation (IV.22), ensuite en intégrant par parties tout en mettant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta$ égalent à zéro.

Les équations du mouvement obtenues sont données sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\
 \delta \theta : \quad & -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \\
 & k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{IV.36}$$

En remplaçant l'équation (IV.32) dans l'équation (IV.36), les équations gouvernantes de la présente théorie d'ordre élevé avancé peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) comme :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} A_{11} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} A_{66} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} (A_{66} + A_{12}) - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} B_{11} + \frac{\partial \theta}{\partial x} (C_{11} K_1 + C_{12} K_2) \\
 & - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} (2B_{66} + B_{12}) + \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} (K_1 A' + K_2 B') C_{66} = \frac{\partial N_x^T}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{IV.37.a}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} (A_{12} + A_{66}) - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} (2B_{66} + B_{12}) + \frac{\partial \theta}{\partial y} (K_1 C_{12} + K_2 C_{22}) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} A_{66} \\
 & + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} A_{22} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} B_{22} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} (K_1 A' + K_2 B') C_{66} = \frac{\partial N_y^T}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{IV.37.b}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} B_{11} - \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} D_{11} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} (K_1 F_{11} + K_2 F_{12}) - \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} (2D_{12} + 4D_{66}) + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} (2B_{66} + B_{12}) \\
 & + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} (K_1 F_{12} + K_2 F_{22}) + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} (2B_{66} + B_{12}) + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} B_{22} - \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} D_{22} \\
 & + \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} 2(K_1 A' + K_2 B') F_{66} = \frac{\partial^2 M_x^{bT}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^{bT}}{\partial y^2} - q
 \end{aligned} \tag{IV.37.c}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial u_0}{\partial x} (K_1 C_{11} + K_2 C_{12}) - \frac{\partial v_0}{\partial y} (K_1 C_{12} + K_2 C_{22}) + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} (K_1 F_{11} + K_2 F_{12}) + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} (K_1 F_{12} + K_2 F_{22}) \\
 & - \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} (K_1 A' + K_2 B') C_{66} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} (K_1 A' + K_2 B') C_{66} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} (K_1 A' + K_2 B') 2F_{66} \\
 & - (K_1 A' + K_2 B') (K_1 A' + K_2 B') \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} H_{66} + K_1 A' J_{55} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + K_2 B' J_{44} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + K_1 M_x^{sT} + K_2 M_y^{sT} \\
 & - \theta (K_1^2 H_{11} + K_2^2 H_{22} + 2K_1 K_2 H_{12})
 \end{aligned} \tag{IV.37.d}$$

4) Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM

Les plaques rectangulaires sont généralement classées selon le type support utilisé. Pour notre cas on considère une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une longueur a et une largeur b soumis à un chargement thermomécanique. Pour résoudre ce problème, Navier a présenté les charges transversales mécaniques q et thermiques T_i à travers l'épaisseur de la plaque sandwich en FGM est supposée être [42, 45, 53, 58, 87-89] sous la forme d'une double série trigonométrique tel que :

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV.38})$$

Où T_1 , T_2 et T_3 sont les charges thermiques uniformes linéaires et non linéaires selon l'épaisseur de la plaque sandwich, respectivement, et q désigne la charge mécanique.

q_0 , t_1 , t_2 et t_3 sont des constantes, λ, μ sont données par l'équation (IV.21)

Dans cette étude, la plaque est simplement appuyée dont les conditions aux quatre bords sont:

$$\begin{aligned} x=0, a: v_0 = w_0 = \theta = 0, \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad y=0, b: u_0 = w_0 = \theta = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ N_x = 0, M_x^b = M_x^s = 0, \quad N_y = 0, M_y^b = M_y^s = 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

La solution de Navier est employée afin de déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les variables du déplacement sont écrites comme produit de paramètres arbitraires et fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations de mouvement et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \theta_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

Où U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} et θ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer (fonctions inconnues).

En remplaçant les équations (IV.38) et (IV.40) dans l'équation (IV.30) et les résultats qui en résultent dans l'Eq. (IV.36), on obtient l'opérateur suivant:

$$[k]\{\Delta\} = \{p\} \quad (\text{IV.41})$$

Chapitre IV : Formulations théoriques de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une théorie d'ordre élevé avancé

Où $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \theta_{mn}\}^T$ et K_{ij} sont les éléments de la matrice symétrique.

On peut écrire le système sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \theta_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

Où :

$$K_{11} = A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2$$

$$K_{12} = \lambda\mu(A_{12} + A_{66})$$

$$K_{13} = -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2]$$

$$K_{14} = \lambda[k_1A'C_{11}\lambda^2 + (k_2B'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66})\mu^2]$$

$$K_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2$$

$$K_{23} = -\mu[B_{22}\mu^2 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2]$$

$$K_{24} = \mu[k_2B'C_{22}\mu^2 + (k_1A'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66})\lambda^2]$$

(IV.43)

$$K_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4$$

$$K_{34} = -k_1A'F_{11}\lambda^4 - [(k_1A' + k_2B')F_{12} + 2(k_1A' + k_2B')F_{66}]\lambda^2\mu^2 - k_2B'F_{22}\mu^4$$

$$K_{44} = k_1^2A'^2H_{11}\lambda^4 + [2k_1k_2A'B'H_{12} + (k_1A' + k_2B')^2H_{66}]\lambda^2\mu^2 + k_2^2B'^2H_{22}\mu^4 + k_1^2A'^2J_{55}\lambda^2 + k_2^2B'^2H_{22}\mu^2$$

Les composantes du vecteur de force généralisé $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^T$ sont données par :

$$P_1 = -\lambda(A^T t_1 + B^T t_2 + C^T t_3),$$

$$P_2 = -\mu(A^T t_1 + B^T t_2 + C^T t_3),$$

$$P_3 = q_0 + h(\lambda^2 + \mu^2)(B^T t_1 + D^T t_2 + F^T t_3),$$

$$P_4 = h(\lambda^2 + \mu^2)(C^T t_1 + F^T t_2 + G^T t_3),$$

(IV.44)

Dans la quelle:

$$\{A^T, B^T, D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\mu^{(n)})^2} (1 + \mu^{(n)}) \alpha^{(n)} \left\{ 1, \bar{z}, \bar{z}^2 \right\} dz \quad (\text{IV.45.a})$$

$$\{C^T, F^T, G^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\mu^{(n)})^2} (1 + \mu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{f}(z) \left\{ 1, \bar{z}, \bar{f}(z) \right\} dz \quad (\text{IV.45.b})$$

Avec $\bar{z} = z/h, \bar{f}(z) = f(z)/h$.

5) Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé avancé.

La théorie actuelle ne contient que quatre variables et quatre équations gouvernantes, mais n'exige pas de facteurs de correction de cisaillement, et donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de nullité de ses dernières sur les bords libres.

Dans cette étude, la plaque sandwich est composée de deux peaux et un cœur. Afin d'étudier deux types de structures sandwiches dont la première est le noyau en P-FGM et la deuxième en S-FGM symétrique. On assume que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque sandwich seulement selon une distribution de loi de puissance. Les équations d'équilibres pour la plaque sandwich en FGM ont été obtenues par l'utilisation du principe d'énergie des travaux virtuels. Les solutions analytiques et les relations analytiques de dispersion sont obtenues en résolvant un problème de valeur propre en utilisant la solution Navier.

La résolution du problème dépasse le strict cadre de l'étude bibliographique. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories trouvées dans la littérature.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES (Chapitre IV)

- [1] Vinson JR. Sandwich structures. *ApplMech Rev*;54(3):201–14, (2001).
- [2] Vinson JR. Sandwich structures: past, present, and future. In: Thomsen OT, Bozhevolnaya E, Lyckegeard A, editors. *Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials*. Netherlands: Springer, p. 3–12, (2005).
- [3] Lindström A, Hallström S. Energy absorption of SMC/balsa sandwich panels with geometrical triggering features. *Compos Struct*, 92(11):2676–84, (2010).
- [4] M. Koizumi, *FGM Activities in Japan*. Composites, Part B: Engineering, vol. 28, pp. 1–4, (1997).
- [5] C.H. Hsueh and S. Lee, Modeling of Elastic Thermal Stresses in Two Materials Joined by a Graded Layer. *Composites, Part B: Engineering*, vol. 34, pp. 747–752, (2003).
- [6] Benferhat, R., Hassaine Daouadji, T., Hadji, L., Said Mansour, M. (2016), “Static analysis of the FGM plate with porosities”, *Steel Compos. Struct.*,21(1), 123 – 136.
- [7] Aldousari, S.M. (2017), "Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam", *Appl. Phys.A*, 123, 296.
- [8] Ebrahimi, F., Daman, M. (2017), “Nonlocal thermo-electro-mechanical vibration analysis of smart curved FG piezoelectric Timoshenko nanobeam”, *Smart Structures and Systems*, 20(3), 351-368.
- [9] Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", *Struct. Eng. Mech.*, 64(2), 145-153.
- [10] Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M.S.A., Bourada, A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, 25(6), 717-726.
- [11] Lal, A., Jagtap, K.R., Singh, B.N. (2017), “Thermo-mechanically induced finite element based nonlinear static response of elastically supported functionally graded plate with random system properties”, *Advances in Computational Design*, 2(3), 165-194.
- [12] Avcar, M, Mohammed, W.K.M. (2018), “Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation”, *Arab. J. Geosci.*, 11, 232.
- [13] Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S. (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations", *Struct. Eng. Mech.*, 65(4), 453-464.
- [14] Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A.R., Mokhtari, M. (2018), “Static analysis of functionally graded non-prismatic sandwich beams”, *Advances in Computational Design*, 3(2), 165-190.

- [15] Selmi, A., Bisharat, A. (2018), "Free vibration of functionally graded SWNT reinforced aluminum alloy beam", *Journal of Vibroengineering*, 20(5), 2151-2164.
- [16] Belabed, Z., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate", *Earthquakes and Structures*, 14(2), 103-115.
- [17] Bensaid, I., Bekhadda, A., Kerboua, B. (2018), "Dynamic analysis of higher order shear-deformable nanobeams resting on elastic foundation based on nonlocal strain gradient theory", *Advances in Nano Research*, 6(3), 279-298.
- [18] Soliman, A.E., Eltahir, M.A., Attia, M.A., Alshorbagy, A.E. (2018), "Nonlinear transient analysis of FG pipe subjected to internal pressure and unsteady temperature in a natural gas facility", *Structural Engineering and Mechanics*, 66(1), 85-96.
- [19] Fourn, H., Ait Atmane, H., Bourada, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates", *Steel and Composite Structures*, 27(1), 109-122.
- [20] Akbas, S.D. (2018), "Forced vibration analysis of cracked functionally graded microbeams", *Advances in Nano Research*, 6(1), 39-55.
- [21] Faleh, N.M., Ahmed, R.A., Fenjan, R.M. (2018), "On vibrations of porous FG nanoshells", *International Journal of Engineering Science*, 133, 1-14.
- [22] Avcar, M. (2019), "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603-615.
- [23] Addou, F.Y., Meradjah, M., M.A.A, Bousahla, Benachour, A., Bourada, F., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2019), "Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT", *Computers and Concrete*, (submitted).
- [24] Hellal, H., Bourada, M., Hebali, H., Bourada, F., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R. (2019), "Dynamic and stability analysis of functionally graded material sandwich plates in hygro-thermal environment using a simple higher shear deformation theory", *Journal of Sandwich Structures & Materials*. <https://doi.org/10.1177/1099636219845841>.
- [25] Karami, B., Shahsavari, D. (2019), "Nonlocal strain gradient model for thermal stability of FG nanoplates integrated with piezoelectric layers", *Smart Structures and Systems*, 23(3), 215-225.
- [26] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1— Deflection and stresses. *Int J SolidsStruct*;42 (18):5224–42, (2005).
- [27] Librescu L, Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey. *Compos Struct* 2000;48(1– 3):1–17.
- [28] Shen HS, Li SR. Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties. *Compos Pt B-Eng* 2008;39(2):332–44.

- [29] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Compos Struct* 2010;93(1):93–102.
- [30] Sobhy M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Compos Struct* 2013;99:76–87.
- [31] Fazzolari FA. Natural frequencies and critical temperatures of functionally graded sandwich plates subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Compos Struct* 2015;121:197–210.
- [32] Kashtalyan M, Menshykova M. Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core. *Compos Struct* 2009;87 (1):36–43.
- [33] Alibeigloo A, Liew KM. Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity. *Compos Struct* 2014;113:23–30.
- [34] Liu B, Ferreira AJM, Xing YF, Neves AMA. Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method. *Compos Struct* 2016;136:546–53.
- [35] Reddy JN, Cheng ZQ. Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. *Eur J Mech A-Solids* 2001;20(5): 841e55.
- [36] Shariyat, M, “A generalized high-order global–local plate theory for nonlinear bending and buckling analyses of imperfect sandwich plates subjected to thermo-mechanical loads”, *Compos. Struct.*, 92(1), 130-143, 2010.
- [37] Matsunaga H. Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. *Compos Struct* ;87:344–57. 2009.
- [38] S.S. Vel and R.C. Batra, Exact Solution for Thermoelastic Deformations Of Functionally Graded Thick Rectangular Plates. *AIAA Journal*, vol. 40, pp. 1421–1433, 2002.
- [39] S. S.Vel and R. C. Batra, Three-Dimensional Analysis of Transient Thermal Stresses in Functionally Graded Plates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 7181–7196, 2003.
- [40] J.Woo and S.A. Meguid, Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 7409–7421, 2001.
- [41] Shen HS. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. *Int J Mech Sci* 2002;44(3): 561e84.
- [42] Zenkour AM, Allam MNM, Radwan AF, EI-Mekawy HF. Thermo-mechanical bending response of exponentially graded thick plates resting on elastic foundations. *Int J Appl Mech* 2015;7(04):1550062.

- [43] Tounsi A, Houari MSA, Benyoucef S. Adda Bedia, E.A. refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *AerospSciTechnol*;24(1):209-220, (2013).
- [44] Mohamed Z., Tounsi A., Houari M. S. A., AddaBedia E. A., O. Anwar Bég , Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory” *Aerospace Science and Technology*, 34, 24-34, (2014).
- [45] Houari MSA, Tounsi A, Bég OA. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory. *Int J MechSci*, 76(6):102–111, (2013).
- [46] Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), “Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 15(2), 221-245.2013.
- [47] Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, 39(9), 2489-2508.2015.
- [48] Boudarba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104, 2013.
- [49] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.2015.
- [50] Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(6), 1493-1515, 2015.
- [51] Zenkour AM. The effect of transverse shear and normal deformations on the thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Int J ApplMech*, 1(04):667–707, (2009).
- [52] Zenkour AM, Alghamdi NA. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *MechAdv Mater Struct*, 17(6):419–32, (2010).
- [53] Zenkour AM, Alghamdi NA. Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates. *J Sandwich Struct Mater*, 12(1):7–46, (2010).
- [54] Kar, V.R. and Panda, S.K. “Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(4), 661-679.2015.
- [55] Kar, V.R., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K, “Nonlinear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygro-thermo-mechanical loading”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(4), 1011-1033, 2015.
- [56] Kar, V.R. and Panda, S.K, “Nonlinear thermomechanical behaviour of FGM cylindrical / hyperbolic/ elliptical shell panel with TD and TID properties”, *J. Press. Vessel Technol. ASME*, 138(6), 061206., 2016.

- [57] Mahapatra, R., Panda, S.K. and Kar, V.R, “Nonlinear flexural analysis of laminated composite panel under hygro-thermo-mechanical loading – A micromechanical approach”, *Int. J. Computat. Methods*, 13(3), 1650015(1-33), 2016.
- [58] Li D, Deng Z, Xiao H. Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory. *Compos Pt BEng*, 106:107–19, (2016).
- [59] Alibeigloo A. Three-dimensional thermo-elasticity solution of sandwich cylindrical panel with functionally graded core. *Compos Struct*, 107:458–68, (2014).
- [60] Reddy J. N, «*A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates*», *ASME J. Appl. Mech*, vol. 51, n° 14, p. 745–752, 1984.
- [61] Touratier.M, «*An efficient standard plate theory*». *Engng Sci*, vol. 29, n°. 8, pages 901,916, 1991.
- [62] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). «*Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity*», *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- [63] Hassaine Daouadji.T, A. Tounsi, L.Hadji, A.Hadj Henni, E.Adda Bedia, «*A theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plats*», *Materials Physics and Mechanics*, 14 (2012) 110-128, Received: May 11, 2012;
- [64] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Adda Bedia, E.A. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *J. Sandw.Struct.Mater.*,14(1), 5-33.
- [65] Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A. (2013), “Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model”, *Steel and Composite Structures*, 15(4), 399-423.
- [66] Mantari, J. L., & Monge, J. C. (2016).“Buckling, free vibration and bending analysis of functionally graded sandwich plates based on an optimized hyperbolic unified formulation”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 119, 170–186.
- [67] F. Delale., F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [68] Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A and Bedia, E.A.A. (2011), “Two-variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”, *J Therm Stresses.*, 34(4),315–334.
- [69] Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater.Struct.*, 23(4), 423-431.

- [70] Asnafi, A., and Abedi, M. (2015), "A complete analogical study on the dynamic stability analysis of isotropic functionally graded plates subjected to lateral stochastic loads", *Acta Mechanica*, 226(7), 2347–2363.
- [71] Li, D., Deng, Z., Chen, G., Xiao, H. and Zhu, L. (2017), "Thermomechanical bending analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded core", *Composite Structures.*, 169, 29-41.
- [72] Bourada, F., Amara, K. and Tounsi, A. (2016), "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory", *Steel Compos. Struct.*, 21(6), 1287-1306.
- [73] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Struct. Syst.*, 19(3), 289-297.
- [74] Ait Atmane, H, Tounsi, A., Bernard, F. (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1), 71-84.
- [75] Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Geomech. Eng.*, 13(3), 385-410.
- [76] Khetir, H., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates", *Struct. Eng. Mech.*, 64(4), 391-402.
- [77] Elmoossouess, B., Kebdani, S., Bachir Bouiadjra, M. and Tounsi, A.(2017), "A novel and simple HSDT for thermal buckling response of functionally graded sandwich plates", *Structural Engineering and Mechanics.*, 62(4), 401-415.
- [78] Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion," *Struct. Eng. Mech.*, 60(2), 313-335.
- [79] Klouche, F., Darcherif, L., Sekkal, M., Tounsi, A., and Mahmoud, S.R. (2017), "An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates", *Structural Engineering and Mechanics*, 63(4), 439-446.
- [80] Bourada, F., Amara, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates", *Structural Engineering and Mechanics*, 68(6), 661-675.
- [81] Zine, A., Tounsi, A., Draiche, K., Sekkal, M., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells", *Steel and Composite Structures*, 26(2), 125-137.

- [82] Mokhtar, Y., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel shear deformation theory for buckling analysis of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity theory", *Smart Structures Systems*, 21(4), 397-405.
- [83] Yazid, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A. (2018), "A novel nonlocal refined plate theory for stability response of orthotropic single-layer graphene sheet resting on elastic medium", *Smart Structures and Systems.*, 21(1), 15-25.
- [84] Tounsi, A., Ait Atmane, H., Khiloun, M., Sekkal, M., Taleb, O., Bousahla, A.A. (2019), "On buckling behavior of thick advanced composite sandwich plates", *Composite Materials and Engineering*, 1(1), 1-19.
- [85] Draiche, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Alwabli, A.S., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2019), "Static analysis of laminated reinforced composite plates using a simple first-order shear deformation theory", *Computers and Concrete*, (submitted).
- [86] Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, SR. (2019), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 21(2), 727-757.
- [87] Zenkour, A. M. (2012), "Hygrothermal effects on the bending of angle-ply composite plates using a sinusoidal theory", *Composite Structures.*, 94, 3685–3696.
- [88] Mantari, J.L. and Granados, E.V. (2015b), Thermoelastic analysis of advanced sandwich plates based on a new quasi-3D hybrid type HSDT with 5 unknowns", *Compos Pt Beng.*, 69, 317–34.
- [89] Taibi, F.Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 17 (2), 99-129.

Chapitre V
Résultats et discussions de
l'analyse thermomécanique
des plaques sandwiches en
FGM en utilisant une
nouvelle théorie d'ordre
élevé avancé

Chapitre V : Résultats et discussions de l'analyse thermomécanique des plaques sandwiches en FGM en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevé avancé

1) Introduction

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie de déformation d'ordre élevé avancé.

Le nombre d'inconnues pour la présente théorie est seulement quatre comme pour la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre « FSDT » sans pour autant utiliser un facteur de correction pour l'effet de cisaillement. La théorie prend en considération la déformation du cisaillement et elle donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de nullité de ces dernières sur les bords libres.

On suppose que les propriétés matérielles (le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de la plaque sandwich varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants.

Plusieurs configurations pour la plaque sandwich seront utilisées. Les effets de la déformation de cisaillement transversale, de la charge thermique, du rapport des dimensions de la plaque (a/b), du rapport longueur-épaisseur (a/h), et des indices de puissance de la fraction volumique (p , k) sur le comportement thermomécanique de la plaque sandwich fonctionnellement graduées seront discutés. Quelques exemples illustratifs seront aussi présentés et des comparaisons avec les résultats trouvés par les différentes théories de déformation seront proposées pour vérifier l'exactitude et la performance de la présente théorie.

2) Présentation du logiciel de calcul

Dans cette partie, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution de programme de calcul Maple, c'est un logiciel propriétaire de calcul formel développé depuis les années 1980 au sein du Symbolic Computation Group de l'université de Waterloo en Ontario (Canada) ou la première version publique était publiée en 1985,

actuellement édité par la société canadienne Maplesoft. Il est disponible en plusieurs langues et sous différentes versions.

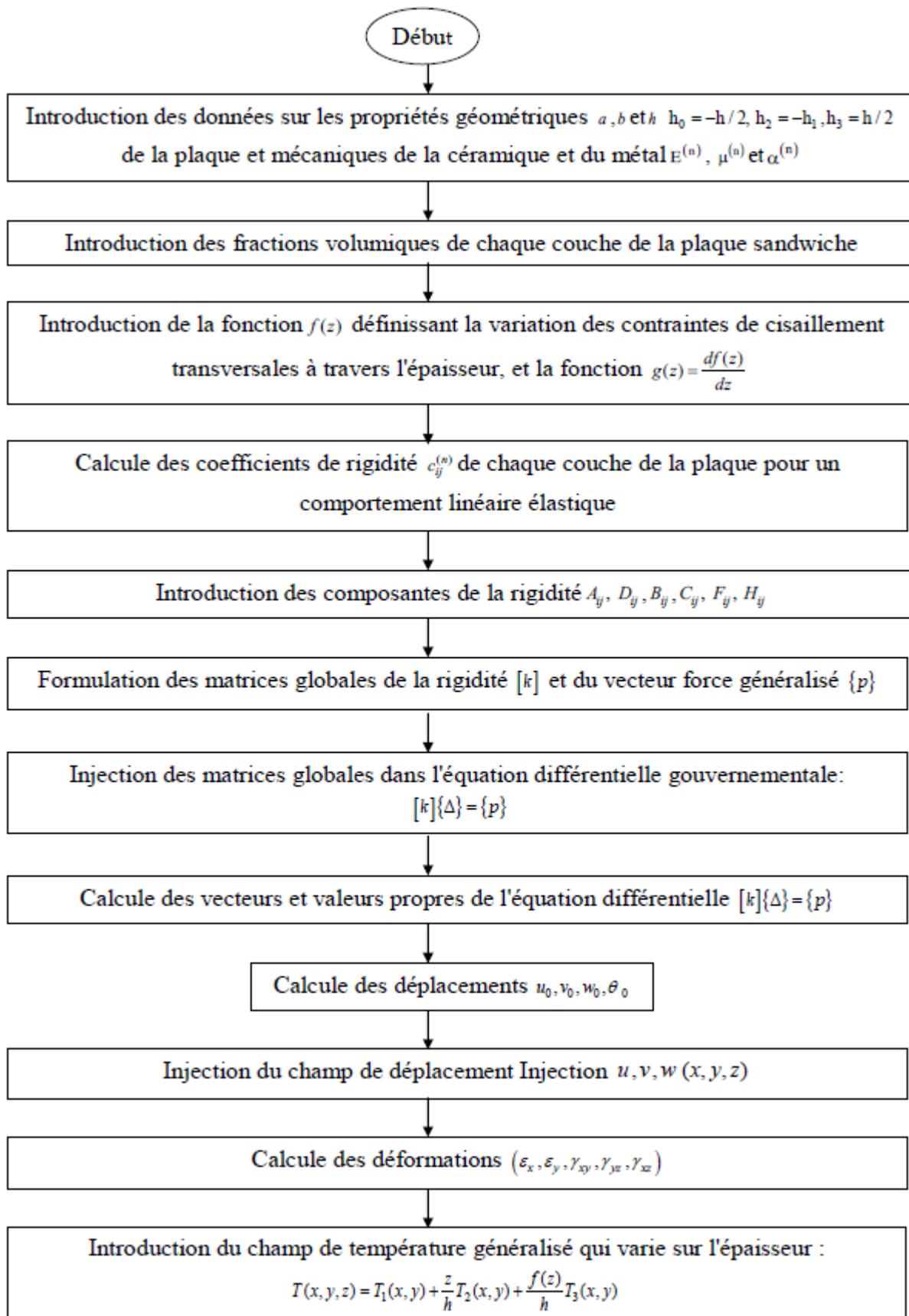
Les objets de base du calcul sont les expressions mathématiques, représentées sous forme de graphes orientés acycliques. Maple fournit un langage de programmation spécifique qui est à la fois le langage d'utilisation interactive et celui dans lequel est écrite la plus grande partie de la bibliothèque mathématique du logiciel.

Des applications sont présentées dans un numéro spécial d'un bulletin d'information créé par les développeurs de Maple appelé MapleTech telle que des sciences et des mathématiques allant de la démonstration du dernier théorème de Fermat en théorie des nombres, à des problèmes de la relativité générale et de la mécanique quantique.

Le logiciel permet aussi bien de travailler sur des quantités numériques (entières, réelles, complexes) qu'avec des polynômes, des fonctions, ou des séries. Maple réalise des dérivations, des intégrations, des résolutions de systèmes d'équations linéaires, des inversions de matrices, des développements asymptotiques ou encore des résolutions d'équations différentielles sous forme symbolique, c'est-à-dire en gardant des inconnues dans la résolution.

Au-delà des fonctionnalités de calcul formel et de programmation à proprement parler, Maple permet par de copier et coller dans un traitement de texte les formules mathématiques issues des calculs, de tracer des courbes et surfaces, ou encore de générer des programmes numériques en langage C. Il offre un mode console et un mode graphique. Il est disponible sur la majorité des systèmes d'exploitation (GNU/Linux, Macintosh, Windows).

L'organisation générale de la présente étude qui est basé sur le développement mathématique du modèle d'un chargement thermomécanique appliqué sur une plaque sandwich en FGM composée de trois couches sous différents paramètres mécaniques et géométriques est illustrée par l'organigramme suivant :



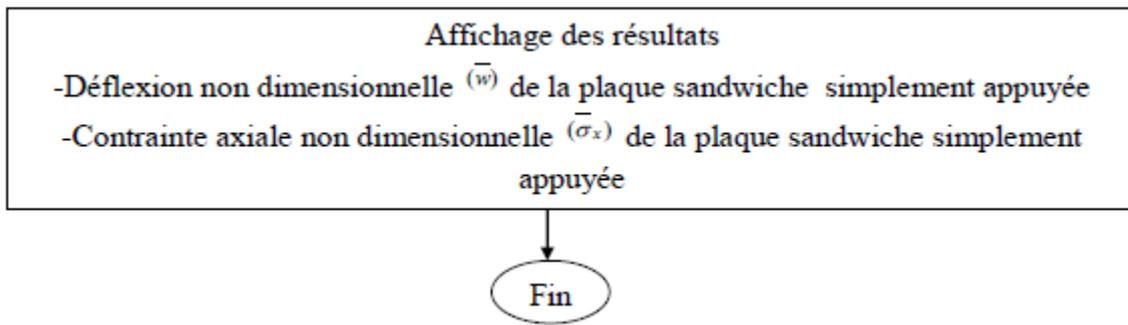


Figure V.1 : Organigramme effectué pour notre calcul.

3) Résultats numériques et discussions

Dans cette partie, les déflexions et les contraintes d'une plaque sandwich soumise à un chargement thermomécanique sont présentées et comparées aux solutions existantes pour vérifier la précision de l'actuelle théorie proposée dans le calcul. L'analyse thermomécanique de la flexion est conduite pour des combinaisons de métal et de céramique. Le métal utilisé est un alliage de titane ($Ti-6Al-4V$) et une céramique de type oxyde de zirconium (ZrO_2). Pour simplifier les calculs, on supposera que le coefficient de poisson est constant en tout point de l'épaisseur de la plaque. Les modules de Young, le coefficient de Poisson et les coefficients de dilatation thermique de la céramique et du métal utilisés sont énumérés dans le tableau V.1. Il est supposé, $a/h = 10$, $q_0 = 100$ Pa, $t_1 = 0$, $t_2 = t_3 = 100$ K.

Tableau V.1 : Propriétés matérielles du métal et de la céramique

| Propriétés | Métal: $Ti-6Al-4V$ | Céramique: ZrO_2 |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| E_i (GPa) | 66.2 | 117.0 |
| μ_i | 1/3 | 1/3 |
| $\alpha(10^{-6} / K)$ | 10.3 | 7.11 |

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle [1]. Les résultats sont présentés dans les formes normalisées suivantes pour les déplacements et les contraintes. Il s'agit respectivement de la flèche maximale adimensionnelle \bar{w} et la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$:

$$\bar{w} = \frac{10^3}{q_0 a^4 / (E_0 h^3) + 10^3 \alpha_0 t_2 a^2 / h} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad (V.1)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{10}{q_0 a^2 / h^2 + 10 E_0 \alpha_0 t_2 a^2 / h^2} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \quad (\text{V.2})$$

Où les valeurs de référence sont prises comme $E_0 = 1 \text{ GPa}$, $\alpha_0 = 10^{-6} / \text{K}$. Les résultats sont divisés en trois parties.

3.1. ANALYSE DE LA FLEXION D'UNE PLAQUE SANDWICHE AVEC DEUX FACES EN FGM ET UN NOYAU HOMOGENE ($k = 0$) SOUMIS A DES CHARGES THERMOMECHANIQUES

Dans cette partie, l'analyse thermomécanique de la flexion d'une plaque sandwich (type A) avec des faces supérieure et inférieure en FGM et un noyau homogène est présentée dans des tableaux. Les résultats numériques (tableaux V.2 à V.4) sont comparés à ceux donnés par la première théorie de la déformation par cisaillement (FSDT) développée par Zenkour et Alghamdi [2] et la théorie de la plaque raffinée présentée par Li et al [3].

Tableau V.2: Comparaison de la flèche adimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque sandwich carrée (type A) avec deux faces supérieure et inférieure en FGM et un noyau homogène ($k = 0$) soumise à une charge thermomécanique ($a/h = 10$)

| p | Théorie | $\bar{w}(a/2, b/2)$ | | | |
|-----|----------------|---------------------|----------|----------|----------|
| | | 1-0-1 | 3-1-3 | 2-1-2 | 1-1-1 |
| 0 | FSDPT [2] | 0.895735 | 0.895735 | 0.895735 | 0.895735 |
| | RPT [3] | 0.864140 | 0.864140 | 0.864140 | 0.864140 |
| | présente (n=3) | 0.864140 | 0.864140 | 0.864140 | 0.864140 |
| | présente (n=5) | 0.919184 | 0.919184 | 0.919184 | 0.919184 |
| | présente (n=7) | 0.937534 | 0.937534 | 0.937534 | 0.937534 |
| 1 | FSDPT [2] | 1.190728 | 1.170533 | 1.160568 | 1.132449 |
| | RPT [3] | 1.149038 | 1.130125 | 1.120741 | 1.094113 |
| | présente (n=3) | 1.149038 | 1.130125 | 1.120741 | 1.094113 |
| | présente (n=5) | 1.220801 | 1.200618 | 1.190618 | 1.162286 |
| | présente (n=7) | 1.244390 | 1.223761 | 1.213547 | 1.184630 |
| 2 | FSDPT [2] | 1.257304 | 1.238234 | 1.227765 | 1.195703 |
| | RPT [3] | 1.210756 | 1.193444 | 1.183826 | 1.154061 |
| | présente (n=3) | 1.210756 | 1.193444 | 1.183826 | 1.154061 |
| | présente (n=5) | 1.286561 | 1.267886 | 1.257549 | 1.225680 |
| | présente (n=7) | 1.311590 | 1.292411 | 1.281807 | 1.249166 |
| 3 | FSDPT [2] | 1.280741 | 1.264724 | 1.255041 | 1.223232 |
| | RPT [3] | 1.231675 | 1.217447 | 1.208690 | 1.179518 |
| | présente (n=3) | 1.231675 | 1.217447 | 1.208690 | 1.179518 |
| | présente (n=5) | 1.309161 | 1.293664 | 1.284186 | 1.252786 |
| | présente (n=7) | 1.334860 | 1.318878 | 1.309126 | 1.276887 |
| 4 | FSDPT [2] | 1.290961 | 1.277527 | 1.268689 | 1.237931 |
| | RPT [3] | 1.240542 | 1.228791 | 1.220879 | 1.192880 |
| | présente (n=3) | 1.240542 | 1.228791 | 1.220879 | 1.192880 |
| | présente (n=5) | 1.318866 | 1.305971 | 1.297361 | 1.267109 |
| | présente (n=7) | 1.344903 | 1.331572 | 1.322698 | 1.291590 |
| 5 | FSDPT [2] | 1.296101 | 1.284626 | 1.276497 | 1.246833 |
| | RPT [3] | 1.244905 | 1.234980 | 1.227750 | 1.200876 |
| | présente (n=3) | 1.244905 | 1.234980 | 1.227750 | 1.200876 |
| | présente (n=5) | 1.323695 | 1.312741 | 1.304845 | 1.275727 |
| | présente (n=7) | 1.349918 | 1.338577 | 1.330429 | 1.300461 |

Le tableau V.2 présente une comparaison de la déflexion non dimensionnelle (\bar{w}) de la plaque sandwich carrée simplement appuyée ($a/b = 1$, type A) avec des faces en FGM et le noyau homogène soumise à une charge thermomécanique pour plusieurs valeurs d'indice de puissance (p) et différents rapports d'épaisseur de couche (1-0-1, 3-1-3, 2-1-2 et 1-1-1). D'après les résultats obtenus, on peut constater que la théorie actuelle concorde parfaitement avec celles développées par Li et al [3] pour ($n=3$), et pour ($n>3$) le résultat converge vers

les résultats obtenus par la FSDT. On peut également observer que l'augmentation de l'indice de puissance p entraîne une augmentation de la flèche centrale (\bar{w}).

Tableau V.3 : L'effet du rapport de dimension (a/b) sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2)$ de plaque sandwich (type A) avec deux faces supérieure et inférieure en FGM et un noyau homogène ($k = 0$) soumise à une charge thermomécanique ($a/h = 10, p = 3$)

| Configuration | Théorie | $\bar{w}(a/2, b/2)$ | | | | |
|---------------|----------------|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | $a/b = 1$ | $a/b = 2$ | $a/b = 3$ | $a/b = 4$ | $a/b = 5$ |
| 1-0-1 | FSDPT [2] | 1.280741 | 0.503607 | 0.250355 | 0.146917 | 0.095948 |
| | RPT [3] | 1.231675 | 0.492573 | 0.246212 | 0.144771 | 0.094608 |
| | Présente (n=3) | 1.231675 | 0.492573 | 0.246212 | 0.144771 | 0.094608 |
| | présente (n=5) | 1.309161 | 0.523630 | 0.261792 | 0.153978 | 0.100663 |
| | présente (n=7) | 1.334860 | 0.533928 | 0.266957 | 0.157028 | 0.102668 |
| 3-1-3 | FSDPT [2] | 1.264724 | 0.497383 | 0.247274 | 0.145112 | 0.094770 |
| | RPT [3] | 1.217447 | 0.486952 | 0.243459 | 0.143199 | 0.093619 |
| | présente (n=3) | 1.217447 | 0.486952 | 0.243459 | 0.143199 | 0.093619 |
| | présente (n=5) | 1.293664 | 0.517466 | 0.258739 | 0.152205 | 0.099523 |
| | présente (n=7) | 1.318878 | 0.527555 | 0.263786 | 0.155177 | 0.101469 |
| 2-1-2 | FSDPT [2] | 1.255041 | 0.493613 | 0.245406 | 0.144017 | 0.094055 |
| | RPT [3] | 1.208690 | 0.483486 | 0.241757 | 0.142222 | 0.093002 |
| | présente (n=3) | 1.208690 | 0.483486 | 0.241757 | 0.142222 | 0.093002 |
| | présente (n=5) | 1.284186 | 0.513693 | 0.256868 | 0.151118 | 0.098824 |
| | présente (n=7) | 1.309126 | 0.523665 | 0.261850 | 0.154045 | 0.100735 |
| 1-1-1 | FSDPT [2] | 1.223232 | 0.481212 | 0.239259 | 0.140414 | 0.091704 |
| | RPT [3] | 1.179518 | 0.471920 | 0.236060 | 0.138942 | 0.090916 |
| | présente (n=3) | 1.179518 | 0.471920 | 0.236060 | 0.138942 | 0.090916 |
| | présente (n=5) | 1.252786 | 0.501189 | 0.250663 | 0.147506 | 0.096494 |
| | présente (n=7) | 1.276887 | 0.510802 | 0.255447 | 0.150301 | 0.098306 |

La variation de la flèche centrale adimensionnelle (\bar{w}) de la plaque sandwich FGM (type A) sous chargement thermomécanique en fonction du rapport de forme (a/b) et du rapport d'épaisseur de couche est illustrée au tableau V.3. Les résultats obtenus concernent un indice de matériau $p = 3$ et un rapport de géométrie $a/h = 10$. On peut noter que la déviation centrale (\bar{w}) diminue avec l'augmentation du rapport de dimensions a/b et que les valeurs les plus basses de la déformation non dimensionnelle sont obtenues pour le rapport d'épaisseur de couche (1-1-1).

Tableau V.4 : Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) de la plaque sandwich carrée ($a/b=1$, type A) avec deux faces en FGM et un noyau homogène ($k=0$) soumise à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

| p | Théorie | $\bar{\sigma}_x(a/2,b/2,h/2)$ | | | |
|----------------|----------------|-------------------------------|------------|-----------|-----------|
| | | 1-0-1 | 3-1-3 | 2-1-2 | 1-1-1 |
| 0 | FSDPT [2] | -3,597007 | -3,597007 | -3,597007 | -3,597007 |
| | RPT [3] | -2,911440 | -2,911440 | -2,911440 | -2,911440 |
| | présente (n=3) | -2,911439 | -2,911440 | -2,911440 | -2,911440 |
| | présente (n=5) | -3,267647 | -3,267647 | -3,267647 | -3,267647 |
| | présente (n=7) | -3,465619 | -3,465619 | -3,465619 | -3,465619 |
| | 1 | FSDPT [2] | -3,471099 | -3,569762 | -3,618476 |
| RPT [3] | | -2,892290 | -2,985255 | -3,031378 | -3,162208 |
| présente (n=3) | | -2,892290 | -2,985255 | -3,031378 | -3,162208 |
| présente (n=5) | | -3,222468 | -3,321533 | -3,370618 | -3,509663 |
| présente (n=7) | | -3,398971 | -3,500162 | -3,550267 | -3,692106 |
| 2 | | FSDPT [2] | -3,145662 | -3,238636 | -3,289757 |
| | RPT [3] | -2,589234 | -2,674492 | -2,721838 | -2,868271 |
| | présente (n=3) | -2,589234 | -2,674492 | -2,721838 | -2,868271 |
| | présente (n=5) | -2,899800 | -2,991550 | -3,042321 | -3,198827 |
| | présente (n=7) | -3,069336 | -3,1635092 | -3,215542 | -3,375706 |
| | 3 | FSDPT [2] | -3,031284 | -3,109180 | -3,156414 |
| RPT [3] | | -2,486287 | -2,556476 | -2,599635 | -2,743281 |
| présente (n=3) | | -2,486287 | -2,556476 | -2,599635 | -2,743281 |
| présente (n=5) | | -2,788790 | -2,864971 | -2,911552 | -3,065816 |
| présente (n=7) | | -2,955183 | -3,033641 | -3,081508 | -3,239727 |
| 4 | | FSDPT [2] | -2,981507 | -3,046666 | -3,089733 |
| | RPT [3] | -2,442566 | -2,500626 | -2,539661 | -2,677611 |
| | présente (n=3) | -2,442566 | -2,500626 | -2,539661 | -2,677611 |
| | présente (n=5) | -2,741079 | -2,804506 | -2,846834 | -2,995497 |
| | présente (n=7) | -2,905879 | -2,971338 | -3,014905 | -3,167589 |
| | 5 | FSDPT [2] | -2,956534 | -3,012040 | -3,051612 |
| RPT [3] | | -2,421017 | -2,470126 | -2,505817 | -2,638388 |
| présente (n=3) | | -2,421017 | -2,470126 | -2,505817 | -2,638388 |
| présente (n=5) | | -2,717327 | -2,771229 | -2,846834 | -2,953172 |
| présente (n=7) | | -2,881248 | -2,936947 | -3,014905 | -3,124059 |

Le tableau V.4 montre les effets d'indice p sur la contrainte normale sans dimension ($\bar{\sigma}_x$) de la plaque en sandwich ($a/h=10$, type A) pour différents types de configuration tel que: 1-0-1, 1-1-1, 2-1-2 et 3-1-3. On peut voir que la contrainte normale adimensionnelle diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance des feuilles faciales des FGM, ce qui est dû au fait que la plaque devient flexible. Il convient également de noter que les plus

grandes valeurs de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) sont obtenues pour le rapport d'épaisseur de couche (1-1-1).

3.2. ANALYSE DE LA FLEXION D'UNE PLAQUE SANDWICHE AVEC DEUX FACES HOMOGENES ($p=0$) ET UN NOYAU EN FGM SOUMISE A DES CHARGES THERMOMECHANIQUES

Dans la présente étude une plaque sandwich carrée simplement appuyée avec deux faces homogènes ($p=0$) et un noyau en FGM est considérée ($k \geq 0$).

Tableau V.5 : Comparaison de la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une plaque sandwich carrée ($a/b=1$, type A) avec deux faces supérieure et inférieure homogènes ($p=0$) et un noyau en FGM soumise à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

| k | Théorie | $\bar{w}(a/2,b/2)$ | | | |
|-----|----------------|--------------------|----------|----------|----------|
| | | 2-1-2 | 1-1-1 | 1-2-1 | 1-3-1 |
| 0 | FSDPT [4] | 0.960453 | 0.960453 | 0.960453 | 0.960453 |
| | RPT [3] | 0.864140 | 0.864140 | 0.864140 | 0.864140 |
| | présente (n=3) | 0.864140 | 0.864140 | 0.864140 | 0.864140 |
| | présente (n=5) | 0.919184 | 0.919184 | 0.919184 | 0.919184 |
| | présente (n=7) | 0.937534 | 0.937534 | 0.937534 | 0.937534 |
| 1 | FSDPT [4] | 0.961067 | 0.963305 | 0.970187 | 0.977474 |
| | RPT [3] | 0.864623 | 0.866466 | 0.872221 | 0.878396 |
| | présente (n=3) | 0.864623 | 0.866466 | 0.872221 | 0.878396 |
| | présente (n=5) | 0.919744 | 0.921811 | 0.928180 | 0.934941 |
| | présente (n=7) | 0.938205 | 0.940263 | 0.946858 | 0.953845 |
| 2 | FSDPT [4] | 0.961375 | 0.964745 | 0.975191 | 0.986392 |
| | RPT [3] | 0.864867 | 0.867635 | 0.876353 | 0.885834 |
| | présente (n=3) | 0.864867 | 0.867635 | 0.876353 | 0.885834 |
| | présente (n=5) | 0.920026 | 0.923134 | 0.932788 | 0.943167 |
| | présente (n=7) | 0.938413 | 0.941639 | 0.951641 | 0.962371 |
| 3 | FSDPT [4] | 0.961565 | 0.965637 | 0.978325 | 0.992040 |
| | RPT [3] | 0.865018 | 0.868359 | 0.878938 | 0.890547 |
| | présente (n=3) | 0.865018 | 0.868359 | 0.878938 | 0.890547 |
| | présente (n=5) | 0.920199 | 0.923952 | 0.935669 | 0.948370 |
| | présente (n=7) | 0.938595 | 0.942490 | 0.954634 | 0.967766 |
| 4 | FSDPT [4] | 0.961696 | 0.966250 | 0.980491 | 0.995971 |
| | RPT [3] | 0.865121 | 0.868855 | 0.880725 | 0.893831 |
| | présente (n=3) | 0.865121 | 0.868855 | 0.880725 | 0.893831 |
| | présente (n=5) | 0.920319 | 0.924514 | 0.937658 | 0.951990 |
| | présente (n=7) | 0.938719 | 0.943075 | 0.956700 | 0.971519 |
| 5 | FSDPT [4] | 0.961791 | 0.966697 | 0.982082 | 0.998875 |
| | RPT [3] | 0.865197 | 0.869218 | 0.882038 | 0.896261 |
| | présente (n=3) | 0.865197 | 0.869218 | 0.882038 | 0.896261 |
| | présente (n=5) | 0.920406 | 0.924924 | 0.939119 | 0.954664 |
| | présente (n=7) | 0.938810 | 0.943501 | 0.958218 | 0.974291 |

Le tableau V.5 Montre la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée (type A) avec deux faces homogènes et un noyau en FGM soumise à un chargement thermomécanique pour ($k=0,1, 2, 3, 4$ et 5) et avec différentes configurations de couche: 2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1. Les résultats actuels sont en bon accord avec ceux donnés par Li et al [3], il convient de noter que la flèche non dimensionnelle \bar{w} augmente légèrement avec l'augmentation de l'indice de matière du noyau (k).

Les mêmes résultats de la déflexion non dimensionnelle \bar{w} sont obtenus pour les différents rapports d'épaisseur de couche (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1) dans le cas $k=0$ car la plaque est entièrement en céramique.

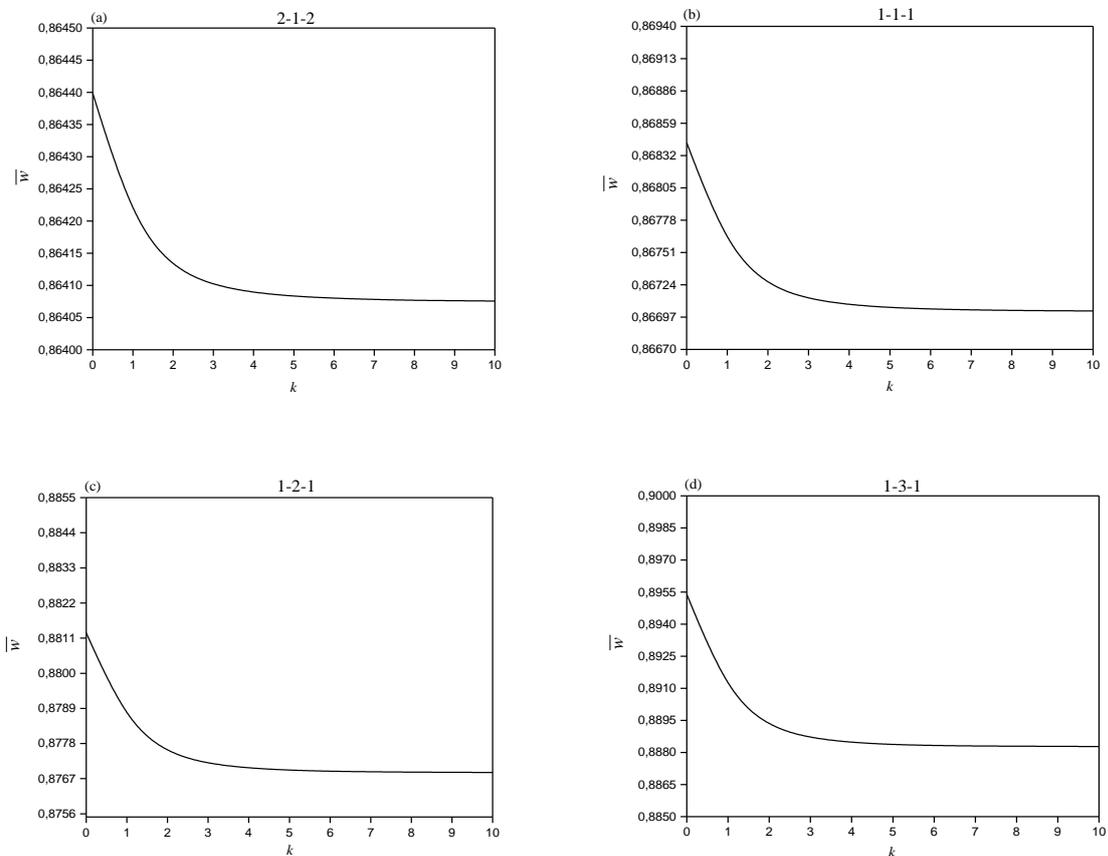


Figure V.2 : L'effet de l'indice de puissance (k) sur la flèche centrale adimensionnelle (\bar{w}) des plaques sandwiches (type B) avec faces homogènes ($p=0$) et à âme en S-FGM symétrique pour différentes configurations: (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1).

Tableau V.6 : L'effet du rapport de forme (a/b) sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une plaque sandwich (type A) avec deux faces supérieure et inférieure homogènes ($p=0$) et un noyau en FGM soumise à une charge thermomécanique ($a/h=10$, $k=1$)

| Configuration | Théorie | $\bar{w}(a/2,b/2)$ | | | | |
|---------------|----------------|--------------------|----------|----------|----------|----------|
| | | $a/b=1$ | $a/b=2$ | $a/b=3$ | $a/b=4$ | $a/b=5$ |
| 2-1-2 | FSDPT [4] | 0.961067 | 0.384421 | 0.192210 | 0.113064 | 0.073927 |
| | RPT [3] | 0.864623 | 0.345661 | 0.172678 | 0.101451 | 0.066229 |
| | présente (n=3) | 0.864623 | 0.345661 | 0.172678 | 0.101451 | 0.066229 |
| | présente (n=5) | 0.919744 | 0.367820 | 0.183850 | 0.108098 | 0.070638 |
| | présente (n=7) | 0.938205 | 0.375293 | 0.187660 | 0.110399 | 0.072194 |
| 1-1-1 | FSDPT [4] | 0.963305 | 0.385316 | 0.192657 | 0.113328 | 0.074099 |
| | RPT [3] | 0.866466 | 0.346369 | 0.173008 | 0.101625 | 0.066327 |
| | présente (n=3) | 0.866466 | 0.346369 | 0.173008 | 0.101625 | 0.066327 |
| | présente (n=5) | 0.921811 | 0.368636 | 0.184248 | 0.108324 | 0.070780 |
| | présente (n=7) | 0.941380 | 0.377177 | 0.189113 | 0.111675 | 0.073381 |
| 1-2-1 | FSDPT [4] | 0.970187 | 0.388069 | 0.194034 | 0.114137 | 0.074628 |
| | RPT [3] | 0.872221 | 0.348604 | 0.174070 | 0.102204 | 0.066667 |
| | présente (n=3) | 0.872221 | 0.348604 | 0.174070 | 0.102204 | 0.066667 |
| | présente (n=5) | 0.928299 | 0.371274 | 0.185602 | 0.109150 | 0.071344 |
| | présente (n=7) | 0.946858 | 0.378683 | 0.189296 | 0.111312 | 0.072749 |
| 1-3-1 | FSDPT [4] | 0.977474 | 0.390984 | 0.195491 | 0.114994 | 0.075189 |
| | RPT [3] | 0.878396 | 0.351016 | 0.175228 | 0.102846 | 0.067055 |
| | présente (n=3) | 0.878396 | 0.351016 | 0.175228 | 0.102846 | 0.067055 |
| | présente (n=5) | 0.934941 | 0.373830 | 0.186797 | 0.109784 | 0.071701 |
| | présente (n=7) | 0.953845 | 0.381461 | 0.190671 | 0.112110 | 0.073262 |

Le tableau V.6 présente la comparaison de la déflexion adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une plaque sandwich simplement appuyée (type A) avec deux faces homogènes ($p=0$) et d'un noyau FGM. La plaque sandwich est soumise à un chargement thermomécanique avec ($q_0=100Pa, t_1=0, t_2=t_3=100K$). Selon le tableau V.6, on peut voir que la déflexion \bar{w} diminue avec l'augmentation du rapport de dimension (a/b), il convient également de noter que les

valeurs les plus élevées de la déflexion centrale adimensionnelle sont obtenues pour un rapport d'épaisseur (1-3-1).

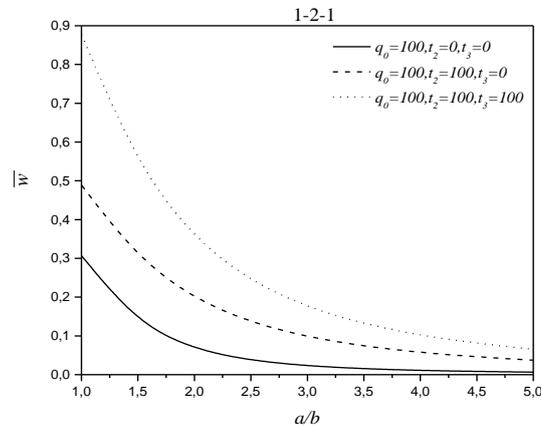


Figure V.3 : L'effet des charges thermiques sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, h/2)$ de la plaque sandwich (1-2-1) (type B) à faces homogènes et noyau symétrique S-FGM ($k = 2$) en fonction du (a/b).

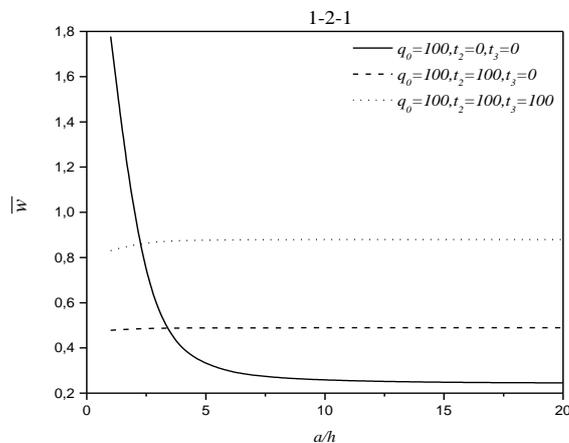


Figure V.4 : L'effet des charges thermiques sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, h/2)$ de la plaque sandwich (1-2-1) (type B) à faces homogènes et noyau symétrique S-FGM ($k = 2$) en fonction du (a/h).

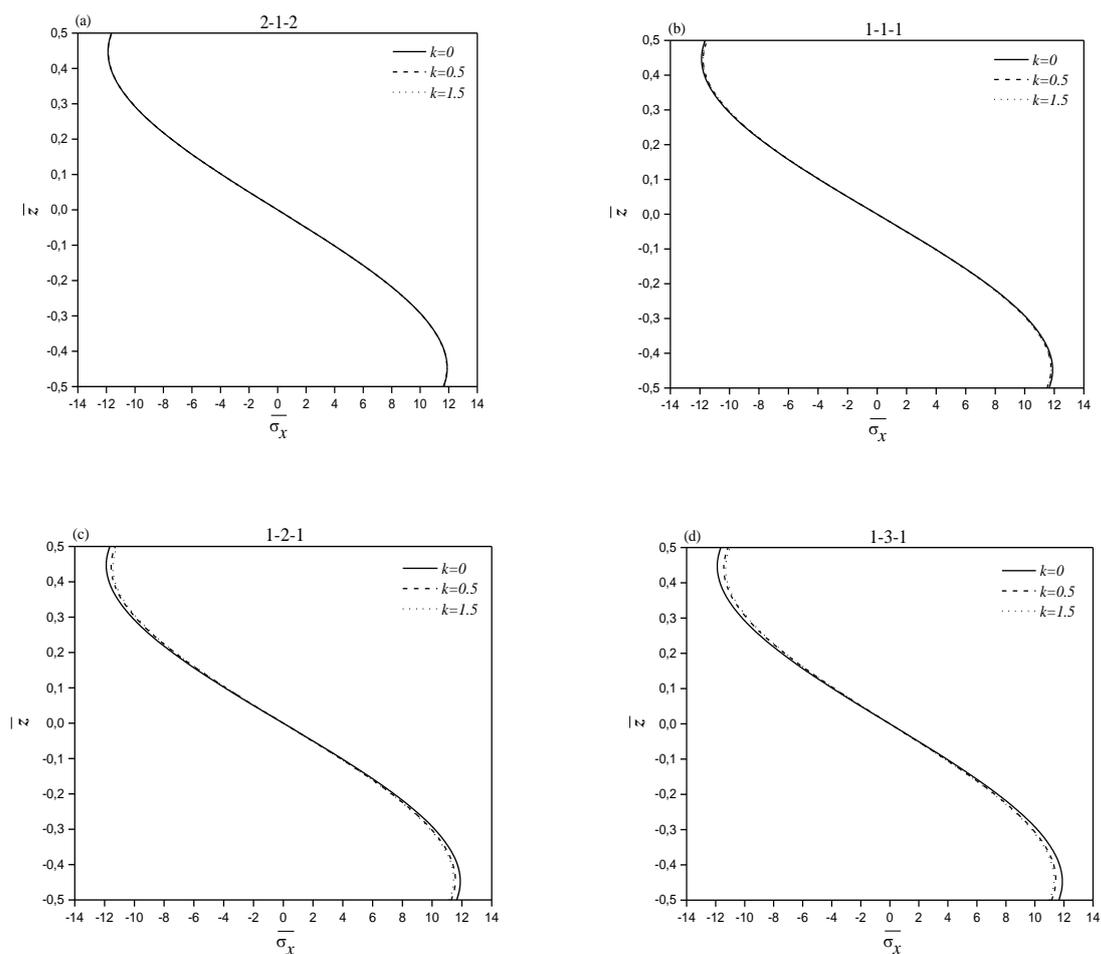


Figure V.5 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwiches ($a/h = 5$, type B) à faces homogènes ($p = 0$) et noyau S-FGM symétrique pour différentes configurations: (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1).

Tableau V.7 : Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) de la plaque sandwichée carrée ($a/b=1$, type A) avec deux faces homogènes ($p=0$) et un noyau en FGM soumise à une charge thermomécanique ($a/h=10$)

| k | Théorie | $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$ | | | |
|-----|----------------|---------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | | 2-1-2 | 1-1-1 | 1-2-1 | 1-3-1 |
| 0 | FSDPT [4] | -4.158732 | -4.158732 | -4.158732 | -4.158732 |
| | RPT [3] | -2.911440 | -2.911440 | -2.911440 | -2.911440 |
| | présente (n=3) | -2.911440 | -2.911440 | -2.911440 | -2.911440 |
| | présente (n=5) | -3.267647 | -3.267647 | -3.267647 | -3.267647 |
| | présente (n=7) | -3.465619 | -3.465619 | -3.465619 | -3.465619 |
| 1 | FSDPT [4] | -4.153417 | -4.134036 | -4.074434 | -4.011326 |
| | RPT [3] | -2.907015 | -2.890699 | -2.840040 | -2.785860 |
| | présente (n=3) | -2.907015 | -2.890699 | -2.840040 | -2.785860 |
| | présente (n=5) | -3.262709 | -3.244672 | -3.189141 | -3.130226 |
| | présente (n=7) | -3.460438 | -3.441876 | -3.384558 | -3.323842 |
| 2 | FSDPT [4] | -4.150749 | -4.121567 | -4.031095 | -3.934090 |
| | RPT [3] | -2.904809 | -2.880305 | -2.803535 | -2.720298 |
| | présente (n=3) | -2.904809 | -2.880305 | -2.803535 | -2.720298 |
| | présente (n=5) | -3.260238 | -3.233114 | -3.148920 | -3.058439 |
| | présente (n=7) | -3.457953 | -3.429913 | -3.342968 | -3.249700 |
| 3 | FSDPT [4] | -4.149101 | -4.113838 | -4.003951 | -3.885176 |
| | RPT [3] | -2.903451 | -2.873883 | -2.780706 | -2.678783 |
| | présente (n=3) | -2.903451 | -2.873883 | -2.780706 | -2.678783 |
| | présente (n=5) | -3.258715 | -3.225963 | -3.123767 | -3.013026 |
| | présente (n=7) | -3.456373 | -3.422504 | -3.316945 | -3.202784 |
| 4 | FSDPT [4] | -4.147973 | -4.108535 | -3.985199 | -3.851130 |
| | RPT [3] | -2.902523 | -2.869484 | -2.764940 | -2.649867 |
| | présente (n=3) | -2.902523 | -2.869484 | -2.764940 | -2.649867 |
| | présente (n=5) | -3.257673 | -3.221061 | -3.106403 | -2.981431 |
| | présente (n=7) | -3.455293 | -3.417425 | -3.298976 | -3.170145 |
| 5 | FSDPT [4] | -4.147150 | -4.104658 | -3.971420 | -3.825981 |
| | RPT [3] | -2.901847 | -2.866270 | -2.753353 | -2.628487 |
| | présente (n=3) | -2.901847 | -2.866270 | -2.753353 | -2.628487 |
| | présente (n=5) | -3.256912 | -3.217480 | -3.093650 | -2.958096 |
| | présente (n=7) | -3.454504 | -3.413712 | -3.285778 | -3.146040 |

Les effets de l'indice de matière du noyau (k) et des rapports d'épaisseur de couche sur la contrainte axiale adimensionnelle le long de l'axe x ($\bar{\sigma}_x$) sont présentés dans le tableau V.7. Les résultats concernent les rapports d'épaisseur de couche (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1). D'après les résultats obtenus, on peut constater que le modèle actuel donne presque les mêmes valeurs de la contrainte normale ($\bar{\sigma}_x$) que celles de Li D et al [3] pour ($n=3$) et les résultats trouvés par la FSDT sont plus grands que ceux des autres modèles. On peut également

constater que la contrainte normale ($\bar{\sigma}_x$) diminue légèrement avec l'augmentation de l'indice de puissance k .

La Figure V.2 présente la déflexion centrale adimensionnelle \bar{w} des plaques sandwiches (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1) en fonction de l'indice du matériau de l'âme (k) (noyau symétrique S-FGM) avec un rapport de géométrie $a/h = 5$. À partir de ces graphes obtenus, on peut noter que la déflexion centrale (\bar{w}) est en relation inverse avec l'indice de puissance k et celle des différents rapports d'épaisseur de couche.

La Figure V.3 montre la variation de la déflexion centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2, h/2)$ d'une plaque sandwich en FGM composée de deux faces homogènes ($p = 0$) et un noyau S-FGM symétrique ($k = 2$) (plaque type B) en fonction du rapport de forme (a/b) et de la charge thermique $\{(q_0 = 100 Pa, t_2 = t_3 = 0), (q_0 = 100 Pa, t_2 = 100 K, t_3 = 0)$ et $(q_0 = 100 Pa, t_2 = t_3 = 100 K)\}$ pour une configuration de 1-2-1.

On peut observer qu'avec l'augmentation du rapport a/b , la déformation \bar{w} diminue et que les valeurs les plus grandes sont obtenus pour le cas $(q_0 = 100 Pa, t_2 = t_3 = 100 K)$. Ces trois courbes montrent la même tendance, donc l'effet de la charge thermique est significatif sur la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} .

La Figure V.4 : illustre la variation de la déflexion centrale adimensionnelle \bar{w} en fonction de l'effet thermique et du rapport de géométrie (a/h) d'une plaque sandwich (1-2-1) à faces homogènes ($p = 0$) et un noyau symétrique S-FGM ($k = 2$) (plaque type B). Les graphes obtenus permettent de constater que le rapport (a/h) a une légère influence sur la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} . On voit également, quand $t_2 = 100$, l'effet de la charge thermique t_3 est significatif sur la déflexion centrale (\bar{w}).

La Figure V.5 compare les distributions des contraintes normales $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur h des plaques sandwiches FGM simplement appuyées (plaque type B) pour différents types de configurations (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1) en fonction de l'indice de matériau du noyau ($k = 0, 0.5, 1.5$). La contrainte normale est continue à travers l'épaisseur de

la plaque. L'allure pour les trois valeurs de (k) montre une non-linéarité de la contrainte axiale $\overline{\sigma_x}$ à travers l'épaisseur de la plaque.

On peut également constater que pour un rapport d'épaisseur de la couche la plus grande (1-3-1), la couche centrale est trois fois plus grande de l'une des couches de face, l'influence de l'indice de puissance (k) devient plus grande. Pour tous les rapports d'épaisseur de couche (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1) ; les contraintes de compression se produisent dans la couche inférieure et la traction dans la couche supérieure.

3.3. ANALYSE DE LA FLEXION D'UNE PLAQUE SANDWICHE AVEC DEUX FACES EN FGM ET UN NOYAU EN FGM ($k \neq 0$) SOUMISE A DES CHARGES THERMOMECHANIQUES

Dans ce troisième exemple, la plaque en sandwich est composée de deux faces en FGM et le cœur en FGM. Deux types de matériaux FGM sont utilisés ici, tels que l'E-FGM et le nouveau S-FGM symétrique.

Tableau V.8 : La flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2,b/2)$ d'une la plaque sandwich carrée (type A) avec deux faces supérieure et inférieure en P-FGM et un noyau E-FGM

| p | Théorie | $\bar{w}(a/2,b/2)$ | | | |
|-----|----------------|--------------------|----------|----------|----------|
| | | 2-1-2 | 1-1-1 | 1-2-1 | 1-3-1 |
| 0 | FSDPT [4] | 0.961067 | 0.963305 | 0.970187 | 0.977474 |
| | RPT [3] | 0.864623 | 0.866466 | 0.872221 | 0.878396 |
| | présente (n=3) | 0.864623 | 0.866466 | 0.872221 | 0.878396 |
| | présente (n=5) | 0.919744 | 0.921811 | 0.928180 | 0.934941 |
| | présente (n=7) | 0.938120 | 0.940263 | 0.946858 | 0.953845 |
| 1 | FSDPT [4] | 1.242779 | 1.217361 | 1.180797 | 1.156699 |
| | RPT [3] | 1.121862 | 1.098934 | 1.065520 | 1.043229 |
| | présente (n=3) | 1.121862 | 1.098934 | 1.065520 | 1.043229 |
| | présente (n=5) | 1.191838 | 1.167546 | 1.132364 | 1.108998 |
| | présente (n=7) | 1.214798 | 1.190035 | 1.154277 | 1.130599 |
| 2 | FSDPT [4] | 1.313230 | 1.284594 | 1.238612 | 1.206011 |
| | RPT [3] | 1.185157 | 1.159800 | 1.118459 | 1.088746 |
| | présente (n=3) | 1.185157 | 1.159800 | 1.118459 | 1.088746 |
| | présente (n=5) | 1.259002 | 1.231932 | 1.188143 | 1.156852 |
| | présente (n=7) | 1.283299 | 1.255589 | 1.210921 | 1.179111 |
| 3 | FSDPT [4] | 1.341711 | 1.313791 | 1.265222 | 1.229142 |
| | RPT [3] | 1.210108 | 1.185685 | 1.142459 | 1.109859 |
| | présente (n=3) | 1.210108 | 1.185685 | 1.142459 | 1.109859 |
| | présente (n=5) | 1.285739 | 1.259507 | 1.213521 | 1.179084 |
| | présente (n=7) | 1.310724 | 1.283795 | 1.236773 | 1.201694 |
| 4 | FSDPT [4] | 1.355934 | 1.329367 | 1.280204 | 1.242418 |
| | RPT [3] | 1.222339 | 1.199282 | 1.155813 | 1.121864 |
| | présente (n=3) | 1.222339 | 1.199282 | 1.155813 | 1.121864 |
| | présente (n=5) | 1.298966 | 1.274089 | 1.227696 | 1.191755 |
| | présente (n=7) | 1.324349 | 1.298766 | 1.251253 | 1.214590 |
| 5 | FSDPT [4] | 1.364062 | 1.338795 | 1.289699 | 1.250973 |
| | RPT [3] | 1.229235 | 1.207420 | 1.164203 | 1.129545 |
| | présente (n=3) | 1.229235 | 1.207420 | 1.164203 | 1.129545 |
| | présente (n=5) | 1.306479 | 1.282866 | 1.236632 | 1.199879 |
| | présente (n=7) | 1.332113 | 1.307802 | 1.260399 | 1.222873 |

soumise à une charge thermomécanique ($a/h = 10$)

Le tableau V.8 indique la déflexion centrale adimensionnelle \bar{w} pour une plaque sandwich (type A) carrée avec différentes valeurs d'indice de puissance ($p = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5) et différentes configurations de couches {2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1} avec ($a/h = 10$ et $k = 1$) soumise à un chargement thermomécanique. Les résultats du tableau V.8 permettent de conclure que la déflexion adimensionnelle \bar{w} est en relation de corrélation directe avec l'indice

de matériau p . Il est également clair que pour $p > 0$ les plus grandes valeurs de la déflexion adimensionnelle sont données pour un rapport d'épaisseur de couche 2-1-2.

De même pour les résultats trouvés ($n \geq 3$), les valeurs obtenues de la flèche maximale \bar{w} sont plus petites par rapport à celles trouvées par la FSDPT [4].

Tableau V.9 : L'effet du rapport de forme (a/b) sur la flèche centrale adimensionnelle $\bar{w}(a/2, b/2)$ d'une plaque sandwich (type A) avec deux faces supérieure et inférieure en P-FGM et un noyau E-FGM soumise à une charge thermomécanique ($a/h = 10, p = 3, k = 1$)

| Configuration | Théorie | $\bar{w}(a/2, b/2)$ | | | | |
|---------------|----------------|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | $a/b = 1$ | $a/b = 2$ | $a/b = 3$ | $a/b = 4$ | $a/b = 5$ |
| 2-1-2 | FSDPT [4] | 1.341711 | 0.536675 | 0.268336 | 0.157844 | 0.103206 |
| | RPT [3] | 1.210108 | 0.484045 | 0.242031 | 0.142378 | 0.093100 |
| | présente (n=3) | 1.210108 | 0.484045 | 0.242031 | 0.142378 | 0.093100 |
| | présente (n=5) | 1.285739 | 0.514313 | 0.257177 | 0.151298 | 0.098941 |
| | présente (n=7) | 1.310724 | 0.524303 | 0.262170 | 0.154233 | 0.100858 |
| 1-1-1 | FSDPT [4] | 1.313791 | 0.525507 | 0.262752 | 0.154560 | 0.101058 |
| | RPT [3] | 1.185685 | 0.474370 | 0.237271 | 0.139642 | 0.091364 |
| | présente (n=3) | 1.185685 | 0.474370 | 0.237271 | 0.139642 | 0.091364 |
| | présente (n=5) | 1.259507 | 0.503873 | 0.252001 | 0.148290 | 0.097004 |
| | présente (n=7) | 1.283795 | 0.513564 | 0.256826 | 0.151111 | 0.098835 |
| 1-2-1 | FSDPT [4] | 1.265222 | 0.506080 | 0.253039 | 0.148846 | 0.097322 |
| | RPT [3] | 1.142459 | 0.457190 | 0.228773 | 0.134719 | 0.088208 |
| | présente (n=3) | 1.142459 | 0.457190 | 0.228773 | 0.134719 | 0.088208 |
| | présente (n=5) | 1.213521 | 0.485554 | 0.242904 | 0.142989 | 0.093581 |
| | présente (n=7) | 1.236773 | 0.494804 | 0.247487 | 0.145651 | 0.095293 |
| 1-3-1 | FSDPT [4] | 1.229142 | 0.491649 | 0.245823 | 0.144601 | 0.094547 |
| | RPT [3] | 1.109859 | 0.444182 | 0.222295 | 0.130929 | 0.085748 |
| | présente (n=3) | 1.109859 | 0.444182 | 0.222295 | 0.130929 | 0.085748 |
| | présente (n=5) | 1.179084 | 0.471815 | 0.236063 | 0.138990 | 0.090986 |
| | présente (n=7) | 1.201694 | 0.480801 | 0.240508 | 0.141565 | 0.092637 |

Le tableau V.9 présente la variation de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} d'une plaque en sandwich (type A) avec deux faces en P-FGM ($p = 3$) et un noyau en E-FGM ($k = 1$) sous un chargement thermomécanique en fonction du rapport de dimension (a/b) pour différentes configurations de couches {2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1}. Les résultats actuels sont comparés avec des solutions basées sur une théorie hyperbolique raffinée des plaques utilisée par Li et al [3] et une théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDPT) proposée par Li et al [4]. A partir du tableau V.9, on peut voir que la flèche centrale

adimensionnelle est en relation inverse avec le rapport de forme (a/b) et l'épaisseur de l'âme de la plaque.

Tableau V.10 : Comparaison de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) de la plaque sandwich carrée (type A) avec deux faces P-FGM et un noyau E-FGM soumise à une charge thermomécanique ($a/h = 10$)

| p | Théorie | $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$ | | | |
|-----|----------------|---------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | | 2-1-2 | 1-1-1 | 1-2-1 | 1-3-1 |
| 0 | FSDPT [4] | -4.153417 | -4.134036 | -4.074434 | -4.011326 |
| | RPT [3] | -2.907015 | -2.890699 | -2.840040 | -2.785860 |
| | présente (n=3) | -2.907015 | -2.890699 | -2.840040 | -2.785860 |
| | présente (n=5) | -3.262709 | -3.244672 | -3.189012 | -3.130226 |
| | présente (n=7) | -3.460438 | -3.440911 | -3.384558 | -3.323842 |
| 1 | FSDPT [4] | -4.136946 | -4.261501 | -4.440672 | -4.558762 |
| | RPT [3] | -3.025929 | -3.138583 | -3.302462 | -3.411521 |
| | présente (n=3) | -3.025929 | -3.138583 | -3.302462 | -3.411521 |
| | présente (n=5) | -3.364680 | -3.483925 | -3.656521 | -3.771021 |
| | présente (n=7) | -3.544116 | -3.665003 | -3.841035 | -3.957110 |
| 2 | FSDPT [4] | -3.791718 | -3.932040 | -4.157364 | -4.317119 |
| | RPT [3] | -2.715313 | -2.840096 | -3.043204 | -3.188866 |
| | présente (n=3) | -2.715313 | -2.840096 | -3.043204 | -3.188866 |
| | présente (n=5) | -3.035217 | -3.168193 | -3.383187 | -3.536675 |
| | présente (n=7) | -3.208193 | -3.343558 | -3.563416 | -3.719438 |
| 3 | FSDPT [4] | -3.652156 | -3.788971 | -4.026970 | -4.203773 |
| | RPT [3] | -2.592638 | -2.712947 | -2.925506 | -3.085463 |
| | présente (n=3) | -2.592638 | -2.712947 | -2.925506 | -3.085463 |
| | présente (n=5) | -2.903931 | -3.032848 | -3.258721 | -3.427715 |
| | présente (n=7) | -3.073624 | -3.205169 | -3.436644 | -3.608739 |
| 4 | FSDPT [4] | -3.582456 | -3.712645 | -3.953554 | -4.138716 |
| | RPT [3] | -2.532421 | -2.646085 | -2.859957 | -3.026620 |
| | présente (n=3) | -2.532421 | -2.646085 | -2.859957 | -3.026620 |
| | présente (n=5) | -2.838945 | -2.961237 | -3.189162 | -3.365586 |
| | présente (n=7) | -3.006743 | -3.131691 | -3.365615 | -3.545504 |
| 5 | FSDPT [4] | -3.542632 | -3.666444 | -3.907027 | -4.096793 |
| | RPT [3] | -2.498436 | -2.606029 | -2.818750 | -2.988949 |
| | présente (n=3) | -2.498436 | -2.606029 | -2.818750 | -2.988949 |
| | présente (n=5) | -2.802013 | -2.918115 | -3.145298 | -3.325736 |
| | présente (n=7) | -2.968628 | -3.087334 | -3.320736 | -3.504882 |

La variation de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) en fonction de l'indice de puissance du matériau (p) et pour différentes configurations : 2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1 est présentée dans le tableau V. 10. A partir des résultats obtenus, il est à noter que les valeurs de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ sont très sensibles à la variation de l'épaisseur de la

couche de FGM et de l'indice matériel. Dans le cas où $p \geq 1$ la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance p . On peut également conclure que les valeurs les plus basses de $\bar{\sigma}_x$ sont celles trouvées pour un rapport d'épaisseur de couche 2-1-2.

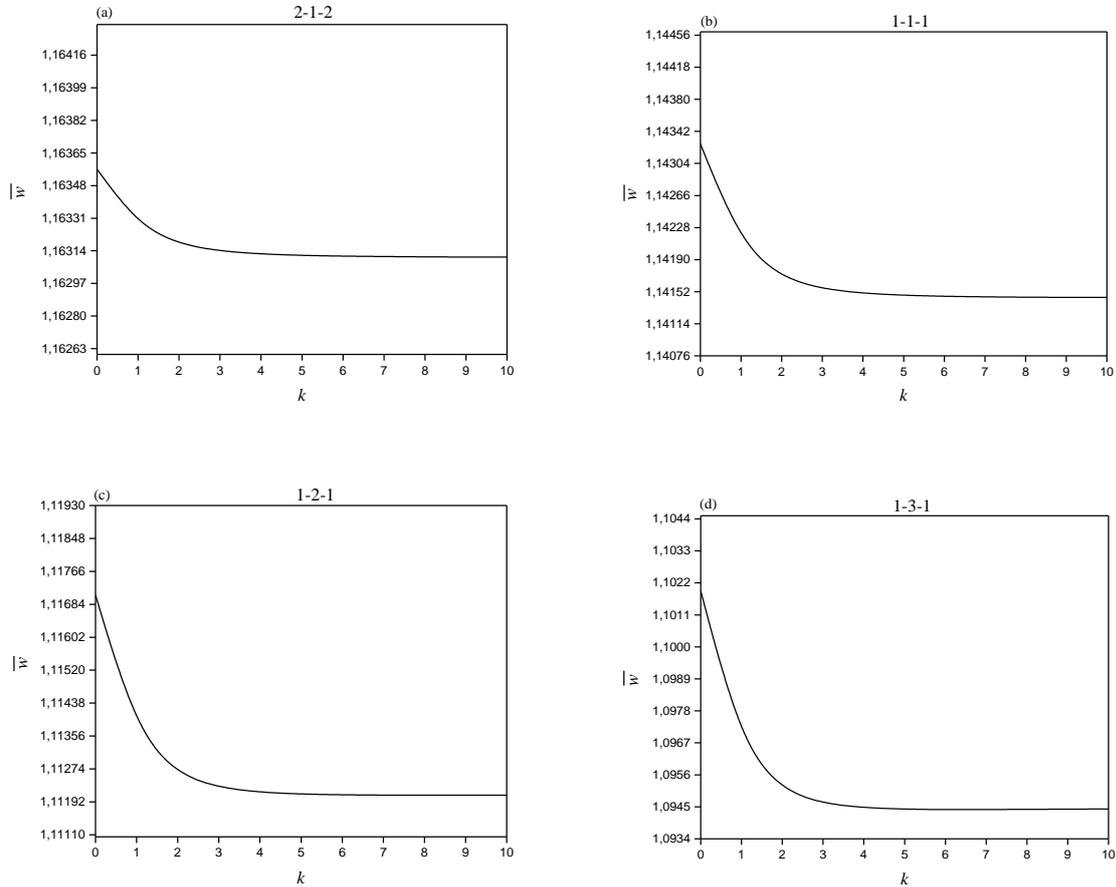


Figure V.6 : L'effet de l'indice de puissance (k) sur la flèche centrale adimensionnelle (\bar{w}) des plaques sandwiches (type B) à faces en P-FGM et noyau S-FGM symétrique pour différentes configurations: (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1), (1-3-1).

La Figure V.6 représente des tracés de la flèche centrale adimensionnelle \bar{w} de la plaque sandwich ($a/h=5$, type B) avec des faces en FGM ($p=1.5$) et un noyau S-FGM symétrique en fonction de l'indice de puissance (k) pour les divers rapports d'épaisseur de couche tels que (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-3-1).

Les courbes obtenues permettent de conclure que la déflexion centrale (\bar{w}) est en relation inverse avec le paramètre de puissance (k) quelque soit la configuration de la plaque sandwich.

La Figure V.7 illustre la variation de la contrainte normale adimensionnelle ($\bar{\sigma}_x$) d'une plaque sandwich carrée composée de deux faces en P-FGM et un noyau S-FGM symétrique avec ($k=0.5$) en fonction de l'indice de puissance ($p=0, 0.5, 1.5$) (plaque type B) à travers l'épaisseur h . Selon les résultats obtenus, on peut noter que la variation de la contrainte $\bar{\sigma}_x$ est continue et non linéaire à travers l'épaisseur, on peut également voir que la contrainte $\bar{\sigma}_x$ n'est pas lisse aux interfaces et dépend de l'épaisseur de l'âme de la plaque. On constate que dans la partie inférieure, il s'agit d'une contrainte de traction et que, dans la partie supérieure, il s'agit d'une contrainte de compression.

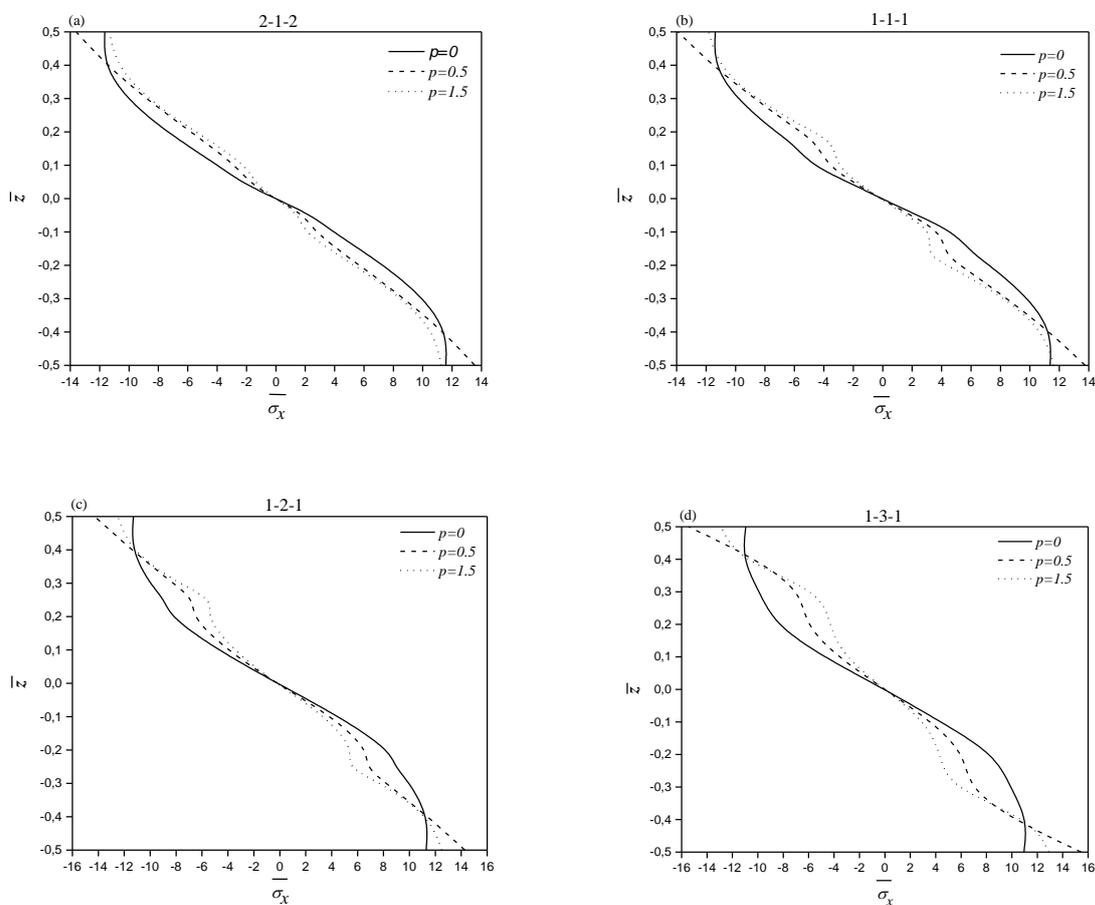


Figure V.7 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur des plaques sandwiches ($a/h=5$, type B) à faces en FGM et noyau S-FGM symétrique ($k=0.5$) pour différentes configurations: (2-1-2), (1-1-1), (1-2-1) et (1-3-1).

La figure V.8 montre l'effet de la charge thermique t_3 sur la répartition de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich carrée (1-3-1) (type B) avec deux faces en P-FGM ($p=1.5$) et le noyau symétrique S-FGM ($k=1.5$). La distribution de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM est faite pour des trois valeurs de température $t_3 = (-100 \text{ K}, 0 \text{ K} \text{ et } 100 \text{ K})$. On peut conclure de ces graphes que la charge thermique (t_3) a un effet significatif sur la contrainte normale ($\bar{\sigma}_x$).

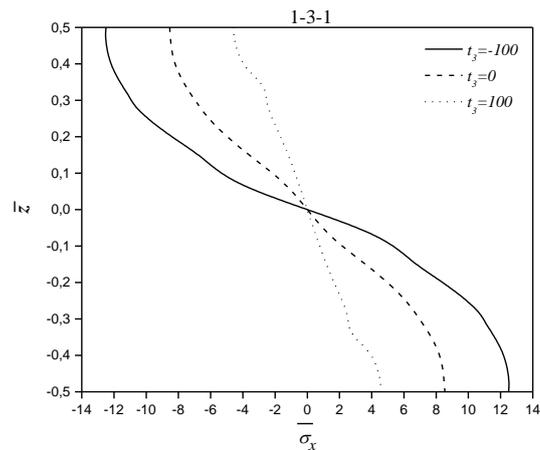


Figure V.8 : L'effet de la charge thermique t_3 sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich carrée (1-3-1) (type B) avec deux faces en FGM ($p=1.5$) et noyau S-FGM symétrique ($k=1.5$).

4. CONCLUSION

Dans la présente étude, l'analyse de la flexion de deux types de plaques sandwiches en FGM composées de trois couches sous une distribution sinusoïdale de charges thermomécaniques est étudiée à l'aide d'une théorie raffinée des plaques à quatre variables à savoir (type A: deux faces en P-FGM et un noyau E-FGM, et type B: deux faces en P-FGM et un noyau S-FGM symétrique). Le principe des travaux virtuels est employé afin de résoudre les équations d'équilibre en utilisant l'approche Navier avec des conditions aux limites simplement appuyées.

Afin de valider la précision de la présente théorie, on a pu comparer les résultats déterminés par cette théorie à ceux publiés dans la littérature.

Les effets de la déformation de cisaillement transversale, de la charge thermique, du rapport des dimensions de la plaque (a/b), du rapport longueur-épaisseur (a/h), et des indices de puissance de la fraction volumique (p et k) sont étudiés.

Les principaux résultats de la présente étude peuvent être résumés comme suit:

- 1) Comparé à d'autres théories contenant cinq fonctions inconnues ou plus, le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la présente théorie est réduit à quatre, ce qui améliore l'efficacité des calculs.
- 2) Les contraintes normales sont présentées d'une façon symétrique à travers l'épaisseur pour un chargement thermomécanique.
- 3) L'indice de matière des fractions volumiques (E-FGM, P-FGM et symétrique S-FGM) à une influence sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} , et même jouent un rôle important dans l'élimination des problèmes d'interface des plaques sandwiches et la continuité des distributions des contraintes;
- 4) La contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ dépend de l'épaisseur de l'âme de la plaque. On constate que dans la partie inférieure, il s'agit d'une contrainte de compression et que dans la partie supérieure, il s'agit d'une contrainte de traction.
- 5) Lorsque $p \geq 1$ la déflexion centrale adimensionnelle \bar{w} diminue à mesure que l'épaisseur du noyau augmente.
- 6) La déflexion centrale adimensionnelle \bar{w} diminue à mesure que le rapport des dimensions de la plaque a/b augmente. Lorsque ce rapport (a/b) est supérieur à 4, \bar{w} diminue d'une manière non significative.
- 7) Le rapport a/h a une légère influence sur la déflexion adimensionnelle.
- 8) La flèche adimensionnelle \bar{w} et les contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ sont sensibles au terme non linéaire du champ de température.

Une amélioration de la présente étude sera envisagée dans les futurs travaux pour considérer d'autres types de matériaux et de structures [5-37].

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES (Chapitre V)

- [1] Shimpi RP. Refined plate theory and its variants. *AIAA J* 2002;40(1):137–46.
- [2] Zenkour, A.M. and Alghamdi, N.A. (2010a), “Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **17**(6),419-432. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.483323>
- [3] Li, D., Deng, Z. and Xiao, H. (2016), “Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory”, *Compos. Part B-Eng.*, **106**, 107-119. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.08.041>
- [4] Li, D., Deng, Z., Chen, G., Xiao, H. and Zhu, L. (2017), “Thermomechanical bending analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded core”, *Compos. Struct.*, **169**, 29-41.
- [5] Panjehpour, M. (2014), "Evaluation of structural insulated wall panels behaviour using various substituted materials", *Journal of Civil Engineering and Architecture Research*, **1**(2), 138-142.
- [6] Panjehpour, M., Ali, A., Abdullah, A., Voo, Y.L. (2013), "Structural insulated panels: Past, Present, and Future", *Journal of Engineering, Project & Production Management*, **3**(1), 2-8.
- [7] Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2016), “Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel Compos. Struct.*,**20**(5), 963–981.
- [8] Besseghier, A, Houari, MSA, Tounsi, A, Mahmoud, SR. (2017), “Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory”, *Smart Struct. Syst.*, **19**(6), 601–614.
- [9] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017b), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, *Struct. Eng. Mech.*, **62**(6), 695-702.
- [10] Daouadji, T.H. (2017), “Analytical and numerical modeling of interfacial stresses in beams bonded with a thin plate”, *Advances in Computational Design*, **2**(1), 57-69.
- [11] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2017), "Effects of triaxial magnetic field on the anisotropic nanoplates", *Steel and Composite Structures*, **25**(3), 361-374.
- [12] Yeghnem, R., Guerroudj, H.Z., Amar, LHH., Meftah, S.A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2017), "Numerical modeling of the aging effects of RC shear walls strengthened by CFRP plates: A comparison of results from different "code type" models", *Computers and Concrete*, **19**(5), 579-588.
- [13] Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), “Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory”, *Smart Structures Systems*, **20**(3), 369-383.

- [14] Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2018a), "Galerkin's approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions", *Engineering with Computers*. <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0664-9>.
- [15] Karami, B., Janghorban, M., Shahsavari, D., Tounsi, A. (2018b), "A size-dependent quasi-3D model for wave dispersion analysis of FG nanoplates", *Steel and Composite Structures*, **28**(1), 99-110.
- [16] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018c), "Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles", *Steel and Composite Structures*, **27**(2), 201-216.
- [17] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018d), "Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory", *Thin-Walled Structures*, **129**, 251-264.
- [18] Bouadi, A., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Heireche, H., Tounsi, A. (2018), "A new nonlocal HSDT for analysis of stability of single layer graphene sheet", *Advances in Nano Research*, **6**(2), 147-162.
- [19] Narwariya, M., Choudhury, A., Sharma, A.K. (2018), "Harmonic analysis of moderately thick symmetric cross-ply laminated composite plate using FEM", *Advances in Computational Design*, **3**(2), 113-132.
- [20] Panjehpour, M., Loh, E.W.K., Deepak, T.J. (2018), "Structural Insulated Panels: State-of-the-Art", *Trends in civil Engineering and its architecture*, **3**(1), 336-340.
- [21] Bakhadda, B., Bachir Bouiadjra, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "Dynamic and bending analysis of carbon nanotube-reinforced composite plates with elastic foundation", *Wind and Structures*, **27**(5), 311-324.
- [22] Ayat, H., Kellouche, Y., Ghrici, M., Boukhatem, B. (2018), "Compressive strength prediction of limestone filler concrete using artificial neural networks", *Advances in Computational Design*, **3**(3), 289-302.
- [23] Cherif, R.H., Meradjah, M., Zidour, M., Tounsi, A., Belmahi, H., Bensattalah, T. (2018), "Vibration analysis of nano beam using differential transform method including thermal effect", *Journal of Nano Research*, **54**, 1-14.
- [24] Kaci, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "Post-buckling analysis of shear-deformable composite beams using a novel simple two-unknown beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **65**(5), 621-631.
- [25] Kadari, B., Bessaim, A., Tounsi, A., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A. (2018), "Buckling analysis of orthotropic nanoscale plates resting on elastic foundations", *Journal of Nano Research*, **55**, 42-56.

- [26] Behera, S., Kumari, P. (2018), "Free vibration of Levy-type rectangular laminated plates using efficient zig-zag theory", *Advances in Computational Design*, **3**(3), 213-232.
- [27] Youcef, D.O., Kaci, A., Benzair, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. (2018), "Dynamic analysis of nanoscale beams including surface stress effects", *Smart Structures and Systems.*, **21**(1), 65-74.
- [28] Adda Bedia, W., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Saeed, T., Alhodaly, M.S. (2019), "A new hyperbolic two-unknown beam model for bending and buckling analysis of a nonlocal strain gradient nanobeams", *Journal of Nano Research*, **57**, 175–191.
- [29] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2019a), "On exact wave propagation analysis of triclinic material using three dimensional bi-Helmholtz gradient plate model", *Structural Engineering and Mechanics*, **69**(5), 487-497.
- [30] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2019b), "Wave propagation of functionally graded anisotropic nanoplates resting on Winkler-Pasternak foundation", *Structural Engineering and Mechanics*, **7**(1), 55-66.
- [31] Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., Tounsi, A. (2019c), "Resonance behavior of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with grapheme nanoplatelets", *International Journal of Mechanical Sciences*, **156**, 94-105.
- [32] Berghouti, H., Adda Bedia, E.A. Benkhedda, A., Tounsi, A. (2019), "Vibration analysis of nonlocal porous nanobeams made of functionally graded material", *Advances in Nano Research*, (In press).
- [33] Hussain, M., Naeem, M.N., Tounsi, A., Taj, M. (2019), "Nonlocal effect on the vibration of armchair and zigzag SWCNTs with bending rigidity", *Advances in Nano Research*, (Accepted).
- [34] Medani, M., Benahmed, A., Zidour, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2019), "Static and dynamic behavior of (FG-CNT) reinforced porous sandwich plate", *Steel and Composite Structures*, (Accepted).
- [35] Boutaleb, S., Benrahou, K.H., Bakora, A., Algarni, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2019), "Dynamic Analysis of nanosize FG rectangular plates based on simple nonlocal quasi 3D HSDT", *Advances in Nano Research*, **7**(3), 189-206.
- [36] Bensattalah, T., Zidour, M., Daouadji, T.S. (2019), "A new nonlocal beam model for free vibration analysis of chiral single-walled carbon nanotubes", *Composite Materials and Engineering*, **1**(1), 21-31.
- [37] Draoui, A., Zidour, M., Tounsi, A., Adim, B. (2019), "Static and dynamic behavior of nanotubes-reinforced sandwich plates using (FSDT)", *Journal of Nano Research*, **57**, 117-135.

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Les plaques sont largement utilisées dans la confection des structures mécaniques. Elles permettent ainsi de réaliser dans l'industrie des structures à la fois robustes et légères.

Les structures sandwiches en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant qu'il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles. Dans l'application de technologie, cette caractéristique représente beaucoup d'avantages et permet de sélectionner des différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie afin d'éviter la ruine de ces structures.

Dans le cadre de cette étude, une fonction de cisaillement hyperbolique est utilisée afin de souscrire une description de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur et qui doit satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement dans les bords de la plaque.

Le champ de déplacement est modélisé avec seulement quatre inconnus, étant inférieur à la théorie FSDT et ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement.

L'objectif de ce travail est d'apporter une contribution à l'analyse de comportement des plaques sandwiches en FGM soumises à un chargement thermomécanique.

Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons utilisé un modèle analytique basé sur la théorie raffinée à quatre variables avec une fonction de cisaillement parabolique, pour l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwiches en FGM soumises à un chargement thermomécanique .

Deuxièmement, on a utilisé le principe des travaux virtuels et résolu par une solution de type Navier. Les équations gouvernantes différentielles sont obtenues pour les plaques FGM. L'exactitude du présent modèle est déterminée par comparaison de ces résultats avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur où un excellent accord a été observé.

Dans cette étude, la plaque est composée de deux faces supérieure et inférieure et un noyau. Les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur de la plaque selon une distribution de loi de puissance afin d'étudier deux cas de figure tel qu'une plaque de (type A)

composée en deux faces en P-FGM et le noyau en E-FGM, et la plaque de (type B) contient deux faces en P-FGM et un noyau en S-FGM symétrique.

Une étude paramétrique a été menée pour représenter les effets de la distribution des fractions volumiques, du facteur de forme et de la charge thermique et aux théories appliquées pour modéliser le phénomène.

En plus, le choix de la bonne méthode de résolution est crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce comportement. De ce fait plusieurs chercheurs s'imprennent dans cet axe de recherche.

Certains résultats sont présentés sous forme de tableaux et graphes, qui peuvent servir de référence pour la recherche.

En conclusion, on peut dire que la théorie proposée est simple et précise dans la résolution de la flexion thermomécanique des plaques sandwiches en FGM, et qui nous a permis de dégager que:

- L'indice de matière des fractions volumiques (E-FGM, P-FGM et symétrique S-FGM) a une influence sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} , et la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$.
- Le rapport (a/b) a une influence significative sur la déflexion centrale adimensionnelle, et que le rapport a/h a une légère influence sur la déflexion adimensionnelle \bar{w} .
- La flèche adimensionnelle \bar{w} et les contraintes adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ sont sensibles au terme non linéaire du champ de température.

Finalement, on peut dire que ce travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux FGM et précisément leurs comportements sous la combinaison des différents types de chargements (thermique, vibratoire et hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dus aux conditions d'environnement.

En perspective, on prévoit d'élargir le champ d'application de cette nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques pour l'analyse de l'effet thermomécanique sur et les structures fonctionnellement graduées avec des différentes géométries et différentes formes sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique et thermique) tout en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles constitutives des matériaux dus à la température.