

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Djilali Liabes**



Résumé de la thèse :

**Connexions contravariantes sur les groupes de  
Lie-Poisson**

par **Mohamed Amine BAHAYOU**

**Jury**

<b>Professeur</b>	<b>Université d'origine</b>	<b>Fonction</b>
M. Benchohra,	Université Djillali Liabes, Bel Abbes	Président du jury.
M. Belkhefha,	Université Mustapha Stambouli, Mascara.	Directeur de thèse
M. Boucetta,	Université Cadi Ayyad. Marrakech	Co-directeur de thèse.
P. Monnier,	Université Paul Sabatier, Toulouse	Examineur.
M. Djaa,	Université de Saïda	Examineur.
M. Lakmeche,	Université Djillali Liabes, Bel Abbes	Examineur.

# Connexions contravariantes sur les groupes de Lie-Poisson

## Résumé

Ce travail est consacré à l'étude d'une classe de groupes de Lie-Poisson à métriques invariantes à gauche. Plus précisément, les triplets  $(G, \pi, \langle, \rangle)$ , où  $G$  est un groupe de Lie simplement connexe,  $\pi$  est un tenseur de Poisson multiplicatif et  $\langle, \rangle$  est une métrique riemannienne invariante à gauche telles que les conditions de Hawkins sont satisfaites. Les conditions de Hawkins sont des conditions nécessaires, pour la déformation de l'algèbre graduée des formes différentielles d'une variété riemannienne. Ces conditions proviennent de la déformation non commutative du triplet spectral qui décrit la variété.

Le résultat principal de la thèse est l'équivalence entre le problème géométrique de classification des groupes de Lie-Poisson riemanniens qui vérifient les conditions de Hawkins et le problème algébrique de classification des structures de bigèbres de Lie sur les algèbres de Milnor qui vérifient certaines conditions.

Exploitant le fait que les structures de bigèbres de Lie sur les algèbres de Milnor, dans certaines situations, peuvent être calculées, On a déterminé les groupes de Lie-Poisson riemanniens satisfaisant les conditions de Hawkins dans le cas linéaire, dans le cas de Heisenberg, dans le cas triangulaire et en petites dimensions (jusqu'à la dimension 5). Le cas général reste un problème ouvert.

**Mots clefs :** Groupes de Lie-Poisson, connexions contravariantes, métacourbure.

# Contravariant connections on Poisson-Lie groups

## Abstract

This work is devoted to the study of a class of Poisson-Lie groups endowed with left invariant metrics. The triples  $(G, \pi, \langle, \rangle)$  are considered, where  $G$  is a simply connected Lie group,  $\pi$  is a multiplicative Poisson tensor and  $\langle, \rangle$  is a left invariant riemannian metric such that Hawkins conditions are satisfied. Hawkins conditions are necessary conditions for the deformation of the graded algebra of differential forms of a riemannian manifold. These conditions come from the deformation of the noncommutative spectral triple describing the manifold. The main result of this thesis is the equivalence between, on one hand, the geometric problem of classifying riemannian Poisson-Lie groups that satisfy the conditions of Hawkins and, secondly, the problem of classifying algebraic structures of Lie bialgebras on Milnor algebras that satisfy certain conditions. Exploiting the fact that the structures of Lie bialgebras on Milnor algebras, in certain situations, can be calculated, we determine riemannian Poisson-Lie groups that satisfy Hawkins in the linear case, in the case of Heisenberg in the triangular case and in low dimensions (up to dimension 5). The general case remains an open problem.

**Keywords :** Poisson-Lie groups, contravariant connections, metacurvature.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Bah-Bou1] M.A. Bahayou & M. Boucetta, *Multiplicative noncommutative deformations of left invariant riemannian metrics on Heisenberg groups*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 791–796.
- [Bah-Bou2] M.A. Bahayou & M. Boucetta, *Metacurvature of riemannian Poisson-Lie groups*, J. Lie. Theo. 19 (2009), no., 439-462.
- [Haw1] E. Hawkins, *Noncommutative rigidity*, Commun. Math. Phys. 246 (2004), 211-235.
- [Haw2] E. Hawkins, *The structure of noncommutative deformations*, J. Diff.Geo. 77 (2007), 385-424.
- [Mil] J. Milnor, *Curvature of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. in Math. 21 (1976), 283-329.