

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

**THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES**

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

**Mr : BATOU Belaid**

Intitulé de la thèse

## **Etude de la propagation des ondes dans les plaques épaisses sigmoïdes**

**Soutenu le : 09/12 /2020 Composition du jury :**

|                          |     |            |                       |
|--------------------------|-----|------------|-----------------------|
| TOUNSI Abdelouahed       | Pr  | UDL SBA    | Président             |
| AIT ATMANE Hassen        | Pr  | UHBC Chlef | Directeur de thèse    |
| BOUREMANA Mohammed       | Pr  | UDL SBA    | Co-Directeur de thèse |
| BOUSHLA Anis Abdelmoumen | MCA | UDL SBA    | Examineur             |
| DRAICHE Kada             | MCA | UIK Tiaret | Examineur             |
| CHIKH Abdelbaki          | MCA | UIK Tiaret | Examineur             |

**Année universitaire 2019-2020**

# REMERCIEMENTS

Je remercie en premier et en dernier lieu, **DIEU** tout, puissant de m'avoir gardé en bonne santé et m'accordé le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **AIT ATMANE Hassen**, Professeur à l'UHB de Chlef, encadreur de cette thèse, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je tiens aussi à rendre hommage au Monsieur **TOUNSI Abdelouahed**, Professeur à l'UDL de Sidi Bel Abbes pour son intérêt à mon travail et je lui exprime mon honneur ainsi que mes gratitude d'être président de jury de ma soutenance.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs : **BOUSHLA Anis Abdelmoumen** maître de conférences de l'UDL de Sidi Bel Abbés, **DRAICHE Kada** et **CHIKH Abdelbaki** maîtres de conférences de l'UIK de TIARET, qui ont voulu examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et mes sincères remerciements à Mes collègues **BENNAI Riadh**, **Mokhtar Nebab**, **FORN Hossin** et **BOUCHACHI Abdelkrim**.

A toute ma famille ; mes parents, mes frères et sœurs, à tous mes collègues, pour le soutien continu qu'ils m'ont apporté tout aux longs de ces années d'études.

## *Résumé*

Dans cette thèse, différentes théories de déformation de cisaillement d'ordre élevées sont développées pour l'analyse de la propagation des ondes dans les plaques épaisses sigmoïde. En raison de porosités, éventuellement survenant à l'intérieur des matériaux à gradient fonctionnel (S-FGM) lors de la fabrication, il est donc nécessaire, dans ce travail, d'étudier la propagation des ondes dans les plaques à la porosité uniforme et non uniforme avec les trois formes proposées linéaires, logarithmiques et exponentielles.

La loi de mélange est formulée pour décrire et rapprocher les propriétés matérielles des plaques fonctionnellement graduées avec et sans porosité. Les équations régissant la propagation des ondes dans la plaque S-FGM sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. Les solutions analytiques et les relations de dispersion sont obtenues en résolvant un problème de valeur propre en utilisant la solution Navier.

Des études paramétriques seront présentées pour souligner l'influence des différents paramètres (indice de puissance matériel, rapport d'épaisseur longueur, indice de porosité) sur la propagation des ondes dans les plaques S-FG.

La variation de l'épaisseur de la plaque nous donne une approche sur l'effet du rapport d'épaisseur sur la propagation des ondes dans les plaques S-FGM.

**Mots clés :** propagation des ondes ; plaques sigmoïdes fonctionnellement gradués ; porosité ; loi de puissance ; théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevées.

## *Abstract*

In this thesis, different theories of high order shear deformation are developed for the analysis of wave propagation in thick sigmoid plates. Due to porosities, possibly occurring inside materials with a functional gradient (S-FGM) during manufacturing, it is therefore necessary, in this work, to study the propagation of waves in plates having uniform porosity and not uniform with the three proposed linear, logarithmic and exponential forms.

The variation of the thickness of the plate gives us an approach on the effect of the thickness ratio on the wave propagation in S-FGM plates.

The mixing law is formulated to describe and compare the material properties of functionally graduated plates with the vacuum phases. The equations governing the propagation of waves in the property gradient plate are obtained using the Hamilton principle. The analytical dispersion relations of the plate with functional gradation are obtained by solving a problem with eigenvalues. The effects of volume fraction distributions and porosity volume on wave propagation in sigmoid plates with functional gradient are discussed in detail.

Parametric studies will be presented to highlight the influence of the different parameters (material power index, length thickness ratio, porosity index) on the wave propagation in S-FG plates.

**Keywords:** Wave propagation; functionally graduated sigmoid plates; Porosity; Higher order shear deformation theory.

## ملخص

في هذه الأطروحة، تم تطوير نظريات مختلفة حول تشوه القص عالي الترتيب لانتشار الموجة في الصفائح السينية سميكة بسبب الفراغات التي يمكن أن تحدث داخل المواد ذات التدرج الوظيفي (S-FGM) أثناء التصنيع ، فمن الضروري في هذا العمل دراسة انتشار الموجات في لوحات ذات فراغات موحدة وليست موحدة مع الأشكال الثلاثة الخطية واللوغاريتمية والأسية المقترحة.

إن اختلاف سمك اللوح يمنحنا مفهوماً حول تأثير نسبة السماكة على انتشار الموجة في صفائح S-FGM. تمت صياغة قانون الخلط لوصف ومقارنة الخواص المادية للصفائح المتدرجة وظيفياً مع مراحل التفريغ. يتم الحصول على المعادلات التي تحكم انتشار الموجات في لوحة تدرج الملكية باستخدام مبدأ هاميلتون. يتم الحصول على علاقات التشتت التحليلية للوحة مع التدرج الوظيفي عن طريق حل مشكلة مع القيم الذاتية آثار توزيعات الكسر الحجمي وحجم المسامية على انتشار الموجة في الصفائح السينية ذات التدرج الوظيفي نوقشت بالتفصيل. في هذه الأطروحة. سيتم تقديم دراسات دقيقة لإلقاء الضوء على تأثير المعاملات المختلفة (مؤشر قدرة المواد، نسبة سمك الطول ومؤشر الفراغات) على انتشار الموجة في لوحات S-FGM .

**كلمات البحث:** انتشار الموجات، الصفائح المتدرجة وظيفياً، الفراغات، تشوه القص ذات رتبة عليا.

## TABLE DES MATIERES

|                                    |          |
|------------------------------------|----------|
| Résumé.....                        | i        |
| Abstract.....                      | ii       |
| Table des Matières.....            | iv       |
| Liste des Figures.....             | vii      |
| Liste des Tableaux.....            | xi       |
| Liste des Notations.....           | xii      |
| <i>Introduction générale</i> ..... | <i>1</i> |

### CHAPITRE I : Matériaux Composites

|   |    |
|---|----|
| I-1. Introduction .....   | 6  |
| I-2. Définition.....  | 6  |
| I.3. Les types de matériaux composites.....                               | 7  |
| I-4. Les éléments d'un Matériau composite .....                           | 7  |
| I-4.1. Les Renforts .....   | 7  |
| I-4.1.1. Fibres minérales ou organiques .....                             | 8  |
| I-4.1.2. Formes des renforts .....  | 13 |
| I.4.2 Interfaces .....  | 16 |
| I.4.3 La matrice.....   | 16 |
| I.4.3.1. Les Matrices Organiques .....                                    | 16 |
| I.4.3.1.1. Résines thermodurcissables .....                               | 16 |
| I.4.3.1.2. Résines thermoplastiques.....                                  | 17 |
| I.4.3.2. Les Matrices Minérales.....                                      | 17 |
| I.4.3.2.1. Les Matrices Métalliques .....                                 | 17 |
| I.4.3.2.2. Les Matrices Céramiques.....                                   | 18 |
| I.5. Un premier exemple de matériau composite : le béton armé.....        | 18 |
| I-6. Propriétés mécaniques et physiques des composites .....              | 18 |
| I.7. Principaux avantages et inconvénients des matériaux composites ..... | 20 |
| I.7.1. Avantages .....  | 20 |
| I.7.2. Inconvénients .....  | 21 |
| I.8. Le comportement élastique des matériaux composites.....              | 21 |

|  |    |
|--|----|
| I.9. Domain d'utilisation des matériaux composites .....         | 21 |
| I.10. La nécessité d'un renfort structurel.....                  | 21 |
| I.11. Applications des matériaux composites en génie civil ..... | 22 |
| I.12. Conclusion .....   | 23 |

## CHAPITRE II : Généralités sur les matériaux FGM et propagation des ondes

|   |    |
|---|----|
| II-1. Introduction .....  | 25 |
| II.2. Historique des matériaux FGM .....  | 26 |
| II.3 Comparaison entre matériaux composites et FGM .....  | 27 |
| II.4 Lois régissant de la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....   | 28 |
| II.4.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM : .....  | 29 |
| II.4.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....   | 29 |
| II.4.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM : .....  | 30 |
| II.5. Les matériaux impropres (poreux) .....  | 31 |
| II.5.1. Définition de la porosité.....  | 31 |
| II.5.2. Revue des travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau ..... | 32 |
| II.6. Domaines d'applications des matériaux à gradation fonctionnel.....  | 33 |
| II.7. Propagation des ondes dans les plaques FGM.....   | 35 |
| II.8. Condition de propagation .....  | 36 |
| II.9. Eléments de propagation des ondes.....  | 36 |
| II.9.1. Vitesse de propagation .....  | 37 |
| II.9.2. Vitesse de phase .....  | 38 |
| II.9.3. Vitesse de groupe.....  | 38 |
| II.10. Les différents types d'ondes élastiques .....  | 40 |
| II.10.1. Ondes longitudinales et transversales.....   | 40 |
| II.10.2. Ondes de Surface.....  | 40 |
| II.10.3. Ondes de Rayleigh .....  | 41 |
| II.10.4. Ondes progressives et ondes stationnaires .....  | 42 |
| II.10.5. Propagation des ondes guidées dans un milieu linéaire .....  | 43 |
| II.10.5.1 Ondes de Lamb .....   | 43 |
| II.10.5.2 Ondes de flexion.....   | 46 |
| II.11 Conclusion.....   | 47 |

## CHAPITRE III : Analyse théorique de la propagation des ondes dans les plaques épaisses en S-FGM

|   |    |
|---|----|
| III.1. Introduction .....   | 49 |
| III.2. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque S-FGM avec porosité..... | 50 |
| III.2.1. Plaques parfaites et imparfaites S-FG .....                                      | 50 |
| III.2.2. La loi de mélange de Voigt modifiée pour les plaques poreuses S-FG.....          | 50 |
| III.3. Equations fondamentales.....   | 52 |
| III.3.1. Hypothèses de base et équations constitutives .....                              | 52 |
| III.3.2. Équations de mouvement .....   | 54 |
| III.3.3. Les relations de la dispersion d'onde .....                                      | 58 |
| III.4. Conclusion.....  | 59 |

## CHAPITRE IV : Validation et discussion des résultats

|   |     |
|---|-----|
| IV.1. Introduction.....   | 60  |
| IV.2. Les résultats numériques et discussion .....                                    | 60  |
| IV.2.1. Propagation des ondes dans les plaques S-FGM parfaites .....                  | 61  |
| IV.2.1.1 La fréquence de propagation de l'onde dans les plaques S-FGM parfaites ..... | 61  |
| IV.2.1.2 La vitesse de phase dans les plaques S-FGM parfaites .....                   | 66  |
| IV.2.1.3 Etude comparative de la variation de h.....                                  | 70  |
| IV.2.2. Propagation des ondes dans les plaques S-FGM imparfait .....                  | 73  |
| IV.2.2.1 Répartition uniforme de la porosité .....                                    | 73  |
| IV.2.2.1.1 La fréquence en fonction de nombre d'onde.....                             | 73  |
| IV.2.2.1.2 La vitesse de la phase en fonction du nombre d'onde .....                  | 78  |
| IV.2.2.1.3 La fréquence en fonction de la loi de puissance .....                      | 82  |
| IV.2.2.1.4 La vitesse de la phase en fonction de la loi de puissance.....             | 87  |
| IV.2.2.2 Répartition non-uniforme de la porosité.....                                 | 92  |
| IV.2.2.2.1 La fréquence en fonction du nombre d'onde .....                            | 92  |
| IV.2.2.2.2 La vitesse de la phase en fonction du nombre d'onde .....                  | 99  |
| IV.2.2.2.3 La fréquence en fonction de la loi de puissance .....                      | 106 |
| IV.2.2.2.4 La vitesse de la phase en fonction de la loi de puissance.....             | 113 |
| IV.2.2.3 Etude comparative de la variation de h en fonction de porosité non uniforme  | 120 |
| IV.3. Conclusions .....   | 124 |

## CONCLUSION



|  |     |
|--|-----|
| Conclusion générale et perspectives..... | 125 |
|--|-----|

### *Liste des figures*

|  |    |
|--|----|
| Figure I.1. Présentation d'un matériau composite.....  | 7  |
| Figure I.2 : Principaux matériaux de renfort.....  | 8  |
| Figure I.3 : Fibre de verre.....   | 10 |
| Figure I.4 : Une vue rapprochée sur du tissu en fibre de carbone.....  | 11 |
| Figure I.5 : Fibre d'aramide.....  | 13 |
| Figure I.6 : Eléments composants de la forme linéique.....   | 14 |
| Figure I.7 : Eléments composants de la forme surfacique.....   | 15 |
| Figure I.8 : éléments composants de la structure multidimensionnelle.....  | 15 |
| Figure I.9 : Types de matrice.....   | 17 |
| Figure I.10 : Courbes contrainte-déformation types des composites et l'acier doux.....   | 20 |
| Figure I.11 : Principales applications de renforcement par composite collés sur ouvrages.....  | 23 |
| Figure II.1 Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996].....  | 28 |
| Figure II.2 La distribution composante des matériaux [Yoshihisa 2004].....   | 29 |
| Fig. II.3 Caractéristiques géométriques d'une plaque FG.....   | 29 |
| Fig. II.4 Variation de module de Young $E$ en fonction de $k$ dans une plaque P-FGM.....   | 30 |
| Figure II.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....  | 31 |
| Figure II.6 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....  | 31 |
| Figure. II.7 : (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores. [Y. Ledru 2009].....                          | 32 |
| Figure II.8 : Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites carbone/époxy [Wisnom et al., 1996].....  | 33 |
| Figure. II.9 : propagation d'une onde le long d'une corde tendue et ressort à un instant $t$ .....   | 37 |
| Figure. II.10 : Vitesse de propagation d'une onde monochromatique.....   | 38 |
| Figure. II.11 : a) Vitesses de phase et b) Vitesse de groupe [M. Nicolas 2010].....  | 40 |
| Figure II.12 : Phénomène d'onde -a) longitudinale et -b) transversale.....   | 41 |
| Figure II.13 : Propagation des ondes de surface.....   | 42 |
| Figure II. 14 : Onde de Rayleigh : la polarisation est elliptique et rétrograde près de la surface. [O. Xeridat 2011].....   | 43 |
| Figure II. 15: propagation d'onde stationnaire.....  | 44 |
| Figure II. 16 : Ondes de Lamb dans une plaque isotrope.....  | 45 |
| Figure II.17 : Modes de Lamb (a) antisymétriques et (b) symétriques.....   | 46 |
| Figure II.18 : Courbes de dispersion des ondes de Lamb pour une plaque d'aluminium d'épaisseur 4mm.[Y. Baccouche2013].....   | 47 |
| Figure. II.19: Relation de dispersion d'après des théories de Timoshenko, Rayleigh et Bernoulli-Euler dans le Cas d'un composite base polymère d'épaisseur 2.5mm [Y. Baccouche2013].....                             | 47 |
| Figure. II.20: Courbe de dispersion d'une plaque composite à fibre de verre ( $h=2.5\text{mm}$ ) avec les paramètres élastiques ( $E$ et $\nu$ ) sont déterminés par des mesures ultrasonores[Y. Baccouche2013]..... | 48 |

|  |    |
|--|----|
| Figure. III.1 : La géométrie et les coordonnées de la plaque SFGM.....   | 50 |
| Tableau.III.1. Facteur de la distribution de la porosité $\Omega$ .....  | 52 |
| Figure IV.1 : Les courbes de la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $h=0.02$ ).....   | 62 |
| Figure IV.2 : Les courbes de la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $h=0.05$ ).....   | 63 |
| Figure IV.3 : Les courbes de la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $h=0.1$ ).....  | 64 |
| Figure IV.4 : Les courbes de la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $h=0.2$ ).....  | 65 |
| Figure.IV.5:Courbes de la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde pour $h=0.02$ .....  | 67 |
| Figure.IV.6:Courbes de la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde pour $h=0.05$ .....  | 68 |
| Figure.IV.7 : Courbes de la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde pour $h=0.1$ .....   | 69 |
| Figure.IV.8 : Courbes de la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde pour $h=0.2$ .....   | 70 |
| Figure.IV.9 : l'effet de l'épaisseur de la plaque sur la fréquence dans la plaque S-FG en terme de nombre d'onde ( $\text{Alpha}=0$ ).....                     | 71 |
| Figure IV.10 : Effet de l'épaisseur de la plaque sur la vitesse de la phase dans la plaque S-FG en terme de nombre d'onde ( $\text{Alpha}=0$ ).....            | 72 |
| Figure IV.11 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence des plaques S-FG en terme de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT $h=0.02$ ).....                         | 74 |
| Figure IV.12 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence des plaques S-FG en terme de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT $h=0.05$ ).....                         | 75 |
| Figure IV.13 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence des plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT $h=0.1$ ).....                         | 76 |
| Figure IV.14 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence des plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT $h=0.2$ ).....                         | 77 |
| Figure IV.15 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en terme de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT, $p=2$ , $h=0.02$ )..... | 79 |
| Figure IV.16 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en terme de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT, $p=2$ , $h=0.05$ )..... | 80 |
| Figure IV.17 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT, $p=2$ , $h=0.1$ )..... | 81 |
| Figure IV.18 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT, $p=2$ , $h=0.2$ )..... | 82 |
| Figure IV.19 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence dans les plaques S-FG en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ , $h=0.02$ ).....            | 83 |
| Figure IV.20 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence dans les plaques S-FG en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ , $h=0.05$ ).....            | 84 |
| Figure IV.21 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence dans les plaques S-FG en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ , $h=0.1$ ).....             | 85 |
| Figure IV.22 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence dans les plaques S-FG en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ , $h=0.2$ ).....             | 86 |
| Figure IV.23 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ , $h=0.02$ ).....  | 88 |

|   |     |
|---|-----|
| Figure IV.24 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en fonction de l'indice de puissance ( $k=10, h=0.05$ ).....                          | 89  |
| Figure IV.25 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en fonction de l'indice de puissance ( $k=10, h=0.1$ ).....                           | 90  |
| Figure IV.26 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en fonction de l'indice de puissance ( $k=10, h=0.2$ ).....                           | 91  |
| Figure IV.27 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).....             | 93  |
| Figure IV.28 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ ).....             | 94  |
| Figure IV.29 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).....        | 95  |
| Figure IV.30 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ ).....        | 96  |
| Figure IV.31 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).....        | 97  |
| Figure IV.32 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ ).....        | 98  |
| Figure IV.33 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).....      | 100 |
| Figure IV.34 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ ).....      | 101 |
| Figure IV.35 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ )..... | 102 |
| Figure IV.36 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ )..... | 103 |
| Figure IV.37 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ )..... | 104 |
| Figure IV.38 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la vitesse de phase dans les plaques S-FG en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ )..... | 105 |
| Figure IV.39 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ ).....      | 107 |
| Figure IV.40 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ ).....      | 108 |
| Figure IV.41 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ )..... | 109 |
| Figure IV.42 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ )..... | 110 |
| Figure IV.43 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ )..... | 111 |

|   |     |
|---|-----|
| Figure IV.44 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la fréquence dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ ).....           | 112 |
| Figure IV.45 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ ).....      | 114 |
| Figure IV.46 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ ).....      | 115 |
| Figure IV.47 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ )..... | 116 |
| Figure IV.48 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ )..... | 117 |
| Figure IV.49 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ )..... | 118 |
| Figure IV.50 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FG en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ )..... | 119 |
| Figure.IV.51 : l'effet de l'épaisseur de la plaque sur la fréquence des plaque S-FG en fonction de nombre d'onde avec indice de porosité $\text{Alpha}=0.1$ .....                             | 120 |
| Figure.IV.52 : l'effet de l'épaisseur de la plaque sur la fréquence des plaque S-FG en fonction de nombre d'onde avec indice de porosité $\text{Alpha}=0.2$ .....                             | 121 |
| Figure.IV.53 : Influence du rapport d'épaisseur sur les vitesses de phases d'une plaque S-FG avec un indice de porosité égale 0.1 .....   | 122 |
| Figure.IV.54 : Influence du rapport d'épaisseur sur les vitesses de phases d'une plaque S-FG avec un indice de porosité égale 0.2 .....   | 123 |

*Liste des tableaux*

|  |    |
|--|----|
| Tableau I.1 : Caractéristiques moyennes des principales fibres de renfort.....                           | 13 |
| Tableau I.2 : Performances comparées des différents types d'architecture.....                            | 16 |
| Tableau I.3 : Caractéristiques des résines thermodurcissables.....                                       | 17 |
| Tableau I.4 : Caractéristiques des résines thermoplastiques.....   | 18 |
| Tableau I.5 : Propriétés mécaniques types des composites de verre, de carbone et d'aramide.....          | 19 |
| Tableau I.6 : Comparaison qualitative entre les fibres de verre, de carbone et les fibres d'aramide..... | 20 |
| Tableau III.2 : les fonctions de formes des différents modèles.....                                      | 53 |
| Tableaux IV.1. Propriétés des matériaux des plaques S-FG.....  | 60 |

## Liste des notations

|                      |   |
|----------------------|---|
| $FGM$                | Matériau fonctionnellement gradués.   |
| $\zeta$              | Facteur de la distribution de la porosité.                                  |
| $\alpha$             | Coefficient de porosité.  |
| $E$                  | Le module de Young.   |
| $E(z)$               | Module de Young en fonction de « z ».                                       |
| $E_c$                | Module de Young de la céramique.  |
| $E_m$                | Module de Young du métal.   |
| $\nu$                | Le coefficient de Poisson.  |
| $\rho$               | La masse volumique.   |
| $\rho_c$             | La masse volumique de la céramique.   |
| $\rho_m$             | La masse volumique du métal.  |
| $P$                  | Coefficient de puissance matériel.  |
| $a$                  | Longueur de la plaque suivant la direction de $\mathbf{x}$ .                |
| $b$                  | Largeur de la plaque suivant la direction de $\mathbf{y}$ .                 |
| $h$                  | L'épaisseur de la plaque suivant la direction de $\mathbf{z}$ .             |
| $u_0, v_0, w_0$      | Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.     |
| $u, v, w$            | Les déplacements dans les directions $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ . |
| $f(z)$               | Fonction de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque.                  |
| $\bar{P}$            | Propriété matériel.   |
| $\bar{P}_c$          | Propriété matériel de la céramique.   |
| $\bar{P}_m$          | Propriété matériel du métal.  |
| $V_c$                | Fraction volumique de la céramique.   |
| $V_m$                | Fraction volumique du métal.  |
| $\kappa_1$           | Le nombre d'onde de propagation le long de la direction d'axe des « x ».    |
| $\kappa_2$           | Le nombre d'onde de propagation le long de la direction d'axe des « y ».    |
| $\delta U$           | La variation de l'énergie de déformation.                                   |
| $\delta V$           | La variation de l'énergie potentielle de la base élastique.                 |
| $\delta K$           | La variation de l'énergie cinétique.  |
| $A$                  | La surface supérieure.  |
| $\sigma_x, \sigma_y$ | Contrainte normale.   |

|   |                                |
|---|--------------------------------|
| $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$       | Contrainte de cisaillement.    |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y$          | Déformation normale.           |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ | Déformation de cisaillement.   |
| $I_1, J_1, K_1$                         | Des inerties de masse.         |
| $\omega$                                | La fréquence de propagation.   |
| $[K]$                                   | Matrice de rigidité.           |
| $[M]$                                   | Matrice de masse.              |
| $\{\Delta\}$                            | Vecteur déplacement.           |
| $C_i$                                   | Vitesse de phase du mode $i$ . |
| $\{\}$                                  | Vecteur.                       |
| $[\ ]$                                  | Matrice.                       |

# INTRODUCTION GENERALE

---



## ***Introduction générale***

Les Matériaux à gradation fonctionnelle (FGMs) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et donc éliminer la concentration de contrainte trouvée dans les composites stratifiés. Un FGM typique est fabriqué à partir d'un mélange de deux phases de matériaux, de la céramique et du métal. La raison de l'utilisation croissante des (FGMS) dans divers secteurs aérospatial, automobile, civil et des structures mécaniques est que leurs propriétés matérielles peuvent être adapté à différentes applications et environnements de travail (Reddy J.N., 2000; Ebrahimi F, 2016a; Ebrahimi F., 2016b).

Les structures fonctionnellement graduées sont celles dans lesquelles les fractions volumiques de deux matériaux ou plus varient continuellement en fonction de la position le long de certaines dimensions de la structure afin de remplir les fonctions souhaitables pour des applications spécifiques en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, (Koizumi 1993, Ait Atmane 2011, Ould Larbi 2013, Tounsi 2013, Hebali et al, 2014 ; Al-Basyouni 2015 ; Bennai 2015, Ait Yahia. 2015, Larbi Chaht 2015, Boukhari 2016) Par exemple, des structures de plaque de barrière thermique pour des applications à haute température peuvent être formées à partir d'un mélange de céramique et du métal. La composition varie d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal, avec une variation souhaitée des fractions volumiques des deux matériaux entre les deux surfaces. La céramique constituant le matériau assure la résistance aux températures élevées en raison de sa faible conductivité thermique. Le changement progressif des propriétés des matériaux peut être adapté à différentes applications et environnements de travail.

Le développement de l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradient dans les structures nécessite une bonne compréhension du comportement mécanique des structures FGM afin d'offrir un profil optimum aux concepteurs.

Actuellement, plusieurs travaux concernant l'étude du comportement mécanique des plaques FGM sont annoncés sur l'analyse de la vibration libre, le flambement et la flexion des plaques et sur l'étude de l'effet thermique sur le comportement non linéaire des plaques FGM.

Reissner (1945), Cranch (1956), Bresse (1859) et autres ont été les innovateurs de la recherche dans l'étude du différent comportement des structures en matériaux isotropes sous différentes contraintes. Avec le développement du concept de FGM, de nombreux travaux ont été étudiés et publiés dans la littérature.

Reddy (2000) a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme.

Vel et Batra (2004) ont proposé une solution exacte tridimensionnelle des vibrations libres et forcées, pour des plaques rectangulaires en FGM simplement appuyées. Zenkour (2006) a présenté une théorie généralisée de la déformation par cisaillement dans laquelle les déplacements de la membrane sont étendus sous forme de fonction trigonométrique sur toute l'épaisseur. Malek zadeh (2009) a étudié l'analyse des vibrations libres de plaques épaisses dans les FGM sur des fondations élastiques à deux paramètres. Par la suite, de nouvelles fonctions de forme ont été proposées par Ait Atmane et al. (2010) ; Benachour et al. (2011) et Ait Amar Meziane et al. (2014). Ait Atmane et al. (2015) ont présenté un modèle de déplacement en cisaillement calculé pour l'analyse vibratoire des plaques FG avec des porosités. Beldjelili et al. (2015) ont analysé la réponse en flexion hygro-thermo-mécanique de plaques S-FGM reposant sur des fondations élastiques variables en utilisant une théorie de plaque trigonométrique à quatre variables. Tounsi et al (2016) ont développé une nouvelle théorie non polynomiale à trois inconnus pour le flambement et les vibrations des plaques sandwich FG.

Aussi, de nombreux articles sont publiés concernant l'analyse des structures en FGM basées sur des théories d'ordre élevé HSDTs (Al-Basyouni K.S.et al., 2015...). Des théories supplémentaires de cisaillement et de déformation normale sont présentées dans la littérature (Ould Larbi L.et al., 2013; Draiche K.et al., 2014;; Akavci, 2015; Meradjah M.et al., 2015; Bakora A., 2015).

L'étude de la propagation des ondes dans les structures FGM a attiré également beaucoup d'attention par les chercheurs. Chen et al [Chen et al. 2007] ont étudié le comportement de la dispersion des ondes dans une plaque fonctionnellement graduée ayant des propriétés matérielles différentes le long de la direction de l'épaisseur. Han et Liu [Han et Liu 2002] ont étudié les ondes SH dans des plaques FGM, où la variation des propriétés matérielles était

supposée quadratique par tronçon dans le sens de l'épaisseur. Ils ont ensuite [Han et al 2001] proposé une méthode analytique-numérique pour analyser les caractéristiques des ondes dans des cylindres en composites. Ils ont également [Han et al. 2002] proposé une méthode numérique pour étudier l'onde transitoire dans des plaques FGM excitées par les charges d'impact. Sun et Luo [Sun et Luo 2011a] ont aussi étudié la propagation des ondes et la réponse dynamique des plaques rectangulaires en matériaux à gradient évalué sous une charge impulsive. Considérant les effets thermiques et les propriétés des matériaux dépendent de la température. Toutefois, dans la fabrication FGM, des micro porosités où des vides peuvent se produire dans les matières au cours du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence entre la température de cristallisation des différents constituants matériels Zhu et Wattanasakulpong [Zhu et al., 2001], [Wattanasakulpong et al 2012], ont également étudié la porosité des échantillons de FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle multi étape. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de porosité lors de la conception des structures de FGM sous sollicitations dynamiques.

Lors de la fabrication des pièces FGM, des porosités peuvent apparaître dans ces éléments lors du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de température de solidification ; Ces dernières années, certaines études sur l'effet de porosité dans les structures FG ont été publiées dans la littérature ; Wattanasakulpong et al. (2012) ont également donné une discussion sur les porosités qui se développent à l'intérieur des échantillons en FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Wattanasakulpong et al. (2014) ont étudié les problèmes linéaires et non linéaires de la vibration des poutres FGM ayant des porosités. Şimşek et Aydın (2012) ont examiné la vibration forcée des microplaques FG avec des effets de porosité sur la base de la théorie de couple de contrainte modifiée. Jahwari et Naguib (2016) ont étudié les plaques poreuses FG viscoélastiques avec une théorie des plaques d'ordre supérieur et un modèle statistique de distribution cellulaire. Ait Yahia et al. (2015) ont étudié la propagation des ondes dans les plaques FG en prenant en compte l'effet de porosité. Mouaici et al. (2016) ont proposé une solution analytique pour la vibration des plaques FG présentant des porosités. L'analyse était basée sur la théorie de la déformation par cisaillement avec prise en compte de la position exacte de la surface neutre. Récemment, Ait Atmane et al. (2016) étudient l'effet de stretching et de la porosité sur la réponse mécanique d'une poutre FG reposant sur des fondations élastiques. Akbas SD (2017) a étudié les effets thermiques sur le comportement vibratoire des poutres FG avec porosité.

Benadouda et al. (2017) ont présenté une théorie efficace de la déformation par cisaillement pour la propagation des ondes dans les poutres de matériaux FG avec des porosités.

L'objectif de ce travail est d'étudier la propagation des ondes dans les plaques épaisses sigmoïdes S-FGM reposant sur des appuis simples en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Employant un nouveau champ de déplacement de variable intégrale à travers l'épaisseur de la plaque, l'addition du terme d'intégral dans le champ de déplacement mène à une réduction des nombres d'inconnus ; pour tenir en compte effet de la porosité qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux fonctionnellement graduée (S-FGM) au cours de leur fabrication, on a étudié trois formes de répartition de la porosité uniforme et non uniforme en fonction de l'épaisseur de la plaque.

Les équations régissant la propagation des ondes dans la plaque S-FGM sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les relations de dispersion analytiques des plaques S-FGM sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres.

Le présent travail de thèse est organisé en quatre chapitres :

Dans le **chapitre I**, nous définissons les matériaux composites et les propriétés matérielles de ces matériaux suivant l'épaisseur de la plaque ; les principaux avantages et inconvénients ; le comportement élastique des matériaux composites ; l'utilisation des matériaux composites ainsi que l'applications de ces matériaux en génie civil ;

Le **chapitre II**, un aperçu sur le matériau à gradient de propriété FGM, les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du FGM suivant l'épaisseur de la plaque, leur domaine d'application, les causes faisables d'apparition de la porosité ainsi que des généralités sur la propagation des ondes dans les plaques ;

Dans le **chapitre III**, nous présentons les méthodes de résolution des problèmes structuraux, en commençant par le principe général d'équilibre, les équations d'équilibre et les conditions nécessaires pour qu'un système soit en équilibre et nous démontrons les relations nécessaires d'une structure ;

Ensuite dans le **chapitre IV**, une application numérique et une étude comparative des résultats de la propagation des ondes et du comportement vibratoire des plaques sigmoïde fonctionnellement graduées a été illustré afin de vérifier l'efficacité des théories utilisée , qui prend en considération l'effet de déformation par cisaillement transverse ainsi une étude paramétrique sera faite pour étudier L'effet de l'exposant de la fraction volumique et les autres paramètres sur les plaques S-FG simplement appuyé, les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la structure S-FG, une validation du modèle de porosité proposé, tout en le comparant avec ceux trouvés dans la littérature, L'effet de l'épaisseur de la plaque S-FGM sur le comportement est présente sous forme graphique.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où l'on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution des problèmes de la propagation des ondes dans les plaques S-FG ainsi par les perspectives envisagées pour des travaux futurs.

# CHAPITRE I

---

Matériaux Composites Et Technologies

## Chapitre I

### Matériaux Composites

#### I-1. Introduction

Les matériaux composites, produits d'association, donnent des concurrences aux métaux puisqu'ils sont légers, inaltérables et que leur résistance dépasse celle de l'acier (leur rapport résistance/poids est très élevé), en effet les plaques de PRF seraient au moins deux fois jusqu'à 10 fois plus résistantes que les plaques en acier quoique leur poids soit seulement 20% celui de l'acier. Pour le renforcement des ouvrages génie civil, plusieurs interventions qui se présentent dans le secteur de la construction depuis les dix dernières années par les matériaux composites de fibres de verre, d'aramide ou fibres de carbone ; On cherche leur souplesse, leur facilité d'installation et leurs caractéristiques mécaniques adaptées, permettent leur intervention sur des ouvrages de formes complexes. Ces matériaux adaptent à toutes les formes et supports et ne requièrent aucune peinture sous pression et consolidé la performance de la structure, que l'on ne retrouve pas avec les méthodes traditionnelles (béton armé ou plats métalliques collés).

#### I-2. Définition

Un matériau composite est, par définition, tout alliage ou matière première comportant un *renfort sous forme filamentaire*. On peut définir ces matériaux comme une association de plusieurs matériaux de différentes natures à l'échelle microstructurale. Cet assemblage nous permettrait de constituer un matériau dont les performances sont supérieures à celles d'un matériau à un seul composant [BERTHELOT, 2012]. L'association de ces deux composants appelés *renfort* et *matrice*, le mélange doivent être compatibles entre eux et se solidariser, ce qui introduit la notion d'une liaison, qui s'appelle *interface*. On peut connaître à l'avance les caractéristiques mécaniques d'un matières premières classiques, contrairement celles des matériaux composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, puisque on fabrique en même temps le matériau et le produit.

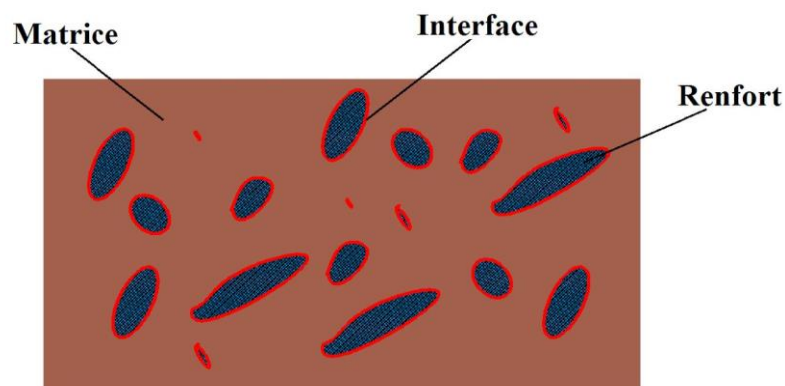
La matrice est caractérisée par une résistance mécanique très faible, tandis que leur rôle dans la composition de matériaux est maintenu les renforts et assuré les transferts de charge, tandis que les renforts apportent principalement leurs caractéristiques mécaniques élevées [AYACHE Belqassim, 2019].

Donc le but principal d'une matrice est de transmettre les efforts mécaniques au renfort et assure la protection du renfort contre les diverses conditions environnementales. Leur caractéristique nous permet d'utiliser suivant la forme voulue au produit final.

Pour assurer la compatibilité des deux constituant d'un matériau composite (renfort – matrice), il faut rajouter une interface, qui transmet les efforts de l'un à l'autre sans déplacement relatif, Figure I.1.

On distingue, généralement, deux grandes familles de composites :

- Les composites de **grande diffusion (GD)**, peu coûteux, occupent une large part du marché,
- Les composites **hautes performances (HP)**, assez onéreux, avec un marché encore réduit.



**Figure I.1.** Présentation d'un matériau composite.

### I.3. Les types de matériaux composites

En général, le domaine des composites est très vaste, on peut décomposer les types de matériaux composites en quatre [BENAHMED Abdelkrim, 2018] :

- Composites à renforts de particules,
- Composites à renforts de fibres,
- Composites à renforts de paillettes,
- Composites stratifiés.

### I-4. Les éléments d'un Matériau composite

#### I-4.1. Les Renforts

La résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites sont augmentées par les renforts qui forment les armatures reprenant l'essentiel des efforts mécaniques, et se présentent sous forme filamentaire.

Selon le type de renfort, on peut identifier plusieurs matériaux composites. Les fibres sont composées par plusieurs milliers de filaments de diamètres qui variant entre 5 à 25  $\mu\text{m}$  [BENAHMED Abdelkrim, 2018].

Les renforts sont caractérisés par :

- La nature de la fibre, minérale ou organique,



- L'architecture du renfort.

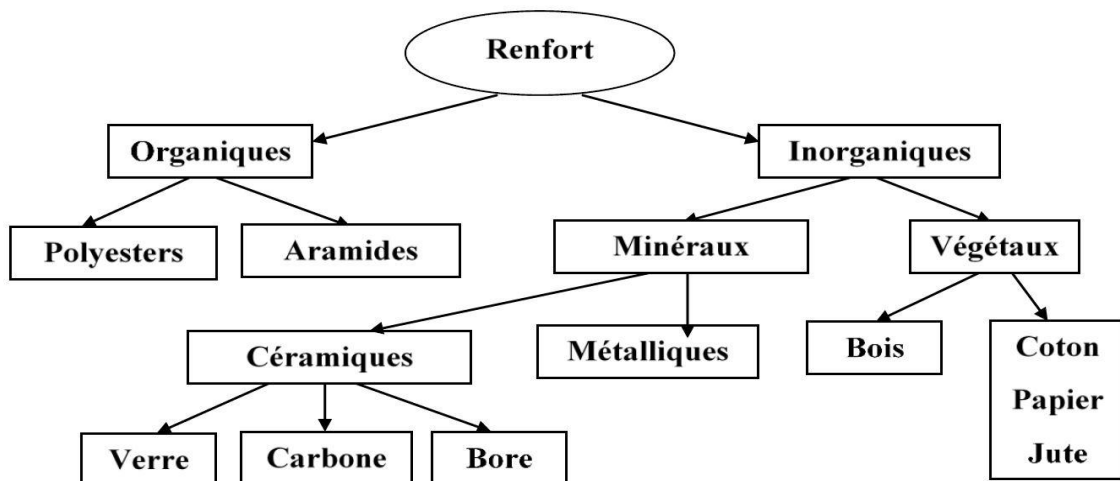


Figure I.2 : Principaux matériaux de renfort [BENAHMED Abdelkrim, 2018]

#### I-4.1.1. Fibres minérales ou organiques

Le plus important paramètre dans les produits finaux est le type de la fibre utilisée, elle nous permet d'obtenir un matériau anisotrope avec un renforcement dans des directions préférentielles. Il existe plusieurs types de fibres parmi lesquelles les fibres synthétiques, les fibres les plus utilisées sont celles de verre, de carbone et d'aramide. Les différents types de fibre sont cités dans le paragraphe suivant :

##### A - Fibres de verre :

La nomenclature fibre de verre peut utiliser d'une part pour un filament de verre extrêmement fin et d'autre part comme un matériau composite renforcé à l'aide de cette fibre. Dans les matériaux composites, les fibres de verre sont généralement associées à des polymères. Ces fibres de verre réduisant le poids des matériaux composites, avec l'amélioration de leurs performances. Elles sont notamment choisies pour leurs propriétés d'inertie chimique, de résistance aux chocs et d'isolation. Dans notre domaine, la procédure de renforcement permet un allègement des structures presque 30% par rapport à l'acier.

Cette matière a été inventée en 1836 par Ignace Dubus-Bonnel, un négociant de Lille. Avec le dépôt d'une demande de brevet portant sur le "tissage du verre rendu malléable par la vapeur, pur ou mélangé avec la soie, laine, coton ou lin". Par cause de leur coût de fabrication qui est très élevé, et malgré le très grand succès qu'il a fait, la nouvelle technologie de fibre de verre tombée dans l'oubli après leur exposition par Dubus-Bonnel en 1839. Dans ces derniers temps et jusqu'à aujourd'hui cette matière devient très utilisée pour sa propriété mécanique et optiques, a révolutionné l'industrie verrière.

D'après [Dorlot et al. 1999] sont les plus utilisés depuis les années quarante dans la construction de structures composites grâce à leur excellent rapport performance/prix. Le module de Young de ces fibres, voisin de celui de l'aluminium, rend l'utilisation des fibres de verre intéressante lorsqu'elles sont associées à une matrice de faible rigidité telle que les polymères.

Le renforcement est de loin l'application la plus importante. D'après les études pour 9 cas sur 10, les fibres de verre servent à renforcer les bétons ou les polymères pour fabriquer des matériaux composites capables de remplacer l'acier [3].

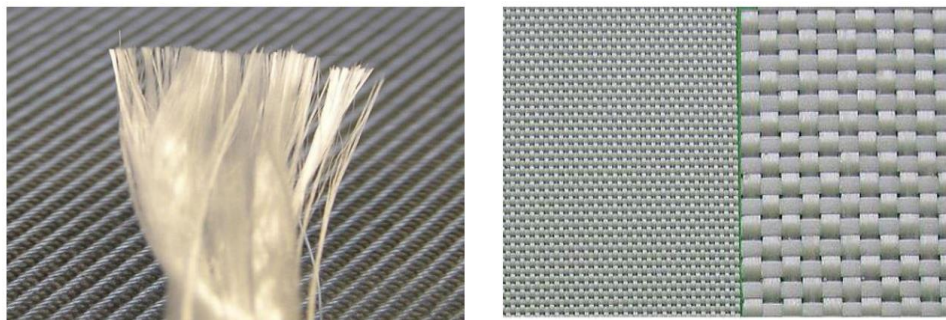
Les principales utilisations de ces matériaux composites sont, par ordre d'importance :

- Les bâtiments et les infrastructures (29%)
- Les transports (25%) : avions, TGV
- L'électricité et l'électronique (16%)
- Les sports et loisirs (14%) : perches d'athlétisme, skis et planches de surf
- Les équipements industriels (11%).

Elles sont obtenues à partir de silice et d'additifs. Pour obtenir ces fibres de verre, il faut coulé le verre en fusion à 1250°C à travers une filière en platine-rhodium; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont décomposées en trois catégories selon leurs qualités:

- *Fibres E* pour les composites grandes diffusions (GD) ;
- *Fibres D* pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- *Fibres R* pour les composites hautes performances (HP).

En général, le plus grand problème associé à ces fibres est leur haute sensibilité aux endommagements superficiels, en particulier les rayures qui limitent leur résistance mécanique et créent des zones de concentration de contraintes. Cela est évité lors de la fabrication en empêchant tout contact entre les fibres elles-mêmes et avec tout autre objet, en recouvrant les fibres d'un enduit qui a pour second rôle de favoriser l'adhésion entre les fibres et la matrice [Hammami, 2018].



**Figure I.3** : Fibre de verre [AYACHE Belqassim, 2019].

**B- Fibres de carbone :**

Par définition, le carbone est une matière légère qui peut résister à de très hautes températures (plusieurs milliers de degrés). Connu par leur conductivité de la chaleur, ce qui lui permet de dissiper l'excès de chaleur, puisque leurs caractéristiques sont essentielles ils ont utilisé cette matière dans les plaquettes de freinage.

Les fibres de carbone, bien que n'étant pas exactement du graphène (composé de carbone également, mais à une échelle un million de fois plus petite), la fibre de carbone reste l'un des matériaux les plus résistants que l'on connaisse.

Leur dureté nous permet de compenser les faiblesses des principales matières plastiques, et c'est pour cela qu'on l'inclut dans des matrices en plastique.

D'une part le carbone est un conducteur d'électricité, par contre il a des propriétés antistatiques dans certains appareils. Il n'est enfin pas sujet à de la corrosion galvanique, qui détériore les structures métalliques avec le temps par l'action électrochimique des éléments.

L'aéronautique par exemple s'en sert énormément, en fait, le coût principal de fonctionnement d'un avion est le carburant donc si en réduisant le poids de l'avion on réduit la consommation du carburant. L'utilisation de carbone au lieu des métaux, nous permet de réduire le poids de l'appareil sans compromettre la résistance mécanique.

Leur poids léger nous permettait d'utiliser dans les compétitions automobiles, les voitures de luxe, ou des appareils manuels sans impact sur la résistance. Cependant son coût est très cher, le carbone est généralement utilisé dans les domaines de luxe, pour son bel aspect.

La fibre de carbone elle-même est obtenue en filant un prépolymère précurseur, généralement du polyacrylonitrile (ou PAN). Il s'agit d'une matière plastique non durcie qui est transformée en un fil très fin. Le traitement de ce dernier à haute température afin d'éliminer tout ce qui n'est pas du carbone pur. C'est la carbonisation, un processus proche de la pyrolyse et similaire à celui qui transforme le bois en charbon de bois.

Le produit final des fibres en carbone, c'est des fines de 3 à 5 micromètres qui est regroupées ensuite dans des nappes de quelques centaines de fibres, puis tressées pour former des tissus entièrement de carbone. L'ensemble est encore souple à ce stade, mais déjà très résistant.

Les chercheurs concluent que si on utilise la même méthode avec les fibres d'aramide, et qu'on superpose plusieurs couches de tissus, on obtient un matériau extrêmement résistant presque comme le carbone, sachant que ce matériau est la base de ce qui compose les gilets pare-balle ou les gants anti-coupure.

Finalement, le motif géométrique d'une pièce en fibre de carbone, que l'on voit correspond au tissage de toutes ces fibres (Figure I.4).



**Figure I.4 :** Une vue rapprochée sur du tissu en fibre de carbone [AYACHE Belqassim, 2019]

### **C- Fibres d'aramide :**

Elles sont issues de la part des matières de la chimie organique des polyamides aromatiques (ou polyaramides) par synthèse chimique à basse température ; leurs propriétés diffèrent des polyamides aliphatiques classiques. Les matériaux composites renforcés par les fibres d'aramide exposent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice).

La fibre d'aramide la plus connue est le Nomex, commercialisée en 1961 par DuPont de Nemours. L'autre fibre d'aramide, commercialisée sous le nom de Teijin Conex, est produite par Teijin (Japon) ; la première fabrication de cette matière en 1965 par S. Kwolek chez DuPont de Nemours aux États-Unis, sachant que la fibre para-aramide a été commercialisée sous la marque Kevlar.

Cependant, à partir des années 80, la société néerlandaise Akzo produit et commercialise une fibre para-aramide sous la désignation de Twaron<sup>®</sup>, les caractéristiques de ces matériaux sont approximativement à celles du Kevlar.

Parmi plusieurs produits, la marque de fibre Technora de Teijin (Japon) entre dans la famille para-aramide et correspond à un polyamide aromatique modifié.

Les fibres d'aramides sont caractérisées par une résistance à la traction très faible par rapport aux fibres para-aramides par cause de leur nature macromoléculaire différente. Par contre, elles sont plus stables thermiquement et chimiquement, et sont très utiles dans la protection (vêtements, filtres industriels) pour leur résistance au feu et aux agents chimiques, ainsi que sous forme de papier, elles sont très utilisées pour l'isolation électrique.



Du fait que leur degré d'orientation lors du procédé de filage est très élevé, les fibres para-aramides possèdent une résistance élevée en traction et une faible densité ; Ces caractéristiques permis aux ingénieurs des différent métier de les utiliser dans de très nombreux domaines d'applications :

- Protections balistiques (souples et rigides) ;
- Renforts dans les élastomères (pneumatiques, tuyaux) ;
- Cordages et câbles ;
- Renforts de faisceaux de fibres optiques ;
- Renforts pour matériaux composites.

Par exemple, les fibres para-aramides sont utilisées pour la fabrication de gants et vêtements de protection par cause de leur forme courtes.

Plus récemment, les fibres para-aramides sous forme de fibres courtes ont servi de renfort dans les matières thermoplastiques injectables pour leur conférer une meilleure résistance à l'abrasion.

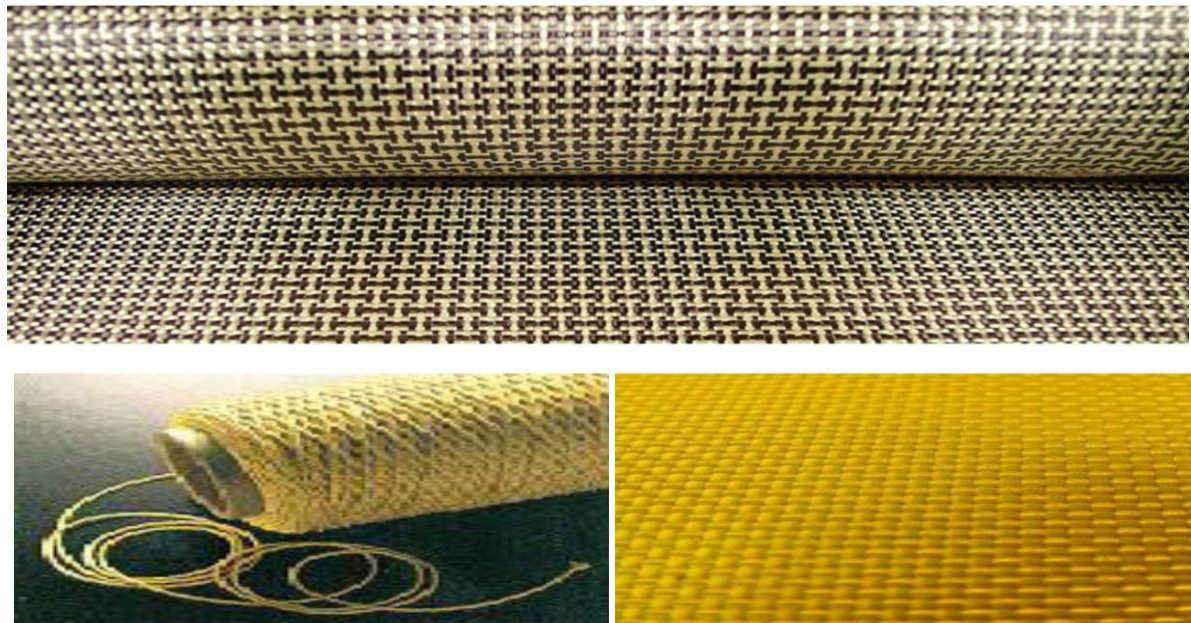


Figure I.5 : Fibre d'aramide [AYACHE Belqassim, 2019]

#### **D- Fibres de naturelles :**

Les fibres de naturelles peuvent devenir un matériau de changement par rapport les fibres de verre puisque leur plus grande facilité de recyclage, sachant que leurs propriétés physiques seront bien développées. Actuellement, elles présentent plusieurs obstacles techniques majeurs pour une utilisation approfondie dans les matériaux composites.

Tableau I.1 : Caractéristiques moyennes des principales fibres de renfort [Bennai R, 2016]

| fibre      | densité | $\sigma_r$ (MPa)<br>en traction | Allongement<br>à la rupture<br>en % | $E_L$ (MPa)<br>Longitudinale | Diamètre du<br>filament<br>élémentaire<br>$\mu\text{m}$ |
|------------|---------|---------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|---|
| Verre E    | 2.54    | 3400                            | 4.8                                 | 73000                        | 3-30  |
| Verre R    | 2.48    | 4400                            | 5.4                                 | 86000                        | 3-30  |
| Aramide BM | 1.45    | 3100                            | 2                                   | 70000                        | 12  |
| Aramide HM | 1.45    | 3100                            | 1                                   | 130000                       | 12  |
| Kevlar     | -       | 2900                            | 2.3                                 | 130000                       | 1.45  |
| Aluminium  | -       | 1380                            | 0.7                                 | 380000                       | 3.9   |
| Carbone HT | 1.78    | 2800                            | 0.5                                 | 200000                       | 8   |
| Carbone HM | 1.80    | 2200                            | -                                   | 400000                       | 8   |
| Bore       | 2.63    | 3500                            | 0.8                                 | 400000                       | 100-200   |

### E. Fibre de Bore

Fibres de haut module sont insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

### F. Fibre de Silice (ou de quartz)

Elles sont produites comme celles du verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée.

### G. Fibres de Polyéthylène de Haut Module

Ces fibres ont une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité.

Pour des structures peu sollicitées, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester.

#### I-4.1.2. Formes des renforts

Pour renforcer les structures en composite nous avons besoin d'améliorer leur caractéristique mécanique, il est obligé de modifier la texture des renforts (l'architecture) pour créer une ossature résistante adaptée aux contraintes mécaniques. Généralement les renforts se décomposent sous trois formes : linéique, surfacique et structures multidirectionnelles.

**a- Formes linéiques :** Une fibre de diamètre environ **10  $\mu\text{m}$**  qui est trop petite pour l'utilisation unitaire. Ce composé en général par des fils ou mèches qui sont assemblés par de plusieurs fibres. L'unité de masse linéique est le tex (**1 tex = 1 g/km**).

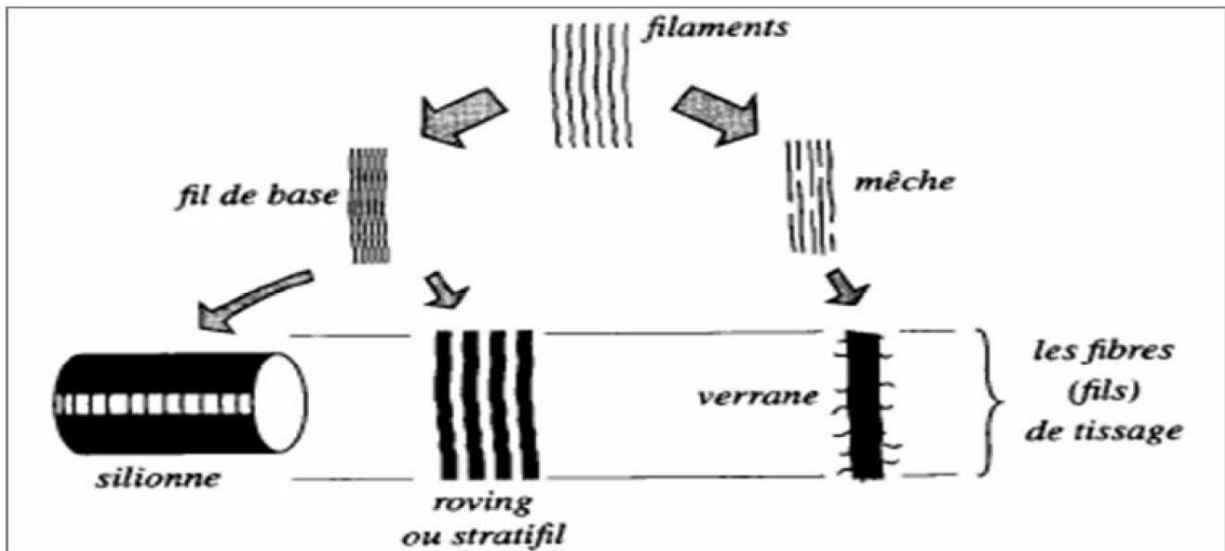


Figure I.6 : Eléments composants de la forme linéique [Merdas Abde-ELGHANI, 2005]

**B- Formes surfaciques :** Pour fabriquer une forme surfacique on peut utiliser les divers types de fils : mats, tissus ou rubans.

**Tissus et rubans**

Un tissu ou un ruban est un ensemble surfacique de fils, de mèches,... etc., il est constitué de (figure I.7) :

- Une chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu.
- Une trame, ensemble de fils s’entrecroisant avec les fils de chaîne.

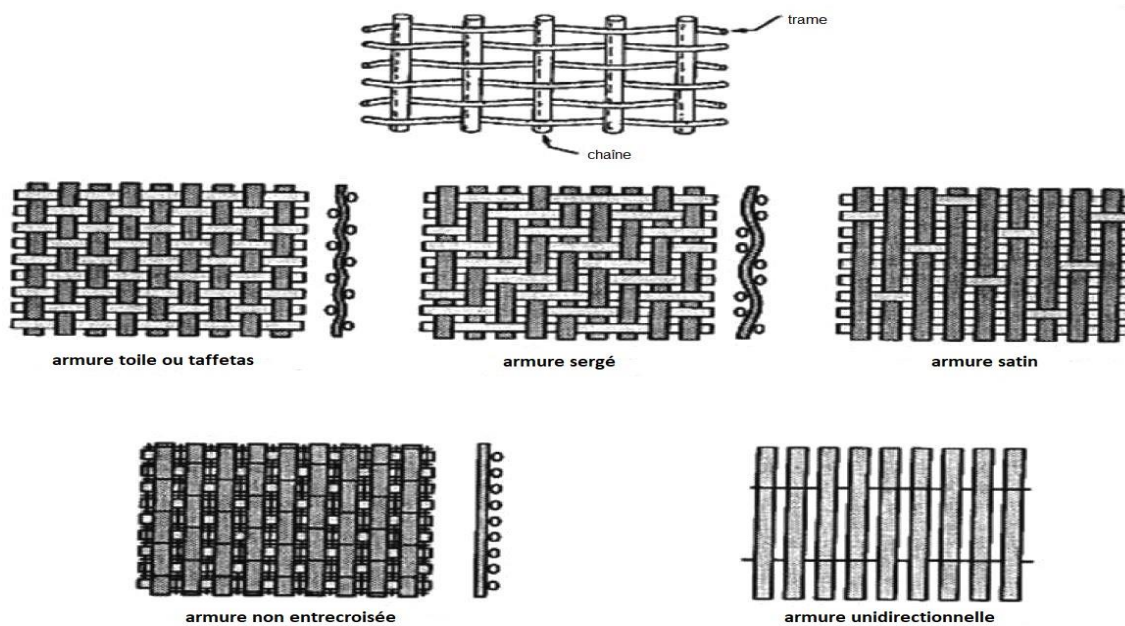
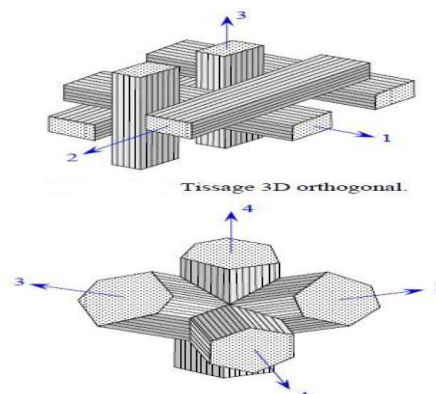


Figure I.7 : Eléments composants de la forme surfacique [Merdas Abde-ELGHANI, 2005]

**Mats** : Constitué en général par plusieurs nappes de fils continus ou coupés, arrangés dans un plan suivant une direction aléatoire. Leur rôle est maintenu l'ensemble par un liant. Le MAT est isotrope à cause de l'absence d'orientation préférentielle des fibres.

**C- Structures multidimensionnelles** : Il est réalisable de construire des structures de renforts 3D et de renforts hybrides en tissant des fibres de natures différentes ou en superposant des tissus ou nappes de renforts de fibres différentes, En termes de performance, les préformes 3D sont considérées comme des solutions de motif pour augmenter la résistance dans l'épaisseur, la prévention du délaminage et pour l'augmentation de la résistance à l'impact.



**Figure I.8** : éléments composants de la structure multidimensionnelle [Merdas Abde-ELGHANI, 2005]

Tableau I.2 : Performances comparées des différents types d'architecture [Merdas Abde-ELGHANI, 2005]

| Architecture des fibres   | Comportement mécanique recherché | Orientation de la tenue mécanique                      | Taux maximal de renfort | Type de fibres   |
|---------------------------|----------------------------------|--|-------------------------|------------------|
| Fibres coupées et broyées | Moyen                            | quelconque   | 30%                     | verre            |
| Mats fibres coupées       | Moyen                            | quelconque   | 30%                     | verre ou carbone |
| Mats fibres continues     | Moyen                            | orientée   | 30%                     | verre            |
| Fibres continues          | Intermédiaire                    | unidirectionnelle                                      | 50 à 70%                | toutes           |
| Tissu                     | Fort                             | bi ou tri directionnelle                               | 30 à 70%                | toutes           |
| Nappe                     | Très fort                        | Unidirectionnelle (Bi-directionnelle si superposition) | 50 à 85%                | toutes           |



**Note** : Pour augmenter la résistance d'un matériau composite, on peut également de s'arranger sous formes hybrides (Mélange de fils continus et les fils coupés). Sachant que les fibres les plus connu et utilisé est celui de fibres de carbone, fibres de verre et les fibres d'aramide. Selon les fibres utilisées, les composites sont classifiés en trois types :

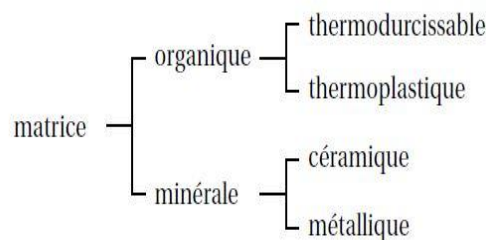
- Fibres de verre renforcées de polymères (GFRP: Glass fiber reinforced polymer),
- Fibres de carbone renforcées de polymères (CFRP: Carbon fiber reinforced polymer),
- Fibres d'aramide renforcées de polymères (AFRP: Aramid-fiber-reinforced polymer).

### I.4.2 Interfaces

L'utilisation d'une couche d'interface permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Les fibres utilisées pour la fabrication des matériaux composites reçoivent un additif spécifique comportant un agent collant qui permet de coller les filaments pour en faire des fils et assure d'autre part la fonction de lubrification pour protéger le matériau contre l'abrasion due au frottement entre les fibres.

### I.4.3 La matrice

Dans la majorité des cas, la matrice fondamentale de matériau composite est une résine polymère, l'existence de ce dernier en grand nombre et chacune a un domaine particulier d'utilisation. Dans le cadre d'application, où on est besoin une tenue de la structure résistante aux très hautes températures, on utilise des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou en carbone. La classification des types de matrices couramment rencontrées est apparu dans la figure I.9.



**Figure I.9** : Types de matrice

#### I.4.3.1. Les Matrices Organiques

##### I.4.3.1.1. Résines thermodurcissables

Les résines thermodurcissables ont des caractéristiques des propriété mécaniques très élevées. Cette matière ne peut être mises en forme qu'une seule fois. Elles caractérisé par leur nature liquide, en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants.

Les exemples sur ce type de résine est très nombreuse, les résines polyesters insaturées, les résines de condensation et les résines époxy.

Les indicateurs de classement pour les résines les plus performants qui ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont représentées dans le tableau I.3.

**Tableau I.3 :** Caractéristiques des résines thermodurcissables

| résines     | $T_f(^{\circ}\text{C})$ | $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | $\epsilon_t^R(\%)$ | $\sigma_t^R$ (MPa) | $\sigma_c^R$ (MPa) | E (GPa)   |
|-------------|-------------------------|-----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------|
| polyesters  | 60 à 100                | 1 140                       | 2 à 5              | 50 à 85            | 90 à 200           | 2,8 à 3,6 |
| phénoliques | 120                     | 1 200                       | 2,5                | 40                 | 250                | 3 à 5     |
| epoxydes    | 290                     | 1 100 à 1 500               | 2 à 5              | 60 à 80            | 250                | 3 à 5     |

#### I.4.3.1.2. Résines thermoplastiques

Caractérisé par des propriétés mécaniques faibles mais sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. On peut citer comme exemple de ce type de résine, les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide.

Identique aux résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible, ces derniers sont présentés dans le tableau I.4.

**Tableau I.4 :** Caractéristiques des résines thermoplastiques

| résines       | $T_f(^{\circ}\text{C})$ | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | $\epsilon_t^R(\%)$ | $\sigma_t^R$ (MPa) | $\sigma_c^R$ (MPa) | E (GPa)   |
|---------------|-------------------------|-----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------|
| polyamide     | 65 à 100                | 1 140                       |                    | 60 à 85            |                    | 1,2 à 2,5 |
| polypropylène | 900                     | 1 200                       |                    | 20 à 35            |                    | 1,1 à 1,4 |

#### I.4.3.2. Les Matrices Minérales

##### I.4.3.2.1. Les Matrices Métalliques

On peut l'identifier par CMM (Composite matrice métallique), crée suivant nos besoins d'applications à très hautes températures jusqu'à 600 °C. Les métaux ou alliages métalliques utilisés dans la fabrication des (CMM) sont généralement choisis en fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé, ainsi l'aluminium, le titane et le magnésium sont les métaux les plus couramment utiliser, les (CMM) présentent des bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance à la température et au chocs thermiques.

#### **I.4.3.2.2. Les Matrices Céramiques**

Les matrices céramiques, utilisé dans des pièces qui doivent subir de très hautes températures sans dommage enregistrer. Sachant que le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium. Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique ; Merazi (2015).

#### **I.5. Un premier exemple de matériau composite : le béton armé**

Le béton est un matériau de construction omniprésent dans les structures en génie civil. Il s'agit d'un mélange de graviers, de sable, de ciment et d'eau. Le rôle du sable est de combler les vides entre les autres granulats. Le ciment est composé de calcaire, d'argile et de gypse. Quand l'eau s'évapore, le béton initialement pâteux se solidifie. Le ciment assure sa cohésion. On peut conclure que le béton est un matériau composite, les composants gravier/sable est le renfort et le ciment est la matrice.

Le module de Young du béton en compression est atteint les 40 GPa (suivant le dosage du ciment), ce qui est très correct. Par contre, en traction, les valeurs sont dix fois plus faibles par rapport la compression ; Cela constitue son principal point de faible.

L'acier présente un module de Young en traction 210 GPa. Cependant, il est bien sûr hors de question de construire des bâtiments entièrement en acier, il devient trop cher, trop lourd et incompatible avec de nombreuses contraintes techniques.

La première démarche en 1848 par le chercheur Louis Lambot, est de tirer parti à la fois du béton et de l'acier. Cependant, les barres d'acier sont disposées dans un coffrage (un moule) et remplies le moule par le béton frais. Quand celui-ci est solidifié, le coffrage est retiré.

On obtient du béton armé, dont le brevet fut déposé en 1892 par François Hennebique. Il obtient un meilleur module de Young de l'ensemble en traction que le béton ordinaire, lorsque l'effort est exercé suivant l'axe des barres. Les barres en acier constituent le renfort, le béton est la matrice. La forme de relief sur la surface des tiges à la manière d'une vis, assurée la négligence de glissement entre le béton et les barres d'acier.

#### **I-6. Propriétés mécaniques et physiques des composites**

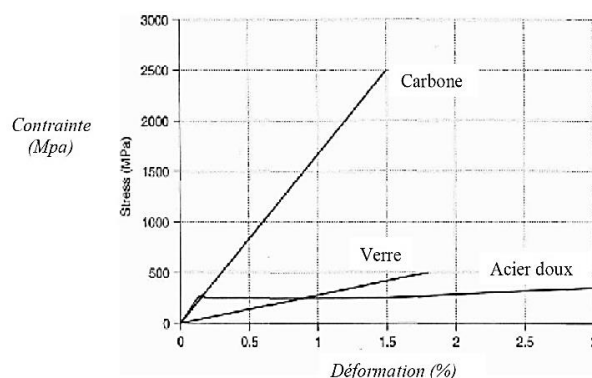
Les trois types de composite de verre, de carbone et d'aramide ont été employés pour renforcer des structures en béton armé. Le tableau suivant montrer les propriétés des matériaux composites avec des fibres continues [Head 1996].

**Tableau I.5 :** Propriétés mécaniques types des composites de verre, de carbone et d'aramide [Head 1996]

| Composite unidirectionnel          | Contenu de fibre (% en poids) | Densité (kg/m <sup>3</sup> ) | Module d'élasticité longitudinale (GPa) | Résistance à la traction (MPa) |
|------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|---|--------------------------------|
| Stratifié fibre de verre/polyester | 50-80                         | 1600-2000                    | 20-55                                   | 400-1800                       |
| Stratifié carbone/époxyde          | 65-75                         | 1600-1900                    | 120-250                                 | 1200-2250                      |
| Stratifié aramide/époxyde          | 60-70                         | 1050-1250                    | 40-125                                  | 1000-1800                      |

Ces valeurs sont données à titre indicatif, et un produit peut avoir des propriétés en dehors des valeurs données, en particulier quand le contenu de fibre est différent des valeurs considérées [Merdas Abde-ELGHANI, 2005].

Indépendamment du type des fibres ou de la méthode utilisée, tous ces matériaux ont la même courbe contrainte-déformation : élastique linéaire jusqu'à la rupture finale qui est fragile en traction. C'est une propriété très importante en termes d'utilisation structurale du composite. La figure I.10 montre la courbe contrainte-déformation type pour les fibres de verre, de carbone et d'acier doux. Hormis les différents types de résistance entre les matériaux, les courbes montrent un contraste clair entre le comportement fragile du composite et le comportement ductile de l'acier. Ceci a deux conséquences structurales principales. D'abord, ces matériaux composites ne possèdent pas la ductilité de l'acier, et leur comportement fragile peut limiter la ductilité des éléments en béton armé à renforcer. Néanmoins, une fois utilisée pour le confinement du béton, ces matériaux peuvent considérablement augmenter la force et la ductilité des colonnes. La deuxième implication du comportement fragile des composites est que la redistribution des efforts est réduite par ce manque de ductilité [Merdas Abde-ELGHANI, 2005].



**Figure I.10 :** Courbes contrainte-déformation types des composites et l'acier doux [Merda Abde-ELGHANI, 2005].

Les composites de carbone ont des propriétés supérieures aux composites de verre, mais ces derniers sont moins chers. Le tableau I.6 donne une comparaison qualitative des différents composites pour des applications dans le renforcement des structures en béton armé.

**Tableau I.6 :** Comparaison qualitative entre les fibres de verre, de carbone et les fibres d'aramide [Merda Abde-ELGHANI, 2005].

| Critère   | Fibres de verre | Fibres de carbone | Fibres d'aramide |
|---|-----------------|-------------------|------------------|
| Résistance à la traction                            | Très bonne      | Très bonne        | Très bonne       |
| (d'après Maurice Reyne) Résistance à la compression | bonne           | Très bonne        | Insatisfaisante  |
| Module d'Young                                      | satisfaisant    | Très bon          | bon              |
| Comportement à Long terme                           | satisfaisant    | Très bon          | bon              |
| Comportement à la fatigue                           | satisfaisant    | Excellent         | Bon              |
| Densité en bloc                                     | satisfaisant    | Bon               | Excellente       |
| Alcali résistance                                   | Insatisfaisante | Très bonne        | bonne            |
| Prix  | Très bon        | satisfaisant      | satisfaisant     |

## I.7. Principaux avantages et inconvénients des matériaux composites

### I.7.1. Avantages

- Bonne résistance à la fatigue ;
- Possibilité de concevoir le matériau selon le besoin ;
- Réduction des coûts de fabrication ;
- Faciles et rapides à mettre en œuvre ;
- Insensibles à la corrosion ;
- Légers, n'apportent pas de masse à la structure ;
- Très bonnes caractéristiques mécaniques ;
- Selon l'orientation des fibres, il est possible d'améliorer leur comportement dans une seule direction.

### **I.7.2. Inconvénients**

Sachant que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, il reste que ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications et dans tous les domaines. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

- Coût de fabrication assez élevé (par rapport aux matériaux traditionnels)
- Faible conductivité électrique ;
- Sensibilité à l'environnement c'est-à-dire vieillissement thermique, humide.

### **I.8. Le comportement élastique des matériaux composites**

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. Les simulations sur des nombreux milieux solides déformables exposé à une température donnée et dans un intervalle donné de déformation, en remarque un comportement élastique linéaire.

Dans le domaine de linéarité et en admettant que la température est uniforme dans tout le volume considéré, les matériaux composites se déforment comme les autres matériaux traditionnels qui nous donne un matériau identique à celui rechercher, et un comportement logique.

### **I.9. Domain d'utilisation des matériaux composites**

L'éventail des applications des matériaux composites est très large :

- Electricité et électronique : isolants, supports de disjoncteurs ;
- Bâtiments et travaux publics : habitations, cheminées d'usine, coffrages ;
- Transports routiers : pièces de carrosseries, roues, ressorts de suspension ;
- Transports ferroviaires : Bi-bloc, avant de motrices, gaines de ventilation dans les gars ;
- Transports aériens : avion de tourisme, pièces d'avion, bords d'attaque, volets [1].

### **I.10. La nécessité d'un renfort structurel**

Les causes qui conduisent à un renfort structurel sont aussi nombreuses que le nombre de structures elles-mêmes, chaque cas devant être considéré comme un cas particulier. Les plus fréquentes sont les suivantes [VIZUETE, J.M, 2000] :

- Accroissement des charges qui sollicitent la structure ;

- Changement d'usage de la structure (ex : bâtiment d'habitation réhabilité en centre commercial), installation de machinerie lourde dans les bâtiments industriels ;
- Défauts dans le projet ou dans l'exécution :
  - Armature insuffisante ou mal placée ;
  - Mauvais matériaux,
  - Dimensions insuffisantes des éléments structurels.
- Rénovation des structures anciennes [VIZUETE, J.M, 2000]:
  - Vieillesse des matériaux avec perte des caractéristiques initiale,

Dégâts dans la structure :

- Corrosion et diminution de la section des armatures dans le béton, impacts contre la structure,
- Nécessité d'améliorer les conditions en service :
  - Diminuer les déformations et les flèches ;
  - Réduire la contrainte dans les armatures ;
  - Diminuer l'ouverture des fissures.

### **I.11. Applications des matériaux composites en génie civil**

Le génie civil est actuellement peu consommateur de matériaux composites comparativement à d'autres secteurs tels que l'industrie de l'automobile ou celle de l'aérospatiale. Cependant, il existe de réelles perspectives dans les prochaines années quant à leur utilisation structurelle pour la réhabilitation des constructions civiles et industrielles. D'où l'intérêt et l'engouement apportés par les différents centres et laboratoires de recherche à travers le monde, pour étudier les différents aspects d'éléments structuraux en bétons renforcé ou réparés par des «PRF» [Riad BENZAID, 2015].

D'une manière générale, les matériaux composites présentent des avantages considérables dès qu'il s'agit de la protection, de la réparation et du renforcement d'ouvrages ou d'éléments d'ouvrages en béton armé tels que les poutres, poteaux, dalles ou les murs [Riad BENZAID, 2015].

#### **➤ Les poutres**

Le renforcement vis à vis la résistance à la flexion d'une poutre en béton armé simplement appuyée en utilisant les composites «PRF» est généralement réalisé par collage externe des lamelles «PRF» sur le support de la poutre concernée. Avant l'application de la lamelle «PRF», le support doit être préparé. Le but de la préparation d'une surface adéquate est d'enlever la couche faible de la surface du béton et d'exposer la totalité du béton pour améliorer la liaison avec le «PRF», et de fournir une surface uniforme [Riad BENZAID, 2015].



### ➤ Les dalles

Le procédé de renforcement de dalle consiste à coller, à la surface des zones de béton tendues, des plaques ou des bandes de renfort. De nos jours, seules sont appliquées des bandes de renforts. Pour des raisons évidentes de mises en œuvre, on préfère coller les bandes de renfort en sous face de la dalle. Dans le cas d'une mise en œuvre à la surface d'une dalle, il faut prendre en compte des problèmes de remise à niveau du plancher traité [Riad BENZAID, 2015].

Les techniques sont similaires à celles utilisées pour renforcer les poutres pour reprendre les efforts de flexion. On rencontre donc le collage de plaques ou de bandes sur les dalles. Encore une fois, lors de ces dernières années la méthode de mise en œuvre de bandes s'est imposée plutôt que l'installation de plaques [Riad BENZAID, 2015].

### ➤ Les Poteaux

Différentes techniques ont été développées pour renforcer ou réhabiliter des poteaux existante en béton armé en utilisant des composites «PRF» [Riad BENZAID, 2015].

Les poteaux peuvent être renforcées vis -à vis des efforts axiaux, en les enveloppant par des colles «PRF» [Riad BENZAID, 2015].

Les figures suivantes présentent la description des principales applications de renforcement par composites collés sur ouvrages de génie civil.



**Figure I.11** : Principales applications de renforcement par composite collés sur ouvrages [Riad BENZAID, 2015]

## I.12. Conclusion

Les matériaux composites (à matrices métalliques, élastomères, polymères ou céramiques) offrent aux industriels et aux designers des nouvelles possibilités.

Des processus nouveaux de conception, d'industrialisation et de fabrication permettent d'étendre les possibilités techniques, et de mieux satisfaire les besoins parfois contradictoires (poids, fonctions...) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement.

La compétition reste très dure entre les solutions composites et les matériaux classiques, disposant d'une avance considérable en termes d'expérience et d'investissement chez les



producteurs et les utilisateurs. Les contraintes de productivité sont transmises par les donneurs d'ordre et amplifiées vers les fournisseurs. A l'occasion de chaque décision industrielle ou normative, une classe de composants ou de systèmes peut apparaître ou disparaître.

La forte valeur ajoutée de ces réalisations, leurs exigences en termes d'équipements et de compétences de haut niveau, leur confèrent un rôle croissant dans la recherche de différenciation et de compétitivité, clé du succès des industriels des économies occidentales.

L'innovation apparaît comme un facteur déterminant du succès durable des entreprises, même si elle ne suffit pas à justifier auprès du consommateur une augmentation significative des prix de vente.

L'innovation n'est cependant souvent accessible, dans le secteur des composites comme dans d'autres, qu'aux entreprises capables de supporter des investissements de recherche, de développement et d'industrialisation de plus en plus lourds.

Les aspects financiers sont de plus en plus importants : l'industrie des composites est en effet fortement capitalistique ; d'importants investissements (R&D, présérie, équipements industriels...) sont nécessaires avant de pouvoir réaliser un chiffre d'affaires significatif. Une entreprise doit pouvoir offrir à ses actionnaires et à ses partenaires financiers une rentabilité et une transparence compétitives.

L'internationalisation des marchés des matériaux de haute technologie est aujourd'hui accélérée par l'impact des groupements de constructeurs et de fournisseurs – par ailleurs concurrents – qui développent des places de marché virtuelles, portails d'achat sur Internet élargissant les sources de pièces et de composants à de nombreux fournisseurs et favorisant la comparabilité technique et commerciale.

Le développement durable d'une filière industrielle majeure est un enjeu national. Ainsi, l'industrie de la machine-outil et de la métrologie, faute d'une vision stratégique du secteur et d'un soutien réel, ont largement disparu. Les industriels (aéronautique, espace, automobile...) subissent dans ce domaine une dépendance stratégique forte envers leurs compétiteurs d'Europe, du Japon, des Etats-Unis...

Aux côtés des entreprises industrielles, une place nouvelle est à accorder aux entreprises de services connexes à la production (conception, bureaux d'études, essais, prototypage rapide, logiciels de simulation...).

# CHAPITRE II

---

Généralités sur les matériaux FGM et propagation des  
ondes

## Chapitre II

### Généralités sur les matériaux FGM et propagation des ondes

#### II-1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des nouveaux matériaux composites avancés, leur spécificité est la variation continue de leurs propriétés matérielles d'une surface à une autre. Ces matériaux peuvent être constitués en variant le pourcentage des constituants de deux matériaux ou plus pour avoir une graduation fonctionnelle suivant la direction spatiale désirée. La graduation fonctionnelle des matériaux réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte trouvés dans les composites stratifiés. Les FGM ont acquis une application généralisée comme structures de barrière thermique, contre l'usure et comme revêtements résistants à la corrosion autres que le collage de matériaux différents.

En général, les matériaux fonctionnellement gradués sont des matériaux constitués à partir de quelques couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans plusieurs cas, on peut reconnaître un FGM fabriqué avec le même matériau mais de microstructure différente ; Boch et al (1986).

Généralement, les FGMs sont des matériaux composites particuliers caractérisés par un mélange des matériaux, c'est une structure qui varie d'une manière graduelle dans le matériau, poussant vers une variation progressive des propriétés. Cette variation dans les propriétés donne à ces matériaux une grande efficacité par rapport aux matériaux composites.

La puissance des matériaux FGM est illustrée dans les domaines de haute technologie : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et le génie civil (Chung et al, 2003).

Des nombreux phénomènes physiques sont décrits par les propriétés de propagation des ondes. On peut citer des exemples sur la propagation des ondes ; sur la surface de l'eau suite à une chute d'un objet, les vagues se déplaçant à la surface de la mer, les ondes produites sur les cordes vibrantes, les ondes sonores, les ondes radio, les ondes optiques, etc. Du point de vue mathématique, l'équation de mouvement et les propriétés de ces ondes sont décrits, avec une bonne approximation, par l'équation d'Alembert (à une ou plusieurs dimensions d'espace, suivant le cas), ce qui remplace l'étude des ondes sur un plan très général [FOURN Hocine, 2019].

On peut spécifier deux groupes d'ondes ; Le premier correspond aux ondes de type mécaniques, élastique, thermodynamique, ou hydrodynamique, qui peut se manifester sur un support matériel préexistant, tel que le système d'un ressort couplé, corde, gaz, liquide, etc... Le deuxième correspond aux ondes électromagnétiques (ondes radio, ondes optiques, rayons X, etc...) par cause de la propagation des quantités d'énergie qui s'appelle les photons, qui pouvant se déplacer à travers le vide, indépendamment de tout milieu matériel [FOURN Hocine, 2019].

## II.2. Historique des matériaux FGM

La première idée générale de gradients structurels a été avancée pour les composites et les matériaux polymères en 1972 [Bever M.B., 1972; Shen M., 1972]. Différents modèles ont été étudié pour les gradients dans la composition, dans la concentration des fibres, et dans la polymérisation pour obtenir des structures graduées. Cependant, il n'y avait aucune enquête réelle sur la façon de concevoir, fabriquer, ou même d'évaluer les structures de gradient progressives jusqu'aux années 1980 [Miyamoto Y.et al., 1999].

En 1984, Les "FGMs" ont été améliorés dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de fabriquer des matériaux utilisés comme barrières thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion ; [Koizumi (1992)].

En 1987, le gouvernement japonais démarrer un grande projet nommé « la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'objectif du projet est le développement des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans le domaine aérospatiaux ; [Koizumi (1997)].

À l'achèvement de la première étape (du 1987 au 1989), les chercheurs réussis à fabriquer des petites pièces expérimentales qui pouvant supporter a des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K ; Avec l'utilisation des quatre techniques de fabrication pour les matériaux présentant un gradient de composition et de structure.

Dans la deuxième étape entre les années 1990 et 1991, l'objectif était de réaliser des pièces de tailles plus grandes avec des formes plus complexes. Pendant les années 90, non seulement le champ d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique ;[Okamura (1991)].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [Kieback et al (2003)]. Par cause

de ces résultats, un nouveau programme national lancé nommé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie.

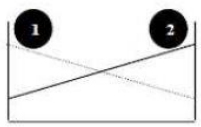
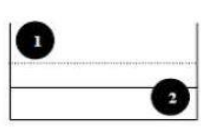
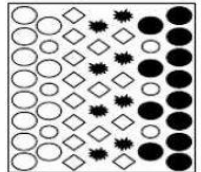
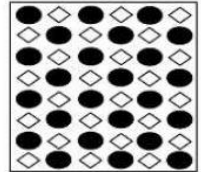
Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie.

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés. Une nouvelle technologie des matériaux gradués non homogènes est née comme conséquence du développement des applications pratiques et des recherches pendant le 21ème siècle.

### II.3 Comparaison entre matériaux composites et FGM

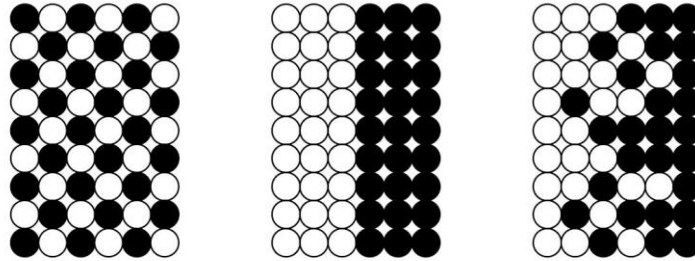
Généralement, les matériaux composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition de la microstructure du matériau composites illustré dans la figure II.1 [Koizumi 1996]. Il en obtenu un facteur gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch 1986].

Les matériaux fonctionnellement gradués peuvent être utilisé dans divers domaines pour des usages structuraux. Entre les années de 80 et 90 et pendant cinq ans, plusieurs programmes ont été conduits pour développer l'architecture des FGM, et d'étudier ces matériaux pour l'utiliser dans des plaques a hautes résistances à la températures (par exemple, éléments pour navettes spatiales hypersoniques) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces études ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ses perspectives.

|            |  |  |   |
|------------|--|--|---|
| Propriétés | <p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>  |  |  |
| Structure  | <p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p> |  |  |
| Matériaux  | exemple  | FGM  | NON-FGM   |

**Figure II.1** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996]

[Yoshihisa 2004] à présenter un modèle simple montrant les différences entre les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) et les matériaux plus conventionnels est représenté dans la figure II.2 : (a) un matériau plan composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient fonctionnel.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

**Figure II.2** La distribution composante des matériaux [Yoshihisa 2004].

Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels.

#### II.4 Lois régissant de la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel FGM constitué par le mélange de deux matériaux qui a des propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec la transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de telle façon à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les sens  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur (figure II.3). Les propriétés du matériau dont le module de Young  $E$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , la conductivité thermique  $K$ , la masse volumique  $\rho$  ou même le coefficient de Poisson  $\nu$ , la variation de ce dernier à travers l'épaisseur est négligeable, sur les surfaces supérieure et inférieure sont différentes mais sont déterminées selon les besoins d'utilisation.

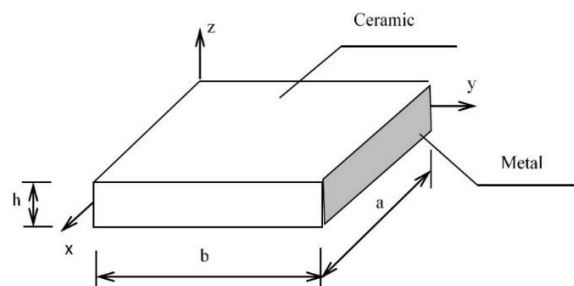


Fig. II.3 Caractéristiques géométriques d'une plaque FG.

Toutefois le module de Young et la masse volumique varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit :  $E = E(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ .

#### II.4.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction de la loi de puissance.

$$V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k, k \geq 0 \quad (\text{II.1})$$

Où  $k$  est un paramètre matériel et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $v(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$P(z) = P_m + (P_c + P_m)V(z) \quad (\text{II.2})$$

Où  $P_c$  et  $P_m$  représente respectivement les caractéristiques du matériau de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure II.4, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .

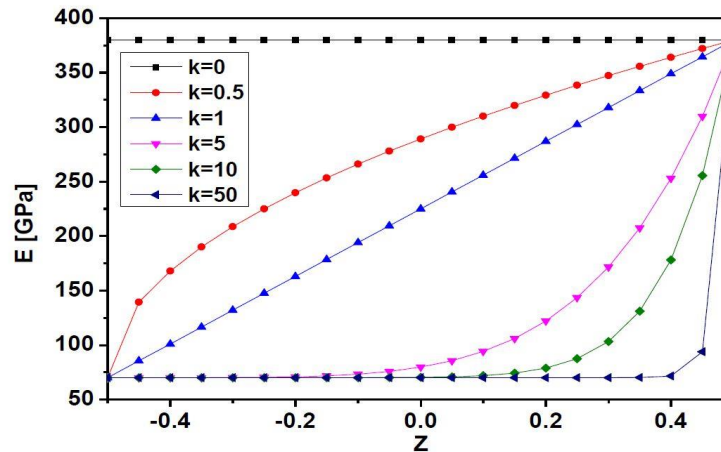


Fig. II.4 Variation de module de Young  $E$  en fonction de  $k$  dans une plaque P-FGM.

#### II.4.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{II.3.1})$$

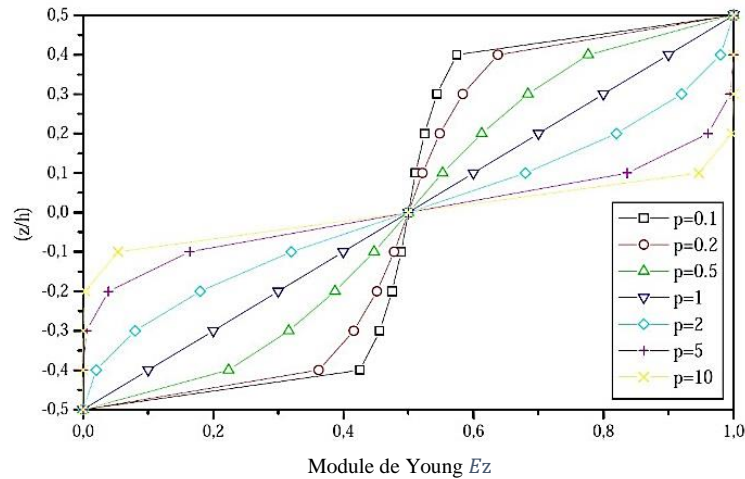
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{II.3.2}$$

En utilisant la loi des mélanges pour le module de Young de la plaque S-FGM, peut être calculé comme suite :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{II.4.1}$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{II.4.2}$$

La figure II.5 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (II.4.1) et (II.4.2) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)



**Figure II.5 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### II.4.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

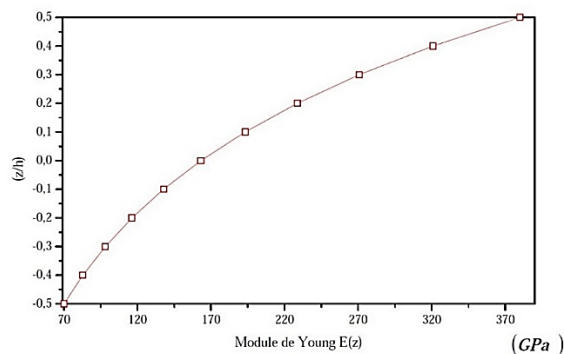
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale et Erdogan 1983) :

$$P(z) = P_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \tag{II.5.1}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \tag{II.5.2}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.6.



**Figure II.6 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.



## II.5. Les matériaux impropres (poreux)

### II.5.1. Définition de la porosité

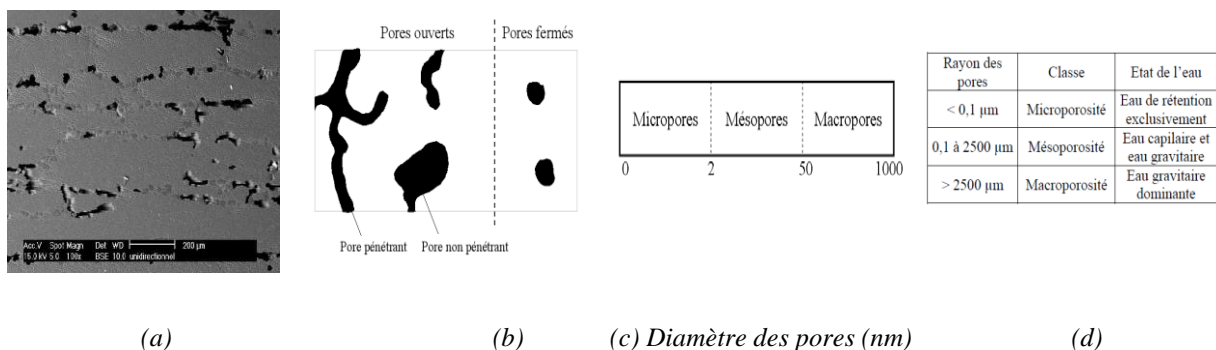
Selon le glossaire international d'hydrologie, on peut définir la porosité comme étant la propriété d'un milieu, d'un sol ou d'une roche de comporter des pores, c'est à dire des vides interstitiels interconnectés ou non. Elle peut être définie comme la somme des vides (pores) d'un matériau solide, ces vides sont remplis par des fluides (liquide ou gaz). La valeur numérique de la porosité est définie à partir du rapport entre le volume des vides et le volume total d'un milieu poreux.

$$\alpha_0 = \frac{V_{pores}}{V_{total}} \tag{II.6}$$

Avec :  $\alpha_0$  c'est la porosité,  $V_{pores}$  le volume des pores et  $V_{total}$  le volume total du matériau, c'est-à-dire la somme du volume de pièce et du volume des pores dans la pièce.

La représentation de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant sous forme d'une matière gazeuse (représenté par les tâches noires sur la Figure II.7 (a)). [Schoeller, 1955], on peut distinguer deux catégories de pores représentés sur la Figure II.7(b).

L'IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) a recommandé la nomenclature relative à la taille des pores présentée à la Figure II.7 (c) [Schaefer, 1994]. Une autre classification des porosités en prend en considération la gamme des tailles moyennes des interstices d'un milieu poreux et aux états physiques du gaz ou l'eau contenue, celle-ci est définie un micropore (ou pore matricielle) comme une cavité de diamètre inférieur à 0,1  $\mu\text{m}$  et une macropore (ou porosité structurale) comme une cavité de diamètre supérieur à 2,5  $\mu\text{m}$  [Schoeller, 1955] ; Les mésoporosités (ou porosité texturale ou capillaire) sont donc les interstices de diamètre intermédiaire compris entre 0,1  $\mu\text{m}$  et 2,5  $\mu\text{m}$  (Figure II.7 (d)).



**Figure. II.7 :** (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores. [Y. Ledru 2009]

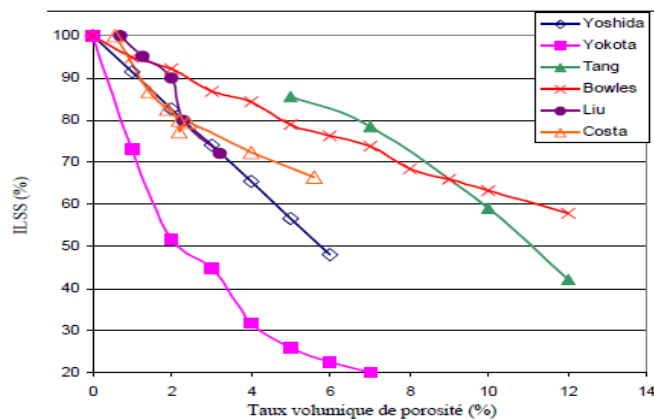
Par conséquent la porosité c'est un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores. Seuls les volumes sont considérés.

### II.5.2. Revue des travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau

La porosité est très demandée pour la fabrication des mousses ou des membranes filtrantes, en revanche néfaste aux matériaux composites à hautes performances. L'impact de ce défaut a fait l'objet de beaucoup de recherches. Tous les chercheurs ont confirmé qu'à partir d'un certain pourcentage volumique, compris entre 0.5% et 1% suivant le matériau étudié, la porosité n'a pas d'impact sur le comportement de la pièce si elle est répartie régulièrement.

Par contre, pour des pourcentages de porosité plus élevés, les propriétés de la pièce et surtout mécaniques sont affectées de manière significative et en particulier le cisaillement inter-laminaire. Par conséquent, la résistance au cisaillement inter-laminaire, notée ILSS (Inter Laminar Shear Stress), est très sensible à la présence de ces vides gazeuses. Sa diminution représentée à la (Figure II.8), a été mesurée en fonction du taux de porosité par plusieurs chercheurs [Yokota, 1978],[Yoshida et al., 1986], [Tang et al., 1987], [Bowles et al., 1992], [Costa et al., 2001], [Liu et al., 2006 (a)].

La diminution moyenne de l'ILSS a été estimée en moyenne de 6% par unité volumique de taux de porosité pour des stratifiés carbone/époxy.



**Figure II.8 :** Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites carbone/époxy [Wisnom et al., 1996].

La plus importante étude qui nous permettant d'expliquer l'augmentation du pourcentage volumique de porosité en termes de la diminution de l'ILSS est proposée par Wisnom [Wisnom et al., 1996].

Plusieurs modèles sont proposés afin de prévoir numériquement la valeur de la contrainte à la rupture en cisaillement inter-laminaire d'une pièce en fonction de son pourcentage volumique de porosité [Bowles et al., 1992], [Yoshida et al., 1986]. De plus, il est signalé que la dispersion des résultats augmente avec le taux volumique de porosité, ce qui rend difficile la comparaison des données expérimentales et théoriques pour des taux de porosité supérieurs à 10%.

A partir des différentes études, il est clair que la porosité influence sur le comportement en cisaillement inter-laminaire du matériau composite, dès que le pourcentage volumique de porosité est supérieur à 1%.

D'une manière générale, l'augmentation du pourcentage volumique de porosité provoquée une diminution des propriétés mécaniques du matériau [Olivier, 1994], [Olivier et al., 1995].

De plus et dans le milieu industriel aéronautique, il est clair qu'une pièce structurale comportant un pourcentage volumique de porosité supérieur à 2% doit être rebutée.

## **II.6. Domaines d'applications des matériaux à graduation fonctionnel**

Le concept des matériaux à graduation fonctionnel est applicable dans des nombreux domaines. Le commencement dans le domaine d'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont assuré deux propriétés contradictoires ou différentes, telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans le même matériau.

Certaines des applications de matériaux fonctionnellement gradués sont mises en évidence ci-dessous par domaine :

### **a. L'aérospatiale**

Les matériaux FGM peuvent résister à des très hautes températures, qui interviennent dans la structure des avions et les composants de moteur de fusée etc... [L. Marin 2003]. Puisque l'amélioration dans les techniques de traitement est continue, donc les FGM sont développés et peuvent être utilisés dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

### **b. Industrie navale, aéronautique (Prévention contre les attaques terroristes)**

L'utilisation des structures sandwich est très importante dans l'industrie navale. En raison de leur constitution, elles présentent de nombreux avantages en termes de résistance, rigidité et possèdent des capacités d'absorption d'énergie élevées. Leurs propriétés aident à disperser l'impulsion mécanique transmise dans la structure, et donc protéger quoi que ce soit situé derrière elle [Xue Z., Hutchinson JW. 2003].

### **c. Médecine**

Les os et les dents sont des tissus vivants qu'on peut considérer comme du matériau fonctionnellement gradué naturel [W. Pompea et al. 2003], pour remplacer ces tissus, un

matériau compatible est nécessaire qui serviront aux fins de la bio-tissu original. Le FGM est l'élément type pour cette application. La gamme la plus large d'utilisation de matériau FGM est celui de la chirurgie dentaire [S. Matsuo et al. 2001] et des utilisations orthopédiques pour les dents et le remplacement osseux [F. Watari et al. 2004].

#### **c. Défense**

L'une des caractéristiques les plus importantes du matériau fonctionnellement gradué est la capacité à inhiber la propagation de fissure. Cette propriété rend utile dans le secteur de la défense, comme des matériaux résistants aux pénétrations utilisés pour plaques de blindage et des gilets pare-balles [L. Lu et al. 2011].

#### **d. Énergie**

Dans le secteur d'énergie les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés dans des dispositifs de conversion d'énergie. Ils nous donnent vraiment une barrière thermique, sont utilisés comme revêtement protecteurs sur des aubes de turbine dans le moteur de turbine à gaz [E. Müller et al. 2003].

#### **e. Génie civil**

Sous les auspices des projets de recherche effectués à l'université de Stuttgart, différentes classes de matériaux de construction (béton, textile, bois, métaux et polymères), des méthodes de production et des domaines d'application (structure porteuse, enveloppe du bâtiment, technique de mélange) ont été étudié et évalué pour certains éléments du bâtiment basés sur le concept du FGM.

Il est à noter que l'idée du béton fonctionnellement gradué, a permis de réaliser des murs extérieurs moins épais par rapport aux systèmes composites d'isolation thermique comparable, avec une conductivité thermique bien inférieure à celle du polystyrène. Cette invention conduit à l'amélioration de la recyclabilité et la sauvegarde des ressources économiques.

Un autre aspect de cette technologie impliquant des matériaux à gradient de propriétés sert à rassembler des différents matériaux suivant une transition graduelle et continue.

On peut Utiliser les matériaux FGM dans les domaines du génie civil suivant :

##### ➤ Les chaussées rigides :

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une graduation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, les dallages industrielles, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la

chaussée afin d'avoir un matériaux rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

➤ Les chaussées souples : Les FGM peuvent être utilisé dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la grave bitume et la couche de roulement en béton bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

➤ Les grands vitrages dans les zones chaudes : Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.

➤ Les tunnels: Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches. L'utilisation des FGM semble être une solution efficace.

➤ Les joints dans la charpente métallique : Dans certains cas de la charpente métallique, lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre des éléments de poids et de nuances différentes comme l'acier/l'aluminium. Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est qu'il subit une forte accumulation de concentration de contraintes, et s'avère plus vulnérable en cas d'action cyclique. L'utilisation des joints en FGM représente une solution optimale.

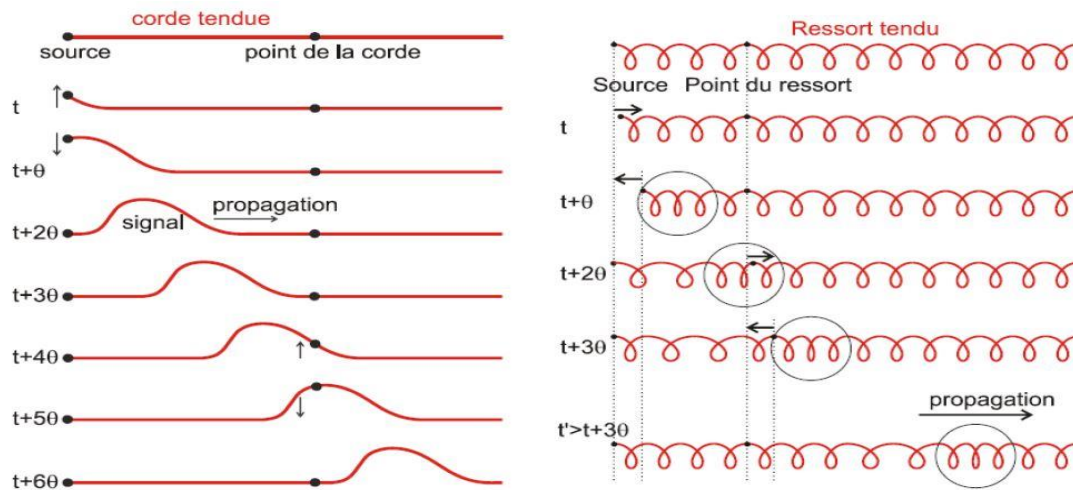
## II.7. Propagation des ondes dans les plaques FGM

La propagation des ondes est un phénomène physique dont découlent l'évolution et la progression d'une onde au sein d'un milieu, ou encore, c'est une perturbation locale temporaire qui se déplace dans un milieu matériel élastique, homogène et isotrope sans transport de matière, on parle alors de « transport d'énergie sans transport de matière ».

Plusieurs types d'onde ont besoin d'un milieu matériel pour se propager. Par exemple, le son ne se propage pas dans le vide.

La grandeur principale caractérisant la propagation des ondes est la célérité, c'est-à-dire la vitesse de propagation d'une onde dans un milieu donné.

La figure suivante montre la propagation d'une onde le long d'une corde tendue à différents instants et le point P source de l'onde sinusoïdale :



**Figure. II.9 :** propagation d'une onde le long d'une corde tendue et ressort à un instant  $t$

Les exemples de phénomènes de propagation sont multiples : nous parlons de propagation de la lumière, d'ondes électromagnétiques, du son ou de la "chaleur" sans que ces phénomènes soient de même nature [4].

Les ondes électromagnétiques (nous verrons que l'onde lumineuse est une onde électromagnétique de longueurs d'ondes inférieures à  $100 \mu m$ ) se propagent dans le vide, se réfléchissent, s'absorbent et se transmettent au niveau d'un milieu matériel. Les ondes mécaniques (qui comprennent le son -ondes acoustiques-) ont besoin d'un milieu matériel pour se propager [4].

La propagation de la "chaleur" est plus complexe : c'est une onde électromagnétique dans le cas du rayonnement dit "thermique", une onde mécanique dans le cas de la conduction de la chaleur et un transfert de matière dans le cas de la convection [4].

## II.8. Condition de propagation

La propagation d'une onde s'exprime pas le déplacement des composants du matière à grande échelle, mais plutôt leur oscillation ou la variation des propriétés du milieu traversé. Pour les ondes mécaniques, ce n'est pas la matière qui est transportée, mais la quantité de mouvement.

## II.9. Eléments de propagation des ondes

Une onde est une perturbation qui se déplace dans un milieu. Il est possible de lui associer deux vitesses d'onde, soit la vitesse de phase et la vitesse de groupe qui, parfois, ne sont pas égaux :

Dans un milieu homogène, la propagation dans une direction donnée d'une onde monochromatique (ou sinusoïdale) se traduit par une simple translation de la sinusoïde à une vitesse appelée vitesse de phase ou célérité. Dans un milieu non dispersif, cette vitesse ne dépend pas de la fréquence. En superposant des ondes monochromatiques de diverses fréquences (ou pulsations), on obtient des ondes plus complexes (Analyse spectrale). Lorsque la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, l'onde résultante subit aussi une translation globale de son profil, ceci sans déformation [5].

Dans un milieu dispersif ou lorsque les directions de propagation sont diverses en dimension supérieure à 1, les composantes respectives se dispersent. Dans ce cas, il est souvent possible d'identifier des paquets d'ondes (ou groupes d'ondes) se déplaçant à une vitesse de groupe différente des vitesses de phase des composantes [5].

### II.9.1. Vitesse de propagation

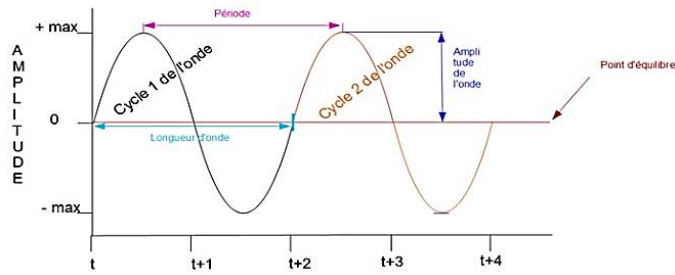
Les ondes transversales et longitudinales peuvent avoir des vitesses différentes. Dans les matières on peut avoir deux ondes différentes l'une longitudinales et l'autre transversales. Comme la force qui s'oppose à la déformation à l'origine de la propagation de ces ondes est différente pour ces deux types d'ondes, elles peuvent avoir des vitesses différentes.

Même si les ondes se propagent dans le même milieu, la vitesse de ces deux types d'ondes est différente, car elles ne sont pas de même nature. Toutes les ondes longitudinales ont la même vitesse et toutes les ondes transversales ont la même vitesse, différente de celle des ondes longitudinales.

Par exemple, les tremblements de terre créent des ondes longitudinales et transversales dans le sol. Dans ce cas, les ondes longitudinales vont plus vite que les ondes transversales. En gros, les ondes longitudinales ont une vitesse d'environ 6 km/s près de la surface de la Terre alors que les ondes transversales ont plutôt une vitesse d'environ 3 km/s. On peut même calculer la distance de l'épicentre en mesurant l'écart de temps entre l'arrivée des ondes longitudinales (qu'on appelle les ondes primaires, parce qu'elles arrivent en premier) et transversales (qu'on appelle les ondes secondaires).

Pour une onde harmonique monochromatique, elle est liée à sa longueur d'onde  $\lambda$ , à sa fréquence  $f$  et à sa période  $T$  par l'équation suivante :

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \quad (\text{II.7})$$



**Figure. II.10 :** Vitesse de propagation d'une onde monochromatique [FOURN Hocine, 2019]

Avec :

$\lambda$  : la longueur d'onde (en m)

T : la période temporelle (en s)

$v$  : La célérité de l'onde (en  $\text{m.s}^{-1}$ )

$f$  : la fréquence temporelle (en Hz)

### II.9.2. Vitesse de phase

La vitesse de phase d'une onde est la vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage dans l'espace. En sélectionnant un point particulier de l'onde (par exemple la crête) figure II.10, ce point immatériel se déplace dans l'espace à la vitesse de phase. Elle s'exprime en fonction de la pulsation de l'onde  $\omega$  et du vecteur d'onde  $k$  [5]:

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (\text{II.8})$$

En représente l'onde monochromatique dans l'espace et le temps par l'équation (II.9) :

$$\phi(x, t) = \phi_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0) \quad (\text{II.9})$$

### II.9.3. Vitesse de groupe

D'après ce qui précède, la vitesse de phase d'une onde monochromatique est égale au rapport entre sa pulsation et son nombre d'onde (norme du vecteur d'onde) [5].

Considérons le cas le plus simple d'une onde constituée de la superposition de deux ondes de pulsations voisines et d'amplitude unité (les phases, qui interviennent peu, sont ignorées) :

$$\phi(x, t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (\text{II.10})$$

A l'aide d'une relation classique en trigonométrie selon laquelle une somme de cosinus est égale à un produit de cosinus (Formules de Simpson), il vient :

$$\phi(x, t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right) \quad (\text{II.11})$$

Ainsi, l'onde considérée est constituée du produit de 2 termes :



Le premier est une onde monochromatique dont la vitesse de phase est :

$$v_{\phi} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{k_2 + k_1} \quad (\text{II.12})$$

Correspondante à une moyenne pondérée des vitesses de phase des deux composantes par leurs vecteurs d'onde respectifs.

Le second est une autre onde monochromatique dont la vitesse de phase est :

$$v_{\phi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \quad (\text{II.13})$$

Il intervient alors comme modulateur d'amplitude du premier terme.

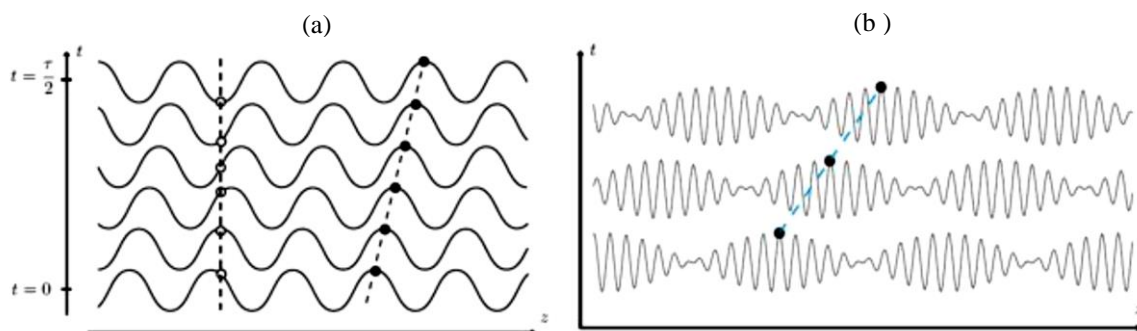
Il se produit ainsi un phénomène de battement par lequel une sinusoïde de caractéristiques proches de celles des deux composantes est modulée en amplitude par une sinusoïde de pulsation inférieure. Pour des valeurs voisines des deux pulsations et des deux vecteurs d'ondes des composantes, la vitesse de groupe est approximativement égale à :

$$v_{\phi} = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{II.14})$$

Dans le cas général de la superposition de nombreuses ondes monochromatiques, cette vitesse de groupe concerne une enveloppe plus complexe qu'une sinusoïde. Il est possible de généraliser l'approche précédente aux paquets d'ondes dans un espace à plusieurs dimensions.

La relation qui exprime la pulsation en fonction du vecteur d'onde est la relation de dispersion. Lorsque la pulsation est directement proportionnelle au module du vecteur d'onde et que ces derniers sont tous colinéaires, alors la vitesse de phase est indépendante de la pulsation et la vitesse de groupe est égale à cette vitesse de phase commune. Dans le cas contraire, l'enveloppe de l'onde se déforme au cours de la propagation [5].

Le point de la Figure. II.11 (a) avance à la vitesse de phase et (b) avance à la vitesse de groupe. Dans cet exemple, la vitesse de phase vaut le double de la vitesse de groupe.



**Figure. II.11 :** a) Vitesses de phase et b) Vitesse de groupe [M. Nicolas 2010].

## II.10. Les différents types d'ondes élastiques

### II.10.1. Ondes longitudinales et transversales

Les ondes longitudinales encore appelées ondes de compression, sont caractérisées par un déplacement des particules parallèlement à la direction de propagation par exemple les ondes acoustiques, un système de ressort figure II.12, les ondes longitudinales ne se propagent réellement que dans les solides et les liquides.

La deuxième définition des ondes transversales est les ondes de cisaillement qui sont obtenues à l'aide des vibrations des particules se font dans un plan normal à la direction de propagation de l'onde, les ondes transversales ne se propagent que dans les solides ou dans les liquides visqueux.

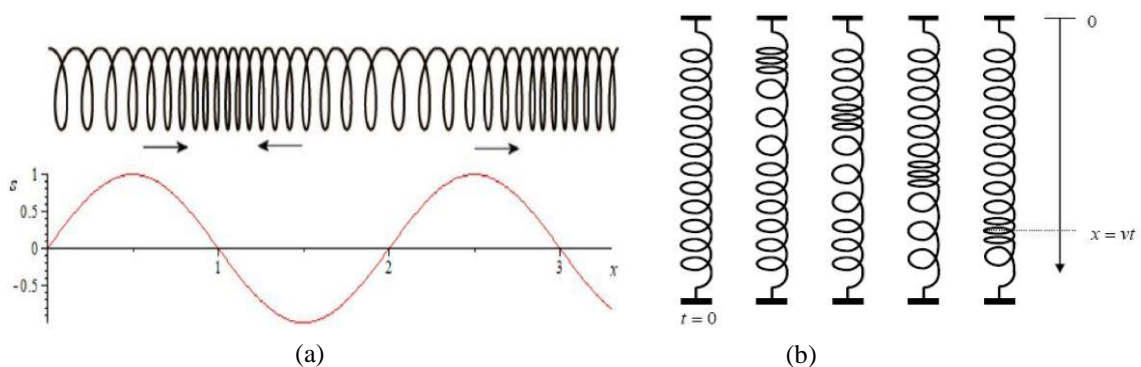


Figure II.12 : Phénomène d'onde -a) longitudinale et -b) transversale

Dans les instruments de musique à corde la perturbation est apportée de différentes manières : archet (violon), marteau (piano), doigt (guitare). Sous l'effet de l'excitation appliquée transversalement, tous les éléments des cordes de ces instruments vibrent transversalement autour d'une position d'équilibre qui correspond à la corde au repos. L'énergie de vibration des cordes se transforme en son car les mouvements transverses des cordes mettent en mouvement l'air qui les baigne [2].

Un son correspond à la propagation dans l'air d'une onde de pression de cet air. En un point de l'espace, la pression de l'air oscille autour de la valeur de sa pression au repos, elle croît et elle décroît alternativement autour de cette valeur. Dans une onde sonore se propageant dans l'air le mouvement local des molécules d'air se fait dans la même direction que la propagation de l'énergie, l'onde est longitudinale [2].

### II.10.2. Ondes de Surface

A la frontière plane d'un milieu semi-infini, on trouve des ondes de surface dont l'amplitude varie exponentiellement avec la distance normale à partir de la surface (ou l'interface) le long de laquelle leur propagation se fait. Les ondes de surface n'affectent que les particules d'un matériau qui se trouve à proximité immédiate de sa surface de séparation avec l'air ou avec un

autre milieu. Elles se propagent, généralement, sur une épaisseur correspondante à une longueur d'onde [W.L.Bond 1975].

Un exemple simple d'une surface d'onde est donné par la chute d'un objet ponctuel dans un bassin d'eau et l'apparition d'ondes circulaires concentriques à la surface de l'eau et s'éloignant du point de chute figure II.13. Ici, le problème spatial est bidimensionnel ; la fonction  $u$ , qui représente la hauteur de la vague provoquée par la chute de l'objet relativement au niveau d'équilibre du plan d'eau, dépend des variables  $t$ ,  $x$  et  $y$ ,  $u = u(t,x,y)$ .

Sur chaque cercle de vagues la hauteur est la même, ce qui signifie que  $u$  dépend de  $x$  et de  $y$  à travers le rayon, l'origine des coordonnées étant choisie au point de chute de l'objet, c'est-à-dire au centre des cercles. La surface d'onde est en fait ici un cercle et l'onde est circulaire.

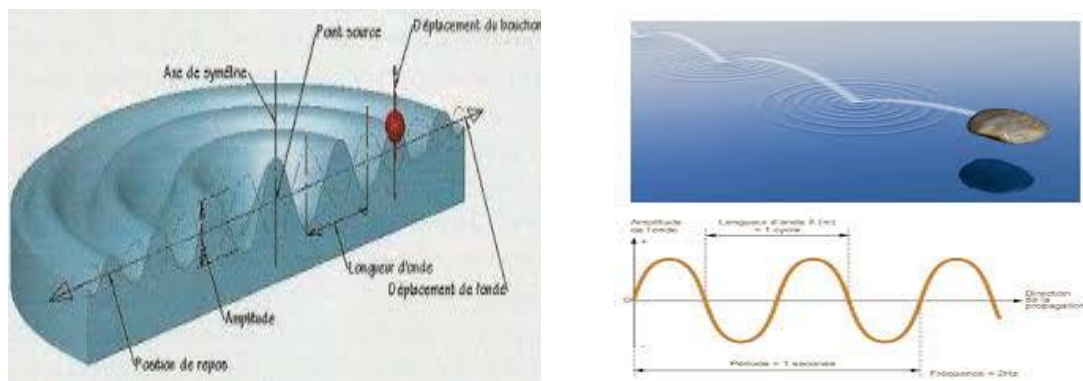


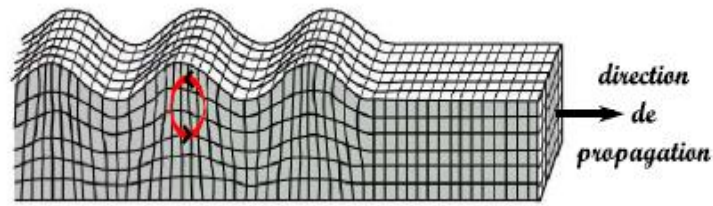
Figure II.13 : Propagation des ondes de surface

### II.10.3. Ondes de Rayleigh

La découverte des ondes sur la surface libre en plane d'un milieu semi-infini par Lord Rayleigh [D. A. Davids 1989] en 1885, qui est nommé les ondes de Rayleigh. Ce mode d'ondes est constitué par la superposition des deux ondes longitudinale et transversale qui se propagent le long de la surface libre avec une vitesse de phase commune figure.II.14.

Selon leur nature d'interface, soit vide/solide ou liquide/solide, les ondes qui s'y propagent nommer ondes de Rayleigh [FOURN Hocine, 2019].

Les ondes de Rayleigh ont été employées dans la construction des lignes à retard électromécaniques utilisées pour les radars et les systèmes de télécommunication [FOURN Hocine, 2019].



**Figure II. 14 :** Onde de Rayleigh : la polarisation est elliptique et rétrograde près de la surface.  
[O. Xeridat 2011]

#### II.10.4. Ondes progressives et ondes stationnaires

La distinction entre les deux ondes de mouvement global est comme suite, si les points de vibration maximale (par exemple) se déplacent (comme dans le cas des rides de l'eau), on parle d'onde progressive. Et lorsque les points de vibration maximale restent immobiles, on parle d'onde stationnaire [FOURN Hocine, 2019].

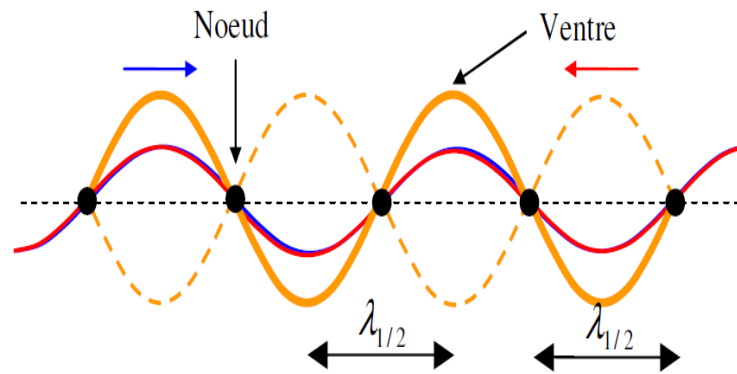
Les ondes progressives s'observent dans les milieux ouverts pour lesquels aucun obstacle ne vient perturber la propagation en créant en particulier des ondes réfléchies (écho en acoustique).

Les observations des chercheurs enregistreraient un retard de phase entre les oscillations de deux points distincts du milieu traversé pour une onde progressive. Dans un système fermé les ondes peuvent devenir stationnaires ; à cet effet toutes les particules du système oscillent en phase.

Une onde stationnaire s'obtient en général en faisant interférer deux ondes progressives de même fréquence, se propageant suivant des directions distinctes.

En général ; Une onde progressive est une perturbation périodique (qui se répète dans le temps) et qui se déplace dans l'espace, tels les vagues à la surface de l'eau, les ondes sonores, ou les ondes électromagnétiques [FOURN Hocine, 2019].

On appelle onde stationnaire le phénomène vibratoire résultant de la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation  $\omega$  se propageant en sens contraire figure II.15. Exemple typique d'une corde tendue qui peut aussi bien vibrer à sa fréquence fondamentale. Les ondes stationnaires se produisent par exemple par la superposition d'une onde incidente et de son onde réfléchie par un obstacle.



**Figure II. 15** : propagation d'onde stationnaire [FOURN Hocine, 2019]

À un instant "t" fixé, une onde stationnaire ressemble à une onde progressive. En revanche, son évolution temporelle est totalement différente. Une onde stationnaire possède des minimaux (nœuds) et des maximaux (ventres) d'amplitude fixes dans l'espace. Ainsi, si on se place aux nœuds de cette onde, l'amplitude est nulle quel que soit le temps. Avec une onde progressive, nous avons vu l'amplitude évoluer, de façon sinusoïdale avec le temps dans le cas d'une onde harmonique [FOURN Hocine, 2019].

### II.10.5. Propagation des ondes guidées dans un milieu linéaire

Le but de ce paragraphe est de rappeler les propriétés de la propagation des ondes guidées dans un solide homogène. A ce stade, nous présenterons les principes de base relatifs à la théorie de propagation des ondes de Lamb et des ondes de flexion et ce en étudiant leurs équations de propagation ainsi que leurs courbes de dispersion.

#### II.10.5.1 Ondes de Lamb

Dans un solide infini, la propagation d'une onde élastique de volume (L, T) s'effectue de façon libre. Si ce solide est limité par une surface, l'interaction de cette onde avec cette frontière doit être prise en considération. Ainsi une réflexion de l'onde de volume va donc se produire et des conversions de modes longitudinaux en modes transversaux apparaîtront, et réciproquement.

Dès lors, si le solide possède une surface plane, une onde peut être guidée par la surface du solide semi infini. Cette onde est l'onde de Rayleigh.

Lorsque le milieu de propagation est borné par deux surfaces parallèles (guide de type plaque), les différentes réflexions sur les deux faces du solide donnent naissance à des ondes guidées figure II.16.

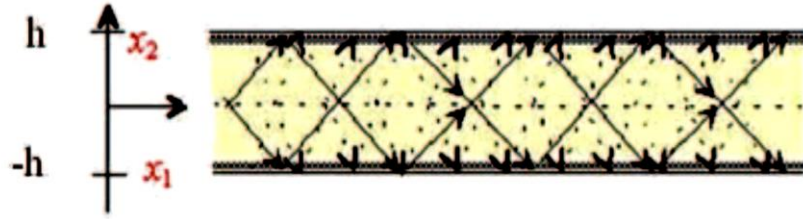


Figure II. 16 : Ondes de Lamb dans une plaque isotrope [Ait yahia, 2015].

Ces ondes découvertes par Lamb [Lam1987], Lam en 1989 constituent des modes de résonance de l'épaisseur du guide. Les modes de Lamb purs se propagent dans une plaque isotrope environnée de vide. Lorsque cette plaque est plongée dans un fluide, ces ondes sont appelés "ondes de Lamb généralisés". Le terme anglais est "leaky Lamb waves" pour bien signifier que l'énergie fuit dans le fluide. Les ondes de Lamb n'existent que pour certains couples (vitesse, fréquence) qui sont déterminés par les relations de dispersion de ces ondes.

Suivant que le déplacement normal produit soit symétrique ou antisymétrique (figure II.17) par rapport au plan médian de la plaque, les différents modes sont classés en deux familles ; les modes de Lamb symétriques, notés  $S_n$ , et antisymétriques, notés  $A_n$ , ou  $n$  est un entier ( $n \geq 0$ ).

A basse fréquence, le mode de Lamb antisymétrique est souvent appelé « mode de flexion » car le déplacement a eu majoritairement dans la direction normale à la plaque avec un faible mouvement des particules dans la direction parallèle à la plaque.

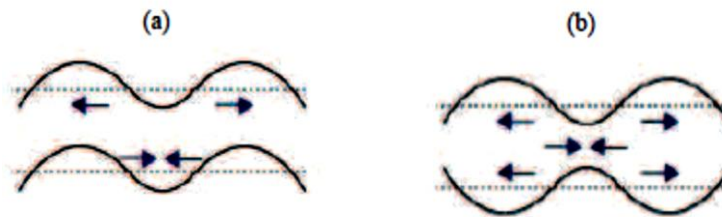


Figure II.17 : Modes de Lamb (a) antisymétriques et (b) symétriques [Ait yahia, 2015].

L'étude de la propagation des ondes de Lamb requiert le calcul des équations de dispersion pour les ondes symétriques et antisymétriques permettant de tracer le profil de la vitesse de phase en fonction de la fréquence. L'équation de Rayleigh-Lamb doit être résolue afin de déterminer les vitesses des ondes de Lamb [Giurgiutiu 2001], [Benmeddour, F 2008a]. Elle est formée de deux équations caractéristiques des modes de Lamb symétriques (II.15a) et antisymétriques (II.15b)

$$(k^2 + s^2)^2 \cosh(qh) \sinh(sh) - 4k^2 qs \sinh(qh) \cosh(sh) = 0 \quad (\text{II.15a})$$

$$(k^2 + s^2)^2 \sinh(qh) \cosh(sh) - 4k^2 qs \cosh(qh) \sinh(sh) = 0 \quad (\text{II.15b})$$

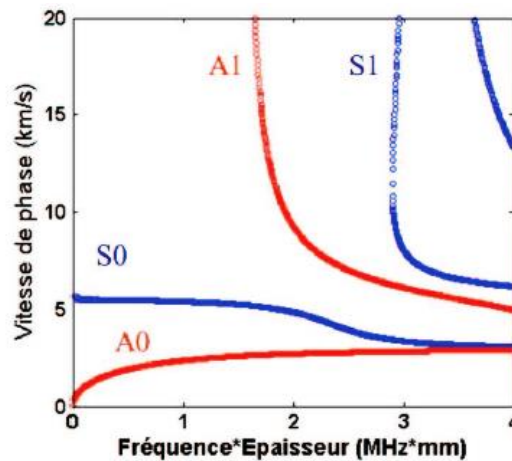
Où



$$q = \sqrt{k^2 - k_L^2} \text{ et } s = \sqrt{k^2 - k_T^2}, k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \text{ et } k_T = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \quad (\text{II.16})$$

Représentent respectivement les nombres d'onde longitudinale et transversale,  $h$  est l'épaisseur de la plaque,  $\omega$  est la pulsation,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constants de Lamé.  $\rho$  Est la masse volumique.

A titre d'exemple, la figure II.18 représente les courbes de dispersion des ondes de Lamb pour une plaque d'aluminium d'épaisseur 4mm.



**Figure II.18 :** Courbes de dispersion des ondes de Lamb pour une plaque d'aluminium d'épaisseur 4mm. [Y. Baccouche 2013]

Dans le cas d'une plaque infinie nous pouvons suivre l'évolution de la vitesse de phase des ondes de Lamb symétriques et antisymétriques en fonction du produit (fréquence X épaisseur) figure.II.18. Lorsque les dimensions sont finies et pour de faibles valeurs du produit (fréquence X épaisseur) le mode de Lamb antisymétrique  $A_0$  est considéré comme étant une onde de flexion.

D'autres chercheurs ont repris l'étude de ces ondes telles que [Viktorov 1967] qui a utilisé la méthode des potentiels pour la recherche des modes propres d'une plaque dans le vide. Par la suite [Auld 1973] a utilisé la méthode de superposition des ondes partielles pour résoudre le même problème.

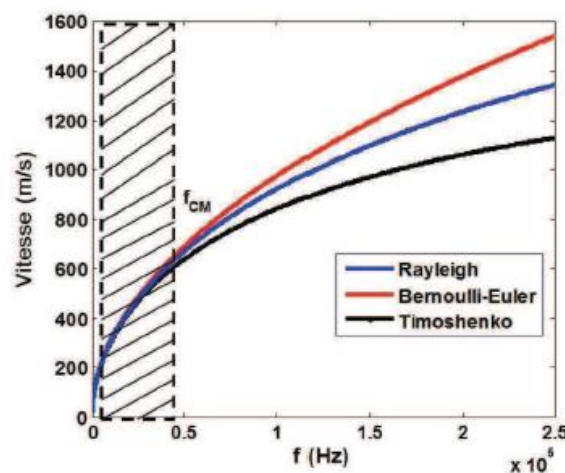
Tout comme les ondes de Rayleigh, les ondes de Lamb ont été utilisées pour déterminer l'influence de l'inhomogénéité du matériau sur la présence de défauts éventuels dans des structures. Ainsi, dès 1957, [Worlton 1957] a montré l'avantage de l'utilisation des ondes de Lamb pour la détection des défauts dans une plaque. Ce dernier a utilisé deux transducteurs, l'un en émission et l'autre en réception pour caractériser la plaque endommagée. A cette même époque, [Sherwood 1958] a mis en évidence l'existence d'une infinité de modes propres complexes dans une plaque. Il a souligné aussi l'importance des modes complexes pour constituer une base complète des ondes dans une plaque infinie. Quelques années plus tard,

Gazis et Mindlin [GAZ 1960] ont repris le système d'équations décrivant le mouvement des plaques élastiques et l'ont étendu au cas de vibrations axiales symétriques d'un disque circulaire.

### II.10.5.2 Ondes de flexion

Les ondes de flexion se propageant dans des plaques minces peuvent être décrites par trois théories basées sur les travaux de Timoshenko, de Rayleigh et ceux de Bernoulli-Euler. Le modèle de Timoshenko intègre à la fois les effets d'inertie de rotation et de cisaillement qui affectent les fréquences propres de flexion de la poutre.

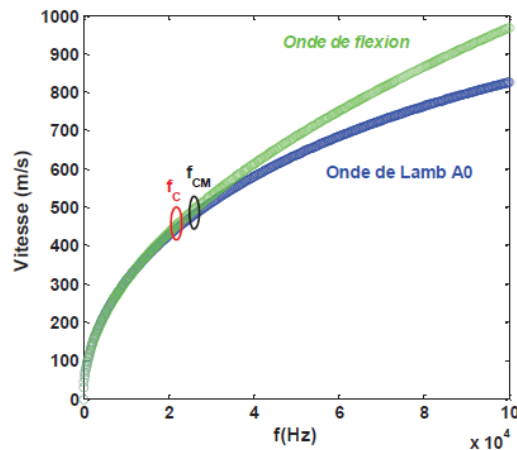
Dans le cas d'une poutre en matériau composite, la comparaison des valeurs de vitesse des ondes de flexion est illustrée par la figure II.11. En effet, nous remarquons une coïncidence pour les faibles valeurs de nombre d'onde allant jusqu'à  $427\text{m}^{-1}$ . En particulier, cette valeur correspond à  $f_{CM} \cong 21\text{ kHz}$  ou  $f_{CM}$  est la fréquence de coupure des modèles (Timoshenko, Rayleigh et Bernoulli-Euler) figure II.19 [Ait yahia, 2015].



**Figure. II.19:** Relation de dispersion d'après des théories de Timoshenko, Rayleigh et Bernoulli-Euler dans le Cas d'un composite à base de polymère d'épaisseur 2.5mm [Y. Baccouche 2013].

L'équation de dispersion du mode de Lamb antisymétrique  $A_0$ . La superposition des courbes de dispersion des ondes de flexion et des ondes de Lamb dans le cas d'un composite à base de polymère montre que l'onde de flexion est une onde de Lamb antisymétrique  $A_0$  et ce Jusqu'à une fréquence de coupure  $f_c$  correspondant approximativement à  $f_{CM} \cong 20\text{ kHz}$  figure II.20 [Ait yahia, 2015].





**Figure. II.20:** Courbe de dispersion d'une plaque composite à fibre de verre ( $h=2.5\text{mm}$ ) avec les paramètres élastiques ( $E$  et  $\nu$ ) sont déterminés par des mesures ultrasonores [Y. Baccouche2013].

Les modèles théoriques ainsi présentés ont été développés dans le cadre d'élasticité linéaire. En d'autres termes les modules ainsi que les coefficients élastiques ( $E, \nu, G$  etc.) ne dépendent pas de la déformation générée par une perturbation acoustique (vibratoire ou ultrasonore). Cela risque de poser des problèmes dans le cas de certains matériaux notamment ceux présentant des micro-hétérogénéités (exemple matériaux micro fissurés).

## II.11 Conclusion

Après avoir défini les matériaux FGM comme étant des matériaux composites innovants dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, nous avons évoqué les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles de ces derniers. Nous avons aussi cité quelques domaines application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

L'idée de la gradation fonctionnelle de matériaux a un impact positif sur le côté économique et environnemental. Les propriétés améliorées des matériaux en termes de physique du bâtiment et de capacité structurelle peuvent apporter une contribution supplémentaire à l'économie de l'énergie et des matériaux. La variation graduelle des propriétés matérielles permet d'éviter les points faibles de certains éléments structuraux.

Les travaux de recherche ont amené à libérer le potentiel des éléments à gradient de propriétés pour l'ingénierie de la construction en termes de leur multifonctionnalité, poids et économie d'énergie. Construire avec des matériaux à gradient de propriétés peut ainsi apporter une contribution majeure vers le développement des méthodes de construction durable.

D'autre part nous avons défini dans ce chapitre le phénomène de propagation des ondes élastiques dans les milieux dispersif et non dispersif ; ensuite nous avons citée quelques éléments de la propagation des ondes telles que la vitesse, la vitesse de phase et vitesse de groupe ; ainsi les équations différentielles modélisant l'onde de propagation puis nous avons présentés les courbes de dispersion des ondes d'après les théories de Timoshenko, Rayleigh et Bernoulli-Euler pour le cas d'un matériau composite dans un milieu linéaire ; le chapitre suivant portera sur les méthodes principales de résolution des problèmes structuraux.

# CHAPITRE III

---

Analyse théorique de la propagation des ondes dans les  
plaques épaisses en S-FGM

## Chapitre III

### Analyse théorique de la propagation des ondes dans les plaques épaisses en S-FGM.

#### III.1. Introduction

Un nouveau matériau appelé matériaux à gradient fonctionnel, qui est apparu suite à une demande d'une efficacité structurelle améliorée dans le domaine de l'aérospatiale, ensuite il a été utilisé dans d'autres domaines comme le génie mécanique et le génie civil (Shen et Wang 2012; Ait Atmane et al.2016). Les FGM sont fabriqués de telle manière que les propriétés des matériaux varient uniformément et continue le long de l'épaisseur, de la surface d'une céramique exposée à une température élevée à celle d'un métal à l'autre surface (Hachemi et al.2017 ; Younsi et al.2018 ; Yousfi et al.2018).

Dans ce chapitre, les propagations des ondes dans les plaques sigmoïdes à graduation fonctionnelle (S-FGM) sont étudiées en utilisant la nouvelle théorie de la déformation par cisaillement supérieur (HSDT) basée sur la théorie de l'élasticité bidimensionnelle (2D). La théorie actuelle d'ordre supérieur n'a que quatre inconnues, ce qui signifie que peu de nombres d'inconnues, comparés aux premières déformations de cisaillement et à d'autres théories de déformations de cisaillement plus élevées et sans avoir besoin d'un correcteur de cisaillement. Les propriétés des matériaux de Sigmoide fonctionnelle graduée sont supposées varier à travers l'épaisseur selon le modèle sigmoïde. Deux types de plaque SFGM sont considérés, à savoir une plaque FGM parfaites, tandis que la deuxième structure est une plaque en matériau SFGM poreux, ce qui signifie qu'elles ont une distribution poreuse (régulière et inégale) à travers l'épaisseur de ces plaques. Les équations régissant les plaques S-FGM sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. En utilisant la technique de Navier, les équations différentielles de S-FGM en termes de déplacements sont résolues.

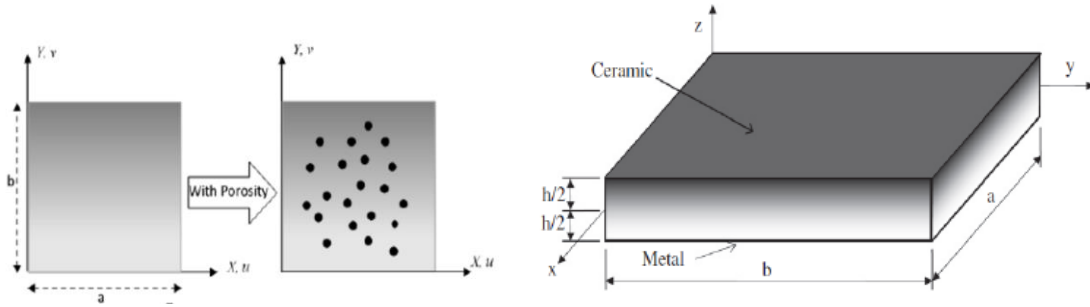


Figure. III.1 : La géométrie et les coordonnées de la plaque SFGM.

### III.2. Caractéristiques géométriques et matérielles d'une Plaque S-FGM avec porosité

Considérons une plaque à deux dimensions, de longueur "a" et de largeur "b", dont l'épaisseur "h" est plus petite que les deux autres dimensions par rapport aux deux autres dimensions. Ces plaques faites de matériaux sigmoïdes à gradient fonctionnel, dont les propriétés de leurs matériaux changent en fonction de l'épaisseur dans la direction z, comme le montre la figure III.1. Les plaques S-FGM sont décrites dans un repère cartésien (x, y, z). Nous avons supposé dans une partie de notre étude que les matériaux à gradient fonctionnel étaient imparfaits (poreux) en raison des effets de porosités uniformes et non-uniformes (logarithmiques, linéaire et exponentielles) dans la distribution des propriétés des matériaux. Les fractions de volume des constituants sont données en fonction de la structure des plaques S-FGM. Plus précisément, dans cet article, les types des plaques S-FGM étudiées sont :

- Plaque parfaite ;
- Plaque imparfaite.

#### III.2.1. Loi de mélange du matériaux type S-FGM

A présent, la fraction totale du métal et de la céramique est la suivante :  $V_m + V_c = 1$ , Pour les plaques S-FGM en utilisant la fraction de volume de la phase céramique définie selon la loi de puissance suivante :

$$V_c^1 = 1 - (1/2) * \left( \frac{(h/2) - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{III.1.a}$$

$$V_c^2 = (1/2) * \left( \frac{(h/2) + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad \text{III.1.b}$$

"h" est l'épaisseur de la plaque et "p" représente l'indice de fraction volumique indiquant la variation du matériau dans la direction de l'épaisseur (z) des plaques.

### III.2.2. Model de Voigt modifiée pour les plaques poreuses S-FGM

La porosité dans les plaques en matériaux S-FGM est représentée selon les études (Ankit Gupta et Mohammad Talha, 2017), par la relation suivante :

$$\bar{P} = (\bar{P}_c - \bar{P}_m)V_c + \bar{P}_m - (\bar{P}_c + \bar{P}_m)\Omega \quad (III.2)$$

Il est à noter que  $\bar{P}$  représente la caractéristique matérielle qui varie suivant l'épaisseur "h" de la plaque. Cette caractéristique peut être le module de Young, la masse volumique ou le coefficient de poisson ; le nombre réel positif  $p$  ( $0 \leq p < \infty$ ) est l'indice de loi de puissance ou la fraction de volume, et  $z$  est comptée à partir du plan médian de la plaque SFGM, qui devienne une plaque entièrement en céramique, lorsque  $p$  est nul, et entièrement métallique quant  $p$  tend vers l'infini.

La règle modifiée du mélange prenant en compte les défauts microstructuraux, telle que proposée par Gupta et Talha (2018). Les densités et les modules de Young des matériaux sont donnés par les lois de mélange suivante :

➤ **Type I** : porosités uniformément réparties sur la section transversale

Le module de Young ( $E$ ) et de la densité de matière ( $\rho$ ) peuvent être exprimés comme suit :

$$E(z) = E_c V_c^1(z) + (1 - V_c^1(z))E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad III.3.a$$

$$E(z) = E_c V_c^2(z) + (1 - V_c^2(z))E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c^1(z) + (1 - V_c^1(z))\rho_m - \frac{\alpha}{2}(\rho_c + \rho_m) \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad III.3.b$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c^2(z) + (1 - V_c^2(z))\rho_m - \frac{\alpha}{2}(\rho_c + \rho_m) \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

➤ **Type II** : porosités non-uniformément réparties en coupe transversale et principalement concentrées dans la zone centrale des plaques :

$$E(z) = E_c V_c^1(z) + (1 - V_c^1(z))E_m - \Omega \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) (E_c + E_m) \quad \text{for } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad III.4.a$$

$$E(z) = E_c V_c^2(z) + (1 - V_c^2(z))E_m - \Omega \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) (E_c + E_m) \quad \text{for } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$




$$\rho(z) = \rho_c V_c^1(z) + (1 - V_c^1(z))\rho_m - \Omega \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) (\rho_c + \rho_m) \quad \text{for } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad III.4.b$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c^2(z) + (1 - V_c^2(z))\rho_m - \Omega \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) (\rho_c + \rho_m) \quad \text{for } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

Dans lequel les indices  $c$  et  $m$  représentent la céramique et le métal, respectivement. De plus,  $p$  est l'indice de loi de puissance qui définit la caractérisation de la variation du matériau à travers l'épaisseur de la plaque. Le coefficient de Poisson est considéré comme constant. ( $\alpha \ll 1$ ) est le coefficient de porosité. L'effet des porosités est proposé avec deux modèles différents. Dans l'équation (III.3), le premier modèle a une distribution uniforme de la porosité dans la section transversale des plaques, comme indiqué refs (Fazzolari 2018). Dans l'équation (III.4), le deuxième modèle de porosité présente des distributions inégales concentrées au milieu des plaques avec trois modèles (linéaire, logarithmique et exponentiel), comme indiqué dans les références (Gupta et Talha 2017 ; Ayache et al.2018 ; Gupta et Talha 2018). Comme indiqué dans le tableau III.1

Le facteur de distribution de la porosité du matériau d'étude,  $\Omega$  ( $\Omega \ll 1$ ), selon l'épaisseur de la plaque, est donné dans le Tableau.III.1 :

Tableau.III.1. Facteur de la distribution de la porosité  $\Omega$ .

|   | $\Omega$                                | Type de distribution | La forme géométrique  |
|---|---|----------------------|---|
| Ankit Gupta et al. (2017)               | $\log\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$ | Logarithmique        |  |
| Nuttawit Wattanasakulpong et al. (2013) | $\frac{\alpha}{2}$                      | Linéaire             |  |
| (Ayache et al. 2018)                    | $1 - e^{-\frac{\alpha}{2}}$             | Exponentielle        |  |

Cependant, le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) est supposé être constant. Les propriétés matérielles d'une plaque SFGM parfaite peuvent être obtenues lorsque  $\alpha$  égale à zéro.

### III.3. Equations fondamentales

#### III.3.1. Hypothèses de base et équations constitutives

Le champ de déplacement actuel est proposé pour réduire le nombre d'inconnus de cinq à seulement quatre inconnus, sur la base de théories de déformation de cisaillement plus élevées pour les plaques, comme suit :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad \text{III.5.a}$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + P_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad \text{III.5.b}$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad \text{III.5.c}$$

Sachant que  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$ , et  $\theta(x, y)$  sont les quatre fonctions de déplacement inconnues de la surface moyenne de la plaque, le dernier inconnu est un terme mathématique qui permet d'obtenir les rotations des normales au plan moyen par rapport aux axes  $y$  et  $x$ , respectivement (comme dans le HSDT ordinaire). Noter que les intégrales n'ont pas de limites. Dans la présente étude, on considère seulement quatre termes de déplacement inconnus au lieu de cinq termes dans HSDT ordinaire (Akavci, 2014). Les constantes  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $A'$  et  $B'$  dépendent de la géométrie.  $f(z)$  représente la fonction de forme pour déterminer la répartition des déformations et des contraintes de cisaillement transversales le long de l'épaisseur.

Pour vérifier La précision du modèle présent, impliquant seulement quatre fonctions de déplacement inconnu, en comparant beaucoup de théories.

Dans cette étude, ces fonctions de forme sont choisies tel que présenté dans le tableau. III.2.

**Tableau III.2** : les fonctions de formes des différents modèles.

| Modèle  | $f(z)$  |
|---|---|
| Théorie de déformation de 3ème ordre (TSDT)<br>Reddy (1987) | $z - \frac{4z^3}{3h^2}$   |
| Théorie de déformation Sinusoïdale (SSDT)                   | $\frac{z \left[ \pi + 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]}{2 + \pi}$ |
| Théorie de déformation Hyperbolique (HSDT)                  | $h \sinh \frac{z}{h} + z \cosh \frac{1}{2}$                                 |
| Théorie de déformation Exponentielle (ESDT)<br>Afaq(2003)   | $ze^{-2(z/h)^2}$  |

En remplaçant, les relations de déplacement (III.5) dans les équations d'élasticité de déformation-déplacement, les composantes normales et déformation transversale sont obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{III.6}$$

Où



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x} \\ P_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 y} \\ (P_1 A' + P_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ P_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{III.7}$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad \text{III.8}$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas via des relations de dispersions. Par conséquent A', B', P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub> sont écrits comme suit :

$$A' = -\frac{1}{k_1^2}, \quad B' = -\frac{1}{k_2^2}, \quad P_1 = k_1^2, \quad P_2 = k_2^2 \quad \text{III.9}$$

Où K<sub>1</sub> et K<sub>2</sub> sont les nombres d'onde de propagation le long des directions d'axe des « x » et d'axe des « y » respectivement.

Les relations générales entre contrainte et déformation pour une plaque sigmoïde isotrope linéaire à gradation fonctionnelle sont décrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{III.10}$$

Où ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ ) et ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ) sont les composantes de la contrainte et de la déformation, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (III.3 et III.4), les coefficients de rigidité,  $C_{ij}$  peuvent être exprimés comme suit :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad \text{III.11}$$

### III.3.2. Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées au champ de déplacement et aux équations constitutives. Le principe peut être énoncé sous forme analytique :

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta K) dt \quad \text{III.12}$$

$\delta U$  c'est la variation de l'énergie de déformation et  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique de la plaque SFGM.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left[ \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x \delta k_x^b + M_y \delta k_y^b + M_{xy} \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + S_x \delta k_x^s + S_y \delta k_y^s + S_{xy} \delta k_{xy}^s + T_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + T_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 \right] dA = 0 \end{aligned} \quad \text{III.13}$$

Où  $A$  est la surface supérieure. Les efforts et les moments résultants  $N$ ,  $M$  et  $S$  sont définis par :

$$(N_i, M_i, S_i) = \sum_{n=1}^2 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (1, z, f) \sigma_i dz \quad (i = x, y, xy), \quad (T_{xz}, T_{yz}) = \sum_{n=1}^2 \int_{h_n}^{h_{n+1}} g (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad \text{III.14}$$

Où  $h_n$  et  $h_{n+1}$  sont les coordonnées supérieure et inférieure de la nième couche.

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme suit :

$$\delta K = \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \quad \text{III.15.a}$$

$$\begin{aligned} &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \right. \\ &\quad \left. - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + J_1 \left( (k_1 A') \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + (k_2 B') \left( \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left( (k_1 A')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) + (k_2 B')^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - J_2 \left( (k_1 A') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + (k_2 B') \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) \right\} dA \end{aligned} \quad \text{III.15.b}$$

Où la convention de  $(\dot{\phantom{a}})$  représente la dérivée par rapport au temps  $t$ ;  $\rho(z)$  est la densité de masse donnée par l'équation (1); Et  $(I_1, J_1, K_1)$  sont des inerties de masse exprimées par:

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{n=1}^2 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad \text{III.16}$$

$$(J_1, J_2, L_2) = \sum_{n=1}^2 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (f, z, f^2) \rho(z) dz$$

En utilisant les relations de déplacement-déformation généralisées (III.13), les relations contraintes-déformation (III.15), les fondamentaux du calcul des variations et la collecte des

coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$  et  $\delta \theta_0$  dans l'équation. (III.12), les équations de mouvement sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + P_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + P_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 \\
 & + J_2 \left( P_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + P_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta : \quad & -P_1 A' \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} - P_2 B' \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} - (P_1 A' + P_2 B') \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + P_1 A' \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} \\
 & + P_2 B' \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} = -J_1 \left( P_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + P_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & - L_2 \left( (P_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (P_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) + J_2 \left( P_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + P_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

Où les résultats des contraintes et les moments résultants sont définis comme suit :

Remplacer l'équation. (III.6) dans l'équation. (III.10) et les résultats ultérieurs de l'équation. (III.17), les résultats de la contrainte peuvent être représentés en termes de champs de déplacement ( $u_0, v_0, w_0$  et  $\theta$ ) comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad T = A^s \gamma \tag{III.18}$$

Dans lequel :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t, \quad S = \{S_x, S_y, S_{xy}\}^t \tag{III.19a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \tag{III.19b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{III.19c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{III.19d}$$

$$T = \left\{ T_{xz}, T_{yz} \right\}^t, \quad \gamma = \left\{ \gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0 \right\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad \text{III.19e}$$

Les composants de rigidité sont donnés comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^2 \int_{h_n}^{h_{n+1}} C_{11}^{(n)} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \nu^{(n)} \\ \frac{1-\nu^{(n)}}{2} \end{bmatrix} dz \quad \text{III.20a}$$

$$\left( A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s \right) = \left( A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \right), \quad C_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad \text{III.20b}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad \text{III.20c}$$

En remplaçant l'équation (III.18) - (III.20) dans l'équation (III.17), les équations de mouvement pour les plaques S-FGM simplement supportées via la méthode actuelle peuvent être réécrites en termes de déplacements ( $u_0, v_0, w_0$  et  $\theta$ ) et les équations appropriées prennent la forme:

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{11} P_1 A' \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \\ & + (B_{12}^s P_2 B' + B_{66}^s (P_1 A' + P_2 B')) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + J_1 P_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}, \\ & A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{66}^s (P_1 A' + P_2 B') + B_{12}^s P_1 A') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \\ & + B_{22}^s P_2 B' \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + J_1 B' P_2 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}, \end{aligned} \quad \text{IV.21}$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ & + D_{11}^s P_1 A' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s)(P_1 A' + P_2 B')) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^s P_2 B' \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) \\ & - I_2 \left( \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2} \right) + J_2 \left( P_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + P_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_1 A' B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s P_2 B' + B_{66}^s (P_1 A' + P_2 B')) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s P_1 A' + B_{66}^s (P_1 A' + P_2 B')) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s P_2 B' \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\ & - D_{11}^s P_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - ((D_{12}^s + 2D_{66}^s)(P_1 A' + P_2 B')) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s P_2 B' \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + H_{11}^s (P_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + H_{22}^s (P_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \\ & + (2H_{12}^s P_1 P_2 A' B' + (P_1 A' + P_2 B')^2 H_{66}^s) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - A_{44}^s (P_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - A_{55}^s (P_2 B')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = J_1 \left( P_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + P_2 B' \frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y} \right) \\ & - J_2 \left( P_1 A' \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} + P_2 B' \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial y^2} \right) + L_2 \left( (P_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (P_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

### III.3.3. Les relations de la dispersion d'onde

Les solutions de l'équation du mouvement  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  et  $\theta$  pour la propagation des ondes dans les plaques sont exprimées par les relations de dispersion suivantes :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U e^{i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)} \\ V e^{i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)} \\ W e^{i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)} \\ X e^{i(\kappa_1 x + \kappa_2 y - \omega t)} \end{pmatrix} \quad \text{III.22}$$

Où U; V; W et X sont les coefficients de l'amplitude des ondes,  $k_1$  et  $k_2$  sont les nombres d'onde de propagation des ondes respectivement le long des directions des axes x et y,  $\omega$  est la fréquence,  $\sqrt{-1}$  est l'unité imaginaire. Remplacer l'équation.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \theta_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{III.23}$$

Où

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}k_1^2 + A_{66}k_2^2), \\ a_{12} &= -k_1k_2(A_{12} + A_{66}), \\ a_{13} &= i(B_{11}k_1^3 + (B_{12} + 2B_{66})k_1k_2^2), \\ a_{14} &= -i((k_1k_2^2(B_{12}^s P_2 B' + (P_1 A' + P_2 B')B_{66}^s) + P_1 A' B_{11}^s k_1^3), \\ a_{21} &= -(A_{12} + A_{66})k_1k_2 \\ a_{22} &= -(A_{66}k_1^2 + A_{22}k_2^2), \\ a_{23} &= i(B_{22}k_2^3 + (B_{12} + 2B_{66})k_1^2k_2), \\ a_{24} &= (-ik_1^2k_2P_1A'B_{12}^s - ik_1^2k_2B_{66}^s(P_1A' + P_2B') - iB_{22}^sk_2^3P_2B') \\ a_{31} &= -ik_1^3B_{11} - i(B_{12} + 2B_{66})k_1k_2^2; \\ a_{32} &= -ik_2^3B_{22} - i(B_{12} + 2B_{66})k_1^2k_2 \\ a_{33} &= -(D_{11}k_1^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})k_1^2k_2^2 + D_{22}k_2^4), \\ a_{34} &= P_1A'D_{11}^sk_1^4 + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s)(P_1A' + P_2B'))k_1^2k_2^2 + P_2B'D_{22}^sk_2^4 \\ a_{41} &= ik_1k_2^2(B_{12}^sP_2B' + (P_1A' + P_2B')B_{66}^s) + iB_{11}^sP_1A'k_1^3 \\ a_{42} &= iP_2B'B_{22}^sk_2^3 + i(B_{12}^sP_1A' + (P_1A' + P_2B')B_{66}^s)k_1^2k_2^2 \\ a_{43} &= a_{34} \\ a_{44} &= -(P_1A')^2H_{11}^sk_1^4 - (2P_1P_2A'B'H_{12}^s + (P_1A' + P_2B')^2H_{66}^s)k_1^2k_2^2 - (P_2B')^2H_{22}^sk_2^4 \\ &\quad - (P_2B')^2A_{55}^sk_2^2 - (P_1A')^2A_{44}^sk_1^2 \end{aligned} \quad \text{III.24.a}$$

$$\begin{aligned}
m_{22} &= -I_0, m_{23} = ik_2 I_1, m_{24} = -iP_2 B' k_2 J_1, m_{31} = -ik_1 I_1, m_{32} = -ik_2 I_1, \\
m_{33} &= -I_0 - I_2(k_1^2 + k_2^2), m_{34} = J_2(P_1 A' k_1^2 + P_2 B' k_2^2), m_{41} = iP_1 A' k_1 J_1, \\
m_{42} &= iP_2 B' k_2 J_1, m_{43} = J_2(P_1 A' k_1^2 + P_2 B' k_2^2), m_{44} = -L_2((P_1 A')^2 k_1^2 + (P_2 B')^2 k_2^2)
\end{aligned}$$

Les relations de dispersion de la propagation des ondes dans la plaque sigmoïde à graduation fonctionnelle sont présentées par :

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad \text{III.25}$$

En supposant  $k_1 = k_2 = k$ , les racines de l'équation. (III.25), peuvent être exprimées en tant que :

$$\omega_1 = W_1(\kappa), \omega_2 = W_2(\kappa), \omega_3 = W_3(\kappa) \text{ et } \omega_4 = W_4(\kappa) \quad \text{III.26}$$

Elles correspondent aux modes d'ondes  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$ , respectivement. Les modes d'ondes  $M_0$  et  $M_3$  correspondent à l'onde de flexion, les modes d'ondes  $M_1$  et  $M_2$  correspondent à l'onde d'extension.

La vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque fonctionnelle graduée peut être exprimée par :

$$C_i = \frac{W_i(\kappa)}{\kappa}, \quad (i = 1, 2, 3 \text{ et } 4) \quad \text{III.27}$$

### III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse de la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées sigmoïde sont examinées par une théorie de déformation de cisaillement avec un champ de déplacement à variable intégrale. Dans cette étude deux types de matériaux sont choisis pour l'analyse de la propagation des ondes dans les plaques SFGM.

L'analyse de la dispersion des ondes dans des plaques SFGM imparfaitement supportées est effectuée en utilisant diverses théories de cisaillement plus élevées. Les fréquences et les phases des ondes sont obtenues en fonction de l'épaisseur, des porosités, de l'indice de puissance et du nombre d'ondes.

# CHAPITRE IV

---

Validation des résultats et discussion

## Chapitre IV

### Validation et discussion des résultats

#### IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats de la propagation des ondes dans les plaques à gradient fonctionnel sigmoïde (S-FGM) en utilisant une nouvelle théorie de déformation à quatre variable intégrale employant quatre différentes fonctions de forme pour une plaque S-FGM parfaite et imparfaite avec quatre (04) épaisseurs (h) différentes en commençant en premier lieu par la validation et la comparaison des résultats obtenus par cette nouvelle théorie, Les résultats sont représentés par des courbes de fréquences propres et vitesse de phase de la propagation des ondes pour différents types de plaques en S-FGM.

Pour étudier Les effets de distribution de porosité dans les plaques S-FGM, on a étudié quatre (04) modèles de distribution pour couvrir la phase de porosité qui survient dans le matériau lors de la phase de fabrication, dans ce travail une évaluation et étude de la convergence et validation des résultats ont été faites avec les quatre différentes fonctions étudiées. Les effets de l'indice de puissance, la fraction volumique de porosité, le rapport d'épaisseur sur la vibration libre et la vitesse de phase des plaques S-FGM poreuses sont discutées. Les résultats numériques sont présentés sous forme de tableaux et de graphes.

Les effets des distributions de la fraction volumique sur la propagation des ondes de la plaque fonctionnellement graduée sigmoïde sont discutés en détail dans la présente étude.

#### IV.2. Les résultats numériques et discussion

Dans cette étude, une plaque en S-FGM est fabriquée à partir de deux matériaux  $Si_3N_4$  / SUS304 ; dont les propriétés sont :

Tableaux IV.1. Propriétés des matériaux des plaques S-FGM

| Matériau              | Propriétés |       |                               |
|-----------------------|------------|-------|-------------------------------|
|                       | $E$ (GPa)  | $\nu$ | $\rho$ (Kg / m <sup>3</sup> ) |
| Ceramic ( $Si_3N_4$ ) | 348.43     | 0.3   | 2370                          |
| Metal (SUS304)        | 201.04     | 0.3   | 8166                          |



Ces propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon une loi de puissance ou une loi sigmoïde. La surface supérieure de la plaque S-FGM est riche en céramique  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , tandis que la surface inférieure de la plaque S-FGM est riche en métal SUS304 (Ait Yahia et al. 2015).

Pour étudier l'effet de l'épaisseur de la plaque S-FGM, on a pris 04 épaisseurs différentes  $h=(0.02, 0.05, 0.1 \text{ et } 0.2)$  mètres. Plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour évaluer l'exactitude de la présente théorie dans la recherche de la propagation d'ondes dans les plaques S-FGM; utilisant des théories existantes dans la littérature comme Reddy (1987), Reissner (1975), Ait Atmane (2010), et Afaq (Afaq et al. 2003) ; Les équations ont été développées manuellement et l'analyse a été effectuée via le logiciel MAPLE.

### **IV.2.1. Propagation des ondes dans les plaques S-FGM parfaites**

#### **IV.2.1.1 La fréquence de propagation de l'onde dans les plaques S-FGM parfaites**

L'analyse de la propagation d'ondes dans les plaques S-FGM parfaites et simplement appuyées est considérée dans cette étude ; Utilisant les différentes fonctions  $f(z)$  présentées dans le tableau III.2 pour assurer la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transversales le long de l'épaisseur de la plaque.

Les effets de l'indice de la loi de puissance  $p$  sur les fréquences propres  $\omega$  des plaques S-FGM parfaites en fonction de nombre d'onde  $k$  pour les quatre modes de vibration avec des valeurs d'épaisseur ( $h$ ) différents. Dans les Figures IV.1, IV.2, IV.3 et IV.4, nous avons examiné, l'influence du nombre d'onde sur les différentes fréquences des plaques S-FGM. Plusieurs fonctions de gauchissement ont été testées et ce pour plusieurs valeurs de l'indice de la loi de puissance ( $p$ ) ; nous avons pris quatre valeurs d'épaisseurs,  $h=0.02, 0.05, 0.1 \text{ et } 0.2$ .

Il est à signaler que la porosité n'est pas considérée dans cette partie.

Il apparaît clairement que les résultats obtenus par les différents modèles concordent parfaitement entre eux et les fréquences pour les quatre modes augmentent avec l'augmentation du nombre d'onde  $k$ . Pour le même nombre d'onde  $k$  la fréquence du mode  $M_0$  et  $M_2$  de la plaque S-FGM diminue avec l'augmentation de l'indice de la fraction volumique  $p$  et augmente avec l'augmentation de  $p$  dans le quatrième mode  $M_3$  ; pour le deuxième mode  $M_1$  les fréquences sont sensiblement égales pour les différentes valeurs de l'indices de puissance matériel  $p$ .

De plus, la fréquence de propagation de l'onde devient maximale dans la plaque homogène pour  $p= 2$ , mode 3 et  $h=0.02$ .

La même interprétation pour les résultats des études  $h=0.05$  et  $h=0.1$

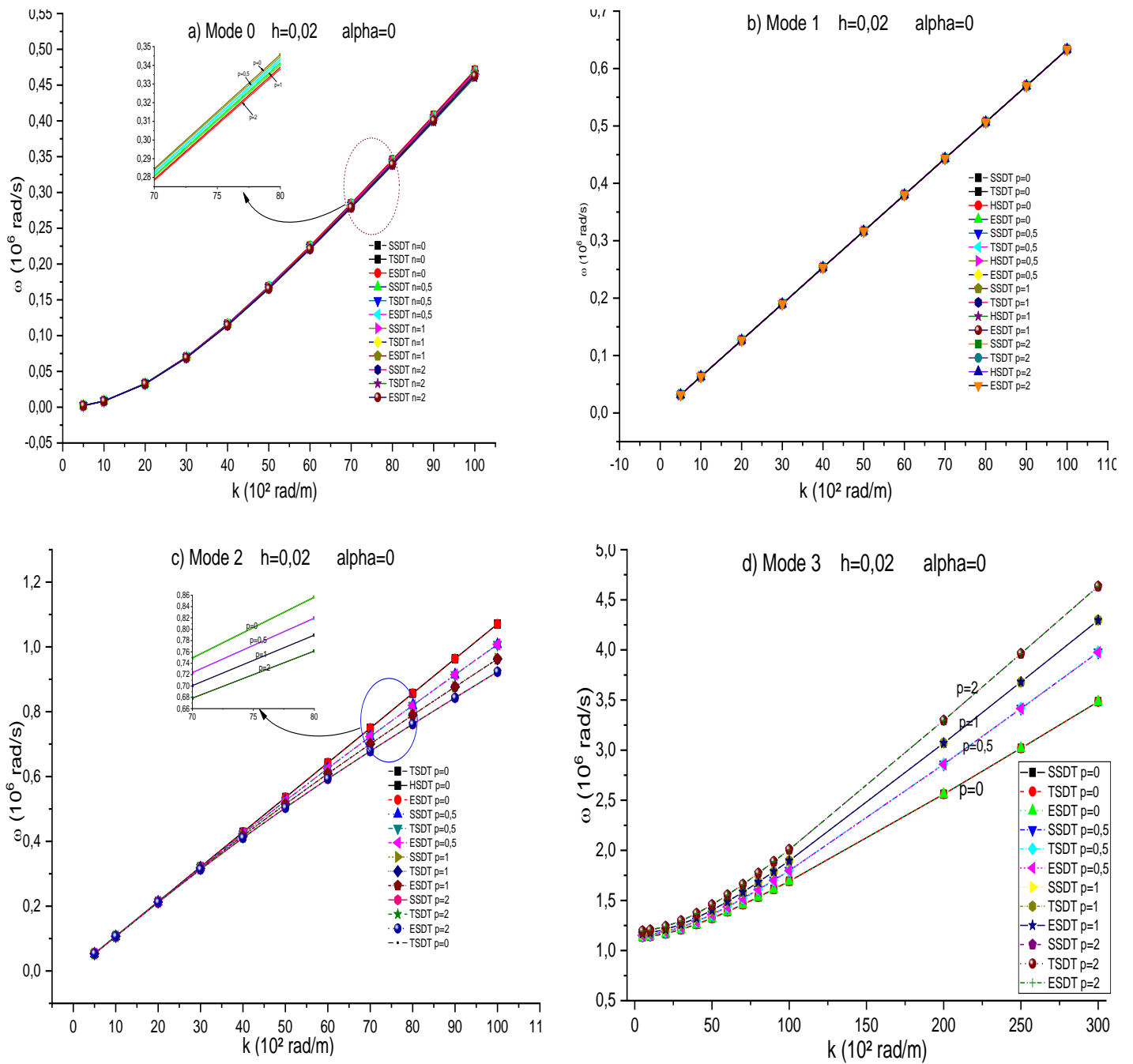


Figure IV.1 : Les courbes de la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $h=0.02$ )

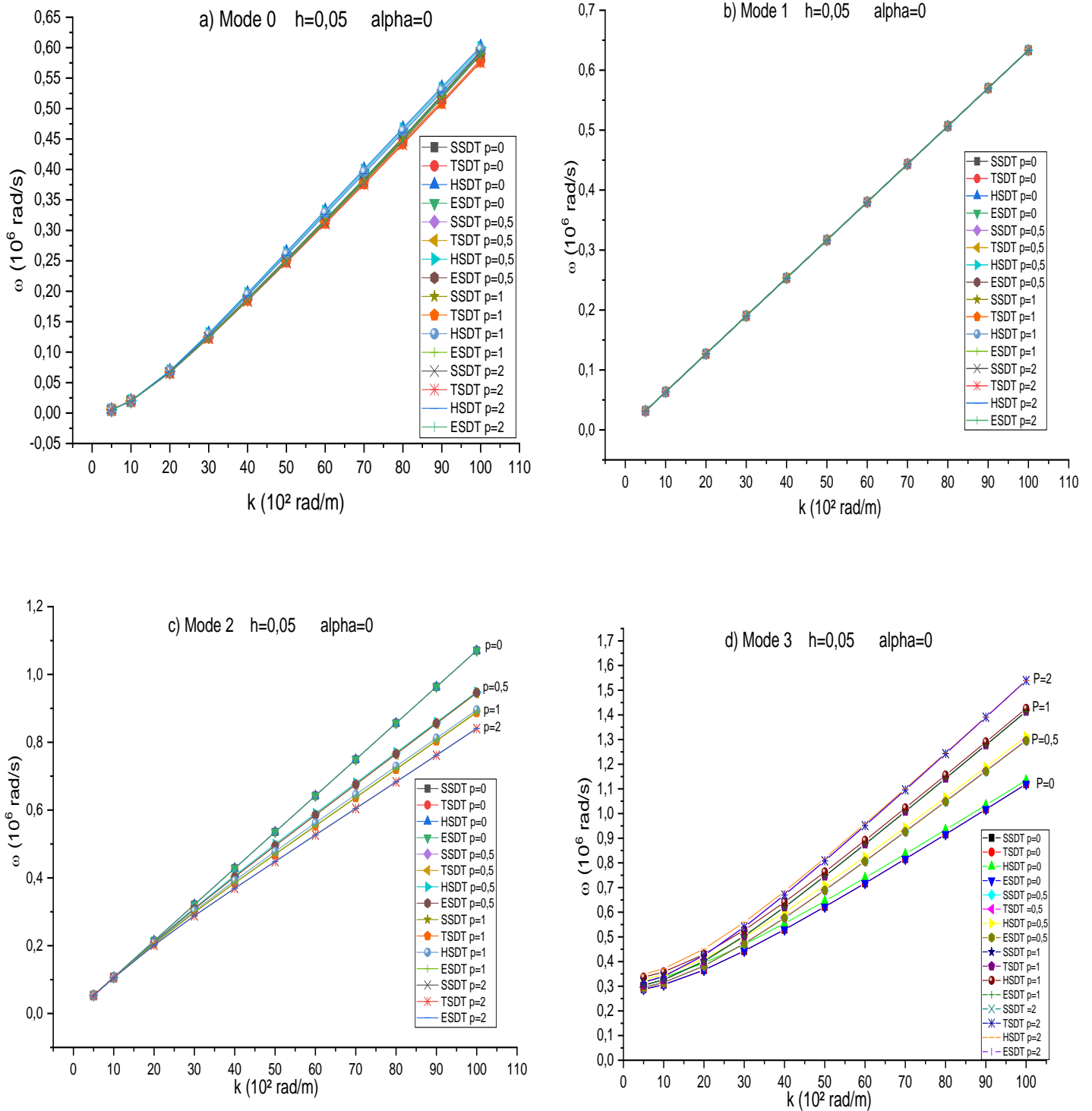


Figure IV.2 : Les courbes de la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $h=0,05$ )

Pour  $h=0,1$  ; il apparait clairement que a partir de  $k=0,7$ , la fréquence du mode  $M_1$  de la plaque S-FGM augmente avec l'augmentation de l'indice de la fraction volumique " $p$ "

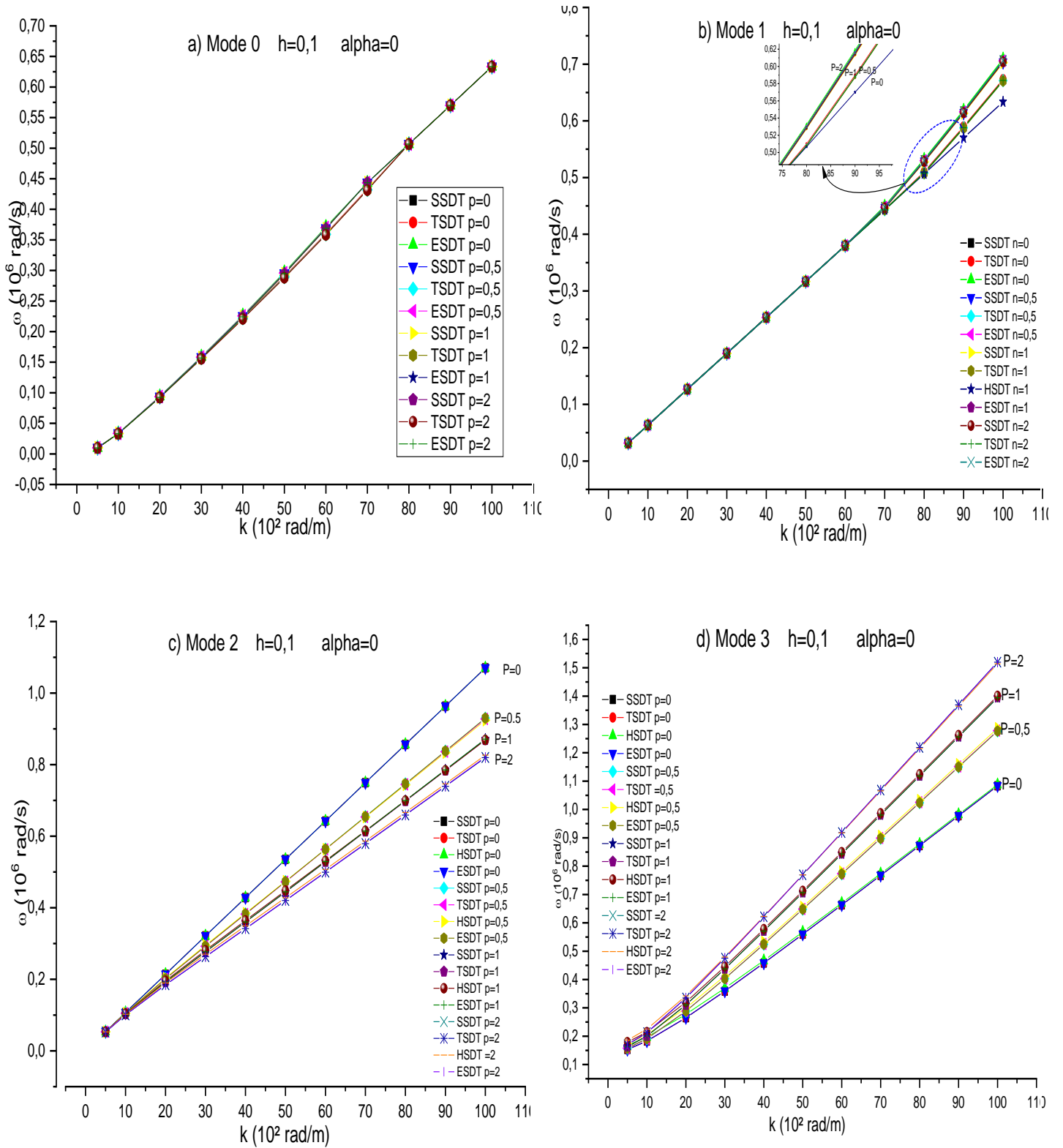


Figure IV.3 : Les courbes de la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $h=0.1$ )

Pour  $h=0.2$  ; il apparait clairement que les résultats obtenus par les différents modèles concordent parfaitement entre eux et les fréquences pour les quatre modes augmentent avec

l'augmentation du nombre d'onde "k". Pour le même nombre d'onde k la fréquence du mode M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub> de la plaque S-FGM diminue avec l'augmentation de l'indice de la fraction volumique "p" et augmente avec l'augmentation de "p" dans le quatrième mode M<sub>3</sub> ; pour le première mode M<sub>0</sub> les fréquences sont égales pour les différentes valeurs de l'indices de puissance matériel p.

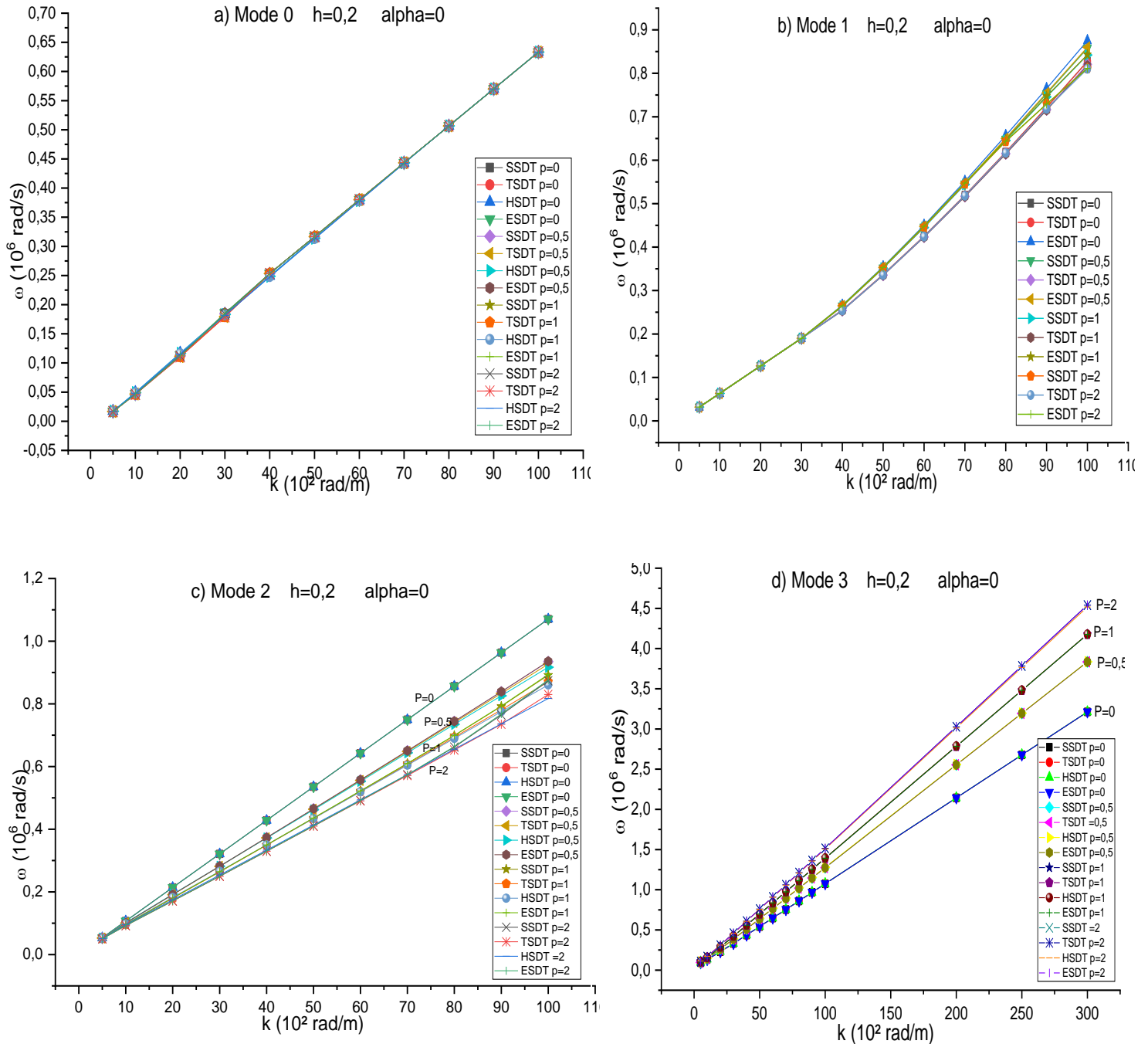


Figure IV.4 : Les courbes de la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $h=0,2$ )

Il est à noter, aussi, que l'effet de la fonction de gauchissement est pratiquement neutre, car les différentes courbes représentant les différentes fonctions de forme sont presque superposées.

Dans ces courbes plusieurs paramètres ont été étudié à la fois dans un même graphe ce qui explicite d'éventuel effet qui peut exister entre ces paramètres comme par exemple :

L'effet de la variation de  $p$  par rapport à la fréquence, sinon, le rapport entre le nombre d'ondes et l'indice de puissance  $p$ .

On remarque, également, qu'il y a une relation entre l'augmentation des fréquences et le nombre d'ondes, cette variation est faible pour les petites valeurs de  $k$  ; L'augmentation de nombre d'onde  $K$  provoque un écart important entre les fréquences.

#### IV.2.1.2 La vitesse de phase dans les plaques S-FGM parfaites

La figure IV.5 montre l'évolution de la vitesse de phase en fonction du nombre d'onde de propagation et l'indice de puissance matériel ( $p$ ) dans les plaques S-FGM, on observe que les courbes de vitesse de phase présentées par toutes les théories trouvées dans la littérature sont pratiquement identiques les unes aux autres.

Il peut être vu que pour toute valeur de  $P$  la vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque S-FGM augmente avec l'augmentation du nombre d'onde et diminue à mesure que l'indice de loi de puissance  $p$  augmente pour le même nombre d'onde  $k$  pour le mode  $M_0$  ; cette remarque est visiblement claire dans les figures IV.5a, IV.6a, IV.7a et IV.8a

Pour  $h=0.02$  et  $0.05$  la vitesse de phase pour le mode d'onde  $M_1$  est sensiblement constante quel que soit l'indice de puissance  $P$ .

Mais, pour  $h=0.1$  et  $0.2$  ; et pour le mode  $M_1$ , la variation de la vitesse de phase pour les petites valeurs du nombre d'onde reste sans changement ; mais avec l'augmentation de  $k$  la courbe commence à décaler signifiant la variation (en termes d'augmentation) de la vitesse de phase. Cette célérité diminue à mesure que l'indice de loi de puissance  $p$  augmente.

Pour le mode  $M_2$ , la vitesse de phase diminue avec l'augmentation du nombre d'onde ; Ce comportement suit toujours, la même logique que premier pour la relation entre la vitesse de phase et l'indice de variation matérielle pour les trois valeurs de  $p=0.5, 1$  et  $2$  ; pour  $p=0$  la valeur de la vitesse de phase reste constante quel que soit la valeur de  $k$  ; c'est le cas du matériau isotrope.

Il est à noter que la diminution de la vitesse de phase se fait d'une manière rapide des la moindre variation du nombre d'onde  $k$ .

Pour le mode  $M_3$ , la vitesse de phase diminue avec l'augmentation du nombre d'onde ; cette diminution commence avec un taux de variation grand au voisinage des petites valeurs de  $k$ , mais au-delà de  $k=0.4$  (environ) la vitesse de phase commence à se stabiliser avec l'augmentation de  $k$ .

Pour la même valeur de  $k$  la vitesse de phase diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance matériel.

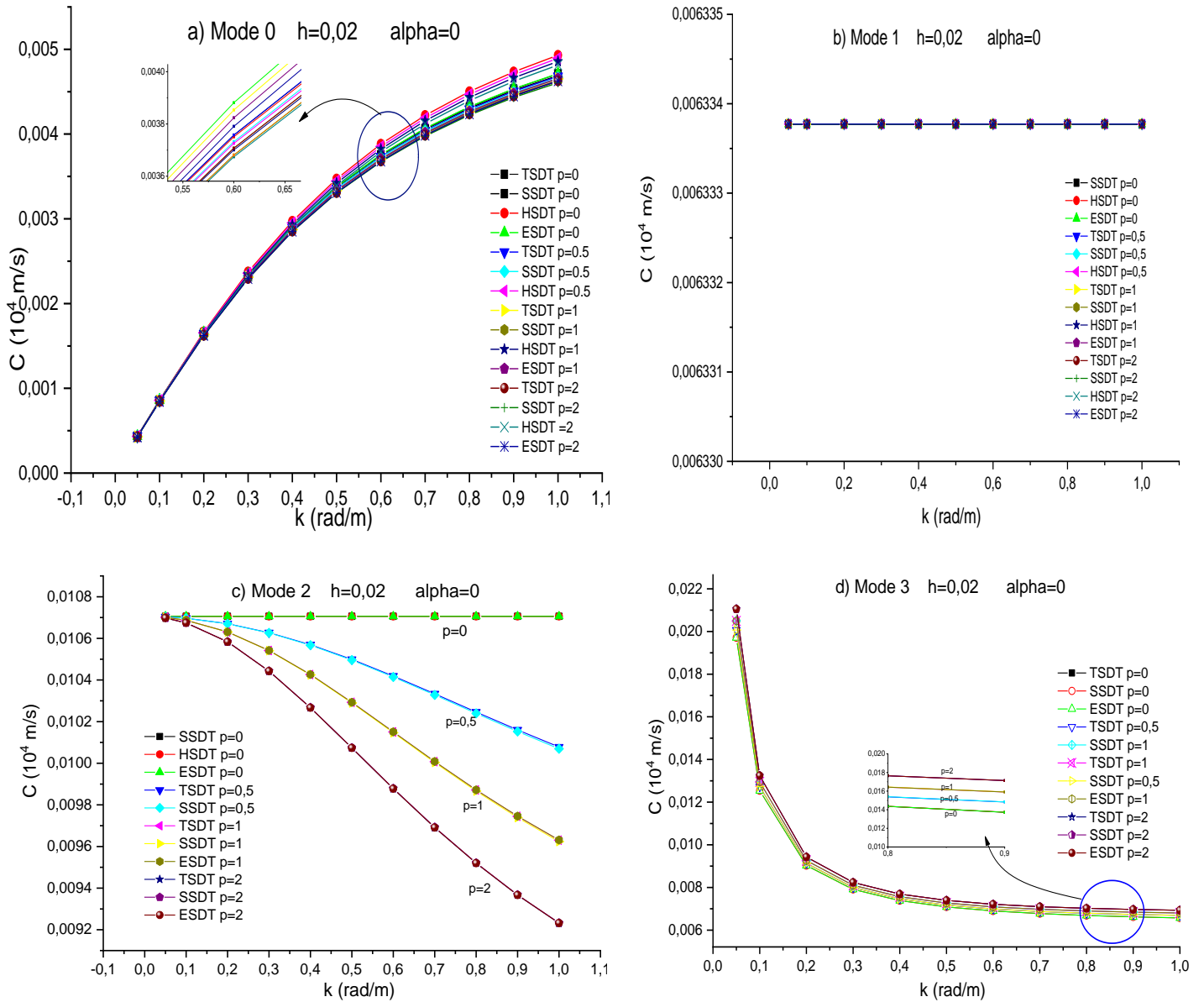


Figure.IV.5 : Courbes de la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde pour  $h=0.02$

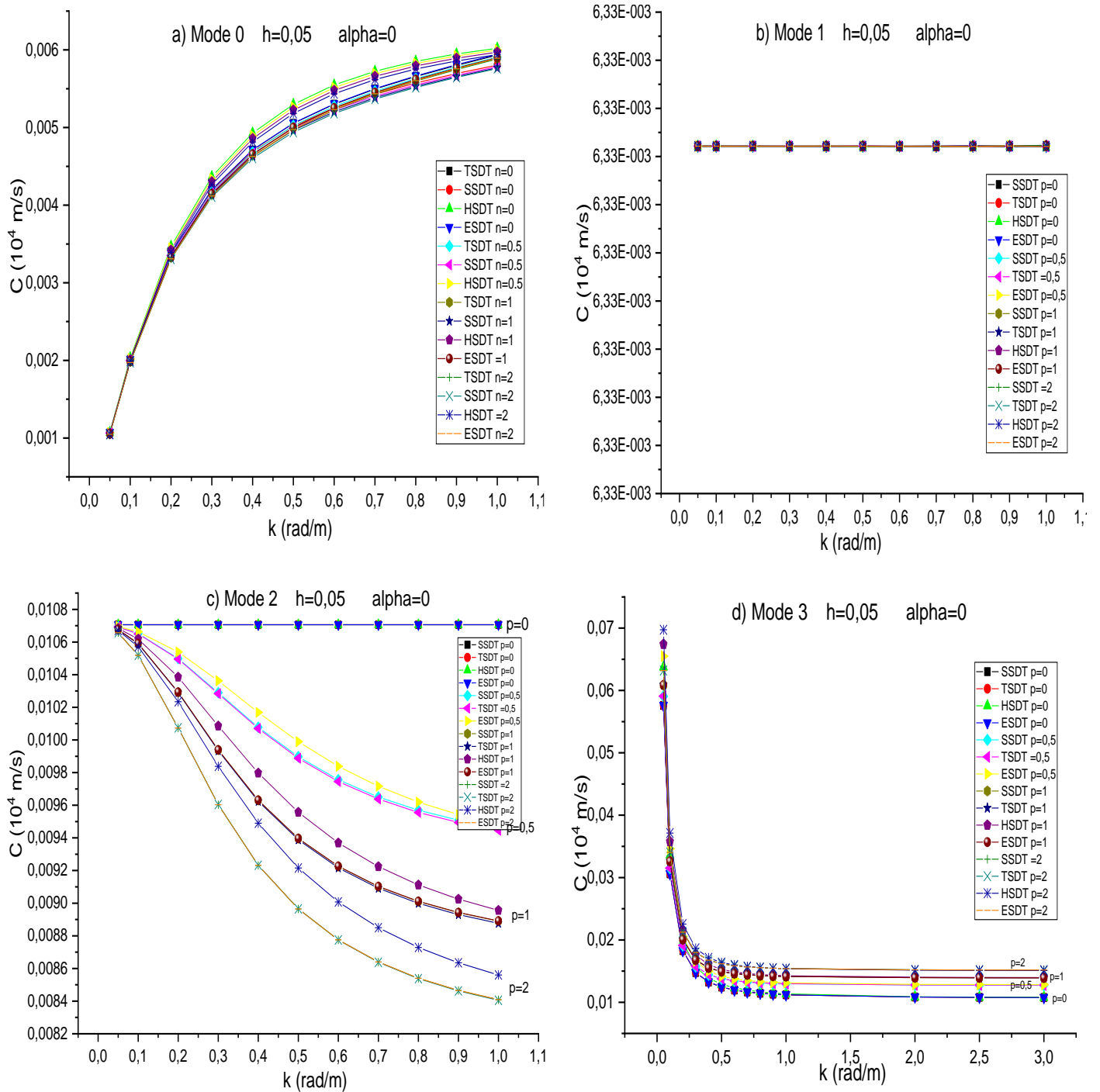


Figure.IV.6 : Courbes de la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde pour  $h=0.05$

A partir des figures IV.5b, IV.6b, IV.7b et IV.8b (mode  $M_1$ ) on peut conclure que l'augmentation de l'épaisseur de la plaque provoque une augmentation de la vitesse de phase. Cette variation de la célérité est en relation directe avec la variation du nombre d'ondes.

Donc, on peut dire que pour le mode  $M_1$ , plus la plaque soit épaisse plus la vitesse de phase augmente pour des petites valeurs de nombre d'ondes.



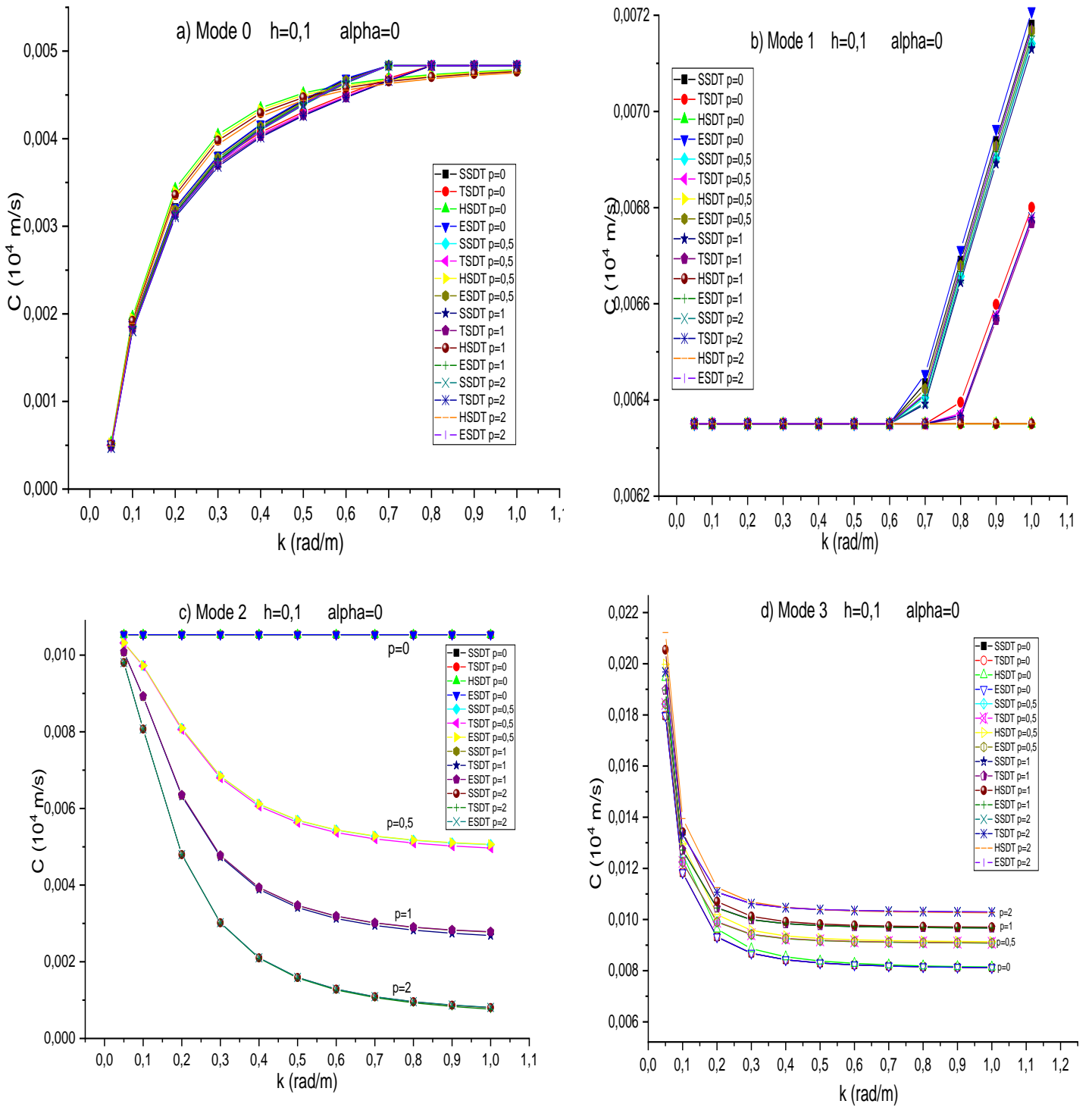


Figure.IV.7 : Courbes de la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde pour  $h=0,1$

Il est à remarquer que pour le mode M1 dans les plaques SFGM plus au moins épaisses, l'augmentation de l'indice de puissance implique une stabilisation de la vitesse de phase.

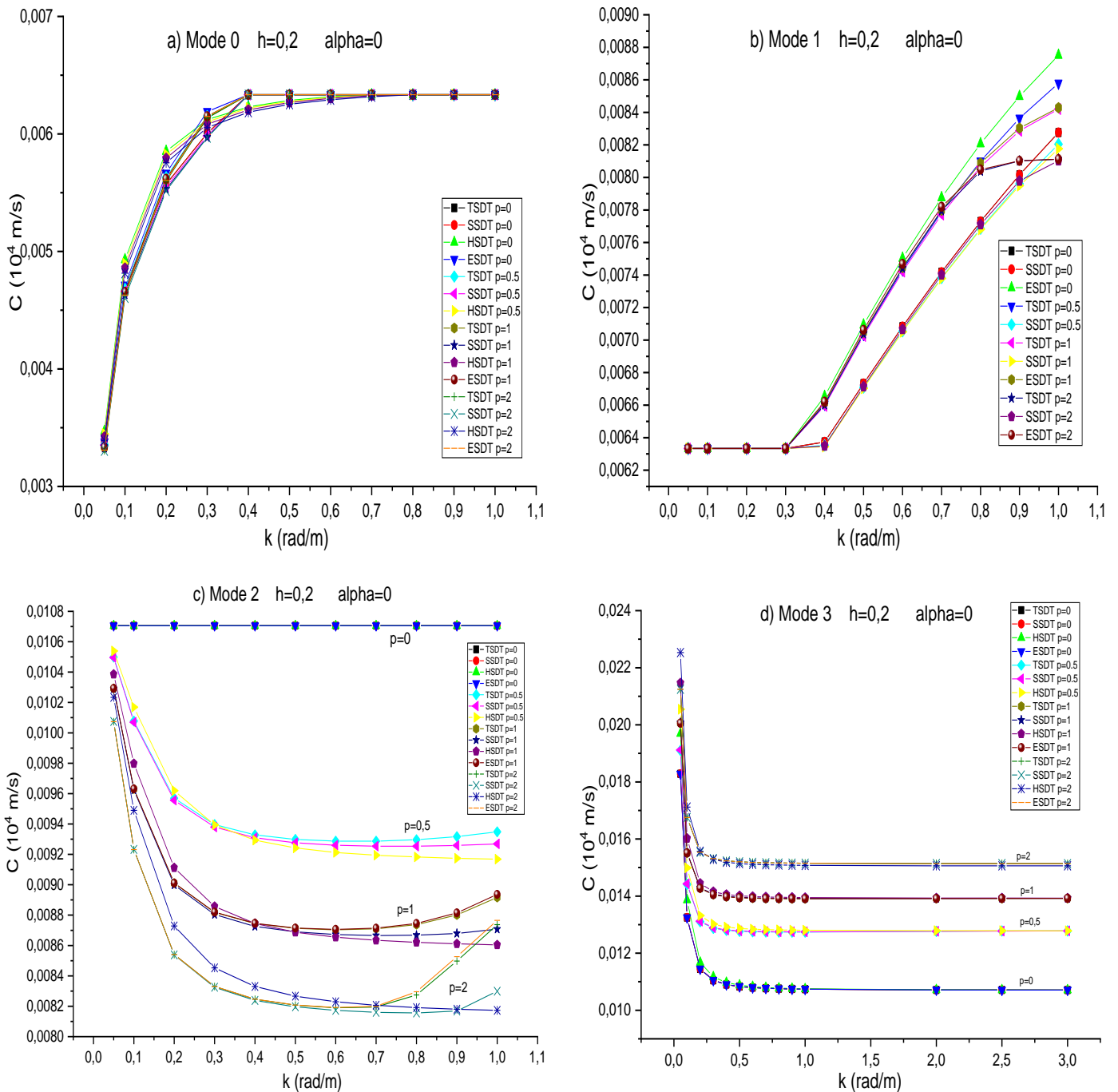


Figure.IV.8 : Courbes de la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde pour  $h=0.2$

Il est bien clair que les fonctions de formes utilisées nous donnent des résultats presque identiques sauf pour le cas de la figure IV.8.c qui représente un mode d'extension ou les fréquences des deux fonctions de cisaillement TSDT et ESDT qui divergent des autres fonctions selon la valeur de  $k$ .

### IV.2.1.3 Etude comparative de la variation de $h$

La figure IV.9 montre les courbes de dispersion de différentes plaques S-FGM carrées simplement appuyées avec  $p = 2$  utilisant une fonction de forme sinusoïdale (SSDT). On peut

voir que l'épaisseur de la plaque a un effet sur la fréquence de propagation d'onde dans la plaque S-FGM par rapport au nombre d'ondes ( $k$ ) notamment pour le mode  $M_0$ . En effet, les fréquences sont réduites lorsque l'épaisseur diminue pour les deux premiers modes ( $M_0$  et  $M_1$ ) et augmente pour le mode  $M_2$  et  $M_3$ .

On voit aussi que plus  $k$  augmente plus l'écart entre les fréquences des différentes épaisseurs soit grande sauf pour le mode  $M_3$  où l'écart est grand pour les petites valeurs de  $k$  et commencent à converger lorsque  $k$  devient grand.

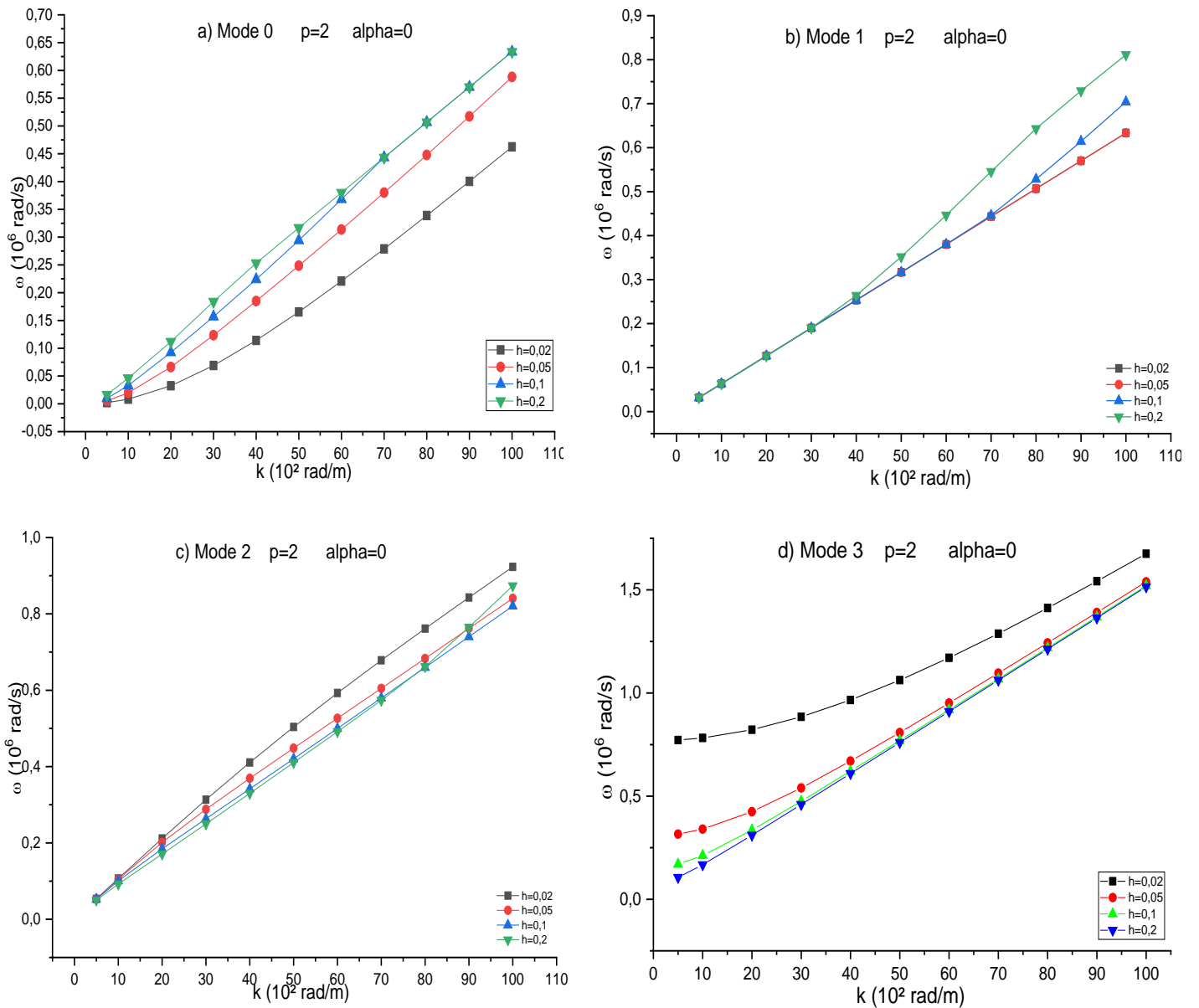


Figure.IV.9 : l'effet de l'épaisseur de la plaque sur la fréquence dans la plaque S-FGM en termes de nombre d'onde ( $\alpha=0$ )

La figure.IV.10 montre les courbes de vitesse de phase de différentes plaques S-FGM avec un indice de puissance matériel  $p = 2$ . Comme on le voit à partir de cette figure, la vitesse de phase de la plaque S-FGM diminue à mesure que l'épaisseur diminue pour les petites valeurs du nombre d'ondes ( $k$ ) dans les modes M2 et M3 quand ( $k$ ) prend de grandes valeurs, les vitesses de phases se convergent les unes aux autres quel que soit le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ), pour le mode M0 et M1, les vitesses de phase augmentent quand l'épaisseur augmente pour la même valeur de  $k$ . On peut également remarquer que pour le mode d'onde M<sub>3</sub>, en outre les vitesses de phase supérieures sont obtenues pour les faibles épaisseurs.

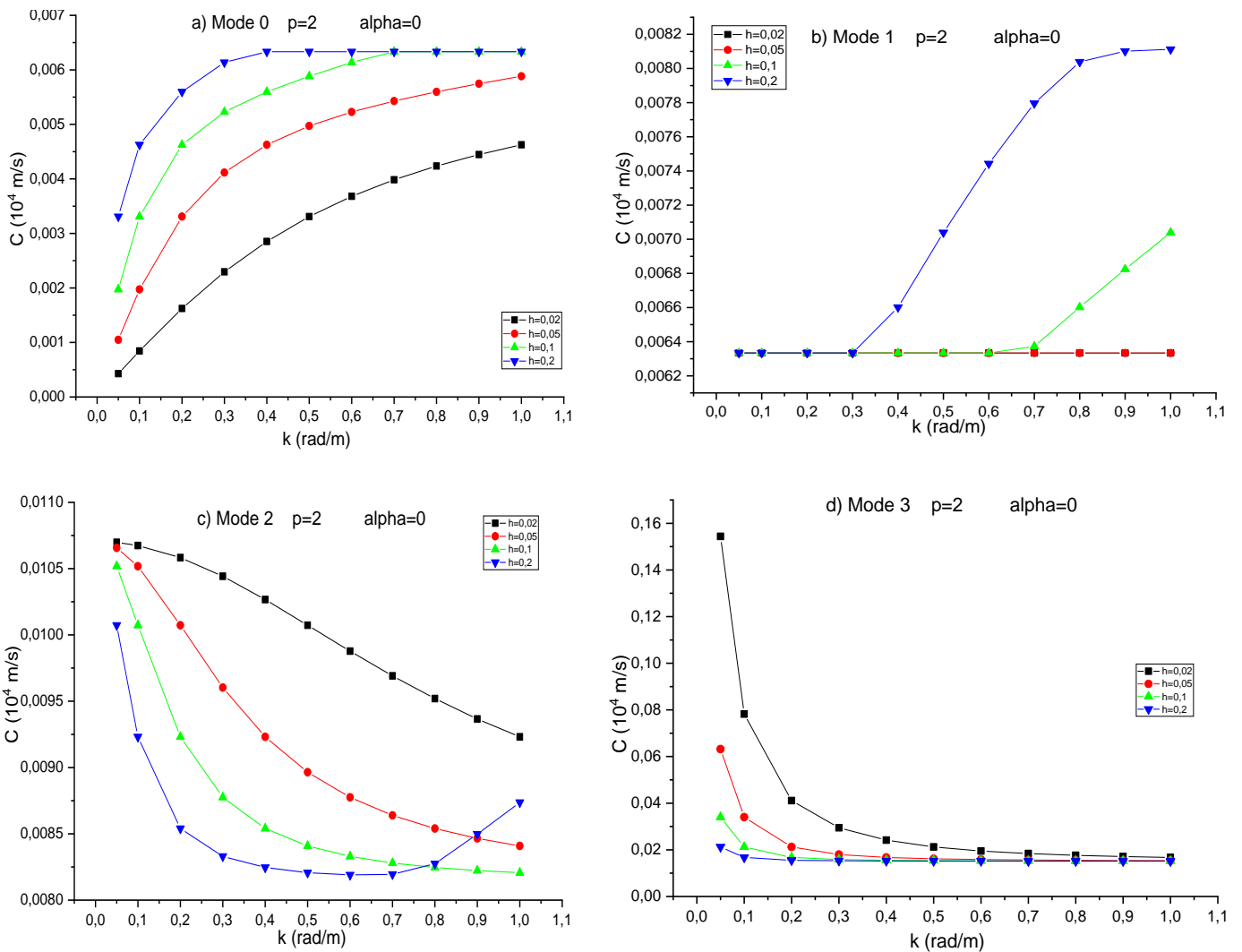


Figure IV.10 : Effet de l'épaisseur de la plaque sur la vitesse de la phase dans la plaque S-FGM en terme de nombre d'onde ( $\alpha=0$ )

On revient ici pour montrer que dans les modes d'extension  $M_1$  et  $M_2$ , l'épaisseur de la plaque joue un rôle important dans l'évaluation de la vitesse de phase en fonction de  $k$ .

### **IV.2.2. Propagation des ondes dans les plaques S-FGM imparfait**

Dans le cadre de l'analyse de l'effet de la porosité sur le comportement vibratoire et les vitesses de phase des plaques S-FGM carrée simplement appuyée avec porosité, dans cette partie, Les propriétés du matériau de la plaque S-FGM sont supposées variées en fonction d'une distribution en loi de puissance. L'équation du mouvement pour les plaques S-FGM est obtenue par le principe des travaux virtuels, La plaque fonctionnellement graduée est confectionnée par deux matériaux ( $Si_3N_4$  / SUS304) ; dont leurs propriétés sont présentées précédemment. L'objectif de cette étude est d'utiliser le présent modèle de distribution de porosité pour l'étude du comportement en vibration libre des plaques S-FGM avec porosités.

#### **IV.2.2.1 Répartition uniforme de la porosité**

##### **IV.2.2.1.1 La fréquence en fonction de nombre d'onde**

Les figures IV.11 montre l'effet de la distribution uniforme de la porosité dans une plaque sigmoïde sur la fréquence de propagation des ondes dans les plaques S-FGM en fonction du nombre d'ondes ( $k$ ). On peut observer que la fréquence des plaques S-FGM augmente avec l'augmentation du nombre d'ondes. A ce niveau, la porosité est prise avec une distribution uniforme suivant l'épaisseur.

Suivant les observations des graphes IV.11, IV.12, IV.13 et IV.14 (différentes valeurs d'épaisseur  $h$ ) on conclut que pour la même valeur de  $k$ , la fréquence de la plaque diminue avec l'augmentation de la valeur de porosité.

Ont conclu que la porosité est un facteur qui réduit les caractéristiques vibratoires de la plaque.

Pour le mode  $M_0$  et  $M_1$ , les fréquences restent sensiblement constants mêmes si en change de porosité pour la même valeur de  $k$ .

Cependant, la fréquence de la plaque S-FGM pour les modes  $M_2$  et  $M_3$  sont sensiblement les mêmes pour les petites valeurs de  $k$  quel que soit la porosité mais au-delà d'une certaine valeur de la longueur d'onde, il y aura une divergence dans les résultats des fréquences en fonction de la porosité ; cette divergence est expliquée comme suit :

L'augmentation de la valeur de porosité implique la diminution de la fréquence pour le mode  $M_2$ , pour le mode  $M_3$  l'augmentation de la porosité implique l'augmentation de la fréquence.

En conséquence, la fréquence maximale est obtenue pour une plaque S-FGM ( $p= 2$ ,  $k=10$  et  $\alpha=0.2$  pour le mode  $M_3$ ).

On a remarqué que les valeurs de la fréquence augmentent avec l'augmentation de l'épaisseur  $h$ .

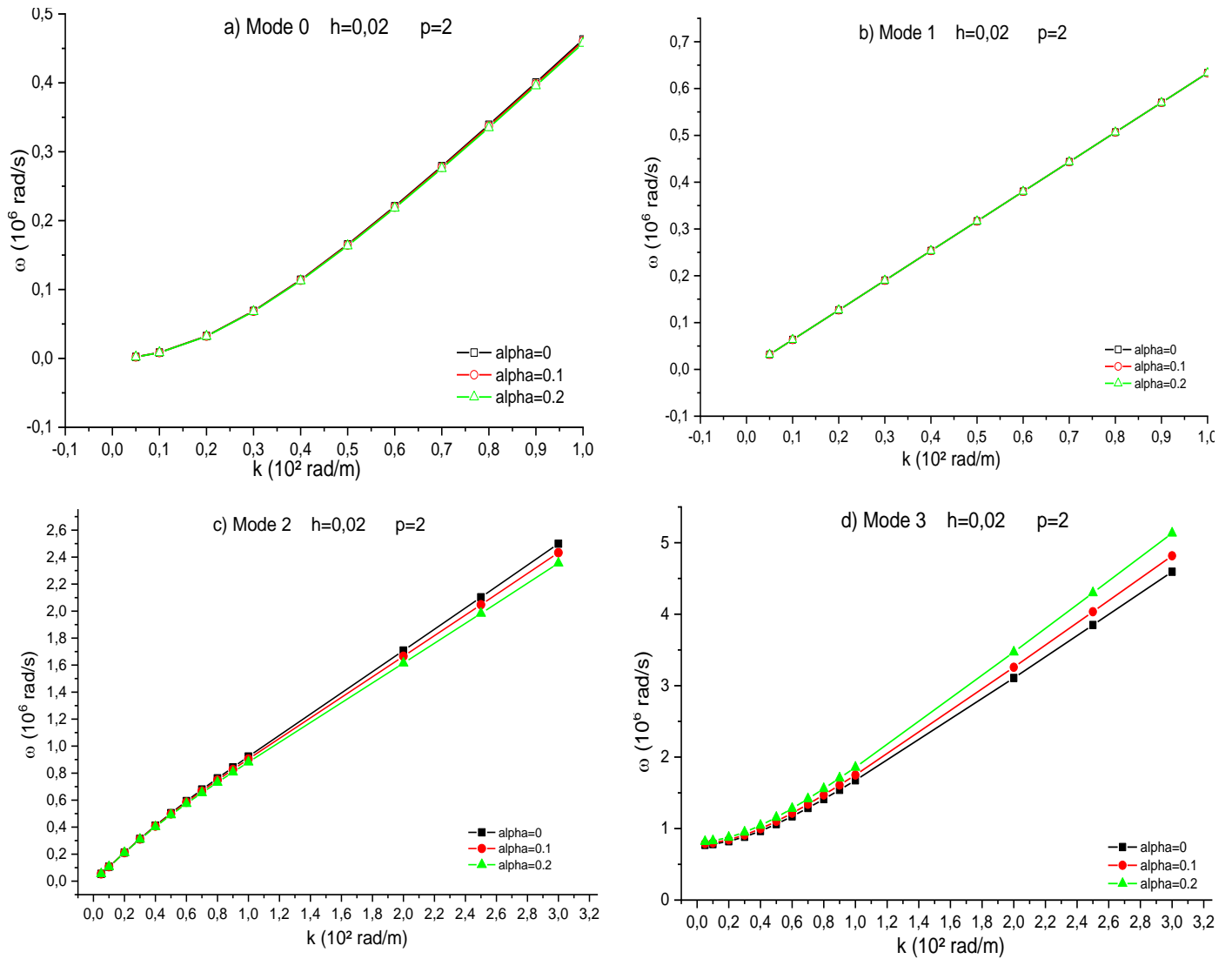


Figure IV.11 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence des plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT  $h=0.02$ )

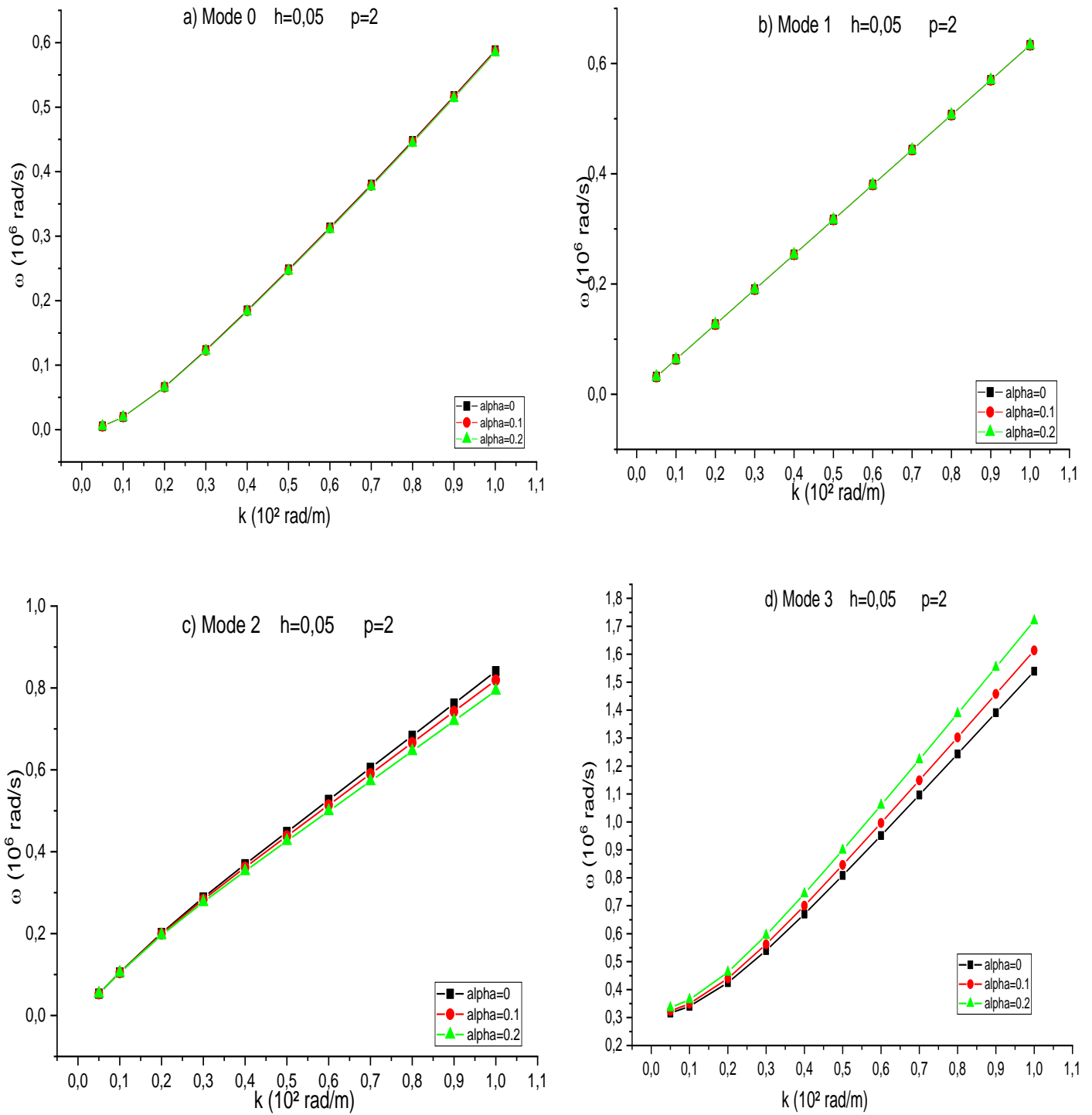


Figure IV.12 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence des plaques S-FGM en termes de nombre d'onde  $(k)$  (SSDT  $h=0.05$ )

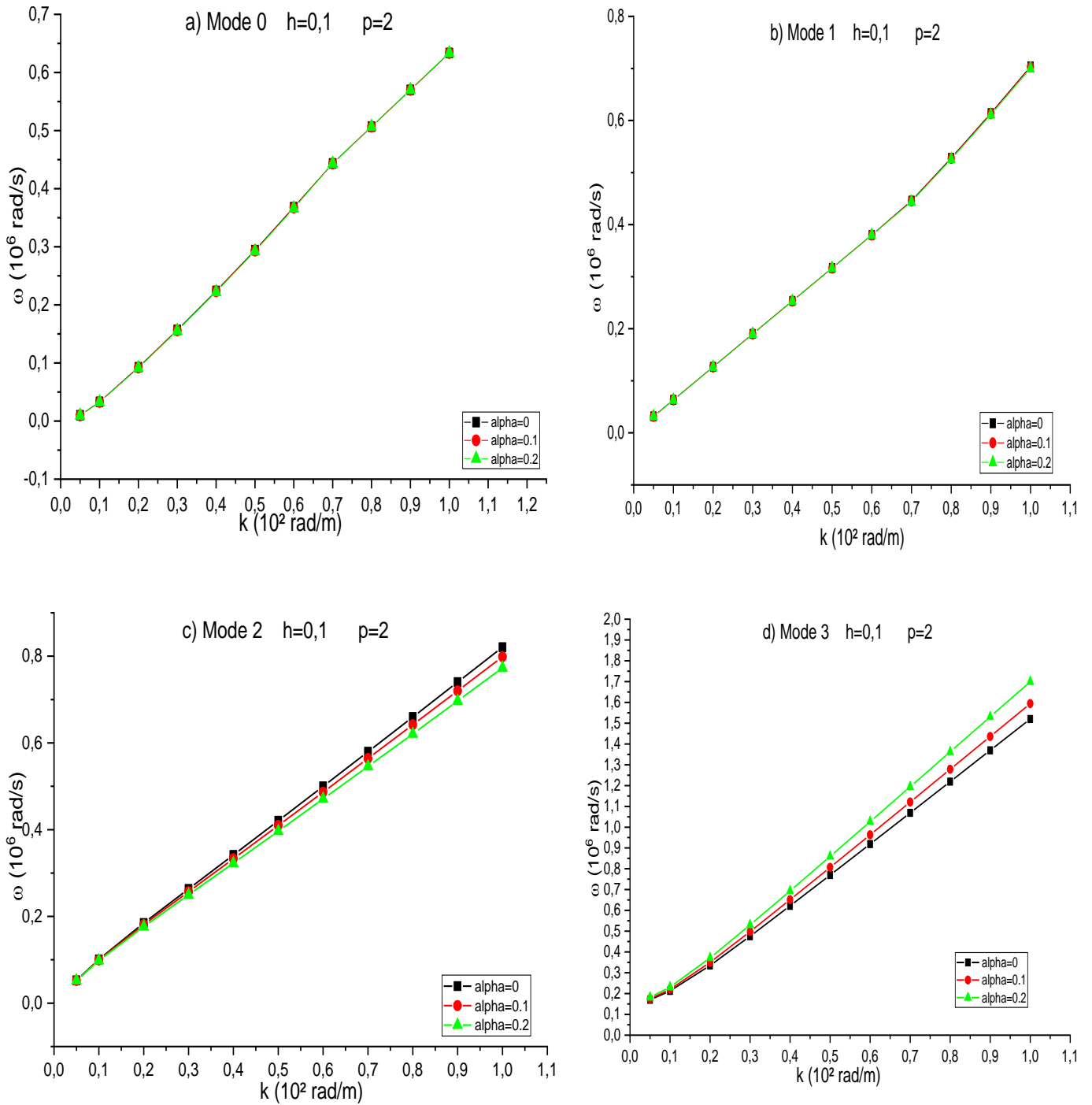


Figure IV.13 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence des plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT  $h=0.1$ )



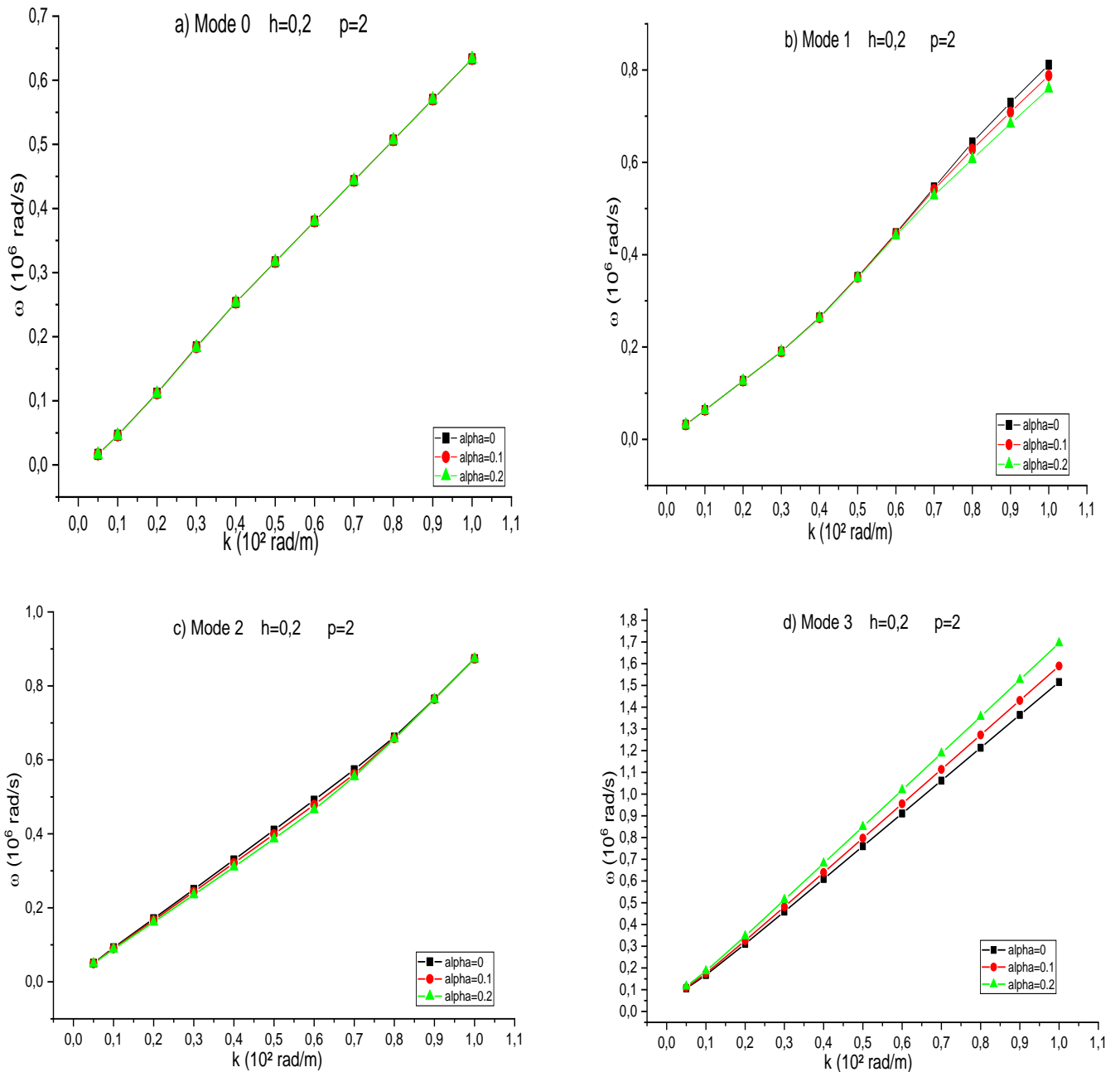


Figure IV.14 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence des plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT  $h=0.2$ )

Pour  $h=0.2$ , nous avons remarqué que, à partir de  $k=0.6$  la variation entre les valeurs de la fréquence est augment en fonction du nombre d'onde  $k$  pour le mode  $M_2$ ; ont conclu que plus l'épaisseur de la plaque soit épaisse, plus variation entre les valeurs de la fréquence augment.

Par conséquent, il est clair que l'indice de porosité, le nombre d'onde et l'épaisseur de la plaque S-FGM ont une influence sur la fréquence dans la plaque S-FGM.

#### IV.2.2.1.2 La vitesse de la phase en fonction du nombre d'onde

Les figures IV.15, IV.16, IV.17 et IV.18 montre respectivement l'influence de la porosité uniforme et son effet sur la vitesse de phase d'une plaque S-FGM en fonction du nombre d'ondes. L'indice de puissance matériel est pris égal à 2.

Pour le mode  $M_0$ , l'augmentation du nombre d'onde de la plaque implique une augmentation de la vitesse de la phase pour toutes valeurs de  $h$ .

Pour le mode  $M_1$ , la vitesse de la phase est sensiblement constante quel que soit la valeur du nombre d'onde  $k$  pour  $h=0.02$  et  $0.05$  ; Pour  $h=0.1$  la vitesse de la phase augmente avec l'augmentation du nombre d'ondes de la plaque S-FGM à partir de  $k=0.6$ .

Pour le mode  $M_2$ , l'augmentation du nombre d'onde de la plaque implique une diminution à de la vitesse de phase semblable au mode  $M_3$  pour toutes valeurs de  $h$  ; la variation de la vitesse de phase pour les petites valeurs du nombre d'onde reste sans changement ; mais avec l'augmentation de  $k$  la courbe commence à décaler signifiant la variation (en termes d'augmentation) de la vitesse de phase.

Il est à noter que la diminution de la vitesse de phase se fait d'une manière rapide dès la moindre variation du nombre d'onde  $k$  pour le mode  $M_2$ .

Nous pouvons également voir que la vitesse de phase diminué avec l'augmentation du facteur de porosité pour les modes  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  par contre au mode  $M_3$  la vitesse de la phase augmenté avec l'augmentation du facteur de porosité pour la même valeur de  $k$ .

Pour le mode  $M_3$ , la vitesse de phase diminue avec l'augmentation du nombre d'onde ; cette diminution commence avec un taux de variation grand au voisinage des petites valeurs de  $k$ , mais au-delà de  $k=0.4$  (environ) la vitesse de phase commence à se stabiliser avec l'augmentation de  $k$ .

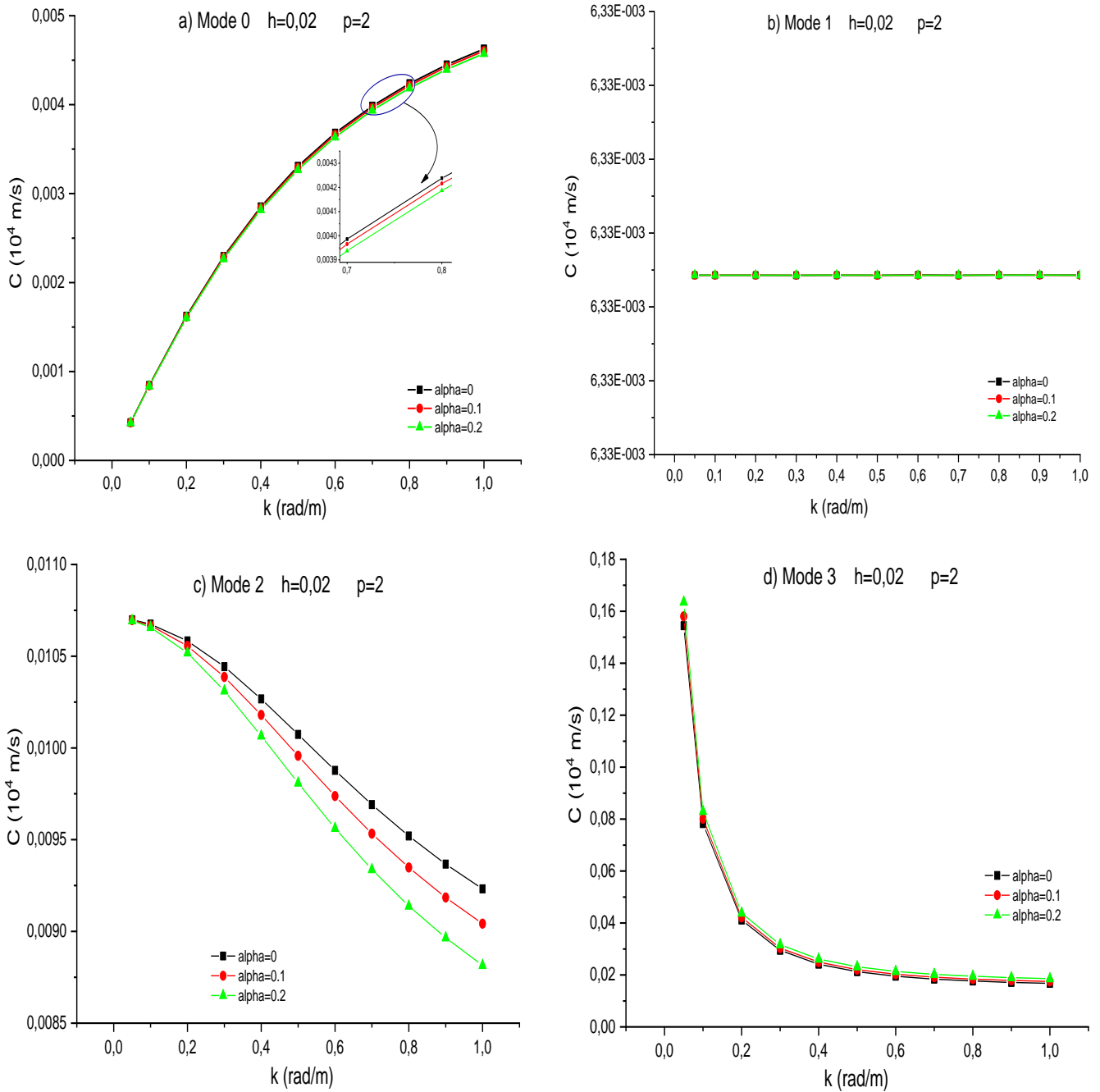


Figure IV.15 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en terme de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT,  $p=2$ ,  $h=0.02$ ).

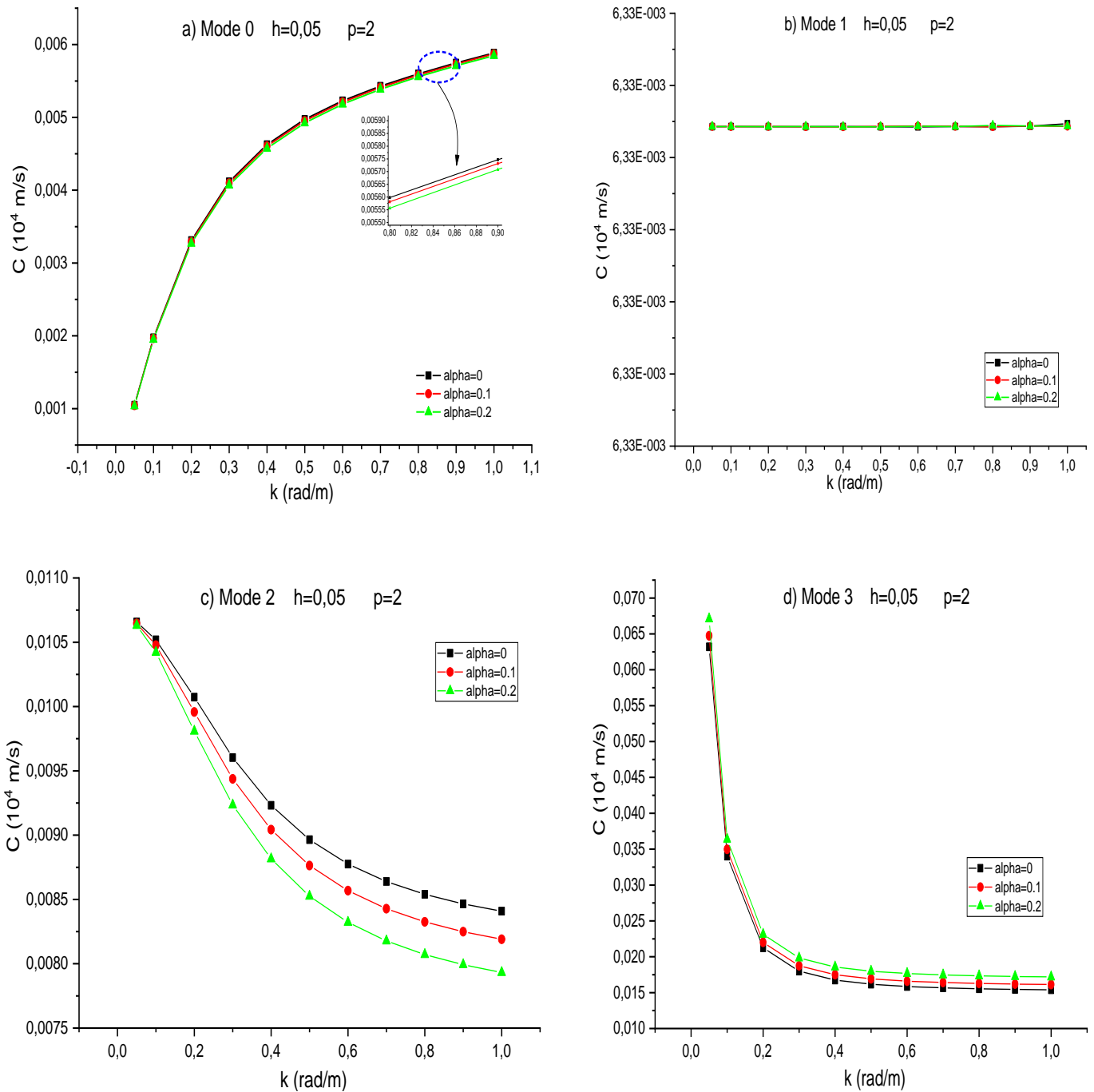


Figure IV.16 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en terme de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT,  $p=2$ ,  $h=0.05$ ).

A partir des figures IV.15b, IV.16b, IV.17b et IV.18b (mode  $M_1$ ) on peut conclure que l'augmentation de l'épaisseur de la plaque provoque une augmentation de la vitesse de phase. Cette variation de la célérité en relation directe avec la variation du nombre d'ondes.

Donc, on peut dire que pour le mode  $M_1$ , plus la plaque soit épaisse plus la vitesse de phase augmente pour des petites valeurs de nombre d'ondes.

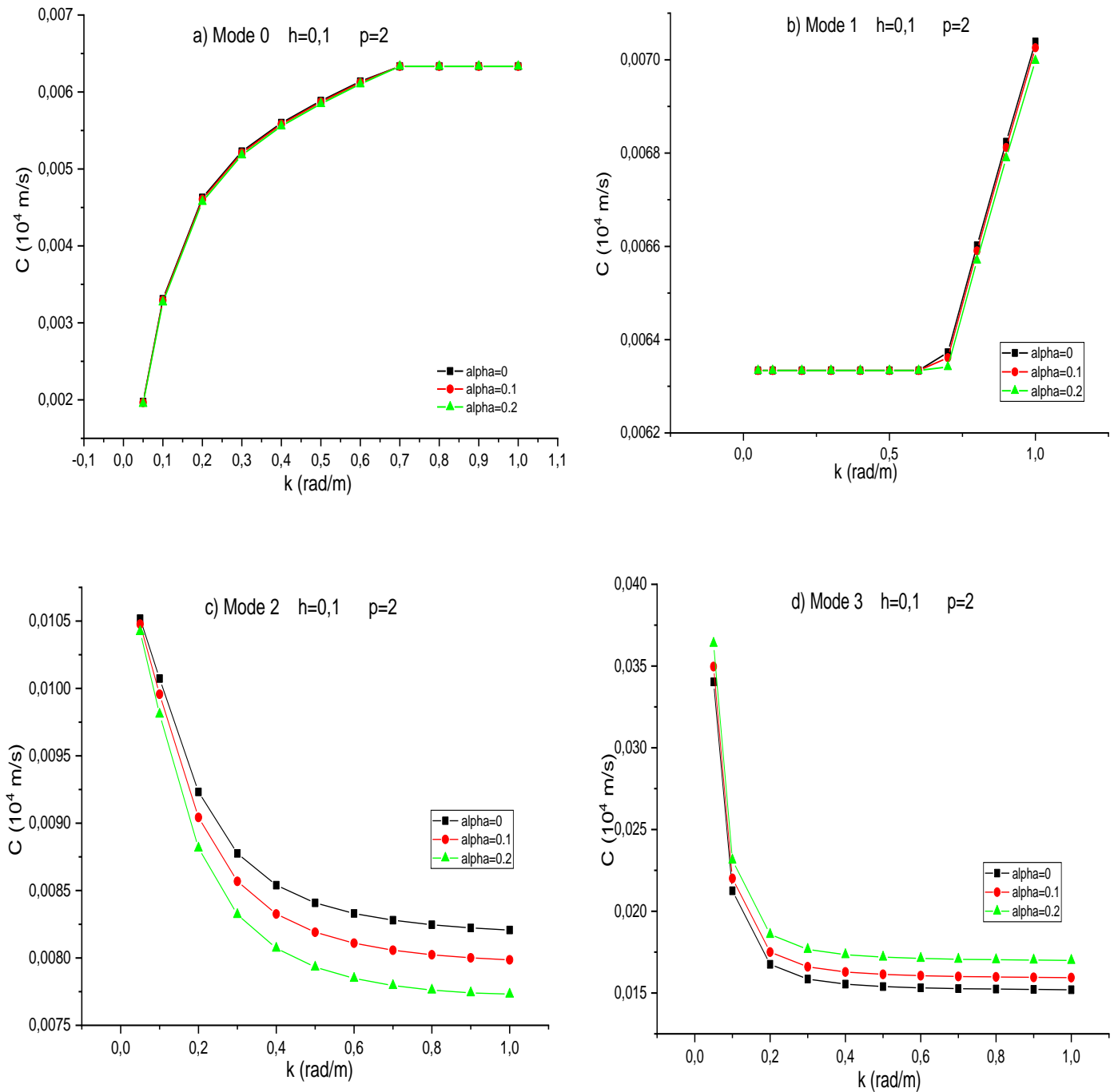


Figure IV.17 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT,  $p=2$ ,  $h=0.1$ ).

On a remarqué que les valeurs de la vitesse de phase pour  $h=0.2$  mode  $M_2$  convergent vers la même valeur quel que soit la valeur de la porosité.

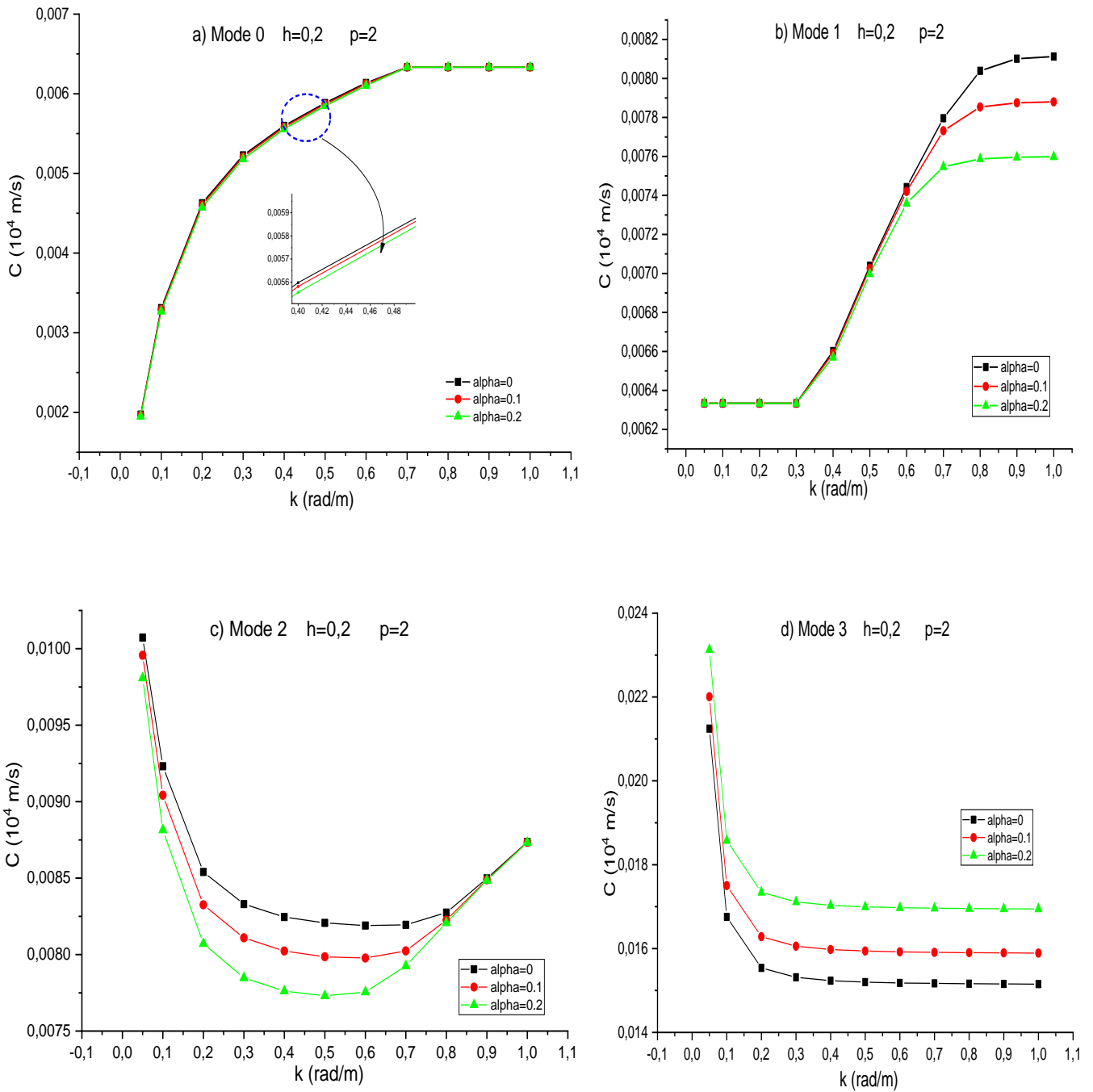


Figure IV.18 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $k$ ) (SSDT,  $p=2$ ,  $h=0,2$ ).

### IV.2.2.1.3 La fréquence en fonction de la loi de puissance

Les courbes de variation de la fréquence propre ( $\omega$ ) pour les différentes plaques à graduation fonctionnelle, en fonction de l'indice de puissance du matériau ( $p$ ) pour différentes valeurs de porosité ont été respectivement représentées sur les figures IV.19, IV.20, IV.21 et

IV.22 pour les trois types de distribution de porosité en fonction de la loi de puissance P pour un nombre d'onde  $k=10$  et une fonction sigmoïde SSDT.

Nous pouvons voir que plus l'indice de puissance matériel est élevé, plus la fréquence est faible dans les plaques S-FGM pour les modes  $M_0$  et  $M_2$ , la fréquence est presque constante à partir de  $P > 2$  ; Pour la même valeur de P la fréquence de la plaque diminue avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité uniforme a diminué la fréquence).

Pour le mode  $M_1$  on peut constater que la fréquence est sensiblement constante quel que soit la valeur de la loi de puissance P et pour toute valeur de la porosité.

Cependant, l'augmentation du facteur de porosité entraîne une augmentation de la fréquence pour le mode  $M_3$ , la fréquence est sensiblement constante à partir de  $P > 2$  ; Pour la même valeur de P la fréquence de la plaque augmente avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité uniforme a augmenté la fréquence pour le mode  $M_3$ ).

On a remarqué que les valeurs de la fréquence ont diminué avec l'augmentation de l'épaisseur h.

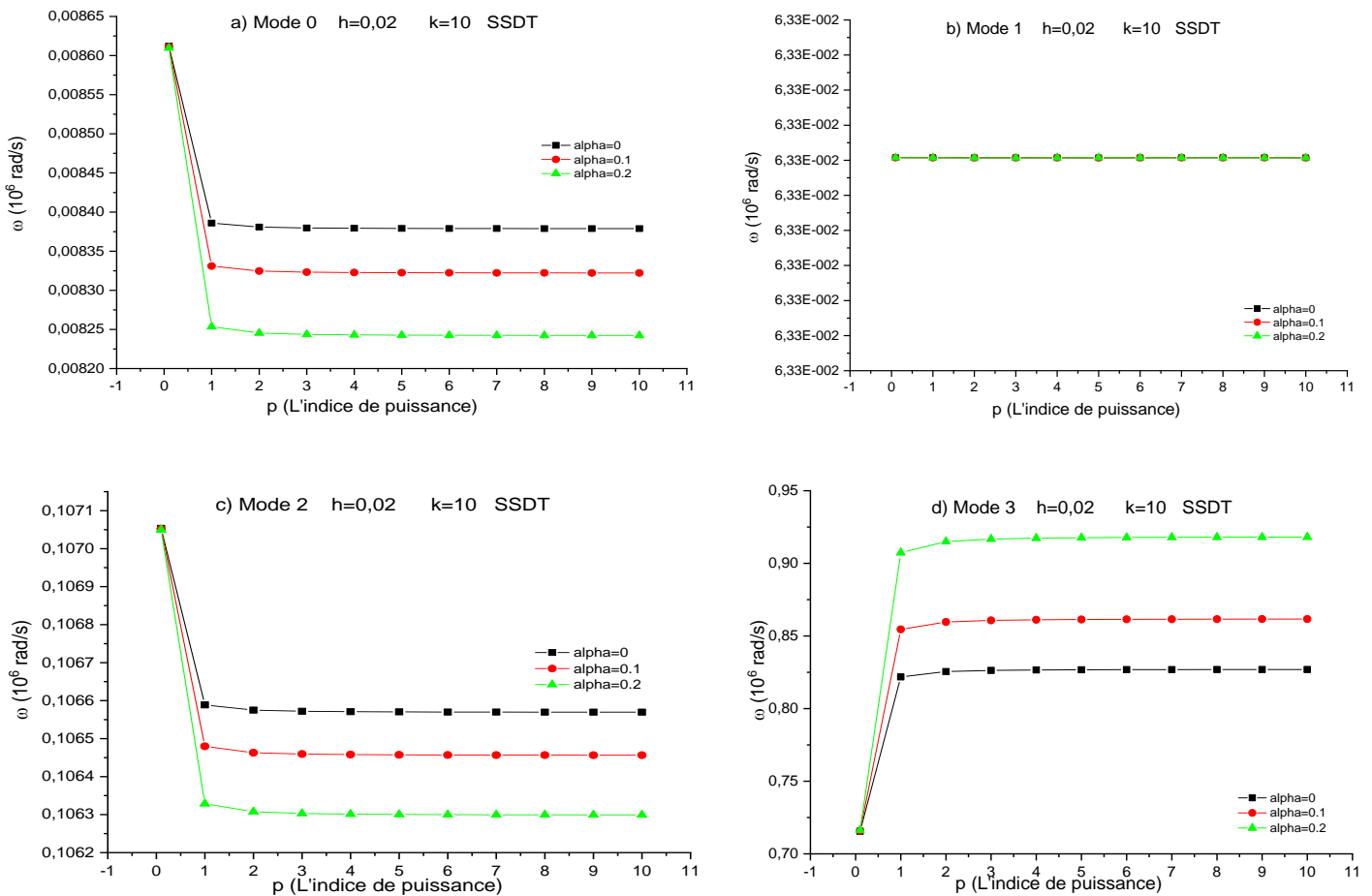


Figure IV.19 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence dans les plaques S-FGM en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ ,  $h=0.02$ ).

Pour le mode  $M_0$  et  $M_2$ , la fréquence atteint le maximum pour les petites valeurs de  $k$  et dégrader rapidement pour la moindre variation de nombre d'onde  $k$ .

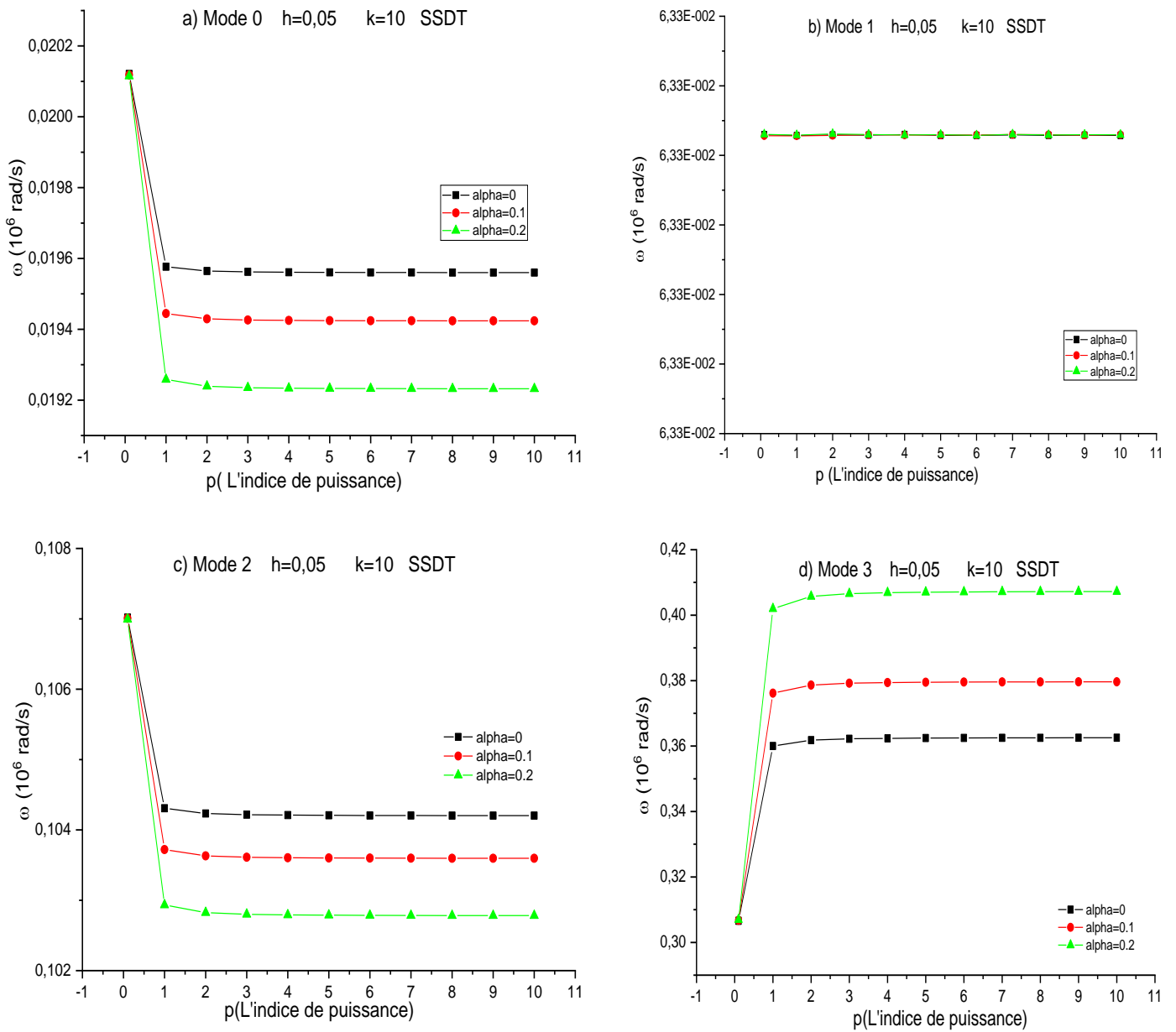


Figure IV.20 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence dans les plaques S-FGM en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ ,  $h=0.05$ ).



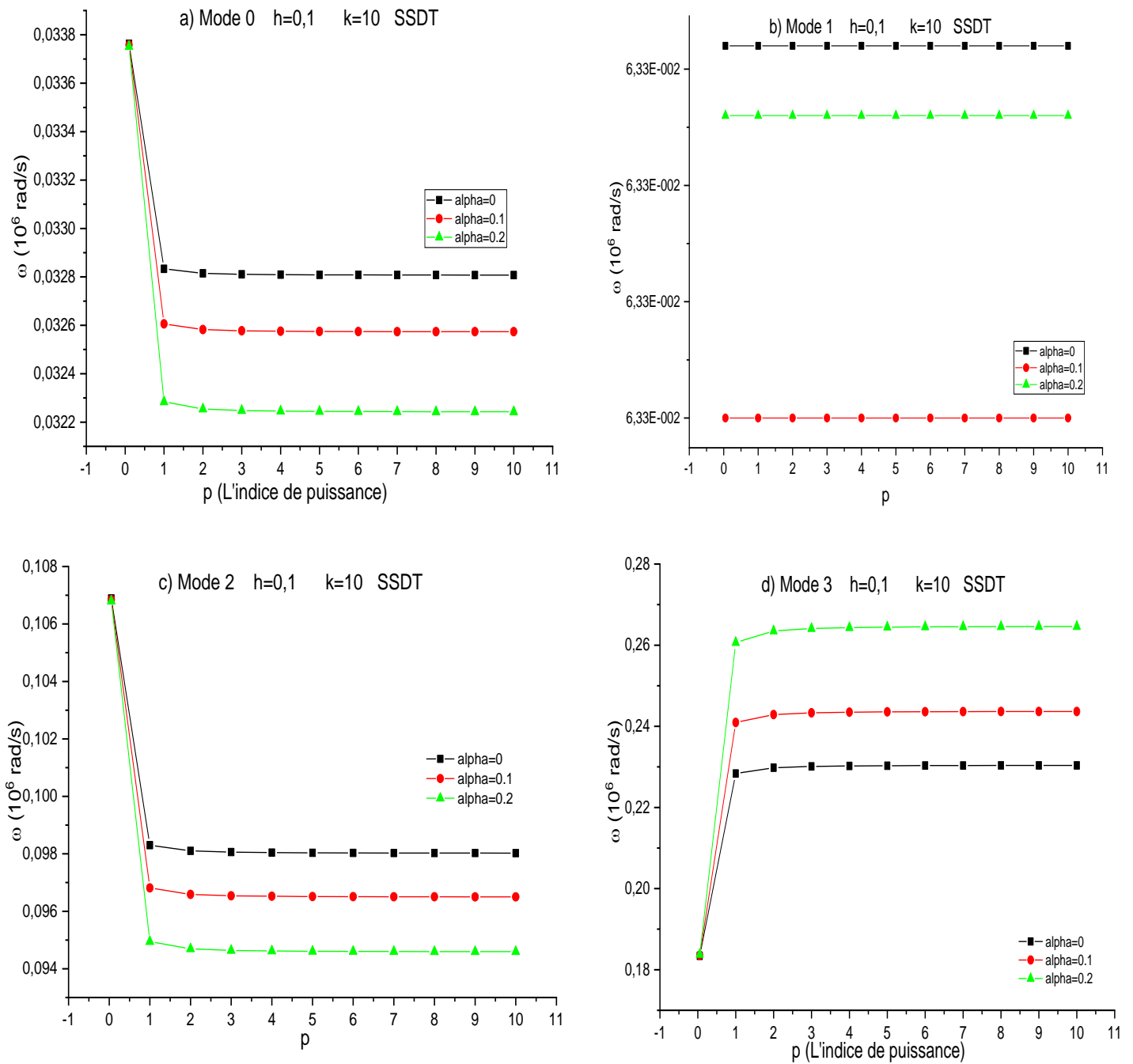


Figure IV.21 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence dans les plaques S-FGM en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ ,  $h=0.1$ ).

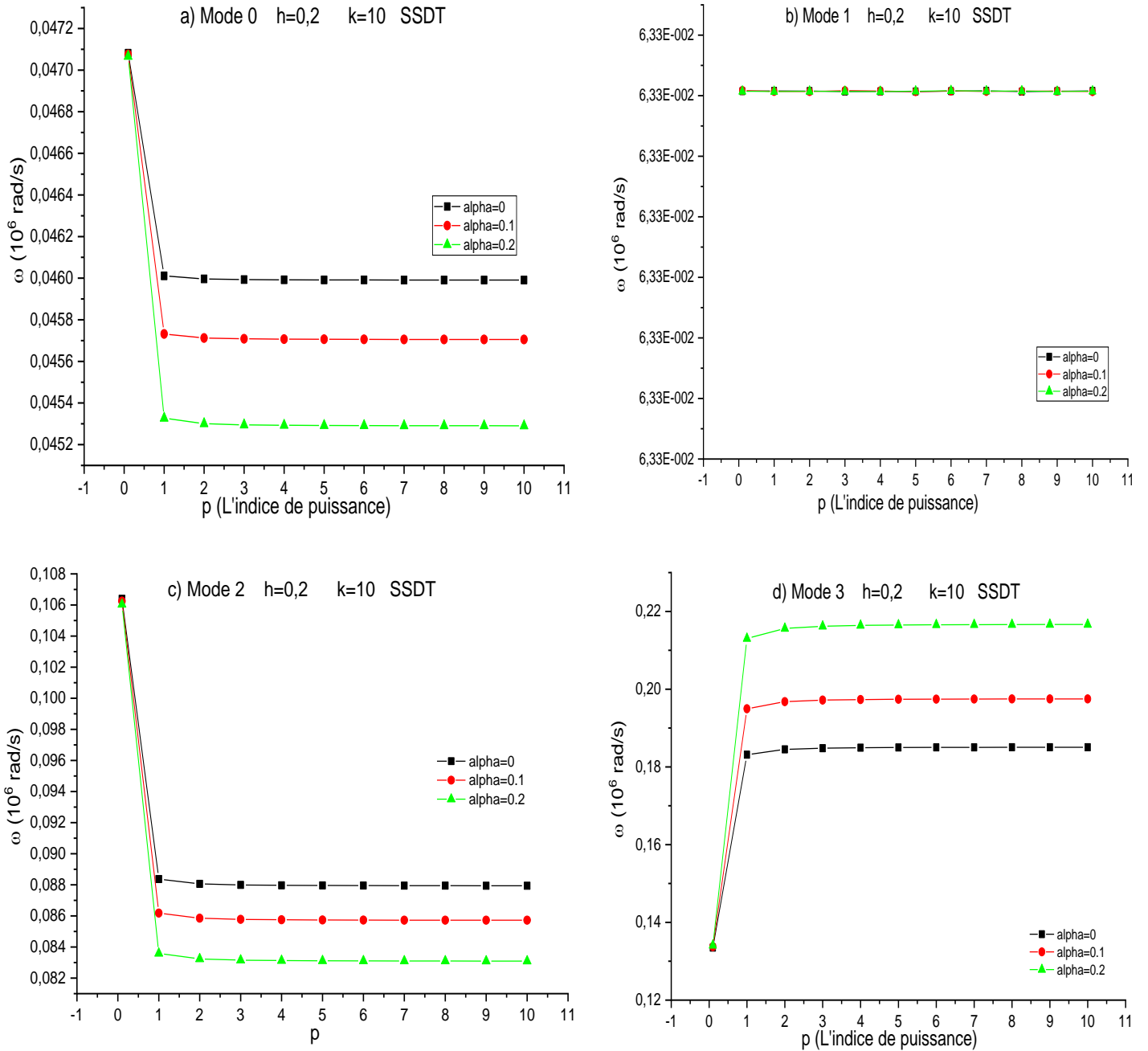


Figure IV.22 : Effet de la porosité uniforme sur la fréquence dans les plaques S-FGM en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ ,  $h=0,2$ ).

En conséquence, la fréquence maximale est obtenue pour un indice de puissance égale à 10 et un facteur de porosité égal à 0,2 avec  $h=0,02$  Mode  $M_3$ .

Par conséquent, il est clair que l'indice de porosité, la loi de puissance et l'épaisseur de la plaque S-FGM a une grande influence sur la fréquence dans la plaque S-FGM.

#### IV.2.2.1.4 La vitesse de la phase en fonction de la loi de puissance

Les courbes de la vitesse de phase pour les différentes plaques à graduation fonctionnelle SFGM, en fonction de l'indice de puissance du matériau (P) pour différentes valeurs de porosité ( $\alpha=0$  ;  $\alpha=0.1$  et  $\alpha=0.2$ ) ont été respectivement représentées sur les figures IV.23, IV.24, IV.25, IV.26.

On a constaté que plus l'indice de puissance matériel est élevé, plus la vitesse de la phase est faible dans les plaques S-FGM pour les modes  $M_0$  et  $M_2$ , à partir de  $P > 2$  la vitesse de la phase est sensiblement constant ; Pour la même valeur de P la vitesse de la phase des plaques diminue avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité uniforme a diminué la vitesse de la phase).

Pour le mode  $M_1$  on peut constater que la vitesse de la phase est constante quel que soit la valeur de la loi de puissance P et pour toute valeur de porosité.

Cependant, l'augmentation du facteur de porosité entraîne une augmentation de la vitesse de phase pour le mode  $M_3$ , la vitesse de la phase est presque constante à partir de  $P > 2$  ; Pour la même valeur de P la vitesse de la phase des plaques augmente avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité uniforme a augmenté la fréquence pour le mode  $M_3$ ).

En conséquence, la vitesse de la phase maximale est obtenue pour une plaque qui a les paramètres suivants :  $p=10$  et un facteur de porosité = 0,2 avec  $h=0.02$  Mode  $M_3$ .

On a remarqué que les valeurs de la vitesse de phase ont diminué avec l'augmentation de l'épaisseur h.

Par conséquent, il est clair que la porosité uniforme, la loi de puissance et l'épaisseur de la plaque S-FGM ont une grande influence sur la vitesse de la phase.

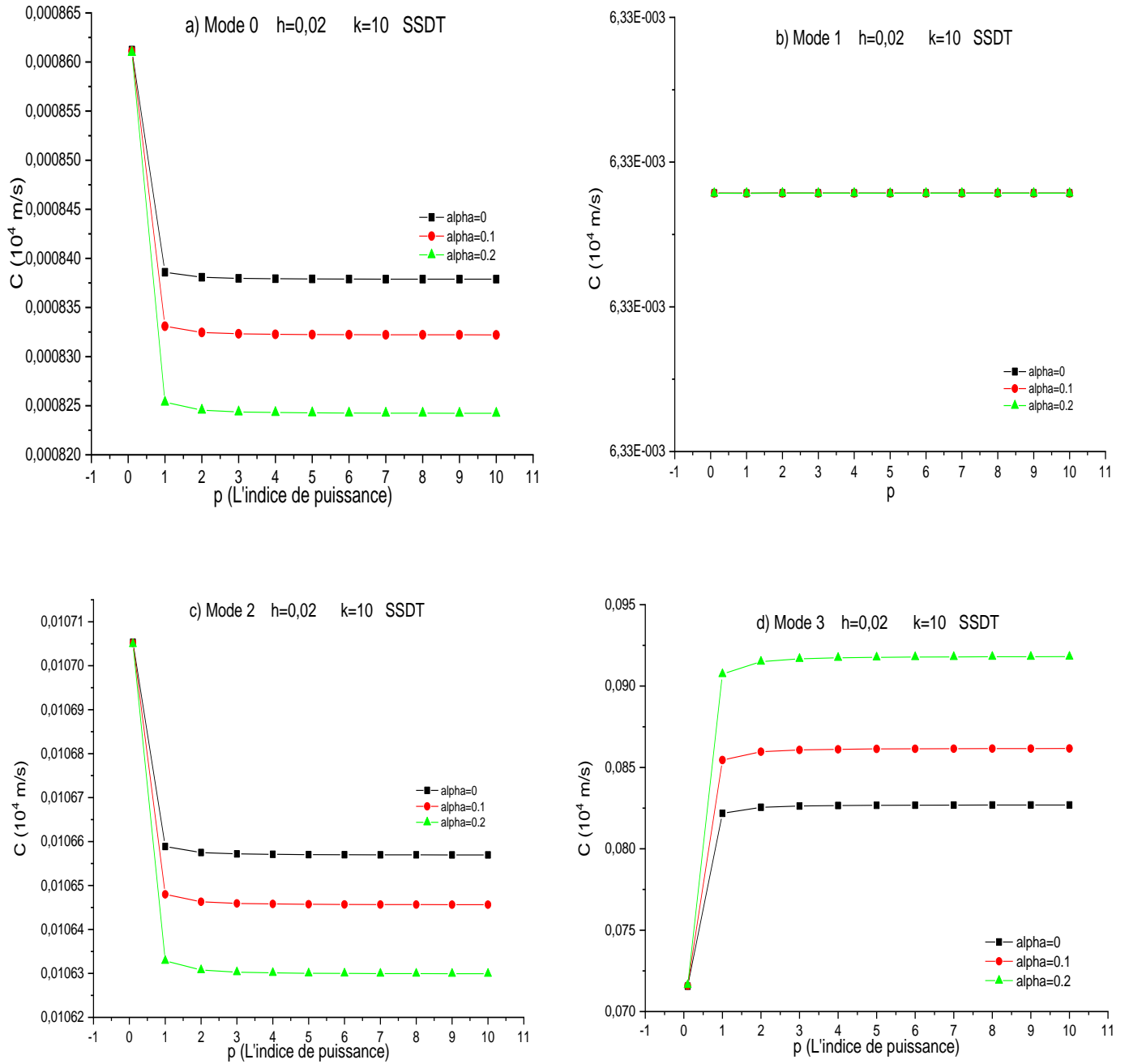


Figure IV.23 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ ,  $h=0.02$ ).

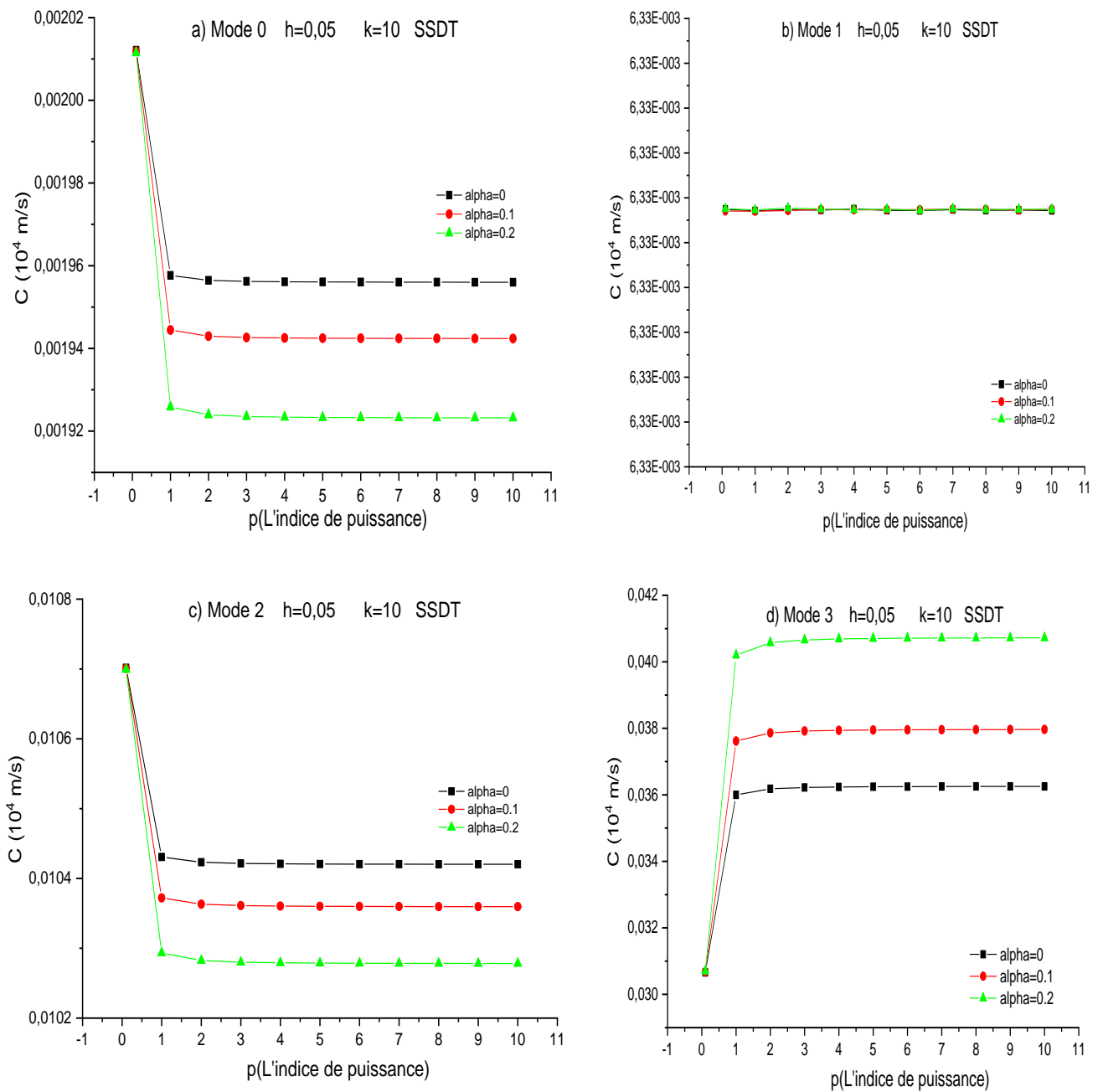


Figure IV.24 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en fonction de l'indice de puissance ( $k=10$ ,  $h=0.05$ ).

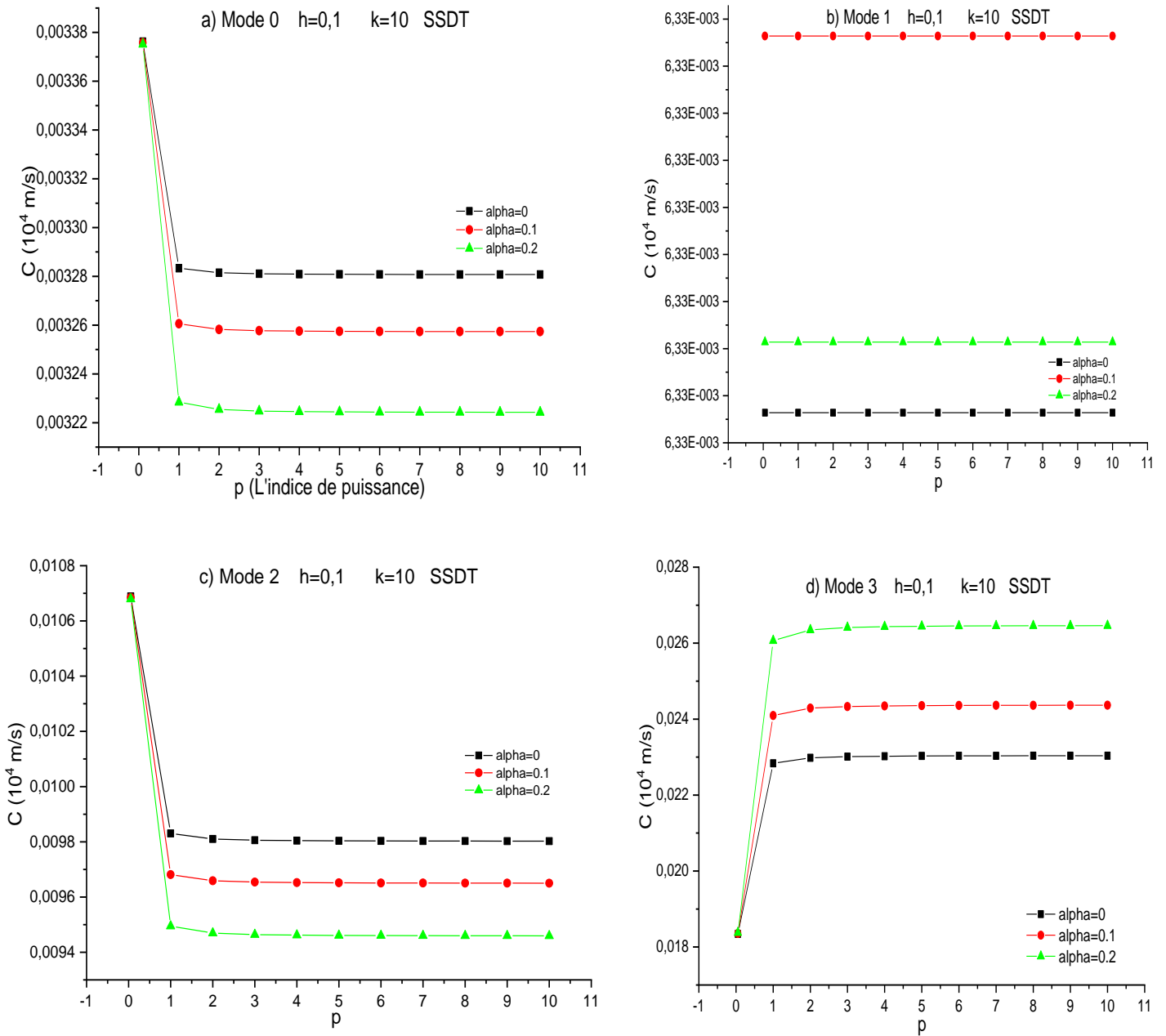


Figure IV.25 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en fonction de l'indice de puissance ( $k=10, h=0,1$ ).

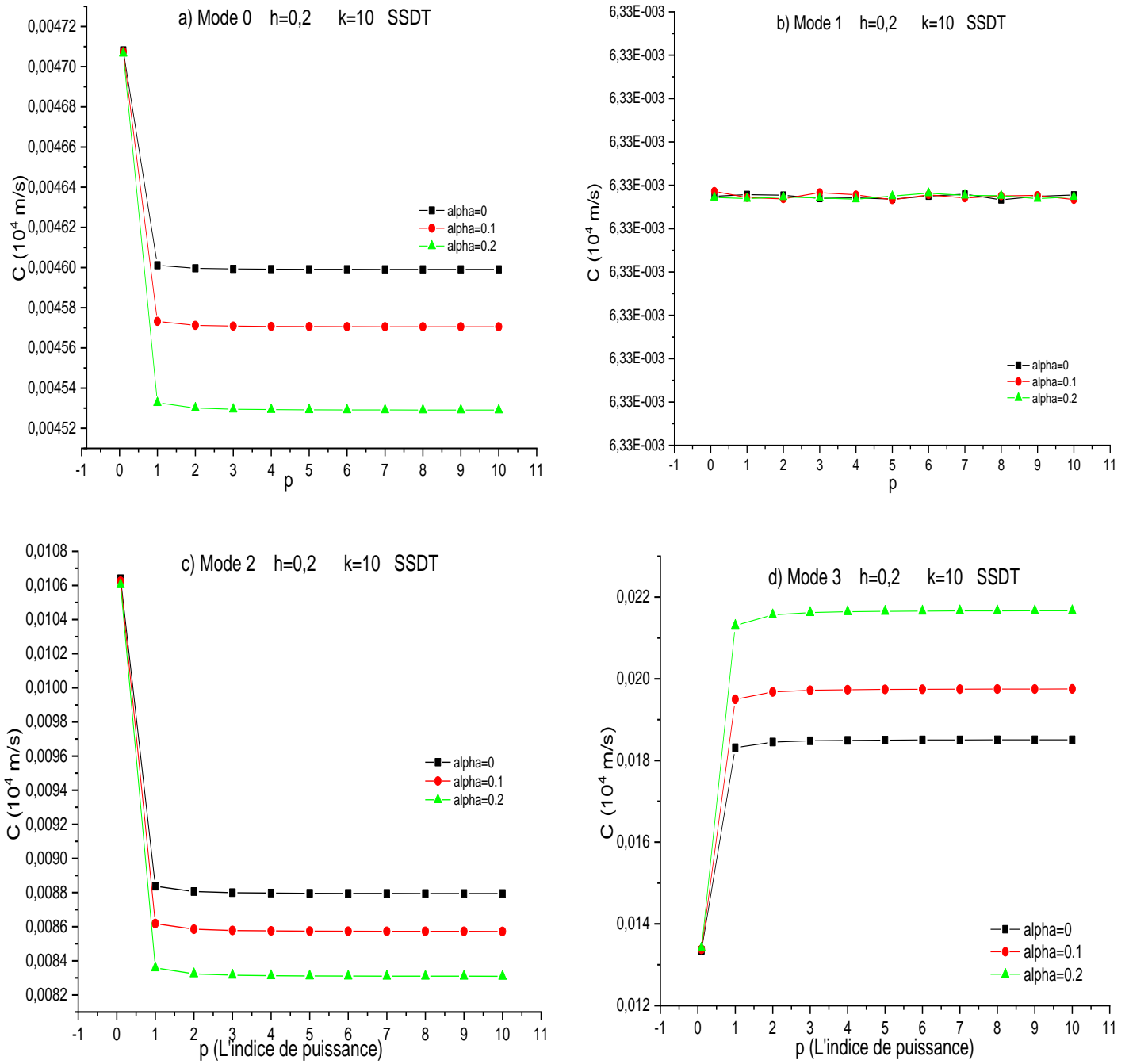


Figure IV.26 : Effet de la porosité uniforme sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en fonction de l'indice de puissance (k=10, h=0.2).

### IV.2.2.2 Répartition non-uniforme de la porosité

#### IV.2.2.2.1 La fréquence en fonction du nombre d'onde

Afin d'étudier l'effet de la porosité non uniforme sur les caractéristiques vibratoires de la plaque S-FGM, les figures IV.27, IV.28, IV.29, IV.30, IV.31 et IV.32 montrent les courbes de fréquence des différentes plaques S-FGM obtenues respectivement en utilisant les formules proposées du facteur de distribution de la porosité pour différentes valeurs de cette dernière avec un indice de puissance matériel  $P=2$  en fonction du nombre d'onde  $k$ . Avec les trois formes de porosité, linéaires, logarithmiques et exponentielles, successivement et deux (02) épaisseurs différentes ( $h=0,1$  et  $0,2$ ).

On peut voir à partir de ces courbes que la fréquence augmente avec l'augmentation de  $k$ .

Pour le mode  $M_0$  toutes les valeurs de la fréquence sont superposées quel que soit le facteur de porosité pour la même valeur de  $k$ .

Pour le mode  $M_1$ , la fréquence augmente avec l'augmentation de nombre d'onde  $k$ , pour  $h=0,1$ , les valeurs sont superposées mais pour  $h=0,2$  les valeurs sont superposées pour les petites valeurs de  $k$  et commencent à décaler au fur à mesure que  $k$  augmente.

Cependant, la fréquence de la plaque S-FGM diminue avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité non uniforme a diminué la fréquence) pour le mode  $M_2$  et augmente avec l'augmentation de la valeur de porosité pour le mode  $M_3$ .

En conséquence, la fréquence maximale est obtenue pour une plaque S-FGM ( $p=2$ ,  $k=10$  et  $\alpha=0,2$  pour le mode  $M_3$ ).

On a remarqué que les valeurs de la fréquence ont augmenté avec l'augmentation de l'épaisseur  $h$ .

Nous pouvons également observer que la fréquence devient maximale pour la plaque parfaite ( $\alpha=0$ ) ; La raison est que, en augmentant le paramètre de porosité, la résistance du matériau diminue.

Par conséquent, il est clair que la répartition non uniforme de porosité, le nombre d'onde et l'épaisseur de la plaque S-FGM ont une influence sur la fréquence dans la plaque S-FGM.



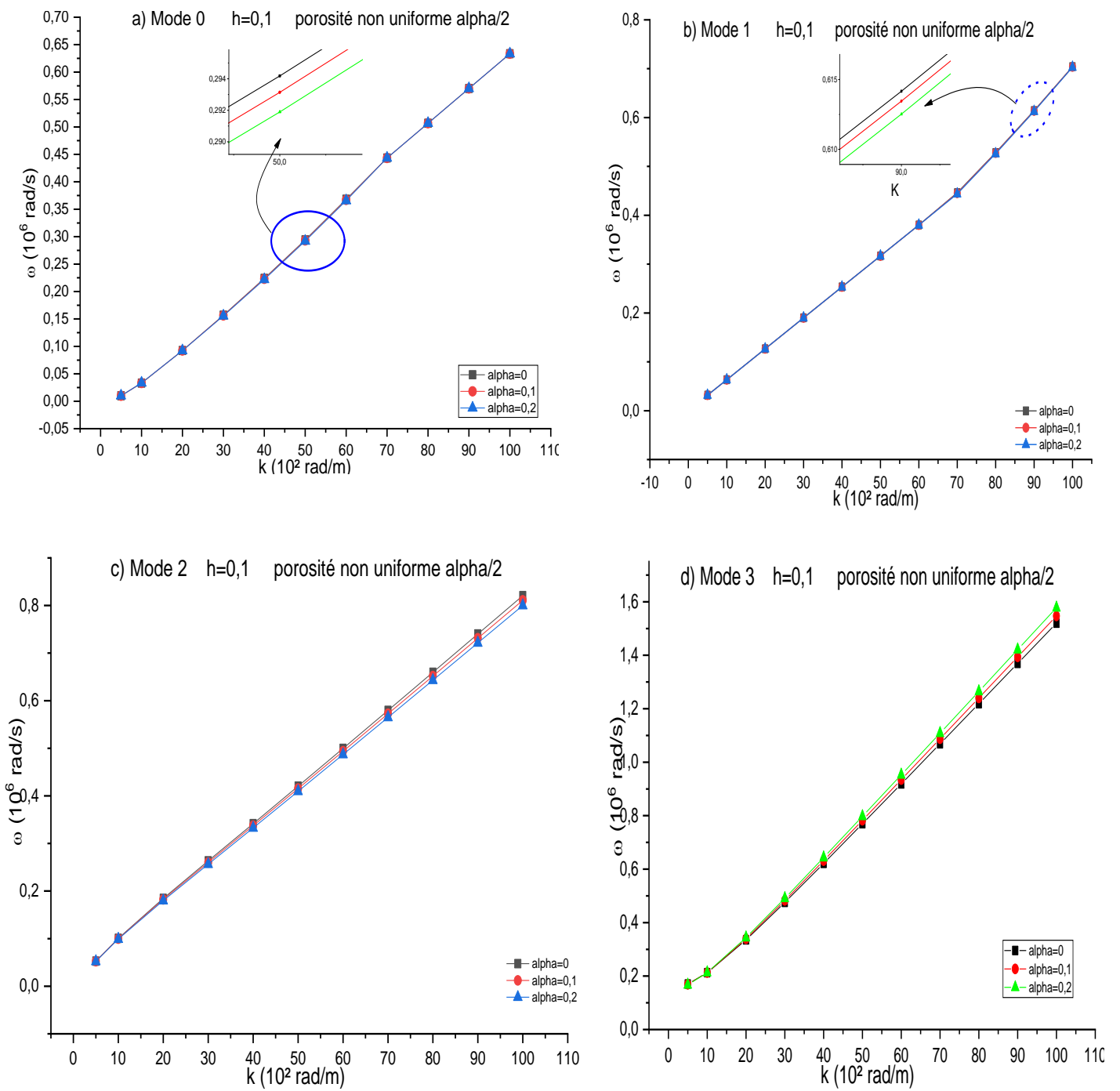


Figure IV.27 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).

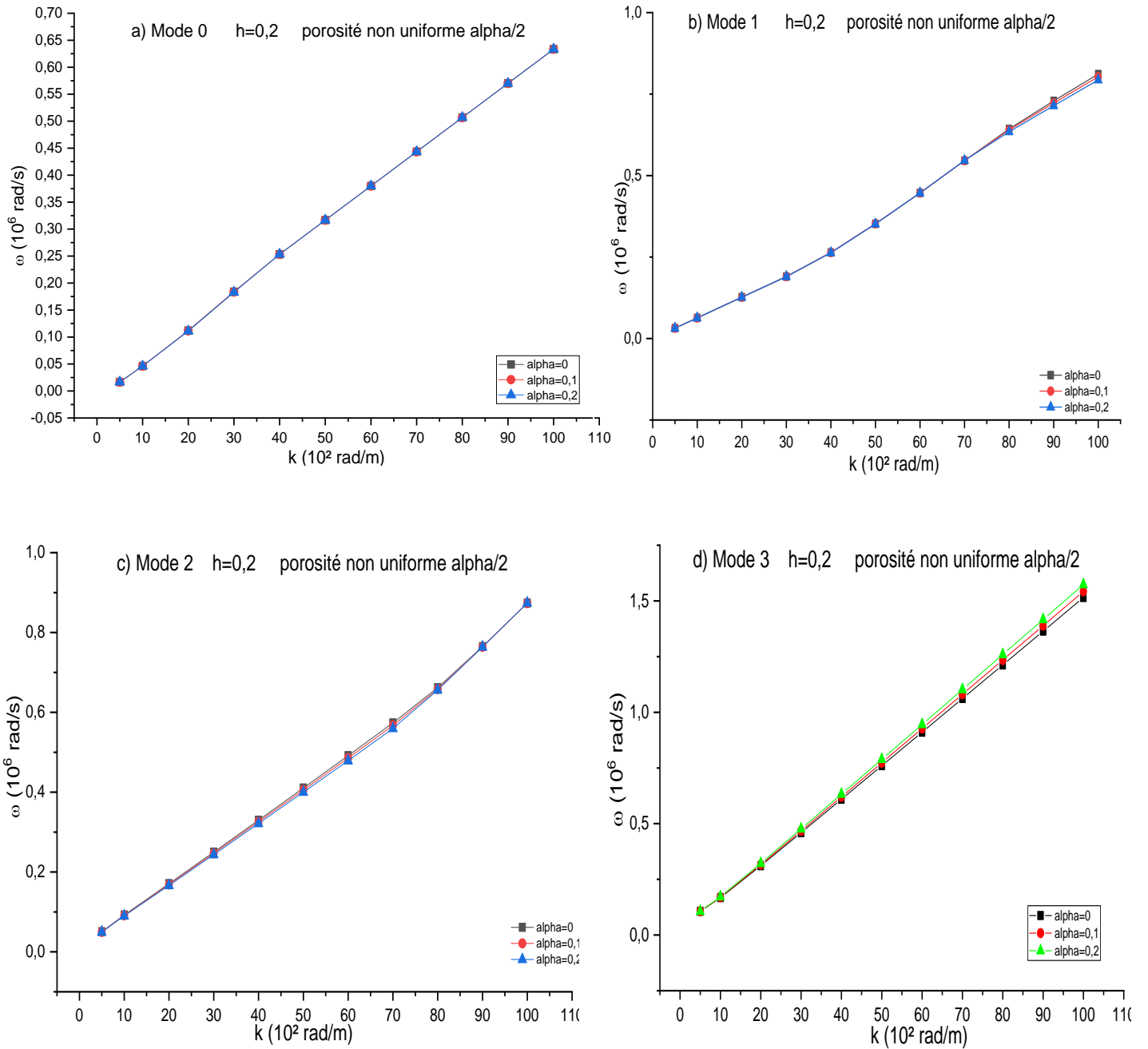


Figure IV.28 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ ).

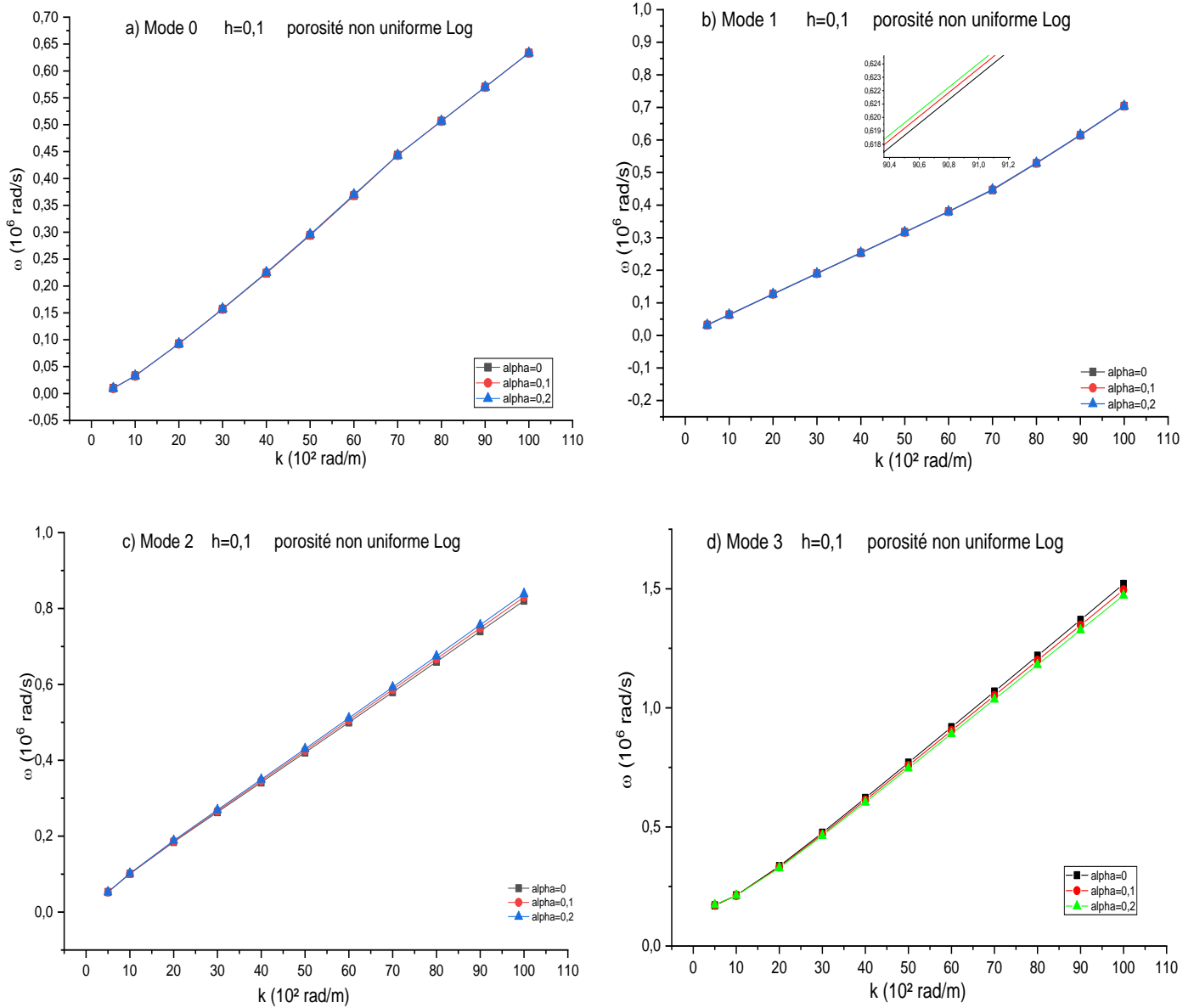


Figure IV.29 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).

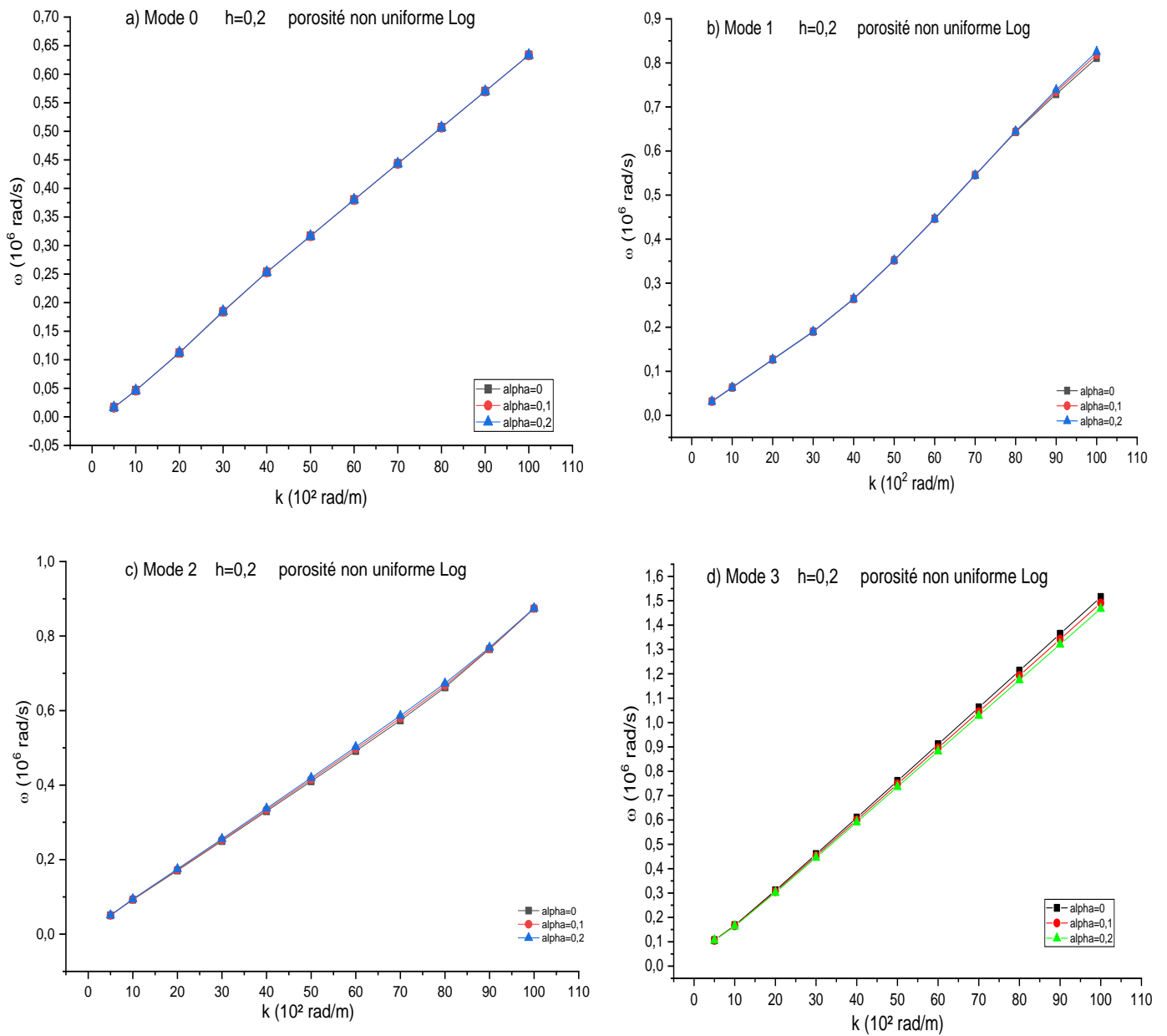


Figure IV.30 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ ).

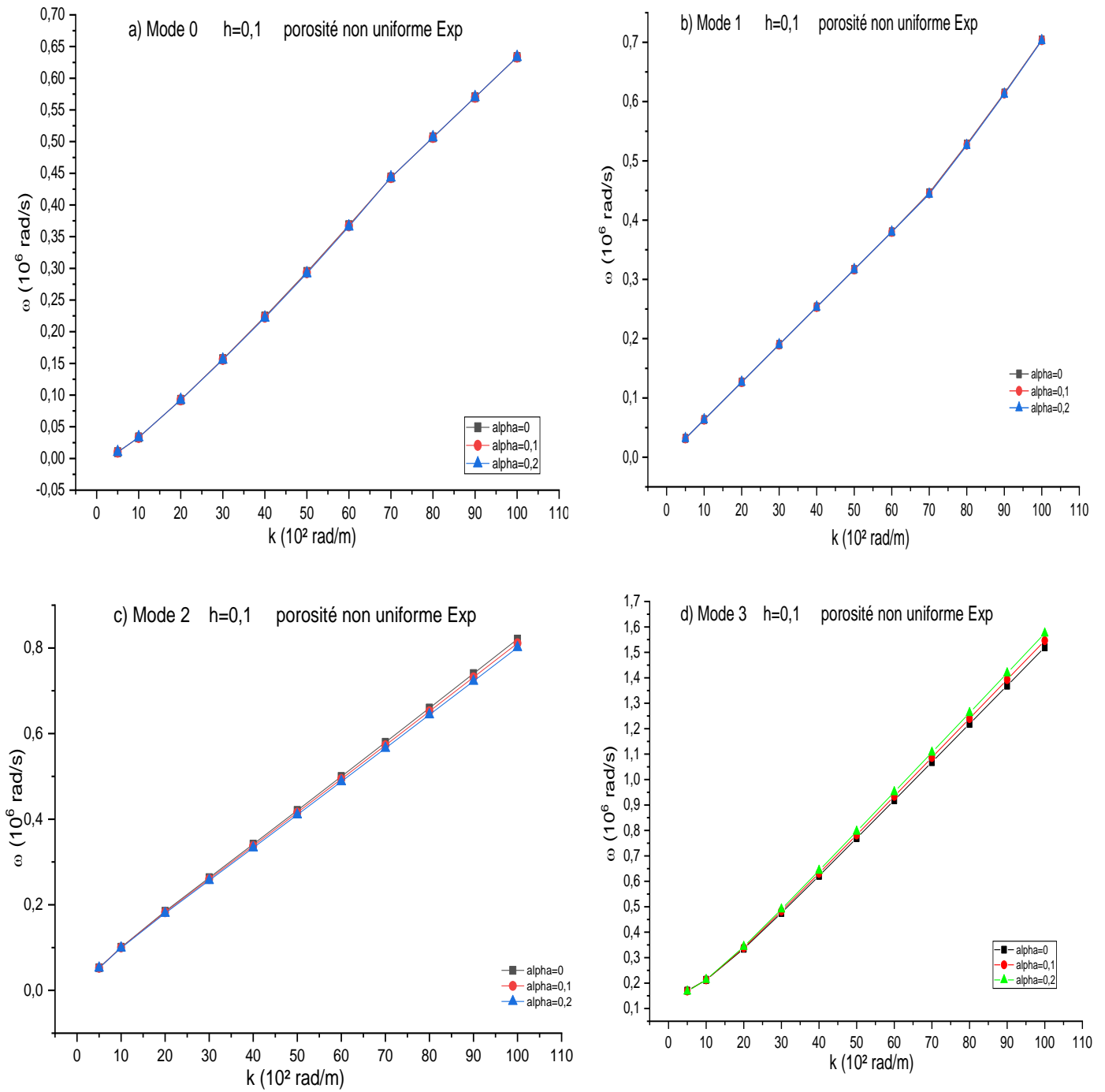


Figure IV.31 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).

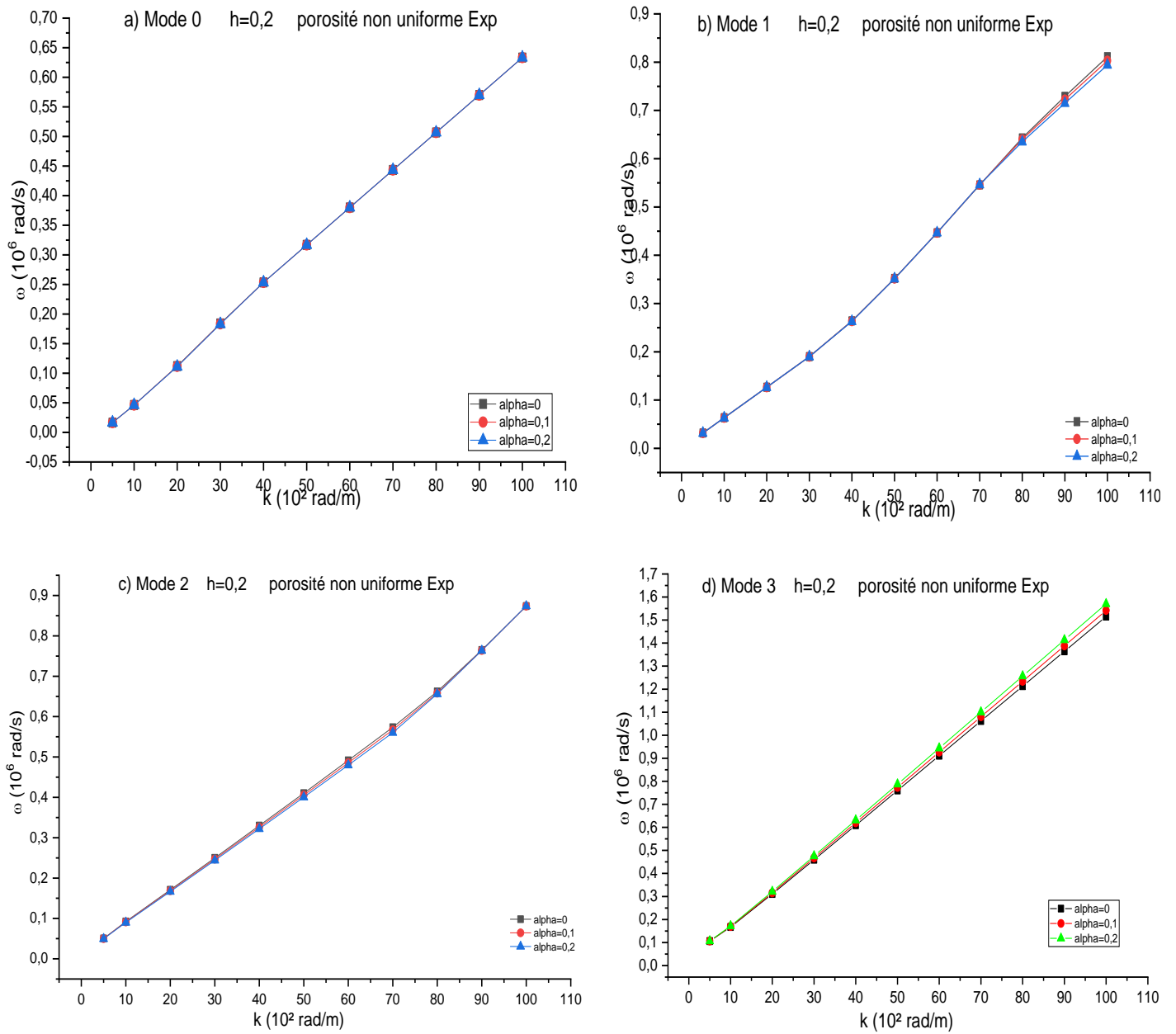


Figure IV.32 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2$ ,  $h=0.2$ ).

Ont concluons que les trois types de distribution de la porosité donne presque les mêmes valeurs

#### IV.2.2.2.2 La vitesse de la phase en fonction du nombre d'onde

Les figures IV.33, IV.34, IV.35, IV.36, IV.37 et IV.38, représentent les résultats de l'effet de la distribution non-uniforme de la porosité dans les plaques S-FGM, avec les trois formes proposées, linéaires, logarithmiques et exponentielles, successivement sur la vitesse de phase en fonction du nombre d'ondes pour deux (02) épaisseurs différentes ( $h=0,1$  et  $0,2$ ).

L'indice de puissance matériel est pris égal à 2. A partir de ces figures, on peut conclure :

Pour le mode  $M_0$ , l'augmentation du nombre d'onde de la plaque entraîne une augmentation de la vitesse de la phase pour toutes valeurs de  $h$ , à partir d'une valeur de  $k$  on peut constater que les valeurs de fréquence sont sensiblement constantes.

Pour le mode  $M_1$  (extension), la vitesse de la phase est constante avec les petites valeurs de  $k$  et augmente avec l'augmentation du nombre d'onde pour les grandes valeurs de  $k$ .

Pour les modes  $M_2$  et  $M_3$ , la vitesse de la phase diminuée avec l'augmentation du nombre d'ondes dans la plaque S-FGM ; pour toutes valeurs de  $h$ .

Nous pouvons également voir que la vitesse de phase diminuée avec l'augmentation du facteur de porosité pour les modes  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  par contre au mode  $M_3$  la vitesse de la phase augmente avec l'augmentation du facteur de porosité pour la même valeur de  $k$ .

La vitesse de phase atteindre la valeur max pour les petites valeurs de  $k$ , pour la moindre variation de  $k$  on peut voir une dégradation rapide dans les valeurs de la vitesse de phase.

Nous pouvons voir aussi que, plus la valeur de nombre d'onde est élevée, plus la vitesse de phase est faible dans les plaques S-FGM pour les modes  $M_2$  et  $M_3$ , la vitesse de phase est presque constante à partir d'une valeur de  $k$ .

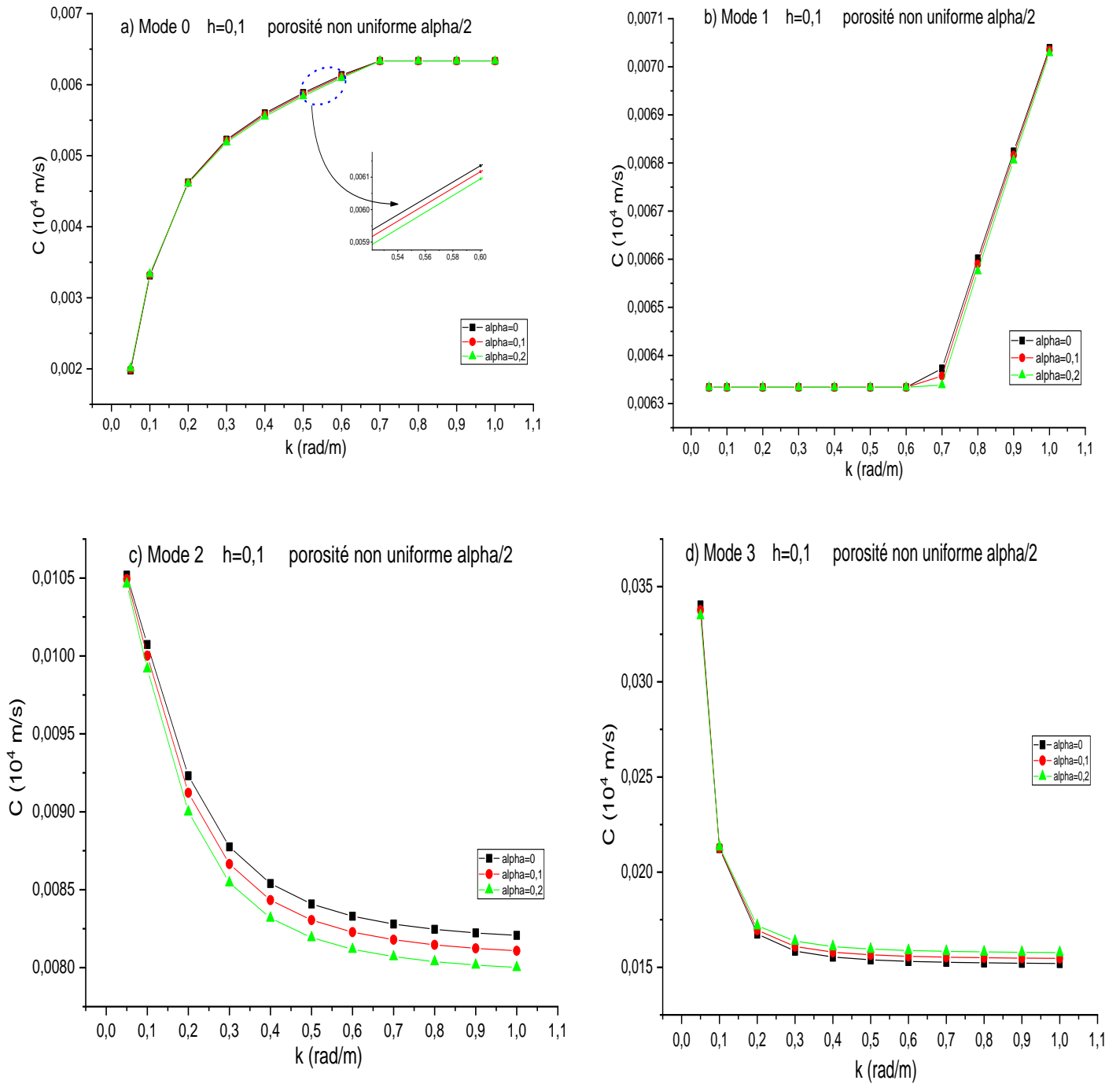


Figure IV.33 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).



Pour le mode  $M_1$ , La fréquence de la plaque diminue avec l'augmentation de la porosité non uniforme pour les grandes valeurs de  $k$  et la variation entre les fréquences augment avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque.

On a remarqué que les valeurs de la vitesse de phase pour  $h=0.2$  mode  $M_2$  convergent vers la même valeur quel que soit la valeur de la porosité.

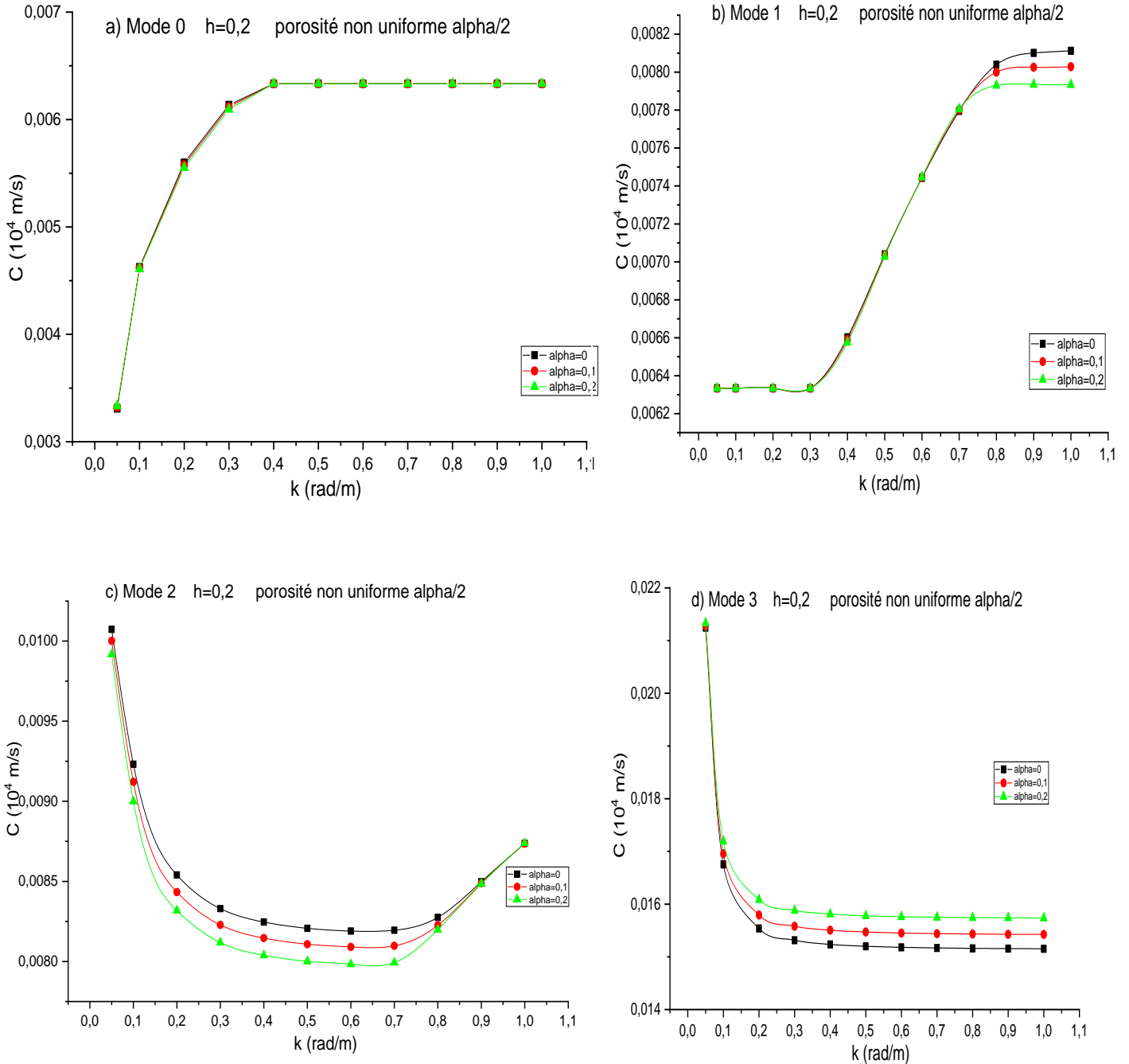


Figure IV.34 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2$ ,  $h=0.2$ ).

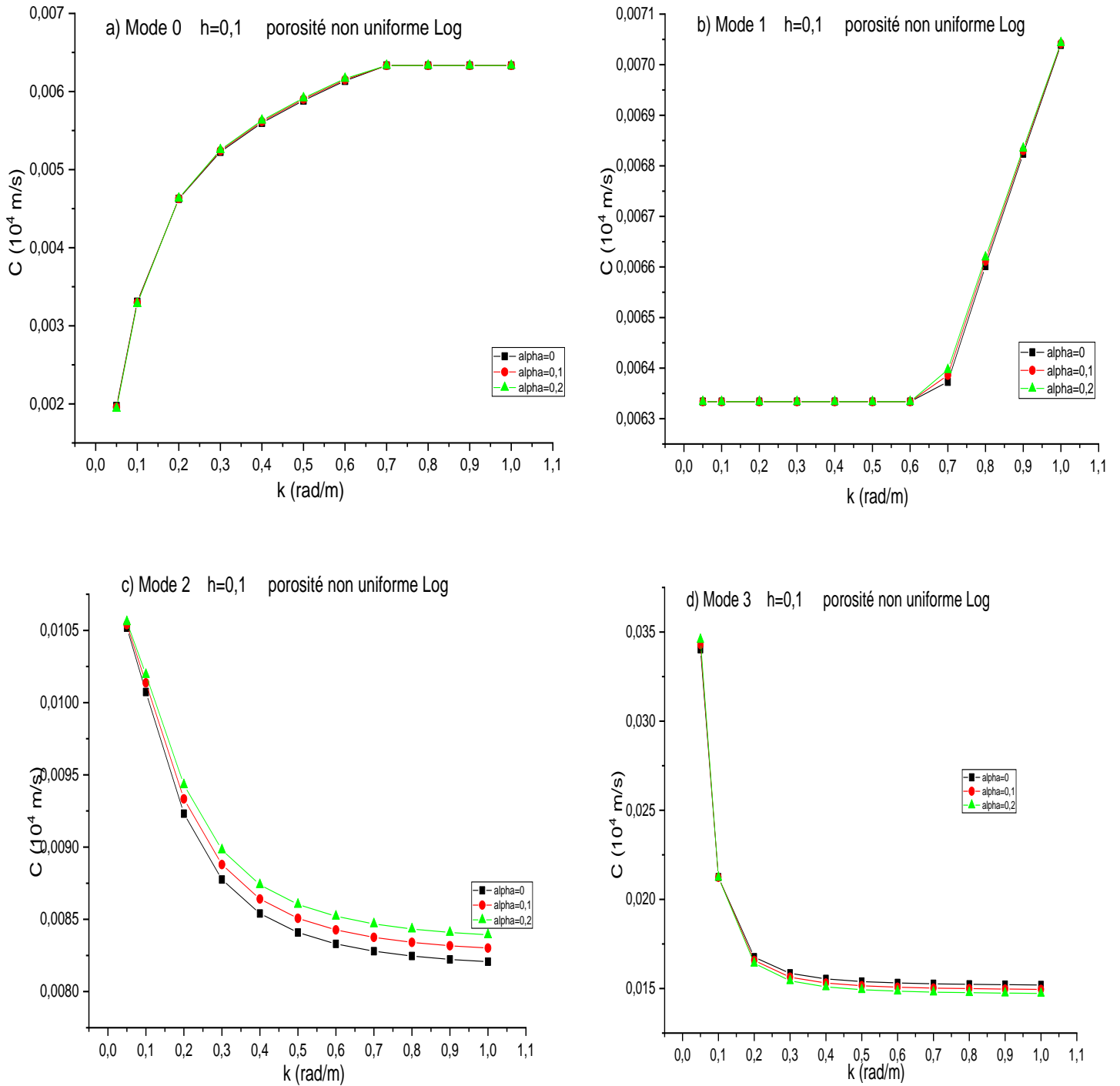


Figure IV.35 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.1$ ).

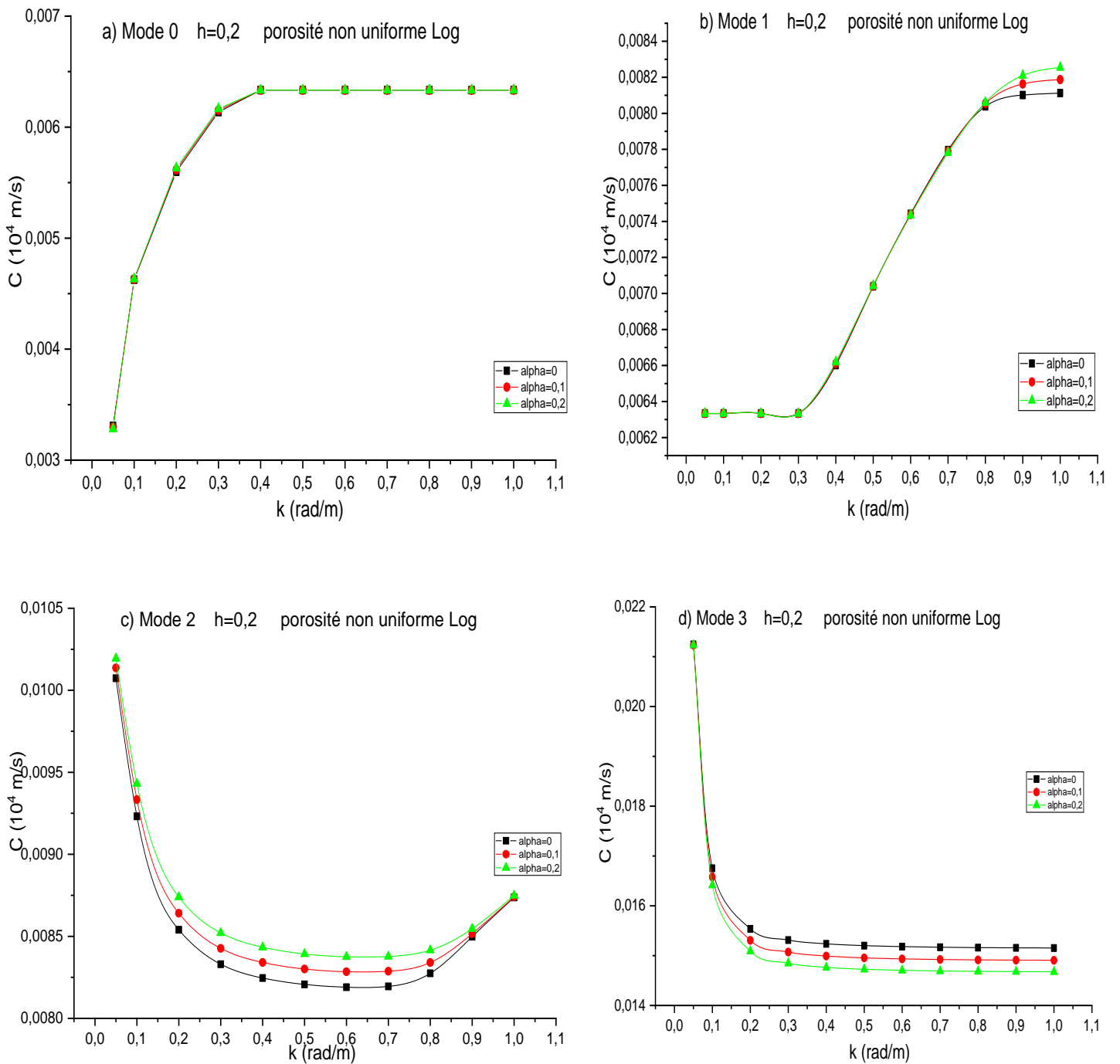


Figure IV.36 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2, h=0.2$ ).

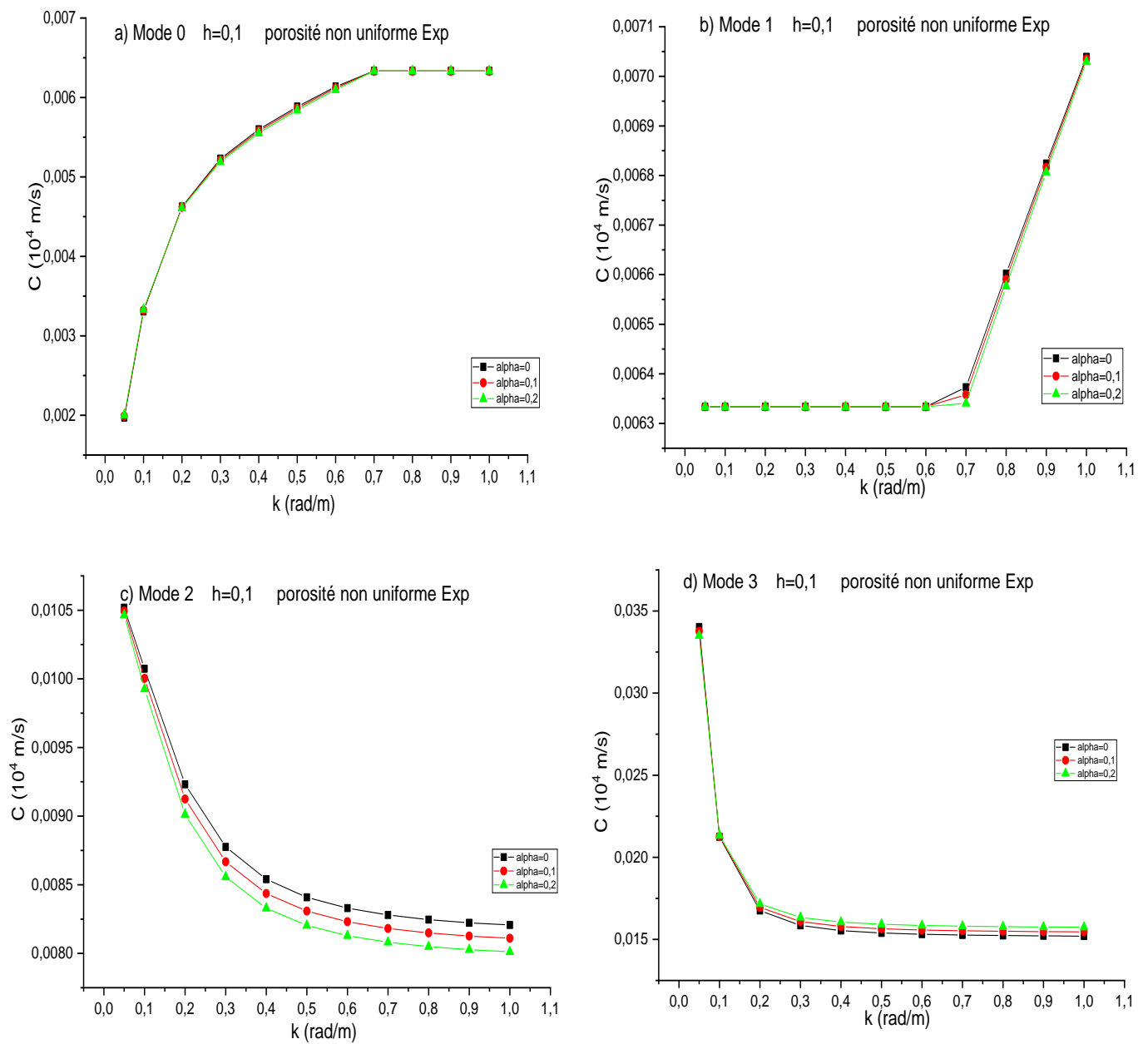


Figure IV.37 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2$ ,  $h=0.1$ ).

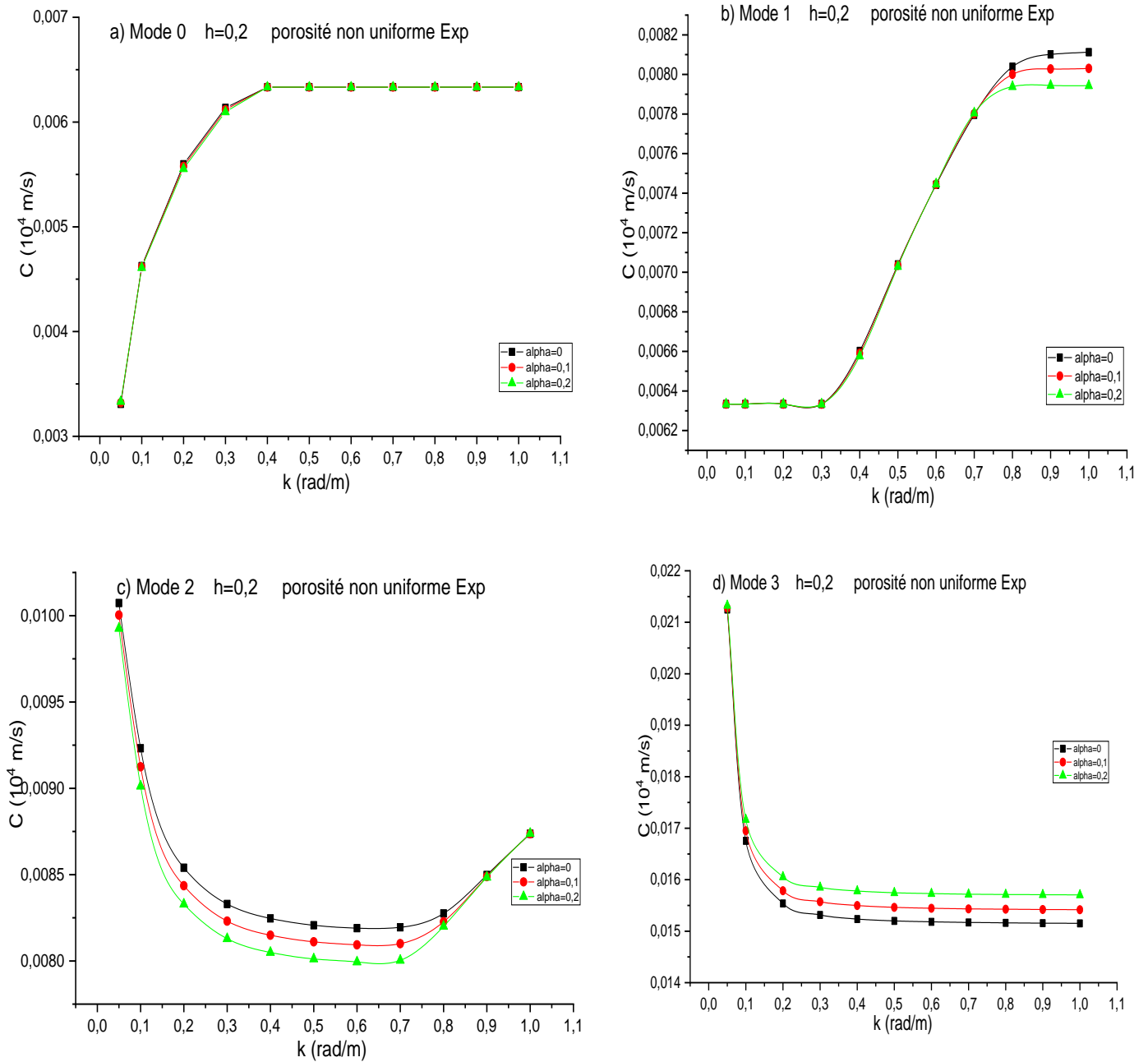


Figure IV.38 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la vitesse de phase dans les plaques S-FGM en termes de nombre d'onde ( $p=2$ ,  $h=0.2$ ).

Ont concluent que tous les formes de porosité non uniforme donnent les mêmes résultats, le comportement des plaques SFGM pour tous les formes de porosité non-uniforme sont les mêmes.

### IV.2.2.2.3 La fréquence en fonction de la loi de puissance

Les figures IV.39, IV.40, IV.41, IV.42, IV.43 et IV.44 représentent l'effet de la distribution non-uniforme de la porosité sur les fréquences d'une plaque S-FGM en fonction de la loi de puissance  $P$  ; avec trois formes de porosité, linéaires, logarithmiques et exponentielles, successivement l'étude a été faite avec deux (02) épaisseurs différentes ( $h=0,1$  et  $0,2$ ) et le nombre d'onde  $k$  est pris égale à 10.

Nous pouvons voir que plus le paramètre de l'indice de puissance matériel est élevé, plus la fréquence est faible dans les plaques S-FGM pour les modes  $M_0$  et  $M_2$ , la fréquence est presque constante à partir de  $P > 2$  ; Pour la même valeur de  $P$  la fréquence de la plaque diminue avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité non uniforme a diminué la fréquence).

Pour le mode  $M_1$  on peut constater que la fréquence est sensiblement constante quel que soit la valeur de la loi de puissance  $P$  et pour toute valeur de la porosité.

Cependant, l'augmentation du facteur de porosité entraîne une augmentation de la fréquence pour le mode  $M_3$ , la fréquence est presque constante à partir de  $P > 2$  ; Pour la même valeur de  $P$  la fréquence de la plaque augmente avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité non uniforme a augmenté la fréquence).

On a remarqué que les valeurs de la fréquence ont diminué avec l'augmentation de l'épaisseur  $h$ .

On a remarqué que la distribution de la porosité non uniforme a augmenté la fréquence de la plaque par rapport la distribution non uniforme ; en plus il y a une variation minime entre la vitesse de la phase des différentes formes (linéaire, logarithmiques et exponentielles).

Par conséquent, il est clair que l'indice de porosité, la loi de puissance et l'épaisseur de la plaque S-FGM ont une grande influence sur la fréquence dans la plaque S-FGM.

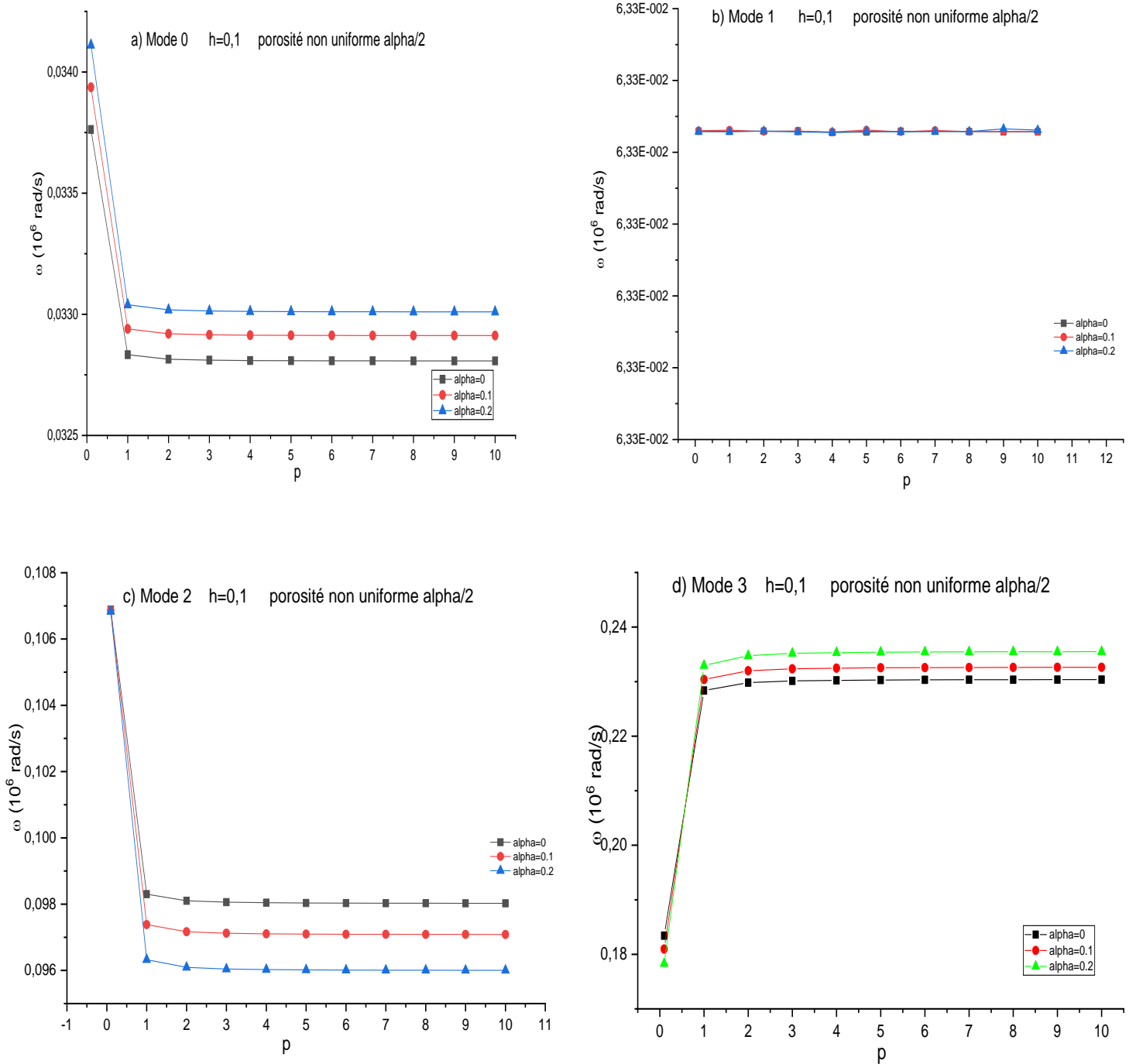


Figure IV.39 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance (k=10, h=0.1).

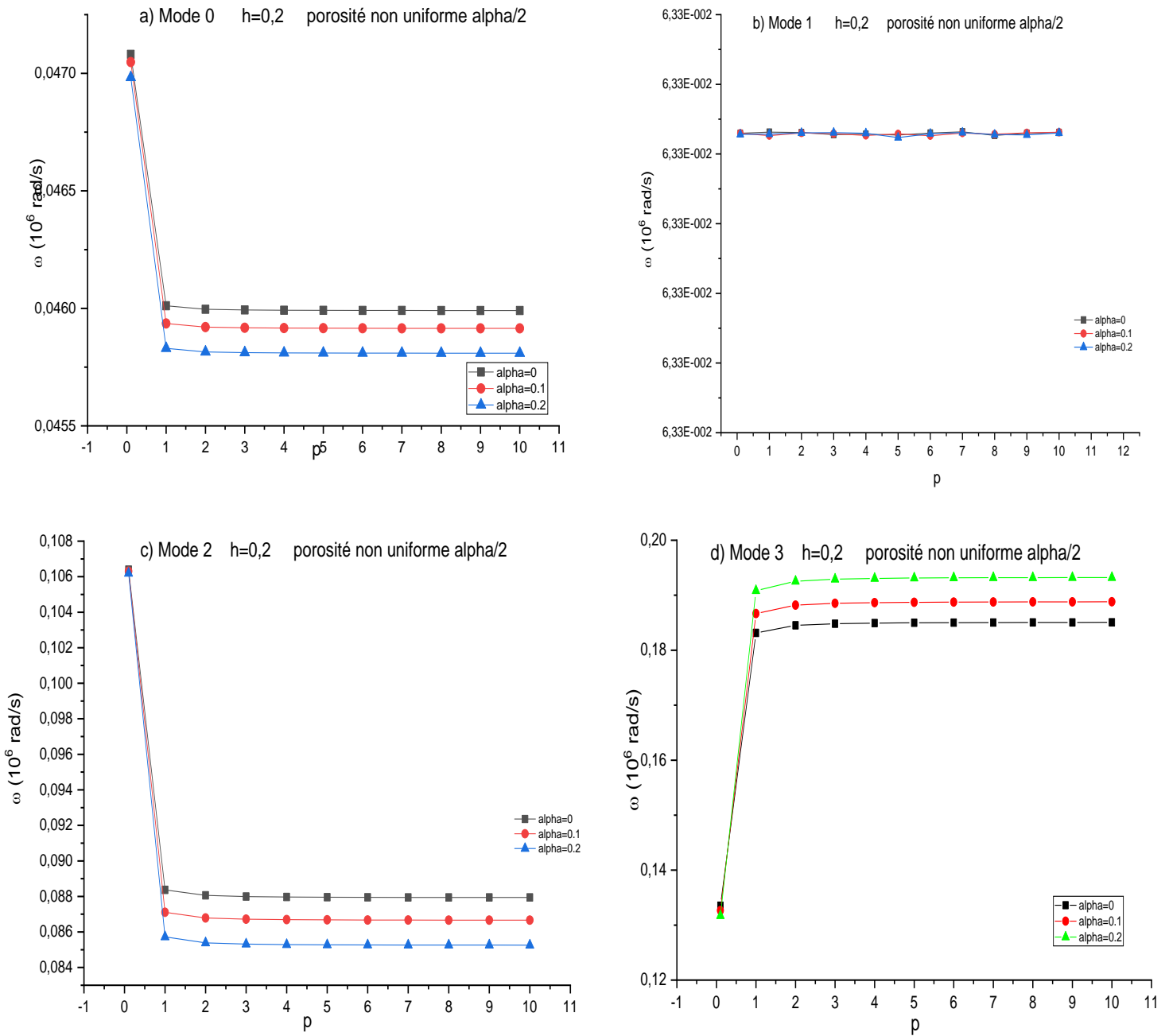


Figure IV.40 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance (k=10, h=0.2).



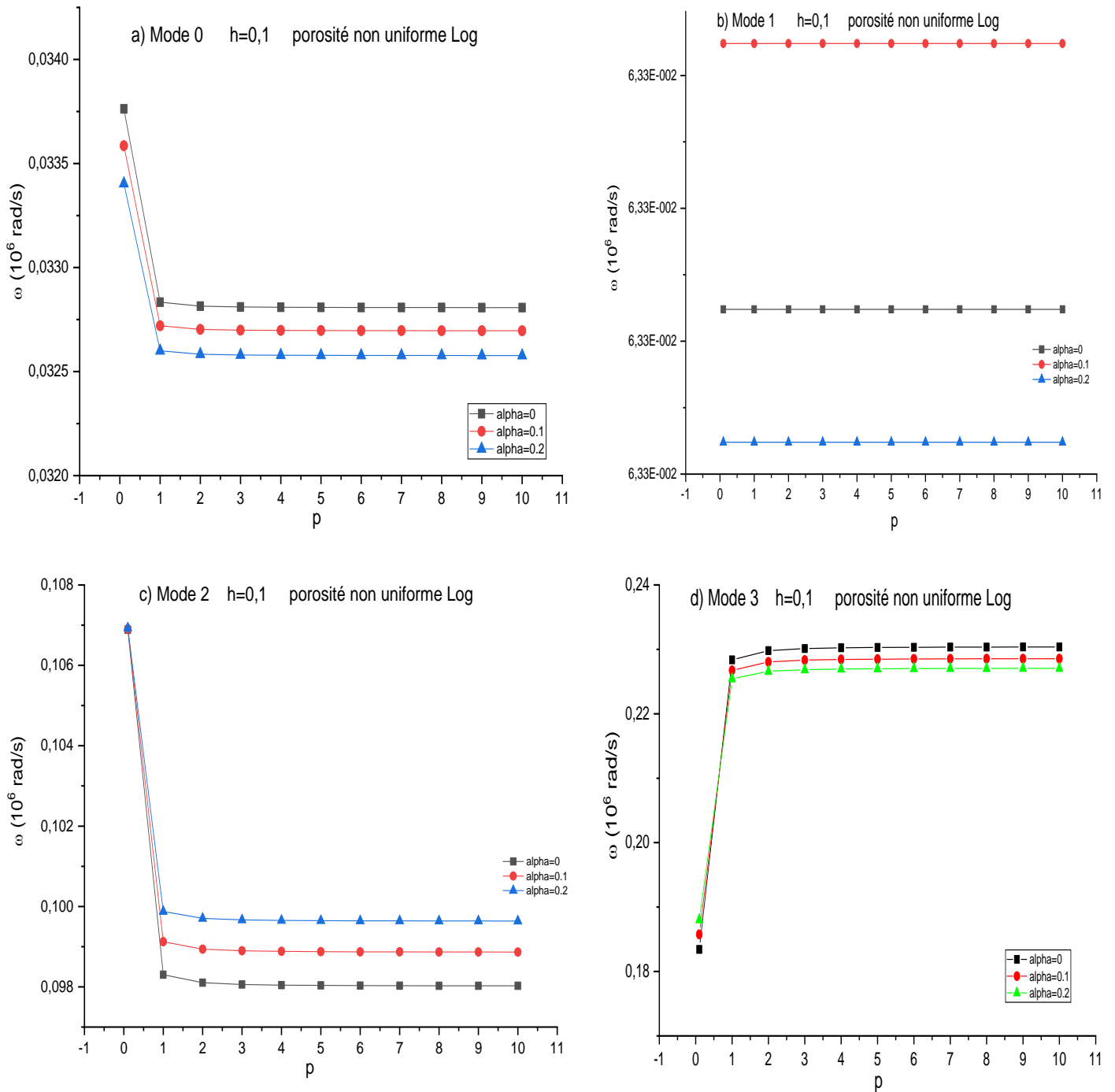


Figure IV.41 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ ).

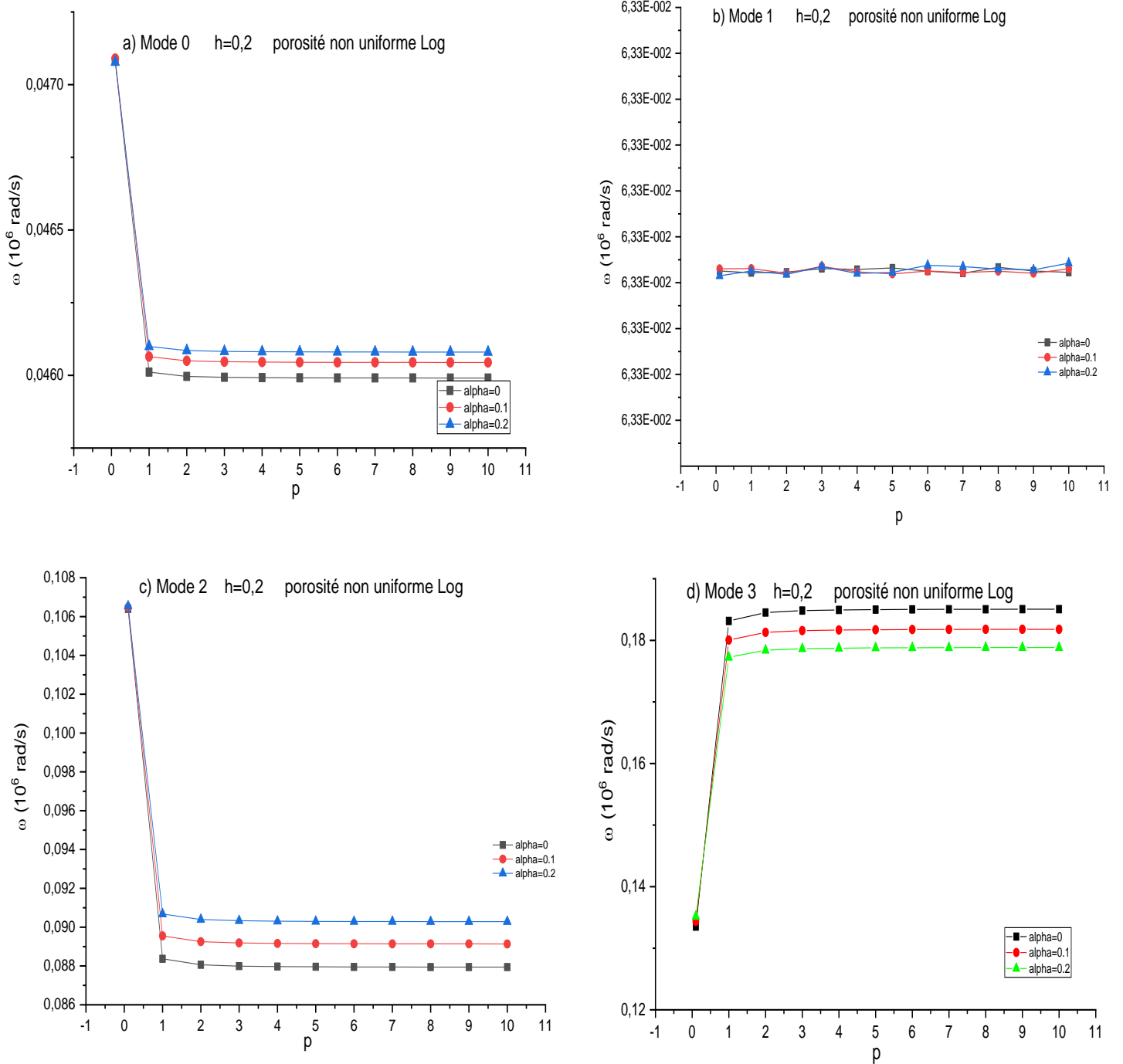


Figure IV.42 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance (k=10, h=0.2).

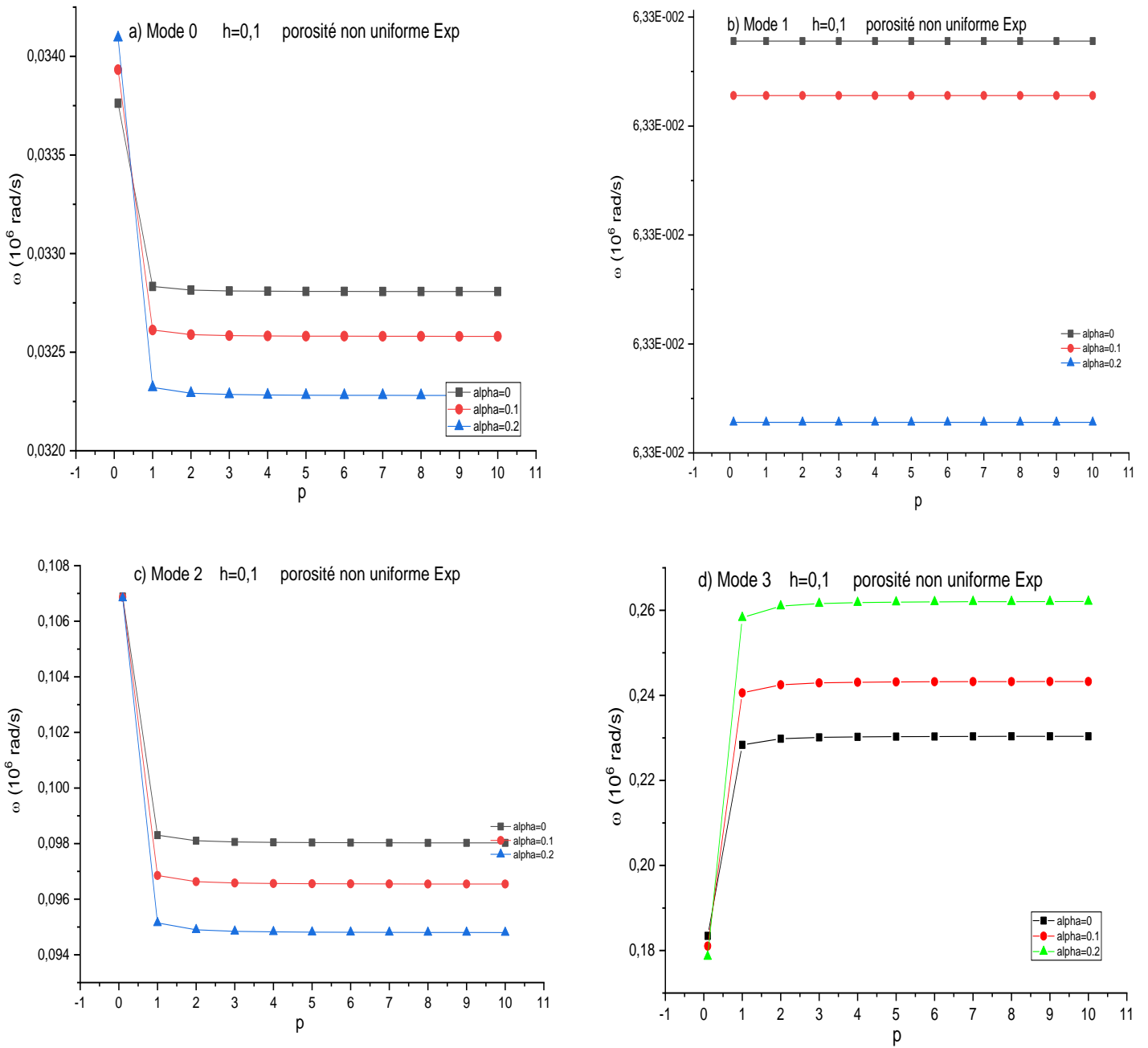


Figure IV.43 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ ).

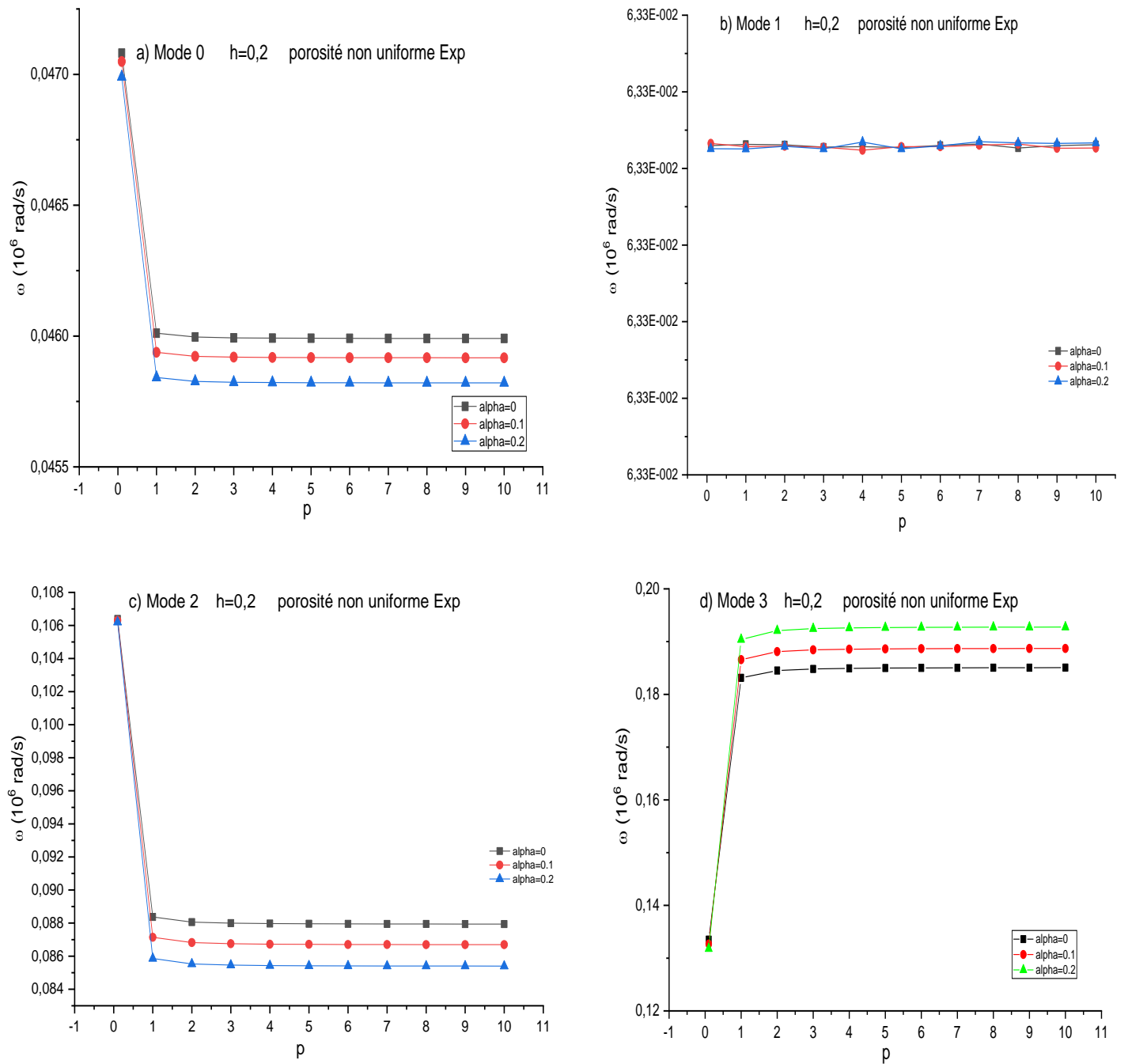


Figure IV.44 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la fréquence dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance (k=10, h=0.2).

#### IV.2.2.2.4 La vitesse de la phase en fonction de la loi de puissance

L'effet de porosité non uniforme est représenté dans les courbes de la vitesse de phase pour les différentes plaques à graduation fonctionnelle, en fonction de l'indice de puissance  $P$ , pour différentes valeurs de porosité ( $\alpha=0$  ;  $\alpha=0.1$  et  $\alpha=0.2$ ) figures IV.45, IV.46, IV.47, IV.48, IV.49 et IV.50, avec trois formes, linéaires, logarithmiques et exponentielles, successivement l'étude a été faite avec deux (02) épaisseurs différentes ( $h=0,1$  et  $0,2$ ) et le nombre d'onde  $k$  est pris égale à 10.

On a constaté que plus l'indice de puissance matériel est élevé, plus la vitesse de la phase est faible dans les plaques S-FGM pour les modes  $M_0$  et  $M_2$ , à partir de  $P > 1$  la vitesse de la phase est sensiblement constante ; Pour la même valeur de  $P$  la vitesse de la phase des plaques diminue avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité non uniforme a diminué la vitesse de la phase) ; On a enregistré une valeur très grand pour les premiers valeur de  $k$  ; et commence à diminuer du la moindre variation de  $P$  jusqu'au la stabilité à partir de  $P=1$  (environ).

Pour le mode  $M_1$  on peut constater que la vitesse de la phase est constante quel que soit la valeur de la loi de puissance  $P$  et pour toute valeur de porosité.

Cependant, l'augmentation de la loi de puissance implique une augmentation de la vitesse de phase pour le mode  $M_3$ , la vitesse de la phase est sensiblement constante à partir de  $P > 2$  ; Pour la même valeur de  $P$  la vitesse de la phase des plaques augmente avec l'augmentation de la valeur de porosité (la porosité non uniforme a augmenté la fréquence pour le mode  $M_3$ ) ; On a enregistré une valeur très petit pour les premiers valeur de  $k$  ; et commence à augmenter du la moindre variation de  $P$  jusqu'au la stabilité à partir de  $P=1$  (environ).

On a remarqué que les valeurs de la vitesse de phase ont diminué avec l'augmentation de l'épaisseur  $h$ .

Nous avons remarqué pour les plaques sans porosité que la vitesse de phase est grande pour les modes d'extension par rapport les plaques avec porosité.

Par conséquent, il est clair que la porosité uniforme, la loi de puissance et l'épaisseur de la plaque S-FGM ont une grande influence sur la vitesse de la phase.

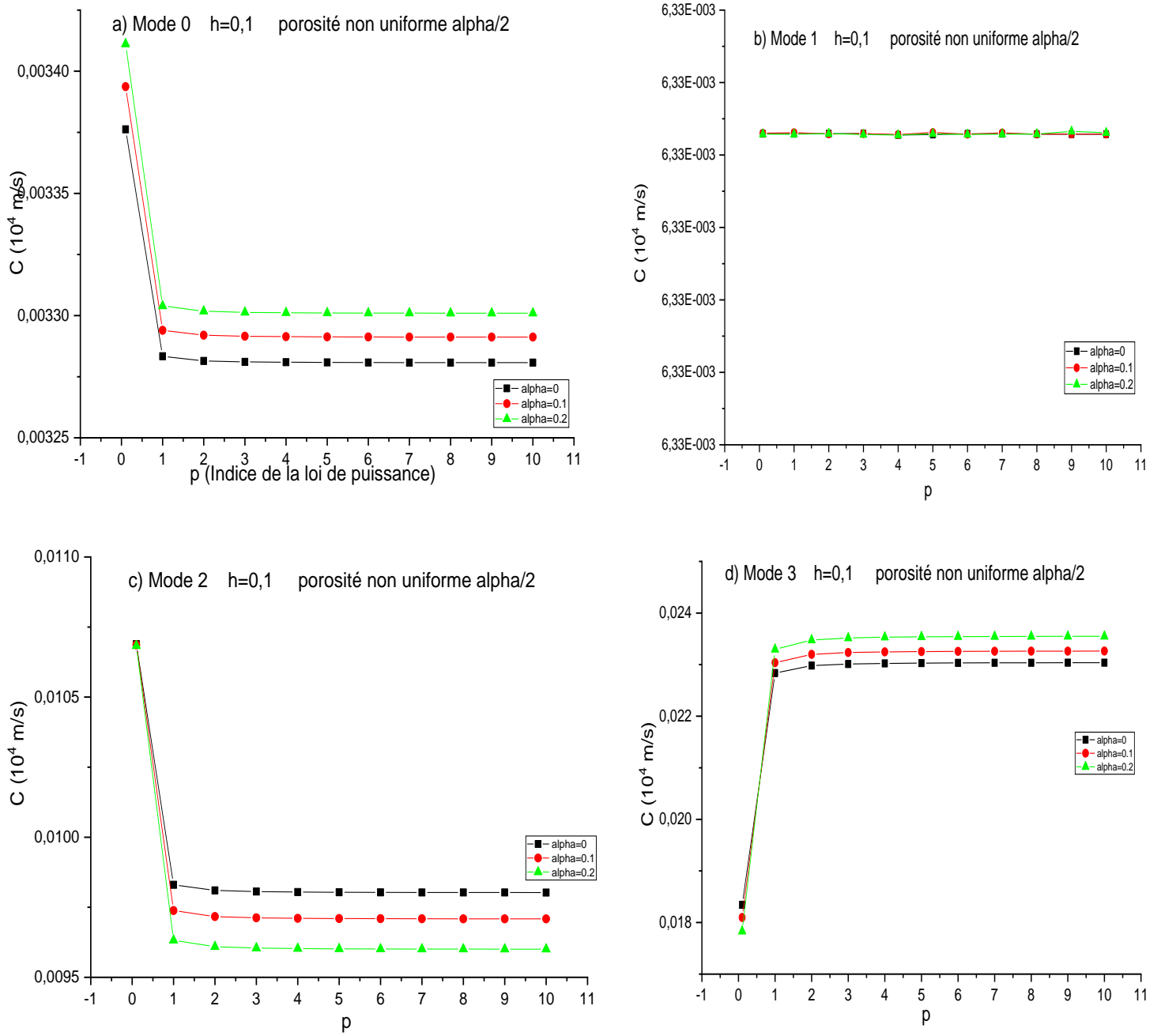


Figure IV.45 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance (k=10, h=0.1).

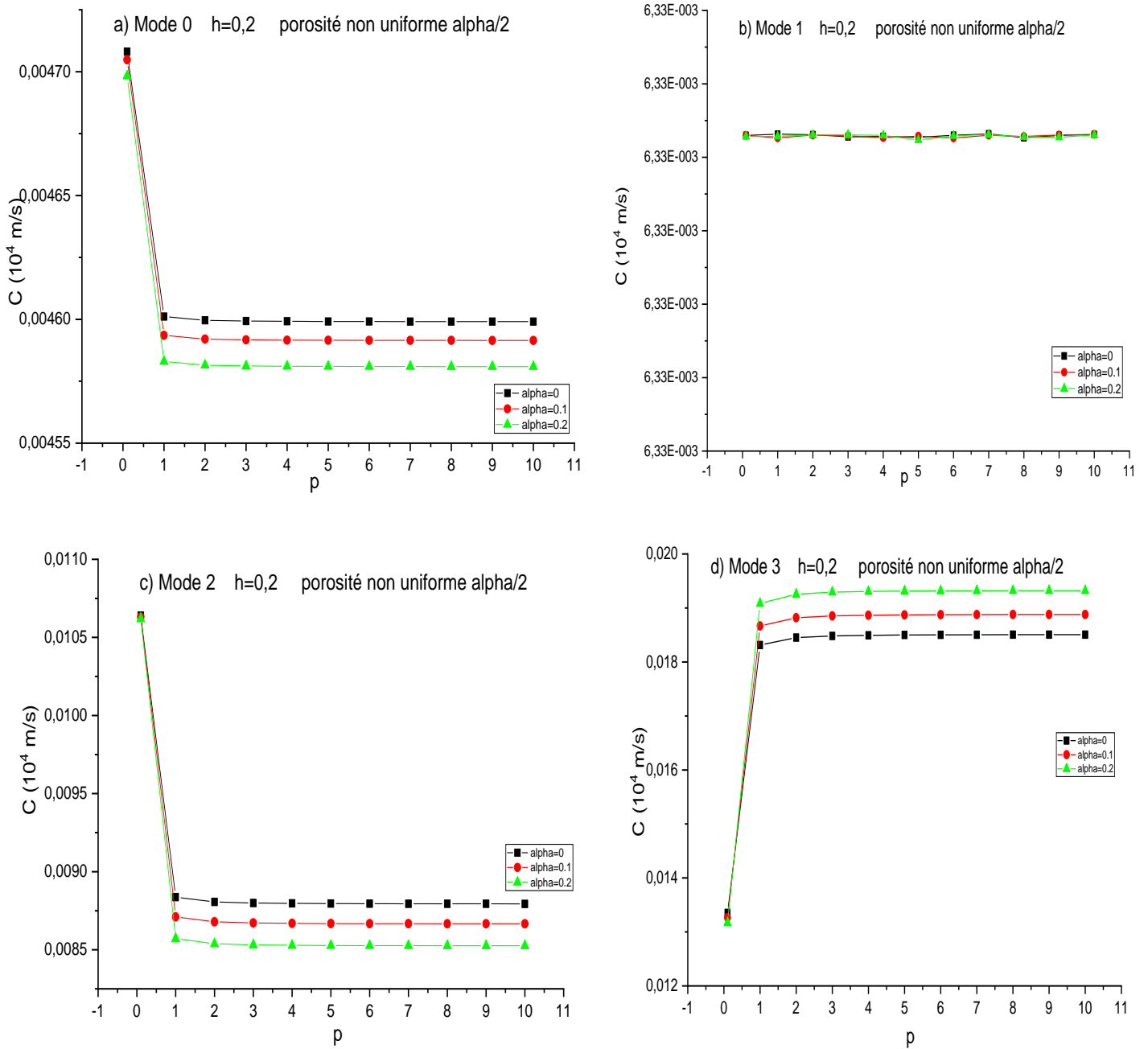


Figure IV.46 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution linéaire sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ ).

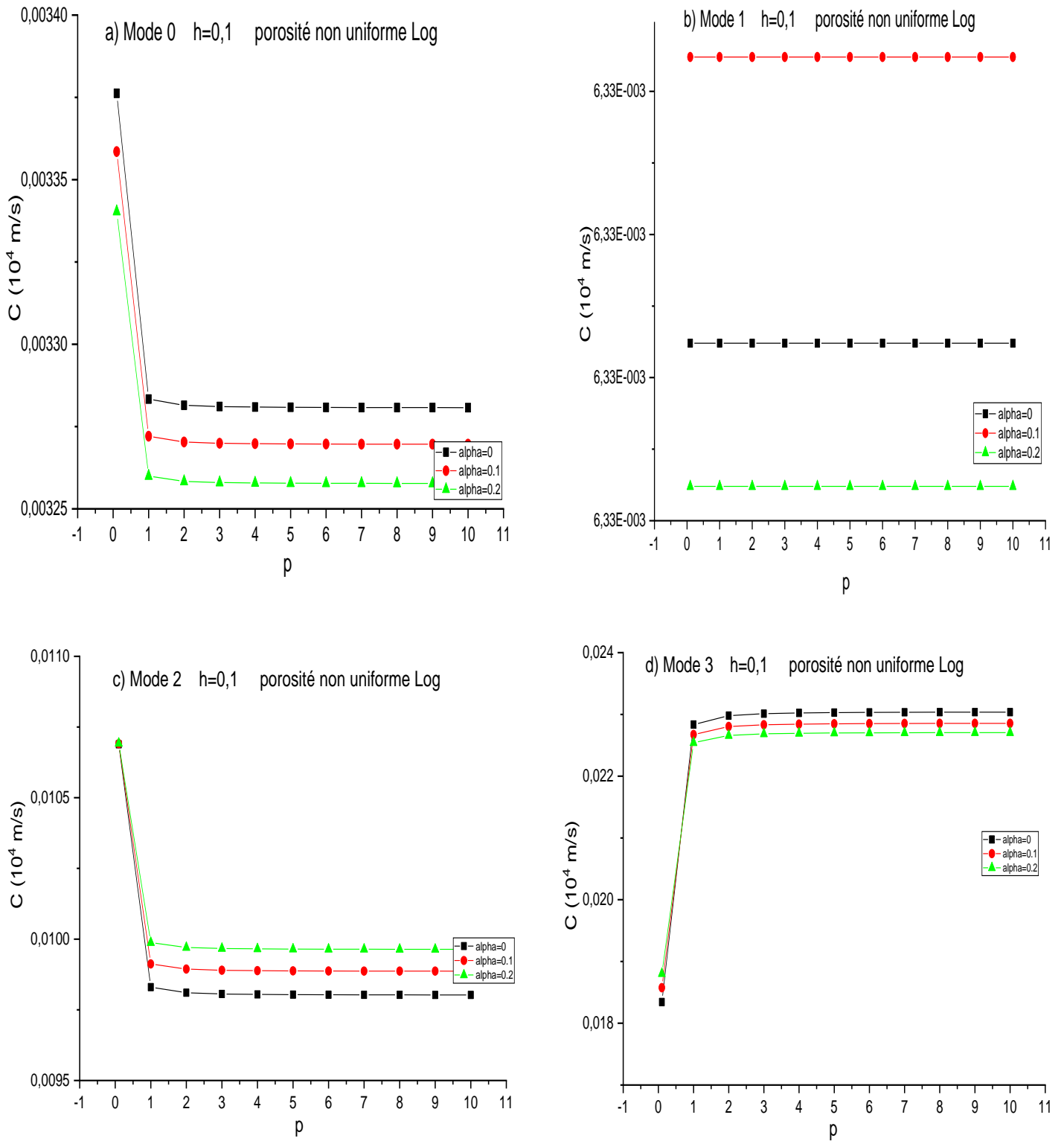


Figure IV.47 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.1$ ).



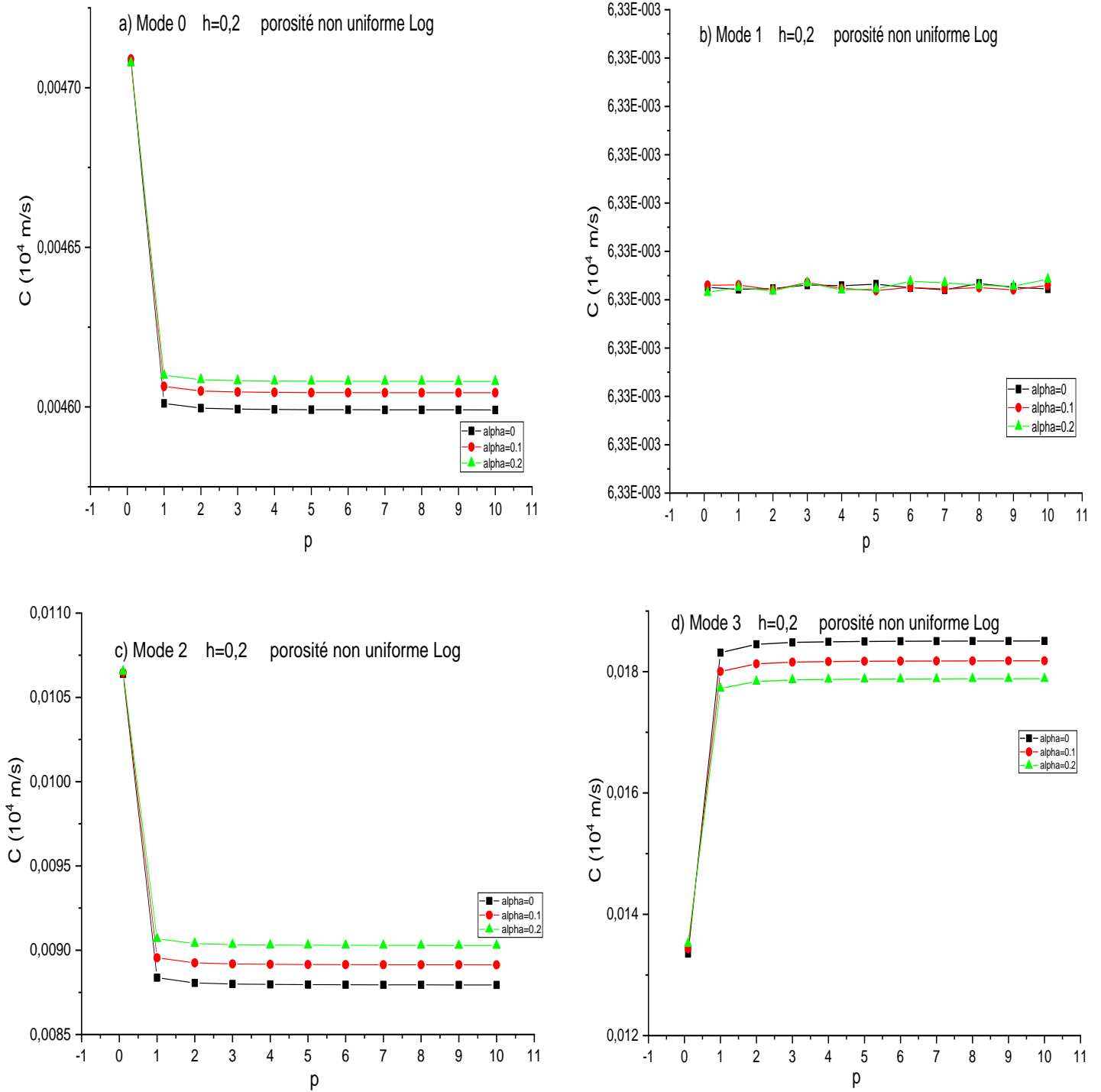


Figure IV.48 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution logarithmique sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ ).

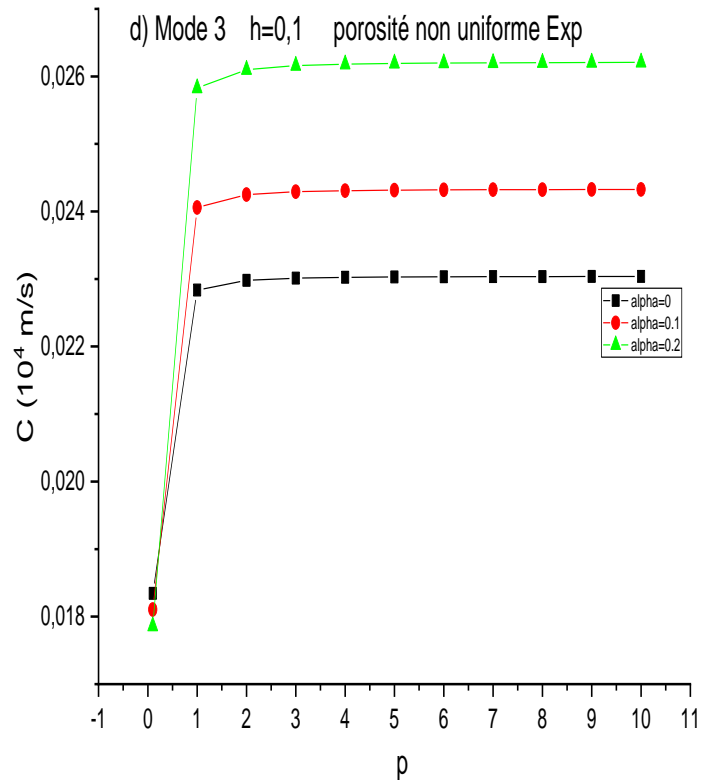
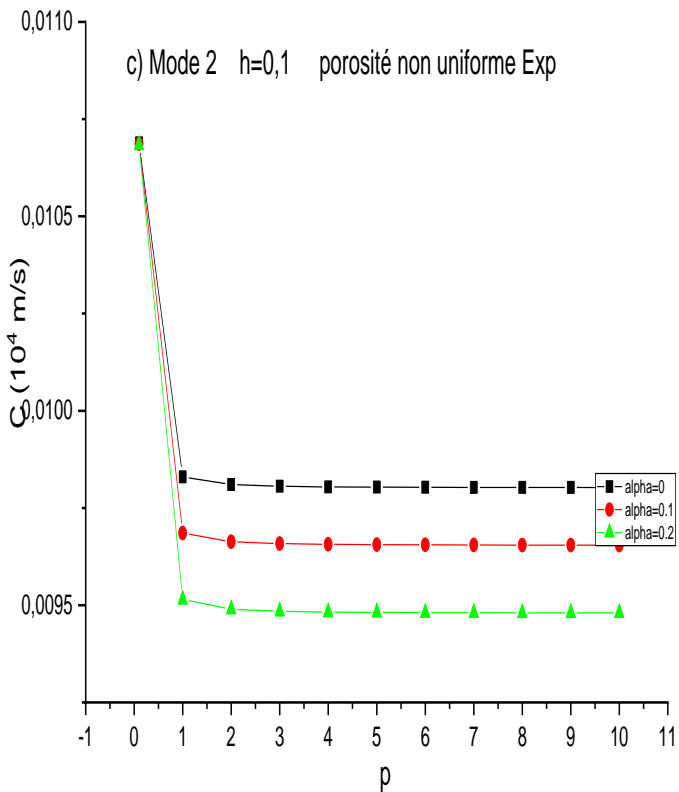
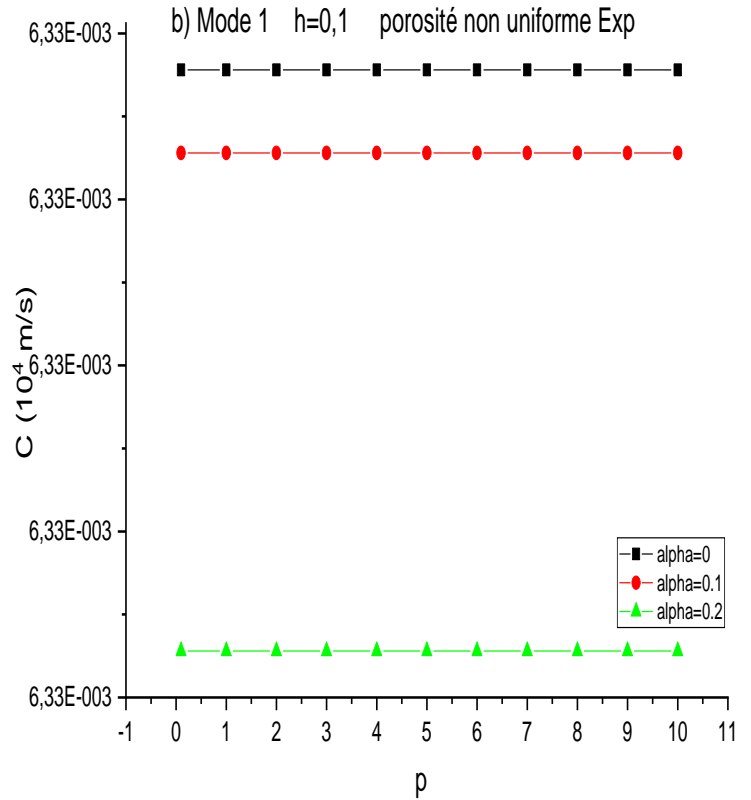
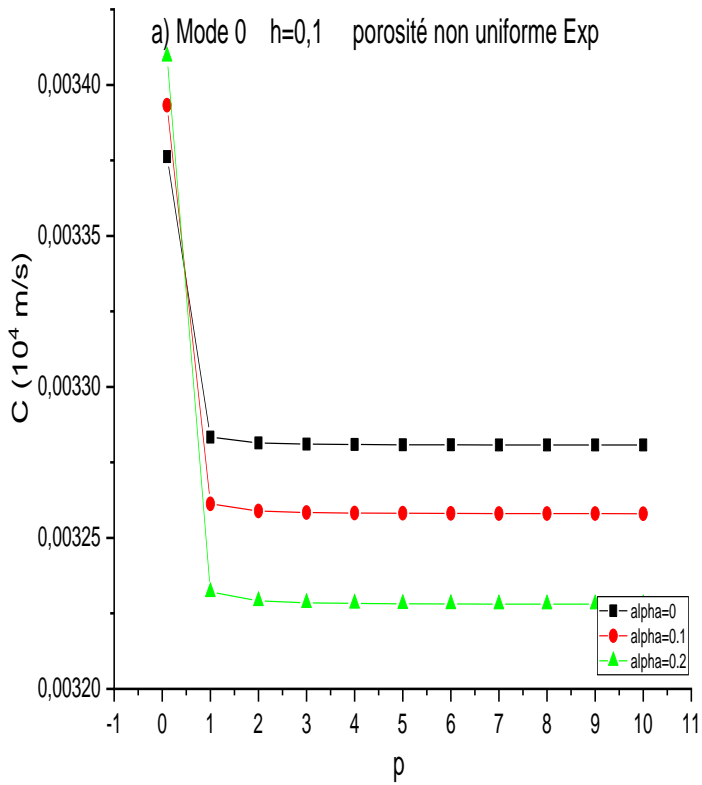


Figure IV.49 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance ( $k=10$ ,  $h=0.1$ ).

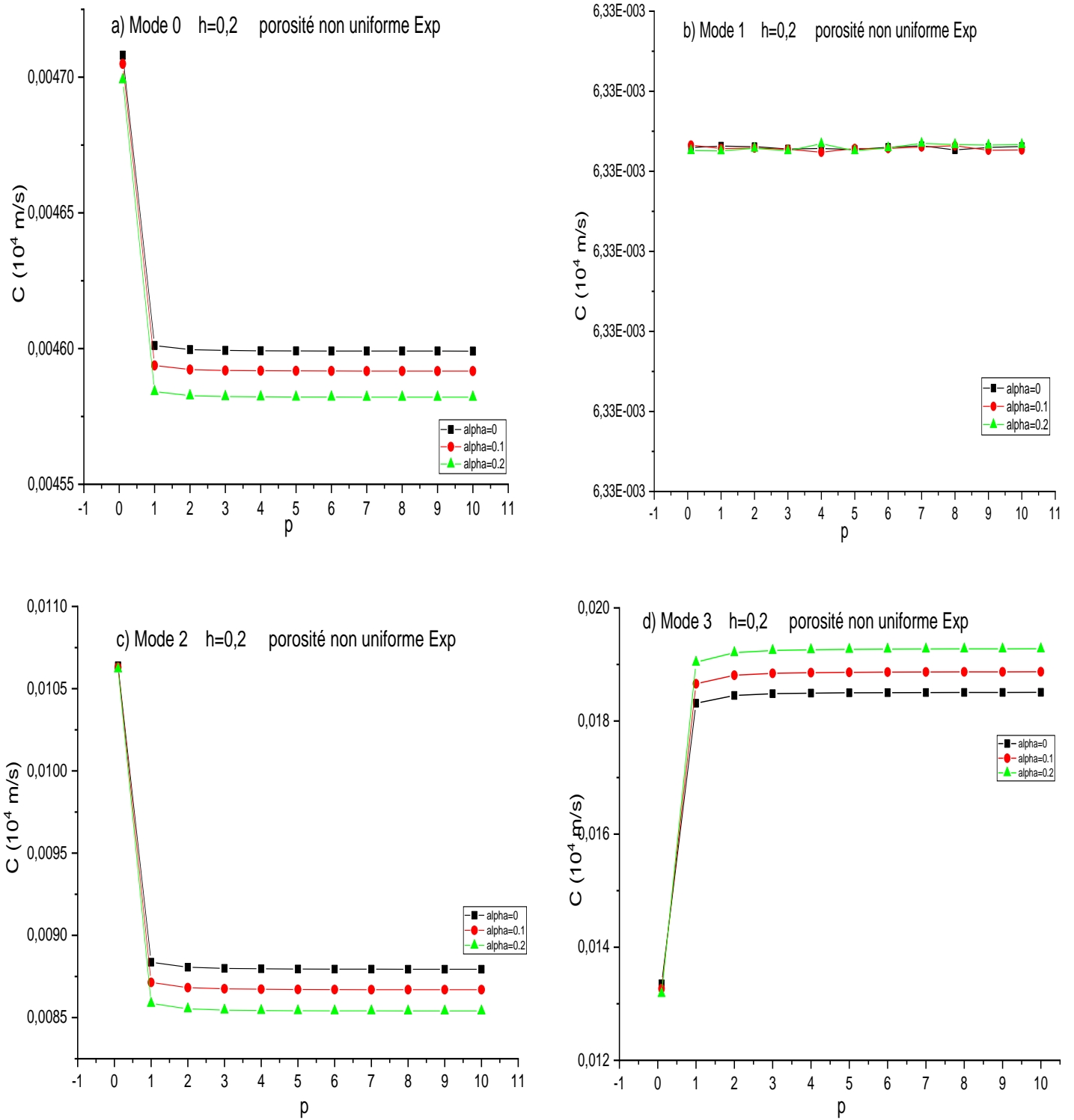


Figure IV.50 : Effet de la porosité non-uniforme et de la distribution exponentielle sur la vitesse de la phase dans les plaques S-FGM en termes de la loi de puissance ( $k=10, h=0.2$ ).

IV.2.2.3 Etude comparative de la variation de h en fonction de porosité non uniforme

Les figures IV.51 et IV.52 montrent l'influence du rapport d'épaisseur des plaques sur la fréquence de la propagation des ondes dans les plaques SFGM en fonction du nombre d'onde (k).

Deux valeurs du paramètre de porosité sont considérées ( $\alpha= 0.1$  et  $\alpha = 0,2$ ). La valeur de l'indice de puissance P est prise égale à 2 avec une fonction de forme sigmoïdale (SSDT). On peut constater à partir de ces graphes que les fréquences augmentent avec l'augmentation de l'épaisseur h pour les modes M<sub>0</sub> et M<sub>1</sub> et diminuent avec l'augmentation de l'épaisseur h pour les modes M<sub>2</sub> et M<sub>3</sub> pour la même valeur de k ; alors l'épaisseur de la plaque a un effet considérable sur la fréquence de propagation de l'onde dans la plaque S-FGM.

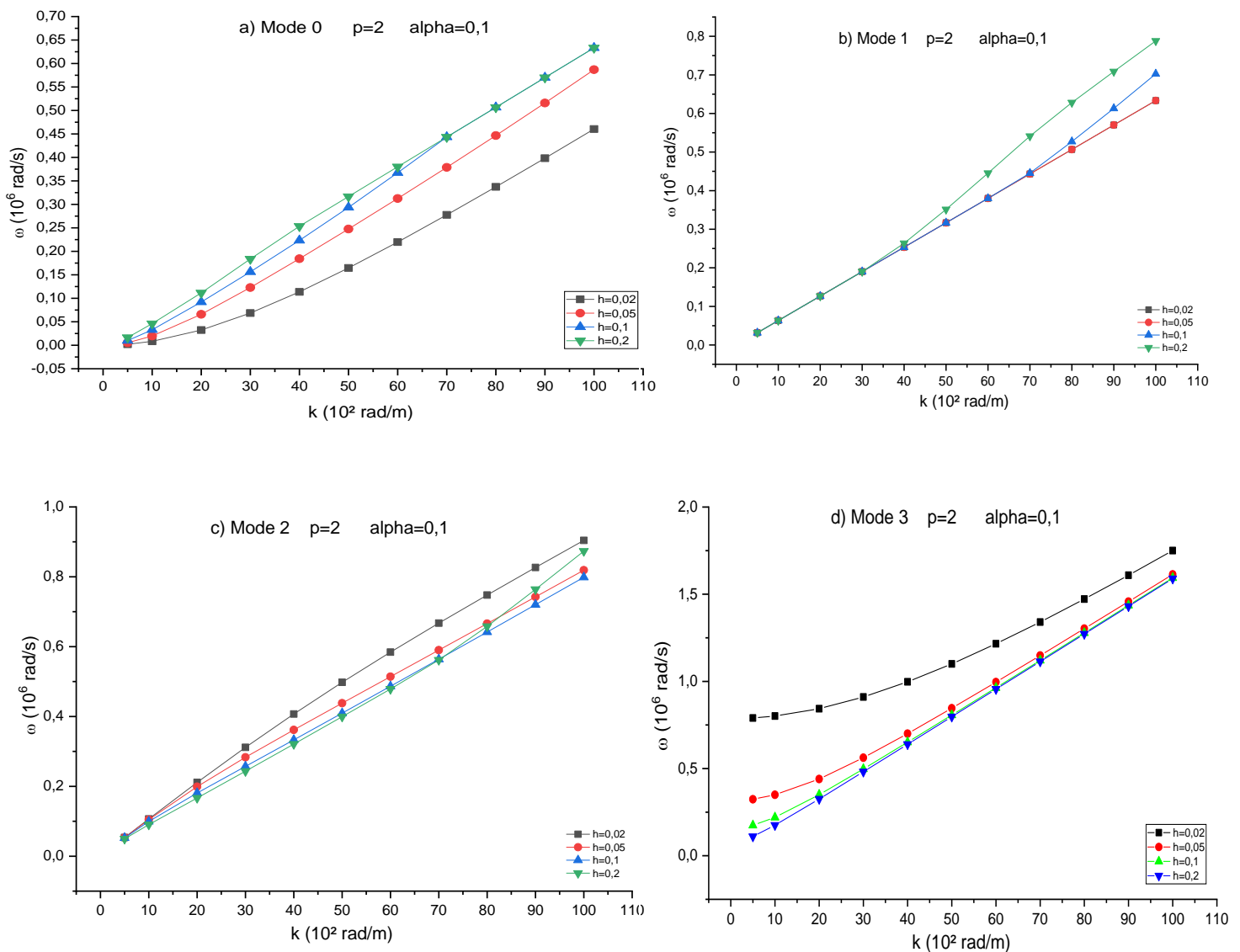


Figure.IV.51 : l'effet de l'épaisseur de la plaque sur la fréquence des plaque S-FGM en fonction de nombre d'onde avec indice de porosité Alpha=0.1

L'augmentation de la fréquence pour les modes  $M_0$  et  $M_2$ , commence avec un taux de variation petit au voisinage des petites valeurs de  $k$ , mais avec l'augmentation de  $k$ , la variation entre les valeurs de la fréquence commence grandir.

Pour le mode  $M_3$ , l'augmentation de la fréquence commence avec un taux de variation grand au voisinage des petites valeurs de  $k$ , et aller vers la convergence pour les grandes valeurs de  $k$ .

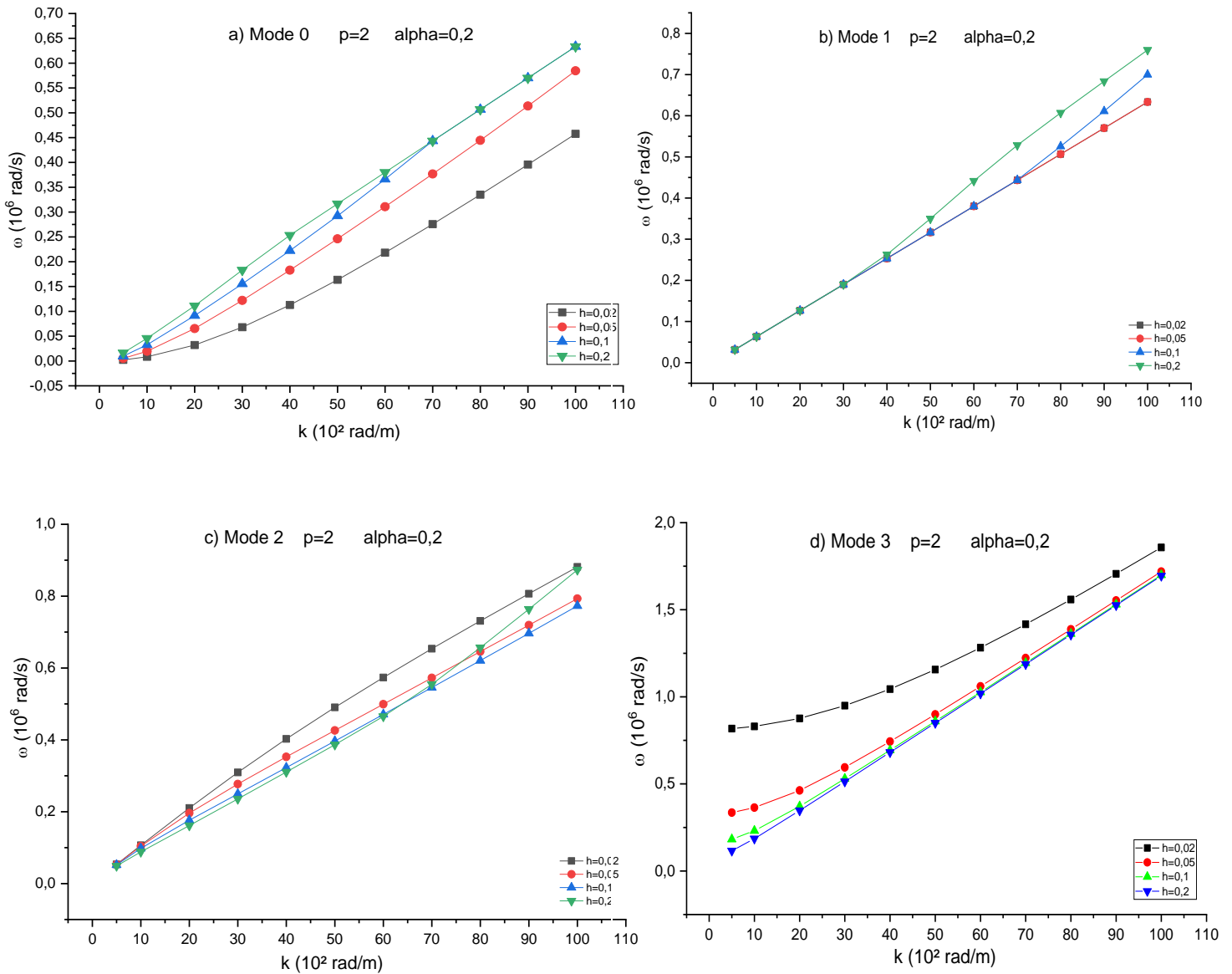


Figure.IV.52 : l'effet de l'épaisseur de la plaque sur la fréquence des plaque S-FGM en fonction de nombre d'onde avec indice de porosité  $\alpha=0.2$

La figure.IV.53 et IV.54 montre la variation de la vitesse de phase en fonction du nombre d'onde ( $k$ ) dans les plaques S-GF avec différentes valeurs d'épaisseur ( $h$ ). On peut remarquer que les vitesses de phase ont diminué avec l'augmentation de l'épaisseur pour les modes  $M_2$  et  $M_3$ ; ainsi on peut remarquer à partir de ces figures que la vitesse de phase de la plaque S-FGM diminue à mesure que l'épaisseur diminue pour les petites valeurs du nombre d'ondes ( $k$ ) dans les modes  $M_2$  et  $M_3$ , quand ( $k$ ) prend des grandes valeurs, les vitesses de phases se convergent les uns aux autres quel que soit le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ), pour le mode  $M_0$  et  $M_1$ , les vitesses de phase augmentent quand l'épaisseur augmente pour la même valeur de  $k$ . On peut également remarquer que pour le mode d'onde  $M_3$ , en outre les vitesses de phase supérieures sont obtenues pour les faibles épaisseurs.

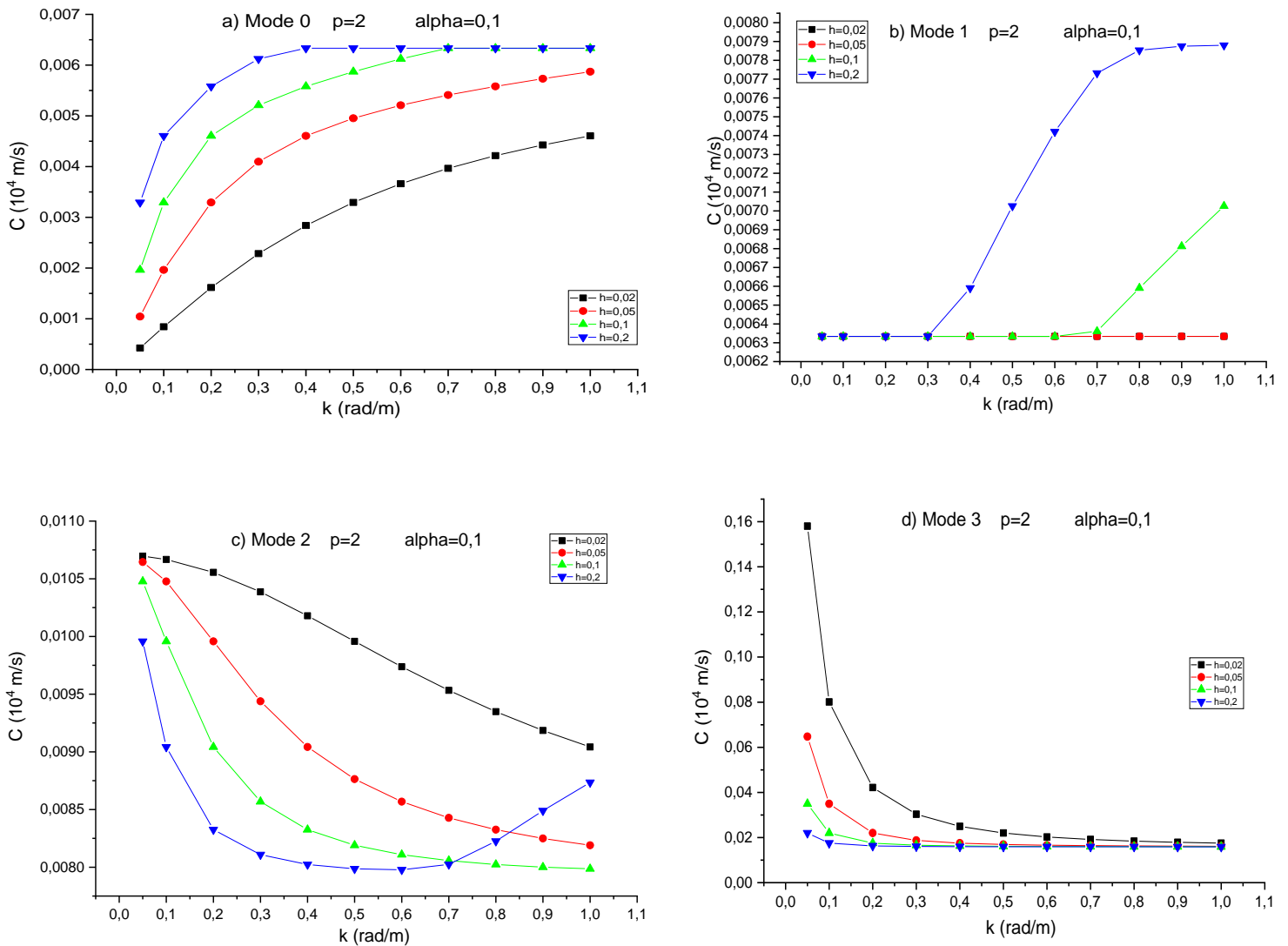


Figure.IV.53 : Influence du rapport d'épaisseur sur les vitesses de phases d'une plaque S-FGM avec un indice de porosité égale 0.1

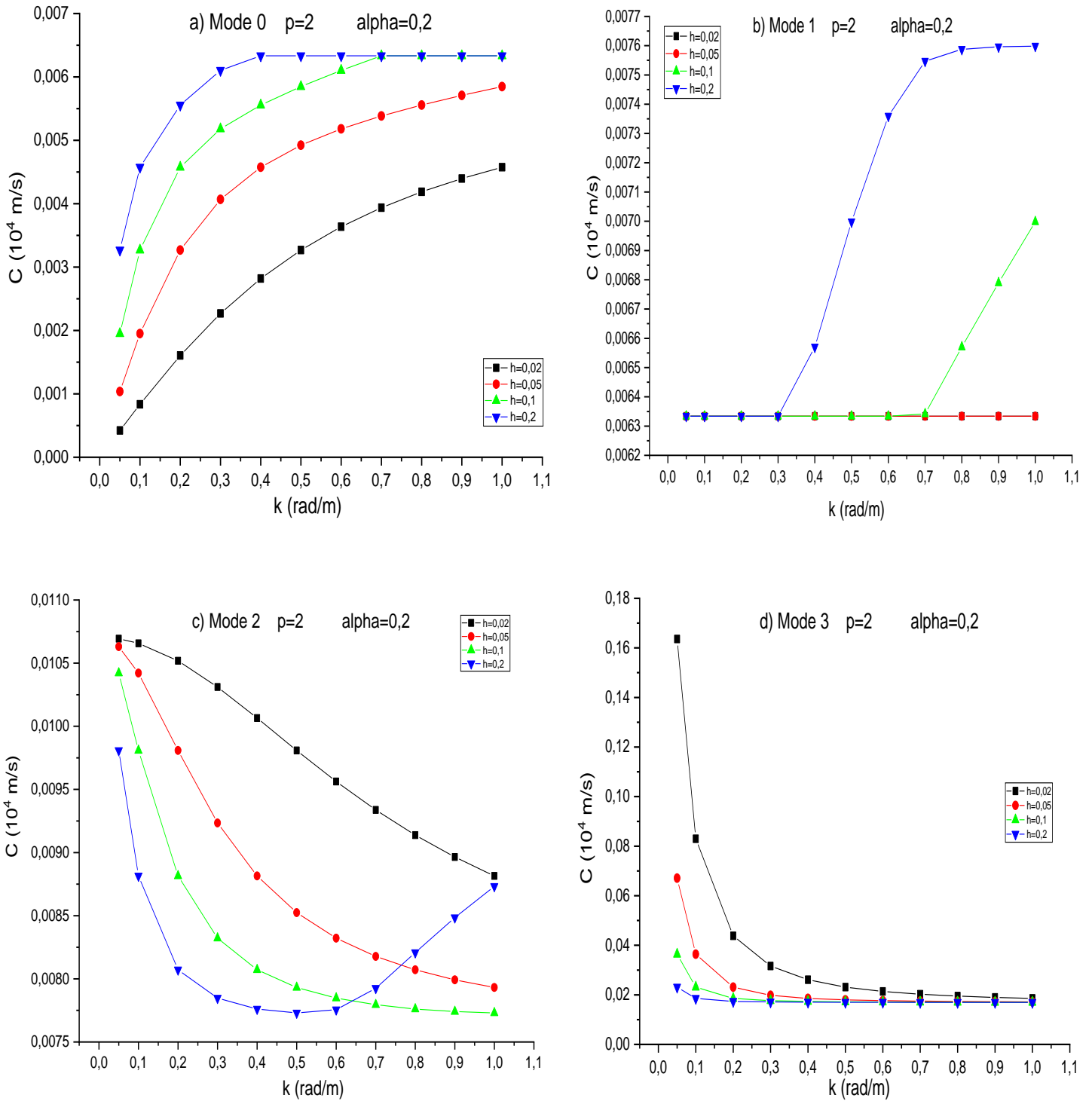


Figure.IV.54 : Influence du rapport d'épaisseur sur les vitesses de phases d'une plaque S-FGM avec un indice de porosité égale 0.2

### **IV.3. Conclusions**

Dans ce chapitre, l'étude de la propagation des ondes dans les plaques épaisses sigmoïdes à graduation fonctionnelle en utilisant trois fonctions TSDT, SSDT, et ESDT a été comparée avec notre nouvelle théorie de déformation à cisaillement supérieur (HSDT).

Nous avons utilisé le principe de Hamilton pour dériver les équations des mouvements pour les plaques imparfaites à gradation fonctionnelle sigmoïde. Une étude approfondie a été présentée dans la section résultats et validation.

La distribution de la porosité a été considérée comme ayant une distribution uniforme et non uniforme sur les plaques S-FGM avec les trois fonctions de forme linéaire, logarithmiques et exponentielles.

A partir des résultats obtenus, on peut conclure que les courbes de fréquence et la vitesse de phase sont considérablement influencées par l'indice de loi de puissance et l'indice de porosité dans les plaques S-FGM avec une excellente convergence du modèle actuel de distribution de porosité avec d'autres modèles dans la littérature.

Enfin, on peut voir l'efficacité de la méthode actuelle pour prédire la propagation des ondes dans des plaques S-FGM imparfaites et parfaites.

En conclusion, on peut dire que le modèle proposé est simple pour la résolution de la propagation des ondes dans les plaques S-FGM.



## CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES

---

### *Conclusion générale et perspectives*

Dans cette thèse Nous avons présenté un travail de recherche analytique et numérique pour l'analyse des plaques sigmoïde fonctionnellement graduées S-FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Deux objectifs ont été visés à travers cette thèse. Le premier consiste à une analyse de la propagation des ondes dans les plaques sigmoïdes parfaite avec quatre épaisseurs et quatre fonction TSDT, SSDT, HSDT et ESDT. Le second objectif de cette thèse consiste à une étude de l'effet de la porosité sur les caractéristiques mécanique de la propagation des ondes d'une plaques sigmoïdes poreuse fonctionnellement graduée avec trois formes de distribution, tous ce travail fait avec une porosité uniforme et non uniforme avec la fonction (SSDT).

A travers l'interprétation des graphes et résultats obtenu nous avons une vision très claire sur le comportement ou la réaction de la propagation des ondes dans les plaques S-FGM.

Dans ce travail, Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude soit entre les fonctions, la forme de distribution de la porosité ont montrées que les résultats obtenus pour l'analyse de comportement des plaques S-FGM parfaits et poreuses sont presque identiques.

Il peut être conclu que la théorie utilisée a montré sa précision pour la détermination des caractéristiques de la propagation des ondes dans les plaques S-FGM ainsi le nouveau modèle mathématique qui a été développé par la reformulation de la règle de mélange pour incorporer la phase de porosité dans les propriétés du matériau couvre très bien les phases de porosité dans les plaques S-FGM imparfaits. Et que l'influence de l'indice de la fraction volumique du matériau, le rapport d'épaisseur, le nombre d'onde et l'indice de porosité sur les fréquences et la vitesse de phase de la propagation des ondes dans la plaque S-FGM sont significatifs.

En effet, on constate que pour un même nombre d'ondes, les fréquences de la propagation des ondes et les vitesses de phase dans la plaque parfaite sont maximales pour les plaques homogènes en céramique et réduites quand la plaque est en S-FGM pour les modes de vibration  $M_0$  et  $M_2$ , On peut conclure que les fréquences naturelles augmentent quand la raideur du matériau augmente, ceci est expliquer par l'indice de puissance matérielle.

- La fréquence naturelle et la vitesse de phase du mode fondamentale diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance matériel ;

- Pour le mode fondamental les fréquences et les vitesses de phase d'une plaque S-FGM sont supérieurs à ceux de la plaque P-FGM avec un indice de puissance matériel ( $p=2$ ).

La fréquence de la propagation d'ondes est largement affectée par la présence de la porosité lorsque l'indice de porosité ( $\alpha$ ) soit élevé et surtout pour le mode d'onde fondamentale. En effet, les fréquences sont diminuées lorsque la porosité augmente ; de même pour la vitesse de phase que soit l'indice matériel ; Par contre, pour le 4<sup>ème</sup> mode de vibration c'est tout à fait le contraire ; pour le mode d'onde de flexion, on constate aussi que lorsque l'indice de loi de puissance est supérieur à 2, la fréquence et la vitesse de phase diminuent avec l'augmentation de la porosité contrairement au cas où l'indice de loi de puissance est inférieur à 1.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'appliquer la présente théorie :

- Tenir compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur
- Introduisant l'effet des différentes approches des fondations élastiques.
- Etude de l'effet d'hygrothermique sur le comportement mécanique des structures FGM
- Développe un modèle élément fini pour étudier le comportement des structures FGM en introduisant des théories de déformation par cisaillement et l'effet de stretching.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- Afaq 2003 Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). —Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- Ait Amar et al. 2014 Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- Ait Atmane et al. 2010 Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", *Int J Mech Mater Des*, 6, 113–121.
- Ait Atmene 2011 Ait Atmane Hassen .2011. Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement Thèse de doctorat de l’Universite Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes 2004
- Ait Atmane et al. 2015 Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R.(2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(2), 369-384.
- Ait Atmane et al.2016 Ait Atmane, H., Bedia, E.A.A., Bouazza, M., Tounsi, A. and Fekrar, A. (2016), “On the thermal buckling of simply supported rectangular plates made of a sigmoid functionally graded Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> based material”, *Mechanics of Solids*. 51(2), 177-187.
- Ait yahia, 2015 Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higherorder shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6),1143-1165.
- Akavci, 2014 Akavci, S.S. (2015), “An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”, *Compos. Struct.*, 108, 667-676.
- Akavci, S.S. 2015 “An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”. [éd.] *Compos. Struct.* 2015, Vol. 108, pp. 667-676.
- Akbas SD (2017) Akbas SD. Vibration and static analysis of functionally graded porous plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics* 2017; 3(3): 199-207
- Auld, 1973 Auld, B.A., *Acoustic fields and waves in solids.*, A Wiley-Interscience publication, 1973,vol. II, 414p.
- Al-Basyouni 2015 Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos. Struct.*, 125, 621-630.
- AYACHE Belqassim, 2019 Analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé
- Baccouche, 2013 Yousra Baccouche «Caractérisation non linéaire de l’endommagement des matériaux composites par ondes guidées» Thèse de Doctorat de l’université du Maine, Académie de Nantes, 2013
- Bakora A., 2015 “Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations”. [éd.] *Int. J. Struct. Eng. Mech.* 2015, Vol. 56, 1, pp. 85-106.
- Beldjelili et al. 2015 Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Hygrothermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory”, *Smart Struct. Syst., Int. J.*, 18(4), 755-786
- Benachour et al. 2011 Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, *Compos. Part B*, 42(6), 1386-1394.
- Benadouda et al. 2017 Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2017), —An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities, *Earthquakes and Structures*, 13(3),255-265.
- BENAHMED Abdelkrim, 2018 Contribution à l’étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre réduit de variable
- Bennai, 2015 Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal

- deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(3), 521-546
- Bennai R, 2016 Riadh BENNAI « CONTRIBUTION A L’ETUDE DE LA VIBRATION ET LA STABILITE DES STRUCTURES FONCTIONNELLEMENT GRADUEES » Thèse de Doctorat de Université HASSIBA BEN BOU ALI de CHLEF 2016.
- Berthelot, 2012 Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 5<sup>ème</sup> Edition, Lavoisier ,2012
- Bever M.B., 1972 Bever M.B., and Duwez P.E., 1972. "Gradients in composite materials". *Mater. Sci. Eng.* 1972, Vol. 10, 1-8.
- Boch et al(1986) Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa casting of AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated composites, 1986.
- Boukhari A.et al., 2016 Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 57(5), 837-859
- Bowles et al., 1992 K.J. Bowles and S. Frimpong, ‘Voids effects on the interlaminar shear strength of unidirectional graphite-fiber reinforced composites’, *Journal of Composite Materials*, Vol 26, pp 1487-1509, 1992.
- Bresse, 1859 Bresse, J.A.C. (1859), “Cours de Mécanique Applique”, MalletBachelier, Paris, France
- Chen, 2007 Chen, W.Q., Wang, H.M. and Bao, R.H. (2007), “On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate”, *Compos. Struct.*, 81, 233-242.
- Chu 1999 Chu, C. Zhu, J. Yin, Z. and Wang, S. Hydroxyapatite-Ti functionally graded biomaterial fabricated by powder metallurgy, *Materials Science and Engineering*, A217, 95-100, Elsevier Science Limited, 1999.
- Chung et chi, 2003 Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), —Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- Costa et al, 2001 M.L. Costa, S.F. Müller de Almeida, M.C. Rezende, ‘The influence of porosity on the ILSS of carbon/epoxy and carbon/bismaleimide fabric laminates’, *Composites Science and Technology*, Vol. 61; pp 2101-2108; 2001
- Cranch , 1956 Cranch, E.T. and Adler, A.A. (1956), “Bending vibration of variable section beams”, *J. Appl. Mech.*, 23(1), 103-108
- D. A. Davids 1989 D. A. Davids, P. Y. Wu, and D. Chizhik, Restricted Aperture Acoustic Microscope Lens for Rayleigh Wave Imaging, *Appl. Phys. Lett.*, 54, (1989), p. 1639.
- Delale et Erdogan 1983 Delale. F, Erdogan. F. (1983), —The crack problem for a non-homogeneous planel. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.
- Draiche K.et al., 2014 for free vibration of rectangular composite plates with patch mass”, *Steel Compos. Struct.*, 17(1), 69-81.
- Ebrahimi , 2016a Farzad, E. and Reza Barati, M. (2016a), “Wave propagation analysis of quasi-3D FG nanobeams in thermal environment based on nonlocal strain gradient theory”, *Appl. Phys. A*, 122(9), 843. DOI: doi.org/10.1007/s0033
- Ebrahimi , 2016b Farzad, E., Barati, R.M. and Dabbagh, A. (2016b), “A nonlocal strain gradient theory for wave propagation analysis in temperature-dependent inhomogeneous nanoplates”, *Int. J. Eng. Sci.*, 107, 169-182.
- FOURN Hocine, 2019 Analyse de la vibration libre et de la propagation des ondes dans les structures FGM
- F.Watari et al. 2004 Watari, F., Yokoyama, A., Omori, M., Hirai, T., Kondo, H., and Uo, M., et al, "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application", *Compos Sci Technol*, vol.64 , pp. 893– 908, (2004).
- Gupta et Talha. 2018 Gupta, A. and Talha, M. (2018), “Static and Stability Characteristics of Geometrically Imperfect FGM Plates Resting on Pasternak Elastic Foundation with Microstructural Defect”, *Arabian Journal for Science and Engineering*. 43(9), 4931-4947.
- Hachemi et al. 2017 Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M.S.A., Bourada, M., Tounsi, A. and Mahmoud, S. (2017), “A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations”, *STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES*. 25(6), 717-726.

- Han et al. 2001 Han, X., Liu, G.R., Xi, Z.C. and Lam, K.Y. (2001), "Transient responses in a functionally graded cylinder", *Int. J. Solids Struct.*, 38, 3021-3037.
- Han et Liu 2002 Han, X., Liu, G.R. (2002), "Effects of SH waves in a functionally graded plate", *Mechanics Research Communications*, 29, 327–338.
- Han et al. 2002 Han, X., Liu, G.R. and Lam, K.Y. (2002), "Transient waves in plates of functionally graded materials", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 52, 851-865.
- Hebali et al, 2014 Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., Adda Bedia, E.A. (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 140, 374 – 383
- Head, 1996 Head, P.R, *Advanced composites in civil engineering- a critical overview at the high interest, low usage stage of development*, (1996), pages (3-15).
- Jahwari et Naguib, 2016 Jahwari F and Naguib HE. Analysis and homogenization of functionally graded viscoelastic porous structures with a higher order plate theory and statistical based model of cellular distribution. *Applied Mathematical Modelling* 2016;40(3):2190- 2205.
- Jahwari et Naguib, 2016 Jahwari F and Naguib HE. Analysis and homogenization of functionally graded viscoelastic porous structures with a higher order plate theory and statistical based model of cellular distribution. *Applied Mathematical Modelling* 2016;40(3):2190- 2205.
- Jomehzadeh E.et al., 2009 Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashpour, S.R. 2009. "An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates". *Materials & Design*. 2009, Vol. 30, 3679-3685.
- Kardos et al., 1983 J.L. Kardos, M.P. Dudukovic, E.L. Mc Kagne and M.W. Lehman, 'Void formation and transport during composite laminate processing: an initial model Framework', *Composite Materials: Quality Assurance and Processing*, ASTM STP 797, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA, pp 96-109, 1983.
- Koizumi 1992 M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- Koizumi 1993 "The concept of FGM Ceramic transactions", *Funct Grad Mater*, 34, 3–10
- Koizumi, 1995 Koizumi, M., Niino, M.: Overview of FGM research in Japan. *MRS Bull.* 20(1995), 19–24 (1995)
- Koizumi 1997 Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites Part B*, 1997, Vol.28, pp. 1–4.
- Kieback et al, 2003 Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003
- Larbi Chaht 2015 Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 425-442.
- Ledru, 2009 Y. Ledru 'Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques 'Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 242p, 2009.
- Liu et al., 2006 (a) L. Liu, B. Zhang, D. Wang, Z. Wu, 'Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates', *Composite Structure*, Vol. 73, pp 303-309, 2006.
- L. Lu et al. 2011 Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V. and Villain, G., "Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer", *NDT & E International*, Volume 44, Issue 2, March 2011, Pages 169-177.
- Malek zadeh , 2009 Malekzadeh, P. (2009), "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations", *Compos Struct*, 89, 367–373.
- Meradjah M.et al., 2015 "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams". [éd.] *Int. J. Steel Compos. Struct.* 2015, Vol. 18, 3, pp. 793-809.
- Merdas Abde-ELGHANI, 2005 Utilisation du TFC dans la réparation et le renforcement des poutres en BA
- Marin.L, 2003 L. Marin, "Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two dimensional functionally graded materials," *Int J Solids Struct*, vol. 42, pp. 4338-4351, 2005
- Miyamoto et al. 1999 Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al. (1999), "Functionally Graded Materials Design". Processing and Applications.

- Mouaici et al, 2016 Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind Struct.*, 22(4), 429-454
- Müller.E et al, 2003 Müller, E., Drašar, C., Schilz, J. and Kaysser, W.A., "Functionally graded materials for sensor and energy applications," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 17-30, (2003).
- Nicolas , 2010 cours« ondes & vibrations» polytech Marseille 2009 /2010.
- O. Xeridat 2011 Olivier Xeridat, Etude expérimentale de la propagation, de la diffusion et de la localisation des ondes de Lamb. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, France 2011.
- Okamura, 1991 H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,1991.
- Olivier et al., 1995 P. Olivier, J.P. Cottu et B. Ferret, 'Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates', *Composites*, Vol. 26 N°7, p 509, 1995.
- Olivier, 1994 P. Olivier, 'Etude des contraintes résiduelles de cuisson dans les stratifiés carbone / époxy en relation avec les cycles de polymérisation', *Thèse de doctorat*, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 270p, 1994.
- Ould Larbi 2013 Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), —An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421 – 433
- W. Pompea et al, 2003 Pompea, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., Gelinsky, M., Greil, P., Hempele, U., Scharnweber, D., Schulte Functionally graded materials for biomedical applications, *Materials Science and Engineering*, vol. A362, pp. 40–60, (2003).
- Reddy 1997 Reddy. J.N., Wang. C.M., Lee. K.H. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *International Journal of Solids and Structures* 34 (26), 3373–338, 1997.
- Reedy, 2000 Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 47(1-3), 663-684.
- Reedy, 2002 Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2002), "Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal planform", *Int. J. Mech. Sci.*, 44(5), 967-985.
- Reissner , 1945 Reissner.E (1945). "The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77.
- Reissner, 1975 Reissner. E, (1975). —On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- Riad BENZAID, 2015 Riad BENZAID Habib Abdelhak MESBAH Nasr-eddine CHIKH, « Contribution à l'Étude des Matériaux Composites Dans le Renforcement et la Réparation Des Éléments Structuraux Linéaires en Béton ».
- S. Bouhedja, 2000 Bouhedja S. Etude des vitesses des ondes de surface et de l'atténuation du mode de rayleigh via un capteur fonctionnant en champ noir ; Thèse de doctorat d'état en physique, Université mentouri constantine(2000).
- Sherwood, 1958 Sherwood, J.C., .Propagation in an infinite elastic plate., *J. Acoust. Soc. Am*, 1958, vol. 30, pp. 979-984.
- Schaefer, 1994 D.W. Schaefer, 'Engineered porous materials', A publication of the Materials Research Society : *Bulletin MRS*, Vol 19, N°4, pp 14-17, 1994.
- Schoeller, 1955 H. Schoeller, 'Hydrogéologie'. Ecole Nationale Supérieur du Pétrole, Technip, Paris, 2 vol, 443 p, 1955.
- Şimşek et Aydın ,2012 Simsek, M, Kocaturk, T and Akbas, SD. (2012), "Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load", *Composite Structures*, 94(8), 2358-2364.
- S. Matsuo et al, 2001 Matsuo, S., Watari, F. and Ohata, N. , "Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root", *Dental Mater J*, vol.20(4), pp. 257–274, (2001).
- Sun et Luo ,2011a Sun, D. and Luo, S.N. (2011a), "The wave propagation and dynamic response of rectangular



- functionally graded material plates with completed clamped supports under impulse load”, *Eur. J. Mech. – A/Solids*, 30, 396-408.
- Shen et Wang 2012 Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates”, *Composite Structures*. 94(7), 2197-2208.
- Tang et al., 1987 J.M. Tang, W.I. Lee and G.S. Springer, ‘Effects of cure pressure on resin flow, voids and mechanical properties’, *Journal of Composite Materials*, Vol 21, p 421- 440, May 1987.
- Tounsi 2013 Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerop. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Tounsi et al ,2016 Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Bessaim, A. (2016), “A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547 - 565
- Vel et Batra, 2004 Vel, S.S. and Batra, R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.*, 272, 703-730.
- Viktorov, 1967 Viktorov, I.A., .Rayleigh and Lamb waves,. Plenum press New York, 1967, 121p.
- VIZUETE, J.M, 2000 VIZUETE, J.M. « Techniques et systèmes de renfort des structures en béton » January 2000.
- W.L.Bond 1975 W. L. Bond, C. C. Culter, R. A. Lemons and C. F. Quate, Dark Field and Stereo Viewing with the Acoustic Microscope, *Appl. Phys. Lett.*, 27, (1975), p. 270
- Watari et al 2004 Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Composites Science and Technology*. 2004, Vol. 64, 893-908.
- Wattanasakulpong et al. 2012 Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M. (2012), —Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validationl, *Mater. Des.*, 36, 182-190.
- Wattanasakulpong et al. 2014 Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2014), —Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porositiesl, *Aerop. Sci. Technol.*,32(1), 111-120.
- Worlton, 1957 Worlton, D.C., .Ultrasonic testing with Lamb waves,. *Non destructive testing* 15, 1957, pp. 218- 222.
- Wisnom et al., 1996 M.R. Wisnom, T. Reynolds and N. Gwilliam, ‘Reduction in ILSS by discrete and distributed Voids’, *Composites Science and Technology*, 56, pp 93-101, 1996.
- Xue Z., Hutchinson JW, 2003 Xue Z., Hutchinson JW “Preliminary assessment of sandwich plates subject to blast loads”. *Int J Mech Sci*, 45: 687 – 705, (2003).
- Yokota,1978 M.J. Yokota, ‘Process controlled curing of resin matrix composites’, *Sample Journal*, p11-17, July/Augus, 1978.
- Yoshida et al., 1986 H. Yoshida, T. Ogasa and R. Hayashi, ‘Statistical approach to the relationship between ILSS and void content of CFRP’, *Composites Science and Technology*, Vol 25, pp 3-18, 1986.
- Yoshihisa, 2004 Yoshihisa Uchida. Proprieties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications, 39-51-B, Vol. 39-B, 2004.
- Younsi et al.2018 Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates”, *GEOMECHANICS AND ENGINEERING*. 14(6), 519-532.
- Zenkour 2006 Zenkour, A.M. (2006), “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Appl. Math. Model.*, 30(1), 67-84.
- [1] [http://www.mdacomposites.org/application au génie civil](http://www.mdacomposites.org/application%20au%20g%C3%A9nie%20civil)
- [2] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde#:~:text=Dans%20les%20instruments%20de%20musique,%20%20doigt%20\(guitare\).](https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde#:~:text=Dans%20les%20instruments%20de%20musique,%20%20doigt%20(guitare).)
- [3] <https://www.gralon.net/articles/materiel-et-consommables/materiels-industriels/article-la-fibre-de-verre---presentation-et-applications-3166.htm>
- [4] [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/claude\\_saintblanquet/synophys/31propa/31propa.htm](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/claude_saintblanquet/synophys/31propa/31propa.htm)
- [5] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Vitesse\\_d%27une\\_onda](https://fr.wikipedia.org/wiki/Vitesse_d%27une_onda)