

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DJILLALI LIABES - SIDI BEL ABBES

Faculté Des Sciences Exactes

Département De Matériaux Et Développement Durable

Laboratoire de Modélisation et de Simulation Multi-Echelles

THESE DE DOCTORAT

Option : Physique Energétique et Sciences des Matériaux

Présentée par :

SALAH Fethi

Thème

**Etude Des Propriétés Thermiques Des Matériaux F.G.M A Base De
Céramique – Métal**

Composition de jury :

Mr HERIECH HOUARI	Professeur-UDL	Président
Mr BOUCHAM BELHADJ	Professeur-UDL	Directeur de la thèse
Mr BENZAIER ABDENNOUR	Professeur-UDL	Co-encadreur
Mr YEGHNEM REDA	Professeur-SAIDA	Examineur

Année universitaire : 2019/2020

Dédicaces

Je dédie cette thèse

À ma chère mère ;

À mon père ;

À mes sœurs ;

À mes frères ;

À tous mes enseignants ;

À mes ami(e)s ;

À mes collègues des laboratoires (LMH & LMSME) ;

Et à tous ceux que ma réussite leur tient à cœur.

Remerciements

Merci à Dieu le tout puissant de m'avoir donné le privilège et la chance d'étudier et la volonté d'accomplir ce travail et d'avoir éclairé mon chemin.

Mes sincères et profonds remerciements à mon directeur de thèse Monsieur ***BOUCHAM Belhadj***, pour son aide précieuse, ses conseils et ses orientations qui ont été bénéfiques pour la réalisation de cette thèse et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés.

Je tiens aussi à remercier sincèrement mon co-directeur de thèse Monsieur le Professeur ***BENZAIR Abdennour***, pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordées tout au long de ce travail.

Je tiens aussi à remercier sincèrement mon directeur de laboratoire de Modélisation et de Simulation Multi-Echelles Monsieur le Professeur ***HEIRECHE Houari***, pour tout son aide, ses conseils et sa disponibilité tout au long de ce travail de thèse.

J'exprime également toute ma reconnaissance à l'égard du Monsieur le Professeur ***TOUNSI Abdelouahed***, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, son suivi et ses conseils avisés qui ont facilité l'aboutissement de ce travail. Je salue en lui ses qualités humaines et scientifiques. Il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude et je lui exprime ma plus sincère reconnaissance.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi au membre de jury le Professeur ***YEGNEM Reda*** de l'Université de SAIDA en qualité de rapporteur et qui nous fera l'honneur d'accepter de juger ce modeste travail, d'apporter ses réflexions et ses critiques scientifiques.

Je ne peux oublier de remercier tous les membres du ***laboratoire des matériaux et hydrologie***, merci pour leur gentillesse et leur disponibilité.

Abstract

This work presents a simple and refined theory of shear deformation to analyze the thermal buckling of sandwich plates in graded gradient material (FGM) subjected to a uniform, linear and non-linear temperature variation across the thickness. The theory of refined shear deformation proposed has a new displacement field which includes indefinite integrated terms and contains only four unknowns, which saves computation time based on the Hamilton principle. This work presents a model using a new warping function, this hyperbolic shearing function must satisfy the nullity of the transverse shearing stresses on the upper and lower surfaces of the plate without using shear correction factors. The governance equations are obtained from the principle of minimum total potential energy and solved by a Navier-type method. The effect of the layer thickness, the type of thermal load, the length-thickness ratio, and the power index of the volume fraction are studied. The accuracy of the current model is verified by comparing the numerical and graphical results obtained with those of the literature.

Key words: *FGM materials, thermal buckling, plate sandwich, HSDT.*

Résumé

Ce travail présente une théorie simple et raffinée de la déformation du cisaillement pour analyser le flambement thermique des plaques sandwiches en matériau à gradient évalué (FGM) soumises à une variation uniforme, linéaire et non-linéaire de température à travers l'épaisseur. La théorie de la déformation par cisaillement raffinée proposée a un nouveau champ de déplacement qui comprend des termes intégrés indéterminés et ne contient que quatre inconnus, ce qui permet d'économiser le temps de calcul sur la base du principe d'Hamilton. Ce travail présente un modèle employant une nouvelle fonction de gauchissement, cette fonction hyperbolique de cisaillement doit satisfaire la nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Les équations de gouvernance sont obtenues à partir du principe de l'énergie potentielle totale minimale et résolues par une méthode de type Navier. L'effet de l'épaisseur de la couche, le type de la charge thermique, le rapport longueur-épaisseur, et l'indice de puissance de la fraction volumique sont étudiés. La précision du modèle actuel est vérifiée en comparant les résultats numériques et graphiques obtenus avec ceux de la littérature.

Mots clés : *Matériaux FGM, flambement thermique, plaques sandwiches, HSDT*

ملخص

يقدم هذا العمل نظرية بسيطة ومكررة لتشوه القص لتحليل التواء الحراري لألواح السندوتشات في مواد متدرجة التدرج تخضع لتغير في درجة الحرارة منتظم ، خطي وغير خطي عبر السماكة. تشتمل نظرية تشويه القص المكررة (FGM) المقترحة على حقل إزاحة جديد يتضمن مصطلحات متكاملة غير محددة ولا يحتوي إلا على أربعة مجهولة ، مما يوفر وقت الحساب استناداً إلى مبدأ هاملتون. يقدم هذا العمل نموذجاً باستخدام وظيفة تزييف جديدة ، ويجب أن تفي وظيفة القص الزائدية هذه باطلية إجهادات القص المستعرض على السطوح العلوية والسفلية للوحة دون استخدام عوامل تصحيح القص. يتم الحصول على معادلات الحوكمة من مبدأ الحد الأدنى للطاقة الكلية المحتملة ويتم حلها باستخدام طريقة نافياي. تمت دراسة تأثير سمك الطبقة ونوع الحمل الحراري ونسبة سمك الطول ومؤشر الطاقة لكسر الحجم. يتم التحقق من دقة النموذج الحالي من خلال مقارنة النتائج العددية والرسوم البيانية التي تم الحصول عليها مع نتائج الدراسات السابقة.

الكلمات المفتاحية : مواد متدرجة وظيفيا ، التواء الحراري ، سفائح متعددة الطبقات, HDSH

TABLE DES MATIERES

Dédicaces	
Remerciements	
Résumé	
Abstract	
ملخص	
Table des Matières	
Liste des Figures	
Liste des Tableaux	
Liste des Notations	
Introduction Générale	6
Chapitre I : Généralités sur les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)	
I.1. Introduction	10
I.2. Matériaux composites	11
I.2.1. Définition	12
I.2.2. Les composants élémentaires des matériaux composites.....	12
I.2.2.1. La matrice	12
I.2.2.2. Le renfort.....	13
I.2.3. Architecture des matériaux composites.....	13
I.2.3.1. Monocouches.....	13
I.2.3.2. Stratifiés	14
I.2.3.3. Sandwich	15
I.2.4. Avantages et inconvénient des matériaux composites / limitations.....	16
I.3. Les Matériaux Fonctionnellement Gradués	16
I.3.1. Concept des matériaux fonctionnellement gradués	16
I.3.2. Domaines d'applications des matériaux à fonctionnellement gradués.....	18
I.3.3. Comparaison entre les matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels..	19
I.4. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	21
I.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	22
I.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	23
I.4.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	24
I.5. Avantages et inconvénients des FGM / limitations.....	25
I.5.1. Avantages des matériaux FGM.....	25
I.5.2. L'inconvénient des matériaux FGM.....	25
I.6. Conclusion	25
Chapitre II : Les différentes théories des plaques	
II.1. Introduction	27
II.2. Modèles Analytiques des plaques	27
II.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	27
II.2.2. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)	28
II.2.3. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	29
II.3. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques.....	32
II.4. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés.....	33
II.5. Conclusion.....	36
Chapitre III : Revue bibliographique sur les travaux réalisés sur les matériaux FGM	
III.1. Introduction	38
III.2. Des études rapportées sur des plaques FGM.....	38
III.2.1. Etudes sur les contraintes résiduelles	38

III.2.2. Etudes sur les problèmes thermo-élastiques statiques	39
III.2.3. Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique	40
III.2.4. Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM	41
III.3. Conclusion	42
Chapitre IV : Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM	
IV.1. Introduction.....	45
IV.2. Formulation de la problématique.....	45
IV.2.1. Configuration géométrique	45
IV.2.2. La cinématique.....	47
IV.2.3. Les équations constitutives.....	48
IV.3. Équations de stabilité.....	49
IV.4. Solution analytique du flambement thermique.....	51
IV.5. Modèle de chargement thermique.....	54
IV.5.1. Augmentation uniforme de la température (UTR)	54
IV.5.2. Répartition linéaire de la température à travers l'épaisseur (LTD).....	54
IV.5.3. Répartition non linéaire de la température à travers l'épaisseur (NTD).....	54
IV.6. Conclusion.....	55
Chapitre V : Validation des Résultats	
V.1. Introduction.....	57
V.2. Validations et comparaisons des résultats.....	57
V.2.1. Plaque carrée isotrope.....	57
V.2.2. Flambement thermique des plaques sandwiches FG.....	57
V.3. Etude paramétrique.....	61
V.3.1. Etudes paramétriques d'une plaque sandwich FG simplement appuyée.....	65
V.3.2. Impact des conditions d'appuis sur le Flambement Thermique.....	67
V.3.3. Variation de la température critique pour trois différentes plaques FG.....	68
V.4. Conclusion.....	70
Conclusion générale & Perspectives	71
Références bibliographiques	72

Liste des Figures

Figure I.1	Types de matrice	13
Figure I.2	Types de renfort	13
Figure I.2.1	Pli à Renforcement unidirectionnel	14
Figure I.2.2	Désignation d'un stratifié	15
Figure I.2.3	Convention de signe pour la désignation des stratifiés.	15
Figure I.2.4	Matériaux sandwichs à âmes pleines.	16
Figure I.2.5	Matériaux sandwichs à âmes creuses	16
Figure I.3.1	Variation continue des propriétés	17
Figure I.3.2	Variation discrète des propriétés	17
Figure I.4.1	Variation continue de la microstructure	18
Figure I.4.2	Microstructure d'un FGM gradué de Cuivre à Nickel	18
Figure I.5	Les principaux domaines d'application des FGM	19
Figure I.6	La distribution composante des matériaux	19
Figure I.7.1	Une vue microscopique d'un FGM	20
Figure I.7.2	La microstructure d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique	20
Figure I.8	Géométrie d'une plaque FGM	21
Figure I.9	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	23
Figure I.10	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	24
Figure I.11	Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM	24
Figure II.1	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff	28
Figure II.2	Illustration de la plaque de Reissner - Mindlin	29
Figure II.3	Schéma des déformations dans le cas HSDT des plaques	30
Figure II.4	Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.	32
Figure. II.5	Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.	32
Figure II.6	Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre / époxyde) obtenu par le modèle développé par Yin et al et le modèle de Mori-Tanaka	35
Figure IV.1	La géométrie de la plaque sandwich en FGM	46

Figure V.1.1	Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (b/a) d'une plaque sandwich carrée en FGM de type (1-2-1) sous chargement uniforme (avec $a/h=10$)	61
Figure V.1.2	Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (b/a) d'une plaque sandwich carrée en FGM de type (1-2-1) sous chargement linéaire (avec $a/h=10$)	62
Figure V.1.3	Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (b/a) d'une plaque sandwich carrée en FGM de type (1-2-1) sous chargement non linéaire (avec $a/h=10$ et $\gamma=3$)	62
Figure V.2	Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (a/h) d'une plaque sandwich carrée en FGM de type (1-2-1) sous les trois types de chargement ($\gamma=3$)	63
Figure V.3	Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (p) sous les trois types de chargement et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b)(1-1-1), (c)(2-1-2), (d)(3-1-3) ($a/h=5$ et $\gamma=3$)	65
Figure V.4	Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (a/h) sous les trois types de chargement et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b)(1-1-1), (c)(2-1-2), (d)(3-1-3) ($p=1$ et $a=2b$)	66
Figure V.5	Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (b/a) sous les trois types de chargement et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b)(1-1-1), (c)(2-1-2), (d)(3-1-3) ($p=1$ et $a/h=5$)	69

Liste des Tableaux

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	17
Tableau IV.1	Différents rapports d'épaisseur de couche de plaques sandwiches	46
Tableau V.1	Propriétés matérielles de la plaque sandwich en FGM	57
Tableau V.2	Le paramètre de température critique minimal αT_{cr} d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée à température uniforme	57
Tableau V.3	Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance p , avec ($a/h=5$).	58
Tableau V.4	Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance, avec ($a/h=5$)	59
Tableau V.5	Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation non linéaire de température avec ($\gamma=5$, $a/h=5$)	60

Tableau V.6	L'effet des conditions d'appuis sur la charge critique du flambement thermique pour des plaques sandwiches de type (1-1-1) avec $a/h=5$ et pour différentes valeurs de l'indice (p).	75
Tableau V.7	L'effet des conditions d'appuis sur la charge critique du flambement thermique pour des plaques sandwiches de type (1-1-1) avec $p=10$ et pour différentes valeurs de l'épaisseur (a/h)	76
Tableau V.8	Les propriétés matérielles des plaques sandwiches en fgm	76
Tableau V.9	Variation de la température critique pour trois différentes plaques encastées FGM1, FGM2 et FGM3 de configuration (2-1-2) avec $p=5$ et pour différentes valeurs de l'épaisseur (a/h).	77

Liste des Notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young
E_c	Module de Young de la céramique.
E_m	Module de Young du métal.
ν	Coefficient de Poisson
ρ	La masse volumique.
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν_c	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau (l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro).
p	Les propriétés matérielles de la plaque.
P_c et P_m	Sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal respectivement.
L	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y et z

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z
$F(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
σ_x, σ_y	Contraintes normales
ζ_x, ζ_y	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xy}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$F'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Travail virtuel intérieur
δV	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
Q_x, Q_y	Effort de cisaillement
I et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de la matrice de rigidité de membrane
B_{ij}	Termes de la matrice de rigidité de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A^s, B^s, D^s, H^s	Termes de la matrice de rigidité
$q(x)$	Chargement thermique
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

*Introduction
générale*

Introduction générale

Les matériaux à gradient de propriétés mécaniques, (dite en anglais: Functionally Graded Materials) s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des cahiers des charges multicritères, permettant d'allier de bonnes propriétés thermiques et mécaniques. Ces matériaux à gestion de flux thermiques doivent être capables d'assurer et de gérer le transfert de chaleur de manière à ce que les éléments fonctionnels puissent être maintenus à leur température nominale de fonctionnement.

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituants les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour appuyer de telles sollicitations thermomécaniques [1].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [2].

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- le système SIC/C par C.V.D,
- le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,

Introduction générale

- le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [3].

Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie, tel que: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, génie civil, couches minces optiques et les secteurs biomédicales. Cependant, les FGM fabriqués du métal et de la céramique ont reçu une telle popularité que matériaux à haute résistance thermique à faibles contraintes thermiques que les composants structurels exposés à «haute température environnementales» tels que les structures d'avions sont fabriqués à partir des FGM. La céramique constituant le matériau fournit une résistance aux températures élevées en raison de sa faible conductivité thermique.

D'autre part, le composant métallique ductile empêche la fracture causée par les contraintes en raison du haut gradient de température sur une très courte période de temps. De plus, un mélange de métal et de céramique avec la fraction volumique variant en continu peut être facilement fabriqué [4]. Cela élimine les problèmes d'interface des matériaux composites stratifiés et, par conséquent, les variations de contrainte deviennent lisses (Beldjelili et al. 2016, Bellifa et al. 2017a, Ebrahimi et al. 2017, Benadouda et al. 2017, Avcar and Alwan 2017, Avcar and Mohammed 2018, Akbaş 2018a, Bourada et al. 2018, Faleh et al. 2018, Eltaher et al. 2018, Fourn et al. 2018, Younsi et al. 2018, Karami et al. 2019a, b, Dash et al. 2018, Medani et al. 2019, Boussoula et al. 2019, Addou et al. 2019, Zaoui et al. 2019, Zarga et al. 2019, Tlidji et al. 2019, Khiloun et al. 2019, Avcar 2019) [5-27].

Avec l'avancement des investigations de la réponse de la stabilité des plaques, un grand nombre des modèles de plaque a été proposé. Le plus simple est la théorie classique des plaques (CPT) qui ignore les effets de cisaillement transverse. Ce modèle est non applicable pour les plaques épaisses et orthotropes avec un degré important du rapport des modules. Afin de surmonter ces limitations, la théorie de déformation de cisaillement qui considère l'effet du cisaillement transverse a été introduite par plusieurs chercheurs. En effet, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été proposées comme une amélioration de la CPT. La FSDT développée par Reissner (1945) [28] et Mindlin (1951) [29] considère les effets du cisaillement transverse par l'intermédiaire d'une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur. Compte tenu de cette supériorité, les structures de FGM ont récemment attiré une grande attention dans diverses applications d'ingénierie. On peut trouver plusieurs travaux sur le flambement des poutres et des plaques dans la littérature (Zenkour and Mashat 2010, Ansari et al 2015, Eslami and Samsam 2006, Abdelhak et al 2016, Thinh et al 2016, Saha and Maiti 2012, Mozafari and Ayob 2012, Nguyen 2014, Abdelhak et al 2015, Bouiadjra et al 2012, Elmoossouess et al 2017, Cheng and Chen 2015, Ebrahimi and Barati 2016, Fahsi et al 2017, Tounsi et al 2013) [30-44]. Zhao et d'autres ont étudié la réponse du flambement thermique et mécanique d'une plaque en céramiques-métal FG en utilisant la théorie de plaque de déformation de cisaillement du premier ordre [45], Ma et Lee ont examiné le comportement de post-flambement thermique des poutres FG sous température uniforme élevée en utilisant

Introduction générale

les deux propriétés matérielles (TD) et (TID) en fonction de la température [46-47]. Kettaf et d'autres ont étudié le flambement thermique des plaques sandwiches FG en utilisant un nouveau modèle de déplacement de cisaillement hyperbolique [48]. Ghannadpour et al ont examiné aussi le flambement thermique des plaques en FGM en utilisant la théorie classique (CPT) [49]. Mohammadi et al ont utilisé la méthode de Levy pour étudier le flambement des plaques en FGM avec deux bords opposés simplement appuyées et les deux autres sous conditions aux limites arbitraire pour résoudre les équations gouvernantes dérivées par la théorie classique [50]. Récemment Thai et Choi ont utilisé une théorie simple et raffinée de la déformation du cisaillement pour analyser le flambement des plaques fgm [51].

Le but de ce travail est de développer une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT) pour étudier le comportement thermique en flambement des plaques sandwiches constituées d'une combinaison de métal et de céramique soumises à une variation uniforme, linéaire et non-linéaire de température à travers l'épaisseur. Ce modèle employant un nouveau champ de déplacement qui inclut des termes intégraux indéterminés. La théorie actuelle ne contient que quatre variables et quatre équations gouvernantes, ce qui facilite l'analyse structurale, mais elle satisfait les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque et qui ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. Les équations de gouvernance sont obtenues à partir du principe de l'énergie potentielle totale minimale. Des solutions analytiques pour la réponse thermique du flambement des plaques simplement appuyée sont déterminées. Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à donner une définition des matériaux à gradient de propriétés (FGM), l'histoire de leur développement, applications de ces structures et une comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.

Le deuxième chapitre se focalise sur les différentes théories des plaques, ainsi que les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives.

Le troisième chapitre rassemble une étude bibliographique sur les différents travaux réalisés sur les matériaux FGM.

Dans le quatrième chapitre, nous avons développé un modèle analytique du comportement de flambement thermique de la plaque FGM en assurant que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction volumique des matériaux constitutifs basés sur la fonction de loi de puissance.

Le dernier chapitre est consacré pour les résultats des études comparatives réalisées et les commentaires sur les résultats. A la fin de ce travail, nous avons terminé par une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux qui permet de revenir sur les résultats importants de ce travail, et qui envisage des perspectives pour les futurs travaux.

CHAPITRE I
GENERALITES SUR
LES F.G.M

Généralités sur les F.G.M.

I.1. Introduction

Les propriétés du matériau peuvent être modifiées en fonction de la modification des paramètres externes de l'environnement. Pour cela on a besoin d'un matériau qui a des propriétés structurelles ou fonctionnelles présentant une adaptabilité à ce dernier. Pour des applications structurales à haute température, des matériaux avancés sont nécessaires pour avoir la force à cette température, à la résistance au fluage, à la dureté proportionnée et à la résistance du choc thermique. Tandis que la céramique possède la faible densité, la bonne force à un environnement agressif à haute température et la résistance au fluage, mais leur ténacité à la rupture et la résistance aux chocs thermiques sont pauvres, ce que limite leur utilisation dans les applications exigeantes. D'autre part, les matériaux métalliques, possèdent de haute ténacité et une excellente résistance au choc thermique tandis qu'ils se caractérisent par la faiblesse de leurs propriétés à haute température qui les rendent généralement peu attrayants.

Pour combiner les avantages de ces deux matériaux (1), (2) et pour satisfaire les besoins en matériaux dans beaucoup d'applications, on peut combiner la céramique avec le métal. Toutes fois, les contraintes thermiques résiduelles résultantes du refroidissement après un traitement à haute température et les problèmes dus à la mauvaise compatibilité chimique sont des obstacles à l'usage largement répandu en associant de la céramique au métal. Le problème commun a été la grande différence dans les caractéristiques de la dilatation thermique de la céramique et des métaux qui sont d'un intérêt pour les applications structurales [52]. L'adhésion de nombreuses combinaisons céramique-métal provoque des contraintes qui dépassent la résistance à la rupture de la céramique surtout dans les régions proches au surface ce qui conduit à une fissuration de la céramique ou les joints ayant une faible force.

Les matériaux à gradient de propriété (FGM) offrent la solution au problème de contraintes thermiques car ce système est composé d'un changement progressif dans les fractions volumiques des constituantes d'un endroit à l'autre. Pour des applications telle que système de protection thermique, les FGM sont en cours d'élaboration afin de réduire au minimum les contraintes thermiques et le choc thermique qui mènent habituellement à la rupture de la céramique.

La technologie moderne essaie de concevoir des matériaux de construction avec une bonne rigidité, une haute résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Il est donc du ressort de l'ingénieur de concevoir des structures tout en plaçant le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition dans l'espace).

Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique). Les matériaux composites sont constitués d'un ou plusieurs matériaux combinés dans des états solides avec des propriétés physiques et chimiques distinctes. Ces matériaux offrent une excellente combinaison de propriétés encore meilleure que peut proposer les matériaux premiers individuellement et ils sont également plus légers. On appelle maintenant de façon courante, matériaux composites, des arrangements de renforts (fibres et/ou particules) noyés dans une matrice (résines), dont la

Généralités sur les F.G.M.

résistance mécanique est beaucoup plus faible, que celle des renforts. La matrice assure la cohésion du matériau et l'orientation et la tenue des fibres. Elle permet aussi de transmettre à ces fibres, qui assurent l'ossature du matériau, les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts, sous forme de fibres, contribuent à l'amélioration de la résistance mécanique et de la rigidité de la pièce obtenue, dans la quelle ils sont incorporés.

Le but de ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériaux pour réaliser des pièces ou des produits directement à la forme désirée, avec des propriétés bien précises (résistance mécanique, densité); donc la logique qui nous induit à penser composite est expliquée par l'exemple suivant: Les métaux sont en général tenaces (ils résistent à la propagation de fissures) et ductiles (ils présentent des déformations importantes avant de se rompre), mais de masse volumique élevée. Les matières plastiques sont légères mais présentent de faibles propriétés mécaniques. Les céramiques sont rigides et résistantes, mais fragiles. Donc il est difficile de concevoir des structures tout en employant le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition dans l'espace).

I.2. Les matériaux composites

I.2.1. Définition

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

Les matériaux composites à renfort fibre longue continue sont utilisés dans l'industrie nautique, automobile, aéronautique et spatiale. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

I.2.2. Les composants élémentaires des matériaux composites

Nous présentons les différents types de matrices et renforts classiquement employés dans l'industrie. Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont :

I.2.2.1. La matrice

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés.

Généralités sur les F.G.M.

Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices est la suivante :

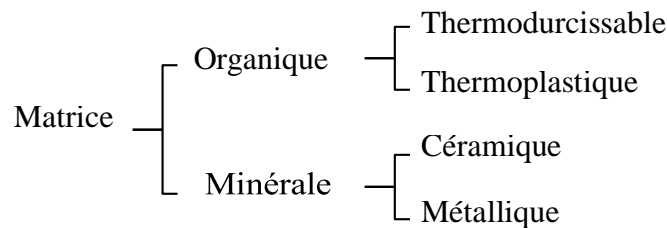


Figure I.1 : Types de matrice [53]

I.2.2.2. Le renfort

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes: linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure 1.2.

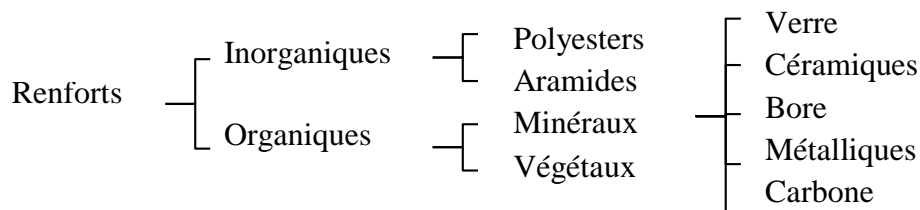


Figure I.2 : Types de renfort [53]

1.2.3. Architecture des matériaux composites

Les propriétés mécaniques des matériaux composites varient considérablement. Ces propriétés dépendent des fibres contenues dans le composite (type, quantité et direction), de la matrice utilisée, et du rapport volume-fibre, c'est à dire le ratio du volume des fibres par rapport au volume total du composite. Elles sont aussi affectées par le volume ou la dimension du composite lui-même. [53]

1.2.3.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort: à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

Généralités sur les F.G.M.

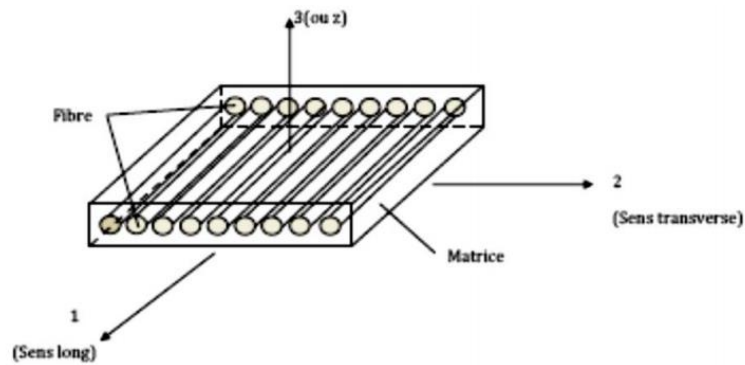


Figure I.2.1. Pli à renforcement unidirectionnel (monocouche). [40]

I.2.3.2. Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure I.2.3).

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. **Equilibré** : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. **Symétrique** : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. **Antisymétrique** : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. **Croisé** : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
5. **Hybride** : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

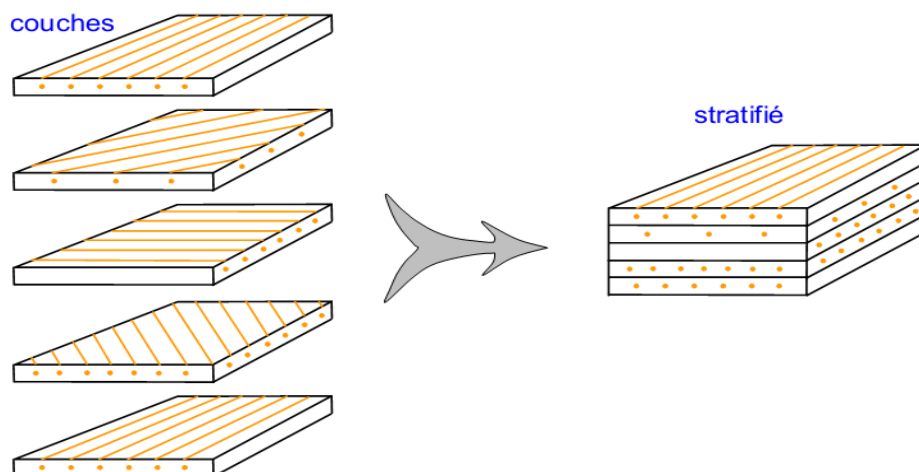


Figure I.2.2. Désignation d'un stratifié. [52]

Généralités sur les F.G.M.

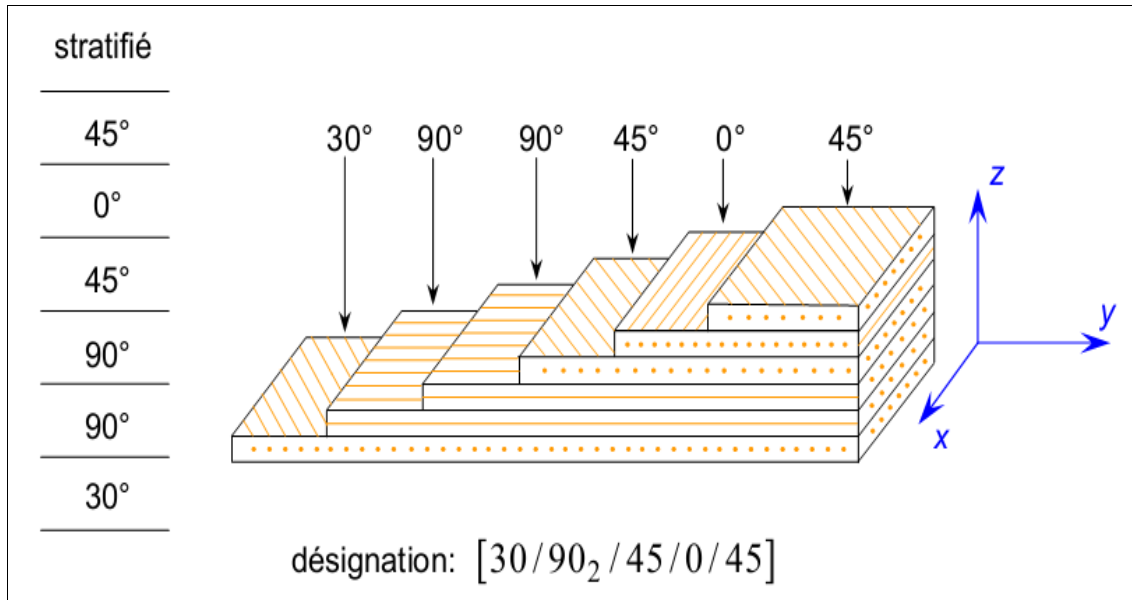


Figure I.2.3. Convention de signe pour la désignation des stratifiés. [52]

I.2.3.3. Sandwich

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme plus épaisse et de faible densité (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux feuilles, appelées peaux, (de faible épaisseur, possédant de bonnes caractéristiques en traction). (Figure I.2.4 et 5). L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité. Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.). Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu. [52]

Généralités sur les F.G.M.

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

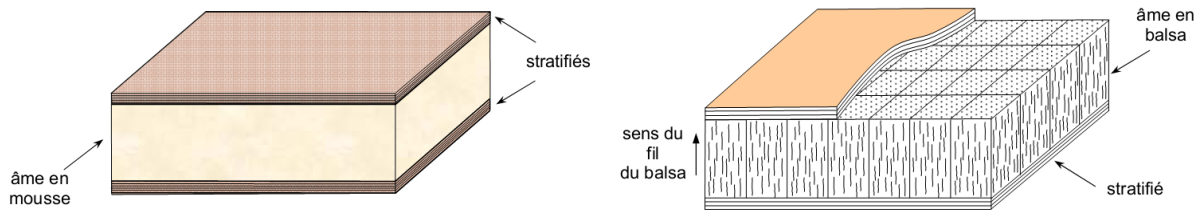


Figure I.2.4. Matériaux sandwichs à âmes pleines. [52]

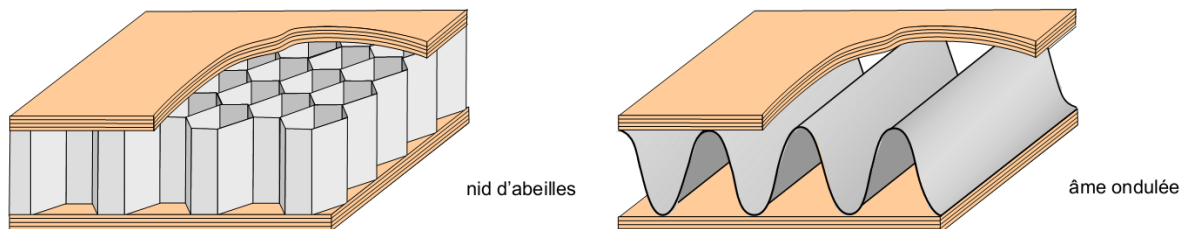


Figure I.2.5. Matériaux sandwichs à âmes creuses. [52]

I.2.4. Avantages et inconvénient des matériaux composites / limitations

L'usage des matériaux composites augmente d'un jour à l'autre, car ils possèdent beaucoup d'avantages :

- Les principaux avantages des matériaux composites sont leurs hautes résistances et une rigidité combinée à une faible densité, par rapport à des matériaux en vrac, ce qui permet une réduction de poids dans la pièce finie (la légèreté).
- Possibilité de réaliser des structures de formes complexes, et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques).
- Ils sont peu sensibles à l'humidité, la fatigue, la chaleur, la corrosion...etc.

Toutefois, ces matériaux présentent des inconvénients, tels que :

- Une petite faille peut engendrer de grosses déformations et la détection de ces problèmes est difficile, ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.
- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.
- Vieillesse sous l'action de l'eau et de la température.

I.3. Les Matériaux Fonctionnellement Gradués

I.3.1. Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure I.3.1) ou discrète (figure I.3.2) à travers l'épaisseur [54]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces

Généralités sur les F.G.M.

(provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.

La variation continue des propriétés (figures I.3.1 et I.3.2) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.



Figure I.3.1. Variation continue des propriétés. [54]



Figure I.3.2. Variation discrète des propriétés. [54]

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu [55-56].

Tableau I.1. Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

La face à haute température	Céramique	Bonne résistance thermique Bonne résistance à l'oxydation Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique / métal	Élimination des problèmes de l'interface Relaxer les contraintes thermiques
La face à basse température	Métal	Bonne résistance mécanique Conductivité thermique élevée Très bonne ténacité

Généralités sur les F.G.M.



Figure I.4.1. Variation continue de la microstructure [57]

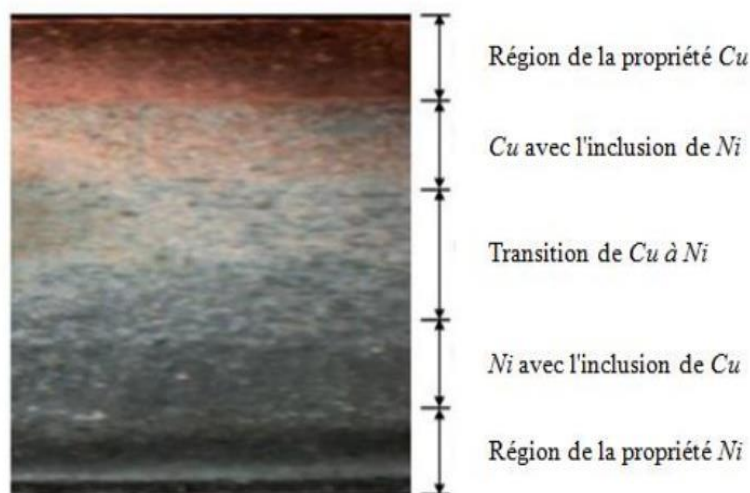


Figure I.4.2. Microstructure d'un FGM gradué de Cuivre à Nickel [57]

I.3.2. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.5. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 1980 et 1990 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour

Généralités sur les F.G.M.

les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatiales hypersoniques) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

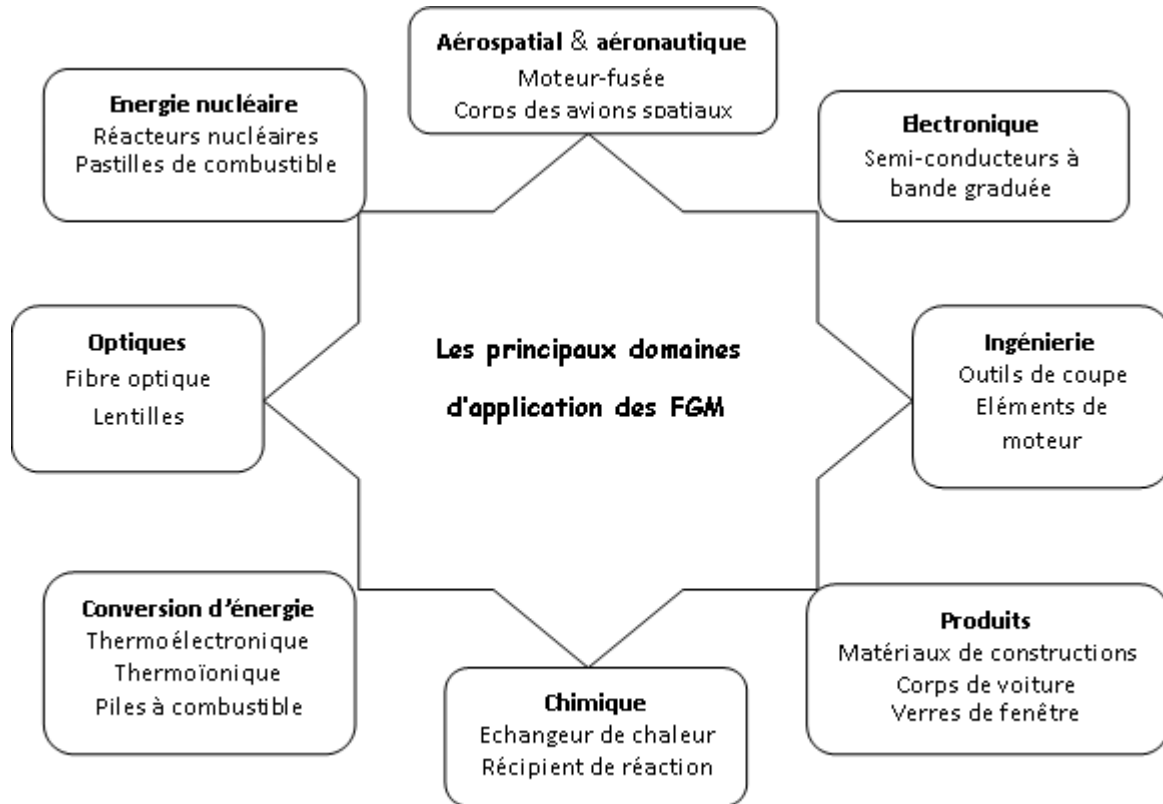
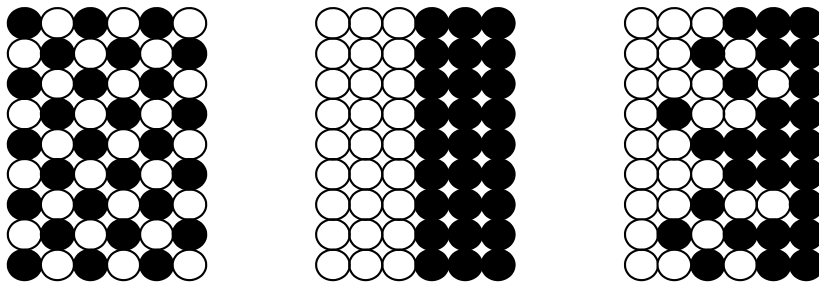


Figure I.5. Les principaux domaines d'application des FGM. [40]

I.3.3. Comparaison entre les matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau fonctionnellement gradué (c)

Figure I.6. La distribution composante des matériaux [58].

Généralités sur les F.G.M.

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et qui permettent d'alléger ainsi les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés.

La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte. La variation progressive dans un matériau est très efficace elle est adaptée pour répondre aux besoins de la structure.

Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques, voir figure, I.7.1 et I.7.2

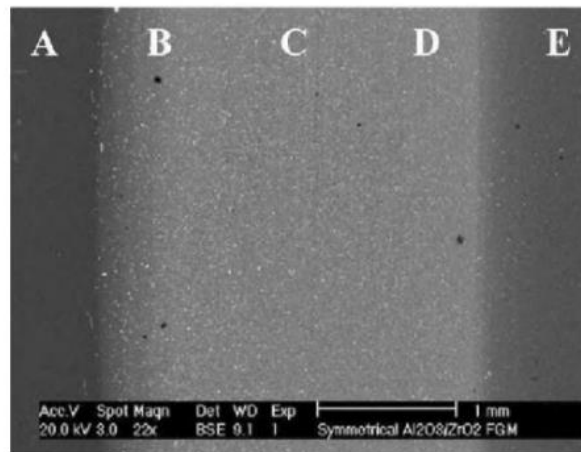


Figure I.7.1. Une vue microscopique d'un FGM. [57]

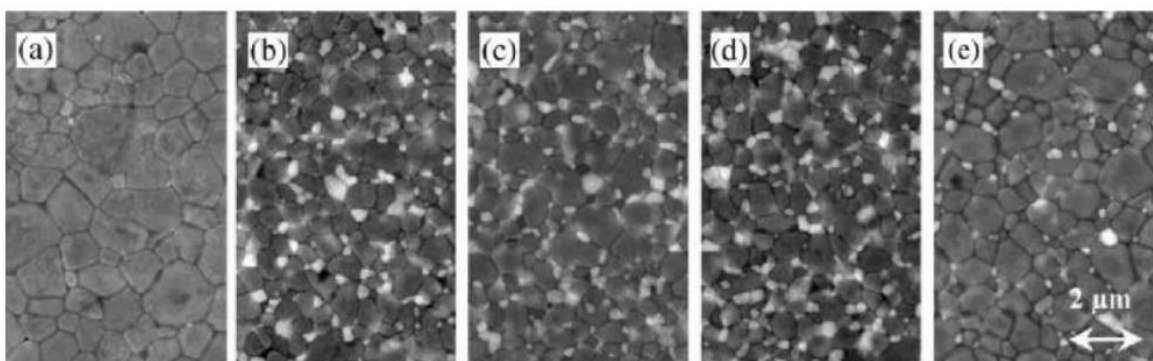


Figure I.7.2. La microstructure d'un FGM Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique [57]

Généralités sur les F.G.M.

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étape de la structure graduée à partir des matériaux précurseurs ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM sont :

- coulage séquentiel en barbotine (slip casting),
- coulage en bande (tape casting),
- dépôt par électrophorèse,
- compaction sèche des poudres,
- projection plasma,
- frittage en infiltration,
- implantation ionique

I.4. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [59]

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

Un FGM peut être défini par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

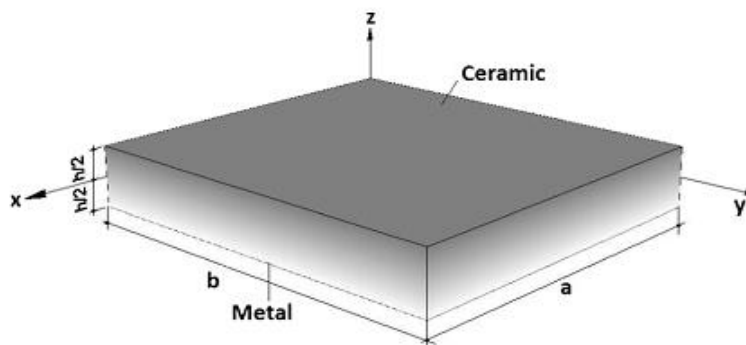


Figure I.8. Géométrie d'une plaque FGM. [37]

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit :

$$E=E(Z), \nu=\nu(z) \quad (\text{I.2})$$

Généralités sur les F.G.M.

Jin et Batra (1996) indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young [60]. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

La distribution de matériau à travers une plaque a été souvent décrite en adoptant convenablement une fonction de loi de puissance V_1^f pour définir la fraction volumique de la matière constitutive 1, à n'importe quelles coordonnées à travers l'épaisseur de la plaque :

$$V_1^f(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (I.3)$$

V_1^f est la fraction volumique du constituant 1. Z est la hauteur mesurée à partir de la surface médiane de la plaque, h est l'épaisseur totale de la plaque et n est exposant de valeur arbitraire supérieure ou égale à zéro. La fraction volumique du constituant 2 dans n'importe quel point z est donnée par la relation :

$$V_2^f(z) = 1 - V_1^f(z) \quad (I.4)$$

Les distributions particulières des FGM à l'aide de la relation de loi de puissance comprennent (1) $n = 0$, une plaque entièrement composée de matériau 1, (2) $n = \infty$, une plaque entièrement composée de matériaux 2. Et (3) $n = 1$, une gradation linéaire de constituant 1 au constituant 2. La répartition de la loi de puissance des constituants est simplement un exemple d'une formule qui pourrait être utilisé pour décrire la gradation à travers une épaisseur des plaques ou des coques. L'exposant n dans ce cas, contrôle la forme de la transition entre le constituant 2 sur la surface inférieure en constituant 1 sur la surface supérieure. Pratiquement toute fonction mathématique pourrait être conçue pour servir le même but que la fonction de loi de puissance ici. Le FGM peut être personnalisé pour une application en spécifiant la forme de la gradation pour répondre aux exigences de conception.

I.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h}\right)^k \quad (I.5)$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(Z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges. [61]

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.6)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -$

Généralités sur les F.G.M.

$h/2$) et de la surface supérieure ($z=+h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.9. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

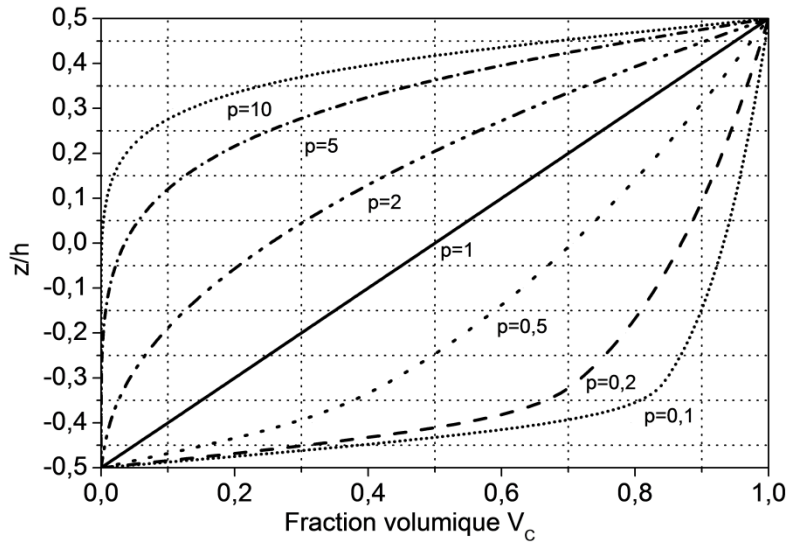


Figure I.9. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM. [61]

I.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chung et chi (2003) ont défini la fraction volumique de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces [62]. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.8})$$

En employant la règle de mélange, les propriétés du matériau P comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , le coefficient d'expansion thermique α et d'humidité θ du S-FGM peuvent être calculées par :

$$P(z) = P_1(z)V_1 + [1 - V_1(z)]P_2 \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

$$P(z) = P_2(z)V_1 + [1 - V_2(z)]P_2 \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.10})$$

Où P_1 et P_2 désignent les propriétés de la partie supérieure et inférieure de la plaque, respectivement, et k est l'exposant de la fraction volumique. Le coefficient de Poisson ν est

Généralités sur les F.G.M.

considéré comme constant.

La figure (I.10) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I.7) et (I.8) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

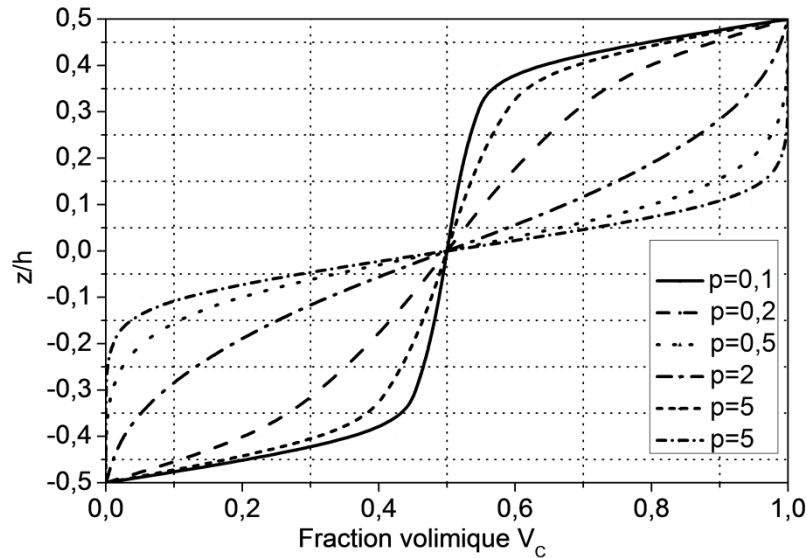


Figure I.10. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM. [62]

I.4.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [63].

Avec :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.11})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.12})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure (I.11).

Généralités sur les F.G.M.

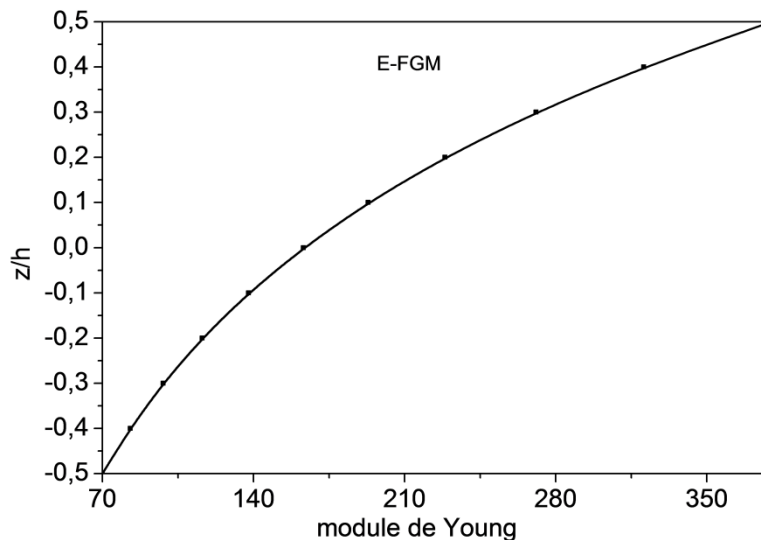


Figure I.11. Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM. [63]

I.5. Avantages et inconvénients des FGM / limitations

I.5.1. Avantages des matériaux FGM :

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte dans les FGM, tels que:

- ✓ Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences des coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- ✓ Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- ✓ Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- ✓ Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- ✓ Augmentation de la ténacité à la rupture.
- ✓

I.5.2. L'inconvénient des matériaux FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2) [64].

Généralités sur les F.G.M.

I.6. Conclusion

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux composites formés de deux ou plusieurs phases constitutives avec une composition variable et continue dans l'espace. Ils possèdent un certain nombre d'avantages qui les rendent intéressants dans des applications potentielles, une réduction importante des contraintes dans le plan et à travers l'épaisseur, une meilleure répartition des contraintes résiduelles, des propriétés thermiques améliorées, une grande ténacité, et une réduction du facteur d'intensité de contrainte.

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application.

Chapitre II
Les différentes théories
des plaques

Les différentes théories des plaques

II.1. Introduction

Les plaques rectangulaires font partie des éléments structuraux les plus couramment utilisés. Différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle de l'analyse. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

Dans le but de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est important de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. La théorie classique des plaques ou théorie de Love-Kirchhoff (CPT) qui néglige l'effet de cisaillement transverse est valable pour l'étude des plaques minces. Cependant, la CPT sous-estime les flèches et surestime les fréquences pour les plaques modérément épaisses. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été développées pour surmonter les insuffisances du CPT. Les théories de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) proposées par REISSNER et MINDLIN ont été intensivement utilisées dans l'analyse de la flexion des plaques et des coques. Mais l'application de la théorie du premier ordre (FSDT) sur les plaques composites et FGM présente une difficulté pour évaluer exactement le facteur de correction présentant l'imperfection de cette théorie. Pour franchir les limites de la CPT et de la FSDT, de nombreuses théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été proposées pour l'analyse des plaques. Ces théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante.

II.2. Modèles analytiques des plaques

Une plaque est définie comme étant un solide délimité par deux plans parallèles appelés faces et dont l'épaisseur h est petite par rapport aux deux autres dimensions. Les plaques sont généralement employées pour modéliser des structures minces, car seule une dimension est faible par rapport aux deux autres. Par contre, si la structure présente une courbure géométrique, ce sont les éléments de coque qui sont privilégiés plutôt que les éléments de plaque qui sont plans.

Pour étudier le comportement de la plaque, nous définissons son plan moyen auquel nous associons un repère orthonormé (O, x, y, z) tangent à ce plan. Le plan moyen est ainsi situé dans le plan $(0, x, y)$ à équidistance entre les deux faces. L'origine du repère étant située sur le plan moyen avec z la direction de l'épaisseur, la face inférieure est ainsi positionnée en z

II.2.1. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à

Les différentes théories des plaques

l'éclatement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, [65].

- ✓ Les sections planes avant déformation, restent planes après déformation et perpendiculaire au plan moyen après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.
- ✓ Les normales à l'axe neutre (plans médiaux) ne change pas de longueur après déformation.

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1c})$$

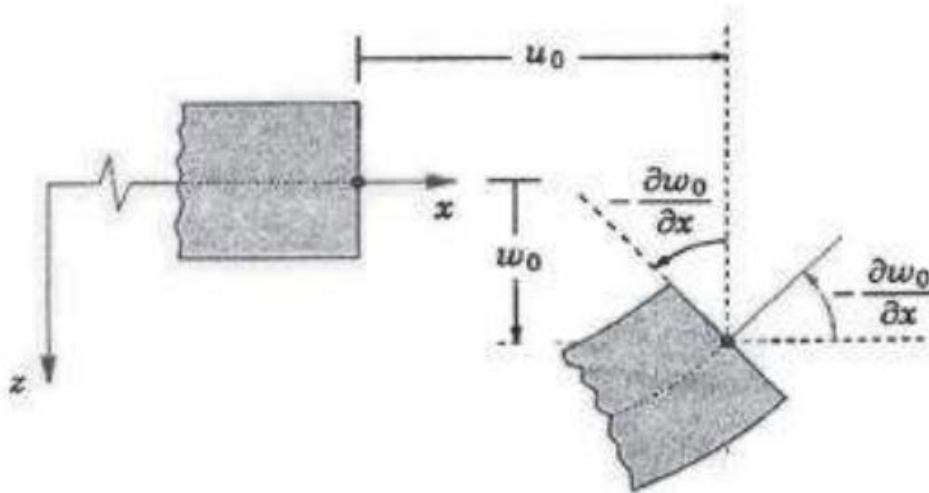


Figure II.1. Illustration de la plaque de Love Kirchhoff. [66-67]

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses. Ce modèle de plaque peut être référé à Timoshenko et Woinowsky-Krieger [66] et Reddy. J [67].

Les différentes théories des plaques

II.2.2. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouve dans les références [28-29].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + Z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.2a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + Z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.2c})$$

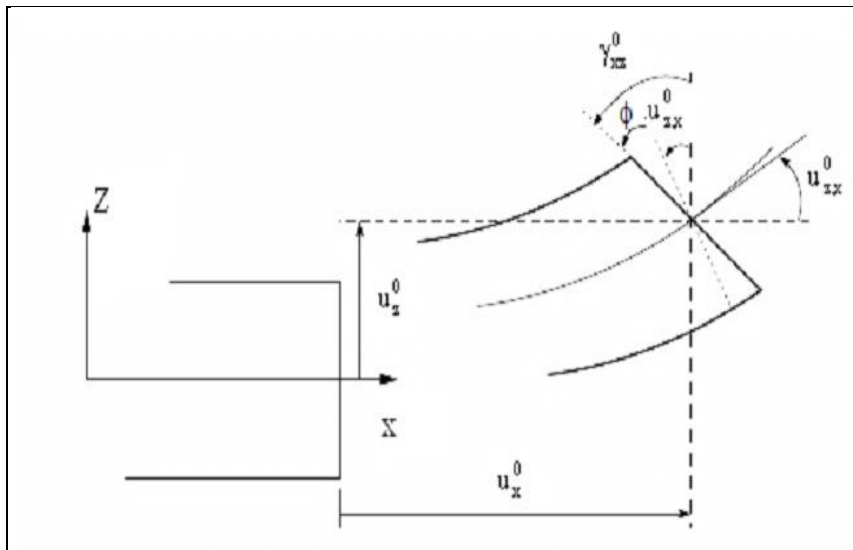


Figure II.2. Modèle de Reissner – Mindlin

Avec : $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$ sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement. $\theta(x, y)$ est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la plaque.

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers

Les différentes théories des plaques

l'épaisseur. Ces modèles n'exigent pas de facteurs de correction. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée. [68-72].

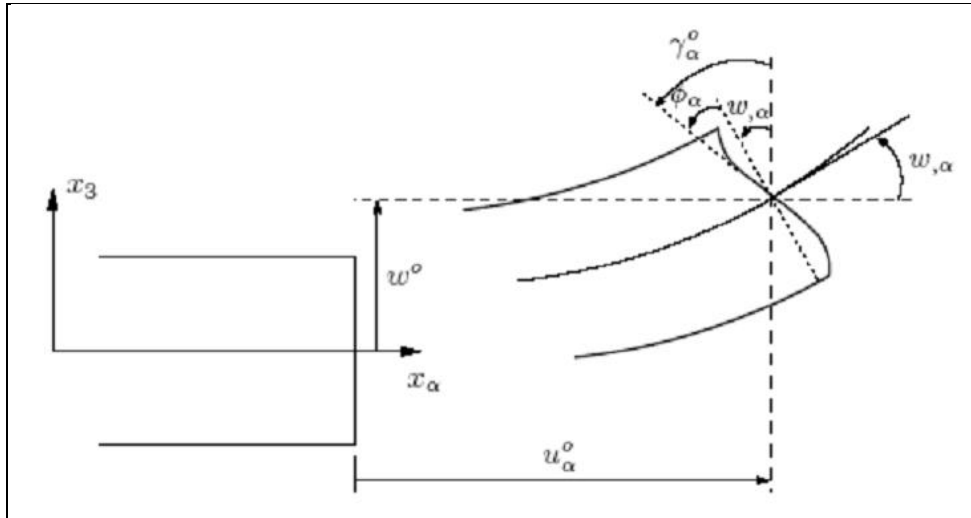


Figure II.3. Cinématique de la théorie d'Ordre Elevé. [72]

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi(x, y) \quad (\text{II.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi(x, y) \quad (\text{II.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, z) \quad (\text{II.3c})$$

$f(z)$ est une fonction de cisaillement transversale caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenue en prenant $f(z)=0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$. Le champ de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy [67] et [73] est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transversale par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversale est parabolique à travers l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Touratier (1991) [74] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction

Les différentes théories des plaques

trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right), \text{ et } \phi_z = 0 \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al est obtenue en prenant [75].

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan (1969) [76], avec : $f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$ (II.7)

- L'approche de Reissner (1945) [28], avec : $f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$ (II.8)

- L'approche de Levinson, (1981) [77] et Reddy, [71] Avec : $f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$ (II.9)

- L'approche de Aydogdu (2005), [78] avec ; $f(z) = z \alpha \frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0 ;$ (II.10)

- L'approche d'El Meiche et al. (2011), [79] avec ; $f(z) = \frac{\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh(\pi/2) - 1}$ (II.11)

- L'approche de Ait Atmane [80] avec; $f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh(\pi/2) - 1} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\cosh(\pi/2) - 1}$ (II.12)

Les différentes théories des plaques

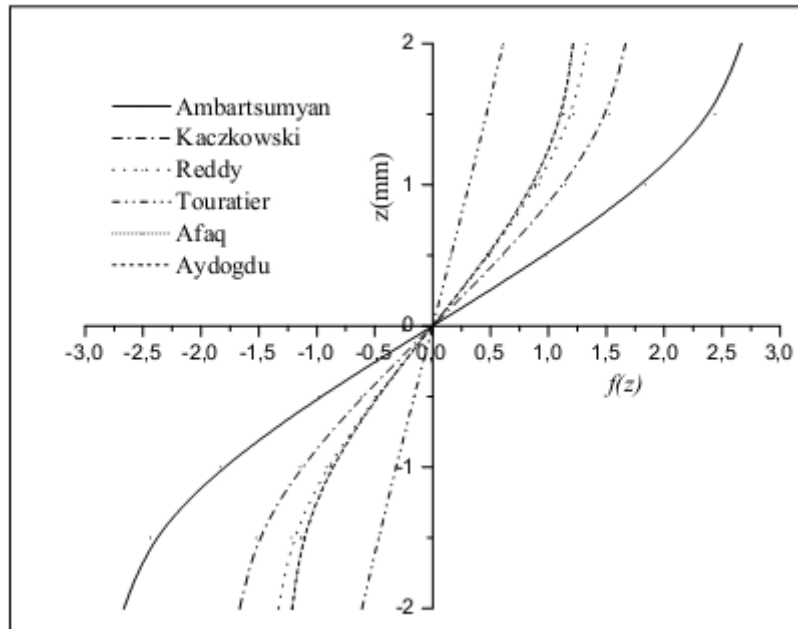


Figure II.4. Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur. [12]

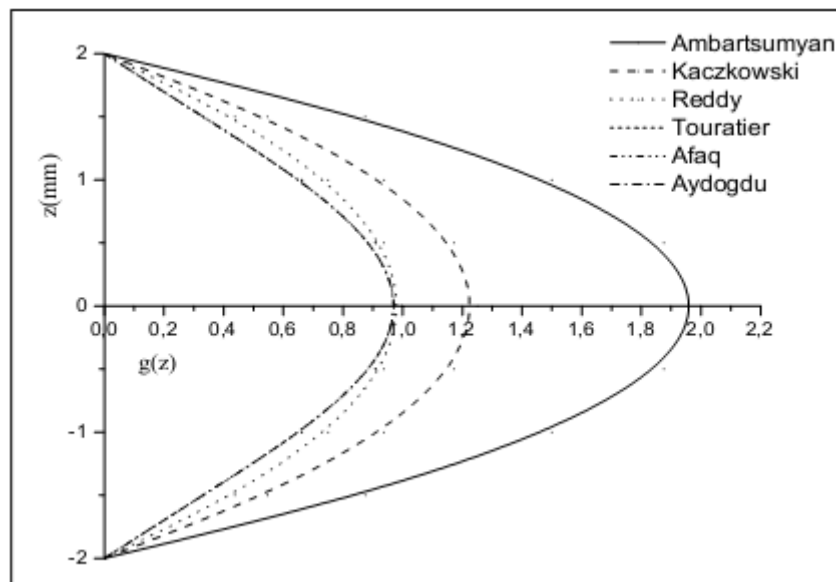


Figure. II.5. Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur. [12]

II.3. Nouvelle théorie raffinée des plaques (RPT):

Shimpi. R (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (Refined Plate Theory) [81]. Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq

Les différentes théories des plaques

dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteurs de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane *et al.* [80] ont adapté cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Thai et Kim [82-83] et Hadji *et al.* (2011) [84] ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Les hypothèses de la RPT sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, ces déplacements impliqués sont infinitésimaux.
- Le déplacement transversal w comprend deux composantes: w_b due à la flexion et w_s due au cisaillement transverse. Ces composantes sont des fonctions des coordonnées x et y seulement.
- La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes σ_x et σ_y .
- Les déplacements u suivant la direction x et v suivant la direction y sont constitués de trois composantes: d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{II.13})$$

- Les composants de flexion u_b et v_b sont considérées comme semblables aux déplacements donnés par la théorie des plaques classiques. Par conséquent, l'expression de u_b et v_b peut être donnée comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.14a})$$

$$v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II.14b})$$

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.15a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II.15b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II.15c})$$

II.4. Homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés

Généralement, il existe deux approches d'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés. Le choix de l'approche devrait être basé sur le gradient de la variation par rapport à la taille typique du volume élémentaire représentative « VER » (élément qui représente le volume). Dans le cas où les variations des propriétés matérielles liées à la gradation sont représentées par des fonctions qui changent lentement selon les coordonnées de l'espace, les

Les différentes théories des plaques

méthodes standard d'homogénéisation peuvent être appliquées. En conséquence, le matériau est supposé localement homogène à l'échelle du (VER), mais il est globalement hétérogène sur l'échelle macroscopique de la structure. Toutefois, si les propriétés du matériau varient rapidement dans l'espace, il est impossible de négliger son hétérogénéité. Dans ce cas, la gradation est reflétée à la fois à l'échelle microscopique ainsi qu'à l'échelle macroscopique de la structure. L'approche fondée sur l'hypothèse que le matériau reste homogène à la l'échelle microscopique et l'utilisation de méthodes d'homogénéisation existantes repose sur leur exactitude. La principale différence dans les résultats fournis par de diverses méthodes d'homogénéisation est liée au degré de ces méthodes qui tiennent compte des interactions entre les inclusions adjacentes. L'approche la plus simple, la loi de mélange, néglige totalement cet effet, tandis que des techniques plus avancées, comme le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, comprennent l'interaction par le biais de divers mécanismes. Parmi les comparaisons des techniques standards de la micromécanique, Zuiker [85] a utilisé le modèle de Mori-Tanaka, le modèle cohérent, le modèle de Tamura, et une technique de logique floue, il a recommandé le modèle cohérent comme fiable pour les évaluations de premier ordre sur toute la gamme des variations de la fraction volumique. Une comparaison entre le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent et la simulation par la méthode des éléments finis des FGM a été également présentée dans les références (Reuter) [86]. Le modèle de Mori-Tanaka a donné une prévision précise des propriétés avec une matrice continue « bien définie » et des inclusions discontinues, tandis que le modèle cohérent était meilleur dans des microstructures squelettiques caractérisées par une zone large de transition entre les régions avec la prédominance d'une des phases constitutives. Basé sur leur analyse, les auteurs ont conclu que les méthodes développées pour les matériaux à particules homogènes peuvent donner des résultats satisfaisants dans une structure en FGM soumise aux charges globales (uniforme et non-uniforme). Récemment, Cho et al [87] ont comparé la moyenne des trois techniques utilisées pour l'évaluation des propriétés matérielles des FGM, à savoir ; la loi des mélanges, la loi des mélanges modifiée (l'approche de Tamura), et la méthode de Wakashima-Tsukamoto aux résultats de la méthode des éléments finis. Bien que l'article de Pal [88] ne se rapporte pas aux matériaux à gradient de propriétés, il représente un intérêt pour l'analyse des composites localement homogènes mais globalement hétérogènes. Quatre modèles ont été développés dans cette étude en utilisant une approche différentielle à la solution pour une dispersion infinie de particules sphériques incorporées dans une matrice incompressible. Une analyse micromécanique d'un FGM élastique en tenant compte de l'interaction locale entre les particules et l'effet local de gradation a été récemment publiée. Les déformations moyennes ont été calculées dans tout le matériau à l'aide des contributions intégrées entre chaque paire de particules. Par la suite, la distribution élastique effective des propriétés dans la direction de gradation a été évaluée à partir de l'analyse de champ des contraintes et des déformations. Comme il est montré dans la figure II.6 ci-dessous, pour un matériau localement homogène, l'écart entre le modèle proposé par Yin et al [89] et le modèle de Mori-Tanaka devient perceptible pour des fractions volumiques supérieures à 20%. En général, les modèles applicables à l'homogénéisation et l'analyse des structures en FGM sont avérés exacts. Les modèles les plus souvent utilisés dans les récentes recherches sont le modèle de Mori-Tanaka et le modèle cohérent, c'est à dire, la nature hétérogène locale des FGM est souvent négligée. La caractérisation analytique et numérique de la distribution des propriétés matérielles dans les

Les différentes théories des plaques

structures en FGM doit être vérifiée expérimentalement par des évaluations expérimentales des propriétés matérielles.

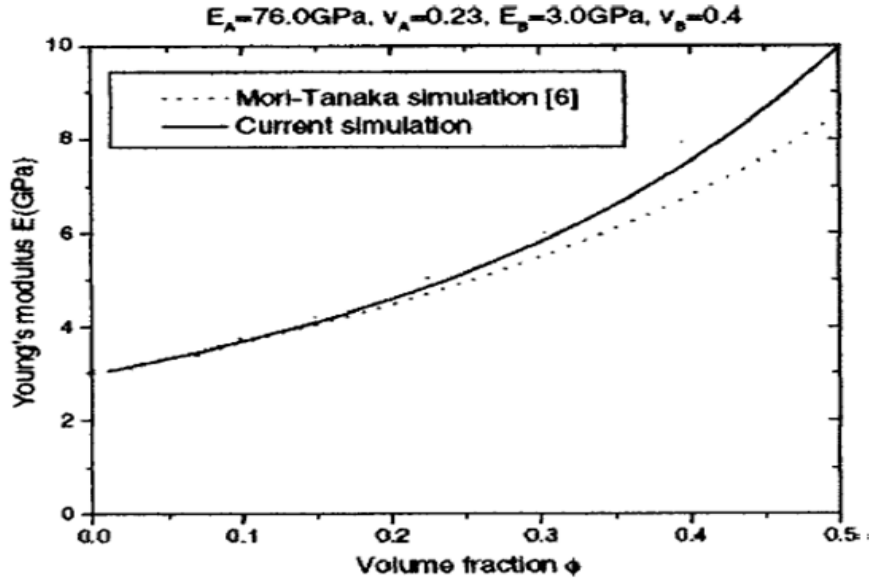


Figure II.6. Comparaison de module de Young effectif d'un FGM en (verre/époxyde) obtenu par le modèle développé par Yin et al [89] et le modèle de Mori-Tanaka.

Pour un composite élastique linéaire à deux phases avec des inclusions sphériques, le module de compressibilité équivalent K^{MT} et le module de cisaillement équivalent μ^{MT} sont définis par les relations suivantes (Aboudi 1991) [90] :

$$K^{MT} = K_1 + f_2 \frac{K_1(K_2 - K_1)}{[(1 - f_2)(K_2 - K_1)\alpha_1 + K_1]} \quad (II.16)$$

$$\mu^{MT} = \mu_1 + f_2 \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{[(1 - f_2)(\mu_2 - \mu_1)\beta_1 + \mu_1]} \quad (II.17)$$

Où les paramètres α_1 et β_1 valent :

$$\alpha_1 = \frac{3K_1}{3K_1 + 4\mu_1} \quad (II.17a)$$

$$\beta_1 = \frac{6}{5} \frac{(K_1 + 2\mu_1)}{(3K_1 + 4\mu_1)} \quad (II.17b)$$

Ce modèle est très couramment employé pour calculer le tenseur de rigidité effectif des matériaux composites parce qu'il est particulièrement adapté à un milieu hétérogène de type Matrice (au sens de la phase continue) dans laquelle sont noyées des hétérogénéités ellipsoïdales.

II.5. Conclusion

Les différentes théories des plaques

Dans ce chapitre, on a étalé les différents modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

Dans le domaine de l'homogénéisation des matériaux à gradient de propriétés, il est souvent possible d'employer des techniques disponibles pour les composites traditionnels. Toutefois, dans le cas où le matériau a une gradation importante (changement rapide des propriétés d'une surface à l'autre), le modèle (VER) peut être utilisé, reflétant les variations des propriétés à l'échelle micromécanique. Peu importe l'approche d'homogénéisation adoptée, l'interaction entre les particules ne doit pas être négligée.

Chapitre III

*Revue bibliographique
sur les travaux réalisés
sur les matériaux FGM*

Les travaux réalisés sur les matériaux FGM

III.1. Introduction

La production de matériaux composites augmente de plus en plus bien que leur coût soit plus élevé que celui des matériaux traditionnels. Ils apportent par rapport à des produits concurrents des avantages importants: légèreté, résistance mécanique et chimique, l'augmentation de la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques (rigidité, résistance à la fatigue), mais aussi grâce à leurs propriétés mécaniques (résistance à la corrosion) ils renforcent également la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique, pour certains d'entre eux une bonne isolation électrique. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux.

La présente recherche bibliographique se focalise sur les travaux relatifs aux plaques en FGM réalisés durant ces deux dernières décennies. On montre par le biais de cette recherche une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermique et/ou thermomécanique du flambement. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cet axe de recherche.

III.2. Des études rapportées sur des plaques FGM

III.2.1. Etudes sur les contraintes résiduelles

Une structure en FGM est affectée par la température à la fois pendant la fabrication et au cours de sa vie. En conséquence, il est nécessaire d'étudier l'évolution des contraintes résiduelles d'origine thermique qui surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés. Ces contraintes micromécaniques peuvent causer des dommages initiaux, affectent la distribution des contraintes à vie, l'apparition et la propagation des fissures. Pour les structures en FGM soumises à des environnements à température élevée, la distribution de température dans le matériau et les contraintes thermiques associées à deux niveaux macro-mécanique et micromécaniques pendant sa vie devrait également être étudiée.

Aussi, les contraintes résiduelles ne seront pas étudiées dans ce travail. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujetti à un environnement haute-température.

Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par Drake et al. (1993) [91] et Williamson et al (1993) [92]. Ils ont alors considéré un spécimen en FGM (Al_2O_3 -Ni) dans trois configurations différentes, le but de l'étude étant de connaître l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. Giannakopoulos et al. (1995) ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques [93].

Les travaux réalisés sur les matériaux FGM

Le FGM étudié est le même que celui considéré par Williamson *et al.* (1993) Les auteurs ont analysé des membres structuraux à trois couches dont la couche supérieure est en nickel, la couche inférieure en céramique et la zone médiane est une zone gradée constituée d'un mélange Al₂O₃-Ni. Des cycles de température ont été imposés induisant une déformation plastique dans les membres structuraux. Des équations analytiques ont été établies afin d'obtenir la distribution des contraintes. Des modèles d'éléments finis ont été développés pour prédire les déformations plastiques cumulées sous l'effet des températures cycliques. Finot *et al.* (1996) complétèrent ce travail en conduisant des expérimentations sur différents spécimens FGM [94]. En 1995, Ravichandran (1995) a étudié les contraintes résiduelles survenant lors de la fabrication d'un système FGM sous haute température [95]. Le but de l'étude étant de déterminer l'effet des contraintes résiduelles et de proposer un guide pour des conditions de fabrication optimales. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique. D'autres travaux ont suivi comme ceux de Hill et Lin (2002) qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane [96].

III.2.2. Etudes sur les problèmes thermo-élastiques statiques

Praveen et Reddy (1998) ont présenté une analyse du comportement thermoélastique des plaques FGM rectangulaires incluant les effets non linéaires, les déformations en cisaillement transverse et l'inertie de rotation [97]. Reddy *et al.* (1999) ont étendu cette théorie des plaques FGM rectangulaires à une formulation du premier ordre de plaques annulaires et circulaires en flexion [73]. Des solutions pour la déflexion, les forces et moments résultants ont été présentées. La théorie originalement formulée par Praveen et Reddy (1998) a été par la suite étendue par Reddy (2000), à des relations plus générales des plaques FGM permettant de prendre en considération des déformations du troisième ordre. Reddy (2000) a également développé des modèles d'éléments finis en théorie de déformation du troisième ordre incluant les effets thermiques et non linéaires [98]. Woo et Meguid (2001) ont publié une formulation des grandes déformations des plaques et coques minces en FGM sous des charges thermiques et mécaniques en utilisant la théorie classique des plaques [99]. Vel et Batra (2002) ont étudié les petites déformations élastiques des plaques FGM avec des bords en appuis simples [100]. Hosseini Kordkheili et al [2007] ont obtenu une formulation des éléments finis pour l'analyse thermoélastique géométriquement non linéaire des plaques et des coques FGM [101]. Zenkour (2009) a utilisé une théorie sinusoïdale raffinée des plaques pour l'analyse de la flexion thermoélastique des plaques FG soumises à un chargement uniforme transversal et appuyées par des fondations élastiques à deux paramètres [102].

Mantari et Guedes Soares (2012) ont proposé une nouvelle HSDT hybride quasi-3D généralisée avec 06 inconnues pour l'étude de la flexion des plaques composites avancées [103]. Mantari et Guedes Soares (2013) ont amélioré leur travail antérieur (2012) en incluant

Les travaux réalisés sur les matériaux FGM

l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans des plaques FG [104]. Récemment, Tounsi *et al.* (2013) ont développé une théorie raffinée à quatre (04) inconnus pour l'analyse thermoélastique de la flexion des plaques sandwiches en FGM [105]. Rad (2015) a étudié le comportement thermoélastique de plaques circulaires à gradient fonctionnel avec une base fonctionnelle hybride de type Horvath-Colasanti et la théorie 3D de la thermo-élasticité est utilisée pour la modélisation [106].

III.2.3. Etudes sur les problèmes de flambement thermomécanique

Le flambage des poutres, des plaques et des coques est un problème très important étudié par beaucoup de chercheurs. Ces éléments structuraux sont en général gradés de façon non symétrique par rapport au plan moyen. Il existe alors un couplage flexion-traction. Dû à ce fait, les charges critiques de flambage risquent d'être plus importantes que celles obtenues pour les mêmes membres structuraux en matériau homogène et symétrique. Le flambement des plaques FGM devient très dangereux lorsque celles-ci sont utilisées dans des systèmes de protection thermique.

L'une des premières études sur le flambement des structures FGM a été réalisée par Shen (2002). Il s'est intéressé au post-flambage des coques cylindriques dans un environnement thermique [107]. La même année, Javaheri et Eslami (2002a) proposent des solutions exactes au flambement thermique des plaques FGM rectangulaires gradées dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance d'un mélange métal-céramique [108].

Le problème de flambement d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique de type pasternak a été résolu par Yang et al. (J. Yang et al. ,2005) [109]. Na et Kim (2005) ont analysé le flambement des plaques FGM sous des charges thermiques et mécaniques combinées en utilisant la méthode des éléments finis [110]. En 2004, Wu (2004) a analysé le flambement thermique d'une plaque FGM d'épaisseur moyenne avec des bords en appuis simples [111]. Il appliqua la théorie de déformation du premier ordre. Les équations d'équilibre et de flambement ont été résolues analytiquement. Des conclusions identiques à celles de Na et Kim ont été tirées. Yang et al. (2004) ont étudié le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des plaques sandwiches FG sous une action combinée de changement de température uniforme et de compression périodique dans le plan en utilisant la TSDT et une méthode semi-analytique [112]. Une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D a été développée par Zenkour (2007) pour l'analyse du flambement thermique des plaques à gradient de propriété en utilisant une fonction sinusoïdale [113].

L'analyse du post-flambage des plaques avec des propriétés dépendant de la température a été abordée par Shen (2007) [114]. Les équations sont basées sur une théorie des plaques d'ordre supérieur incluant les effets thermiques. Les imperfections géométriques initiales sont prises en considération. Les résultats publiés concernent le post-flambage thermique du plan moyen des plaques FGM symétriques. Le flambement des plaques fonctionnellement graduées soumises à la compression non uniforme a été examiné par

Les travaux réalisés sur les matériaux FGM

Mahdavian (2009) en utilisant la CPT et les solutions de Fourier [115].

Bodaghi et Saidi (2010) ont analysé le flambement d'une plaque FGM rectangulaire épaisse en se servant de la théorie d'ordre supérieur de Reddy et d'une méthode analytique. Les auteurs ont développé une procédure pour découpler les cinq équations différentielles et obtenir deux équations à résoudre [116]. Pour les conditions imposées, deux côtés de la plaque sont en appuis simples et la plaque est soumise à différents types de chargements en plan. Les auteurs ont ensuite aisément résolu le problème en se servant de la méthode de Levy (1899) [117]. D'autres études intensives sur le flambement des plaques FGM ont été entreprises par Javaheri et Eslami (2002b, 2002c) [118-119], Shariat *et al.* (2005, 2006 et 2007) [120-122].

Bouderba *et al.* (2013) ont étudiés la réponse en flexion thermomécanique des plaques FG sandwiches reposant sur fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de cisaillement trigonométrique [123]. En utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, Yaghoobi H et Yaghoobi P (2013) ont présenté une étude analytique pour l'analyse du flambement des plaques sandwiches FG symétriques sur fondation élastique et soumises à un chargement mécanique [124]. Kiani et al. (2011) ont présenté des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FG encastées et reposant sur une fondation élastique sous trois différents types de charges thermiques [125]. La RPT a été largement appliquée à des plaques fonctionnellement graduées, plaques sandwiches FG, plaques FG avec des couches piézoélectriques, nano plaques, et nano poutres. Plusieurs théories de déformation de cisaillement à quatre inconnus ont été développées en utilisant des hypothèses similaires à celles de Shimpi (2002) [81], et des différentes fonctions de forme. Tounsi et son groupe de travail (Houari *et al.* 2011, Merdaci *et al.* 2011, Bourada *et al.* 2012, Tounsi *et al.* 2013) ont mis au point de nouvelles théories de plaque raffinées pour la réponse de flexion et flambement des plaques FG sandwiches avec seulement quatre fonctions inconnues. En se basant sur une fonction tangentielle inverse [105] et [126-128], Thai et Uy (2013) ont reformulé la RPT basée sur la surface neutre et ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG type Levy [129]. Thai et Choi (2014) ont amélioré la RPT en tenant compte de l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques FG [130].

III.2.4. Etudes sur les problèmes de vibration des plaques en FGM

Un nombre important d'études sur la vibration libre et forcée des plaques FGM avec ou sans charges thermiques et / ou mécaniques initiales dans le plan ont été rapportées dans la littérature au cours des dernières décennies. Cette section présentera un aperçu de l'ensemble de la littérature disponible sur la dynamique des plaques FGM.

Praveen et Reddy (1998) ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales [97]. Reddy (2000) a développé des formulations

Les travaux réalisés sur les matériaux FGM

théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme [98]. Yang et Shen (2001) ont présenté l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales [131]. Reddy et Chen (2003) ont étudié les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matriciel. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique [132]. En 2004, Huang et Shen (2004) ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples [133]. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman.

Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée par Vel et Batra (2004) pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples [134]. Qian, Batra *et al.* (2004) ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur [135]. En 2006, les travaux de Ferreira *et al.* (2006) ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites [136]. Woo *et al.* (2006) ont étudié la vibration non linéaire des plaques fonctionnellement graduées dans des environnements thermiques [137]. C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement commencé à émerger. Uymaz et Aydogdu (2007) ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites [138]. Abrate (2008) a présenté les fréquences naturelles d'une plaque fonctionnellement graduée simplement appuyée en utilisant la théorie classique des plaques (CPT) [139].

Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par Li *et al.* (2008) [140]. Matsunaga (2008), a étudié les vibrations libres et le flambement d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles [141]. Ait Atmane *et al.* (2010) ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre élevé, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un appui élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier [80].

Hasani Baferani *et al.* (2011) ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un appui élastique [142]. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Hu et Zhang (2011) ont également adopté la CPT avec les hypothèses de Von-Karman pour effectuer l'analyse de la vibration et de la stabilité des plaques FG sous excitation en plan [143]. Hadji *et al.* (2011) ont présenté une théorie raffinée à quatre variables pour l'étude de la vibration des plaques FG sandwichs [84]. Xiang *et al.* (2011) ont développé une théorie de

Les travaux réalisés sur les matériaux FGM

déformation de cisaillement à n-ordre pour la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées et composite sandwich [144].

Benachour *et al.* (2011) ont utilisé la même théorie développée par Hadji *et al.* (2011) pour l'étude de la vibration des plaques FGM présentant un gradient arbitraire [145]. Autrement dit, ils ont pris deux indices de puissance différents entre la fraction volumique utilisée pour calculer le module de Young et celle pour la densité. Hebali *et al.* (2014) ont proposé une nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D pour l'analyse statique et vibratoire des plaques FG [146]. Foroughi et Azhari (2014) ont utilisé la TSDT et la méthode spline des bandes finies pour étudier le flambement et la vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique [147]. Une nouvelle simple hyperbolique HSDT est développée par Saidi *et al.* (2016) pour l'étude de la vibration des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées sur une fondation élastique [148]. Meksi *et al.* (2015) et Bellifa *et al.* (2016) ont proposé aussi une nouvelle théorie simple FSDT avec seulement quatre variables pour l'analyse vibratoire et statique des plaques fonctionnellement graduées [149-150]. Tounsi *et al.* (2016) ont développé une nouvelle HSDT avec 03 inconnus pour l'analyse du flambement et la vibration des plaques sandwiches fonctionnellement graduées [151].

III.3. Conclusion

Suite à cette recherche bibliographique, nous remarquons que les matériaux à gradient fonctionnel représentent un axe de recherche relativement nouveau. Depuis l'apparition du concept FGM, beaucoup de chercheurs s'y sont intéressés et d'innombrables travaux ont été publiés mais qu'il reste encore beaucoup à faire. Ainsi parmi les différentes théories de plaques comme CPT, FSDT, TSDT et HSDT, employées pour l'analyse statique et dynamique des plaques de FGM ont été largement utilisées.

Chapitre IV
Flambement
Thermique des Plaques
Sandwiches en FGM

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

IV.1. Introduction

En raison de la pertinence accrue des composants de la structure des FGM dans la conception des structures aérospatiales, leurs propriétés de flexion, de flambage et de dynamique ; ces matériaux ont attiré l'attention de nombreux scientifiques ces dernières années. Il est vu dans la littérature que la quantité d'étude réalisée sur les plaques isotropes est considérable et que la disponibilité littérature sur les plaques FGM est limitée.

Un certain nombre d'études sur le flambement thermique des plaques à gradation fonctionnelle (FG) a été présenté dans la littérature publiée. Les caractéristiques mécaniques non homogènes de la plaque FG, classées en fonction de l'épaisseur, sont définies par une fonction de puissance d'épaisseur variable. Reddy et Cheng (2001) ont examiné les déformations thermomécaniques 3D des plaques rectangulaires FG en utilisant une «méthode asymptotique» [152]. Golmakani et Kadkhodayan (2011) ont étudié le comportement non linéaire des plaques FG annulaires et circulaires soumises à des charges thermomécaniques et dans diverses conditions aux limites [153]. Tung et Duc (2014) ont étudié le comportement non linéaire des «panneaux peu profonds à double courbure» FG épais reposant sur des fondations élastiques et sous des charges thermiques, mécaniques et thermomécaniques [154]. Kar et al. (2016) ont également étudié le comportement de flambage thermique d'un panneau de coque FG simple/doublement incurvé déformable par cisaillement avec des propriétés TD et TID. Panda et al. (2017) ont présenté une solution par éléments finis non linéaire des réponses post-flambement de la structure des panneaux FGM sous une charge thermique élevée et des propriétés TD et TID [155]. En utilisant la méthode des éléments finis, Katariya et al. (2018) ont analysé la réponse au flambement de la structure sandwich liée au SMA [157]. Li et al. (2018) ont présenté une analyse de flexion thermomécanique de plaques sandwiches FG avec des feuilles frontales à gradation fonctionnelle et des noyaux à gradation fonctionnelle [158]. Mehar et Panda (2018) ont fourni des solutions d'éléments finis non linéaires de la résistance à la flexion thermoélastique et des valeurs de contrainte de la structure de la coquille peu profonde en sandwich renforcée en CNT, en fonction de la température [159].

D'autres travaux sur les réponses de flambement des structures composites peuvent être trouvés dans différentes références (Panda et Singh 2009, 2010a, b, 2011 et 2013b, c, d, Sofiyev et Avcar 2010, Moradi et Mansouri 2012, Abdelhak et al.2015, 2016b, Ebrahimi et Farazmandnia 2018, Akbaş 2018b, Karami et al.2018a) [160-173].

IV.2. Formulation de la problématique

IV.2.1. Configuration géométrique

Considérons une plaque sandwich en FGM de forme rectangulaire de longueur a , de largeur b , et une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) comme le montre la figure IV.1 ci-dessous.

Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à $z = \pm h/2$, et les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y . La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques :

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

"couche 1", "couche 2" et "couche 3" du bas vers le haut de la plaque. Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et les coordonnées de la face supérieure de la plaque sont notées par: $h_0 = -h/2, h_1 = -3h/10, h_2 = 3h/10, h_3 = h/2$ respectivement. Le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas vers le haut de la plaque est noté par la combinaison de trois chiffres, par exemple "1-0-1", "2-1-2" et ainsi de suite.

Plusieurs configurations des plaques sandwiches sont représentées. Dans la présente recherche, quatre types de plaques sandwiches FG sont étudiés tels que, 1-0-1, 1-1-1, 2-1-2 et 3-1-3. Les valeurs du rapport d'épaisseur de couche des différentes plaques sandwiches FG sont résumées dans le tableau (IV.1).

Tableau IV.1. Différents rapports d'épaisseur de couche des plaques sandwiches

rapport d'épaisseur de couche	h_1	h_2
1-0-1	0	0
1-1-1	$-h/6$	$h/6$
2-1-2	$-h/10$	$h/10$
3-1-3	$-h/14$	$h/14$

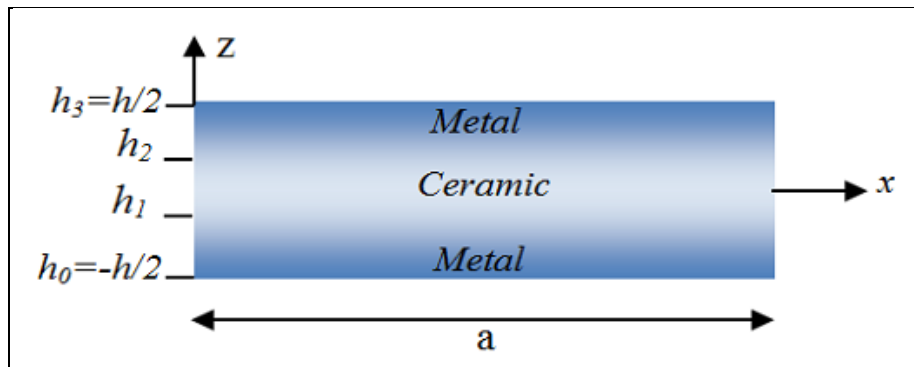


Figure IV.1. La géométrie de la plaque sandwich en FGM

La fraction volumique $V^{(n)}$ varie à travers l'épaisseur de la plaque sandwich suivant une simple loi de puissance et elle est comme suit :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p, z \in [h_0, h_1] \quad (\text{IV.1a})$$

$$V^{(2)} = 1, z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.1a})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p, z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.1c})$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

Où :

$V^{(n)}$, ($n=1.2.3$) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche n ; p est l'indice de la fraction volumique $0 < p < + \infty$, qui indique le profil de la variation matérielle à travers l'épaisseur, [128]. Les propriétés matérielles, comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , le coefficient de dilatation thermique α , peuvent être obtenus par la loi de mélange :

$$P^{(n)} = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (IV.2)$$

$P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective de la couche n , P_c et P_m sont, respectivement, les propriétés correspondantes à la céramique et au métal de la plaque sandwich FGM. [174-175].

IV.2.2. La cinématique

La théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur prend en compte l'effet de cisaillement transverse et assure la nullité des contraintes de cisaillement transversales aux surfaces libres de la plaque au moyen d'une fonction de gauchissement. Le champ de déplacement du HSDT contient cinq variables inconnues et est donné comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \psi(z)\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \psi(z)\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Où u_0, v_0, w_0, φ_x et φ_y sont les déplacements inconnus du plan médian de la plaque.

Basé sur les hypothèses HSDT et en modifiant les rotations, on considère : $\varphi_i = \int \theta(x, y) di$. Le champ de déplacement du HSDT actuel (modèle de plaque intégrale 2D) avec un nombre réduit de variables inconnues peut être exprimé comme suit [176-177]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (IV.4)$$

La fonction de déformation employée dans la présente recherche a la forme hyperbolique suivante :

$$f(z) = \frac{h}{2} \tanh\left(2 \frac{z}{h}\right) - \frac{4}{3 \cosh^2(1)} \frac{z^3}{h^2} \quad (IV.5)$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

On peut observer que le champ de déplacement dans l'équation (IV.5) n'utilise que quatre inconnus (u_0 , v_0 , w_0 et θ). Les équations de contrainte-déplacement non linéaires de Von Karman associées au modèle de plaque intégrale 2D peuvent être obtenues comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \\ \varepsilon_y^0 + zk_y^b + f(z)k_y^s \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + f(z)k_{xy}^s \\ g(z)\gamma_{yz}^0 \\ g(z)\gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.6)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (IV.7)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \int \theta dy \\ k_2 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (IV.8)$$

Et
$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.9)$$

Les intégrales apparaissant dans les expressions ci-dessus doivent être résolues par une solution de type Navier et peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (IV.10)$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés selon le type de solution utilisé, dans ce cas via Navier. Par conséquent, A' et B' sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, B' = -\frac{1}{\beta^2}, k_1 = \alpha^2, k_2 = \beta^2 \quad (IV.11)$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

IV.2.3. Les équations constitutives

Pour les matériaux en FGM, élastiques et isotropes, les relations de contrainte-déformation pour la n ème couche peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha(z)T(z) \\ \varepsilon_y - \alpha(z)T(z) \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{IV.12})$$

Où $T(z)$ est la différence de température par rapport à la référence et C_{ij} ($i, j = 1, 2, 4, 5, 6$) est la rigidité élastique 2D de la plaque FG donnée par :

$$C_{11}^{(n)} = C_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, C_{12}^{(n)} = \frac{\nu E^{(n)}(z)}{1-\nu^2}, C_{44}^{(n)} = C_{55}^{(n)} = C_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.13})$$

IV.3. Équations de stabilité

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées pour le champ de déplacement et les équations constitutives. Le principe peut être énoncé de la manière suivante [178-182] :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{IV.14})$$

La variation de l'énergie de déformation du sandwich FG de la plaque peut être exprimée comme [183-186] :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left[\sigma_x^{(n)} (\varepsilon_x - \alpha T)^{(n)} + \sigma_y^{(n)} (\varepsilon_y - \alpha T)^{(n)} + \tau_{xy}^{(n)} \gamma_{xy}^{(n)} + \tau_{yz}^{(n)} \gamma_{yz}^{(n)} + \tau_{xz}^{(n)} \gamma_{xz}^{(n)} \right] dV \\ &= \int_A \left[\begin{aligned} &N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \\ &+ M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \end{aligned} \right] dA \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

où N , M et S sont les résultantes des contraintes, A est la surface supérieure, avec :

$$\begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} dz \quad (\text{IV.16a})$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

$$\text{Et} \quad (S_{yz}^s, S_{xz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{yz}, \tau_{xz})^{(n)} g(z) dz \quad (\text{IV.16b})$$

Où h_{n-1} et h_n sont les coordonnées inférieure et supérieure de la couche n de la plaque sandwich FG, respectivement.

La variation du travail externe peut être écrite comme :

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta w \, dA \quad \text{with} \quad \bar{N} = \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (\text{IV.17})$$

Où N_x^0, N_{xy}^0, N_y^0 sont des charges appliquées dans le plan dans les directions x, y et xy , respectivement. Pour l'analyse de flambement N_{xy}^0 , la charge dans le plan est supposée être nulle ($N_{xy}^0 = 0$).

En utilisant les expressions de déplacement-déformation généralisées (équations (IV.7) et (IV.8)) et les expressions contrainte-déformation (équation (IV.12)), et en intégrant par parties et en recueillant les coefficients de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta$ dans l'équation (IV.14), les équations gouvernantes sont déterminées comme suit :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.18a})$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.18b})$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV.18c})$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV.18d})$$

En remplaçant les Eqs. (IV.7) et (IV.12) dans l'éq. (IV.16), les contraintes et moments résultants «N, M et S» prennent la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M^b\} \\ \{M^s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [B^s] \\ [B] & [D] & [D^s] \\ [B^s] & [D^s] & [H^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^{(0)}\} \\ \{k^b\} \\ \{k^s\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^{bT}\} \\ \{M^{sT}\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Ou :

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

$$\begin{aligned} \{N\} &= \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T, \{M^b\} = \{M_x^b \ M_y^b \ M_{xy}^b\}^T, \{M^s\} = \{M_x^s \ M_y^s \ M_{xy}^s\}^T \\ \{N^T\} &= \{N_x^T \ N_y^T \ 0\}^T, \{M^{bT}\} = \{M_x^{bT} \ M_y^{bT} \ 0\}^T, \{M^{sT}\} = \{M_x^{sT} \ M_y^{sT} \ 0\}^T \quad (\text{IV.20}) \\ \{\varepsilon^{(0)}\} &= \{\varepsilon_x^{(0)} \ \varepsilon_y^{(0)} \ \gamma_{xy}^{(0)}\}^T, \{k^b\} = \{k_x^b \ k_y^b \ k_{xy}^b\}^T, \{k^s\} = \{k_x^s \ k_y^s \ k_{xy}^s\}^T \end{aligned}$$

Où $(N_x^T, N_y^T, M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT}$ et $M_y^{sT})$ sont les contraintes et moments résultants dus à la charge thermique.

Les coefficients $(N_x^T, N_y^T, M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT}$ and $M_y^{sT})$ sont respectivement l'extension, la flexion, l'extension-flexion et la rigidité au cisaillement. Les coefficients $A_{ij}, D_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$ and A_{ij}^s peuvent être exprimés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{11} \left(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.21})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV.22})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{h_{n-1}}^{h_n} C_{44} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV.23})$$

Les contraintes et moments thermiques $(N_x^T, N_y^T, M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT}$ and $M_y^{sT})$ sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_y^T \\ M_y^{bT} \\ M_y^{sT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{1-\nu} \alpha^{(n)}(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.24})$$

Pour l'analyse du flambement thermique, les formulations du critère d'équilibre adjacent sont utilisées [187]. Les équations de stabilité de la présente étude sont obtenues comme suit :

$$\frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.25a})$$

$$\frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.25b})$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

$$\frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} = 0 \quad (IV.25c)$$

$$-k_1 M_x^{s1} - k_2 M_y^{s1} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} = 0 \quad (IV.25d)$$

IV.4. Solution analytique du flambement thermique

La solution analytique utilisée ici pour résoudre les équations de stabilité et assurer les conditions aux limites de la plaque sandwich FG simplement appuyée est la procédure de Navier. Sur la base de cette méthode, les extensions suivantes des déplacements (u_0^1, v_0^1, w_0^1 et θ^1) sont données comme :

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_0^1 \\ \theta^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ X_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (IV.26)$$

Où : $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$ sont des paramètres arbitraires à déterminer, les constants λ et μ sont définies comme suit:

$$\lambda = \frac{m\pi}{a} \text{ et } \mu = \frac{n\pi}{b} \quad (IV.27)$$

En substituant l'Eq (IV.26) dans l'Eq (IV.25), la solution analytique du flambement thermique peut être obtenue sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + N_x^0 \lambda^2 + N_y^0 \mu^2 & & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.28)$$

Où :

$$a_{11} = -(A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2)$$

$$a_{12} = -\mu \lambda (A_{12} + A_{66})$$

$$a_{13} = \lambda (B_{11} \lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2)$$

$$a_{14} = -\lambda (A' k_1 B_{11}^s \lambda^2 + B' k_2 \mu^2 B_{12}^s + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \mu^2)$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

$$a_{22} = -A_{66}\lambda^2 - A_{22}\mu^2$$

$$a_{23} = -\mu(B_{22}\mu^2 + (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2) \quad (IV.29)$$

$$a_{24} = -\mu(B'k_2B_{22}^s\mu^2 + \lambda^2(B_{12}^sA'k_1 + B_{66}^s(A'k_1 + B'k_2)))$$

$$a_{33} = -\lambda^2(D_{11}\lambda^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 - D_{22}\mu^4)$$

$$a_{34} = D_{11}^sA'k_1\lambda^4 + D_{12}^s(A'k_1 + B'k_2)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^sB'k_2\mu^4 + 2D_{66}^s(A'k_1 + B'k_2)\mu^2\lambda^2$$

$$a_{44} = (A'k_1)^2 H_{11}^s\lambda^4 + 2A'k_1B'k_2H_{12}^s\lambda^2\mu^2 + (A'k_1B'k_2)^2 H_{66}^s\mu^2\lambda^2 \\ + (B'k_2)^2 H_{22}^s\mu^4 + (A'k_1)^2 A_{55}^s\lambda^2 + (B'k_2)^2 A_{44}^s\mu^2$$

Dans la présente étude, l'instabilité géométrique a été prise en compte en considérant $\det [a]=0$ pour les deux différents types de conditions de charge thermique. En appliquant l'approche de condensation pour éliminer U_{mn} et V_{mn} (les déplacements dans le plan), l'Eq (IV.28) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{33} + \bar{N} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.30)$$

$$\bar{a}_{33} = a_{33} - \frac{a_{13}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) - a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (IV.31a)$$

$$\bar{a}_{34} = a_{34} - \frac{a_{14}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) - a_{24}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (IV.31b)$$

$$\bar{a}_{43} = a_{43} - \frac{a_{13}(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) - a_{23}(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (IV.31c)$$

$$\bar{a}_{44} = a_{44} - \frac{a_{14}(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) - a_{24}(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (IV.31d)$$

Pour une solution non triviale de charge de flambement thermique, le déterminant de la matrice d'Eq. (IV.30) doit être égal à zéro :

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{33} + \bar{N} & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{43} & \bar{a}_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (IV.32)$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

L'équation résultante de l'équation (IV.29) peut être résolue pour la charge de flambement. L'expression de la charge de flambement peut être obtenue comme :

$$\bar{N} = \frac{\bar{a}_{34}\bar{a}_{43} - \bar{a}_{33}\bar{a}_{44}}{\bar{a}_{44}} \quad (\text{IV.33})$$

En remplaçant l'expression de Eq. (IV.25) dans l'équation (IV.29), la charge critique de flambement $N_x^0 = N_y^0 = N_{cr}$ est déterminée comme suit :

$$N_{cr} = \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2)} \frac{\bar{a}_{34}\bar{a}_{43} - \bar{a}_{33}\bar{a}_{44}}{\bar{a}_{44}} \quad (\text{IV.34})$$

IV.5. Flambement thermique avec diverses conditions aux limites :

Les conditions aux limites pour une plaque de dimensions (a x b x h) sont écrites comme suit :

$$u(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0$$

$$u(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0$$

$$N_{xy}(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_{xy}(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0$$

$$v(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \quad (\text{IV.35})$$

$$v(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0$$

$$N_{xy}(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_{xy}(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0$$

Pour une solution analytique des équations (IV.25), la méthode des variables séparées est utilisée pour une plaque sandwich rectangulaire en FGM sous diverses conditions aux limites.

Encastrée (C) :

$$u = v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{Pour } x=0, a \text{ et } y=0, b \quad (\text{IV.36})$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

Simplement appuyée (S) :

$$v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{Pour } x=0, a \quad (\text{IV.37})$$

$$u = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{Pour } y=0, b \quad (\text{IV.38})$$

Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ données dans le tableau (IV.2) sont proposées par Sobhy [188] pour satisfaire les diverses conditions aux limites dans les équations (IV.38)

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} X_m'(x) Y_n(y) \\ V_{mn} X_m(x) Y_n'(y) \\ W_{mn} X_m(x) Y_n(y) \\ X_{mn} X_m(x) Y_n(y) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

Tableau IV.2. Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$

<i>Conditions aux limites</i>			<i>Fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$</i>	
<i>Notation</i>	<i>à $x=0, a$</i>	<i>à $y=0, b$</i>	<i>$X_m(x)$</i>	<i>$Y_n(y)$</i>
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	Sin (λx)	Sin (μy)
	$X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CCSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	Sin ² (λx)	Sin (μy)
	$X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CCCC	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$	Sin ² (λx)	Sin ² (μy)
	$X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$		
FFCC	$X_m''(0) = X_m'''(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$	Cos ² (λx)[Sin ² (λx)+1]	Sin ² (μy)
	$X_m''(a) = X_m'''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$		

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites sont développées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & -N + s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

Tel que:

$$S_{11} = \int_0^a \int_0^b (A_{11} X_m''' Y_n + A_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n' d_x d_y$$

$$S_{12} = \int_0^a \int_0^b (A_{12} X_m' Y_n'' + A_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n' d_x d_y$$

$$S_{13} = \int_0^a \int_0^b - (B_{11} X_m''' Y_n + B_{12} X_m' Y_n'' + 2B_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n' d_x d_y$$

$$S_{14} = \int_0^a \int_0^b - (B_{11}^s A' k_1 X_m''' Y_n + B_{12}^s B' k_2 X_m' Y_n'' + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) X_m' Y_n'') X_m' Y_n' d_x d_y$$

$$S_{21} = \int_0^a \int_0^b (A_{12} X_m'' Y_n' + A_{66} X_m'' Y_n') X_m Y_n' d_x d_y$$

$$S_{22} = \int_0^a \int_0^b (A_{22} X_m Y_n'''' + A_{66} X_m'' Y_n') X_m Y_n' d_x d_y$$

$$S_{23} = \int_0^a \int_0^b - (B_{12} X_m'' Y_n' + B_{22} X_m Y_n'''' + 2B_{66} X_m'' Y_n') X_m Y_n' d_x d_y \quad (\text{IV.41})$$

$$S_{24} = \int_0^a \int_0^b - (B_{12}^s A' k_1 X_m'' Y_n' + B_{22}^s B' k_2 X_m Y_n'''' + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) X_m'' Y_n') X_m Y_n' d_x d_y$$

$$S_{31} = \int_0^a \int_0^b (B_{11} X_m'''' Y_n + B_{12} X_m'' Y_n'' + 2B_{66} X_m'' Y_n'') X_m Y_n' d_x d_y$$

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

$$S_{32} = \int_0^a \int_0^b (B_{12} X_m'' Y_n'' + B_{22} X_m Y_n'''' + 2B_{66} X_m'' Y_n'') X_m Y_n dx dy$$

$$S_{33} = \int_0^a \int_0^b - (D_{11} X_m'''' Y_n + 2D_{12} X_m'' Y_n'' + D_{22} X_m Y_n'''' + 4D_{66} X_m'' Y_n'') X_m Y_n dx dy$$

$$S_{34} = \int_0^a \int_0^b \left(D_{11}^s A' k_1 X_m'''' Y_n + D_{12}^s (A' k_1 + B' k_2) X_m'' Y_n'' + D_{22}^s B' k_2 X_m Y_n'''' \right. \\ \left. + D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) X_m'' Y_n'' \right) X_m Y_n dx dy$$

$$S_{41} = \int_0^a \int_0^b - (B_{11}^s A' k_1 X_m'''' Y_n + B_{12}^s B' k_2 X_m'' Y_n'' + D_{66} (A' k_1 + B' k_2) X_m'' Y_n'') X_m Y_n dx dy$$

$$S_{42} = \int_0^a \int_0^b - (B_{12}^s A' k_1 X_m'' Y_n'' + B_{22}^s B' k_2 X_m Y_n'''' + D_{66} (A' k_1 + B' k_2) X_m'' Y_n'') X_m Y_n dx dy$$

$$S_{43} = \int_0^a \int_0^b \left(D_{11}^s A' k_1 X_m'''' Y_n + D_{12}^s (A' k_1 + B' k_2) X_m'' Y_n'' + D_{22}^s B' k_2 X_m Y_n'''' \right. \\ \left. + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) X_m'' Y_n'' \right) X_m Y_n dx dy$$

$$S_{44} = \int_0^a \int_0^b \left(H_{11}^s (A' k_1)^2 X_m'''' Y_n + 2H_{12}^s (A' k_1 B' k_2) X_m'' Y_n'' + H_{22}^s (B' k_2)^2 X_m Y_n'''' \right. \\ \left. + H_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)^2 X_m'' Y_n'' + A_s^{55} (A' k_1)^2 X_m'' Y_n + A_{44}^s (B' k_2)^2 X_m Y_n'' \right) X_m Y_n dx dy$$

$$N = \int_0^a \int_0^b N_{cr} (\chi_1 X_m'' Y_n + \chi_2 X_m Y_n'') X_m Y_n dx dy$$

La température critique du flambement peut être déterminée en résolvant la forme de membrane des équations de stabilité et en utilisant la technique développée par Meyers et Hyer [189]. L'expression des résultantes de la charge de pré-flambement d'une plaque sandwich FG simplement appuyée sous la variation de température dans l'épaisseur peut être déterminée par :

$$N_{cr} = N_x^0 = N_y^0 = - \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z) E^{(n)}(z) T}{1-\nu} dz \quad \text{Et } N_{xy}^0 = 0 \quad (\text{IV.42})$$

IV.5. Modèle de chargement thermique

Pour examiner l'effet du type de variation de température considérée dans l'épaisseur sur la réponse de flambement de stabilité de la plaque FG, trois types de chargement thermique dans l'épaisseur de la plaque sont pris en considération.

Flambement Thermique des Plaques Sandwiches en FGM

IV.5.1. Augmentation uniforme de la température (UTR)

On suppose que la température uniforme initiale de la plaque FG est T_i , et la température est uniformément élevée jusqu'à une valeur finale T_f telle que la plaque flambe. La charge critique de flambement est donnée par:

$$T_{cr} = - \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z) E^{(n)}(z) T (T_f - T_i)}{1 - \nu} dz \quad (IV.43)$$

$$\text{La variation de température est : } T(z) = T_f - T_i = \Delta T \quad (IV.44)$$

IV.5.2. Répartition linéaire de la température à travers l'épaisseur (LTD)

Pour les plaques sandwiches fonctionnellement graduées, la variation de température n'est pas uniforme. On suppose que la température de la surface supérieure soit T_M et la température varie de T_M selon une loi de puissance à travers l'épaisseur, à la température de la surface inférieure dans laquelle la plaque est flambée. Dans ce cas, la température à travers l'épaisseur est donnée par :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_M \quad (IV.45)$$

Où γ est l'exposant de température ($0 < \gamma < \infty$). Notant que la valeur de $\gamma=1$, représente une variation linéaire de la température à travers l'épaisseur.

IV.5.3. Répartition non linéaire de la température à travers l'épaisseur (NTD)

Similaire au cas de chargement précédent, pour des valeurs de γ qui diffèrent de l'unité, nous aurons une variation non linéaire.

IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de stabilité des plaques sandwiches FG simplement appuyées sous chargement thermique a été étudiée en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevée (HSDT) à quatre variables. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieure et inférieure de la plaque. Dans cette étude la plaque sandwich est composée de deux peaux en FGM et cœur en céramique. Les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque sandwich seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Les équations de stabilité du présent modèle sont déterminées par le principe du travail virtuel et résolues via la procédure Navier.

Chapitre V
Validation des
Résultats

Validation des Résultats

V.1. Introduction :

Dans ce chapitre, deux parties des résultats numériques sont présentées sous forme de tableaux et de graphiques explicites. Ces résultats sont présentés et discutés afin de montrer la validité et l'exactitude de la théorie actuelle pour prédire la température de flambement critique des plaques sandwichs isotrope simplement appuyées en FGM. La première partie est réservée à la validation et aux comparaisons et la deuxième partie est consacrée aux études paramétriques. Pour cela nous étudions les effets de l'indice puissance, le rapport d'épaisseur des couches, l'effet de type de chargement thermique et les conditions aux limites sur les valeurs de la charge critique de flambement des plaques sandwichs en FGM.

V.2. Validations et comparaisons des résultats

Les résultats numériques et graphiques obtenus sont comparés avec ceux de la littérature. On essaiera de décrire la relation entre la présente théorie et les différentes théories du premier ordre FSDPT, d'ordre élevé HSDPT et la théorie classique des plaques CPT. La description des différents modèles est présentée dans les tableaux (V.2), (V.3) et (V.4).

Pour la plaque sandwich étudiée, les propriétés matérielles utilisées dans cette partie sont données dans le tableau suivant :

Tableau V.1. Propriétés matérielles de la plaque sandwich en FGM

Propriétés	Métal : Ti-6Al-4V	Céramique : Zr O ₂
E(GPa)	66.2	244.27
ν	0.3	0.3
α (10 ⁻⁶ /K)	10.3	12.766

V.2.1. Plaque carrée isotrope

Le tableau (V.2) présente le paramètre de température critique minimal d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée à température uniforme avec ($E=1.0 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$ et $\alpha_0 = 1.0 \cdot 10^{-6} / \text{K}$). Les résultats obtenus en utilisant le présent modèle sont comparés à ceux publiés par Noor et Burton (1992) [190], Matsunaga (2005) [191], Bourada et al. (2012) [128] et Kettaf et al. (2013) [48]. Du tableau, on peut voir qu'un bon accord est confirmé entre les résultats actuels et ceux donnés dans la littérature.

Tableau V.2. Paramètre de température critique minimal αT_{cr} d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée à température uniforme

a/h	Noor et Burton (1992)	Matsunaga (2005)	Bourada et al. (2012)	Kettaf et al. (2013)	Présent
10	$0,1183 \times 10^{-1}$	$0,1183 \times 10^{-1}$	$0,1198 \times 10^{-1}$	$0,1198 \times 10^{-1}$	$0,1198 \times 10^{-1}$
20	$0,3109 \times 10^{-2}$	$0,3109 \times 10^{-2}$	$0,3119 \times 10^{-2}$	$0,3119 \times 10^{-2}$	$0,3119 \times 10^{-2}$
100	$0,1264 \times 10^{-3}$	$0,1264 \times 10^{-3}$	$0,1265 \times 10^{-3}$	$0,1265 \times 10^{-3}$	$0,1265 \times 10^{-3}$

Validation des Résultats

V.2.2. Flambement thermique des plaques sandwiches FG

Le facteur de correction de cisaillement pour la théorie FSDPT est pris égal à 5/6. Pour la température linéaire et non linéaire qui augmente à travers l'épaisseur, nous avons pris comme valeur de température de la face supérieure $T_M = 25^\circ\text{C}$.

Les résultats établis dans les tableaux (V.3), (V.4) et (V.6) présentent la température critique de flambement ($T_{cr} = 10^{-3} \Delta T_{cr}$) de la plaque sandwiches FG sous différents types de distribution de température uniformes, linéaires et non linéaires à travers l'épaisseur. Les résultats calculés en utilisant l'intégrale 2D sont comparés à ceux obtenus via la théorie des plaques classiques (CPT), la première théorie de la déformation par cisaillement (FSDPT) avec facteur de correction $k_s=5/6$, la théorie des plaques de déformation par cisaillement sinusoïdal (SSDPT) et la théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDPT) développées par Bourada et al. [128]. D'après les résultats obtenus, il est clairement remarquable que les résultats actuels sont en excellent accord avec ceux calculés par d'autres théories (FSDPT, SSDPT, et TSDPT) publiées par Bourada et al [128]. Sauf que la théorie classique des plaques (CPT) a surestimé la charge critique de flambement thermique due à l'omission de l'effet de cisaillement transversal. Il est montré à travers ces résultats que la température critique de flambement T_{cr} augmente avec l'augmentation de l'épaisseur des couches.

Validation des Résultats

Tableau V.3. Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance p , avec $(a/h=5)$.

P	Théories	T_{cr}			
		1-0-1	1-1-1	2-1-2	3-1-3
0 (ceramic)	CPT (*)	3.96470	3.96470	3.96470	3.96470
	FSDPT (*)	3.23493	3.23493	3.23493	3.23493
	SSDPT (*)	3.23775	3.23775	3.23775	3.23775
	TSDPT (*)	3.23652	3.23652	3.23652	3.23652
	Present	3.23888	3.23888	3.23888	3.23888
0.2	CPT (*)	3.66606	3.65640	3.64978	3.65144
	FSDPT (*)	3.04858	3.03637	3.03394	3.03603
	SSDPT (*)	3.07198	3.05591	3.05598	3.05875
	TSDPT (*)	3.07042	3.05484	3.05461	3.05729
	Present	3.07317	3.05683	3.05706	3.05988
0.5	CPT (*)	3.34559	3.31343	3.30066	3.30593
	FSDPT (*)	2.83507	2.80230	2.79675	2.80218
	SSDPT (*)	2.87277	2.83331	2.83194	2.83855
	TSDPT (*)	2.87074	2.83224	2.83030	2.83673
	Present	2.87410	2.83411	2.83304	2.83975
1	CPT (*)	3.06734	2.96299	2.95538	2.97216
	FSDPT (*)	2.64222	2.55161	2.55053	2.56519
	SSDPT (*)	2.69065	2.59015	2.59458	2.61100
	TSDPT (*)	2.68781	2.58882	2.59241	2.60856
	Present	2.69230	2.59094	2.59584	2.61242
2	CPT (*)	2.96200	2.64806	2.68016	2.72994
	FSDPT (*)	2.57355	2.31737	2.34734	2.38823
	SSDPT (*)	2.63460	2.36196	2.39953	2.44337
	TSDPT (*)	2.63018	2.36000	2.39637	2.43977
	Present	2.63702	2.36296	2.40121	2.44530
5	CPT (*)	3.32950	2.44274	2.59922	2.73600
	FSDPT (*)	2.86226	2.16069	2.28926	2.39882
	SSDPT (*)	2.94205	2.21327	2.35401	2.46905
	TSDPT (*)	2.93446	2.21009	2.34898	2.46321
	Present	2.94631	2.21483	2.35666	2.47220
10	CPT (*)	3.82441	2.41650	2.68184	2.89384
	FSDPT (*)	3.23289	2.14099	2.35529	2.52271
	SSDPT (*)	3.31230	2.20150	2.42733	2.60199
	TSDPT (*)	3.30340	2.19469	2.42186	2.59474
	Present	3.31747	2.20068	2.43159	2.60624

(CPT *): Classical Plate Theory; (FSDPT*): First-Order Shear Deformation Plate Theory; (SSDPT*): Sinusoidal Shear deformation Plate Theory; (TSDPT*): Third-Order Shear Deformation Plate Theory. [128]

Validation des Résultats

Tableau V.4. Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance, avec ($a/h=5$)

<i>P</i>	<i>Théories</i>	<i>T_{cr}</i>			
		<i>1-0-1</i>	<i>1-1-1</i>	<i>2-1-2</i>	<i>3-1-3</i>
0 (ceramic)	CPT (*)	7.87940	7.87940	7.87940	7.87940
	FSDPT (*)	6.41986	6.41986	6.41986	6.41986
	SSDPT (*)	6.42550	6.42550	6.42550	6.42550
	TSDPT (*)	6.42305	6.42305	6.42305	6.42305
	Present	6.42777	6.42777	6.42777	6.42777
0.2	CPT (*)	7.28211	7.26279	7.24955	7.25287
	FSDPT (*)	6.04716	6.02273	6.01789	6.02207
	SSDPT (*)	6.09396	6.06183	6.06197	6.06751
	TSDPT (*)	6.09084	6.05968	6.05922	6.06459
	Present	6.09634	6.06367	6.06413	6.06977
0.5	CPT (*)	6.64118	6.57686	6.55131	6.56187
	FSDPT (*)	5.62014	5.55460	5.54350	5.55435
	SSDPT (*)	5.69554	5.61663	5.61389	5.62710
	TSDPT (*)	5.69148	5.61449	5.61059	5.62346
	Present	5.69820	5.61822	5.61609	5.62951
1	CPT (*)	6.08468	5.87599	5.86076	5.89431
	FSDPT (*)	5.23443	5.05323	5.05105	5.08038
	SSDPT (*)	5.33130	5.13030	5.13918	5.17201
	TSDPT (*)	5.32562	5.12765	5.13482	5.16711
	Present	5.33461	5.13189	5.14169	5.17485
2	CPT (*)	5.87400	5.24612	5.31032	5.40989
	FSDPT (*)	5.09711	4.58475	4.64468	4.72645
	SSDPT (*)	5.21920	4.67392	4.74908	4.83673
	TSDPT (*)	5.21036	4.66999	4.74275	4.82954
	Present	5.22405	4.67592	4.75242	4.84061
5	CPT (*)	6.60901	4.83549	5.14843	5.42200
	FSDPT (*)	5.67452	4.27139	4.52851	4.74763
	SSDPT (*)	5.83411	4.37654	4.65805	4.88811
	TSDPT (*)	5.81891	4.37017	4.64797	4.87641
	Present	5.84263	4.37966	4.66333	4.89441
10	CPT (*)	7.59882	4.78299	5.31369	5.73769
	FSDPT (*)	6.41578	4.23198	4.66058	4.99542
	SSDPT (*)	6.57459	4.35224	4.80638	5.15396
	TSDPT (*)	6.55680	4.33937	4.79372	5.13948
	Present	6.58495	4.35136	4.81318	5.16250

Validation des Résultats

Tableau V.5. Température critique de flambement T_{cr} d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée sous une variation non linéaire de température avec ($\gamma=5$, $a/h=5$)

P	Théories	T_{cr}			
		1-0-1	1-1-1	2-1-2	3-1-3
0 (ceramic)	CPT (*)	23.63820	23.63820	23.63820	23.63820
	FSDPT (*)	19.25957	19.25957	19.25957	19.25957
	SSDPT (*)	19.27651	19.27651	19.27651	19.27651
	TSDPT (*)	19.26915	19.26915	19.26915	19.26915
	Present	19.28331	19.28331	19.28331	19.28331
0.2	CPT (*)	24.58692	24.34093	24.43703	24.47887
	FSDPT (*)	20.41729	20.18492	20.28528	20.32483
	SSDPT (*)	20.57531	20.31595	20.43388	20.47819
	TSDPT (*)	20.56479	20.30876	20.42463	20.46833
	Present	20.58334	20.32214	20.44117	20.48582
0.5	CPT (*)	25.21986	24.74530	24.91598	24.99617
	FSDPT (*)	21.34246	20.89907	21.08307	21.15824
	SSDPT (*)	21.62878	21.13244	21.35073	21.43534
	TSDPT (*)	21.61337	21.12438	21.33822	21.42148
	Present	21.63890	21.13844	21.35916	21.44455
1	CPT (*)	25.60494	24.85771	25.09061	25.21549
	FSDPT (*)	22.02700	21.37713	21.62417	21.73355
	SSDPT (*)	22.43462	21.70318	22.00140	22.12553
	TSDPT (*)	22.41074	21.69196	21.98279	22.10459
	Present	22.44855	21.70991	22.01221	22.13770
2	CPT (*)	25.96247	24.69501	25.02775	25.23797
	FSDPT (*)	22.52869	21.58175	21.89055	22.04964
	SSDPT (*)	23.06831	22.00152	22.38252	22.56412
	TSDPT (*)	23.02926	21.98304	22.35275	22.53055
	Present	23.08975	22.01094	22.39836	22.58222
5	CPT (*)	26.92893	24.41235	25.04991	25.47341
	FSDPT (*)	23.12129	21.56445	22.03367	22.30513
	SSDPT (*)	23.77153	22.09533	22.66384	22.96510
	TSDPT (*)	23.70963	22.06317	22.61489	22.91015
	Present	23.80628	22.11109	22.68966	22.99474
10	CPT (*)	27.82720	24.36712	25.28770	25.87769
	FSDPT (*)	23.49484	21.55996	22.17958	22.52996
	SSDPT (*)	24.07633	22.17208	22.86373	23.24502
	TSDPT (*)	24.01127	22.10708	22.81317	23.17972
	Present	24.11438	22.16820	22.90587	23.28351

La variation de la température critique de flambement de la plaque sandwich FG en fonction du rapport d'épaisseur et de l'indice de loi de puissance est également calculée dans les tableaux (V.3, V.4 et V.5). A partir des valeurs obtenues de la température critique de flambement, on peut noter que la charge thermique de flambement critique augmente avec l'augmentation de l'indice de matériau si $0 \leq p \leq 2$ et diminue avec l'augmentation de l'indice de matériau si $p \geq 2$ dans le cas d'une charge thermique uniforme et linéaire à travers l'épaisseur.

Validation des Résultats

Dans le cas d'une distribution non linéaire de la température à travers l'épaisseur, la température critique de flambement est une relation de corrélation directe avec l'indice de loi de puissance, toutes les observations précédentes sont valables pour les différents rapports d'épaisseur (1-0-1, 1-1-1, 2-1-2 et 3-1-3). On peut également voir que les valeurs les plus élevées de la température critique de flambement sont obtenues pour le rapport d'épaisseur 1-0-1.

V.3. Etude paramétrique

V.3.1. Etudes paramétriques d'une plaque sandwich FG simplement appuyée

Dans cette partie des résultats, des études paramétriques sont présentées pour montrer les différents paramètres influant sur la température critique de flambement d'une plaque sandwich FG simplement appuyée.

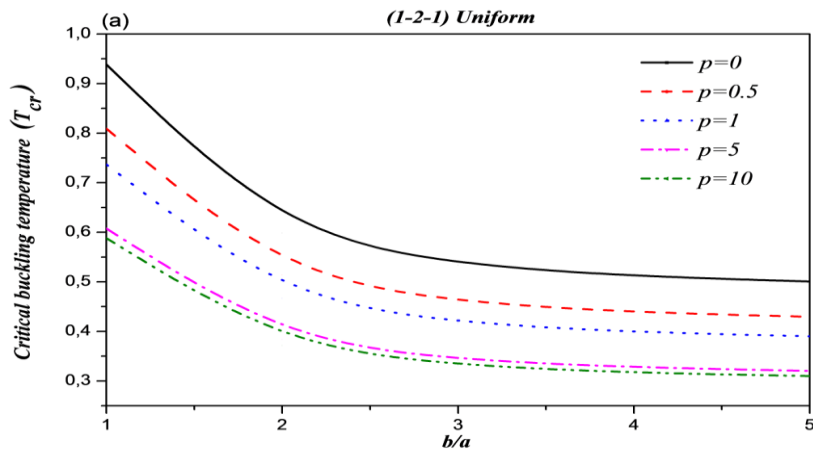


Figure V.1.1. Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (b/a) d'une plaque sandwich carrée en FGM de type (1-2-1) sous chargement uniforme (avec $a/h=10$)

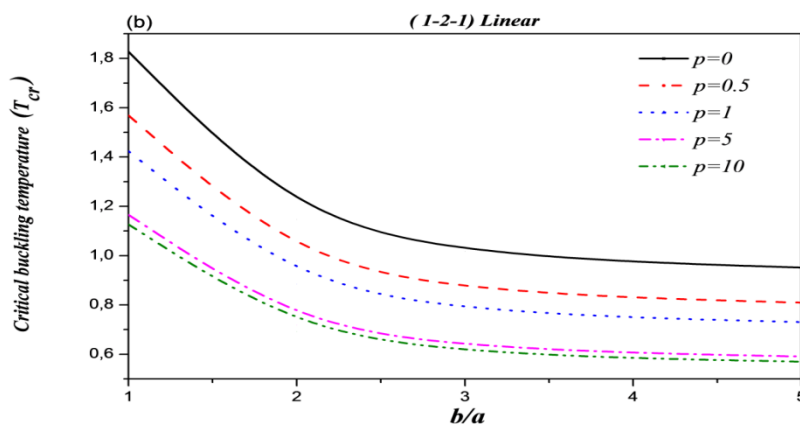


Figure V.1.2. Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (b/a) d'une plaque sandwich carrée en FGM de type (1-2-1) sous chargement linéaire (avec $a/h=10$)

Validation des Résultats

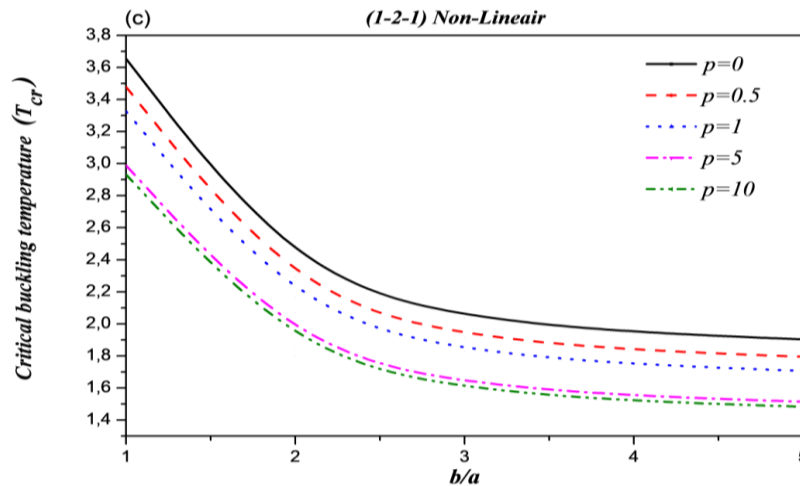


Figure V.1.3. Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (b/a) d'une plaque sandwich carrée en FGM de type (1-2-1) sous chargement non linéaire (avec $a/h=10$ et $\gamma=3$)

Les figures (V.1.1) (V.1.2) et (V.1.3) représentent la variation de la température critique de flambement des plaques sandwiches FG simplement appuyées de type (1-2-1) en fonction du rapport (b/a) et de l'indice de loi de puissance (p) pour les différents modèles de charges thermiques (uniformes, linéaires et non linéaires ($\gamma=3$)). Les graphes montrent que la température critique de flambement est en relation inverse avec le rapport dimensionnel et l'indice de matériau (p) . Les valeurs les plus petites de la charge critique de flambement sont données par un modèle de charge thermique uniforme.

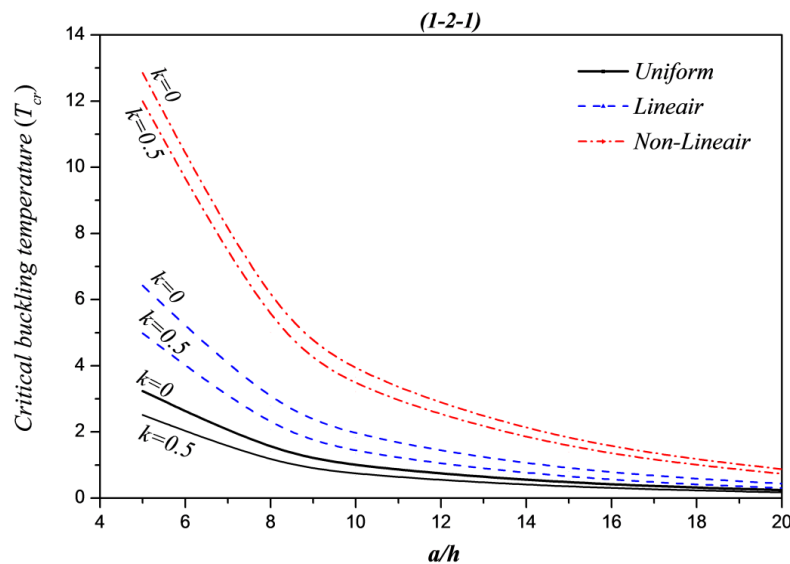


Figure V.2. Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (a/h) d'une plaque sandwich carrée en FGM de type (1-2-1) sous les trois types de chargement ($\gamma=3$)

L'effet des valeurs du rapport de géométrie (a/h) sur la température critique de flambement (T_{cr}) de la plaque sandwich FG 1-2-1 pour différentes valeurs de l'indice de fraction volumique (p) et les types de charge thermique est présenté dans la Fig. (V.2). A partir

Validation des Résultats

des courbes tracées, on peut noter que l'augmentation du rapport de géométrie (a/h) conduit à la diminution de la température critique de flambement (T_{cr}) et cela est dû au fait que la plaque devient mince. Les valeurs les plus élevées de la charge thermique critique sont obtenues par la charge non linéaire avec ($\gamma=3$).

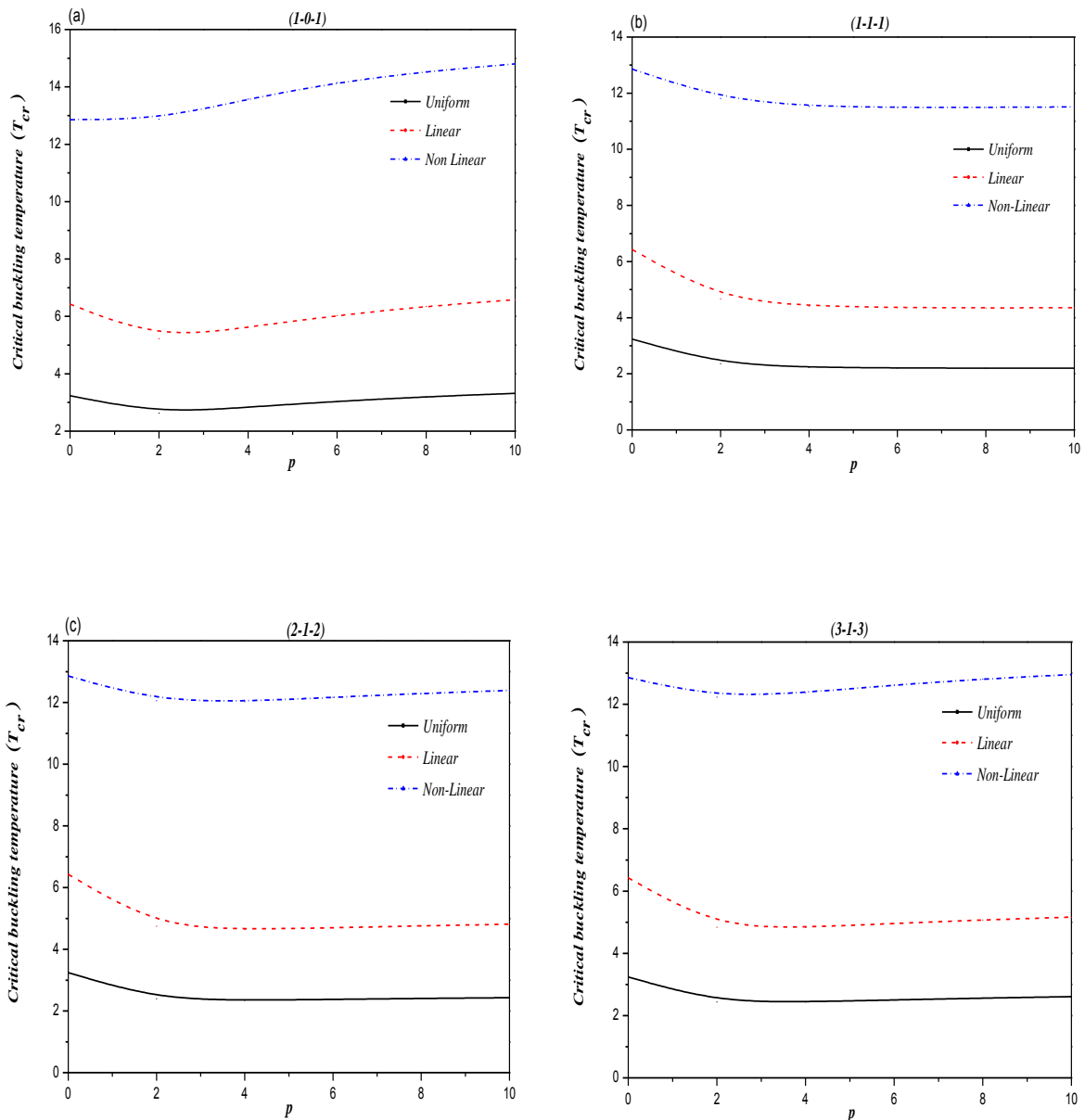


Figure V.3. Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (p) sous les trois types de chargement et les différents types de plaques simplement appuyées: (a) (1-0-1), (b) (1-1-1), (c) (2-1-2), (d) (3-1-3) ($a/h=5$ et $\gamma=3$)

Les Figs. (V.3a, b, c et d) montrent l'effet de l'indice de la fraction volumique (p) sur la charge thermique de flambement critique (T_{cr}) des plaques sandwiches FG (1-0-1, 1-1-1, 2-1-2

Validation des Résultats

et 3-1-3) sous élévation de température uniforme, linéaire et non linéaire. A partir des graphes présentés dans la (Fig.V.3), on peut observer que la charge thermique de flambement critique (T_{cr}) est inversement proportionnelle à l'indice de puissance de la plaque sandwich FG 1-1-1 et ceci pour les différents modèles de charges thermiques. On peut également voir que pour les plaques sandwiches FG 1-0-1, 2-1-2 et 3-1-3, la température critique de flambement diminue jusqu'à atteindre des valeurs plus petites de (T_{cr}) puis augmente lorsque p dépasse la valeur de 4 ($p \geq 4$).

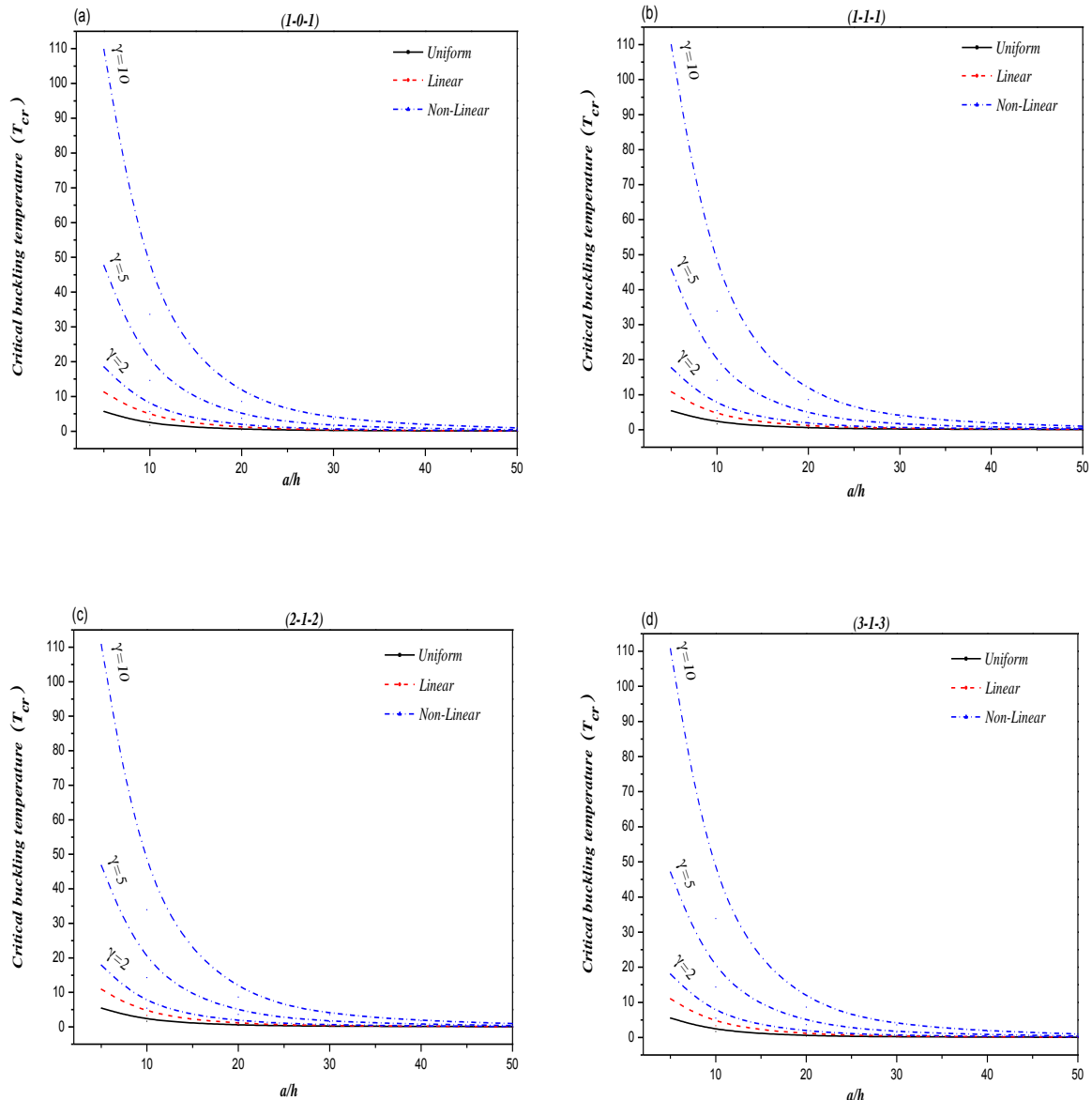


Figure V.4. Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (a/h) sous les trois types de chargement et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b) (1-1-1), (c) (2-1-2), (d) (3-1-3) ($p=1$ et $a=2b$)

Validation des Résultats

L'effet de l'exposant de température (γ) et du rapport d'épaisseur (a/h) sur la température critique de flambement des plaques sandwiches FG simplement appuyées est présenté dans la Fig. (V.4). D'après les résultats, on peut constater que la charge critique de flambement thermique diminue avec l'augmentation du rapport de géométrie (a/h). Dans le cas de la charge thermique non linéaire, la température critique de flambement (T_{cr}) a une relation de corrélation directe avec l'exposant de température (γ). En outre, on constate que T_{cr} augmente lorsque le paramètre de la non-linéarité γ augmente. Nous pouvons également noter que les valeurs inférieures de la différence de température critique de flambement (T_{cr}) sont obtenues pour un modèle de charge thermique uniforme.

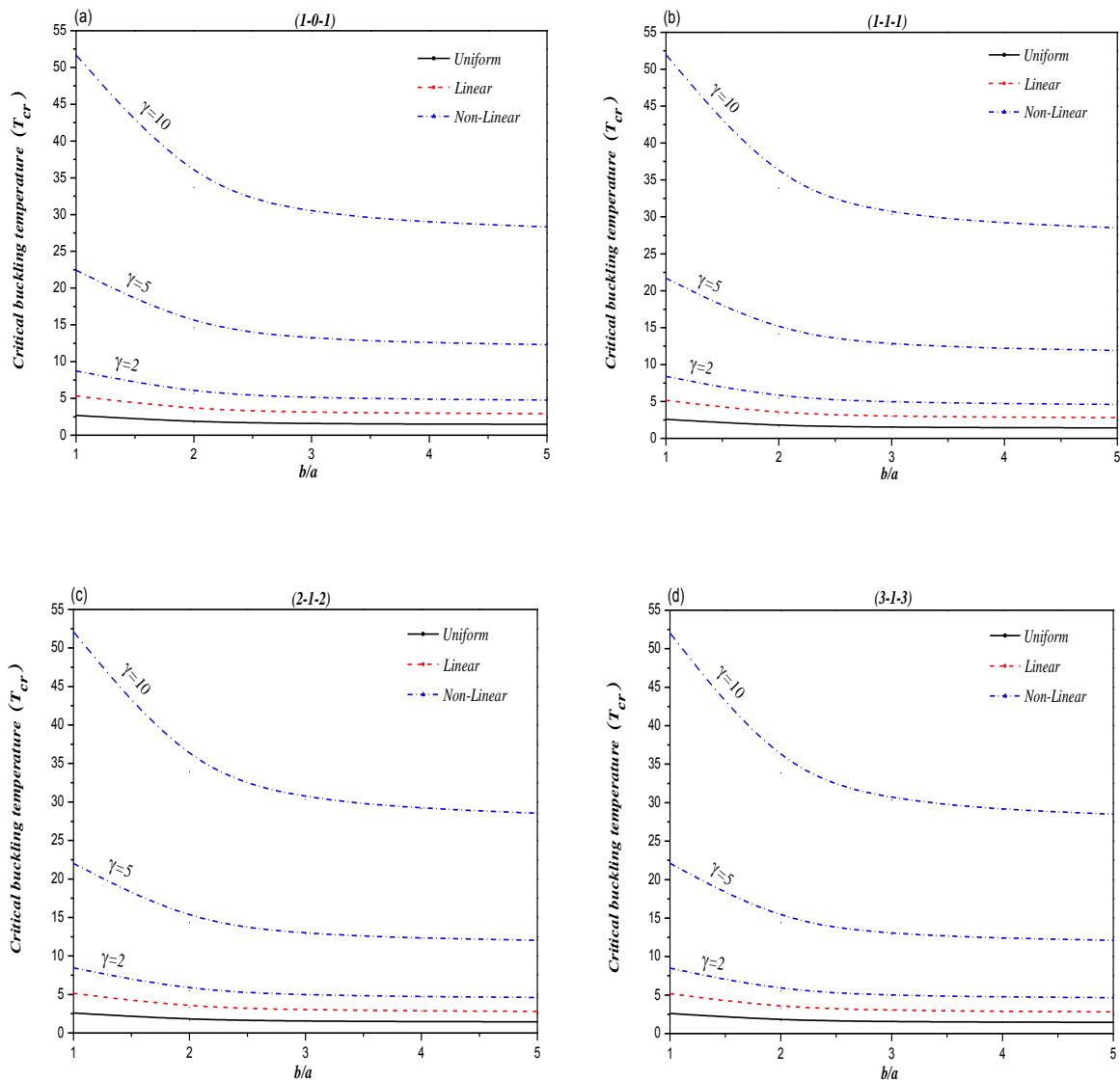


Figure V.5 Température critique de flambement T_{cr} en fonction de (b/a) sous les trois types de chargement et les différents types de plaques: (a) (1-0-1), (b) (1-1-1), (c) (2-1-2), (d) (3-1-3) ($p=1$ et $a/h=5$)

Validation des Résultats

La figure (V.5) montre la variation de la température critique de flambement (T_{cr}) des plaques sandwichs FG (1-0-1, 1-1-1, 2-1-2 et 3-1-3) simplement appuyées en fonction du rapport d'aspect (b/a) et le paramètre de non-linéarité (γ). On peut observer à partir des courbes tracées que la température critique diminue avec l'augmentation du rapport d'aspect (b/a) et augmente avec l'augmentation de l'exposant de température (γ). Il est également confirmé que les valeurs inférieures de la sont obtenues par la charge thermique uniforme.

V.3.2. Impact des conditions d'appuis sur le Flambement Thermique

Les effets de l'indice de gradient (p) et du rapport d'épaisseur (a/h) sur la température critique de flambement du FGM sous UTR, LTD et NTD pour diverses conditions aux limites sont répertoriées dans les tableaux V.6 et V.7, respectivement. Il est observé à partir de ces tableaux que lorsque l'indice (p) augmente, les températures de stabilité thermique T_{cr} diminuent. On remarque ainsi que, les plaques sandwichs simplement appuyées donnent la plus faible valeur par rapports aux autres conditions aux limites ce qui signifie que le changement de type d'appuis influe sur la réponse thermique en flambement de la plaque sandwich en FGM. On observe également que les plaques les plus rigides et les plus souples correspondent à celles de FFCC et SSSS, respectivement. Pour les conditions aux limites CCSS et CCCC, les résultats prennent des valeurs intermédiaires.

Tableau V.6. L'effet des conditions d'appuis sur la charge critique du flambement thermique pour des plaques sandwichs de type (1-1-1) avec $a/h=5$ et pour différentes valeurs de l'indice (p).

	p	Conditions aux limites			
		SSSS	CCSS	CCCC	FFCC
uniforme	0	3.23888	5.34422	6.63260	7.40862
	2	2.36296	4.14445	5.34702	6.11677
	4	2.23362	3.95744	5.14087	5.90687
	6	2.20580	3.92106	5.10515	5.87440
	8	2.20014	3.91655	5.10426	5.87708
	10	2.20068	3.92032	5.11166	5.88748
	15	2.20735	3.93501	5.13335	5.91434
	20	2.21375	3.94730	5.15018	5.93432
	linéaire	0	6.42777	10.63844	13.21520
2		4.67592	8.23890	10.64404	12.18355
4		4.41724	7.86488	10.23175	11.76374
6		4.36160	7.79213	10.16031	11.69880
8		4.35028	7.78311	10.15852	11.70416
10		4.35137	7.79064	10.17333	11.72496
15		4.36471	7.82002	10.21670	11.77868
20		4.37750	7.84461	10.25036	11.81864
non linéaire gama=5		0	19.28331	31.91532	39.64560
	2	22.01094	38.78293	50.10464	57.35159
	4	22.09595	39.34177	51.18136	58.84470
	6	22.12432	39.52574	51.53835	59.34237
	8	22.14799	39.62508	51.71863	59.58773
	10	22.16820	39.68967	51.82842	59.73324
	15	22.22982	39.83644	52.05332	60.01734
	20	19.28331	31.91532	39.64560	44.30176

Validation des Résultats

Tableau V.7. L'effet des conditions d'appuis sur la charge critique du flambement thermique pour des plaques sandwiches de type (1-1-1) avec $p=10$ et pour différentes valeurs de l'épaisseur (a/h)

		Conditions aux bords				
		a/h	SSSS	CCSS	CCCC	FFCC
uniforme		2	9.4008	13.5061	15.5800	16.7177
		5	2.2006	3.9203	5.1116	5.8874
		10	0.5896	1.1124	1.5120	1.7908
		15	0.2656	0.5071	0.6957	0.8294
		20	0.1501	0.2878	0.3962	0.4735
linéaire		2	18.7516	26.9622	31.1101	33.3854
		5	4.3513	7.7906	10.1733	11.7249
		10	1.1292	2.1748	2.9741	3.5317
		15	0.4812	0.9642	1.3415	1.6088
		20	0.2502	0.5257	0.7425	0.8970
non linéaire gama=5		2	95.5308	137.3601	158.4917	170.0832
		5	22.1682	39.6896	51.8284	59.7332
		10	5.7532	11.0800	15.1519	17.9926
		15	2.4514	4.9126	6.8343	8.1963
		20	1.2747	2.6783	3.7828	4.5701

V.3.3. Variation de la température critique pour trois différentes plaques FG

Dans cette étude, trois différents types de plaques fonctionnellement graduées sont désignées par FGM 1, FGM 2 et FGM 3 respectivement et ce sont: Titanium (Ti-6Al-4V) Zircane (ZrO_2), Aluminium (Al) Zircane (ZrO_2) et Aluminium (Al) Alumine (Al_2O_3). La charge de flambement critique par rapport à la variation de l'épaisseur (a/h) est donnée par le tableau V.9 pour trois types de plaques différentes FGM 1, FGM 2 et FGM 3 de configuration (2-1-2). C'est une plaque symétrique dont l'épaisseur du cœur est la moitié de l'épaisseur des peaux, ($h_1 = -h/10$ et $h_2 = h/10$). Les propriétés matérielles utilisées sont données dans le tableau V.8.

Tableau V.8. Les propriétés matérielles des plaques sandwiches en fgm

Propriétés	Metal Ti	Ceramic ZrO_2	Metal AL	Ceramic ZrO_2	Metal AL	Ceramic Al_2O_3
E (GPa)	66.2	244.27	70	200	70	380
ν	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
FGM 1 (Ti-6Al-4V/ ZrO_2), FGM 2 (AL/ ZrO_2) et FGM 3 (Al/ Al_2O_3)						

Validation des Résultats

Tableau V.9. Variation de la température critique pour trois différentes plaques encadrées FGM1, FGM2 et FGM3 de configuration (2-1-2) avec $p=5$ et pour différentes valeurs de l'épaisseur (a/h).

	a/h	FGM1	FGM2	FGM3
Uniforme	5	5.4424	5.9732	4.6460
	10	1.6214	1.8249	1.3406
	15	0.7473	0.8460	0.6134
	20	0.4258	0.4832	0.3486
	25	0.2742	0.3114	0.2242
	30	0.1910	0.2171	0.1561
Linéaire	5	10.8349	11.8964	9.2420
	10	3.1929	3.5998	2.6313
	15	1.4446	1.6421	1.1768
	20	0.8017	0.9164	0.6473
	25	0.4984	0.5729	0.3984
	30	0.3321	0.3842	0.2622
Non linéaire gama=5	5	52.7178	52.6880	51.7878
	10	15.5355	15.9433	14.7444
	15	7.0289	7.2727	6.5945
	20	3.9010	4.0587	3.6272
	25	2.4253	2.5374	2.2327
	30	1.6160	1.7019	1.4695

Le tableau V.9 montre l'effet de l'épaisseur sur la charge critique du flambement T_{cr} sous chargement uniforme, linéaire et non-linéaire de la température à travers l'épaisseur, pour les trois différents types de plaques sandwiches fonctionnellement graduées encadrées en utilisant la présente théorie HSDT. On peut constater que la charge critique du flambement T_{cr} diminue quand le rapport (a/h) augmente et les plaques sandwiches de type FGM2 donnent la plus grande valeur par rapport aux autres. On remarque également que la température de stabilité critique pour les plaques sous une variation non-linéaire de température est plus élevée que celle pour les plaques sous une variation uniforme et linéaire de température. La rigidité exposée par la plaque sandwich FGM 2 est la plus élevée.

Validation des Résultats

V.4. Conclusion

Dans cette étude, la validité et l'exactitude du modèle actuel ont été confirmés en comparant les résultats obtenus avec ceux donnés dans la littérature. Enfin, à partir de l'étude paramétrique, nous pouvons conclure que les caractéristiques du flambement thermique des plaques sandwiches FGM sont significativement influencées par le champ de température, l'indice de fraction volumique et les paramètres géométriques du système, ainsi :

- ✓ L'indice de puissance p a un effet considérable sur la différence de température critique du flambement de la plaque sandwich FGM.
- ✓ La température critique du flambement sous une charge non linéaire a la valeur la plus élevée dans les trois cas de conditions de charge thermique.
- ✓ La température critique T_{cr} du flambement des plaques sandwiches FGM est plus élevée dans les plaques épaisses et courtes.
- ✓ La différence de température critique du flambement diminue avec l'augmentation du rapport a/h , et le rapport b/a .

Conclusion générale

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale & Perspectives

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux possédant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi dont les masses volumiques sont faibles, l'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes, ils sont constitués des céramiques et des métaux avec une fraction volumique variant de façon continue à travers l'épaisseur. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de ces deux matériaux. Les avantages considérables offerts par les FGM par rapport aux matériaux conventionnels et la nécessité de surmonter les défis techniques liés aux environnements à haute température ont conduit à une utilisation accrue des structures sandwiches et à incorporer dans leur construction les fgm comme feuilles de façade.

Du fait de l'importance de l'utilisation des plaques FGM dans la conception des structures industrielles, nous avons besoin d'une théorie efficace pour prévoir exactement les caractéristiques structurales de ces plaques. En effet, plusieurs auteurs ont proposé des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques fgm. Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, plusieurs chercheurs ont abordé le problème du flambement thermique des plaques à gradations fonctionnelles.

L'une des causes fondamentales du flambement thermique est le blocage de la dilatation thermique. Sous certaines conditions aux limites, une structure ne peut se dilater librement sous une élévation uniforme de la température, ce qui crée des contraintes thermiques capables d'agir comme des forces de compression pouvant nuire à la stabilité de la structure. La seconde cause du flambement thermique est la variation non-uniforme de la température. En effet, quand une structure uniforme est soumise à un échauffement thermique non-uniforme, ou le contraire, la température varie d'un point à l'autre de la structure. Cette dernière, donne lieu à des contraintes thermiques internes qui peuvent aussi nuire la stabilité de la structure. L'étude de ces phénomènes est très essentielle pour choisir les paramètres du matériau appropriés afin de s'assurer de la réponse des structures.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail, on a présenté les résultats de l'analyse du flambement thermique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées avec une variation arbitraire des propriétés matérielles en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement. En proposant d'autres hypothèses simplifiant aux HSDT classiques, en considérant le terme intégral indéterminé, le nombre d'inconnues et des équations gouvernantes de la théorie actuelle sont réduits à un seul, et donc, rendant cette théorie simple et efficace à utiliser.

En utilisant le principe de l'énergie potentielle totale minimale, les équations gouvernantes différentielles sont obtenues et les solutions analytiques basées sur la procédure de la solution Navier sont également déterminées. Divers exemples numériques sont examinés pour démontrer l'exactitude et l'efficacité du modèle développé. Les résultats calculés par la nouvelle fonction hyperbolique sont en accord avec les HSDT conventionnels qui ont un grand nombre de variables. De plus, il est conclu également que l'indice de loi de puissance, la géométrie de la plaque et le type de la charge thermique ont une très grande influence sur la température critique de flambement. Par conséquent, on peut déduire les points suivants :

- ✓ les plaques entièrement en céramique donnent les plus grandes charges critiques de flambement ;
- ✓ les charges critiques de flambement diminuées avec la diminution de la rigidité du matériau qui est due à la diminution du pourcentage de céramique et l'augmentation de la quantité de métal, et aussi de l'épaisseur du cœur ;

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre les problèmes d'instabilité des plaques FGM.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

*Références
bibliographiques*

Références bibliographiques

- [1] Koizumi M. the concept of FGM. Ceramic transaction, functionally graded materials (1993) 34, 3-10.
- [2] Abdizadeh, H., Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex, « Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'alumine », Thèse Docteur D'état, Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon Et L'université Claude Bernard Lyon France, 1997, 212p.
- [3] Yuki, M., Murayama, T. & Irisama, T., Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating, in proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai –Japan, 1991, p. 203.
- [4] Fukui, Y. (1991), “Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force”, Int. J. Jpn. Soc. Mech. Eng., 3, 144-148.
- [5] Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, Smart Struct. Syst., Int. J., 18(4), 755-786.
- [6] Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017a), “An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates”, Steel Compos. Struct., Int. J., 25(3), 257-270.
- [7] Ebrahimi, F., Mahmoodi, F. and Barati, M.R. (2017), “Thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded micro/nanoscale beams with porosities based on modified couple stress theory”, Adv. Mater. Res., Int. J., 6(3), 279-301.
- [8] Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2017), “An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities”, Earthq. Struct., Int. J., 13(3), 255-265.
- [9] Avcar, M. and Alwan, A.S. (2017), “Free vibration of functionally graded Rayleigh beam”, Int. J. Eng. Appl. Sci., 9(2), 128-138.
- [10] Avcar, M. and Mohammed, W.K.M. (2018), “Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation”, Arab. J. Geosci., 11(10), 232.
- [11] Akbaş, S.D. (2018a), “Forced vibration analysis of cracked functionally graded microbeams”, Adv. Nano Res., Int. J., 6(1), 39-55.
- [12] Bourada, F., Amara, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2018), “A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates”, Struct. Eng. Mech., Int. J., 68(6), 661-675.
- [13] Faleh, N.M., Ahmed, R.A. and Fenjan, R.M. (2018), “On vibrations of porous FG nanoshells”, Int. J. Eng. Sci., 133, 1-14.
- [14] Eltaher, M.A., Fouda, N., El-midany, T. and Sadoun, A.M. (2018), “Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams”, J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng., 40(3), 141.
- [15] Fourn, H., Ait Atmane, H., Bourada, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2018), “A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates”, Steel Compos. Struct., Int. J., 27(1), 109-122.

Références bibliographiques

- [16] Younsi, A., Tounsi, A., Zaoui, F.Z., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2018), “Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates”, *Geomech. Eng., Int. J.*, 14(6), 519-532.
- [17] Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2019a), “Wave propagation of functionally graded anisotropic nanoplates resting on Winkler-Pasternak foundation”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 7(1), 55-66.
- [18] Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., Tounsi, A. (2019b), "Resonance behavior of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with grapheme nanoplatelets", *International Journal of Mechanical Sciences*, 156, 94-105.
- [19] Dash, S., Mehar, K., Sharma, N., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K. (2018), “Modal analysis of FG sandwich doubly curved shell structure”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 68(6), 721-733. <https://doi.org/10.12989/sem.2018.68.6.721>
- [20] Medani, M., Benahmed, A., Zidour, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2019), “Static and dynamic behavior of (FG-CNT) reinforced porous sandwich plate”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 32(5), 595-610.
- [21] Boussoula, A., Boucham, B., Bourada, M., Bourada, F., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2019), “A simple nth-order shear deformation theory for thermomechanical bending analysis of different configurations of FG sandwich plates”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 25(2). [In press]
- [22] Addou, F.Y., Meradjah, M., Bousahla, A.A., Benachour, A., Bourada, F., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2019), “Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT”, *Comput. Concrete, Int. J.*, 24(4), 347-367.
- [23] Zaoui, F.Z., Ouinas, D. and Tounsi, A. (2019), “New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations”, *Compos. Part B*, 159, 231-247.
- [24] Zarga, D., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Bourada, F. and Mahmoud, S.R. (2019), “Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 32(3), 389-410.
- [25] Tlidji, Y., Zidour, M., Draiche, K., Safa, A., Bourada, M., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2019), “Vibration analysis of different material distributions of functionally graded microbeam”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 69(6), 637-649.
- [26] Khiloun, M., Bousahla, A.A., Kaci, A., Bessaim, A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2019), “Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT”, *Eng. Comput.*
- [27] Avcar, M. (2019), “Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct, Int. J.*, 30(6), 603-615.
- [28] Reissner, E. (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J Appl Mech-T ASME.*, 12(2), 69–77.
- [29] Mindlin, R.D. (1951), “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, *J Appl Mech-T ASME*, 18(1), 31–38.

Références bibliographiques

- [30] Zenkour, A.M. and Mashat, D.S. (2010), "Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates", *Nat. Sci.*, 2(9), 968-978.
- [31] Ansari, R., Ashrafi, M.A., Pourashraf, T. and Sahmani, S. (2015), "Vibration and buckling characteristics of functionally graded nanoplates subjected to thermal loading based on surface elasticity theory", *Acta Astronautica*, 109, 42-51.
- [32] Eslami, M.R. and Samsam Shariat, B.A. (2006), "Thermal buckling of imperfect functionally graded plates", *Int. J. Solid. Struct.*, 43 (14), 4082-4096.
- [33] Abdelhak Z., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. and Adda, bedia (2016), "Analysis of buckling response of functionally graded sandwich plates using a refined shear deformation theory", *Wind Struct.*, 22 (3), 291-305.
- [34] Thinh, T.I., Tu, T.M., Quoc, T.H. and Long, N.V. (2016), "Vibration and buckling analysis of functionally graded plates using new eight-unknown higher order shear deformation theory", *Lat. Am. J. Solids Struct.*, 13(3), 456-477.
- [35] Saha, R. and Maiti, P.R. (2012), "Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial load", *Int. J. Civil Struct. Eng.*, 2(4), 1036-1050.
- [36] Mozafari, H. and Ayob, A. (2012), "Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of functionally graded materials", *Proc. Tech.*, 1, 496-504.
- [37] Trung-Kien Nguyen (2014), "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials", *Int J Mech Mater Des*, (11). 203-219
- [38] Abdelhak, Z., Hadji, L., Daouadji, T.H. and Bedia, E.A. (2015), "Thermal buckling of functionally graded plates using a n-order four variable refined theory", *Adv. Mater. Res.*, 4(1), 31-44.
- [39] Bouiadjra, M. B., Houari, M. S. A. and Tounsi, A. (2012), "Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory", *J. Therm. Stress.*, 35(8), 677-694.
- [40] Elmoossouess. B, Kebdani. S, Bouiadjra. M.B., Tounsi. A., (2017), « A novel and simple HSDT for thermal buckling response of functionally graded sandwich plates », *Structural Engineering & Mechanics*, 62(4):401-415
- [41] Cheng, C.H. and Chen, T. (2015), "Size-dependent resonance and buckling behavior of nanoplates with high-order surface stress effects", *Physica E: Low-dimensional Syst. Nanostruct.*, 67, 12-17.
- [42] Ebrahimi, F. and Barati, M.R. (2016a), "Temperature distribution effects on buckling behavior of smart heterogeneous nanosize plates based on nonlocal four-variable refined plate theory", *Int. J. Smart Nano Mater.*, 7(3), 1-19.
- [43] Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Geomech. Eng., Int. J.*, 13(3), 385-410.
- [44] Tounsi, A, Semmah, A. and Bousahla, A.A. (2013c), "Thermal buckling behavior of nanobeams using an efficient higher-order nonlocal beam theory", *ASCE J. Nanomech. Micromech.*, 3(3), 37-42.

Références bibliographiques

- [45] Zhao X, Lee Y.Y. et Liew K.M, "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, (2009), 918-939.
- [46] Ma. L.S, Lee D.W. (2011), "A further discussion of nonlinear mechanical behaviour for FGM beams under in-plane thermal loading", *Compos Struct*, 93, 831–842.
- [47] Ma. L.S, Lee D.W. (2012), "Exact solutions for nonlinear static responses of a shear deformable FGM beam under an in-plane thermal loading", *Euro J Mech-A/Solids*, 31, 13–20.
- [48] Kettaf F.Z, Houari M.S.A, Benguediab M, Tounsi A. (2013), "Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model", *Steel and Composite Structures*, 15(4), 399-423.
- [49] Ghannadpour. S, Ovesy. H et Nassirnia. M, (2012). «Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method,» *Comput Struct*, vol. 93, p. 108–109,
- [50] Mohammadi. M, Saidi. A et Jomehzadeh. J, (2010), «Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates,» *Appl Compos Mater*, (17), 81–93.
- [51] Thai, H.T. and Choi, D.H. (2012), "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates", *Appl. Math. Model.*, 36(3), 1008-1022.
- [52] Jean-Marie Berthelot, (2013), « Mécanique des Matériaux et Structures Composites », Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés, ISMANS, Le Mans, France
- [53] Laurent Gornet, (2008), « Généralités sur les matériaux composites », Ecole Centrale d'ingénieur de Nantes.
- [54] Hirai, T. (1996), "Functional gradient materials", *Processing of ceramics —Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; p. 293–341.
- [55] Jian. C.Y., Hashida. T, Takahashi. H and Saito. M. (1995), "Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method", *Composites Engineering*, 879–889.
- [56] Kawasaki. A and Watanabe. R (1997), "Evaluation of thermo mechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", *Composites Part B, Engineering*, 29–35.
- [57] Hashmi, Saleem. Gilmar, Ferreira, Batalha. Van Tyne, C. J. Yilbas, B. S., (2014) « Comprehensive materials processing ». Livre électronique, Oxford, Walltham, MA: Elsevier.
- [58] Yoshihisa Uchida (2004), -Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39-51-B, Vol. 39-B.
- [59] Shen H.S., 2009, *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [60] Jin. Z. H, Batra. R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339.
- [61] Bao. G, Wang. L. (1995), « Multiple cracking in unctionally graded ceramic/metal coatings », *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- [62] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), « Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings ». *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.

Références bibliographiques

- [63] Delale. F, Erdogan. F. (1983), —The crack problem for a non homogeneous planel. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614.
- [64] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi, (2011). "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons; page 110, 4 août
- [65] Kirchhoff. G. (1950), « Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein». Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40, 51-88.
- [66] Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger, (1959). « Theory of Plates and Shells ». McGraw-Hill, New York.
- [67] Reddy. J.N, (1997). —Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis, CRC Press, Boca Raton.
- [68] Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949). -Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833.
- [69] Naghdi, PM. (1957), "On the theory of thin elastic shells", Quarterly Appl. Math., 14, 369-380.
- [70] Reissner, E. (1975), "On Transverse Bending of Plates, Including the Effects of Transverse Shear Deformation", International Journal of Solids and Structures., 11, 569–573.
- [71] Reddy, J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", J. Appl. Mech., 51 (4), 745-752.
- [72] Akavci, SS. (2010), "Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates", Mech Compos Mater., 46(2), 215–626.
- [73] Reddy. J.N, (1999). «Theory and Analysis of Elastic plates», Taylor & Francis, Philadelphia.
- [74] Touratier.M, (1991). «An efficient standard plate theory». Engng Sci, vol. 29, 901, 916,
- [75] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). «Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity», Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546.
- [76] Ambartsumyan, S A. (1969), "Theory of anisotropic plate". Technomic Publishing.
- [77] Levinson, M. (1981), "A new rectangular beam theory", J. Sound Vib., 74, 81 – 87.
- [78] Aydogdu, M. (2005) , "Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method", International Journal of Mechanical Sciences., 47, 1740–1755.
- [79] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", Int. J. Mech. Sci., 53, 237-247
- [80] Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, (2010). « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler- Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory». Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121,
- [81] Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", AIAA Journal, 137–146.
- [82] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", International Journal of Mechanical Sciences, 626–633.
- [83] Thai, H.-T. et Kim, S.-E. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", Composite Structures, 1738–1746.

Références bibliographiques

- [84] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–942.
- [85] J. R. Zuiker, Functionally graded materials: choice of micromechanics model and limitations in property variations," *Composites Eng*, 5 (7): 807–819, 1995.
- [86] T. Reuter., G. J. Dvorak., V. Tvergaard, « Micromechanical models for graded composite materials », *J. Mech. Phys. Solids*; 45 (8) : 1281–1302,1997.
- [87] J. R. Cho., D.Y. Ha, (2001). « Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials », *Mater. Sci. Eng., A*; 302 (2): 187–196.
- [88] R. Pal, (2005). « New Models for Effective Young's modulus of particulate composites », *Composites, Part B*; 36 (6-7): 513–523.
- [89] H. M. Yin., Z.L. Sun., G.H. Paulino, (2004). « Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions », *Acta Mater*; 52 (12):3535–3543.
- [90] Aboudi. J, (1991). "A Unified Micromechanical Approach Mechanics of Composite Materials». Elsevier.
- [91] Drake, J.T., Williamson, R.L. et Rabin, B.H. (1993). «Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces», Part II: Interface Optimization for Residual Stress Reduction", *Journal of Applied Physics*, 74, 1321-1326,
- [92] Williamson, R.L., Rabin, B.H. et Drake, J.T. (1993) «Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces», Part I: Model Description and Geometrical Effects", *Journal of Applied Physics*, 74, 1310-1320.
- [93] Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M. et Olsson, M. (1995). «Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients», *Acta Metallurgica et Materialia*, 43, 1335-1354,
- [94] Finot, M., Suresh, S., Bull, C. et Sampath, S. (1996). «Curvature Changes During Thermal Cycling of a Compositionally Graded Ni-Al₂O₃ Multi-Layered Material», *Materials Science and Engineering*, 205, 59-71,
- [95] Ravichandran, K.S. (1995), «Thermal Residual Stresses in aFunctionally Graded Material System», *Materials Science and Engineering*, A-201, 269-276.
- [96] Hill, R. et Lin, W. (2002), «Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material», *Journal of Engineering Materials and Technology*, 124, 185-191.
- [97] Praveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998), «Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates», *International Journal of Solids and Structures*, 4457-4476.
- [98] Reddy, J.N., (2000), «Analysis of functionally graded plates», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 663–684.
- [99] Woo, J. and Meguid, S.A. (2001), "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells", *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7409-7421.
- [100] Vel, S.S. et Batra, R.C. (2002), "Exact Solution for Thermo elastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates", *AIAA Journal*, 40, 1421-1433.

Références bibliographiques

- [101] Hosseini Kordkheili, S. A. Naghdabadi Geometrically non- linear thermoelastic analysis of functionally graded shells using finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 72, 964–986.
- [102] Zenkour, A.M, (2009). « The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations », *Int. J. Mech. Sci.*, 51, 869–880.
- [103] Mantari, JL., Guedes Soares, C. (2012), “Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory”, *Compos Struct.* 94(6) ,1991–2000.
- [104] Mantari, JL., Guedes Soares, C. (2013), “Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates”, *Compos Struct.*, 96,545–553.
- [105] Tounsi, A., Houari, MSA., Benyoucef, S. and Adda Bedia, EA. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- [106] Rad A.B., (2015). « Thermo-elastic analysis of functionally graded circular plates resting on a gradient hybrid foundation », *Appl.Math.Comput.* 256 276–298.
- [107] Shen, H.S, (2002), «Postbuckling Analysis of Axially-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments», *Composite Science and Technology*, 62, 977- 987.
- [108] Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002), «Thermal buckling of functionally graded plates», *AIAA Journal*, 40, 162–9.
- [109] J. Yang, J., K. M. Liew., S. Kitipornchai, (2005). « Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates », *Compos. Sci. Technol*; 65 (78):1165 1175.
- [110] Na, K.S. et Kim, J.H., (2005), "Three-Dimensional Thermomechanical Buckling of Functionally Graded Materials", *AIAA Journal*, 47, 1605-1612.
- [111] Wu, L., (2004), "Thermal buckling of a simply appuyed moderately thick rectangular FGM plate", *Composite Structures*, 64, 211–218.
- [112] Yang J, LiewKM, Kitipornchai S. (2004). « Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory ». *Comput Mech*;33:305–15.
- [113] Zenkour, AM.(2007), “Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate”, *Arch Appl Mech.*, 77(4),197–214.
- [114] Shen, H.-S., (2007), "Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties", *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 466-478.
- [115] Mahdavian, M. (2009), “Buckling analysis of simply-appuyed functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading”, *J Solid Mech.*,1(3),213–225.
- [116] Bodaghi, M., Saidi, A. (2010), “Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory”, *Appl. Math. Model.*, 34 (11), 3659-3673.
- [117] Levy, M., (1899), «Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes», *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 3, 219–306.

Références bibliographiques

- [118] Javaheri, 2002.b Javaheri, R., Eslami, M.R. (2002), «Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory», *J. Therm. Stress.*, 25(1), 603-625.
- [119] Javaheri, 2002.c Javaheri. R and Eslami. M. R (2002), «Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading», *ZAMM*, 82, 277-283.
- [120] Shariat 2005 Samsam Shariat. B. A, Javaheri. R, and M. R. Eslami (2005), « Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading », *Thin-Wall. Struct.*, 43, 1020-1036.
- [121] Shariat 2006 Samsam Shariat. B. A and Eslami. M. R, (2006), « Thermal buckling of imperfect functionally graded plates », *Int. J. Solids Struct.*, 43, 4082-4096.
- [122] Shariat 2007 Samsam Shariat, B.A. et Eslami, M.R. (2007), « Buckling of Thick Functionally Graded Plates Under Mechanical and Thermal Loads », *Composite Structures*, 78, 433-439.
- [123] Boudarba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), « Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations », *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104.
- [124] Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. (2013), « Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach », *Meccanica*, 48:2019–2035.
- [125] Kiani, Y., Bagherizadeh, E., Eslami, MR. (2011), “ Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions)”, *ZAMM, J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech.*, 91(7),581–93.
- [126] Houari, M.S.A, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A. and Addabedia, E.A. (2011), «Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates», *J. Thermal Stresses*, 34(4), 315-334.
- [127] Merdaci, S., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Mechab, I., Hebali, H. and Benyoucef, S. (2011), «Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates», *Arch. Appl. Mech.*, 81(11), 1507-1522.
- [128] Bourada.M., A. Tounsi, M. S. Houari, and E. A. Adda Bedia, «A New Four-Variable Refined Plate Theory for Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates», *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 14, p. 5–33, 2012.
- [129] Thai, HT., Uy, B.(2013), “Levy solution for buckling analysis of functionally graded plates based on a refined plate theory”, *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci.*, 227(12), 2649–2664.
- [130] Thai, HT., Choi, DH.(2014), “Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates”, *Compos B Eng.*, 56, 705–716.
- [131] Yang, J. and Shen, H.-S., (2001), «Dynamic response of initially stressed functionally graded», *Composite Structures*, 497-508.
- [132] Reddy, J.N. et Chen, Z.Q., «Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach», *Journal of Engineering Mechanics*, (2003), 129, 896–900.

Références bibliographiques

- [133] Huang, X.-L. and Shen, H.-S., (2004), «Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments», *International Journal of Solids and Structures*, 41, 2403–2427.
- [134] Vel, S.S. et Batra, R.C., (2004). «Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates», *Journal of Sound and Vibration*, 703-730.
- [135] Qian, L.F., Batra, R.C. and Chen, L.M., (2004), «Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method», *Composite: Part B*, 685-697.
- [136] Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge, R., (2006). «Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method», *Composite Structures*, 75, 593–600.
- [137] Woo, J., Meguid, S.A., Ong, L.S. (2006), “Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates”, *J Sound Vib.*, 289(3),595–611
- [138] Uymaz, B. and Aydogdu, M., (2007), «Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions», *Composites of Reinforced Plastics and Composites*, 26, 1847-1863.
- [139] Abrate, S. (2008), « Functionally graded plates behave like homogeneous plates », *Composites Part B: Engineering*, 39(1), 151-158.
- [140] Li, Q., Iu, V.P. and Kou, K.P., (2008), « Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates », *Journal of Sound and Vibration*, 498-515.
- [141] Matsunaga, H., (2008), «Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory», *Composite Structures*, 499–512.
- [142] Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. and Ehteshami, H., (2011). «Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation», *Composite Structures*,
- [143] Hu, Y., Zhang, X. (2011), “Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate”. *Mech Based Des Struct Mach.*, 39(3) ,367–377.
- [144] Xiang, S, Jin, Y.X, Bi, Z.Y, Jiang, S.X, Yang, M.S. (2011), “A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates”, *Compos Struct.*, 93(11), 2826–2832.
- [145] Benachour, A., HassaineDaouadji, T., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S. A. «A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient» *Composites: Part B* 42, 1386–1394, (2011).
- [146] H. Hejali, A. Tounsi, M. S. A. Houari, A. Bessaim, and E. A. Adda Bedia, (2014). «New Quasi- D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 140, pp. 374–383,
- [147] Foroughi, H., Azhari, M. (2014), “Mechanical buckling and free vibration of thick functionally graded plates resting on elastic foundation using the higher order B-spline finite strip method”, *Meccanica.*,49(4), 981–993.

Références bibliographiques

- [148] Saidi, H., Tounsi, A., and Bousahla, A.A. (2016), “A simple hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations”, *Geomechanics and Engineering*, 11(2), 289-307.
- [149] Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations”, *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1215-1240.
- [150] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 38, 265–275.
- [151] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. (2016), “ A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547-565.
- [152] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2001), « Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates », *Eur. J. Mech. A-Solids*, 20(5), 841-855.
- [153] Golmakani, M.E. and Kadkhodayan, M. (2011), « Large deflection analysis of circular and annular FGM plates under thermo-mechanical loadings with temperature-dependent properties », *Compos. Pt. B-Eng.*, 42(4), 614-625.
- [154] Tung, H.V. and Duc, N.D. (2014), « Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations and subjected to mechanical and thermal loading conditions », *Appl. Math. Model.*, 38(11), 2848-2866.
- [155] Kar, V.R., Panda, S.K. and Mahapatra, T.R. (2016), « Thermal buckling behaviour of shear deformable functionally graded single/doubly curved shell panel with TD and TID properties », *Adv. Mater. Res., Int. J.*, 5(4), 205-221.
- [156] Panda, S.K., Mahapatra, T.R. and Kar, V.R. (2017), « Nonlinear finite element solution of post-buckling responses of FGM panel structure under elevated thermal load and TD and TID properties », *MATEC Web of Conferences*, 109, 05005.
- [157] Katariya, P.V., Das, A. and Panda, S.K. (2018), “Buckling analysis of SMA bonded sandwich structure – using FEM », *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 338(1), 012035.
- [158] Li, D., Deng, Z., Xiao, H. and Zhu, L (2018), « Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded cores », *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 25(3), 179-191.
- [159] Mehar, K. and Panda, S.K. (2018), « Nonlinear finite element solutions of thermoelastic flexural strength and stress values of temperature dependent graded CNT-reinforced sandwich shallow shell structure », *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 67(6), 565-578.
- [160] Panda, S.K. and Singh, B.N. (2009), « Thermal post-buckling behaviour of laminated composite cylindrical/hyperboloid shallow shell panel using nonlinear finite element method », *Compos. Struct.*, 91(3), 366-374.

Références bibliographiques

- [161] Panda, S.K., Singh, B.N. (2010a), “Nonlinear free vibration analysis of thermally post-buckled composite spherical shell panel”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, **6**(2), 175-188.
- [162] Panda, S.K. and Singh, B.N. (2011), « Large amplitude free vibration analysis of thermally post-buckled composite doubly curved panel using nonlinear FEM », *Finite Elem. Anal. Des.*, **47**(4), 378-386.
- [163] Panda, S.K. and Singh, B.N. (2013a), « Nonlinear finite element analysis of thermal post-buckling vibration of laminated composite shell panel embedded with SMA fibre », *Aerosp. Sci. Technol.*, **29**(1), 47-57.
- [164] Panda, S.K. and Singh, B.N. (2010b), « Thermal post-buckling analysis of a laminated composite spherical shell panel embedded with shape memory alloy fibres using non-linear finite element method », *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **224**(4), 757-769.
- [165] Panda, S.K. and Singh, B.N. (2013b), « Post-buckling analysis of laminated composite doubly curved panel embedded with SMA fibers subjected to thermal environment », *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **20**(10), 842-853.
- [166] Panda, S.K. and Singh, B.N. (2013c), « Thermal postbuckling behavior of laminated composite spherical shell panel using NFEM », *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, **41**(4), 468-488.
- [167] Sofiyev, A.H. and Avcar, M. (2010), « The stability of cylindrical shells containing an FGM layer subjected to axial load on the Pasternak foundation », *Eng.*, **2**(4), 228.
- [168] Moradi, S. and Mansouri, M.H. (2012), « Thermal buckling analysis of shear deformable laminated orthotropic plates by differential quadrature », *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **12**(2), 129-147.
- [169] Abdelhak, Z., Hadji, L., Daouadji, T.H. and Adda Bedia, E.A. (2015), « Thermal buckling of functionally graded plates using a n-order four variable refined theory », *Adv. Mater. Res., Int. J.*, **4**(1), 31-44.
- [170] Abdelhak, Z., Hadji, L., Daouadji, T.H. and Adda Bedia, E.A. (2016b), « Thermal buckling response of functionally graded sandwich plates with clamped boundary conditions », *Smart Struct. Syst., Int. J.*, **18**(2), 267-291.
- [171] Ebrahimi, F. and Farazmandnia, N. (2018), « Thermal buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite sandwich beams », *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **27**(2), 149-159.
- [172] Akbaş, S.D. (2018b), « Thermal post-buckling analysis of a laminated composite beam », *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **67**(4), 337-346.
- [173] Karami, B., Shahsavari, D., Nazemosadat, S.M.R., Li, L. and Ebrahimi, A. (2018a), “Thermal buckling of smart porous functionally graded nanobeam rested on Kerr foundation”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **29**(3), 349-362.
- [174] Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 187-212.

Références bibliographiques

- [175] Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2018), “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates”, *Compos. Struct.*, 184, 688-697.
- [176] Bourada, F., Amara, K. and Tounsi, A. (2016), « Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory », *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 21(6), 1287-1306.
- [177] Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), « A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates », *Geomech. Eng., Int. J.*, 13(3), 385-410.
- [178] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Computat. Method.*, 11(6), 1350082.
- [179] Ait Atmane, H, Tounsi, A. and Bernard, F. (2017), “Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 13(1), 71-84.
- [180] Boutaleb, S., Benrahou, K.H., Bakora, A., Algarni, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2019), “Dynamic analysis of nanosize FG rectangular plates based on simple nonlocal quasi 3D HSDT”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, 7(3), 191-208.
- [181] Chaabane, L.A., Bourada, F., Sekkal, M., Zerouati, S., Zaoui, F.Z., Tounsi, A., Derras, A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2019), “Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 71(2), 185-196.
- [182] Semmah, A., Heireche, H., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2019), “Thermal buckling analysis of SWBNNT on Winkler foundation by non local FSDT”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, 7(2), 89-98.
- [183] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017), “Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 19(3), 289-297.
- [184] Kaci, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2018), “Post-buckling analysis of shear-deformable composite beams using a novel simple two unknown beam theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 65(5), 621-631.
- [185] Meksi, R, Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2019), “An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 21(2), 727-757.
- [186] Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2019), “A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 21(6), 1906-1926.
- [187] Brush, D.O. and Almroth, B.O. (1975), “Buckling of bars, plates, and shells”, *New York: McGraw-Hill*.

Références bibliographiques

- [188] Sobhy, (2013), «Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates Resting on Elastic Foundations under Various Boundary Conditions», *Composite Structures*, **99**, pp. 76–87.
- [189] Meyers, C.A. and Hyer, M.W. (1991), “Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates”, *J. Therm. Stress.*, **14**(4), 519-540.
- [190] Noor, A.K., Burton, W.S. (1992), “Three-dimensional solutions for the thermal buckling and sensitivity derivatives of temperature– sensitive multilayered angle-ply plates”. *ASME J Appl Mech*, **59**(12), 848–56.
- [191] Matsunaga, H. (2005), “Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory”, *Compos Struct*, **68**, 439–454.