

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES
Spécialité : Génie Mécanique
Option : Science des matériaux

Présentée par : BOUAMOUD Ahmed
Sujet de thèse

**Etude de la réponse thermomécanique des plaques
épaisses non homogènes.**

Soutenu le/2020 devant le Jury composé de :

M ^r .A.LOUSDAD	Pr	UDL-SBA	Président
M ^r .B.BOUCHAM	Pr	UDL-SBA	Directeur de thèse
M ^r .R.YEGHNEM	Pr	U-SAIDA	Examineur
M ^r .A.MOULGADA	MCA	U-TIARET	Examineur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier le Dieu pour cette réussite et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à réaliser ce travail.

*Je remercie chaleureusement mon encadreur Monsieur **Belhadj BOUCHAM** qui a été attentif à l'évolution de mes recherches et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, ses conseils ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années de thèse.*

*Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **Abdelkader LOUSDAD**, **Redha YEGHNEM** et **Abdelmadjid MOULGADA** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'ils me soient permis de leur exprimer ma profonde gratitude.*

*J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur **Abdelouahed TOUNSI**, Professeur à l'Université **DJILLALI Liabes** de Sidi Bel Abbés, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.*

DEDICACES

À ma chère mère et mon cher père,

À ma femme et mes enfants,

À mes sœurs et mes frères,

À ma famille,

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

ملخص

في هذا العمل الذي أجري في مختبر ميكانيكا الهياكل والمواد الصلبة (LMSS)، يتم تطبيق نظرية جديدة مع أربعة متغيرات لتحليل تأثيرات الحمولة الميكانيكية الحرارية على الانحناء لنوعين من صفائح الساندويتش المتدرجة الخواص. لب النوع الأول من صفائح الساندويتش متكون من مادة متجانسة و موحدة الخواص مع طبقات الوجهين من مادة متدرجة الخواص، بينما في النوع الثاني، لب الصفيحة هو من مادة متدرجة الخواص مع طبقات الوجهين من مادة متجانسة. نفترض أن خواص المواد ومعامل التمدد الحراري للوحة ساندويتش تتغير بشكل مستمر في اتجاه سمك اللوحة وفقاً لتوزيع بسيط لقانون الأس وذلك باتخاذ توزيع أجزاء حجم المكونات كدالة لهذا القانون. يتم استخدام عدة أنواع من صفائح الساندويتش، مع أو عدم مراعاة تناظر اللوحة وسماكة كل طبقة. يتم كتابة المعادلات على أساس مبدأ العمل الافتراضي مع اعتبار فقط أربعة متغيرات غير معروفة، ولحل هذه المعادلات، يتم استخدام طريقة نافيه (Navier). يتم تحليل ومناقشة الانحراف والضغوط المحورية والقص الناتج عن الانحناء لنوعين من صفائح الساندويتش. يتم التحقق من صحة وفعالية النظرية المقترحة من خلال مقارنته بالحلول المختلفة المتوفرة في الدراسات السابقة. يتم دراسة آثار توزيع أجزاء الحجم والنسبة الهندسية والحمل الحراري على خصائص الانحناء الميكانيكي الحراري لصفائح الساندويتش المتدرجة الخواص.

الكلمات المفتاح: مواد متدرجة الخواص، نظرية جديدة مع أربعة متغيرات، صفائح الساندويتش، الانحناء، الميكانيكي الحراري.

RESUME

Dans cette thèse menée au Laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides (LMSS), un modèle raffiné de plaque à quatre variables est appliqué pour analyser l'influence du chargement thermomécanique sur la réponse de la flexion de deux types de plaques sandwiches en matériau (FGM) tout en étudiant l'évolution de la flèche et les contraintes normales et tangentielles. Le cœur de la première plaque sandwich choisie est isotrope avec des couches faciales en FGM, tandis que dans la seconde plaque sandwich, le cœur est en FGM avec des couches faciales isotropes et homogènes. On suppose que les propriétés matérielles et le coefficient de dilatation thermique de la plaque sandwich varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Plusieurs types de plaques sandwiches sont utilisés en tenant compte ou pas de la symétrie de la plaque et l'épaisseur de chaque couche. En considérant seulement quatre variables inconnues, les équations qui régissent sont écrites sur la base du principe de travail virtuel et la méthode de Navier est utilisée pour résoudre ces équations. Les déflexions et les contraintes normales de cisaillement dues à la flexion de deux types de structures en sandwich de FGM sont analysées et discutées. La validité et l'efficacité du modèle proposé sont vérifiées en les comparant avec diverses solutions disponibles dans la littérature. Les effets de la distribution des fractions volumiques, du rapport géométrique et de la charge thermique sur les propriétés de flexion thermomécanique de la plaque sandwich FGM sont étudiés en détail.

Mots clés : Matériaux à gradient de propriétés, un modèle raffiné de plaque à quatre variables, plaques sandwiches, flexion, comportement thermomécanique, solutions analytiques exactes.

ABSTRACT

In this work conducted at the Laboratory of Mechanics of Structures and Solids (LMSS), a refined plate model with four variables is applied to study the thermo mechanical bending of two types of sandwich plates classified in (FGM) material. The sandwich core of one type is isotropic with FGM facial layers, while in the second type, the sandwich core is FGM with isotropic and homogeneous facial layers. It is assumed that the material properties and the coefficient of thermal expansion of the sandwich plate vary continuously in the direction of the thickness according to a simple distribution of power law as a function of the volume fraction of the constituents. Several types of sandwich plates are used, taking into account the symmetry or the unsymmetrical of the plate and the thickness of each layer. By considering only four unknown variables, the governing equations are written on the basis of the virtual work principle, the Navier method is used to solve these equations. Deflections and normal and shear stresses due to bending of two types of FGM sandwich structures are analyzed and discussed. The validity and effectiveness of the results of the proposed model are verified by comparing them to various solutions available in the literature. The effects of the distribution of volume fractions, the geometric ratio and the thermal load on the thermomechanical bending properties of the FGM sandwich plate are studied in details.

Keywords: Functionally graded material, four variable high order theory, sandwich plates, bending, thermo mechanics, exact analytical solutions.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS.....	i
DEDICACES	ii
ملخص.....	iii
RESUME	iv
ABSTRACT	v
LISTE DES TABLEAUX	vi
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES NOTATIONS	x
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL	4
I.1 Introduction :	4
I.2 Concept des matériaux à gradient de propriétés :	6
I.3 Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés.....	8
I.4 Avantages et inconvénients de la FGM	10
I.4.1 Avantages de la FGM	10
I.4.2 Inconvénients de la FGM.....	11
I.5 L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs).....	11
I.5.1 La loi exponentielle.....	12
I.5.2 La loi de puissance	13
I.5.3 Une fonction sigmoïde	13
I.6 Conclusion	15
CHAPITRE II : LES MATERIAUX COMPOSITES SANDWICHES	16
II.1 Introduction :	16
II.2 Recherches dans le domaine des sandwiches :	17
II.3 Définition d'une structure sandwich:	19
II.4 Types et domaines d'application de la structure sandwich :	21
II.4.1 Sandwich avec couche visco-élastique :	21
II.4.2 Structure Sandwich en nids d'abeilles :	23
II.4.3 Structure sandwich en FGM :	24
II.5 Conclusion :	25

CHAPITRE III : PRESENTATION DES MODELES EXISTANTS.....	26
III.1 Introduction :	26
III.2 Historique des modèles :	26
III.3 Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle :....	28
III.3.1 Approche monocouche équivalente :	28
III.3.2 Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques) :	28
III.3.3 Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT):	29
III.3.4 Les modèles d'ordre supérieur:	31
III.3.5 La théorie d'ordre élevé à deux variables (Les théories raffinées) :	35
III.3.6 Approche par couche:.....	35
III.3.7 Les modèles zig-zag:	36
III.3.8 Les modèles couches discrètes:	38
III.4 Théorie des plaques tridimensionnelles (élasticité 3D) :.....	40
III.5 Approches quasi- tridimensionnelles :	41
III.6 Conclusion.....	44
CHAPITRE IV : FORMULATION THEORIQUE	45
IV. 1 Introduction.....	45
IV. 2 Configuration géométrique :	46
a. Plaque sandwich en FGM (Type A) : FGM / Céramique / FGM	47
b. Plaque sandwich en FGM (Type B) : Céramique / FGM / Métal :	50
IV. 3 Formulation théorique :.....	52
IV.3.1 Cinématique et déformations :	52
IV.3.2 Cinématique et équations constitutives :	53
IV.3.3 Les contraintes :	55
IV.3.4 Détermination des équations d'équilibre :	55
IV.3.5 Détermination des coefficients de rigidité:	56
IV.3.6 Formulation des équations différentielles :	58
III.4 Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée :	59
III.5 Conclusion :	61
CHAPITRE V: RESULTATS ET DISCUSSIONS	62
V. 1. Introduction	62
V. 2. Analyse de la flexion mécanique :	63
V. 2.1 Analyse de la flexion mécanique de la plaque type "A" :	63

V. 2.2 Analyse de la flexion mécanique de la plaque type "B" :	65
V. 3 Analyse de la flexion thermo-élastique:	68
V. 3.1 Analyse de la flexion thermo-élastique de la plaque type "A" :.....	68
V. 3.2 Analyse de la flexion thermo-élastique de la plaque type "B" :.....	70
V. 4 Analyse de la flexion thermomécanique:	71
V. 4.1 Analyse de la flexion thermomécanique de la plaque type "A" :.....	71
V. 4.2 Analyse de la flexion thermomécanique de la plaque type "B" :.....	78
V. 5 Conclusion :.....	84
CONCLUSION GENERALE.....	85
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	87

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I : GENERALITE SUR LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL

Tableau I.1 :	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	07
----------------------	--	-----------

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau V.1 :	Le déplacement transversal adimensionnel \hat{w} de la plaque sandwich type "A" uniquement sous un chargement mécanique sinusoïdal ($a/h = 10$)	64
Tableau V.2 :	Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type "B" uniquement sous un chargement mécanique sinusoïdal	66
Tableau V.3 :	la contraintes de cisaillement adimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ de la plaque sandwich type "B" uniquement sous un chargement mécanique sinusoïdal	67
Tableau V.4 :	Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type "A" sous un chargement thermique pure ($t_3 = 0$)	69
Tableau V.5 :	Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type "B" sous un chargement thermique pure ($t_3 = 0$)	71
Tableau V.6 :	Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type "A" sous un chargement thermomécanique ($a/h = 10$)	72
Tableau V.7 :	L'effet du rapport a/h sur le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} la plaque sandwich type "A" sous un chargement thermomécanique ($P = 3$)	73
Tableau V.8 :	La contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich type "A" sous un chargement thermomécanique ($a/h = 10$)	74
Tableau V.9 :	Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type "B" sous un chargement thermomécanique ($a/h = 10$)	79
Tableau V.10:	L'effet du rapport d'aspect a/h sur le déplacement transversal \bar{w} de la plaque sandwich type "B" sous un chargement thermomécanique ($P = 3$)	80

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I : GENERALITE SUR LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL

Figure I.1 :	Variation continue des propriétés	06
Figure I.2:	Variation discrète des propriétés.	06
Figure I.3:	Variation continue de la microstructure (schématisée).	08
Figure I.4:	Variation continue de la microstructure (photo).	08
Figure I.5 :	La variation du module de Young dans le cas d'une plaque E-FGM	12
Figure I.6 :	La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque P-FGM	13
Figure I.7 :	La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque S-FGM	14

CHAPITRE II : LES MATERIAUX COMPOSITES SANDWICHES

Figure II.1 :	Structure sandwich.	19
Figure II.2 :	Constituants des matériaux sandwichs.	20
Figure II.3 :	Tôle sandwich avec une couche vibro-élastique (Polymère)	22
Figure II.4 :	Amortissement comparé de différents matériaux.	22
Figure II.5 :	Variation du matériau suivant l'épaisseur : (a) Cœur homogène et parements FGM, (b) Cœur FGM et parements homogènes	25

CHAPITRE III : PRESENTATION DES MODELES EXISTANTS

Figure. III.1 :	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy, 1997) [119].	29
Figure. III.2 :	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy, 1997) [119].	30
Figure. III.3 :	Variation de la fonction de gauchissement $f(z)=z$ et $f'(z)$ en fonction de l'épaisseur.	31
Figure. III.4 :	Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997) [119].	32
Figure. III.5 :	Variation de la fonction de forme $\Psi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.	34
Figure. III.6 :	Variation de la dérivée de la fonction de forme $\Psi'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.	35
Figure. III.7 :	Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.	36

Figure. III.8 :	Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.	36
Figure. III.9 :	Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre	37
Figure. III.10:	Champ de déplacement des modèles zig-zag d'ordre supérieur	38
Figure. III.11:	Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.	41

CHAPITRE IV : FORMULATION THEORIQUE

Figure IV.1 :	Composition de deux différents types de plaques sandwiches FGM : (a) les couches supérieure et inférieure en FGM et la couche centrale en matériau homogène ; (b) les couches supérieure et inférieure en matériau homogène et la couche centrale en FGM.	46
Figure IV.2 :	Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwiches (Type A): (a) Plaque sandwich en FGM (1-0-1), (b) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (c) Plaque sandwich en FGM (1-2-1), (d) Plaque sandwich en FGM (2-1-2), et (e) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).	49
Figure IV.3 :	Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwiches Type B: (a) Plaque sandwich en FGM (1-2-2), (b) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (c) Plaque sandwich en FGM (1-2-1), (d) Plaque sandwich en FGM (2-1-2), et (e) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).	51

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Figure V.1 :	Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich type "A" des configurations : (a) (1-2-1) et (b) (2-2-1).	75
Figure V.2 :	Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich type "A" des configurations : (a) (1-2-1) et (b) (2-2-1).	77
Figure V.3 :	L'effet de la valeur de la charge thermique t_3 sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich type "A" avec ($P = 1.5$).	77
Figure V.4 :	L'effet de la valeur de la charge thermique t_3 sur la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque sandwich type "A" avec ($P = 1.5$).	78
Figure V.5 :	Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} en fonction du rapport de forme a/h de la plaque sandwich (1-2-1) de type "B" avec ($t_2 = t_3 = 100K$).	81
Figure V.6 :	L'effet du chargement thermique t_3 et le rapport de forme a/h sur le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich (1-2-1) de type "B" avec ($P = 1$).	81

- Figure V.7 :** Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich type "B" des configurations : (a) (1-2-1) et (b) (2-2-1). **82**
- Figure V.8 :** Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich type "B" des configuration : (a) (1-2-1) et (b) (2-2-1). **83**

LISTE DES NOTATIONS

G	Module de cisaillement
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y et z
θ_x, θ_y	Les rotations autour des axes x et y
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
σ_x, σ_y	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$	Champ virtuel de déplacement
δU	Travail virtuel intérieur
δV	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel

$\delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{xy}, \delta\gamma_{yz}$	Champ de déformation longitudinal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
Q_{yz}^s, Q_{xz}^s	Effort de cisaillement
N_x^T, N_y^T	Efforts normaux due au chargement thermique
M_x^{bT}, M_y^{bT}	Moments de flexion due au chargement thermique
M_x^{sT}, M_y^{sT}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse due au chargement thermique
∂	Dérivée partielle
i, j, l et m	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
C_{ij}	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}	Termes de rigidité de la matrice
J_{ij}	Termes de rigidité de la matrice
q	Chargement mécanique
$T(x, y, z)$	Chargement thermique
$[K]$	La matrice de rigidité
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{P\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Il y a longtemps que les structures en sandwichs ont été largement utilisées dans les secteurs de l'aéronautique, de l'aérospatiale, de la construction, du transport et de l'éolien, en raison de leurs propriétés exceptionnelles telles qu'une rigidité élevée et un faible poids (Vinson [1] et [2], Ahmed [3], Tian et al. [4], Kolahchi et al. [5]).

Bien que les structures en sandwichs offrent des avantages par rapport aux autres types de structures, des modifications abruptes des caractéristiques des matériaux aux interfaces face à face peuvent générer des contraintes interlaminaires élevées, entraînant souvent une délamination, ce qui constitue un problème important dans les structures en sandwichs conventionnelles. De plus, la différence de coefficients thermiques des matériaux peut entraîner des contraintes résiduelles. Un moyen de surmonter ce problème consiste à introduire un matériau de qualité fonctionnelle (FGM).

Il est bien connu que les matériaux à gradient de propriétés prennent une part de plus en plus importante en construction mécanique, tant aujourd'hui pour les véhicules automobiles; que pour les avions, les véhicules spatiaux et les constructions civiles et industrielles pour lesquels l'expérience acquise avec les composites est très significative. Ils sont très utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique. Le chargement thermique auquel sont soumises certaines de ces structures, et les contraintes thermiques qui en résultent, jouent un rôle très important dans la ruine de ces structures [6].

Les FGM désignent des matériaux composites hétérogènes dont les propriétés varient progressivement d'une surface à l'autre, ce qui entraîne une variation continue des propriétés des matériaux, éliminant ainsi les modifications abruptes des propriétés thermomécaniques mentionnées ci-dessus (Koizumi [7], Shaw [8], Birman et al. [9], Swaminathan et al. [10], Panyatong et al. [11], Shahsavari et al. [12] et Faleh et al. [13]).

Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement mécanique des structures épaisses sandwichs en matériaux à gradients fonctionnels et en déduire l'évolution des déplacements, des déformations et les contraintes normales et tangentielles thermo-élastiques liés à un chargement thermique donné

en chaque point de la structure, voire même l'influence de la superposition des chargements thermiques et mécaniques.

La détermination des contraintes thermiques (normales et de cisaillement transverse) dans les plaques est habituellement effectuée à partir d'hypothèses sur la forme du champ de déplacement dans l'épaisseur du modèle choisi. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs, différentes entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées [14].

Un certain nombre de travaux ont été réalisés pour étudier la réponse en flexion de plaques en FGM soumises à des charges thermiques ou thermomécaniques. Cheng et Batra [15] ont étudié le pliage thermomécanique d'une plaque elliptique élastique FG linéaire. Reddy et Cheng [16] ont analysé le pliage thermomécanique 3D de plaques rectangulaires FG simplement supportées en utilisant une méthode asymptotique. Vel et Batra [17] ont proposé une solution exacte pour les déformations 3D de plaques épaisses FG simplement supportées sous des charges mécaniques et thermiques. Shen [18] a étudié le comportement à la flexion non linéaire de plaques FG simplement supportées sous des charges transversales dans des environnements thermiques en utilisant une méthode de perturbation de Galerkin mixte. Yang et Shen [19] ont utilisé une formulation semi-numérique pour étudier le pliage thermomécanique non linéaire de plaques épaisses FG en considérant diverses conditions aux limites. Na et Kim [20] ont étudié la statique non linéaire des plaques FG sous une pression et des charges thermiques uniformes en utilisant une méthode d'élément 3-D. Brischetto et al. [21] ont utilisé l'approche unifiée de Carrera (Carrera et Brischetto [22], Carrera et Petrolo [23], Carrera et coll. [24], Fazzolari et Carrera [25], Petrolo et coll. [26] pour étudier la flexion thermomécanique d'une plaque rectangulaire FG simplement appuyée. Zhao et Liew [27] ont analysé le comportement non linéaire de plaques céramique-métal FG soumises à des charges mécaniques et thermiques en utilisant la procédure kp-Ritz sans maillage. Sepahi et al. [28] ont présenté une analyse de flexion non linéaire de plaques de FGM annulaires sous les effets de fondations élastiques à trois paramètres et de chargements thermomécaniques à l'aide de DQM, Boudierba et al. [29] ont étudié le comportement de flexion thermomécanique de plaques épaisses FG reposant sur des fondations élastiques de Winkler-Pasternak, basé sur une théorie raffinée de la déformation par cisaillement trigonométrique. Tounsi et al. [30] ont réalisé une étude de flexion thermo-élastique de plaques sandwiches FG en utilisant un

modèle raffiné de déformation par cisaillement trigonométrique. Dans leur travail, la couche centrale est constituée de FGM et deux feuilles de surface présentent des caractéristiques matérielles différentes. Zhu et al. [31] ont mené une étude thermomécanique non linéaire géométrique de plaques de FGM d'épaisseur moyenne en utilisant une technique locale sans maillage avec une méthode d'interpolation de Kriging. Tung et Duc [32] ont analysé le comportement non linéaire de panneaux épais peu incurvés en FG épais et faiblement courbés, reposant sur des bases élastiques et soumis à des charges thermomécaniques. Kar et Panda [33] ont présenté une analyse thermo-élastique de panneaux de coque FG à double courbes utilisant la méthode des éléments finis non linéaires. Mantari et Granados [34] ont présenté une étude de flexion thermo-élastique de deux types de plaques sandwiches FG en utilisant un nouveau HSDT hybride quasi 3D à 5 inconnues. Li et al. [35] ont développé une théorie raffinée des plaques à quatre variables afin d'étudier le pliage thermomécanique de deux types de plaques sandwiches FG.

Le but de ce travail est d'étudier la réponse thermomécanique en flexion de plaques sandwiches FGM en utilisant un modèle raffiné de plaque à quatre variables. L'utilisation du terme intégral dans le champ de déplacement a entraîné une réduction du nombre d'inconnus et d'équations de gouvernance. Deux types de plaques sandwiches FGM sont considérées dans cette étude. Dans le premier type, le noyau sandwich est isotrope et homogène avec les feuilles de face FGM, tandis que dans le second type, le noyau sandwich est FGM avec des parements isotropes et homogènes. Quelques exemples sont considérés pour vérifier la validité et l'efficacité de la théorie proposée. Les influences de l'indice du matériau, du facteur de forme et de la charge thermique sur les déplacements non dimensionnels et les contraintes des plaques sandwiches FG sont examinées.

Pour se faire, nous avons subdivisé notre travail en cinq chapitres et une conclusion générale.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les matériaux à gradient de propriétés, leurs conceptions et propriétés, l'histoire de leur développement et leurs avantages et inconvénients. Nous avons exposé par la suite les différentes lois de mélange.

Dans le deuxième chapitre, la notion des matériaux sandwichs, leur historique et les recherches dans ce domaine, ainsi que les principales propriétés mécaniques et les différents types et domaines d'applications des structures sandwichs sont présentés.

Le troisième chapitre décrit d'une part les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente en élasticité bidimensionnelle dont le modèle d'ordre supérieur et la théorie raffinée ainsi que l'approche par couche, et d'autre part les théories tridimensionnelles.

Le quatrième chapitre détaille la mise en œuvre du modèle proposé de plaques sandwiches FGM basé sur un modèle de plaque raffiné à 4 variables pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM à la flexion.

Le dernier chapitre est consacré à des applications numériques réalisées sur les plaques sandwiches FGM. Une validation des résultats est présentée pour le cas de la réponse en flexion de deux types de plaques sandwiches en matériau (FGM) sous charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques.

Une conclusion générale relatant les principaux résultats est présentée, ainsi que les perspectives recommandées et envisagées pour les futurs travaux.

Chapitre I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL

I.1 Introduction :

Les matériaux composites, avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très grandes, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été Généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. D'autres parts les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées vu leur fiable résistance mécanique. Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériaux fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials : FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continuellement avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques (Z. Zhong et al.) [36]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé.

Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil, ils trouvent également des applications biomédicales (C. Baron et al.) [37]. L'intérêt particulier et

grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux. La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine.

Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs énormes. Actuellement, des chercheurs en FGM ont testé et les résultats sont prometteurs. Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient fonctionnel. Néanmoins, une partie minime de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermomécanique du flambage.

Le but de notre présent travail étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette discipline. Suresh et Mortensen (M. Savoia et al.) [6] ont publié une recherche bibliographique détaillée sur la technologie des matériaux à gradient fonctionnel en 1998. Birman et Byrd (Birman, V. et Byrd, L.W) [38] ont également publié une recherche exhaustive sur les travaux dédiés au développement des FGM couvrant la période 1997-2007. Ce chapitre sera consacré aux recherches réalisées durant ces deux dernières décennies.

I.2 Concept des matériaux à gradient de propriétés:

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure I.1) ou discrète (figure I.2) à travers l'épaisseur (Hirai) [39]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délaminage et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiales, biomécaniques, automobiles et dans bien d'autres applications technologiques.

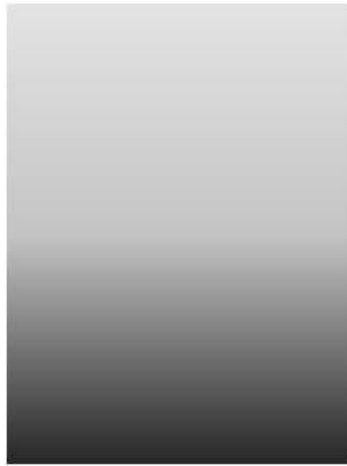


Figure I.1 : Variation continue des propriétés.



Figure I.2 : Variation discrète des propriétés.

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (J.N. Reddy) [40]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Céramique	<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance thermique.- Bonne résistance à l'oxydation.- Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none">-Élimination des problèmes de l'interface.-Relaxation des contraintes thermiques.
Métal	<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance mécanique.- Conductivité thermique élevée.- Très bonne ténacité.

Tableau I.1 : Avantage de céramique et du métal.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.3. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (S.N.R.K. Iyengar et al.) [41].

La variation continue des propriétés (figures I.3 et I.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles

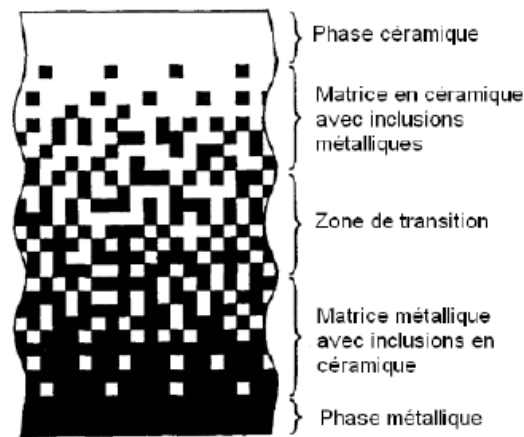


Figure I.3 : Variation continue de la microstructure (schématisée).

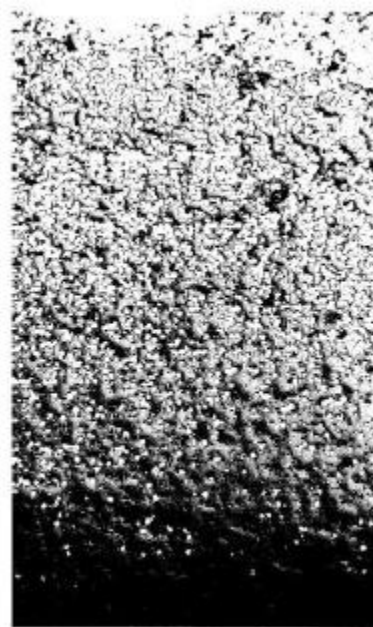


Figure I.4 : Variation continue de la microstructure (photo).

Avec cette configurations des matériaux FGM, on peut alléger les concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

I.3 Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau est distingué. Il en résulte un

gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch) [42].

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique (N.D.Kuznetsov et al.) [43]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisées pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques (Reissner) [44].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour le développement de Matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires japonaise de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet (N.D.Kuznetsov et al.) [43].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches (H. Okamura) [45].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique (H. Okamura) [45].

I.4 Avantages et inconvénients de la FGM

Les matériaux fonctionnellement gradué présentent des avantages et des inconvénients:

I.4.1 Avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Suresh et al. Et al Bahr, et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que (Narottam P. Bansal) [46] :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- Suppression de délaminage ;

- Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.4.2 Inconvénients de la FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [Narottam P. Bansal] [46].

I.5 L'idéalisation mathématique des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs)

Bien que les FGMs sont très hétérogènes, il sera très utile de les idéaliser en tant que continus avec leurs propriétés mécaniques variant continûment par rapport aux coordonnées spatiales. Les schémas d'homogénéisation sont nécessaires pour simplifier leurs microstructures hétérogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace. Des solutions fermées de certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides peuvent être obtenues par cette idéalisation et aussi il aidera à l'évolution et le développement de modèles numériques des structures faites par les FGMs. Il est à noter que la répartition de matière dans les structures des FGMs peut être conçue pour diverses spécifications spatiales. Un FGM typique représente un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions de volume des phases constitutives.

Les propriétés des matériaux sont généralement supposées suivre une gradation à travers l'épaisseur d'une manière continue. Deux types de variations/gradations sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants.

I.5.1 La loi exponentielle

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGMs est très répandue dans les études de mécanique de la rupture [47]. Pour une structure faite de FGM avec 'h' une épaisseur uniforme, les propriétés typiques des matériaux $P(z)$ à tout point situé à une distance "z" de la surface de référence est donné par :

$$E(z) = A. e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.1.a})$$

Avec :

$$A = E_2 \text{ et } B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (\text{I.1.b})$$

La figure (I.5) affiche la variation de la fraction volumique.

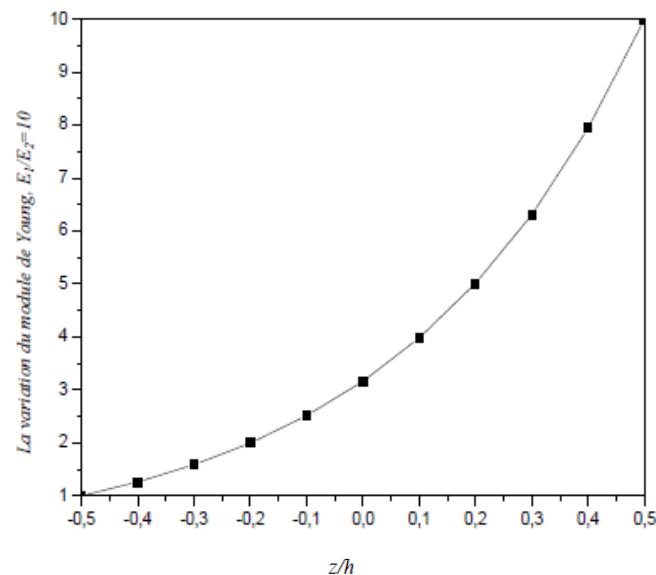


Figure I.5 : La variation du module de Young dans le cas d'une plaque E-FGM [175].

I.5.2 La loi de puissance

Ceci est plus fréquent dans l'analyse des contraintes des FGMs [47] est donné par :

$$f(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^N \quad (\text{I.2})$$

Où N est un paramètre du matériau qui représente l'ordre du polynôme. La variation de la fraction volumique des phases en termes de N est représentée sur la figure (I.6)

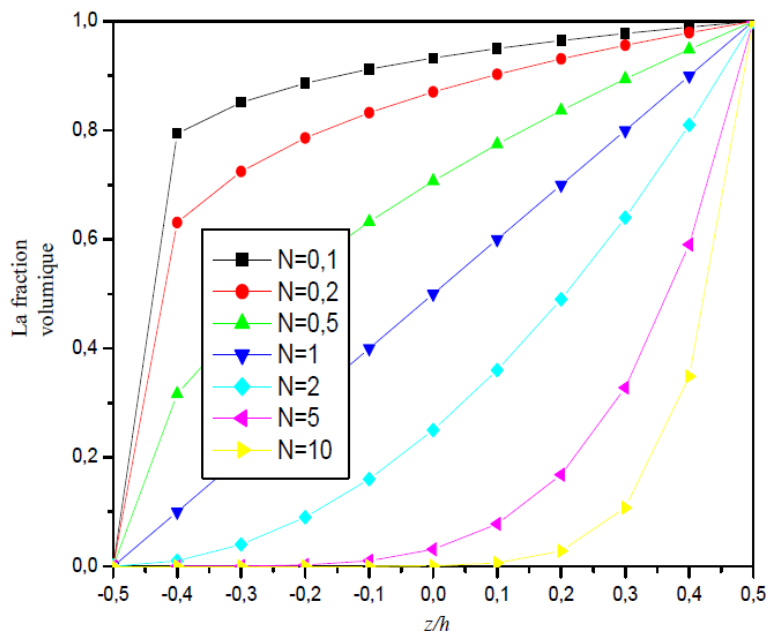


Figure I.6 : La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque P-FGM [175].

I.5.3 Une fonction sigmoïde

Pour réduire la variation rapide de la matière à proximité de la surface supérieure et inférieure, la distribution de matériaux à l'aide de deux fonctions en loi de puissance a été définie. Cette distribution est appelée la fonction sigmoïde. La fraction volumique du matériau est donc donnée par la forme suivante:

$$\begin{cases} f_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h} \right)^N & \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ f_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h+2z}{h} \right)^N & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

La figure (I.7) affiche la variation de la fonction de fraction volumique pour $N > 1$. Étant donné que cette distribution représente la fonction en loi de puissance dans une demi-épaisseur, les compositions du matériau à gradient fonctionnel varient plus lente que la distribution de la fonction en loi de puissance.

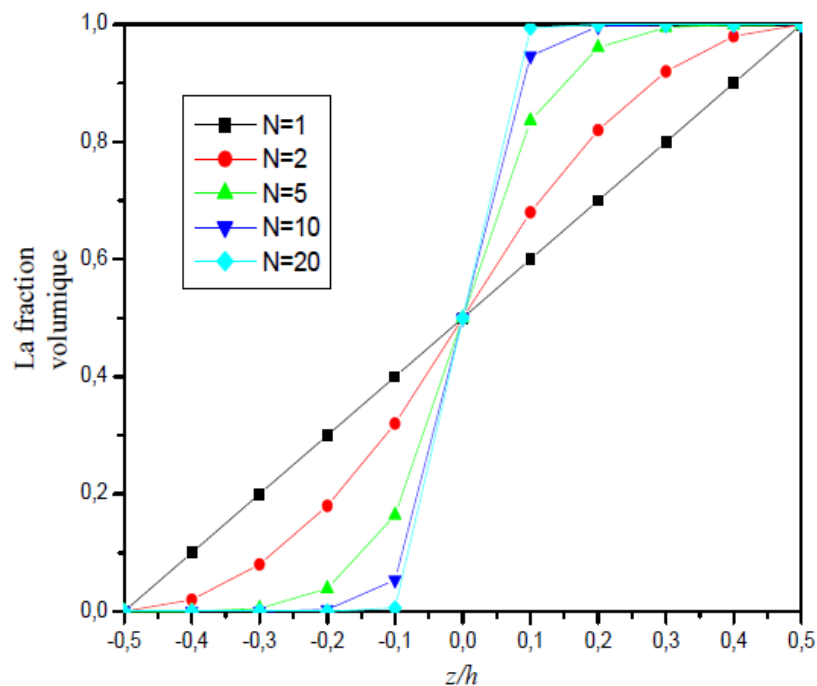


Figure I.7 : La variation de la fraction volumique dans le cas d'une plaque S-FGM [175].

I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons éclairé sur l'idée d'innovation des matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement et leurs propriétés, les différentes lois de mélange ont été présentées puis adaptées à des éléments structuraux symétriques. La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application.

Chapitre II

LES MATERIAUX COMPOSITES SANDWICHS

CHAPITRE II : LES MATERIAUX COMPOSITES SANDWICHS

II.1 Introduction :

Les matériaux composites sandwichs résultent, de l'association de deux peaux, de faibles épaisseurs, constituées de matériaux de haute résistance à la traction, et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible masse volumique. Ces structures complexes offrent de grandes potentialités aux concepteurs dans des domaines très divers. On peut d'abord songer à des applications structurales classiques pour lesquelles il faut combiner légèreté et rigidité, comme l'industrie aérospatiale, ou généralement le transport, puisque ce type de matériau est utilisé, parmi d'autres, pour les TGV à deux niveaux. Ces matériaux sont employés comme structures primaires dans le cas des petites et moyennes unités. L'usage des sandwichs se répand aussi dans l'industrie du bâtiment.

La raison la plus répandue pour l'utilisation des matériaux sandwichs est le gain de poids. Cependant, il existe d'autres raisons : coût, stabilité, sûreté, résistance au choc, durée de vie, propriétés à la fatigue, dégradation à l'environnement, bruit, isolation thermique, plus grande capacité de charge, maintenance réduite et facilité de réparation, utilisation maximale du volume intérieur et parois intérieures "propres", un fini attractif et plus de capacités d'atténuation des vibrations. Le prix du matériau sandwich en lui-même est un peu plus élevé que l'acier, mais sur certains types et exigences de structures, le prix de la construction peut être très compétitif surtout si l'on considère les économies engendrées à long terme à savoir :

- consommation de fuel.
- moins de maintenance de la structure grâce au choix de matériaux inertes ;
- moins de dommages à la structure en cas d'échouage.

Le concept sandwich a prouvé qu'il permet une protection relativement bonne contre le feu. C'est-à-dire que la chute de température est relativement importante à travers l'épaisseur et que la chaleur n'est pas transférée aisément. Le sandwich a aussi démontré sa capacité à absorber et à résister aux impacts importants. Quand des dommages se produisent, la zone endommagée est relativement limitée en comparaison avec une structure à une seule peau. De

plus, la peau interne reste sans dommage jusqu'à des charges relativement élevées, c'est-à-dire que la structure sandwich demeure opérationnelle dans une certaine mesure.

II.2 Recherches dans le domaine des sandwichs :

Le premier article sur le comportement des panneaux en sandwichs soumis aux charges de compression dans le plan a été écrit par Marguerre [48] en Allemagne en 1944. Dans la même année, Libove et Batdorf [49] ont publié une théorie simple pour l'analyse du comportement en flexion des plaques du sandwichs. En 1949, Flugge [50] a publié un article sur l'optimisation structurelle de panneaux du sandwichs dans lequel il a présenté la solution de plusieurs problèmes et situations. En 1951, Bijlaard [51] a étudié l'optimisation des structures sandwichs pour la recherche du ratio optimal entre l'épaisseur du cœur et l'épaisseur des faces, pour une épaisseur totale donnée.

À l'USFPL (1956), Ericksen et Kuenzi [52] étaient les principaux auteurs prolifiques de ces travaux. Ainsi, une grande partie du catalogue militaire américain sur les structures sandwichs, s'appuie sur les résultats et publications de cette institution. Ce document militaire est devenu un standard d'usage pour l'industrie. En 1957, Kaechele L.E. [53] a publié un rapport de l'USFPL sur la conception optimale des panneaux du sandwichs.

Dans les années soixante-dix, une grande activité scientifique a commencé en Suède sur l'usage des composites sandwichs pour les coques des bateaux. C'était pour une grande partie sous la direction de Karl-Axel Olsson de l'Institut Royal de Technologie (KTH) de Stockholm. Il a mené cette activité à KTH en collaboration avec la marine royale suédoise et les constructeurs de navires suédois. Cet effort de recherche a concerné l'analyse, l'optimisation, des tests sur des modèles réduits, des essais à échelle réelle pour les explosions sous-marines et en plein air, . . . etc. Ils étaient capables de montrer qu'une coque en composite sandwich, correctement conçue, peut structurellement remplacer une structure en coque d'acier. En 1989, Ha a publié une vue d'ensemble sur l'analyse par élément fini appliquée aux composites sandwichs. Ce papier est souvent cité et même encore en 2006. En 1991, Bert a fourni un article sur l'analyse des plaques sandwichs, et en 1996, un autre travail sur les structures sandwichs, est réalisé par Noor [54], Burton et Bert dans lequel ils ont fourni plus de 800 références discutées et 559 références comme une sorte de bibliographie. En 1995, une monographie par Zenkert [55] avait permis d'enrichir le contenu

du livre de Plantema F.J [56] et Allen. Zenkert a suivi ceci par un manuel scolaire sur le sandwich en 1996. En 1999, un autre manuel scolaire du sandwich a été publié par Vinson [57].

Les structures sandwichs, en raison de leur grande rigidité et de leur faible poids ainsi que leur capacité d'absorption d'énergie, ont été largement utilisés dans les domaines de l'aéronautique, de l'aérospatiale, de la marine / marine, de la construction, systèmes de transport et d'énergie éolienne [1, 2, 58 et 59]. Il y a plusieurs types de structures en sandwichs. Le plus largement utilisé est la structure sandwich à faces homogènes et un noyau homogène [60]. Avec le développement des matériaux avancés, le matériau à gradients fonctionnels (FGM) est actuellement utilisé pour l'étude de la conception des plaques sandwichs. Deux nouveaux types de structures en sandwichs avec les feuilles extérieures en FGM et un noyau homogène [61–65] ou à des feuilles extérieures homogènes et un noyau de FGM [65-68] ont été proposés et étudiés.

Pour la flexion mécanique des plaques sandwichs FGM, Zenkour [61] a utilisé une théorie de déformation en cisaillement sinusoïdale pour étudier la flexion des plaques sandwichs simplement appuyées avec des feuilles faciales en FGM et un noyau céramique homogène isotrope. Wang et Shen [69] ont porté une analyse de flexion non linéaire d'une plaque sandwich avec les feuilles de face en FGM par une technique de perturbation en deux étapes. Natarajan et Manickam [70] ont étudié la flexion et la vibration en flexion libre de deux types de plaques sandwichs FG en utilisant un élément flexible de cisaillement QUAD-8 développé et basé sur la théorie structurelle d'ordre supérieur. Zenkour [71] a étudié la flexion des plaques sandwichs FGM simplement appuyées, basé sur la théorie trigonométrique raffinée d'ordre supérieur. Mantari et Soares [72,73] ont présenté une théorie quasi-3D de la déformation par cisaillement de quatre inconnus et cinq inconnus pour l'analyse de la flexion d'une plaque sandwich en FGM. Alibeigloo et Alizadeh [74] ont étudié les comportements de flexion et de vibration libre de deux types de plaques sandwichs FG basées sur la théorie de l'élasticité de trois dimensions. Mahi et al. [75] ont appliqué une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique à l'analyse de flexion et de vibration libre d'isotropes des plaques sandwichs FG.

Le comportement à la flexion thermo-élastique des plaques sandwichs FGM a été étudié théoriquement par un certain nombre de chercheurs. Zenkour et Alghamdi [76] ont développé

une théorie de cisaillement unifié déformable des plaques, pour étudier la flexion thermo-élastique des plaques sandwichs avec des feuilles de face en FGM et un noyau homogène isotrope. Houari et al. [77] ont utilisé une théorie des plaques raffinée pour étudier la flexion thermo-élastique des plaques sandwichs rectangulaires simplement supportées avec les faces extérieures en FGM et le noyau homogène isotrope. Tounsi et al. [78] ont réalisé une analyse de flexion thermo-élastique des plaques sandwichs à faces homogènes isotropes et un noyau en FGM utilisant une théorie raffinée de la déformation par cisaillement trigonométrique. Houari et al. [79] ont étudié la flexion thermo-élastique des plaques en sandwich avec des feuilles de face en FGM et un noyau homogène isotrope en utilisant une nouvelle théorie du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale. Zhu et al. (2014) [80] ont mené une étude thermomécanique non linéaire géométrique des plaques en FGM d'épaisseur moyenne en utilisant une technique locale sans maillage avec une méthode d'interpolation. Kriging, Mantari et Granados (2015) [81] ont présenté une étude de flexion thermo-élastique de deux types de plaques sandwichs FG en utilisant un nouveau HSDT hybride quasi 3D à 5 inconnus. Li et al. (2016) [82] ont développé une théorie des plaques raffinées à quatre variables afin d'étudier le pliage thermomécanique de deux types de plaques sandwichs FG.

II.3 Définition d'une structure sandwich:

Une structure sandwich est le résultat d'assemblage par collage ou par soudage de deux parements minces ou des peaux sur un briquet de base ou cœur qui est utilisé pour garder les deux peaux séparées (Figure II.1). Leurs propriétés mécaniques sont performantes.

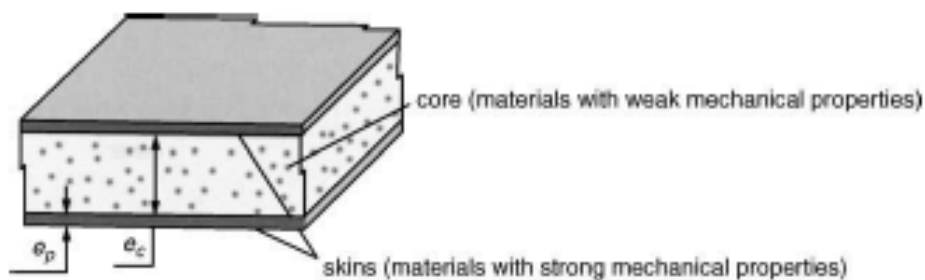


Figure II.1 : Structure sandwich.

Les avantages des structures sandwichs par rapport aux structures classiques sont :

- Légèreté. A titre de comparaison, la masse par unité de surface de la coupole de la basilique Saint-Pierre à Rome (45 mètres de diamètre) est 2600 kg/m^2 alors que la masse par unité de surface de la même coupole faite en sandwich acier/mousse polyuréthane (Hanovre) n'est que de 33 kg/m^2 .
- Très grande rigidité en flexion car la séparation des peaux augmente la rigidité en flexion.
- Excellentes caractéristiques d'isolation thermique.

Tandis que les inconvénients sont :

- Les matériaux sandwichs ne sont pas amortissant (pas d'isolation acoustique).
- La résistance au feu n'est pas bonne pour certains types de cœurs.
- Le risque de flambage est supérieur que dans les structures classiques.

Les matériaux de parement sont variés, et les matériaux des cœurs sont aussi légers que possible. On peut désigner les couples de matériaux compatibles pour former le sandwich (Figure II.2).

Les résines polyester attaquent les mousses de polystyrène [83].

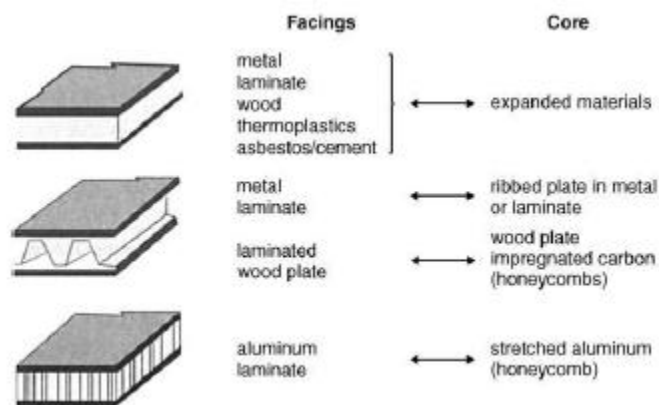


Figure II.2 : Constituants des matériaux sandwichs [83]

II.4 Types et domaines d'application de la structure sandwich :

Comme c'est déjà dit, une structure sandwich est conçue pour une application ou domaine précis. Suivant l'application et les caractéristiques recherchées les matériaux de parement et cœurs ainsi que la géométrie peuvent varier énormément.

Les structures sandwiches se présentent généralement sous la forme d'une couche relativement légère et molle, constituant le cœur, intercalée entre deux parements rigides appelés peaux ou faces. Les faces sont souvent des tôles métalliques ou des composites stratifiés. Le matériau composant le cœur peut être un polymère, en nids d'abeilles, bois ou mousse. Suivant leurs fonctionnalités principales, les structures sandwiches peuvent être définies par trois grands types :

- Sandwich de type-1, utilisés principalement dans les applications nécessitant la suppression ou l'atténuation des vibrations. Dans cette configuration, une fine couche viscoélastique est intercalée entre deux faces élastiques. La présence du matériau viscoélastique permet d'introduire un fort pouvoir amortissant dû principalement à l'écart entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques et à la faible rigidité de la couche centrale.
- Sandwich de type-2, conçu principalement pour supporter des charges transversales. Dans cette configuration, le cœur est souvent épais pour permettre d'obtenir de fortes rigidités en flexion avec de faibles augmentations de masse. Ce type de sandwich est très utilisé dans le domaine aérospatial.
- Sandwich de type-3, ce type comporte des matériaux composites avancés permettant de gérer des environnements extrêmes de température et de concentration de contraintes inter-faciales.

Trois applications sont choisies pour être présentées soit les sandwichs à couche viscoélastique, en nid d'abeille et en FGM.

II.4.1 Sandwich avec couche visco-élastique :

Pour les constructeurs de véhicules automobiles ou appareils électroménagers, le confort acoustique est devenu l'une des préoccupations majeures. Les solutions techniques actuelles

consistent à appliquer ou à poser des produits insonorisant (feutres, produits bitumeux). Ces solutions entraînent des opérations de fabrication supplémentaires et ont des inconvénients technologiques (volume et masse plus grande, automatisation difficile...etc.).

Actuellement, les sidérurgistes tentent de mettre au point des tôles antivibratoires appelées tôles sandwichs qui intègrent la fonction amortissant. Ces produits sont destinés à l'industrie automobile [84], [85] (carter, passage de roue) à la construction mécanique [86] (couvercle antibruit), au bâtiment (escalier plancher de gymnase) à la construction navale [87], à l'aéronautique [88] et à l'électroménager. Ces tôles sandwichs sont constituées de deux parements d'acier entre lesquels est inséré un fil de polymère (Figure II.3).

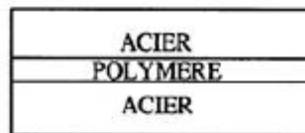


Figure II.3 : Tôle sandwiche avec une couche vibro-élastique (Polymère)

Ces tôles possèdent un pouvoir amortissant intéressant (Figure II.4) tout en conservant un poids, des dimensions et des propriétés physiques et mécaniques satisfaisants pour fabriquer des structures [89].

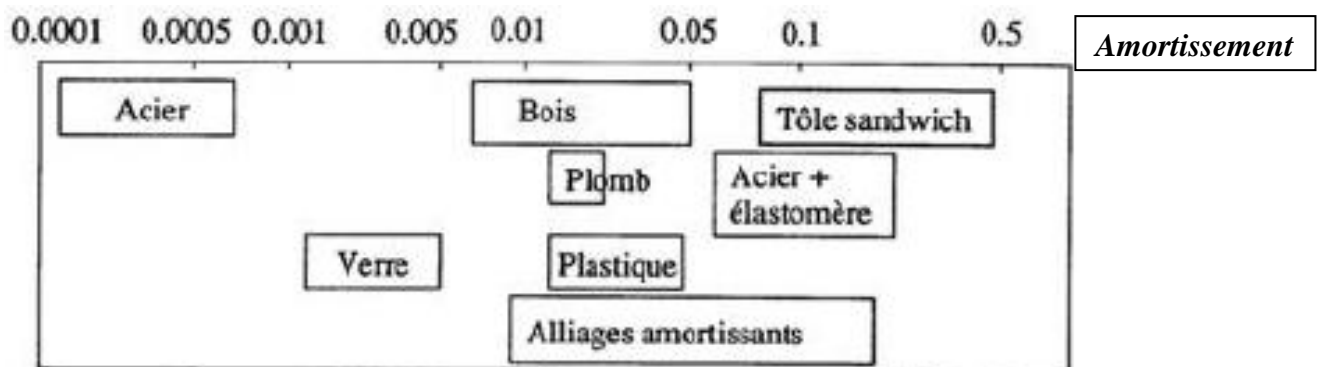


Figure II.4 : Amortissement comparé de différents matériaux.

La configuration symétrique donne un amortissement plus important que celle d'une configuration dissymétrique [90] et [91].

En plus des propriétés classiques d'une tôle (emboutissabilité, soudabilité), le polymère apporte la fonction amortissante [90]. Le mouvement d'un corps en vibration (on parlera d'un

corps soumis à des sollicitations dynamiques à l'opposé d'un corps soumis à des sollicitations statiques : fluage ou relaxation [92]), s'amortit au bout d'un certain temps [93]. La propriété que possède un solide en vibration de dissiper de l'énergie sous forme de chaleur est désignée sous le nom de frottement intérieur ou frottement interne ou capacité d'amortissement [93]. La capacité d'amortissement est définie par le rapport entre cette perte d'énergie et l'énergie potentielle du solide lors de la déformation maximale (coefficient de frottement intérieur) [94].

Outre ces paramètres, les épaisseurs des trois couches ainsi que les propriétés mécaniques des deux parements d'acier vont influencer l'amortissement de la tôle sandwich [94].

II.4.2 Structure sandwich en nids d'abeilles :

Les matériaux sandwichs à structures en nid d'abeille sont un bon compromis entre résistance et légèreté. De ce fait, les domaines d'application très variés font qu'il est intéressant de connaître leurs propriétés mécaniques pour prédire et calculer leur comportement dans des environnements spécifiques. Ces matériaux sandwichs sont composés de plusieurs parties interagissantes entre elles. Il sera donc possible d'associer judicieusement les propriétés des peaux ou semelles et celles des matériaux de cœur ou âme. L'assemblage de ces deux parties se réalise par collage, soudage ou brasage en mettant en jeu un autre composé de comportement différent.

L'étude des matériaux sandwichs en nid d'abeille est généralement précédée par une homogénéisation du cœur indépendamment des peaux, en remplaçant le cœur de géométrie compliquée par un matériau homogène de propriétés mécaniques similaires dans les modèles analytiques et numériques. Le nid-d'abeilles est assimilable à un matériau orthotrope. Son homogénéisation passe tout d'abord par la détermination des constantes élastiques de l'ingénieur qui sont les modules d'élasticité, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement. La connaissance du comportement mécanique des âmes, en particulier en cisaillement, est évidemment indispensable lors de la phase de conception des structures sandwichs. L'estimation de ce comportement consiste à s'appuyer sur la structure répétitive des nids-d'abeilles pour réaliser des calculs d'homogénéisation.

Pour caractériser le cœur, assimilé à un matériau orthotrope, il faut déterminer les neuf constantes élastiques indépendantes suivantes :

- les modules d'élasticité E_x, E_y, E_z .
- les coefficients de Poisson ν_x, ν_y, ν_z .
- les modules de cisaillement G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} .

Les calculs d'homogénéisation du cœur s'appuient sur sa structure répétitive. La caractérisation peut se faire grâce à la modélisation analytique ou numérique.

II.4.3 Structure sandwich en FGM :

Récemment, les constructions sandwichs sont devenues encore plus attractives par l'introduction des matériaux composites avancés pour les parements et pour les cœurs.

Les FGM (functionally graded material) sont des composites microscopiquement inhomogène généralement fabriqué à partir d'un mélange de métaux et céramiques.

Les nombreux avantages offerts par les FGMs par rapport aux matériaux conventionnels et la nécessité de surmonter les défis techniques impliquant les environnements à température élevée ont incité une utilisation accrue des structures sandwichs à parements FGM.

Le sandwich FGM peut atténuer la grande concentration de contrainte de cisaillement interfaciale en raison de la variation graduelle des propriétés des matériaux à l'interface.

La construction sandwich FGM existe généralement en deux types : peaux FGMs cœur homogène et peaux homogènes cœur FGM. Pour le cas du noyau homogène (Figure II.5 (a)), un cœur mou est couramment utilisé en raison de la légèreté et la rigidité à la flexion qui est élevée. Un cœur homogène dur est également employé dans d'autres domaines tels que le contrôle ou dans des environnements thermiques [95].

Les actionneurs et les capteurs qui sont, généralement, des céramiques piézoélectriques, sont toujours dans les couches médianes de la construction sandwich comme dans la référence [96].

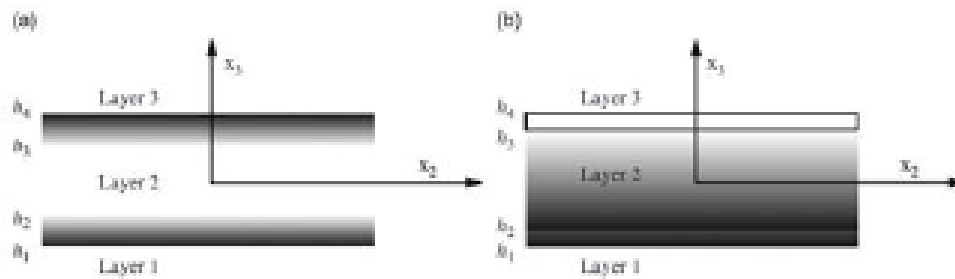


Figure II.5 : Variation du matériau suivant l'épaisseur : (a) Cœur homogène et les faces FGMs, (b) Cœur FGM et les faces homogènes

Par ailleurs, dans les environnements thermiques, la peau riche en métaux peut réduire les contraintes importantes sur la surface à un stade précoce de refroidissement [97].

II.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a fait une présentation détaillée sur la notion des matériaux sandwichs. Dans un premier temps, nous avons présenté un bref historique sur les recherches dans le domaine du sandwich ensuite, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques et les différents types et domaines d'applications des structures sandwichs.

Chapitre III

PRESENTATION DES MODELES EXISTANTS

CHAPITRE III : PRESENTATION DES MODELES EXISTANTS

III.1 Introduction :

Afin de résoudre les problèmes des plaques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love) (*CPT : Classical plate theory*). La théorie des plaques semi-épaisses (théories des déformations du premier ordre) (*FSDT : The first-order shear deformation plate theory*) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh, Timoshenko [98], Reissner [99] et Uflyand [100]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur (*HSDT : High-order shear deformation plate theory*) sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles des théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

III.2 Historique des modèles :

La simulation numérique de structures sandwichs nécessite des modèles cinématiques capables de prendre en compte, de manière correcte, le cisaillement du cœur et en même temps peu coûteux en espace mémoire et en temps de calcul.

Beaucoup de travaux de recherche ont été dédiés à l'analyse statique et dynamique de ces structures et diverses théories existent dans la littérature. La majorité de ces développements sont basés sur une approche de modélisation de type plaque et coque.

Historiquement, les structures sandwichs ont été approchées par des modèles classiques initialement développés pour les structures traditionnelles en monocouche. L'application des approximations de Kirchhoff-Love [101] et [102] ont conduit à la théorie classique des stratifiées en plaques et coques minces. Dans ces développements, la déformation de cisaillement est considérée comme assez faible, par rapport aux autres déformations, pour être négligeable.

Quelques années plus tard, la prise en compte des effets du cisaillement transversal [99] et [103], a permis de construire une théorie dite de premier ordre en déformation de cisaillement.

Néanmoins, la déformation de cisaillement dans l'épaisseur doit, en principe, varier au moins de façon quadratique avec une contrainte de cisaillement nulle aux niveaux des surfaces externes des peaux. Pour satisfaire ces conditions, la notion de coefficient de corrections a été introduite [104]. Pour éviter de calculer le coefficient de correction, nécessaire pour satisfaire les conditions aux surfaces mais difficile à estimer pour les stratifiés [104], des théories à ordre élevé en déformation de cisaillement ont été introduites comme celles proposées par Reddy [105] ou Touratier [106] pour ne citer que ces deux contributions majeures. Reddy a proposé un modèle basé sur une description cubique du champ de déplacement dans l'épaisseur tandis que Touratier, quant à lui, a proposé une description sinusoïdale de ce même champ. Ces modèles, dits d'ordres supérieurs, ont l'avantage de taille de permettre une description parabolique de la contrainte de cisaillement tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres du sandwichs.

Ces développements, du premier ordre et d'ordres supérieurs, sont largement utilisés pour le calcul des structures stratifiées sandwichs. Ils permettent, dans diverses situations, des estimations satisfaisantes de la rigidité globale, de la flèche et des fréquences propres. Dans l'ensemble de ces modèles précités, que nous désignons ici comme globaux, la structure sandwich est traitée comme une seule couche permettant ainsi une simplification majeure de l'analyse.

Malheureusement, ces simplifications conduisent dans certaines configurations de conception à des résultats erronés. C'est le cas quand les rigidités des différentes couches composant le sandwich sont très différentes. Pour éviter cela et rendre possible une modélisation précise des structures sandwichs, des modèles de type Zig-Zag, dans lesquels le champ de déplacement est décrit couche par couche avec des conditions de continuité du champ de déplacement

imposées aux interfaces entre les faces et le cœur, sont utilisées. Selon que la continuité de contrainte de cisaillement est assurée ou non, nous distinguons deux classes distinctes de modèles zig-zag :

1. Zig-Zag avec continuité de la contrainte de cisaillement aux interfaces (ICZZT).
2. Zig-Zag avec discontinuité de la contrainte de cisaillement aux interfaces (IDZZT).

Carrera [107] nous a donné une revue historique complète des modèles IC-ZZZT. Il a montré que la plupart des théories des stratifiés [108_111] ont besoin d'inclure la condition de continuité de la contrainte de cisaillement aux interfaces. Cependant, cette continuité, a priori nécessaire, n'a pas été considérée dans la majorité des travaux qui traitent de l'analyse des vibrations des structures sandwiches. Beaucoup d'auteurs [112_116] l'ont simplement ignorée dans leurs travaux.

III.3 Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle :

III.3.1 Approche monocouche équivalente :

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de *Love-Kirchhoff* et de *Reissner-Mindlin*, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

III.3.2 Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques) :

On commence par le modèle le plus simple est le plus général appelé modèle de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (E. Reissner., et al.) [117]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (G. Kirchhoff.) [101] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées.

La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (**Figure III.1**).

Ce modèle de plaque peut être référé à Timoshenko et Woinowsky-Krieger [118] , Reddy, [119] et [120]. En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{III.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{III.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

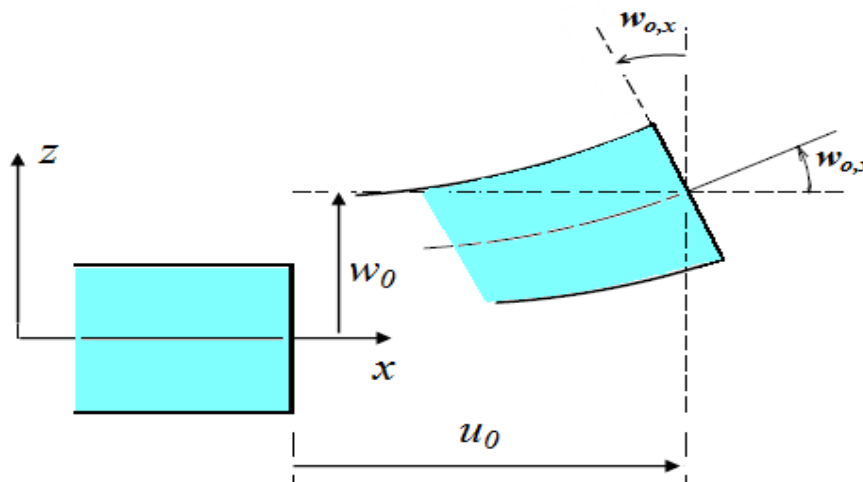


Figure III.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchoff [119].

Puisque ce modèle ne prend pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

III.3.3 Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT):

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction

d'un facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées par Reissner, [99], Mindlin, [103] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger, [118], Reddy, [119] et Reddy, [120].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{III.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{III.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.2.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement.

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

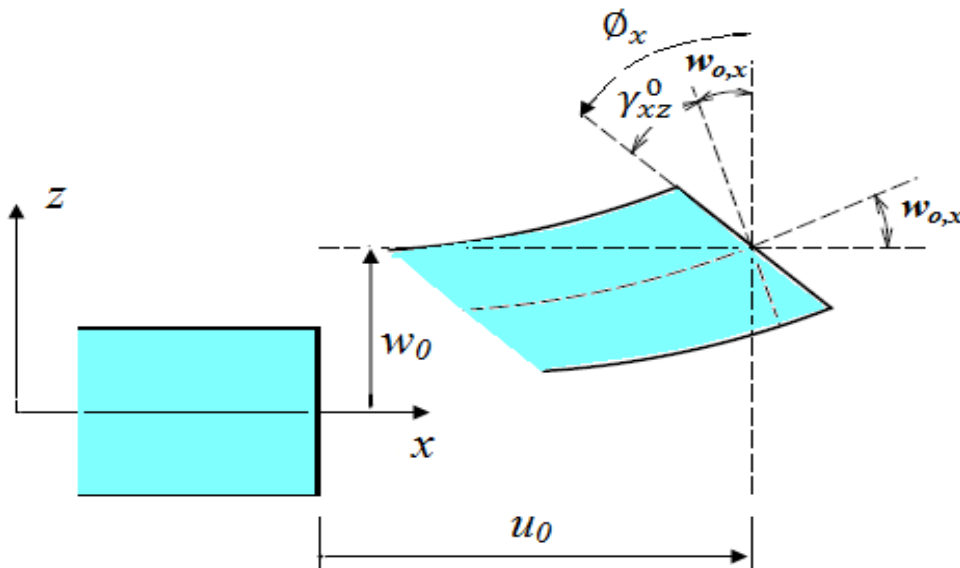


Figure III.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [119].

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal (Whitney,) [121]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

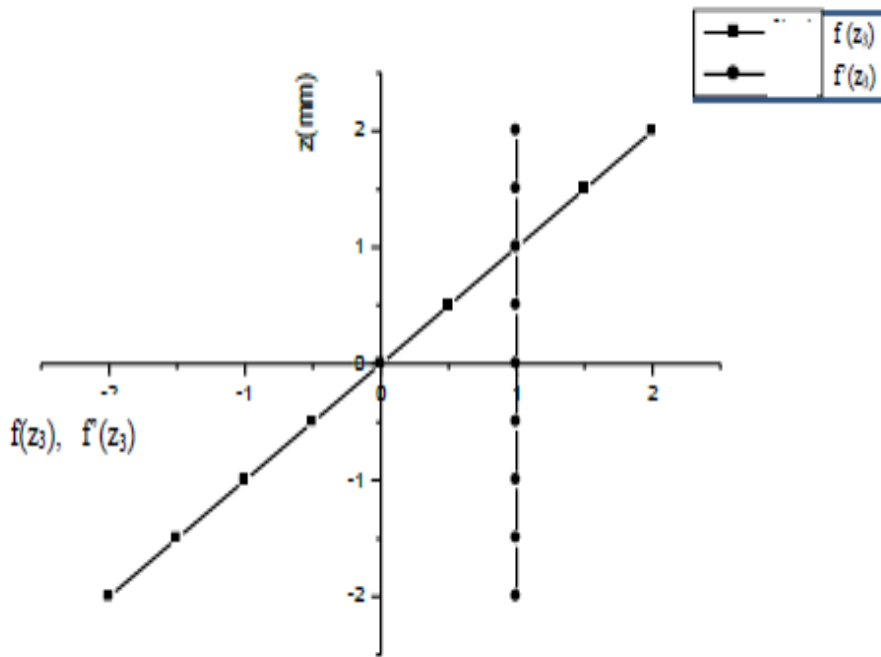


Figure III.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(z)=z$ et $f'(z)$ en fonction de l'épaisseur [176].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

III.3.4 Les modèles d'ordre supérieur:

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al.) [45], (Naghdi) [122], (Reissner) [123], (Reddy) [105],

(Kant et Swaminathan) [124]. Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

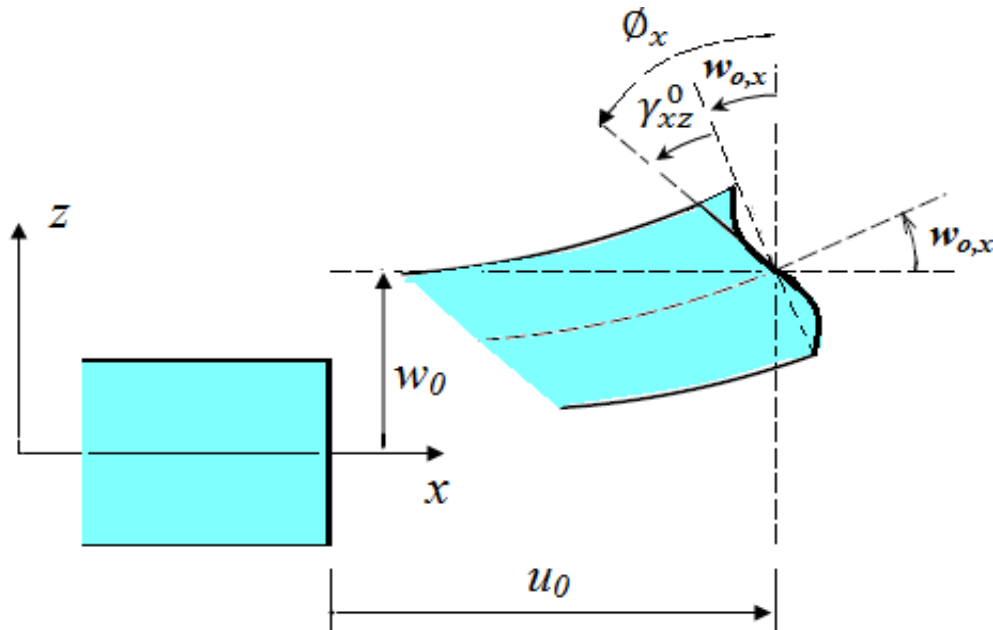


Figure III.4 : Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy) [119].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z)\varphi_x(x, y) \quad (\text{III.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z)\varphi_y(x, y) \quad (\text{III.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.3.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement et $\psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue en prenant $\psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\psi(z) = z$.

La théorie de déformation en cisaillement d'ordre trois de Reddy (TSDT) (Reddy.) [119] ,(Reddy.) [120] sont obtenus par:

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^3 \right) \quad (\text{III.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

(Touratier) [106] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par (Karama et al, 2003) [125] est obtenue en prenant :

$$\psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{III.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par (Ait Atmane et al.) [126] est obtenue en prenant:

$$\psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} - \frac{(h/\pi) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{III.7})$$

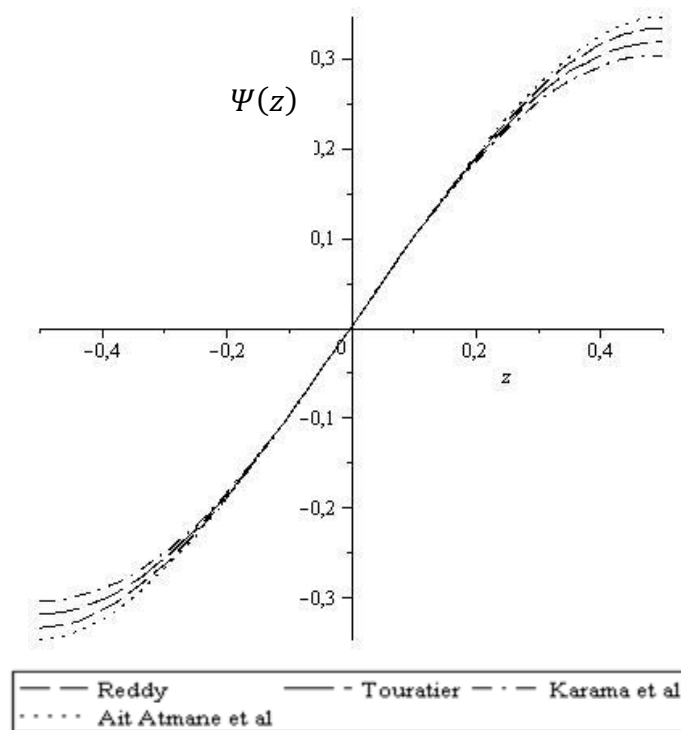


Figure III.5 : Variation de la fonction de forme $\Psi(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur [176].

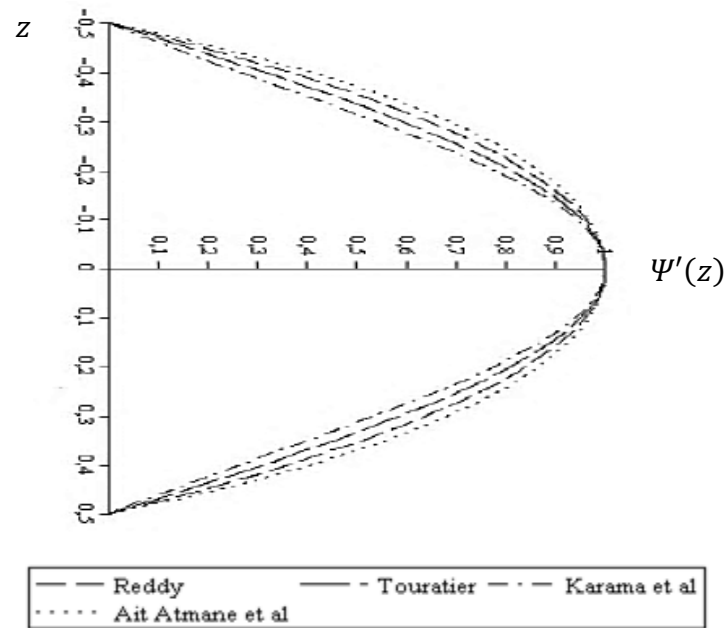


Figure III.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $\Psi'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur [176].

III.3.5 La théorie d'ordre élevé à deux variables (Les théories raffinées) :

Contrairement aux autres théories d'ordre supérieur, le nombre des inconnues dans la présente théorie d'ordre élevé à deux variables est seulement quatre, par contre, égale à cinq ou plus pour les autres théories d'ordre élevé (H. Ait Atmane., et al.) [126], (J.N. Reddy) [105], (M. Touratier.) [106], (M. Karama., et al.) [125].

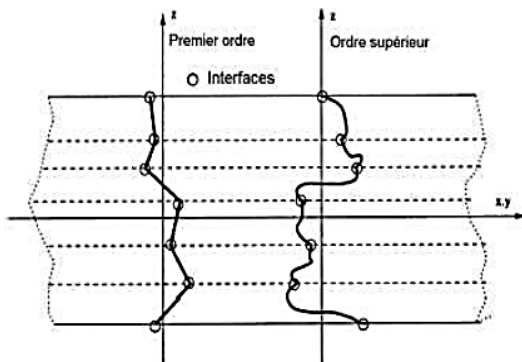
La présente théorie est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

III.3.6 Approche par couche:

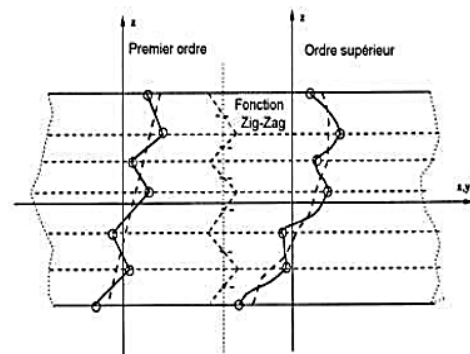
Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les (Figures I.2 et I.3) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par (Chabot.) [127], (Carrera.) [128], (Afaq et al.) [129], (Reddy) [105], (Di Sciuva) [130]. Le multicouche est subdivisé en sous structures correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches. On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures : III.7 et III.8).



Figures III.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. (Nguyen) [131]

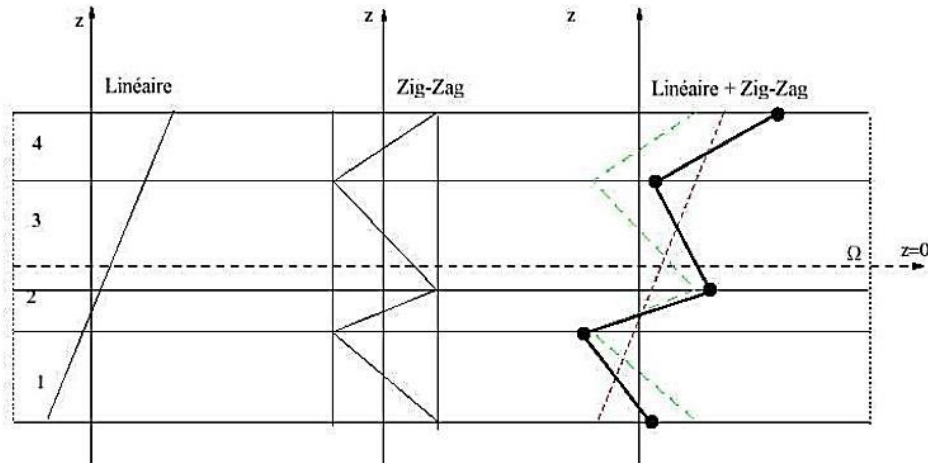


Figures III.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. (Nguyen) [131]

III.3.7 Les modèles zig-zag:

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre (Di Sciuva) [130]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'heaviside).

La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface voir (Figure. III.9). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



Figures III.9 : Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen) [131]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction en se basant sur le concept de plusieurs auteurs a réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag, (Nguyen) [131].

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) voir (Figure.III.10). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

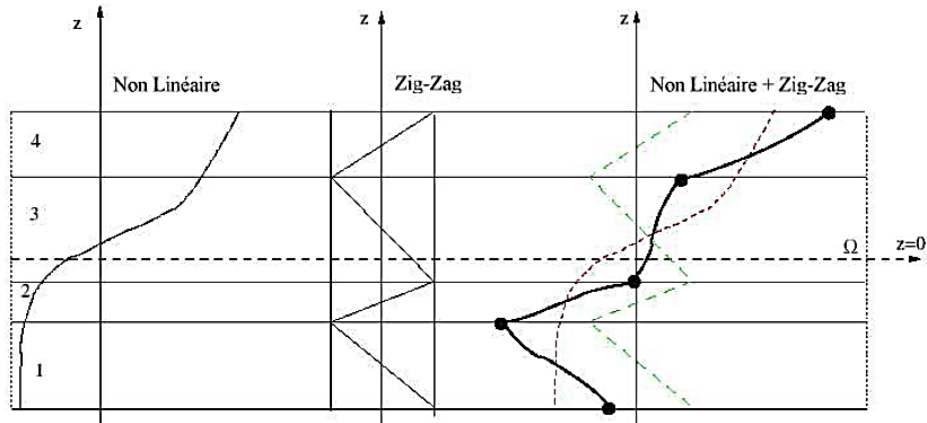


Figure III.10 : Champ de déplacement des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Nguyen) [131].

Dans les travaux de (Karama et al.) [132], la fonction sinus de (Touratier) [106] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement. Récemment, (Afaq) [129] a combiné le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élanement diminue (Icardi et Bertetto) [133].

III.3.8 Les modèles couches discrètes:

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale voir (Figure. III.7). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de (Srinivas) [134], (Tahani et Nosier) [135], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont

obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de (Ren,) [136], (Kassapoglou et Lagace) [137], (Yin) [138] Utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi (Ren) [136] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans (Kassapoglou et Lagace) [137], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans (Yin) [138], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façon polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans (Pagano) [139]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle de Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x; y)$, « n » étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) dont l'objectif est de proposer une série de

simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité (Nguyen) [131].

III.4 Théorie des plaques tridimensionnelles (élasticité 3D) :

Pour évaluer le comportement exact des plaques épaisses, il faut trouver des nouvelles stratégies pour une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur, On note surtout les contraintes de cisaillement. Malgré que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, mais il faut remarquer que la déformation normale transverse est négligée dont elle a un impact important sur la précision souhaitée. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc la règle, les principales idées pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs des contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations.

Récemment, plusieurs auteurs ont consacré leurs recherches en particulier de donner des expressions analytiques exactes, bien qu'elles sont éventuellement approximatives pour résoudre de façon récurrente les problèmes traités.

(Vel S.S et al.) [140] ont présenté des solutions exactes pour l'analyse vibratoire des plaques FGM, (Uymaz et al.) [141] ont proposé une solution approchée par une série des études utilisant les polynômes de « Chebyshev », les mêmes problèmes ont été traités par (Li et al.) [142] qui introduisent la méthode de Ritz comme une stratégie de résolution.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (\text{III.8.a})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (\text{III.8.b})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\text{III.8.c})$$

De plus, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, seules les méthodes numériques permettent d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que les conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives, offrent des avantages et des potentialités primordiales, ces outils, dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent une informatique puissante pour obtenir des résultats à précision forte et satisfaisante.

Plus récemment, Huang et al. [143], Amini et al. [144] ont donné des solutions tridimensionnelles exactes dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, Malekzadeh [145] a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles, Zenkour [146] a étudié des plaques en FGM épaisses se basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle des propriétés matériels à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel).

III.5 Approches quasi- tridimensionnelles :

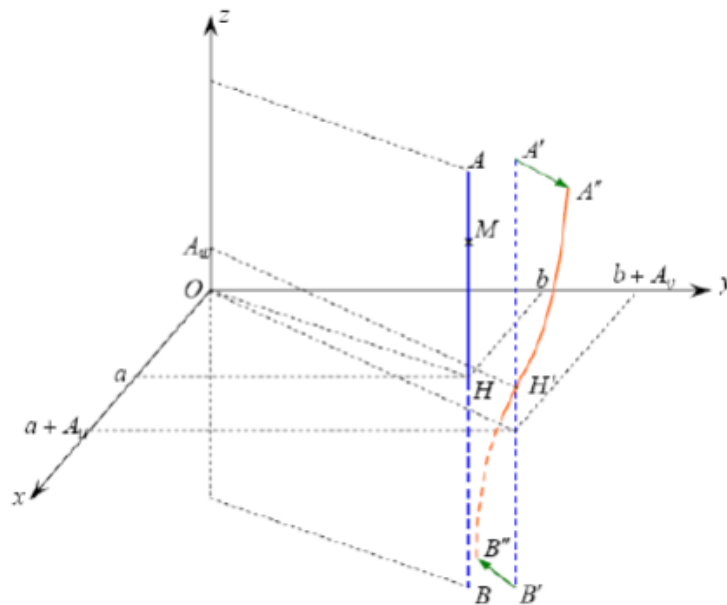


Figure III.11 : Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle et de l'introduction de l'effet de déformation normale transverse, Cette particularité devient importante pour définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire. De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non-linéaire de la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

En procédant de la sorte, on cherche à réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En générale, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale lesquelles considèrent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [147-149], et récemment évoluée par Demasi [150-154].

Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera, les récents ouvrages de Carrera et al. [155-156] font l'objet. De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre supérieur et de déformation normale ont été proposés dans les littératures [157-159], ces théories sont lourdes et coûteuses, néanmoins, elles génèrent un nombre important d'inconnus.

Talha et al. [158] ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé.

Jha et al. [160] ont étudié le comportement statique et dynamique des plaques FGM avec un élément fini basé sur une cinématique d'ordre supérieur de douze variables de déplacement. Reddy. [159] présente une formulation théorique d'un modèle avec onze variables en analyse non linéaire ; la résolution d'un problème non linéaire avec un nombre d'inconnus élevé nécessite un large système d'équations qui conduit aux difficultés de résolution.

Neves et al. [161-163] ont traité des problèmes des plaques en FGM en analyse statique et vibrations libres, le modèle choisi est basé sur la formulation unifiée de Carrera avec neuf inconnus avec une résolution numérique basée sur les fonctions d'approximations radiales basiques. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire.

Certaines approches connues comme les théories Quasi-tridimensionnelles sont développées par Zenkour [146] et récemment par Mantari et Guedes Soares [164], [165], elles introduisent six inconnus, elles sont encore plus compliquées que la théorie de premier ordre. Ainsi qu'il y a un cadre de développer une théorie d'ordre supérieur et de déformation normale précise, laquelle est relativement simple à employer et en même temps retienne des caractéristiques physiques importantes. En effet, Thai et Kim [166] ont présenté plus récemment une théorie de déformation du cisaillement sinusoïdale quasi-3D avec seulement cinq inconnus pour simuler le comportement à la flexion des plaques FGM.

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z), alors la cinématique devient :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - \Psi(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{III.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{III.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + \Psi'(z) \varphi_z(x, y) \quad (\text{III.3.c})$$

III.6 Conclusion

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente en élasticité bidimensionnelle dont le modèle d'ordre supérieur et la théorie raffinée, l'approche par couche, et enfin les théories tridimensionnelles. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Chapitre IV

FORMULATION THEORIQUE

CHAPITRE IV : FORMULATION THEORIQUE

IV.1 Introduction

Chaque théorie utilisée pour résoudre un problème de la mécanique des milieux continus a comme objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base d'un système d'équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites sur les bords de la structure, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

L'objectif de ce chapitre est d'établir les équations relatives au comportement mécanique, thermo-élastique et thermomécanique en flexion des plaques sandwiches, en utilisant un modèle raffiné de plaque à quatre variables en utilisant la forme d'intégrale dans le champ de déplacement qui mène à la réduction du nombre d'inconnues et les équations de gouvernance.

Deux types de plaques « sandwiches » sont considérés dans notre étude nommés (Type A) et (Type B); pour la plaque « sandwich » (Type A): les couches supérieure et inférieure sont en FGM et la couche centrale en matériau homogène en céramique; pour la plaque sandwich (Type B): les couches supérieure et inférieure sont en FGM et la couche centrale en matériau homogène en métal. On suppose que les propriétés matérielles (Module de Young et la masse volumique) de la plaque « sandwich » varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants. Plusieurs configurations des plaques « sandwiches » sont utilisées en tenant compte ou non de la symétrie de la plaque et l'épaisseur de chaque couche.

IV. 2. Configuration géométrique :

Deux types de plaques sandwichs sont considérées dans notre étude. Les plaques sont composées de trois couches, à savoir, « **couche 1** », « **couche 2** » et « **couche 3** » de la partie basse à la partie haute, comme il est illustré dans la Figure IV.1.

Les ordonnées verticales de la surface inférieure, des deux interfaces limitant la couche centrale, et de la surface supérieure de la plaque sont respectivement, $z = h_0$, $z = h_1$, $z = h_2$, $z = h_3$

Dans la présente étude, la plaque sandwich est soumise à une charge mécanique transversale appliquée à la surface supérieure et une charge thermique variant dans l'épaisseur.

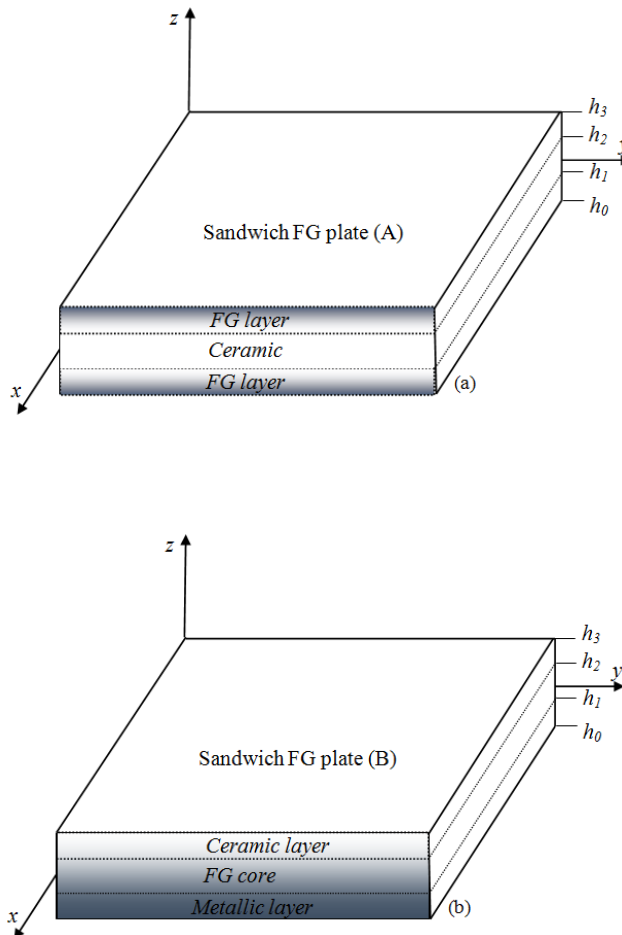


Figure IV.1 : Composition de deux différents types de plaques sandwichs FGM : (a) les couches supérieure et inférieure en FGM et la couche centrale en matériau homogène ; (b) les couches supérieure et inférieure en matériau homogène et la couche centrale en FGM.

a. Plaque sandwich en FGM (Type A) : FGM / Céramique / FGM

Les propriétés matérielles de la plaque « sandwich » varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur (z) seulement, selon une simple distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$ des matériaux constituants.

La fraction volumique $V^{(n)}$ à travers l'épaisseur des couches (supérieure et inférieure) de la plaque sandwich de type **A** suit une simple fonction de loi de puissance, tandis qu'elle égale l'unité dans la couche centrale de la plaque. Elle est définie par :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p \quad \text{for } z \in [h_0, h_1] \quad (\text{IV.1.a})$$

$$V^{(2)} = 1 \quad \text{for } z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.1.b})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p \quad \text{for } z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.1.c})$$

Plaque Sandwich en FGM (1-0-1) (Type A)

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et constituée seulement de deux couches en FGM d'épaisseur égale (Figure IV.2.a). C.-à-d, la couche isotrope centrale en céramique est absente. Ainsi, $h_0 = h_1 = 0$.

Plaque Sandwich en FGM (1-1-1) (Type A)

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et composée de trois couches d'épaisseur égale (Figure IV.2.b). Dans ce cas, nous avons: $h_1 = -h/6$, $h_2 = h/6$.

Plaque Sandwich en FGM (1-2-1) (Type A)

Comme il est montré dans la Figure IV.2.c, la plaque est symétrique, dans laquelle l'épaisseur de la couche centrale égale à la somme des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure. Donc, Ainsi, $h_1 = -h/4$, $h_2 = h/4$.

Plaque Sandwich en FGM (2-1-2) (Type A)

Dans ce type de sandwich la plaque est également symétrique, l'épaisseur de la couche centrale égale la moitié des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure (Figure IV.2.d). Ainsi, $h_1 = -h/10$, $h_2 = h/10$

Plaque Sandwich en FGM (2-2-1) (Type A)

Dans ce cas, la plaque n'est pas symétrique et l'épaisseur de la couche centrale est la même que celle de la couche inférieure, alors qu'elle est double de la couche supérieure (Figure IV.2.e). Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h/10$, $h_2 = 3h/10$.

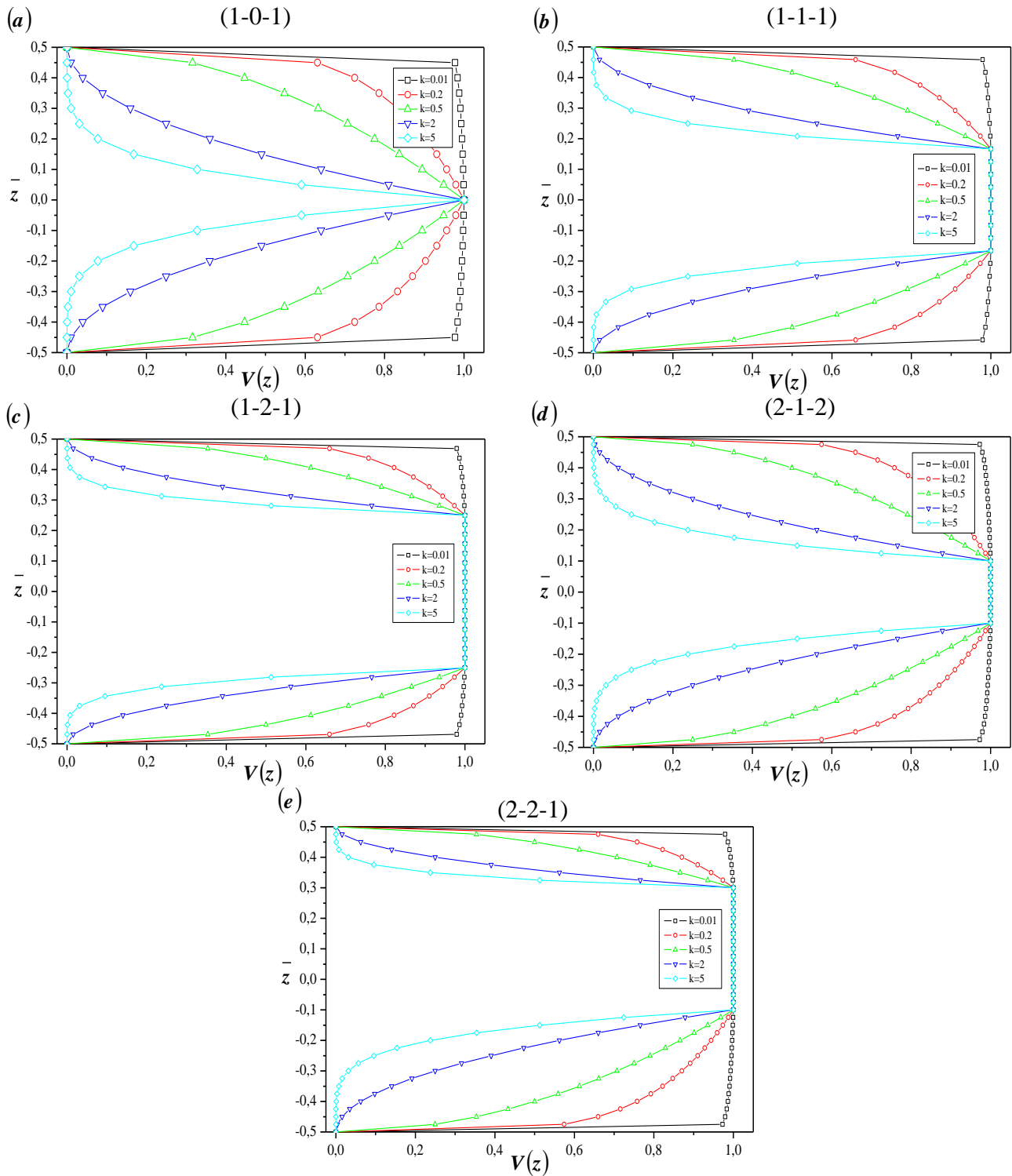


Figure IV.2 : Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwichs (Type A): (a) Plaque sandwich en FGM (1-0-1), (b) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (c) Plaque sandwich en FGM (1-2-1), (d) Plaque sandwich en FGM (2-1-2), et (e) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).

b. Plaque sandwich en FGM (Type B) : Céramique / FGM / Métal :

La fraction de volume $V^{(n)}$ à travers l'épaisseur la couche centrale de la plaque sandwich type **B** suit une simple fonction de loi de puissance, tandis, qu'elle est égale à zéro dans la couche inférieure, égale à l'unité dans la couche supérieure de la plaque. Elle est définie par :

$$V^{(1)} = 0 \quad \text{for } z \in [h_0, h_1] \quad (\text{IV.2.a})$$

$$V^{(2)} = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^p \quad \text{for } z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.2.b})$$

$$V^{(3)} = 1 \quad \text{for } z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.2.c})$$

Plaque sandwich en FGM (1-2-2) (Type B)

Dans ce cas, la plaque n'est pas symétrique et l'épaisseur de la couche centrale est la même que celle de la couche supérieure, alors qu'il est double de la couche inférieure (Figure IV.3.a). Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -3h/10$, $h_2 = h/10$

Plaque sandwich en FGM (1-1-1) (Type B)

Dans ce type de sandwich, la plaque est symétrique et composée de trois couches d'épaisseur égale (Figure IV.3.b). Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h/6$, $h_2 = h/6$

Plaque sandwich en FGM (1-2-1) (Type B)

Comme il est montré dans la Figure IV.3.c, la plaque est symétrique, dans laquelle l'épaisseur de la couche centrale égale à la somme des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure. Ainsi, $h_1 = -h/4$, $h_2 = h/4$

Plaque sandwich en FGM (2-1-2) (Type B)

Dans ce type de sandwich la plaque est également symétrique, l'épaisseur de la couche centrale égale la moitié de l'épaisseur des épaisseurs des deux couches supérieure et inférieure (Figure IV.3.d). Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h/10$, $h_2 = h/10$

Plaque sandwich en FGM (2-2-1) (Type B)

Dans ce cas, la plaque n'est pas symétrique et l'épaisseur de la couche centrale est la même que celle de la couche inférieure, alors qu'elle est le double de la couche supérieure (Figure IV.4.e). Dans ce cas, nous avons : $h_1 = -h/10$, $h_2 = 3h/10$.

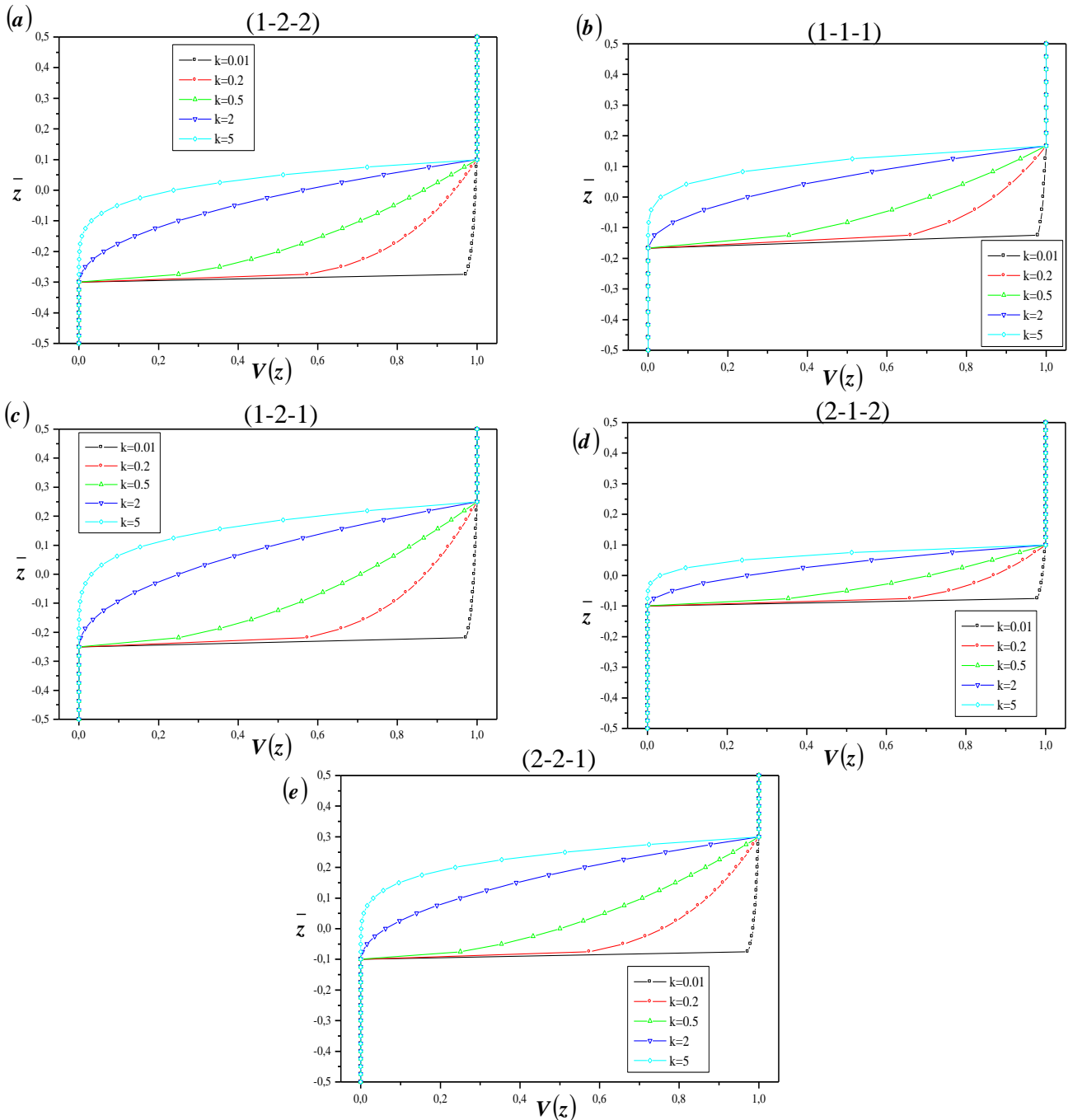


Figure IV.3 : Variation de la fonction de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque pour les différentes valeurs de k et les différentes configurations de plaques sandwiches Type B: (a) Plaque sandwich en FGM (1-2-2), (b) Plaque sandwich en FGM (1-1-1), (c) Plaque sandwich en FGM (1-2-1), (d) Plaque sandwich en FGM (2-1-2), et (e) Plaque sandwich en FGM (2-2-1).

Les propriétés des matériaux efficaces pour chaque couche, telles que le module de Young, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation thermique, peuvent être exprimées par la loi de mélange:

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (\text{IV.3})$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n de la plaque sandwich en FGM. Pour la plaque de type **A** : P_c et P_m sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche $n^\circ : 1$, et vice versa pour la couche $n^\circ : 3$ selon la fraction volumique $V^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3$).

Notant que P_m et P_c sont respectivement les propriétés correspondantes au métal et au céramique de la plaque sandwich. Pour la plaque de type **B** : P_m et P_c sont les propriétés de la couche $n^\circ : 1$ et vice versa pour la couche $n^\circ : 3$.

IV. 3 Formulation théorique :

IV. 3.1 Cinématique et déformations :

Afin de réduire le nombre des variables inconnues de la théorie classique des plaques d'ordre élevé, les rotations θ_x et θ_y causées par le cisaillement sont remplacées par $\oint \theta(x, y, t) dx$ et $\oint \theta(x, y, t) dy$, respectivement. L'expression de la théorie de déformation de cisaillement conventionnelle HSDT classique à cinq variables est donné comme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z)\theta_x(x, y) \quad (\text{IV.4.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z)\theta_y(x, y) \quad (\text{IV.4.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.4.c})$$

où u_0, v_0, w_0 sont les déplacements inconnus dans le plan moyen de la plaque ($x, y, z = 0$), θ_x et θ_y sont les rotations due à la flexion.

$\Psi(\mathbf{z})$ est la fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque.

tenant en compte de la simplification cité ci-dessus, la théorie raffinée des plaques actuelle avec quatre variables peut être de la manière la plus simple sous la forme suivante (Bourada et al. , Ait Sidhoum et al. , Fahsi et al. , Chikh et al. , Bellifa et al. , Berghouti et Al.) [167-172].

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{IV.5.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV.5.a})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.5.a})$$

Les termes d'intégrale utilisée dans les expressions précédente peuvent être résolus en utilisant la procédure de Navier et peuvent être exprimé comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.6})$$

Où les coefficients A' et B' sont adopté selon le type de solution employé, dans ce cas la solution de Navier. Ainsi, A' et B' sont définie par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2, \quad \alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b \quad (\text{IV.7})$$

IV.3.2 Cinématique et équations constitutives :

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (IV.5) - (IV.6) :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{IV.8.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (\text{IV.8.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.8.c})$$

Où, La fonction $f(z)$ appelée fonction de cisaillement.

$$f(z) = \frac{z \left(\pi + 2 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right)}{(2 + \pi)} \quad (\text{IV.9})$$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation. (IV.8), soit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \varepsilon_z = 0, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$(\text{IV.11.a})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ (k_1 A + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.11.b})$$

IV.3.3 Les contraintes :

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un FGM isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x - \alpha T \\ \epsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)}, n = (1,2,3) \quad (\text{IV.12})$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. En utilisant la loi des mélanges définis dans l'équation (IV.3), les coefficients de rigidité, c_{ij} , sont exprimées par :

$$c_{11}^{(n)} = c_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\mu^{(n)})^2}, c_{12}^{(n)} = \mu^{(n)} c_{11}^{(n)}, c_{44}^{(n)} = c_{55}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1 + \mu^{(n)})} \quad (\text{IV.13})$$

IV.3.4 Détermination des équations d'équilibre :

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous la forme analytique suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_x^{(n)} (\epsilon_x - \alpha T)^{(n)} + \sigma_y^{(n)} (\epsilon_y - \alpha T)^{(n)} + \tau_{xy}^{(n)} \gamma_{xy}^{(n)} + \tau_{yz}^{(n)} \gamma_{yz}^{(n)} + \tau_{xz}^{(n)} \gamma_{xz}^{(n)} \right] dV - \int_{\Omega} q w d\Omega \quad (\text{IV.14})$$

ou peut être écrite comme suit

$$\int_{\Omega} (N_x \delta \epsilon_x^{(0)} + N_y \delta \epsilon_y^{(0)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^{(0)} + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^{(0)}) d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w_0 d\Omega = 0 \quad (\text{IV.15})$$

Où Ω est la surface en plan (x,y) de la plaque et les résultantes des contraintes N, \mathbf{M} , et

Q sont définies par :

$$\begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} dz \quad (\text{IV.16})$$

$$(Q_{yz}^s, Q_{xz}^s) \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{yz}, \tau_{xz})^{(n)} f'(z) dz \quad (\text{IV.17})$$

En introduisant les déformations virtuelles par leurs expressions à partir des équations (IV.16) et (IV.17) dans l'équation (IV.15), puis en intégrant par parties, et collectant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$, on peut alors formuler les équations d'équilibre et du mouvement de la façon suivante :

$$\delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$\delta w_0: -\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - q = 0$$

$$\delta \theta : k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} - k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.18})$$

IV.3.5 Détermination des coefficients de rigidité:

En reportant les équations (IV.10) et (IV.12) dans les équations (IV.16) et (IV.17), on obtient les expressions des résultantes des contraintes sous forme contractée suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M^b\} \\ \{M^s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [C] \\ [B] & [D] & [F] \\ [C] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{k^b\} \\ \{k^s\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^{bT}\} \\ \{M^{sT}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19.a})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{44} & 0 \\ 0 & J_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19.b})$$

Où :

$$\{N\} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T, \{M^b\} = \{M_x^b \ M_y^b \ M_{xy}^b\}^T, \{M^s\} = \{M_x^s \ M_y^s \ M_{xy}^s\}^T \quad (\text{IV.20.a})$$

$$\{N^T\} = \{N_x^T \ N_y^T \ 0\}^T, \{M^{bT}\} = \{M_x^{bT} \ M_y^{bT} \ 0\}^T, \{M^{sT}\} = \{M_x^{sT} \ M_y^{sT} \ 0\}^T \quad (\text{IV.20.b})$$

$$\{\varepsilon^{(0)}\} = \{\varepsilon_x^{(0)} \ \varepsilon_y^{(0)} \ \gamma_{xy}^{(0)}\}^T, \{k^b\} = \{k_x^b \ k_y^b \ k_{xy}^b\}^T, \{k^s\} = \{k_x^s \ k_y^s \ k_{xy}^s\}^T \quad (\text{IV.20.c})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20.d})$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20.e})$$

$$\{Q\} = \{Q_{yz} \ Q_{xz}\}^T, \{\gamma^{(0)}\} = \{\gamma_{yz}^{(0)} \ \gamma_{xz}^{(0)}\}^T, J = \begin{bmatrix} J_{44} & 0 \\ 0 & J_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20.f})$$

Où: A_{ij} , B_{ij} , etc., sont les coefficients de rigidité de la plaque sont donnés par :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} c_{ij}^{(n)} \{1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)\} dz$$

$$, (i, j = 1, 2, 6) \quad (\text{IV.21.a})$$

$$J_{ii} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} c_{ij}^{(n)} f'(z)^2 dz, , (i, j = 4, 5) \quad (\text{IV.21.b})$$

Les résultantes en membrane, $N_x^T = N_y^T$, du moments de flexion $M_x^{bT} = M_y^{bT}$, et de moment additionnel de cisaillement $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ dues aux chargements thermiques sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} (c_{11} + c_{12})\alpha T \\ (c_{12} + c_{22})\alpha T \end{Bmatrix}^{(n)} dz \quad (\text{IV.22.a})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} (c_{11} + c_{12})\alpha T \\ (c_{12} + c_{22})\alpha T \end{Bmatrix}^{(n)} dz \quad (\text{IV.22.b})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^{sT} \\ M_y^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} (c_{11} + c_{12})\alpha T \\ (c_{12} + c_{22})\alpha T \end{Bmatrix}^{(n)} dz \quad (\text{IV.22.c})$$

Le champ de la variation u champ de température $T(x, y, z)$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich est supposée être comme suit (Houari et al.2013, Taibi et al. 2015, Attia et al. 2018) [173-175].

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h}T_2(x, y) + \frac{f(z)}{h}T_3(x, y) \quad (\text{IV.23})$$

où T_1, T_2 et T_3 sont les chargements thermiques. Dans le cadre de la présente théorie d'ordre élevé.

IV.3.6 Formulation des équations différentielles :

Substituant l'équation (IV.19) dans l'équation (IV.18), nous obtenons le système d'équation d'équilibre et du mouvement en terme des déplacements $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ comme suit :

$$\begin{aligned} A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 - (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_0 - \\ k_1A'C_{11}d_{111}\theta - (k_2B'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66})d_{122}\theta = P_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.24.a})$$

$$\begin{aligned} A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_0 - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_0 - \\ k_2B'C_{22}d_{222}\theta - (k_1A'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66})d_{112}\theta = P_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.24.b})$$

$$\begin{aligned} B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + B_{22}d_{222}v_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 - Da_{11}d_{1111}w_0 - \\ 2(Da_{12} + 2Da_{66})d_{1122}w_0 - Da_{22}d_{2222}w_0 - k_1A'F_{11}d_{1111}\theta - ((k_1A' + k_2B')F_{12} + \\ 2(k_1A' + k_2B')F_{66})d_{1122}\theta = P_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.24.c})$$

$$\begin{aligned} k_1A'C_{11}d_{111}u_0 + (k_2B'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66})d_{122}u_0 + k_2B'C_{22}d_{222}v_0 + (k_1A'C_{12} + \\ k_1A' + k_2B'C_{66})d_{112}v_0 - k_1A'F_{11}d_{1111}w_0 - k_1A' + k_2B'F_{12} + 2k_1A' + k_2B'F_{66}d_{1122}w_0 \\ - k_2B'F_{22}d_{2222}w_0 - (k_1A')^2H_{11}d_{1111}\theta - (2(k_1A')(k_2B')H_{12} + (k_1A' + k_2B')^2H_{66})d_{1122}\theta - \\ (k_2B')^2H_{22}d_{2222}\theta + k_1^2A'^2J_{55}d_{11}\theta + k_2^2B'^2J_{44}d_{22}\theta = P_4 \end{aligned} \quad (\text{IV.24.c})$$

où $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^T$ est un vecteur de force généralisée d_{ij}, d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, (i, j, l, m = 1, 2) \quad (\text{IV.25})$$

Les composantes du vecteur force généralisée sont donnés par :

$$P_1 = \frac{\partial N_x^T}{\partial x}, P_2 = \frac{\partial N_y^T}{\partial y}, P_3 = q - h \frac{\partial^2 M_x^{bT}}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 M_y^{bT}}{\partial y^2},$$

$$P_4 = q - k_1 A' h \frac{\partial^2 M_x^{sT}}{\partial x^2} - k_2 B' h \frac{\partial^2 M_y^{sT}}{\partial y^2} \quad (\text{IV.26})$$

III.4 Solution exacte pour une plaque sandwich en FGM simplement appuyée :

La recherche de solutions analytiques des problèmes des structures composites multicouches sous diverses conditions aux limites fait appel à la résolution d'équations aux dérivées partielles classiques et linéaires à coefficients constants.

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appuis utilisé. Dans cette partie nous sommes concernés par la solution exacte des équations. (IV.24a-IV.24d) pour une plaque simplement appuyée en FGM. Pour le cas d'une plaque simplement appuyée sur les quatre cotés, les conditions aux limites pour la présente théorie RTP s'écrivent:

$$x = 0, a: v_0 = w_0 = \theta = 0, \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, N_x = 0, M_x^b = M_x^s = 0, \quad (\text{IV.27})$$

$$y = 0, a: u_0 = w_0 = \theta = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, N_y = 0, M_y^b = M_y^s = 0, \quad (\text{IV.28})$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement thermo-élastique de la flexion des plaques sandwiches en FGM. Elle peut alors être recherchée en écrivant les déplacements u, v, w, θ ainsi que les chargements thermique T_1, T_2 et T_3 sous forme de doubles séries de Fourier, satisfaisant les conditions de chargement thermique et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \quad (\text{IV.29})$$

et

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Theta \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

Où

$$\lambda = \pi/a \quad \mu = \pi/b, \quad t_1, \quad t_2 \text{ et } t_3 \text{ sont des constantes.}$$

U, V, W et Θ sont des paramètres arbitraires représentent l'amplitude de chacun des termes dans les séries pour la solution de Navier déterminés sous la condition que la solution de l'équation IV.30 doit vérifier l'équation IV.24. On obtient l'opérateur suivant :

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (\text{IV.31})$$

Où $\{\Delta\} = \{U, V, W, \Theta\}^T$ et $[K]$ c'est une matrice symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

Avec :

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ K_{12} &= \lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ K_{13} &= -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ K_{14} &= \lambda[k_1A'C_{11}\lambda^2 + (k_2B'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66})\mu^2] \\ K_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ K_{23} &= -\mu[B_{11}\mu^2 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2] \\ K_{24} &= \mu[k_2B'C_{22}\mu^2 + (k_1A'C_{12} + (k_1A' + k_2B')C_{66})\lambda^2] \\ K_{33} &= D_{11}\lambda^4 + \mu^2 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

$$K_{34} = -k_1 A' F_{11} \lambda^4 - [(k_1 A' + k_2 B') F_{12} + 2(k_1 A' + k_2 B') F_{66}] \lambda^2 \mu^2 - k_2 B' F_{22} \mu^4$$

$$K_{44} = k_1^2 A'^2 H_{11} \lambda^4 + [2k_1 k_2 A' B' H_{12} + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}] \lambda^2 \mu^2 + k_2^2 B'^2 H_{22} \mu^4 + k_1^2 A'^2 J_{55} \lambda^2 + k_2^2 B'^2 J_{44} \mu^4$$

Les composantes du vecteur force généralisée $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^T$ sont donnés par :

$$P_1 = -\lambda(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B_T t_3)$$

$$P_2 = -\mu(A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B_T t_3)$$

$$P_3 = q_0 + h(\lambda^2 + \mu^2)(B^T t_1 + D^T t_2 + {}^a D_T t_3) \quad (IV.34)$$

$$P_4 = -h(k_1 A' \lambda^2 + k_2 B' \mu^2)({}^a B_T t_1 + {}^a D_T t_2 + {}^a F_T t_3)$$

Où

$$\{A^T, B^T, D^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\mu^{(n)})^2} (1 + \mu^{(n)}) \alpha^{(n)} \{1, \bar{z}, \bar{z}^2\} dz \quad (IV.35.a)$$

$$\{{}^a B_T, {}^a D_T, {}^a F_T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1 - (\mu^{(n)})^2} (1 + \mu^{(n)}) \alpha^{(n)} \bar{f}(z) \{1, \bar{z}, \bar{f}(z)\} dz \quad (IV.35.a)$$

Avec

$$\bar{z} = z/h, \bar{f}(z) = f(z)/h$$

III.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en utilisant un modèle raffiné de plaque à quatre variables. Les équations du mouvement pour des plaques fonctionnellement graduées sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La solution de Navier est employée pour déterminer les solutions analytiques.

Chapitre V

RESULTATS ET DISCUSSIONS

CHAPITRE V: RESULTATS ET DISCUSSIONS

V. 1 Introduction

Dans ce chapitre, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie raffinée des plaques actuelle dont le nombre des inconnus est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement. La théorie présentée n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les réponses en flexion de deux types de plaques sandwiches en matériau (FGM) sous charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques, sont étudiées.

Pour illustrer la précision de l'approche générale décrite dans les sections précédentes, des comparaisons sont faites avec des solutions obtenues en utilisant d'autres théories de déformation du cisaillement issues de la littérature.

V. 2 Analyse de la flexion mécanique :

V. 2.1 Analyse de la flexion mécanique de la plaque type "A" :

Cet exemple vise à vérifier l'exactitude de la théorie actuelle pour prédire les réponses à la flexion mécanique de plaques sandwich FGM de type "A". On suppose que la plaque sandwich FG de type "A" est en aluminium et zircone. Les propriétés matérielles suivantes sont:

métal (aluminium): $E_m = 70 \text{ GPa}, \nu_m = 0.3$

céramique (zircone): $E_c = 151 \text{ GPa}, \nu_c = 0.3$

la forme de déplacement transversal adimensionnel suivant est utilisée:

$$\hat{w} = \frac{10 E_0 h}{q_0 a^2} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \quad (\text{V. 1})$$

Le tableau V.1 contient le déplacement transversal adimensionnel \hat{w} dans le plan médian de la plaque sandwich FG de type "A" sous des charges sinusoïdales pour différentes valeurs de l'indice P .

Tableau V.1 : Le déplacement transversal adimensionnel \hat{w} de la plaque sandwich type “A” uniquement sous un chargement mécanique sinusoïdal ($a/h = 10$).

p	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2)$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Zenkour (2005)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Thai et al. (2014)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Li et al. (2016) (Reissner)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Li et al. (2016) (Reddy)	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Li et al. (2016) (Touratier)	0.1960	0.1960	0.1960	0.1960	0.1960
	Present	0.1960	0.1960	0.1960	0.1960	0.1960
1	Zenkour (2013)	0.3200	0.3028	0.2887	0.2776	0.2682
	Mahi et al. (2015)	0.3234	0.3062	0.2919	0.2808	0.2709
	Zenkour (2005)	0.3235	0.3062	0.2919	0.2808	0.2709
	Thai et al. (2014)	0.3237	0.3064	0.2920	0.2809	0.2710
	Li et al. (2016) (Reissner)	0.3236	0.3063	0.2920	0.2809	0.2709
	Li et al. (2016) (Reddy)	0.3236	0.3063	0.2920	0.2809	0.2709
	Li et al. (2016) (Touratier)	0.3235	0.3062	0.2919	0.2809	0.2709
	Present	0.3234	0.3062	0.2919	0.2808	0.2709
2	Zenkour (2013)	0.3689	0.3474	0.3282	0.3115	0.2987
	Mahi et al. (2015)	0.3731	0.3521	0.3328	0.3161	0.3026
	Zenkour (2005)	0.3732	0.3522	0.3328	0.3161	0.3026
	Thai et al. (2014)	0.3737	0.3526	0.3330	0.3163	0.3027
	Li et al. (2016) (Reissner)	0.3733	0.3523	0.3329	0.3162	0.3026
	Li et al. (2016) (Reddy)	0.3733	0.3523	0.3329	0.3162	0.3026
	Li et al. (2016) (Touratier)	0.3732	0.3522	0.3328	0.3161	0.3026
	Present	0.3730	0.3520	0.3327	0.3160	0.3026
5	Zenkour (2013)	0.4053	0.3861	0.3655	0.3436	0.3297
	Mahi et al. (2015)	0.4089	0.3915	0.3712	0.3494	0.3347
	Zenkour (2005)	0.4091	0.3916	0.3713	0.3495	0.3347
	Thai et al. (2014)	0.4101	0.3927	0.3720	0.3501	0.3350
	Li et al. (2016) (Reissner)	0.4093	0.3918	0.3714	0.3496	0.3348
	Li et al. (2016) (Reddy)	0.4093	0.3918	0.3714	0.3496	0.3348
	Li et al. (2016) (Touratier)	0.4090	0.3916	0.3713	0.3495	0.3347
	Present	0.4088	0.3914	0.3711	0.3494	0.3347
10	Zenkour (2013)	0.4145	0.3986	0.3792	0.3558	0.3426
	Mahi et al. (2015)	0.4174	0.4037	0.3852	0.3619	0.3481
	Zenkour (2005)	0.4175	0.4037	0.3849	0.3492	0.3412
	Thai et al. (2014)	0.3988	0.3894	0.3724	0.3492	0.3361
	Li et al. (2016) (Reissner)	0.4177	0.4041	0.3855	0.3621	0.3482
	Li et al. (2016) (Reddy)	0.4177	0.4041	0.3855	0.3621	0.3482
	Li et al. (2016) (Touratier)	0.4175	0.4036	0.3865	0.3620	0.3480
	Present	0.4173	0.4035	0.3851	0.3619	0.3480

Le tableau V.1 contient le déplacement transversal adimensionnel \hat{w} du plan moyen, sous des charges mécaniques sinusoïdales uniquement tout en tenant compte des différentes configurations des plaques sandwiches et du paramètre de matériau P ($a/h = 10$). Les résultats obtenus sont comparés aux 2D et quasi 3D obtenus par Zenkour (2005) [61] et Zenkour et al. (2013) [71], respectivement, la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) de Thai et al. (2014) [173], également, la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT), la solution de déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT) et la solution de la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal (SSDT) obtenues par Li et al. (2016) [35]. Il convient de noter que les solutions 2D de Zenkour (2005) [61] sont dérivées sur la base d'une variation sinusoïdale à la fois pour les déplacements normaux et transversaux des déplacements. En général, on constate un bon accord entre les résultats, en particulier avec ceux rapportés par Zenkour (2005) [61]. Le tableau V.1 montre que, lorsque l'épaisseur du noyau augmente, le déplacement transversal adimensionnel diminue. Le déplacement transversal adimensionnel maximal se produit pour la plaque de FGM (1-0-1) quelle que soit la valeur de l'indice P .

V. 2.2 Analyse de la flexion mécanique de la plaque type "B" :

Dans cet exemple, une plaque sandwich carrée de type "B" simplement appuyée soumise à une charge mécanique sinusoïdale est considérée et analysée. La peau inférieure est en aluminium et la peau supérieure en alumine, tandis que le noyau sandwich est supposé être un FGM en aluminium-alumine. Les propriétés matérielles sont comme suit:

$$\text{métal (aluminium): } E_m = 70 \text{ GPa}, \nu_m = 0.3$$

$$\text{céramique (alumine): } E_c = 380 \text{ GPa}, \nu_c = 0.3$$

Le déplacement transversal adimensionnel et la contrainte de cisaillement adimensionnelle suivantes sont utilisées:

$$\bar{w} = \frac{10 E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \quad (\text{V. 2})$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, z \right) \quad (\text{V. 3})$$

Le tableau V.2 et le tableau V.3 contiennent respectivement, le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} dans le plan médian et la contrainte de cisaillement adimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ de la plaque sandwich FG sous des charges sinusoïdales pour différentes valeurs du rapport latéral sur l'épaisseur a/h et de l'indice P .

Tableau V.2 : Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type "B" uniquement sous un chargement mécanique sinusoïdal

P	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$		
		$a/h = 4$	$a/h = 10$	$a/h = 100$
0	Neves et al. (2013)	0.4447	0.3711	0.3568
	Mantari and Granados (2015)	0.4653	0.3750	0.3579
	Li et al. (2016)	0.4621	0.3745	0.3579
	Present	0.4622	0.3745	0.3579
0.5	Neves et al. (2013)	0.6168	0.5238	0.5058
	Mantari and Granados (2015)	0.6446	0.5268	0.5045
	Li et al. (2016)	0.6382	0.5239	0.5023
	Present	0.6373	0.5238	0.5023
1	Brischetto (2009)	0.7628	0.6324	0.6072
	Neves et al. (2012)	0.7416	0.6305	0.6092
	Neves et al. (2013)	0.7417	0.6305	0.6092
	Mantari and Granados (2015)	0.7739	0.6337	0.6073
	Li et al. (2016)	0.7727	0.6336	0.6073
	Present	0.7713	0.6334	0.6073
4	Brischetto (2009)	1.0934	0.8321	0.7797
	Neves et al. (2012)	1.0391	0.8202	0.7784
	Neves et al. (2013)	1.0371	0.8199	0.7784
	Mantari and Granados (2015)	1.0285	0.8191	0.7796
	Li et al. (2016)	1.0815	0.8278	0.7797
	Present	1.0878	0.8290	0.7797
10	Brischetto (2009)	1.2172	0.8740	0.8077
	Neves et al. (2012)	1.1780	0.8650	0.8050
	Neves et al. (2013)	1.1752	0.8645	0.8050
	Mantari and Granados (2015)	1.1108	0.8556	0.8074
	Li et al. (2016)	1.2315	0.8724	0.8077
	Present	1.2253	0.8745	0.8077

Tableau V.3 : La contrainte de cisaillement adimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ de la plaque sandwich type “B” uniquement sous un chargement mécanique sinusoïdal.

p	Théorie	$\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, h/6)$		
		$a/h=4$	$a/h=10$	$a/h=100$
0	Neves et al. (2013)	0.2208	0.2227	0.2228
	Mantari and Granados (2015)	0.2080	0.2080	0.2080
	Li et al. (2016)	0.2185	0.2191	0.2192
	Présent	0.2203	0.2212	0.2213
0.5	Neves et al. (2013)	0.2546	0.2581	0.2585
	Mantari and Granados (2015)	0.2373	0.2373	0.2374
	Li et al. (2016)	0.2518	0.2525	0.2527
	Present	0.2526	0.2537	0.2540
1	Brischetto (2009)	0.2613	0.2605	0.2603
	Neves et al. (2012)	0.2742	0.2788	0.2793
	Neves et al. (2013)	0.2745	0.2789	0.2795
	Mantari and Granados (2015)	0.2458	0.2458	0.2458
	Li et al. (2016)	0.2715	0.2725	0.2727
	Present	0.2729	0.2743	0.2746
4	Brischetto (2009)	0.2429	0.2431	0.2432
	Neves et al. (2012)	0.2723	0.2778	0.2785
	Neves et al. (2013)	0.2696	0.2747	0.2753
	Mantari and Granados (2015)	0.1877	0.1877	0.1877
	Li et al. (2016)	0.2596	0.2609	0.2611
	Present	0.2698	0.2718	0.2722
10	Brischetto (2009)	0.1932	0.1944	0.1946
	Neves et al. (2012)	0.2016	0.2059	0.2064
	Neves et al. (2013)	0.1995	0.2034	0.2039
	Mantari and Granados (2015)	0.1234	0.1234	0.1234
	Li et al. (2016)	0.1897	0.1907	0.1909
	Present	0.1985	0.2001	0.2004

Les résultats obtenus sont comparés aux solutions 2D et quasi 3D de Li et al. (2016) [35] et Neves et al. (2013) [163] et les résultats de FSDT de Mantari et Granados (2015) [34]. Le facteur de correction du cisaillement de Mantari et Granados (2015) [34] est utilisé pour être $k = 5/6$. On peut constater que le déplacement transversal adimensionnel et la contrainte de cisaillement prédits par la théorie actuelle concordent parfaitement avec les solutions quasi 3D décrites par Neves et al. (2013) [163].

En augmentant la valeur de l'exposant de la loi de puissance et en diminuant la valeur du rapport latéral sur épaisseur, le déplacement transversal adimensionnel augmente, tandis que l'influence du rapport latéral sur l'épaisseur sur la contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle est non significative.

V. 3 Analyse de la flexion thermo-élastique:

V. 3.1 Analyse de la flexion thermo-élastique de la plaque type "A" :

Dans cet exemple, l'analyse de la flexion thermo élastique pure d'une plaque sandwich FG carrée simplement appuyée de type "A" est réalisée pour des combinaisons de matériaux en métal et en céramique, où, les matériaux choisis sont le titane (métal) et le zircon (céramique). Les propriétés des matériaux pour le métal et la céramique utilisés dans les plaques sandwiches FGM sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \text{métal (Ti-6Al-4V): } E_m &= 70 \text{ GPa}, \nu_m = 0.3, \alpha_m = 10.3 (10^{-6}/K) \\ \text{céramique (ZrO}_2\text{): } E_c &= 151 \text{ GPa}, \nu_c = 0.3, \alpha_c = 7.11 (10^{-6}/K) \end{aligned}$$

Dans ce exemple, nous supposons que : $a/h = 10, t_1 = 0, t_2 = 100K$ et $t_3 = 0$. Le paramètre de déplacement transversal adimensionnel utilisé pour le chargement pure en température est:

$$\bar{w} = \frac{h}{\alpha_0 t_2 a^2} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \quad (\text{V. 4})$$

Où, $\alpha_0 = 10^{-6}/K$.

Les résultats numériques des valeurs de la flèche maximale adimensionnelle \bar{w} sont reportés dans le Tableaux V.4 en utilisant les différentes théories des plaques épaisses au centre de la plaque pour la plaque sandwich en FGM (Type A) soumise à un champ de température variant linéairement à travers l'épaisseur ($t_3 = 0$).

Tableau V.4 : Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type “A” sous un chargement thermique pure ($t_3 = 0$) .

P	Théorie	$\bar{w}(a/2,b/2,0)$				
		1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-2-1	2-1-2
0	Zenkour and Alghamdi (2008)	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262
	Houari et al. (2013)	0.461634	0.461634	0.461634	0.461634	0.461634
	Li et al. (2016)	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262
	Present	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262
1	Zenkour and Alghamdi (2008)	0.636916	0.606292	0.582342	0.592604	0.621098
	Houari et al. (2013)	0.614565	0.586124	0.563416	0.573327	0.599933
	Li et al. (2016)	0.636891	0.606256	0.582302	0.592568	0.621067
	Present	0.636938	0.606324	0.582378	0.592635	0.621125
2	Zenkour and Alghamdi (2008)	0.671503	0.639361	0.609875	0.621581	0.656142
	Houari et al. (2013)	0.647135	0.618046	0.590491	0.601843	0.633340
	Li et al. (2016)	0.671486	0.639325	0.609829	0.621544	0.656115
	Present	0.671519	0.639392	0.609915	0.621613	0.656165
3	Zenkour and Alghamdi (2008)	0.683572	0.653671	0.622467	0.634175	0.670275
	Houari et al. (2013)	0.658153	0.631600	0.602744	0.614121	0.646475
	Li et al. (2016)	0.683560	0.653638	0.622420	0.634139	0.670253
	Present	0.683582	0.653699	0.622507	0.634206	0.670294
4	Zenkour and Alghamdi (2008)	0.688803	0.661291	0.629533	0.640940	0.677321
	Houari et al. (2013)	0.662811	0.638705	0.609560	0.620663	0.652890
	Li et al. (2016)	0.688795	0.661260	0.629487	0.640905	0.677303
	Present	0.688810	0.661317	0.629573	0.640970	0.677337
5	Zenkour and Alghamdi (2008)	0.691420	0.665898	0.634003	0.645070	0.681343
	Houari et al. (2013)	0.665096	0.642948	0.613842	0.624629	0.656490
	Li et al. (2016)	0.691415	0.665869	0.633958	0.645036	0.681327
	Present	0.691425	0.665922	0.634042	0.645099	0.681357

Le tableau V.4 expose le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} d’une plaque sandwich FG soumise à un champ thermique variant linéairement à travers l’épaisseur ($t_3 = 0$), pour différentes valeurs de l’indice P et différentes configurations de plaques sandwichs FG (1-0-1, 1-1-1, 1-2-1, 2-2-1 et 2-1-2).

Les résultats numériques sont présentés en utilisant les différentes théories des plaques, telles que la théorie de plaque de déformation par cisaillement sinusoidale (SSDPT) obtenue par

Zenkour et Alghamdi (2008) [76], solution quasi 3D de Houari et al. (2013) [79], solution trigonométrique 2D raffinée de Li et al. (2016) [35] et la théorie actuelle. L'examen du tableau V.4 révèle que la théorie actuelle avec seulement quatre inconnues donne des résultats identiques à ceux obtenus par la théorie de la plaque de déformation sous cisaillement sinusoïdale (SSDPT) développée par Zenkour et Alghamdi (2008) [76] avec cinq inconnues et celles obtenues par Li et al. (2016) [35].

Cela nous indique que la théorie actuelle utilise la même précision en utilisant un nombre d'inconnues moins important que les autres théories, et montre clairement comment la théorie actuelle est-elle plus simple et plus facilement à exposer. Il est à noter qu'en raison de l'effet d'étirement de l'épaisseur, le déplacement transversal adimensionnel obtenu par Houari et al. (2013) [79] est plus petit que celui de la recherche actuelle à la même valeur d'indice et de rapport d'épaisseur de couche. En outre, nous pouvons voir que le déplacement transversal adimensionnel augmente avec l'augmentation de l'indice P .

V. 3.2 Analyse de la flexion thermo-élastique de la plaque type "B" :

Egalement, dans cet exemple, nous avons considéré le cas particulier de la présente étude, dans lequel ($a/h = 10$, $t_1 = t_3 = q = 0$ et $t_2 = 100K$), une plaque sandwich FG carrée simplement appuyée de type "B" sous une charge purement thermique. Les propriétés mécaniques du métal et de la céramique utilisées dans les plaques sandwiches FG sont les mêmes que celles données dans l'exemple précédent. L'expression de déplacement transversal adimensionnel antérieur est utilisée.

Le tableau V.5 indique le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich FG de type "B" pour diverses valeurs d'indice P et diverses configurations de plaques sandwiches FG (1-0-1, 1-1-1, 1-2-1, 2-2-1 et 2-1-1). Les résultats obtenus sont comparés aux solutions 2D de Li et al. (2016) [35] et Tounsi et al. (2013) [78], utilisant la théorie raffinée de la déformation par cisaillement parabolique et la déformation trigonométrique après cisaillement avec quatre inconnues respectivement. On voit clairement que les résultats sont semblables avec les résultats comparés, le déplacement transversal adimensionnel augmente en augmentant la valeur de l'indice P , Les valeurs les plus petites des déplacements transversal \bar{w} sont celles de la plaque (1-2-2) et les plus grandes sont celles de la plaque (2-2-1).

Tableau V.5: Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type "B" sous un chargement thermique pure ($t_3 = 0$).

p	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$				
		1-2-2	1-1-1	1-2-1	2-2-1	2-1-2
0	Tounsi et al. (2013)	0.544640	0.569801	0.556060	0.576238	0.576238
	Li et al. (2016)	0.544619	0.569796	0.556044	0.576240	0.576240
	Present	0.544659	0.569806	0.556074	0.576236	0.576236
1	Tounsi et al. (2013)	0.573055	0.578804	0.577909	0.582578	0.579503
	Li et al. (2016)	0.573054	0.578809	0.577914	0.582593	0.579510
	Present	0.573056	0.578798	0.577904	0.582566	0.579497
2	Tounsi et al. (2013)	0.577551	0.580037	0.580945	0.584582	0.580018
	Li et al. (2016)	0.577555	0.580045	0.580957	0.584601	0.580025
	Present	0.577548	0.580029	0.580935	0.584565	0.580011
3	Tounsi et al. (2013)	0.578976	0.580412	0.581997	0.585807	0.580181
	Li et al. (2016)	0.578982	0.580421	0.582011	0.585829	0.580188
	Present	0.578971	0.580403	0.581984	0.585786	0.580174
4	Tounsi et al. (2013)	0.579572	0.580574	0.582554	0.586680	0.580249
	Li et al. (2016)	0.579579	0.580584	0.582570	0.586705	0.580257
	Present	0.579566	0.580566	0.582540	0.586658	0.580242
5	Tounsi et al. (2013)	0.579865	0.580663	0.582925	0.587346	0.580282
	Li et al. (2016)	0.579872	0.580673	0.582942	0.587373	0.580290
	Present	0.579859	0.580654	0.582909	0.587323	0.580275

V. 4 Analyse de la flexion thermomécanique:

V. 4.1 Analyse de la flexion thermomécanique de la plaque type "A" :

Dans cet exemple, une plaque sandwich carrée simplement appuyée "A" sous des charges thermomécaniques est considérée. Les propriétés mécaniques du métal et de la céramique utilisées dans les plaques sandwiches FG sont les mêmes que celles données dans l'exemple ci-dessus. On suppose que ($a/h = 10, t_1 = 0, t_2 = t_3 = 100K$ et $q = 100Pa$). Différentes paramètres adimensionnelles sont utilisées pour le chargement thermomécanique en tant que:

$$\bar{w} = \frac{10^3}{q_0 a^4 / (E_0 h^3) + 10^3 \alpha_0 t_2 a^2 / h} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \quad (V. 5)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{10}{q_0 a^2 / h^2 + 10 \alpha_0 t_2 a^2 / h^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \quad (V. 6)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{10}{q_0 a / h + E_0 \alpha_0 t_2 a / (10h)} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \quad (V. 7)$$

Où les valeurs de références des propriétés sont prises comme suit : $E_0 = 1 \text{ GPa}$, et $\alpha_0 = 10^{-6}/K$.

Les résultats numériques sont présentés dans les tableaux V.6 , V.7 et V.8 et dans les figures V.1 à V.4.

Tableau V.6 : Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type “A” sous un chargement thermomécanique ($a/h = 10$) .

p	Theory	$\bar{w}(a/2, b/2)$			
		1-0-1	3-1-3	2-1-2	1-1-1
0	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	0.796783	0.796783	0.796783	0.796783
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	0.895735	0.895735	0.895735	0.895735
	Li et al. (2016)	0.864140	0.864140	0.864140	0.864140
	Present	0.787002	0.787002	0.787002	0.787002
1	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.062840	1.045026	1.036213	1.011263
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.190728	1.170533	1.160568	1.132449
	Li et al. (2016)	1.149038	1.130125	1.120741	1.094113
	Present	1.050078	1.032490	1.023787	0.999141
2	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.121608	1.105175	1.096094	1.068091
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.257304	1.238234	1.227765	1.195703
	Li et al. (2016)	1.210756	1.193444	1.183826	1.154061
	Present	1.108126	1.091935	1.082982	1.055354
3	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.141655	1.128080	1.119793	1.092312
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.280741	1.264724	1.255041	1.223232
	Li et al. (2016)	1.231675	1.217447	1.208690	1.179518
	Present	1.127875	1.114524	1.106366	1.079282
4	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.150192	1.138926	1.131428	1.105041
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.290961	1.277527	1.268689	1.237931
	Li et al. (2016)	1.240542	1.228791	1.220879	1.192880
	Present	1.136264	1.125200	1.117826	1.091840
5	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.154412	1.144851	1.137993	1.112660
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.296101	1.284626	1.276497	1.246833
	Li et al. (2016)	1.244905	1.234980	1.227750	1.200876
	Present	1.136262	1.131022	1.124282	1.099348

Les résultats sont comparés à ceux calculés par la théorie de la déformation en cisaillement sinusoïdale (SSDT) à cinq inconnues, la première théorie de la déformation en cisaillement (FSDT) développée par Zenkour et Alghamdi (2010) [174] et les solutions 2D de Li et al. (2016) [35] avec quatre inconnues seulement. Le tableau V.6 compare le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} d'une plaque sandwich FGM soumise à des charges mécaniques et thermiques pour différentes valeurs d'indice P et différentes configurations de plaques sandwich. Il est clairement observé qu'un excellent accord est obtenu dans cette comparaison. En outre, il montre que le déplacement transversal adimensionnel augmente à mesure que l'épaisseur du noyau diminue, tandis que la valeur de l'indice P augmente. les déplacements transversal maximales se produisent pour une plaque FGM sans épaisseur de noyau (1-0-1) et ceci quelle que soit la valeur de l'indice P .

Tableau V.7 : L'effet du rapport a/h sur le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} la plaque sandwich type "A" sous un chargement thermomécanique ($P = 3$).

Schème	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2)$				
		$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
1-0-1	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.141655	0.447872	0.222403	0.130406	0.085094
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.280741	0.503607	0.250355	0.146917	0.095948
	Li et al. (2016)	1.231675	0.492573	0.246212	0.144771	0.094608
	Present	1.127875	0.442339	0.219620	0.128755	0.084003
3-1-3	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.128080	0.442695	0.219904	0.128992	0.084212
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.264724	0.497383	0.247274	0.145112	0.094770
	Li et al. (2016)	1.217447	0.486952	0.243459	0.143199	0.093619
	Present	1.114524	0.437259	0.217175	0.127377	0.083149
2-1-2	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.119793	0.439521	0.218366	0.128116	0.083662
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.255041	0.493613	0.245406	0.144017	0.094055
	Li et al. (2016)	1.208690	0.483486	0.241757	0.142222	0.093002
	Present	1.106366	0.434140	0.215666	0.126521	0.082614
1-1-1	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	1.092312	0.428955	0.213223	0.125175	0.081803
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	1.223232	0.481212	0.239259	0.140414	0.091704
	Li et al. (2016)	1.179518	0.471920	0.236060	0.138942	0.090916
	Present	1.079282	0.423741	0.210614	0.123639	0.080798

Le tableau V.7 compare le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} d'une plaque en sandwich "Type A" sous des charges thermomécaniques avec $P = 3$, et différentes valeurs de facteur de forme et différentes configurations de plaques en sandwich. On peut voir que le

déplacement transversal adimensionnel diminue à mesure que le rapport d'aspect augmente, également, les déplacement maximales se produisent pour la plaque rectangulaire (1-0-1) FGM.

Tableau V.8 : La contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich type "A" sous un chargement thermomécanique ($a/h = 10$) .

P	Théorie	$\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, h/2)$			
		1-0-1	3-1-3	2-1-2	1-1-1
0	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	-2.388909	-2.388909	-2,388909	-2,388909
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	-3,597007	-3,597007	-3,597007	-3,597007
	Li et al. (2016)	-3.119484	-3 .119484	-3.119484	-3.119484
	Present	-2.327976	-2.327976	-2.327976	-2.327976
1	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	-2,406797	-2,494126	-2,537365	-2,659816
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	-3,471099	-3,569762	-3,618476	-3,756017
	Li et al. (2016)	-3.116975	-3.220177	-3.271398	-3.416748
	Present	-2.350110	-2.436358	-2.479071	-2.600063
2	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	-2,118721	-2,199231	-2,243800	-2,381343
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	-3,145662	-3,238636	-3,289757	-3,446485
	Li et al. (2016)	-2.780614	-2.874999	-2.927462	-3.089861
	Present	-2.065504	-2.144869	-2.188832	-2.324589
3	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	-2,020416	-2,086818	-2,127487	-2,262512
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	-3,031284	-3,109180	-3,156414	-3,311823
	Li et al. (2016)	-2.666776	-2.744324	-2.792076	-2.951191
	Present	-1.968620	-2.033967	-2.074031	-2.207176
4	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	-1,978593	-2,033567	-2,070352	-2,200020
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	-2,981507	-3,046666	-3,089733	-3,239941
	Li et al. (2016)	-2.618570	-2.682632	-2.725778	-2.878466
	Present	-1.927498	-1.981529	-2.017732	-2.145503
5	Zenkour and Alghamdi (2010) (SSDPT)	-1,957959	-2,004482	-2,038109	-2,162596
	Zenkour and Alghamdi (2010) (FSDPT)	-2,956534	-3,012040	-3,051612	-3,196423
	Li et al. (2016)	-2.594862	-2.648999	-2.688425	-2.834977
	Present	-1.907251	-1.952932	-1.986005	-2.108615

Le tableau V.8 présente la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ d'une plaque sandwich carrée Type "A" pour différentes valeurs d'indice P , et divers rapports d'épaisseur de couche. On peut voir que la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ diminue à mesure que l'épaisseur du noyau diminue, aussi, la contrainte normale diminue avec l'augmentation de la valeur de l'indice P .

La plus faible valeur de la contrainte normale se produit pour la plaque de FGM (1-0-1). L'effet du rapport d'épaisseur de couche sur la contrainte normale sans dimension est insignifiant pour les plaques entièrement en céramique ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$).

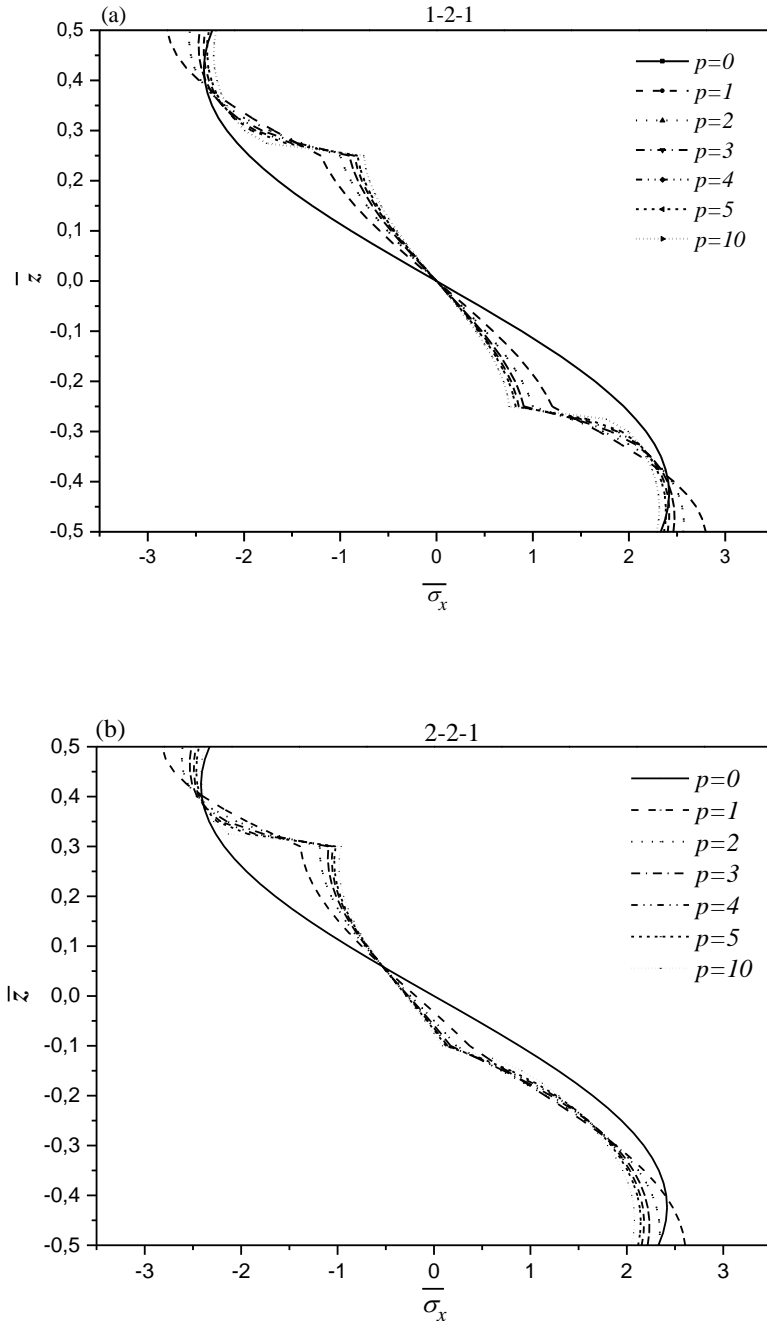
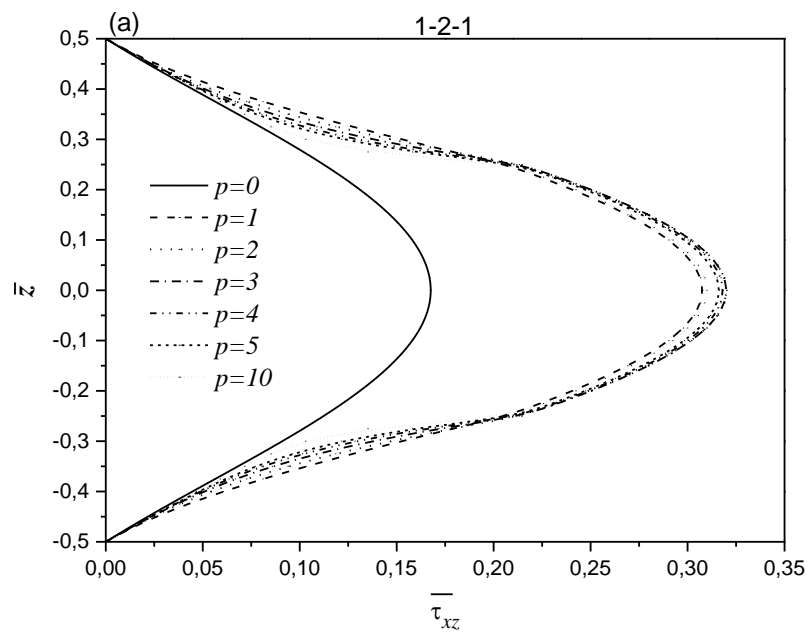


Figure V.1 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich type "A" des configurations : (a) (1-2-1) et (b) (2-2-1).

La figure V.1 montre l'évolution de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ sur l'épaisseur des plaques (1-2-1) et (2-2-1) en sandwich FG type "A" pour la valeur d'indice P . La courbe révèle la continuation de la contrainte axiale. sur toute l'épaisseur de la plaque, présentant une variation non linéaire sur toute l'épaisseur de la plaque, où est remarquable entre les faces des différentes couches. la contrainte minimale est à la surface supérieure (contrainte de compression) et la contrainte maximale (contrainte de traction) à la surface inférieure.

La figure V.2 comprend les tracés de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ sur l'épaisseur de la configuration de plaque non symétrique (1-2-1) et (2-2-1) respectivement, avec différentes valeurs d'indice P , Le résultat indique que la distribution des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la plaque est parabolique. L'intensité de la force de cisaillement varie de zéro en haut et en bas à une valeur maximale en un point de la couche centrale.



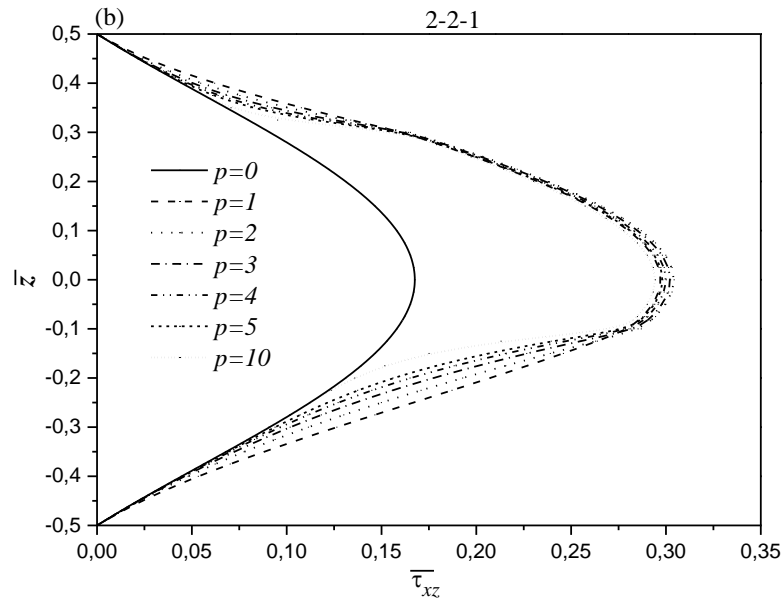


Figure V.2 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich type "A" des configurations : (a) (1-2-1) et (b) (2-2-1).

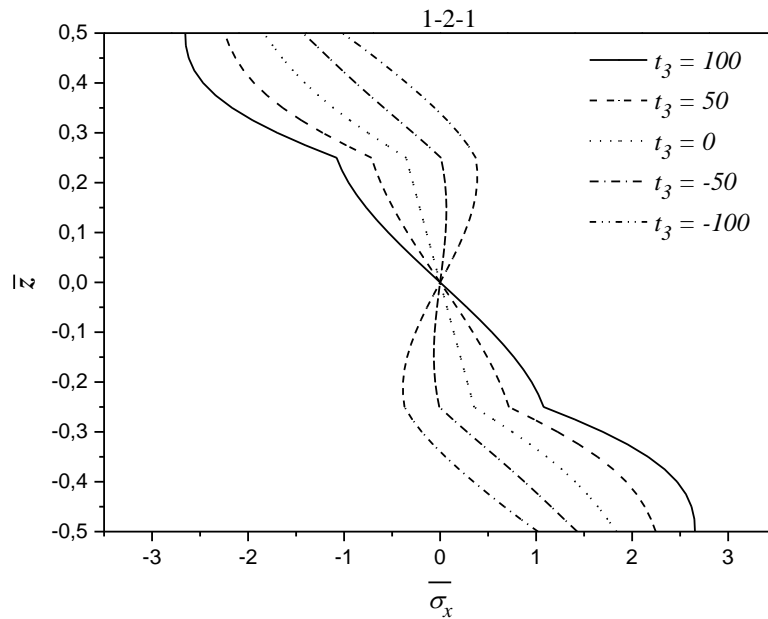


Figure V.3 : L'effet de la valeur de la charge thermique t_3 sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich type "A" avec ($P = 1.5$).

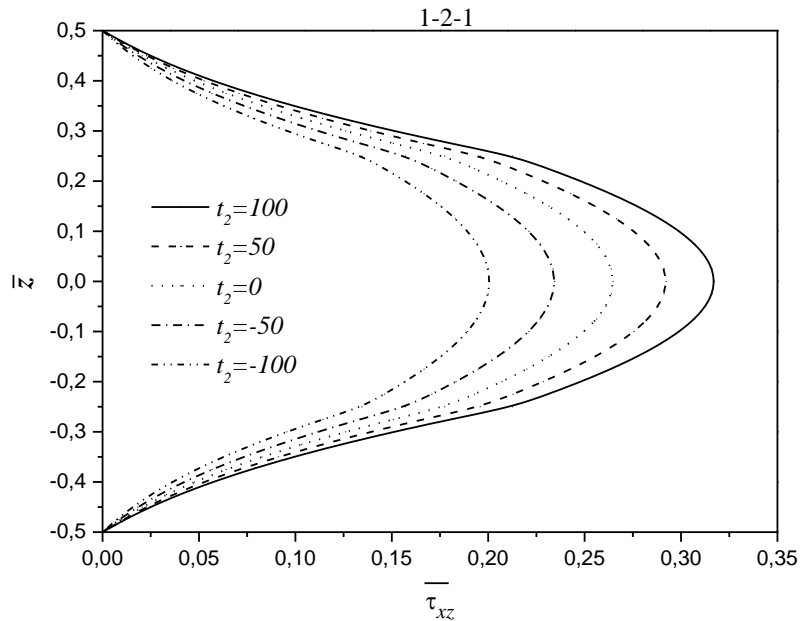


Figure V.4 : L'effet de la valeur de la charge thermique t_3 sur la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque sandwich type "A" avec ($P = 1.5$).

Les figures. V.3 et V.4 démontrent la sensibilité de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ et de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ au changement de la valeur de la charge thermique t_3 , où les diagrammes décrivent les distributions dans l'épaisseur de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ et de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ dans l'épaisseur. de la plaque sandwich FG (1-2-1) de type "A" avec ($P = 1.5$).

V. 4.2 Analyse de la flexion thermomécanique de la plaque type "B" :

Dans cet exemple, une plaque sandwich carrée simplement appuyée de type "B" sous des charges thermomécaniques est considérée. Les mêmes propriétés mécaniques pour le métal et la céramique des plaques sandwichs FG initiales sont utilisées. On suppose que ($a/h = 10, t_1 = 0, t_2 = t_3 = 100K$ et $q = 100Pa$).

Les résultats sont comparés à ceux calculés par la première théorie de la déformation par cisaillement (FSDT), la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre (SSDT) à cinq inconnues et par la solution 2D de la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal (SSDT) de Li et al. (2016) [35] avec quatre inconnues seulement.

Tableau V.9 : Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich type “B” sous un chargement thermomécanique ($a/h = 10$) .

P	Théorie	$\bar{w}(a/2, b/2, h/2)$			
		2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0.5	Li et al. (2016) (Reissner)	1.156651	1.153153	1.160596	1.146469
	Li et al. (2016) (Reddy)	1.041063	1.037881	1.044620	1.031797
	Li et al. (2016) (Touratier)	1.025948	1.022851	1.029436	1.016925
	Present	1.012966	1.009942	1.016396	1.004150
1	Li et al., 2016 (Reissner)	1.158108	1.156866	1.164169	1.155413
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.042384	1.041250	1.047849	1.039909
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.027236	1.026136	1.032595	1.024847
	Present	1.014226	1.013155	1.019492	1.011910
2	Li et al., 2016 (Reissner)	1.159073	1.159142	1.168021	1.161020
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.043258	1.043318	1.051333	1.045002
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.028088	1.028147	1.035999	1.029806
	Present	1.015058	1.015116	1.022828	1.016754
3	Li et al., 2016 (Reissner)	1.159381	1.159838	1.170341	1.162974
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.043537	1.043950	1.053434	1.046777
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.028360	1.028760	1.038050	1.031533
	Present	1.015323	1.015714	1.024836	1.018438
4	Li et al., 2016 (Reissner)	1.159511	1.160141	1.171974	1.164015
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.043655	1.044225	1.054915	1.047721
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.028474	1.029027	1.039494	1.032451
	Present	1.015435	1.015973	1.026248	1.019334
5	Li et al., 2016 (Reissner)	1.159576	1.160305	1.173205	1.164704
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.043714	1.044374	1.056034	1.048346
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.028533	1.029172	1.040585	1.033059
	Present	1.015490	1.016113	1.027313	1.019927

Le tableau V.9 présente les résultats de déplacement transversal adimensionnel \bar{w} pour une plaque sandwich FG type "B" soumise à une charge thermomécanique, avec indice variable $P = 0.5, 1, 2, 3, 4, \text{ et } 5$, ainsi avec diverses configurations de la plaque 2-1-2, 1-1-1, 2-2-1 et 1-2-1. Nous pouvons voir dans ce tableau que, lorsque l'indice P augmente, on observe une augmentation mineure de déplacement transversal adimensionnel, aussi, on remarque que l'effet de l'épaisseur du noyau n'a pas d'influence. La plus faible valeur de la contrainte normale se produit pour la plaque de FGM (1-1-1).

Tableau V.10 : L'effet du rapport d'aspect a/h sur le déplacement transversal \bar{w} de la plaque sandwich type "B" sous un chargement thermomécanique ($P = 3$).

Scheme	Theory	$\bar{w}(a/2, b/2)$				
		$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
2-1-2	Li et al., 2016 (Reissner)	1.159381	0.463430	0.231452	0.135933	0.088700
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.043537	0.417148	0.208358	0.122387	0.079875
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.028360	0.411032	0.205262	0.120535	0.078638
	Present	1.015323	0.405775	0.202599	0.118940	0.077572
1-1-1	Li et al., 2016 (Reissner)	1.159838	0.463592	0.231517	0.135958	0.088705
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.043950	0.417296	0.208418	0.122410	0.079880
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.028760	0.411172	0.205315	0.120552	0.078638
	Present	1.015713	0.405908	0.202646	0.118952	0.077567
2-2-1	Li et al., 2016 (Reissner)	1.170341	0.467655	0.233433	0.136991	0.089301
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.053434	0.420968	0.210152	0.123347	0.080424
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.038050	0.414748	0.206988	0.121442	0.079141
	Present	1.024836	0.409402	0.204265	0.119799	0.078034
1-2-1	Li et al., 2016 (Reissner)	1.162974	0.464798	0.232079	0.136256	0.088872
	Li et al., 2016 (Reddy)	1.046777	0.418384	0.208926	0.122680	0.080032
	Li et al., 2016 (Touratier)	1.031533	0.412232	0.205804	0.120807	0.078777
	Present	1.018438	0.406943	0.203118	0.119193	0.077694

Le tableau V.10 présente le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} pour une plaque sandwich FG Type "B" soumise à des charges mécaniques et thermiques, avec indice $P = 3$, et diverses valeurs de facteurs de forme et d'épaisseur de couche. on constate que, avec l'augmentation du rapport de forme a/h , la valeur de déplacement transversal adimensionnel de la plaque en sandwich type "B" diminue.

La figure V.5 décrit la relation inverse entre le déplacement transversal \bar{w} et le rapport de forme a/h de la plaque sandwich FG type "B" (1-2-1) pour $P = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, et 10$. Avec l'augmentation du rapport d'aspect, le déplacement transversal adimensionnel diminue. Les courbes présentent la même valeur de déflexion, la décroissance est importante lorsque le rapport a/h est inférieur à 3.

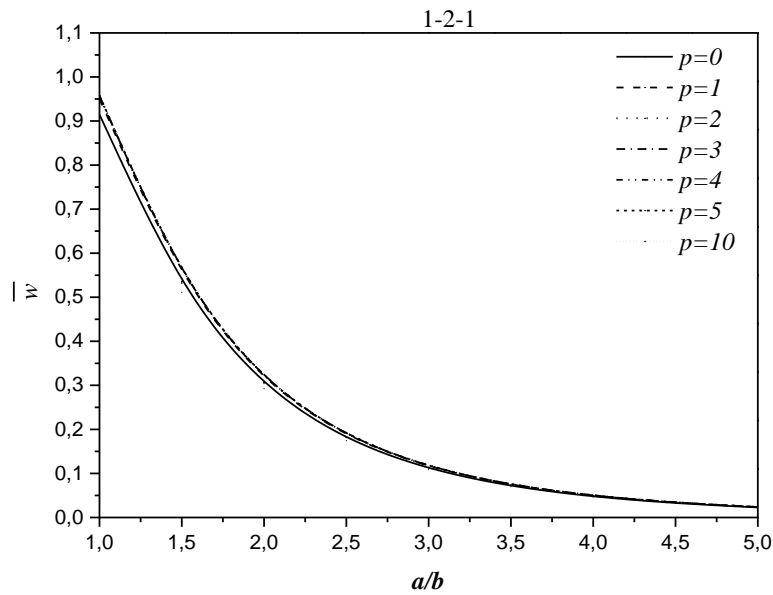


Figure V.5 : Le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} en fonction du rapport de forme a/h de la plaque sandwich (1-2-1) de type "B" avec ($t_2 = t_3 = 100K$).

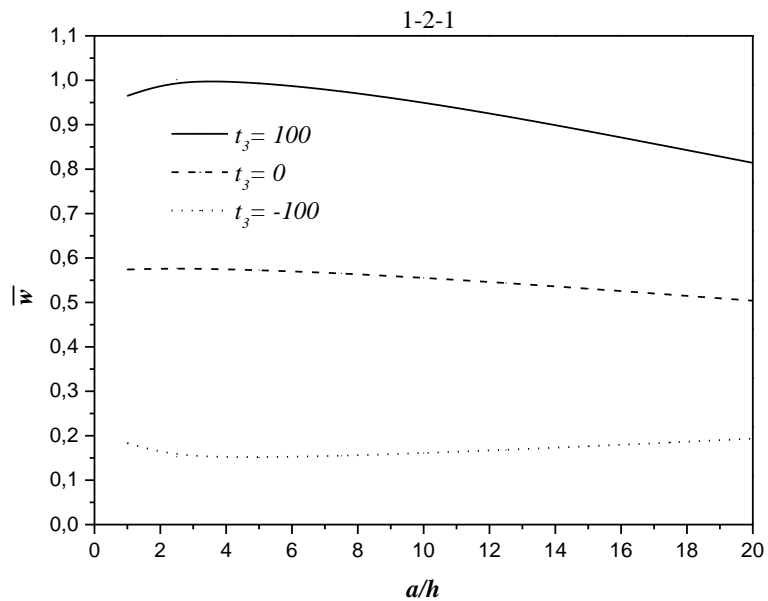


Figure V.6 : L'effet du chargement thermique t_3 et le rapport de forme a/h sur le déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque sandwich (1-2-1) de type "B" avec ($P = 1$).

La figure. V.6 exprime l'influence du rapport latéral sur l'épaisseur a/h et de la charge thermique t_3 sur la valeur du déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la plaque

sandwich (1-2-1) FG de type "B" ($P = 3$). L'influence de la charge thermique est importante sur le déplacement transversal adimensionnel, quand l'influence du rapport latéral sur l'épaisseur est mineure.

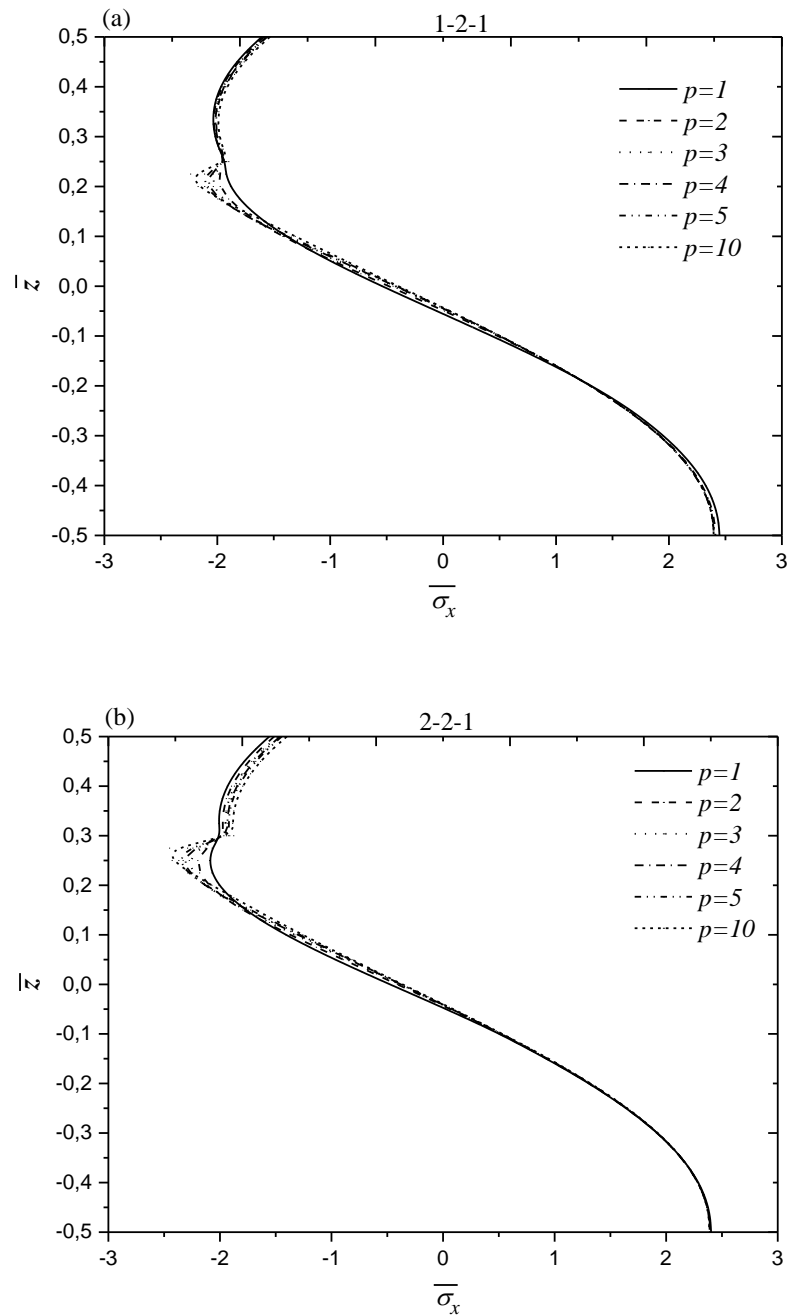


Figure V.7 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich type "B" des configurations : (a) (1-2-1) et (b) (2-2-1).

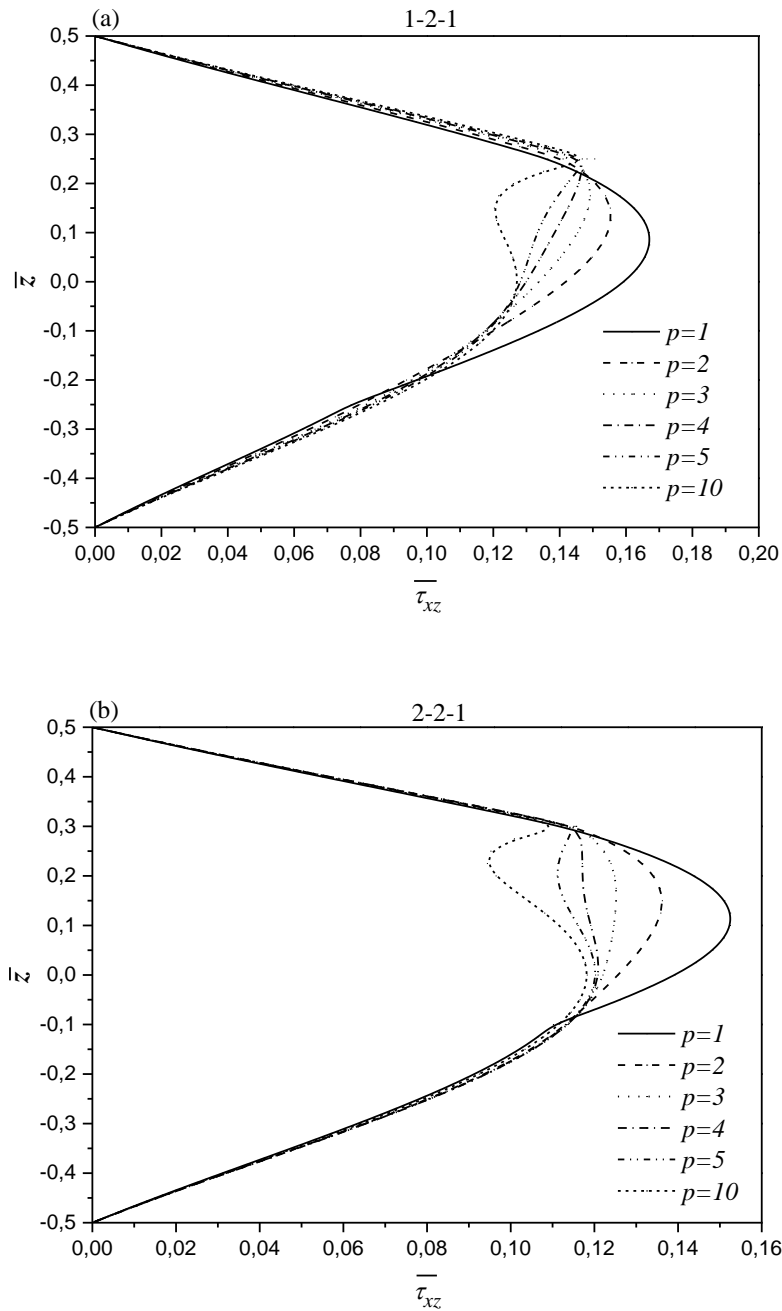


Figure V.8 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich type "B" des configuration : (a) (1-2-1) et (b) (2-2-1).

La figure. V.7 montre la répartition de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ dans l'épaisseur des plaques sandwiches (1-2-1) et (2-2 1) de type "B" pour $P = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, et 10$. La courbe de la contrainte normale présente une variation non linéaire sur toute l'épaisseur de la plaque. La contrainte maximale (contrainte de traction) se situe sur la surface inférieure, tandis que la

contrainte minimale (contrainte de compression) apparaît en un point de la couche centrale et près de la face supérieure.

La figure V.8 présente des tracés de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ sur l'épaisseur de la configuration de plaque sandwich symétrique et non symétrique (1-2-1) et (2-2-1) dans cet ordre de type "B", avec différentes valeurs d'indice P . La contrainte transversale est irrégulière au niveau de la couche centrale, la valeur minimale apparaît en un point de la couche centrale et près de la couche superficielle supérieure.

V. 5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de l'analyse du comportement thermomécanique de la flexion des plaques épaisses sandwiches en FGM avec une variation arbitraire des propriétés matérielles en utilisant les différentes théories d'ordre élevé. Deux types de plaques sandwiches en FGM sont utilisés, à savoir, les plaques sandwiches en FGM (Type A) dont les couches (supérieure et inférieure) en FGM et la couche centrale en matériau homogène, les plaques sandwiches en FGM (Type B) dont les couches (supérieure et inférieure) en matériau homogène et la couche centrale en FGM.

Une comparaison avec les résultats de la littérature est faite pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de cette théorie. Les influences de la distribution des fractions volumiques, du facteur de forme et de la charge thermique sur les caractéristiques de flexion mécanique, thermo élastique et thermomécanique sont examinées.

La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieur et inférieur de la plaque.

Toutes les études comparatives ont démontré que les flèches et les contraintes dues au chargement mécanique, thermique et thermomécanique obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de la littérature sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en FGM.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

L'utilisation des structures sandwichs dans les applications industrielles n'a cessé d'augmenter depuis plusieurs années, et cela dans toutes les industries : automobile, aéronautique, spatiale, marine, génie civil, ferroviaire ou encore sportive, médicale et nucléaire. Les performances en termes de gain massique, de propriétés mécaniques et de fabrication offrent de nombreuses possibilités d'applications, parfois très complexes.

Le développement théorique pour l'analyse des plaques constitue l'un des axes de recherches les plus importants de la modélisation des solides et des structures. Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les domaines de l'industrie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie adéquate permettant d'analyser les plaques en FGM avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement thermomécanique des plaques épaisses sandwichs en FGM afin d'étudier l'influence du chargement mécanique et thermique sur la réponse de la flexion des plaques tout en étudiant l'évolution de la flèche et les contraintes normales et tangentielles.

En utilisant un modèle de plaque raffiné à 4 variables, les équations du mouvement pour des plaques fonctionnellement graduées sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La solution de Navier est employée pour déterminer les solutions analytiques, la présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieure et inférieure de la plaque.

Afin de réduire le nombre des variables inconnues de la théorie classique des plaques d'ordre élevé, les rotations $\theta_x(x, y)$ et $\theta_y(x, y)$ causées par le cisaillement sont remplacées par $\oint \theta(x, y, t) dx$ et $\oint \theta(x, y, t) dy$, respectivement. Ces termes d'intégrale utilisée dans les

expressions peuvent être résolus en utilisant la procédure de Navier, où les coefficients A' et B' sont adoptés selon le type de solution employée, dans ce cas la solution de Navier.

Une comparaison avec les résultats de la littérature a été faite pour objectif de vérifier l'exactitude et l'efficacité de cette théorie. Les influences de la distribution des fractions volumiques, du facteur de forme et de la charge thermique sur les caractéristiques de flexion mécanique, thermo-élastique et thermomécanique sont examinées également.

Le mélange de la céramique et du métal avec une variation continue des fractions volumiques permet d'éliminer les problèmes d'interface des plaques sandwiches et donc les distributions des contraintes seront harmoniques. Toutes les études comparatives ont démontré que les flèches et les contraintes dues au chargement mécanique, thermique et thermomécanique obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de la littérature sont presque identiques. Par conséquent, on peut conclure que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermomécanique de la flexion des plaques sandwiches en FGM.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul des différentes formes de structures sandwiches en FGM sous la combinaison des différents types de chargement (vibratoire et hygrothermique) et en tenant compte cette fois-ci des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dus à la température.

En plus, il est prévu également de proposer de nouveaux champs de déplacement pour l'étude de la réponse globale des plaques sandwiches en FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Vinson, J.R. (2001), "Sandwich structures", *Appl. Mech. Rev.*, **54**(3), 201-214.
- [2] Vinson, J.R. (2005), "Sandwich structures: past, present, and future", In: *Sandwich structures 7: advancing with sandwich structures and materials*, (Thomsen OT, Bozhevolnaya E, Lyckegaard A, editors), Springer, Netherlands, pp. 3-12.
- [3] Ahmed, A. (2014), "Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory", *Int. J. Civil Struct. Environ.*, **4**(2), 59-64.
- [4] Tian, A., Ye, R. and Chen, Y. (2016), "A new higher order analysis model for sandwich plates with flexible core", *J. Compos. Mater.*, **50**(7), 949-961.
- [5] Kolahchi, R. and Cheraghbak, A. (2017), "Agglomeration effects on the dynamic buckling of viscoelastic microplates reinforced with SWCNTs using Bolotin method", *Nonlinear Dyn.*, **90**, 479-492.
- [6] M. Savoia., J.N. Reddy, Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates, *Int. J; Solids Structures*; **32** (5): 593-608, 1995.
- [7] Koizumi, M. (1997), "FGM activities in Japan", *Compos. Part B-Eng.*, **28**(1), 1-4.
- [8] Shaw, LL. (1998), "Thermal residual stresses in plates and coatings composed of multilayered and functionally graded materials", *Compos Pt B-Eng*, **29**(3), 199-210.
- [9] Birman, V, Keil, T, Hosder, S. (2013), "Functionally graded materials in engineering", In: Thomopoulus S, Birman V, Genin GM, editors. *Structural interfaces and attachments in biology*. New York: Springer; 2013, 19-41.
- [10] Swaminathan, K, Naveenkumar, DT, Zenkour, AM, Carrera, E. (2015), "Stress, vibration and buckling analyses of FGM platesda state-of-the-art review", *Compos Struct*, **120**, 10-31.
- [11] Panyatong, M., Chinnaboon, B. and Chucheepsakul, S. (2016), "Free vibration analysis of FG nanoplates embedded in elastic medium based on second-order shear deformation plate theory and nonlocal elasticity", *Compos. Struct.*, **153**, 428-441.
- [12] Shahsavari, D., Karami, B., Li, L. (2018), "A high-order gradient model for wave propagation analysis of porous FG nanoplates", *Steel and Composite Structures*, **29**(1), 53-66.
- [13] Faleh, N.M., Ahmed, R.A., Fenjan, R.M. (2018), "On vibrations of porous FG nanoshells", *International Journal of Engineering Science*, 133, 1-14.
- [14] MSA. Houari. Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances, 2011.
- [15] Cheng, Z.Q. and Batra, R.C. (2003), "Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate", *Compos. Part B-Eng.*, **31**(2), 97-106.
- [16] J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; **20** (5) :841–855, 2001.

- [17] Vel, S.S. and Batra, R.C. (2002), "Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates", *AIAA J.*, **40**(7), 1421-1433.
- [18] Shen, H.S. (2002), "Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments", *Int. J. Mech. Sci.*, **44**(3), 561-584.
- [19] Yang, J. and Shen, H.S. (2003), "Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions", *Compos. Part B-Eng.*, **34**(2), 103-115.
- [20] Na, K.S. and Kim, J.H. (2006), "Nonlinear bending response of functionally graded plates under thermal loads", *J. Therm. Stress.*, **29**(3), 245-261.
- [21] Brischetto, S., Leetsch, R., Carrera, E., Wallmersperger, T. and Kroplin, B. (2008), "Thermo-mechanical bending of functionally graded plates", *J. Therm. Stress.*, **31**(3), 286-308.
- [22] Carrera, E. and Brischetto, S. (2009), "A comparison of various kinematic models for sandwich shell panels with soft core", *J. Compos. Mater.*, **43**(20), 2201-2221.
- [23] Carrera, E. and Petrolo, M. (2010), "Guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates", *AIAA J.*, **48**(12), 2852-2866.
- [24] Carrera, E., Filippi, M. and Zappino, E. (2013), "Free vibration analysis of rotating composite blades via Carrera Unified Formulation", *Compos. Struct.*, **106**(106), 317-325.
- [25] Fazzolari, F.A. and Carrera, E. (2013), "Refined hierarchical kinematics quasi-3D Ritz models for free vibration analysis of doubly curved FGM shells and sandwich shells with FGM core", *J. Sound Vib.*, **333**(5), 1485-1508.
- [26] Petrolo, M., Cinefra, M., Lamberti, A. and Carrera, E. (2015), "Evaluation of mixed theories for laminated plates through the axiomatic/asymptotic method", *Compos. Part B-Eng.*, **76**(3)-260-272.
- [27] Zhao, X. and Liew, K.M. (2009), "Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **198**(33), 2796-2811.
- [28] Sepahi, O., Forouzan, M.R. and Malekzadeh, P. (2010), "Large deflection analysis of thermo-mechanical loaded annular FGM plates on nonlinear elastic foundation via DQM", *Compos. Struct.*, **92**(10), 2369-2378.
- [29] Boudarba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **14**(1), 85-104.
- [30] Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Benyoucef, S. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**(1), 209-220.

- [31] Zhu, P., Zhang, L.W. and Liew, K.M. (2014), “Geometrically nonlinear thermomechanical analysis of moderately thick functionally graded plates using a local Petrove-Galerkin approach with moving Kriging interpolation”, *Compos. Struct.*, **107**, 298-314.
- [32] Tung, H.V. and Duc, N.D. (2014), “Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations and subjected to mechanical and thermal loading conditions”, *Appl. Math. Model.*, **38**(11), 2848-2866.
- [33] Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015), “Thermoelastic analysis of functionally graded doubly curved shell panels using nonlinear finite element method”, *Compos. Struct.*, **129**, 202-212.
- [34] Mantari, J.L. and Granados, E.V. (2015a), “Thermoelastic analysis of advanced sandwich plates based on a new quasi-3D hybrid type HSDT with 5 unknowns”, *Compos. Part B-Eng.*, **69**, 317-334.
- [35] Li, D., Deng, Z. and Xiao, H. (2016), “Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory”, *Compos. Part B-Eng.*, **106**, 107-119.
- [36] Z. Zhong et T. Yu, (2007) Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; **67** (3-4): 481-488, 2007.
- [37] C. Baron et S. Naili, (2008) C. Baron., S. Naili, Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; **336** (9) : 722–730, 2008.
- [38] Birman, V. et Byrd, L.W., (2007) Birman, V. et Byrd, L.W., "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures", *Applied Mechanics Reviews*, (2007), **60**, 195-216.
- [39] Hirai T, (1996) Hirai, T., "Functional gradient materials", Processing of ceramics—Part 2, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; (1996), p. 293–341. Hirai, T., "Functional gradient materials", *Processing of ceramics—Part 2, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers*; (1996), p. 293–341.
- [40] J. Reddy, (2000) Reddy, J.N., "Analysis of functionally graded plates", *Int J Numer Method Eng*, (2000), **47**(41–43):663–684.
- [41] Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K., (1982) Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K., "Vibration of orthotropic rectangular thick plates", *Int J Solids Struct*, (1982), 149–156.
- [42] P. Boch et al, (1986) P. Boch., T. Chartier., M. Huttepain, Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; **69** (8):191-192,1986.
- [43] Kuznetsov, N.D. et Kartashov, G.G., (1981) Kuznetsov, N.D. et Kartashov, G.G., "Natural vibrational modes of laminated anisotropic plates and flat shells", *Soviet Appl Mech*, (1981), 334–339.
- [44] Reissner, E., (1980) Reissner, E., "On the analysis of first and second order shear deformation effects for isotropic elastic plates", *ASME J Appl Mech*, (1980), 959-961..

- [45] H. Okamura, (1991) H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; **143** (1-2): 3-9,1991.
- [46] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi ,Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: *Ceramic Transactions ;John Wiley & Sons*;page 110, 4 août 2011 .
- [47] Hildebrand, F. B., Reissner, E., Thomas, G. B., (1949). Notes on the theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N.* No. 1833.
- [48] Marguerre, K., 1944, The Optimum Buckling Load of Flexibly Supported Plate Composed of Two Sheets Joined by a Light Weight Filler, When Under Longitudinal Compression, *Deutsche, D.V.L*, p.5.
- [49] Libove, Charles et Batdorf, S B “A general small-deflection theory for flat sandwich plates” 1948 *RN NACA-TN-1526*
- [50] Flugge and K. Klotter; “On the Motions of an Oscillating System Under the Influence of Flip-Flop Controls”; *naca-tm-1237*; 1949
- [51] Bijlaard, P. P., , Analysis of Elastic and Plastic Stability of Sandwich Plates by Method of Split Rigidities, 1951 *Journal of the Aeronautical Sciences*.
- [52] Erickson, W. S., 1956, "Supplement of Effects of Shear Deformation in the Core of a Flat Rectangular Sandwich Panel",*Forest Products Laboratory Report 1583-c*.
- [53] Kaechele L. E. “Design procedures and data for sandwich panel tests” 1957 *RAND Corporation* pp 44
- [54] Noor and Peters “Analysis of Curved Sandwich Panels with Cutouts Subjected to Combined Temperature.”*Journal of Sandwich Structures and Materials. SAGE Publications*, 1999; pp 42-59
- [55] Zenkert, D. An Introduction to Sandwich Construction, *Chamelon Press*,London (1995).
- [56] Plantema F.J « *Sandwich Construction* » *Wiley Edition*, Août 1966.
- [57] Vinson, J.R., In-Plane Shear Strength Determination of Composite materials in Laminated and Sandwich Panels, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. **50**, No. 11, part 2, November 1997, pp 5237-5240.
- [58] Lindström A, Hallström S. Energy absorption of SMC/balsa sandwich panels with geometrical triggering features. *Compos Struct* 2010;**92(11)** :2676–84.
- [59] Dean J, Fallah AS, Brown PM, Louca LA, Clyne TW. Energy absorption during projectile perforation of lightweight sandwich panels with metallic fibre cores. *Compos Struct* 2011;**93(3)**:1089–95.
- [60] Librescu L, Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey. *Compos Struct* 2000; **48(1–3)**:1–17.

- [61] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1— Deflection and stresses. *Int J Solids Struct* 2005;**42 (18)**:5224–42.
- [62] Shen HS, Li SR. Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties. *Compos Pt B-Eng* 2008;**39(2)**:332–44.
- [63] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Compos Struct* 2010;**93(1)**:93–102.
- [64] Sobhy M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Compos Struct* 2013;**99**:76–87.
- [65] Fazzolari FA. Natural frequencies and critical temperatures of functionally graded sandwich plates subjected to uniform and non-uniform temperature distributions. *Compos Struct* 2015;**121**:197–210.
- [66] Kashtalyan M, Menshykova M. Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with a functionally graded core. *Compos Struct* 2009;**87 (1)**:36–43.
- [67] Alibeigloo A, Liew KM. Free vibration analysis of sandwich cylindrical panel with functionally graded core using three-dimensional theory of elasticity. *Compos Struct* 2014;**113**:23–30.
- [68] Liu B, Ferreira AJM, Xing YF, Neves AMA. Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method. *Compos Struct* 2016;**136**:546–53.
- [69] Wang ZX, Shen HS. Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations. *Compos Struct* 2011;**93(10)**:2521–32.
- [70] Natarajan S, Manickam G. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elem Anal Des* 2012;**57**:32–42.
- [71] Zenkour AM. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. *J Sandw Struct Mater* 2013;**15(6)**:629–56.
- [72] Mantari JL, Soares CG. A trigonometric plate theory with 5-unknowns and stretching effect for advanced composite plates. *Compos Struct* 2014;**107**:396–405.
- [73] Mantari JL, Soares CG. Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates. *Compos Struct* 2014;**109**:231–9.
- [74] Alibeigloo A, Alizadeh M. Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method. *Eur J Mech A-Solids* 2015;**54**:252–66.
- [75] Mahi A, Bedia EAA, Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Appl Math Model* 2015;**39(9)**:2489–508.
- [76] Zenkour AM, Alghamdi NA. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J Mater Sci* 2008;**43(8)**:2574–89.

- [77] Houari MSA, Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Bedia EAA. Two-variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J Therm Stresses* 2011;**34(4)**:315–34.
- [78] Tounsi A, Houari MSA, Benyoucef S. A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerosp Sci Technol* 2013;**24(1)**:209–20.
- [79] Houari MSA, Tounsi A, Bég OA. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory. *Int J Mech Sci* 2013;**76(6)**:102–11.
- [80] Zhu, P, Zhang, LW, Liew, KM. (2014), "Geometrically nonlinear thermomechanical analysis of moderately thick functionally graded plates using a local Petrove-Galerkin approach with moving Kriging interpolation", *Compos Struct*, **107**, 298-314.
- [81] Mantari, JL, Granados, EV. (2015), "Thermoelastic analysis of advanced sandwich plates based on a new quasi-3D hybrid type HSDT with 5 unknowns", *Compos Pt B Eng*, **69**, 317-334.
- [82] Li, D., Deng, Z. and Xiao, H.(2016), "Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Compos. Part B-Eng.*, 106, 107–119.
- [83] D. Gay, V. S. Hoa, and S. W. Tsai. Composite materials design and applications. *CRC Press LLC*, 2003.
- [84] E. Hiroshi, E. Mizuo, and Z. Yoshimasa. The development of vibration damping steel for automotive use. S.A.E. *Technical Paper Series*, March 1989.
- [85] Y. Shiroy, S. Niwa, T. Iwata, and Y. Kurata. Application Study of Vibration Damping Composite Steel Sheet to the Car Body Panels. S.A.E. *Technical Paper Series*, March 1989.
- [86] "20 dB de moins sur les presses". *Machine-Outil N329*, Avril 1976.
- [87] M. Macé. Modélisation des structures amorties par $_lm$ viscoélastique. PhD thesis, *UPMC Thèse*, 1991.
- [88] M. Marchetti, F. Morgonti, L. Mucciante, and C. Bruno. Damping of composite plate for space structures : *prediction and measurment*. *Acta astronautica*, 1987.
- [89] "Development of laminated composite steels heat at NKK". United Nations, *CEE Steel Comittee, seminar on new Application for steel in view of the challenge from substitute materials, Luxembourg*, 26 May 1988.
- [90] H. Oberst and A. Schommer. Verbundblechsysteme mit optional eingestellten schwingungsdampfen den Kunststo_ zwischenschichten. *Kunststo_e*, 1965.
- [91] H. Braunish. Schwingungsgedämpfte dreischichtige verbundsysteme. *Acustica*, **22(70)** :136_144, 1969.

- [92] A. Jouandeau and B. Dupenay. Les modèles rhéologiques en viscoélasticité linéaire. *XVIIème congrès Fapitec- LUGANO*, XXXI :348, 23, 28 Septembre 1984.
- [93] J. Bernard, A. Michel, J. Philibert, and J. Talbot. *Métallurgie générale. Masson et Cie*, 1969.
- [94] E. Bardaud. Les matériaux viscoélastiques et leurs applications à l'atténuation des vibrations. CETIM informations, 1978.
- [95] Q. Li, V. P. Iu, and K. P. Kou. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, (311) :498_515, 2008.
- [96] H.S. Shen. Post-buckling of fgm plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings. *International Journal of Solids and Structures*, (42) :6101_6121, 2005.
- [97] N. Noda. Thermal stress in functionally graded materials. In Third International Congress on Thermal Stresses, *Thermal Stresses '99, Cracow, Poland*, 13_17 June 1999.
- [98] S. Timoshenko, «On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars,» *Philosophical Magazine*, vol. 41 , n° 146, p. 744–746, 1921.
- [99] E. Reissner, «The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates,» *J. Appl. Mech*, vol. 12 , pp. 69-77, 1945.
- [100] Y. Uflyand, «The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates,» vol. 12, p. 287–300., 1948.
- [101] G. Kircho_. Über das gleichgewicht und die bewegung eine elastischen scheinbe. *J. Angew. Math*, (40) :51_88, 1850.
- [102] A. E. H. Love. *The Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge UnivPress, 4th edition*, 1927.
- [103] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear in _exural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, (18) :1031_1036, 1951.
- [104] D. Gay, V. S. Hoa, and S. W. Tsai. *Composite materials design and applications. CRC Press LLC*, 2003.
- [105] J.N. Reddy. A simple higher-order theory of laminated composite plate. *Journal of Applied Mechanics*, (51) :745_752, 1984.
- [106] M. Touratier. Ancient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, (29) :901_916, 1991.
- [107] E. Carrera. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mech reviews*, 56(3) :287_308, 2003.
- [108] S.G. Lekhnitskii. Strength calculation of composite beams. *Vestnik inzheneri tekhnikov*, (9),1935.

- [109] S. A. Ambartsumian. On a theory of bending of anisotropic plates. *Prikl. Mat. Mekh*, **22(2)** :226_237, 1958.
- [110] J.M. Whitney. The effects of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *J. compos. Mater*, **(3)** :537_547, 1969.
- [111] E. Reissner. On a certain mixed variational theory and a proposed application. *Int. J. Numer. Methods Eng*, **(20)** :1366_1368, 1984.
- [112] D.J. Mead and S. Markus. The forced vibration of three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, **(10)** :163_175, 1969.
- [113] D. K. Rao. Frequency and loss factor of sandwich beams under various boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering Sciences*, **20(5)** :271_282, 1978.
- [114] J.F. He and B. A. Ma. Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, **271(3-5)** :789_813, 1992.
- [115] E.M. Daya and M. Potier-Ferry. A shell element for viscoelastically damped sandwich structures. *Revue Européenne des éléments Finis*, **11(1)** :39_56, 2002.
- [116] E.M. Daya, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. An amplitude equation for the nonlinear vibration of viscoelastically damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, **(271)** :789_813, 2004.
- [117] Reissner E & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous anisotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. **28**, pages 402,408, 1961.
- [118] Timoshenko S.P., S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells. *McGraw-Hill, New York*, 1959.
- [119] Reddy J.N, Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. *CRC Press, Boca Raton*, 1997.
- [120] Reddy J.N, Theory and Analysis of Elastic plates. *Taylor & Francis, Philadelphia*, 1999.
- [121] Whitney J.M. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.**40**, pages 302-304, 1973.
- [122] Naghdi P.M, on the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, **14**: 369-380 1957.
- [123] Reissner E, on transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; **25 (5)**:495-502, 1975.
- [124] Kant T., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; **56 (4)**: 329-344, 2002.
- [125] Karama M., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; **40 (6)**: 1525-1546, 2003.

- [126] Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A, (2010). "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater. Design*; **6 (2)**: 113-121.
- [127] Chabot A, (1997). Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. *PhDthesis, ENPC*, 1997.
- [128] Carrera E., (2000). An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. **50**, pages 183,198, 2000.
- [129] Afaq et al, (2003), K.S. Afaq M. Karama & Mistou S. « Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches ». *Comptes-rendus des 13èmes Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [130] DI SCIUVA M. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. **54**, pages 589(596, 1987).
- [131] Nguyen, Viet.Tung. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées* ,2004.
- [132] Karama M, B. AbouHarb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. **29**, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [133] Icardi U & A.M. Bertetto. An evaluation of the inuence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates. *Comput. Struct.*, vol. **57**, no. 4, pages 555,571, 1995.
- [134] Srinivas S. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. **30**, no. 4, pages 495,507, 1973.
- [135] Tahani M & A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. **24**, pages 647, 658, 2003.
- [136] Ren J.G. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. **26**, pages 225, 239, 1986.
- [137] Kassapoglou C & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. **27**, pages 292,308, 1987.
- [138] Yin W.L. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. **31**, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- [139] Pagano NJ. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. **14**, page 385, 1978.
- [140] Vel S.S, Batra R.C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib* 2004; **272(3-5)**:703-30.

- [141] B. Uymaz, M. Aydogdu, Three-Dimensional Vibration Analyses of Functionally Graded Plates under Various Boundary Conditions, *Journal of REINFORCED PLASTICS AND COMPOSITES*, Vol. **26**, No. 18/2007, 1847
- [142] Li, Q., Iu, V.P. et Kou, K.P., (2008), "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates", *Journal of Sound and Vibration*, 498-515.
- [143] Huang Z.Y, C.F. Lu, W.Q. Chen, Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations, *Compos. Struct.* **85 (95)** (2008) 104
- [144] Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A., (2009), Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct* 2009; **18(8)**:085015.
- [145] Malekzadeh, Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations, Elsevier, *Composite Structures* **89** (2009) 367–373.
- [146] Zenkour AM. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2006; **77(4)**:197–214.
- [147] Carrera E, (2001). Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Revs.* **54** (2001) 301-329.
- [148] Carrera E, (2003). Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch. Comp. Meth. Eng.* **10** (2003) 215-296.
- [149] Carrera E, A. (2005). Ciuffreda. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Compos. Struct.* **69** (2005) 271-293.
- [150] Demasi L. (2009a), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations. *Compos. Struct.* **87** (2009) 1-11.
- [151] Demasi L. (2009 B), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories. *Compos. Struct.* **87** (2009) 183-194.
- [152] Demasi L. (2009 C), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: Zig-zag theories. *Compos. Struct.* **87** (2009) 195-205.
- [153] Demasi L. (2009 D), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results. *Compos. Struct.* **88** (2009) 1-16.
- [154] Demasi L. (2009 E), ∞^6 Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part II: Layerwise theories. *Compos. Struct.* **87** (2009) 12-22.
- [155] Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. (2011a). Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Comp. Part B: Eng* **42** (2011) 123-133.

- [156] Carrera E, Brischetto S, Nali P. (2011b). *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*, Wiley, New York, USA (2011).
- [157] Matsunaga H, Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory. *Compos Struct*; **90 (1)**: 76–86, 2009.
- [158] Talha M, B.N. Singh. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Modell.* 34 (2010) 3991-4011.
- [159] Reddy J.N. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *Int. J. Aerospace Lightweight Structures* **1** (2011) 1-21.
- [160] Jha DK, Kant T, Singh RK. Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nucl Eng Des* 2012; **250**:8–13.
- [161] Neves A.M.A, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Comp. Part B: Eng.* **43** (2012) 711-725.
- [162] Neves A.M.A, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge et al.. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* **94** (2012) 1814-1825.
- [163] Neves A.M.A, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Comp. Part B: Eng.* **44** (2013) 657-674.
- [164] Mantari J.L., C. Guedes Soares. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Compos. Struct.* **94** (2012) 1991-2000.
- [165] Mantari J.L., C. Guedes Soares. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Comp. Part B: Eng.* **45** (2013) 268 – 281.
- [166] Thai H.T, S.E. Kim. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates, *Compos. Struct.* **99** (2013) 172-180.
- [167] Bourada, F., Amara, K. and Tounsi, A. (2016), “Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory”, *Steel Compos. Struct.*, **21(6)**, 1287-1306.
- [168] Bourada, F., Amara, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2018), “A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates”, *Structural Engineering and Mechanics.*, **68(6)**,661-675.
- [169] Ait Sidhoum, I., Boutchicha, D., Benyoucef, S. and Tounsi, A.(2017), “An original HSDT for free vibration analysis of functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures.*, **25(6)**. 735-745.

- [170] Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Geomech. Eng.*, **13(3)**, 385-410.
- [171] Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017b), “An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **25(3)**, 257-270.
- [172] Berghouti, H., Adda Bedia, E.A. Benkhedda, A. and Tounsi, A. (2019), “Vibration analysis of nonlocal porous nanobeams made of functionally graded material”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, **7(5)**. [In press]
- [173] Thai, H.T., Nguyen, T.K. and Vo, T. (2014), “Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first- order shear deformation theory”, *Eur. J. Mech.-A/Solids.*, **45**, 211-225.
- [174] Zenkour, A.M and Alghamdi, N.A. (2010), “Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **17(6)**, 419-432.
- [175] Bakora Ahmed thèse de doctorat . (2015), “Contribution à l’ analyse du post-flambement des plaques FGM épaisses soumises à un chargement thermo-mécanique”, p: 12-14.
- [176] Meksi Rafik thèse de doctorat . (2018), “Investigation sur les différents comportements mécaniques des structures en matériaux composites avances ”, p: 61, 64.