



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DJILALI LIABES  
SIDI BEL ABBÉS  
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



## THÈSE

Pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité : Génie Mécanique  
option : Mécanique des matériaux

Présentée par

**Mr :ABBAS Soufiane**

**Analyse du comportement mécanique des structures  
composites en utilisant une cinématique raffinée avec un  
nombre réduit de variables**

Soutenue le : 24 /12 /2020 devant le jury composé de :

**Président :**

M.BOUCHOUICHA Benattou Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

**Examineurs :**

M.TOUNSI Abdelouahed Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

M.YEGHNEM Reda Professeur, Université de Saida.

M.AMARA Khaled Professeur, Centre universitaire de Ain Temouchent

M.BELHAMIANI Mohamed Maître de Conférences Classe A, Centre Universitaire  
de Ain Temouchent.

**Directeur de thèse :**

M.BENGUEDIAB Mohamed Professeur, Université de Sidi Bel Abbès.

*2020-2021*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Généralités sur les matériaux composites</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction :	10
1.2 Renfort :	10
1.2.1 Les fibres de carbone :	11
1.2.2 Les fibres de Kevlar (Aramides) :	11
1.2.3 Les fibres de Verre :	12
1.2.4 Les fibres céramiques :	12
1.3 Matrice :	13
1.3.1 Les matrices Organiques :	14
1.3.2 Les matrices Minérales :	15
1.4 Interface :	16
1.5 Matériaux composites structuraux :	16
1.5.1 Monocouches :	16
1.5.2 Stratifiés :	17
1.5.3 Sandwichs :	18
1.6 Loi de mélange :	18
1.6.1 Fraction volumique :	19
1.6.2 Module longitudinal :	19
1.6.3 Module transversal :	20
1.7 Loi de comportement :	22
1.7.1 Matériau anisotrope :	22
1.7.2 Matériau orthotrope :	22

1.7.3	Matériau monoclinique : . . . . .	23
1.7.4	Matériau transversalement isotrope : . . . . .	23
1.7.5	Matériau isotrope : . . . . .	23
1.8	Les Avantages et Inconvénients des Matériaux Composites : . . . . .	24
1.9	Conclusion : . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Théories des plaques et stratifiés</b>	<b>26</b>
2.1	Cinématique des plaques . . . . .	26
2.1.1	Théorie classique des plaques (CPT ou Love-Kirchhoff) : . . . . .	26
2.1.2	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT ou Reissner-Mindlin) : . . . . .	27
2.1.3	La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé(HSDT) : . . . . .	28
2.2	Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé : . . . . .	29
2.2.1	Application de la théorie d'ordre élevé pour des structures composites : . .	31
<b>3</b>	<b>Étude analytique des plaques composites</b>	<b>33</b>
3.1	Analyse mathématique du problème : . . . . .	33
3.2	Équations Constitutives : . . . . .	35
3.3	Équations d'équilibre : . . . . .	36
3.4	Exemples illustratifs : . . . . .	40
3.4.1	Exemple A : . . . . .	40
3.4.2	Exemple B : . . . . .	41
3.5	Résultats numériques et discussions : . . . . .	43
3.5.1	Exemple 1 : . . . . .	44
3.5.2	Exemple 2 : . . . . .	47
3.5.3	Exemple 3 : . . . . .	49
3.5.4	Exemple 4 : . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Étude numérique des plaques composites</b>	<b>53</b>
4.1	Présentation de la méthode des éléments finis : . . . . .	53
4.1.1	Types d'éléments : . . . . .	54
4.1.2	Type d'élément dans cette étude : . . . . .	55
4.1.3	Maillage : . . . . .	55
4.1.4	Modélisation des plaques composites dans ANSYS : . . . . .	57
4.1.5	Convergence des solutions E.F : . . . . .	58
4.2	Résultats et discussions : . . . . .	58
4.2.1	Exemple 1 : (chargement parabolique) . . . . .	58

---

4.2.2 Exemple 2 : (chargement linéaire) . . . . .	62
<b>Conclusion Générale</b>	<b>64</b>
<b>Annexes</b>	<b>74</b>
Annexe A . . . . .	75
A.1 codes Ansys de l'exemple 1.1 . . . . .	75
A.2 codes Ansys de l'exemple 1.2 . . . . .	82
A.3 codes Ansys de l'exemple 2.1 . . . . .	87
A.4 codes Ansys de l'exemple 2.2 . . . . .	93
Annexe B . . . . .	98
codes Maple : calcul théorique(Reddy) . . . . .	98
Annexe C . . . . .	107
codes Matlab : calcul théorique(Present) . . . . .	107

# Table des figures

1.1	Schéma Général des composites . . . . .	11
1.2	Schéma d'un pli . . . . .	16
1.3	Un stratifié $[0^\circ / -45^\circ / 90^\circ]_s$ . . . . .	17
1.4	Matériau Composite Sandwich. . . . .	18
1.5	Le processus de la Micromécanique. . . . .	18
1.6	Éléments de volume représentatifs typiques soumis a un allongement uniforme longitudinal . . . . .	20
1.7	EVR typique soumis a une contrainte uniforme transversale . . . . .	21
1.8	Un matériau orthotrope a trois plans de symétrie . . . . .	22
2.1	Cinématique de Love-Kirchhoff. . . . .	26
2.2	Cinématique de Reissner-Mindlin. . . . .	27
2.3	Cinématique de la théorie d'ordre supérieur. . . . .	29
3.1	Géométrie et système de coordonnées d'une plaque stratifiée a couches croisées antisymétriques. . . . .	33
3.2	Plaque stratifiée simplement appuyée sous une charge parabolique transversale. . . . .	40
3.3	Plaque stratifiée simplement appuyée sous une charge linéaire transversale. . . . .	41
3.4	Variation dans le plan de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ a travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée ( $0^\circ/90^\circ$ ) soumise a une charge parabolique pour un rapport d'épaisseur 4 a( $x = a/2, y = b/2, z$ ) . . . . .	46
3.5	Variation de la contrainte transversale de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$ a travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée ( $0^\circ/90^\circ$ ) soumise a une charge parabolique pour un rapport d'épaisseur 4 a( $x = 0, y = b/2, z$ ) . . . . .	47
3.6	Variation dans le plan de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ a travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée ( $0^\circ/90^\circ$ ) soumise a une charge suivant une ligne pour un rapport d'épaisseur 4 a( $x = a/2, y = b/2, z$ ) . . . . .	49

---

3.7	Variation de la contrainte transversale de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$ a travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée ( $0^\circ/90^\circ$ ) soumise a une charge suivant une ligne pour un rapport d'épaisseur 4 à ( $x = a/2, y = 0, z$ ) . . . . .	49
4.1	Maillage typique du modèle 3-D . . . . .	56
4.2	Charges linéaires transverses à $x=a/2$ . . . . .	57
4.3	Conditions limites . . . . .	58
4.4	Distribution de la contrainte $\sigma_{xx}$ pour une plaque rectangulaire $[0/90]$ sous un chargement parabolique transversal. . . . .	59
4.5	Déflexion $W$ pour une plaque rectangulaire $[0/90]$ sous un chargement parabolique transversal. . . . .	60
4.6	Contour de la contrainte $\sigma_{xx}$ et le déplacement $U_z$ d'une plaque rectangulaire $[0/90]$ , ( $a/h=4$ ) . . . . .	60
4.7	Contour de la contrainte $\sigma_{xx}$ et le déplacement $U_z$ d'une plaque rectangulaire $[0/90]$ , ( $a/h=10$ ) . . . . .	61
4.8	Contour de la contrainte $\sigma_{xx}$ et le déplacement $U_z$ d'une plaque rectangulaire $[0/90]$ , ( $a/h=100$ ) . . . . .	61
4.9	Distribution de la contrainte $\sigma_{xx}$ pour une plaque rectangulaire $[0/90]$ avec un chargement linéaire à $x=a/2$ . . . . .	62
4.10	La déflexion $W$ pour une plaque rectangulaire $[0/90]$ avec un chargement suivant une ligne droite à $x=a/2$ . . . . .	63
4.11	Contour de la contrainte $\sigma_{xx}$ et le déplacement $U_z$ d'une plaque rectangulaire $[0/90]$ , ( $a/h=4$ ) . . . . .	63
4.12	Contour de la contrainte $\sigma_{xx}$ et le déplacement $U_z$ d'une plaque rectangulaire $[0/90]$ , ( $a/h=10$ ) . . . . .	64
4.13	Contour de la contrainte $\sigma_{xx}$ et le déplacement $U_z$ d'une plaque rectangulaire $[0/90]$ , ( $a/h=100$ ) . . . . .	64

# Liste des tableaux

1.1	Les propriétés Mécaniques de Différentes Fibres . . . . .	13
1.2	Caractéristiques des résines thermodurcissables . . . . .	14
1.3	Caractéristiques des résines thermoplastiques . . . . .	15
2.1	Le champ de déplacement des différentes théories des plaques . . . . .	32
3.1	Comparaison du déplacement dans le plan $\bar{u}$ , déplacement transversal $\bar{w}$ , contraintes normales dans le plan $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ et la contrainte de cisaillement dans le plan $\bar{\tau}_{xy}$ pour une plaque stratifiée carrée à deux couches ( $0^\circ / 90^\circ$ ) simplement appuyée soumise a un chargement parabolique . . . . .	45
3.2	Comparaison des contraintes de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ pour une plaque stratifiée carrée à deux couches ( $0^\circ / 90^\circ$ ) simplement appuyée soumise a un chargement parabolique . . . . .	46
3.3	Comparaison du déplacement dans le plan $\bar{u}$ , déplacement transversal $\bar{w}$ , contraintes normales dans le plan $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ et la contrainte de cisaillement dans le plan $\bar{\tau}_{xy}$ pour une plaque stratifiée carrée à deux couches ( $0^\circ / 90^\circ$ ) simplement appuyée soumise a un chargement suivant une ligne . . . . .	48
3.4	Comparaison des contraintes de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ pour une plaque stratifiée carrée à deux couches ( $0^\circ / 90^\circ$ ) simplement appuyée soumise a un chargement suivant une ligne . . . . .	48
3.5	Comparaison du déplacement dans le plan $\bar{u}$ , déplacement transversal $\bar{w}$ , contraintes normales dans le plan $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ et la contrainte de cisaillement dans le plan $\bar{\tau}_{xy}$ pour une plaque stratifiée carrée à trois couches ( $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) simplement appuyée soumise a un chargement parabolique . . . . .	50
3.6	Comparaison des contraintes de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ pour une plaque stratifiée carrée à trois couches ( $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) simplement appuyée soumise à un chargement parabolique . . . . .	51

---

3.7	Comparaison du déplacement dans le plan $\bar{u}$ , déplacement transversal $\bar{w}$ , contraintes normales dans le plan $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ et la contrainte de cisaillement dans le plan $\bar{\tau}_{xy}$ pour une plaque stratifiée carrée à trois couches ( $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) simplement appuyée soumise à un chargement suivant une ligne . . . . .	52
3.8	Comparaison des contraintes de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ pour une plaque stratifiée carrée à trois couches ( $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) simplement appuyées soumise à un chargement suivant une ligne . . . . .	52



# symboles

$x, y, z$  : Cordonnées cartésiennes.

$E$  : Le module de Young.

$E_{ij}$  : Module de Young suivant la direction  $i=1, 2, 3$ .

$E_L$  : Module de Young longitudinal.

$E_T$  : Module de Young transversal.

$E_f$  : Module de Young des fibres.

$E_m$  : Module de Young de matrice.

$G$  : Module de cisaillement dans le plan  $(x, z)$ .

$G_{ij}$  : Module de cisaillement dans le plan  $(i, j)$  ( $i, j= 1, 2, 3$ ).

$G_{LT}$  : Module de cisaillement dans le plan  $(L, T)$ .

$\nu$  : Le coefficient de Poisson.

$\nu_{LT}$  : Coefficient de poisson dans le plan  $(L, T)$ .

$\overline{Q}_{ij}^k$  : Les constantes de rigidité du matériau dans le repère local du stratifié.

$\overline{Q}$  : Les constantes de rigidité du matériau dans le repère principal du stratifié.

$\theta_k$  : L'angle formé par les axes du repère principal des stratifiés avec les axes du repère local de chaque couche.

$\rho$  : La masse volumique.

$a$  : Longueur de la plaque suivant la direction de  $x$ .

$b$  : Largeur de la plaque suivant la direction de  $y$ .

$h$  : L'épaisseur de la plaque suivant la direction de  $z$ .

$a/h$  : L'élancement de la plaque.

$A$  : Aire d'une plaque (surface supérieure).

$V$  : Volume de la plaque.

$V_f$  : Fraction volumique de matrice.

$V_m$  : Fraction volumique de fibre.

$u_0, v_0, w_0, \phi_z$  : Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

$u, v, w$  : Les déplacements dans les directions  $x, y, z$ .

$K_1, K_2$  : Les constantes dépendent de la géométrie.

---

$f(z)$  : fonction de forme représentative qui désigne la distribution de la contrainte de cisaillement ou de la déformation transversale à travers l'épaisseur.

$g(z)$  : La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à  $z$ .

$n$  : Le nombre de couches de la plaque en composites stratifiées (degré d'orthotropie).

$\partial$  : Dérivée partielle.

$i, j$  : Sont des nombres naturels.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  : Contraintes normales.

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  : Les contraintes de cisaillement.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  : Déformation dans les directions  $x, y$  et  $z$ .

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  : Déformations de distorsion.

$q(x)$  : Une charge mécanique transversale distribuée.

$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$  : Efforts normaux et tranchants suivant les axes  $x, y$  et  $z$  par unité de longueur.

$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$  : Moments de flexion et de torsion par unité de longueur.

$S_{xz}^s, S_{yz}^s, M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$  : Moment supplémentaire du au cisaillement transverse par unité de longueur.

$\{X\}$  : Le vecteur des déplacements généralisés.

$\{F\}$  : Le vecteur des efforts généralisés.

$\{ \}$  : Vecteur colonne.

$\{\Delta\}$  : Vecteur des inconnues.

$[K]$  : Matrice de rigidité.

$\delta$  : Opérateur variationnel.

$\delta_u, \delta_v, \delta_w$  : Champ virtuel de déplacement.

$\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z$  : Champ de déformation transversal virtuel.

$A_{ij}$  : Les constantes de la rigidité en membrane.

$B_{ij}$  : Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-flexion/torsion.

$B_{ij}^s$  : Les constantes de la rigidité de couplage en membrane-cisaillement.

$D_{ij}$  : Les constantes de la rigidité en flexion.

$D_{ij}^s$  : Les constantes de la rigidité de couplage en flexion-cisaillement.

$H_{ij}^s$  : Les constantes de la rigidité en cisaillement.

$E_1/E_2$  : Rapport d'orthotropie de la plaque en composite stratifiée.

$a/h$  : Rapport de la longueur sur l'épaisseur de la plaque.

$a/b$  : Rapport de la longueur sur la largeur de la plaque.

$b/h$  : Rapport de la largeur sur l'épaisseur de la plaque.

$\sigma_{ij}$  : Tenseur de contraintes.

$\varepsilon_{ij}$  : Tenseur de déformations.

# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire LMSR & LMH, de l'université de Sidi Bel abbés. Son achèvement doit tenir compte des aides, des conseils, des encouragements et des sentiments conviviaux de son ensemble du personnel.

Je tiens à remercier en premier lieu, et tout particulièrement mon directeur de thèse, M. BENGUEDIAB Mohamed qui a accepté d'encadrer cette thèse et qui a suivi de près mon travail avec beaucoup de patiences. Ses soutiens permanents et ses passions de recherche m'encouragent à surmonter les difficultés rencontrées durant la thèse.

Je remercie M. BOUCHOUICHA Benattou d'avoir accepté d'être le président de mon jury. Je remercie sincèrement M. TOUNSI Abdelouahed pour ces conseils qui m'ont permis d'aplanir bien des difficultés et qui a accepté d'examiner mon travail . Je souhaiterais également remercier M. YEGHNEM Reda, M. AMARA Khaled et M. BELHAMIANI Mohamed d'avoir accepté le rôle d'examineur.

Je remercie au fond du cœur ma fiancée qui m'a soutenu tout au long de cette épreuve, tout en sachant que sans ses sacrifices surtout dans la dernière ligne droite, ce travail n'aurait jamais été pareil.

Je remercie ma famille de m'avoir soutenu et supporter durant ces années et en particulier mes parents, mon frère et mes sœurs et tous les autres qui se reconnaîtront et qui ont su me soutenir pendant les moments difficiles que j'ai pu avoir et me faire profiter de leur bonne humeur.

# Résumé

L'objectif de ce travail est le développement d'une approche analytique basée sur une théorie raffinée de déformation par cisaillement avec l'effet d'étirement pour l'analyse de la contrainte de flexion des plaques composites stratifiées à plis croisés soumises à un chargement parabolique et linéaire transversal en utilisant un nouveau modèle cinématique dans lequel, les déplacements axiaux contiennent une composante d'intégrale afin de réduire le nombre des inconnues et une fonction sinusoidale dans l'expression de la coordonnée d'épaisseur pour introduire l'effet de la déformation par cisaillement transverse. La présente théorie contient uniquement cinq inconnues et satisfait la condition de nullité des contraintes tangentielles dans la face supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser aucun facteur de correction de cisaillement. Les équations différentielles et ses conditions aux limites sont tirées en utilisant la version statique du principe des travaux virtuels. Les solutions de forme fermée pour les plaques stratifiées à plis croisés simplement appuyées sont obtenues en appliquant la solution de Navier, et les études de cas numériques sont comparées avec les résultats théoriques pour vérifier la validité du modèle proposé. Enfin, on pourra observer que la présente théorie est plus précise par rapport à quelques théories de déformation par cisaillement à ordre élevé précédemment développées pour étudier la flexion statique des plaques composites stratifiées.

**Mot clés :** Analyse de la contrainte; Plaques composites stratifiées à plis croisés; Chargement parabolique; Chargement linéaire; Flexion statique.

# Abstract

The focus of this work is to develop an analytical approach based on an efficient shear deformation theory with stretching effect for bending stress analysis of cross-ply laminated composite plates subjected to transverse parabolic load and line load by using a new kinematic model, in which the axial displacements involve an undetermined integral component in order to reduce the number of unknowns and a sinusoidal function in terms of the thickness coordinate to include the effect of transverse shear deformation. The present theory contains only five unknowns and satisfies the zero shear stress conditions on the top and bottom surfaces of the plate without using any shear correction factors. The governing differential equations and its boundary conditions are derived by employing the static version of principle of virtual work. Closed-form solutions for simply supported cross-ply laminated plates are obtained applying Navier's solution technique, and the numerical case studies are compared with the theoretical results to verify the utility of the proposed model. Lastly, it can be seen that the present outlined theory is more accurate and useful than some higher-order shear deformation theories developed previously to study the static flexure of laminated composite plates.

**Keywords :** stress analysis ; cross-ply laminated plates ; parabolic load ; line load ; static flexure.

## ملخص

إن الهدف من هذا العمل هو تطوير نهج تحليلي يعتمد على نظرية فعالة لتشوه القص مع تأثير التمديد لتحليل الإجهاد الانحنائي للصفائح المركبة الرقائقية المتقاطعة المصفحة المعرضة للحمل المكافئ المستعرض والحمل الخطي باستخدام نموذج حركي جديد، حيث تتضمن الإزاحة المحورية عنصراً تكاملياً غير محدد من أجل تقليل عدد المجاهيل ودالة جيبيية في عبارة إحدائيات السمك لتشمل تأثير تشوه القص العرضي. تحتوي النظرية الحالية على خمسة مجاهيل فقط وتفي بشروط إجهاد القص المعدوم على الأسطح العلوية والسفلية للوحة دون استخدام أي معاملات لتصحيح القص. تُستمد المعادلات التفاضلية وشروط حدودها من خلال استخدام الصيغة الثابتة لمبدأ العمل الافتراضي. يتم الحصول على حلول مغلقة الشكل للصفائح الرقائقية المتقاطعة والمدعومة ببساطة باستخدام تقنية حل نايفيه، وتتم مقارنة دراسات الحالة العددية بالنتائج النظرية للتحقق من صلاحية النموذج المقترح. أخيراً، يمكن ملاحظة أن النظرية الموضحة الحالية أكثر دقة من بعض نظريات تشوه القص التي تم تطويرها سابقاً لدراسة الألواح المركبة المصفحة الساكنة

الكلمات المفتاحية: تحليل الإجهاد. صفائح رقائقيه متقاطعة، حمل مكافئ، الحمل الخطي، انحناء ثابت

# Introduction Générale

Les matériaux composites sont de plus en plus reconnus grâce à leur propriétés mécaniques intéressantes et leurs avantages multiples, tel que : une grande résistance et rigidité liée à une faible densité, une bonne résistance à la corrosion, une bonne ténacité au choc par rapport à ceux composés de matériaux métalliques classiques. En raison de ces caractéristiques principales, l'utilisation commerciale des composites stratifiés a été développée rapidement au cours des trois dernières décennies, et sont devenus les matériaux préférés dans divers applications spécifiques, spécialement dans les structures aérospatiales, sous-marines, l'ingénierie mécanique, les produits biomédicaux et aussi dans le domaine de génie civil pour les techniques de renforcement structurel et la restauration des structures affectées par des effets naturel et des forces destructives. La nature de ces matériaux non homogènes leur rend très adaptés à chaque domaine et il est possible de choisir pour chaque structure le meilleur rapport cout / poids / résistance mécanique. Leur utilisation accrue a nécessité la compréhension de leur réponse statique et dynamique pour l'amélioration continue de leur performance. Cependant, un point important doit être noté : la rigidité des stratifiés varie d'un point à un autre en dépendant des propriétés de ses constituants et de l'orientation des fibres, rendant leur analyse plus compliquée que l'analyse de ceux homogènes et isotropes. Pour cette raison, plusieurs théories ont été développées dans de nombreux cas afin d'exploiter leur efficacité dans tous les secteurs industriels. Les théories équivalentes du stratifié monocouche (ESL) sont celles dans lesquelles une plaque stratifiée hétérogène est traitée comme statiquement équivalente, les monocouches ayant un comportement constitutif anisotrope, réduisant le problème 3-D à un problème 2-D (CARLOS M.M.S. et J.M.F 1999). En posant des hypothèses appropriées sur la cinématique de déformation ou l'état de contrainte à travers l'épaisseur du stratifié. Le modèle le plus simple de ces théories est la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), qui est une extension de la théorie des plaques isotropes de (KIRCHHOFF 1850). L'hypothèse la plus importante de cette théorie est que la normale au plan médian avant la déformation reste droite et normale à la surface médiane après la déformation. En outre, elle n'est pas valable pour l'analyse des plaques épaisses en raison de la négligence des effets de la déformation par cisaillement transverse et de l'inertie rotative. Les applications différentes de cette théorie sont présentées par (LOVE 1944), (TIMOSHENKO et WOINOWSKY-KRIEGER 1959), (GERE

---

et TIMOSHENKO 1961), (SZILARD 1974), (UGURAL 1981) et bien d'autres. La deuxième théorie précise dans l'hierarchie des théories des plaques stratifiées ESL est la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) développée pour traiter la limitation de la théorie classique des plaques en appliquant les formulations de (REISSNER 1945a) et (MINDLIN 1951) à des plaques stratifiées épaisses. La FSDT améliore la cinématique de la CLPT en considérant l'effet de cisaillement, ce qui implique que la normale au plan médian reste droite mais non perpendiculaire à mi-surface après la déformation due à l'effet de cisaillement. Selon cette théorie, la déformation par cisaillement transversale est supposée constante dans le sens de l'épaisseur, ce qui nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement afin de tenir compte de la différence entre la contrainte de cisaillement constante et la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur. La théorie de Mindlin a été appliquée sur les plaques stratifiées anisotropes par (YANG, NORRIS et STAVSKY 1966), (WHITNEY 1969), (WHITNEY et PAGANO 1970), (WANG 1997), (CIVALEK 2008), (FERREIRA, CASTRO et BERTOLUZZA 2009), (AVCAR 2016 ; AVCAR et MOHAMMED 2018 ; AVCAR. 2019), (BALTACIOGLU et CIVALEK 2018), (ALIMIRZAEI, MOHAMMADIMEHR et TOUNSI 2019), (DRAOUI, ZIDOUR, TOUNSI et ADIM 2019) et plusieurs autres.

Par conséquent, de nombreuses théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été développées au cours des dernières années pour éviter l'utilisation de facteur de correction de cisaillement et elles sont basées sur l'hypothèse d'une variation non linéaire de contrainte à travers l'épaisseur. Par exemple (REDDY 1984a) a développé une théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé en considérant une variation parabolique des déformations transversales par cisaillement à travers l'épaisseur pour l'analyse de plaques composites stratifiées sous chargement sinusoïdale et uniforme. La théorie contient le même nombre de variables dépendantes de la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre, mais satisfait les conditions de nullité des contraintes tangentielles sur la face supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Une théorie efficace des plaques avec seulement cinq variables adaptées à l'analyse de la flexion, le flambement et la vibration libre des plaques sandwich et des plaques composites stratifiées et à couches croisées symétriques et simplement appuyées, est étudiée par (TOURATIER 1991) qui est basée sur une approche cinématique dans laquelle le cisaillement est représenté par une fonction sinusoïdale. (SOLDATOS et TIMARCI 1993) ont proposés une théorie de déformation par cisaillement transverse basée sur une formulation unifiée de composite stratifié en introduisant dans l'approximation du déplacement de la coque certaines fonctions générales de la coordonnée transversale pour l'analyse statique et dynamique des coques cylindriques stratifiées à couches croisées. Une méthode similaire a été utilisée plus tard par antisymétriques simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques et soumises à des charges dans le plan en utilisant un nouveau modèle de déplacement hyperbolique et la solution de Navier. (KIM, THAI et LEE



---

2009) ont développé une théorie raffinée à deux variables des plaques pour le comportement de flexion et de flambement statique des plaques composites antisymétriques à couches croisées et à plis angulaires, dans lesquelles une distribution parabolique des déformation par cisaillement transversales est considérée comme satisfaisant aux conditions de nullité des contraintes tangentielles sur les faces de la plaque sans utiliser des facteur de correction de cisaillement. (MANTARI, OKTEM et SOARES 2012) ont développé un modèle d'éléments finis basé sur la nouvelle théorie trigonométrique de déformation par cisaillement des couches pour l'analyse de la flexion des composites stratifiés épais et des plaques sandwich soumises à une charge transversale uniforme. (SAYYAD et GHUGAL 2013) ont appliqué une théorie de déformation par cisaillement trigonométrique monocouche équivalente pour étudier l'effet de la déformation par cisaillement transverse, la concentration de la contrainte locale sur les contraintes de cisaillement planes normales et transversales à travers l'épaisseur des plaques orthotrope et stratifiées. Une théorie raffinée de la déformation par cisaillement hyperbolique des plaques a été développée par (NEDRI, EL MEICHE et TOUNSI 2014) pour étudier la vibration libre de plaques stratifiées simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques. L'avantage majeur de cette théorie est le nombre considérablement réduit des variables, par rapport à cinq ou plus dans d'autre théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé. (SAHOO et SINGH 2014) ont proposé une nouvelle théorie trigonométrique zigzag pour analyser le comportement structurel statique des plaques composites stratifiées et sandwich. Cette théorie considère la fonction de forme de déformation par cisaillement en supposant la distribution non linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur. (MAHI, TOUNSI et al. 2015) ont proposé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique avec cinq degrés de liberté pour l'analyse de la flexion et la vibration libre des plaques isotropes, fonctionnellement graduées, sandwich et composites stratifiées. Les déplacement plans de cette théorie utilisent une combinaison des fonctions tangentes hyperbolique polynomiale. Dans la même année (KAR, MAHAPATRA et PANDA 2015) ont étudié le comportement en flexion d'un panneau plat composite stratifié soumis à un chargement hydro-thermo-mécanique en utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé, dans laquelle le terme géométrique non linéaire est introduit dans la formulation de Green-Lagrange. (SAYYAD, GHUGAL et SHINDE 2016) ont proposé une théorie de déformation par cisaillement exponentielle (ESDT) pour étudier la réponse aux contraintes thermiques des plaques composites stratifiées à couches croisées sous une charge thermique variant linéairement sur l'épaisseur de la plaque.

Récemment, (BEHERA et KUMARI 2018) ont étudié la vibration libre des plaques rectangulaire stratifiées de type Levy en utilisant une théorie zigzag efficace. (BELBACHIR et al. 2019) ont analysé le comportement en flexion des plaques stratifiées anti-symétriques à couches croisées sous des des charges thermiques et mécaniques non linéaires. Cependant, les résultats démontrent que la théorie

---

des plaques proposée est capable de produire des résultats plus précis que la FSDT et quelques théories de HSDT qui ont un nombre d'inconnues plus élevé. Plus récemment, de nombreuses études et recherches liées à l'analyse statique et dynamiques des plaques et poutres composites stratifiées en utilisant les théories de déformation par cisaillement d'ordre élevée (HSDT) ont été réalisées et disponibles la littérature ((CETKOVIC et VUKSANOVIC 2011); (REZAIIEE-PAJAND, SHAHABIAN et TAVAKOLI 2012); (SHERAFAT, GHANNADPOUR et OVESY 2013); (AHMED 2014); (SAHOO, PANDA et MAHAPATRA 2016); (CHIKH, TOUNSI, HEBALI et MAHMOUD 2017); (BOUAZZA, KENOUSA, BENSEDDIQ et ZENKOUR 2017); (Vo et al. 2017); (SAYYAD et GHUGAL 2017); (SEHOUL, BENGUEDIAB, BAKORA et TOUNSI 2017); (ZAMANI, AGHDAM et SADIGHI 2017); (SINGH et SINGH 2017); (ZINE et al. 2018); (KATARIYA, PANDA et MAHAPATRA 2018); (BELKACEM et al. 2018); (HIRWANI, PANDA et PATLE 2018a; HIRWANI et al. 2018b); (SALAMI et DARIUSHI 2018); (HAFIZAH, LEE, AZIZ et VISWANATHAN 2018); (AVCAR et MOHAMMED 2018); (JOSHAN, GROVER et SINGH 2018); (HIRWANI et PANDA 2018c); (KATARIYA et PANDA 2019b; KATARIYA et PANDA 2019b; KATARIYA et PANDA 2019a); (ABUALNOUR et al. 2019); (ADDOU et al. 2019); (BERGHOUTI, ADDA BEDIA, BENKHEDDA et TOUNSI 2019); (BOUANATI et al. 2019); (BOUKHLIF et al. 2019); (BOULEFRAKH et al. 2019); (MAHMOUD et TOUNSI 2019); (BOURADA et al. 2019); (BOUTALEB et al. 2019); (CHAABANE et al. 2019); (HIRWANI et PANDA 2019); (MEHAR et PANDA 2019); (HELLAL et al. 2019); (BATOU et al. 2019); (SAHOO, PANDA, MAHAPATRA et HIRWANI 2019); (HADJI, ZOUATNIA et BERNARD 2019); (SAHLA et al. 2019); (BOUSSOULA et al. 2020)).

Ce travail est consacré aux développement d'une approche numérique précise utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé des plaques avec l'effet d'étirement basée sur un nouveau modèle cinématique pour étudier le comportement en flexion statique des plaques composites stratifiées à couches croisées soumises à deux types de chargement différents, à savoir la charge parabolique transversale et la charge linéaire. En général, la théorie proposée ne contient que cinq variables et satisfait les conditions de la nullité des contraintes tangentielles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque sans avoir besoin des facteurs de correction de cisaillement. La solution de Navier a été utilisée pour résoudre les équations différentielles. Pour prouver l'efficacité de la présente théorie, les résultats numériques des déplacements et des contraintes des plaques composites stratifiées à couches croisées simplement appuyées sont calculés et comparés avec des résultats déjà publiés.

Cette thèse comporte une introduction générale; quatre chapitres et une conclusion générale;

➔ Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites en expliquant

---

les différents types et composants ainsi que les lois de mélange et de comportement.

- Le deuxième chapitre consiste à mettre en évidence les théories des plaques qui existent dans la littérature.
- Le troisième chapitre consiste à mettre en œuvre une méthode analytique pour l'étude de la flexion statique des plaques stratifiées en utilisant un nouveau modèle avec un nombre réduit de variables.
- Le dernier chapitre comporte une étude numérique des plaques stratifiées avec la méthode des éléments finis ainsi que la comparaison des résultats analytiques et numériques.

# Chapitre 1

## Généralités sur les matériaux composites

### 1.1 Introduction :

Un Matériau composite est un matériau solide hétérogène à une échelle microscopique nettement inférieure à celle de la pièce pour former un troisième matériau, sa structure réunit au moins deux composantes différentes dont les propriétés se complètent, le premier est constitué le plus souvent de fibres, comme les fibres de verre ou de carbone, et sert à renforcer la pièce. On parle alors de renfort ou de renfort fibreux, le second composant est un liant, il peut s'agir d'une matière plastique ou d'une résine polymère, c'est cette matrice qui assure la cohésion de la structure, les matériaux ainsi obtenus offrent des propriétés que les composants seuls ne l'ont pas, la réalisation d'un matériau composite nécessite donc l'association de ces composants qui doivent être compatibles entre eux et solidaires.

### 1.2 Renfort :

Le renfort est le squelette supportant les efforts mécaniques, son rôle dans le composite est essentiellement d'accroître leurs propriétés mécaniques (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.), les fibres présentent une bonne résistance à la traction généralement plus dure que la résine mais une résistance à la compression faible, les caractéristiques recherchées dans les renforts sont une masse volumique faible, une compatibilité avec la matrice et une facilité de mise en œuvre, il peut se représenter sous nombreuses formes : fibres courtes ou particules ou fibres continues (unidirectionnel, tissus ou textures unidirectionnelles). chacune d'entre elles s'impose dans une application particulière en raison de ses propriétés spécifiques et de son prix. il existe plusieurs types de renforts fibreux :

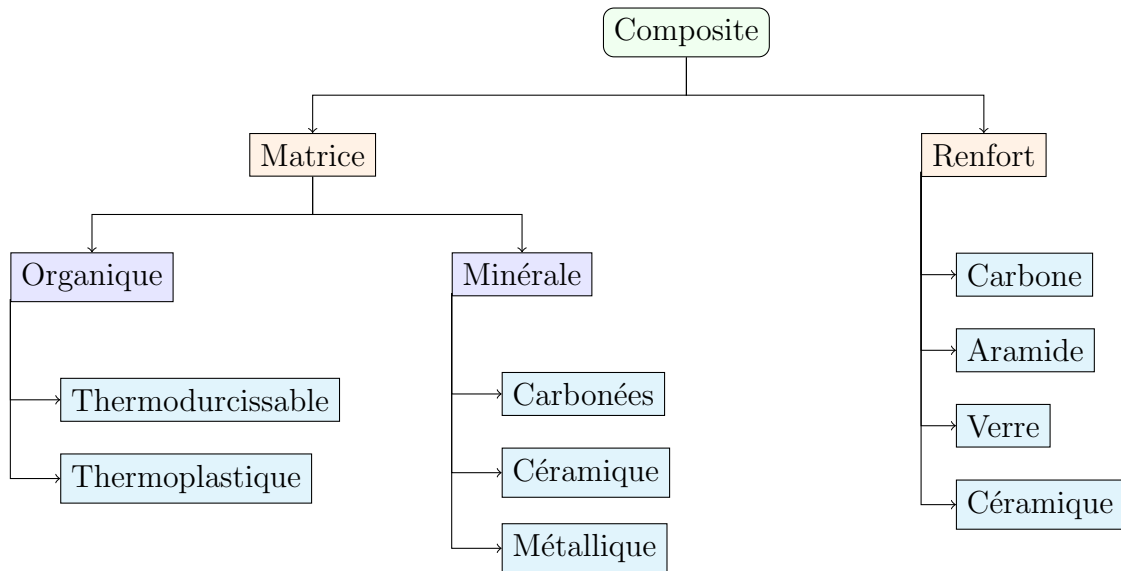


FIGURE 1.1 – Schéma Général des composites

### 1.2.1 Les fibres de carbone :

Sont des matériaux constitués de fibres extrêmement fines composés principalement d'atomes de carbone, ont la structure de graphite. obtenus a partir de la distillation de houille ou de pétrole sont osydés a chaud (300 °C) puis chauffés à 1 500 °C dans une atmosphere d'azote. Actuellement, il existe deux procédés de préparation de la fibre de carbone :l'une des voies permet d'obtenir les fibres de types HM (Haut Module) et THM (Très Haut Module), l'autre donne les fibres HR (Haut résistance) et HT (Haut ténacité), une étape de graphitisation, réalisée après les étapes d'oxydation et de carbonisation, la graphitisation permet d'obtenir les fibres HM et THM. L'alignement des atomes le long de l'axe de la fibre la rend incroyablement résistante pour sa taille. Les fibres de carbone sont caractérisées par leur faible densité, leur résistance élevée à la traction et à la compression, leur flexibilité, leur bonne conductibilité électrique et thermique, Elles sont caractérisées aussi par leur tenue en température et leur inertie chimique (sauf à l'oxydation). Les fibres de carbone sont utilisées pour toutes applications exigeant une grande résistance mécanique et spatiale, les équipements sportifs et dans le renforcement des structures en béton armé par collage de tissu de fibre de carbone.

### 1.2.2 Les fibres de Kevlar (Aramides) :

C'est une fibre aramide, de couleur jaune paille de diamètre d'ordre 12  $\mu\text{m}$  assemblées en fils , mise au point par la société Du Pont Nemours (U.S.A) ce sont des polyamides aromatisés obtenue par synthèse a -10 °C, puis filés et étirés pour obtenir un module d'élasticité élevé. Elles sont des fibres synthétiques qui résistent bien à la chaleur et ont de bonnes propriétés mécaniques. Il existe trois types de fibres Kevlar : Fibres Kevlar 29 (MB : à bas module d'élasticité); fibre Kevlar 49 (HM :à haut module d'élasticité) et Fibres Kevlar 149 (UHM : à ultra-haut module d'élasticité).

Les fibres d'aramide présentent un bon équilibre de résistance et de module en traction et en particulier, une excellente résistance spécifique à la rupture en traction. Le comportement des fibres aramides est semblable à celui des métaux car sous une faible charge elles sont élastiques et deviennent plastiques quand elles sont soumises à de fortes contraintes. Les fibres d'aramide ont des caractéristiques médiocres en compression et à la flexion qui sont probablement une des conséquences de leur faible adhérence à la résine. Un des reproches que l'on fait aussi à la fibre d'aramide, est la difficulté rencontrée pour découper les renforts secs et pour poncer et percer les pièces composites. c'est pourquoi de nouvelles fibres hybrides, en l'occurrence des fibres verre-kevlar et carbone-kevlar sont élaborées pour améliorer leur adhérence. Les fibres aramides sont exploitées industriellement en vertu de leur résistance au choc et de leur légèreté. Elles entrent dans la composition des produits de protection (blindages, gilets pare-balle, casque, gants, etc.) mais aussi des articles de sport (raquettes de tennis, les pièces de skis), et dans nombreux autres produits de l'industrie aéronautique.

### 1.2.3 Les fibres de Verre :

Les fibres de verre sont un filament de verre extrêmement fin. Actuellement, la fibre de verre est le renfort le plus utilisé dans les matériaux composites en raison du rapport performance mécanique/prix. Les fibres sont composées principalement d'oxydes, généralement de silice ( $\text{SiO}_2$ ), d'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), de magnésie ( $\text{MgO}$ ), de chaux ( $\text{CaO}$ ) et d'oxyde de bore ( $\text{B}_2\text{O}_3$ ), on y retrouve aussi d'autres oxydes ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{K}_2\text{O}$ ,  $\text{TiO}_2$ , etc.) et du fluor en très faible proportion, ils sont obtenus par filage de verre ( $t > 1000$  °C) les propriétés mécaniques des fibres de verre sont assez intéressantes, leur module d'élasticité avoisine les 100 Gpa et leur contrainte à la rupture est de 3 à 4 Gpa, Les matériaux composites renforcés de cette fibre sont généralement associés à des polymères. Ils sont utilisés dans les bâtiments et infrastructures (notamment dans les piscines) (29%), les transports (30%), l'électricité (16%), les sports et loisirs (14%) et pour les équipements industriels (11%). Elle permet par exemple un allègement des structures d'environ 30% par rapport à l'acier et une réduction de poids en améliorant les performances, parmi ses propriétés; l'inertie chimique, la résistance au choc, l'isolation, etc. Leur problème majeur réside cependant dans leur recyclabilité. Actuellement, trois types de fibres de verre sont commercialisés sous forme de files. Ce sont les variétés E, S et R.

### 1.2.4 Les fibres céramiques :

Les renforts céramiques sont des fibres de type carbure, borure et nitrure. Elles sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication, elles sont utilisées dans des applications très spécifiques travaillant à haute température et sous atmosphère oxydante, les plus

couramment produites sont : les fibres de bore, les fibres carbure de silicium, les fibres de bore-carbure de bore(B4C) et les fibres de bore-carbure de silicium(BorSiC). Ces fibres possèdent des caractéristiques assez bonnes et se conservent à des températures pouvant aller de 500 °C à 1000 °C. Les fibres céramiques sont souvent associées à des résines thermodurcissables de type époxyde à cause de leur bonne adhérence avec ces dernières. elles peuvent également être mélangées avec des thermoplastiques, dans cette catégorie de renfort une nouvelle génération de fibre est développée par un procédé similaire à celui des fibres de carbone. ces nouvelles fibres possèdent, en plus des caractéristiques des fibres usuelles de la famille, une tenue en température plus élevée(1200 °C à 1600 °C). c'est le cas des fibres en carbotitanate de silicium(SiCTi) appelées tyranno. Le tableau suivant regroupe les propriétés mécaniques des différentes fibres :

Fibre	Densité gr/cm <sup>3</sup>	Résistance à la rup- ture en traction (MPa)	Résistance à la rup- ture en com- pression (MPa)	Allongem- ent à la rupture en %	Module d'élasticité longitudi- nal(MPa)	Diamè- tre de fila- ment élément aire ( $\mu$ m)	Prix in- dicatif (Eu/Kg)
Verre E	2.54	3400	1200	4.8	73000	3-30	1.83
Verre R	2.48	4400	1300	5.4	86000	3-30	7.62
Aramide BM 29	1.44	3600	500	4.0	83000	12	22.87
Aramide HM 49	1.45	3600-4100	500	2.8	131000	12	30.50
Aramide UHM149	1.7	3400	500	2.0	186000	12	- - -
Carbone HT	1.78	2800	1800	0.5	200000	8	45/152
Carbone HM	1.80	2200	1300		400000	8	45/152
Bore	2.63	3500	3500	0.8	400000	100-200	450

TABLE 1.1 – Les propriétés Mécaniques de Différentes Fibres

### 1.3 Matrice :

Le rôle de la matrice est de maintenir les renforts dans une forme compacte et donner la forme voulue au produit finale, les incorpore et leur donner une adhérence suffisante pour que la transmission des efforts et la répartition des contraintes soient assurées, Elle sert également à protéger les fibres contre l'abrasion et un environnement agressif. Elle doivent être en outre assez déformables et présenter une certaine compatibilité avec le renfort. les résines doivent posséder des masses volumiques faibles. Le solide formant la matrice peut être d'origine organique ou minérale.

A partir de la nature de la matrice les matériaux composites sont classés en deux catégories :

### 1.3.1 Les matrices Organiques :

Un très grand nombre de matériaux plastiques peut être utilisé comme matrice dans les matériaux composites, qui constitue les volumes les plus importants aujourd'hui à l'échelle industrielle, il convient de distinguer les matrices thermoplastiques et les polymères thermodurcissables(ou résine) de propriétés mécaniques très élevées. Dans ces derniers, on trouve les résines de polyester, les résines époxydes qui peuvent être utilisées jusqu'à une température de 200 °C. Les résines phénoliques ou les résines polyamides peuvent supporter une température de 400 °C.

#### 1.3.1.1 Résines thermodurcissables :

Les résines thermodurcissables sont employées comme matrice des matériaux composites structuraux. Comme leurs noms l'indique, ces produits durcissent après un cycle de chauffage appelé (cycle de polymérisation).A l'issu de celui-ci, le matériau est un solide relativement rigide qui ne fond pas et ne se ramollit pas en température. De ce fait, ils ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois et ceci avant qu'ils ne durcissent, donc avant l'accomplissement du cycle de polymérisation. Ils possèdent des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées par rapport aux thermoplastiques. on trouve dans cette famille les polyesters insaturés(vinylester, les dérivés allyliques, les polyesters condensés, etc.), les résines époxydes, les résines de condensation(les phénoliques, les aminoplastes, les furaniques,..etc.)

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont représentées dans le tableau 1.2.

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	$\rho(\text{Kg}/m^3)$	$\epsilon_t^R(\%)$	$\sigma_t^R(\text{MPa})$	$\sigma_c^R(\text{MPa})$	E(GPa)
polyesters	60 à 100	1140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénolique	120	1200	2,5	40	250	3 à 5
epoxydes	290	1100 à 1500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

TABLE 1.2 – Caractéristiques des résines thermodurcissables

#### 1.3.1.2 Résines thermoplastiques :

Les thermoplastiques sont des chaînes polymères reliées entre elles par des faibles liaisons. Les thermoplastiques représentent le plus grand tonnage en termes de production à cause de leur facilité de la mise en œuvre et des faibles couts.Lorsqu'on les soumet à des gradients de température,



elles commencent par se ramollir puis elles fondent. Ce sont principalement les plastiques traditionnels (le polychlorure de vinyle PVC, le polyéthylène PVC, le polyéthylène PE, polypropylène PP, le polyamide PA, les polycarbonates PC, etc.). Leurs utilisations en température sont limitées par leur mise en œuvre qui sont faciles.

De même les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau 1.3.

résines	$T_f$ (°C)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\epsilon_t^R$ (%)	$\sigma_t^R$ (MPa)	$\sigma_c^R$ (MPa)	E (GPa)
polyamide	65 à 100	1140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1200		20 à 35		1,1 à 1,4

TABLE 1.3 – Caractéristiques des résines thermoplastiques

### 1.3.2 Les matrices Minérales :

#### 1.3.2.1 Les matrices Carbonées :

Sont fabriquées par décomposition d'une matière organique à haute température. Celle-ci, peut être un liquide (imprégnation en phase liquide), ou un hydrocarbure gazeux (décomposition chimique en phase vapeur). Le carbone se dépose en grains sur les fibres en leur assurant une bonne liaison.

#### 1.3.2.2 Les matrices Céramiques :

Dans les années 80. Des exemples d'application industrielles ont été développés dans l'automobile, à l'initiative de l'industrie japonaise. Elles sont particulièrement intéressantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont réservées aux applications de très haute technicité travaillant à haute température comme la tuile de protection thermique, les brûleurs. Elles sont utilisées dans le spatial, le nucléaire et le militaire. Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 100 °C, on a recours aux composites à matrice céramique ; Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, Leur seul inconvénient c'est qu'ils résistent mal à la rupture à la traction qui est particulièrement masquée et compensée par l'introduction des fibres. Les techniques de fabrication les plus courantes sont l'imprégnation en phase liquide, assemblé par tissage multidimensionnel.

#### 1.3.2.3 Les matrices Métalliques :

Les matériaux composites à matrice métalliques ont été développés à partir des années 1960-1965. Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les

années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le cout très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation des matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

## 1.4 Interface :

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine, ces produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul des structures composites.

## 1.5 Matériaux composites structuraux :

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature et leur séquence d'empilement. Ils sont généralement sous forme de :

### 1.5.1 Monocouches :

Il représente l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibre longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes.

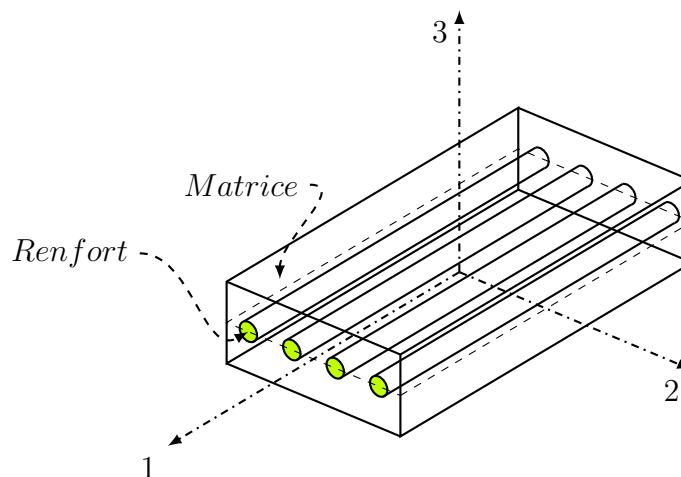


FIGURE 1.2 – Schéma d'un pli

### 1.5.2 Stratifiés :

Un stratifié est constitué de l'empilement de deux ou plusieurs couches entreposées successivement, et se comportant comme une seule entité structurale. Chaque couche est formée de fibres de faible section imprégnées de résine, et est désignée par son orientation, qui est l'angle que fait la direction des fibres avec la direction de référence (qui est généralement la direction des fibres unidirectionnelles orientées à  $0^\circ$ ). la séquence d'empilement du stratifié, désigne le nombre et l'orientation des couches successives en parcourant le stratifié d'une face à l'autre. Ainsi, un stratifié est dit unidirectionnel si, l'angle entre deux couches consécutives est nul, un stratifié est multidirectionnel si les couches consécutives, sont orientées les unes par rapport aux autres à des angles autres que 0 tel, les multidirectionnels  $[0/+45/-45/90/90/+45/-45/0]$ . Le choix de l'empilement, et plus particulièrement des orientations, permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés de type :

- ➔ Équilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant la direction  $-\theta$  .
- ➔ Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen, ayant la même orientation des fibres.
- ➔ Antisymétrique : stratifié comportant des couches ayant des orientations de fibres opposées.
- ➔ Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couche à  $90^\circ$ .

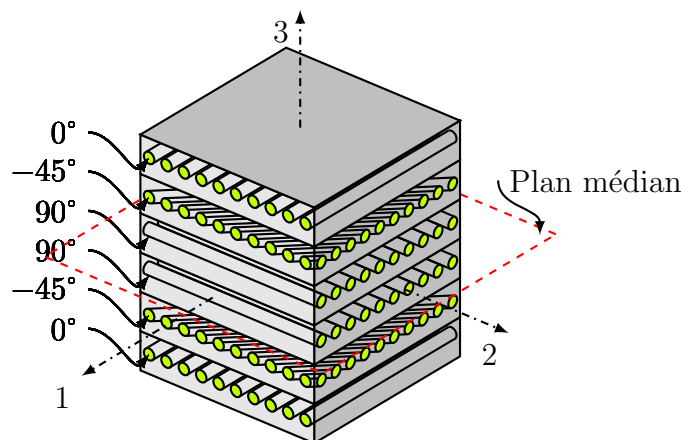


FIGURE 1.3 – Un stratifié  $[0^\circ / -45^\circ / 90^\circ]_s$

### 1.5.3 Sandwichs :

Matériaux composés de deux semelles(ou peaux), de grande rigidité et de faible épaisseur, enveloppant une âme(ou cœur) de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande résistance en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

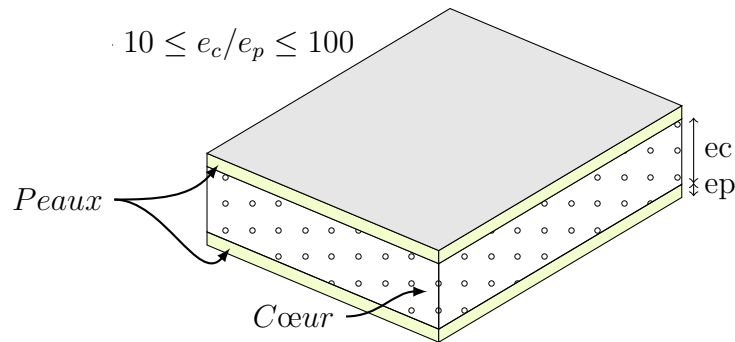


FIGURE 1.4 – Matériau Composite Sandwich.

### 1.6 Loi de mélange :

La micromécanique est l'étude des matériaux composites avec la prise en compte de l'interaction des constituants en détail, la micromécanique permet le concepteur de représenter un matériau hétérogène comme matériau homogène équivalent, habituellement anisotrope. Le matériau composite est la première classe des matériaux qui sont conçus en même temps que la structure. En concevant avec des métaux, les seuls choix sont le type d'alliage et le traitement thermique, suivis de la conception de la géométrie. Les matériaux composites sont produits comme combinaison de différents types de fibres et matrice. le concepteur peut changer des fibres, des matrices, la quantité relative de fibre et de matrice est exprimée en termes de fraction volumique de fibre et de matrice, qui peuvent être variées sur une large gamme pendant la fabrication.

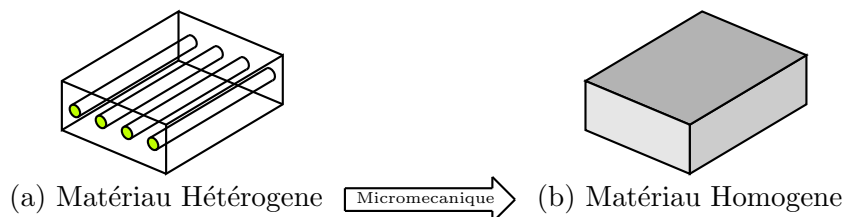


FIGURE 1.5 – Le processus de la Micromécanique.

### 1.6.1 Fraction volumique :

Les propriétés des composites sont en fonction du volume relatif des fibres et matrice utilisées ; La fraction volumique des fibres est défini par :

$$V_f = \frac{\text{volume des fibres}}{\text{volume total}}; \quad 0 \leq V_f \leq 1 \quad (1.1)$$

La fraction volumique de la matrice est définie par :

$$V_m = \frac{\text{volume de la matrice}}{\text{volume total}}; \quad 0 \leq V_m \leq 1 \quad (1.2)$$

$$V_f + V_m = 1 \quad (1.3)$$

### 1.6.2 Module longitudinal :

Le module longitudinal, qui est le module d'élasticité du composite dans la direction des fibres, peut être obtenu par l'équations 1.11, appelée la loi de mélange. L'hypothèse principale dans cette formulation est que la contrainte dans la direction des fibres est la même dans la matrice et la fibre. Ceci implique que le lien de matrice-fibre est parfait. Quand le matériau est étiré le long de la direction de fibre, la matrice et les fibres prolongeront avec la même quantité, illustré dans la Figure 1.6.

La déformation longitudinale (dans la direction des fibres) est  $\epsilon_1 = \Delta L/L$ , et dans ce cas  $\epsilon_f = \epsilon_m = \epsilon_1$ . En outre, puisqu'on suppose que la fibre et la matrice sont linéaires et élastiques, leur loi contrainte-déformation est :

$$\sigma_f = E_f \epsilon_1 \sigma_m = E_m \epsilon_1 \quad (1.4)$$

La contrainte moyenne  $\sigma_1$  agit sur la section transversale entière :

$$A = A_f + A_m \quad (1.5)$$

La charge totale appliquée :

$$P = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad (1.6)$$

Puis

$$\sigma_1 = \epsilon_1 (E_f V_f + E_m V_m) \quad (1.7)$$

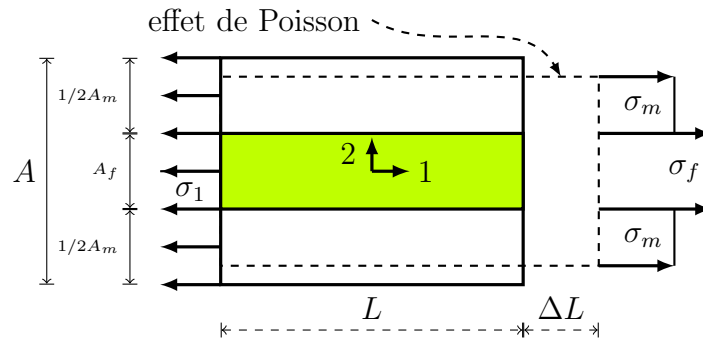


FIGURE 1.6 – Éléments de volume représentatifs typiques soumis à un allongement uniforme longitudinal

Ou

$$V_f = A_f/A \quad \text{et} \quad V_m = A_m/A \quad (1.8)$$

Pour le matériau homogène équivalent

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_1 \quad (1.9)$$

Puis, comparant (1.7) avec (1.9) résultats :

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (1.10)$$

Finalement, utilisant (1.3), la règle du loi de mélange obtenue

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (1.11)$$

### 1.6.3 Module transversal :

Pour la détermination du module transversal (perpendiculaire à la direction des fibres), l'hypothèse principale est que la contrainte est la même dans la matrice et la fibre. Cette hypothèse est nécessaire pour maintenir l'équilibre dans la direction transversale. De nouveau, l'hypothèse implique que la liaison fibre-matrice est parfaite, l'élément de volume représentatif typique (EVR), soumis à une contrainte transversale uniforme, montré dans la figure 1.7. Notez que, pour plus de simplicité, une fibre cylindrique à été remplacée par une fibre rectangulaire,

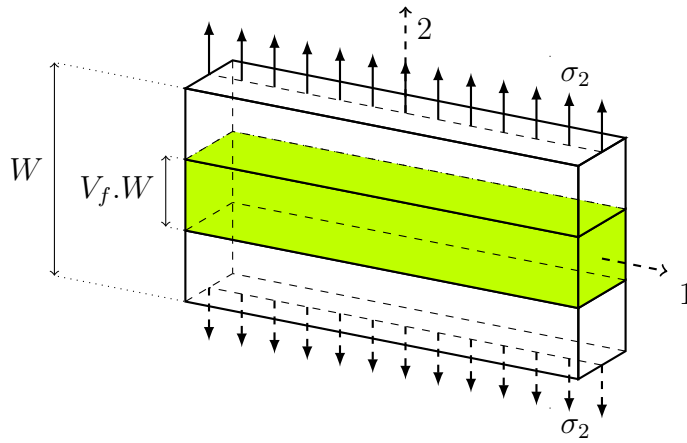


FIGURE 1.7 – EVR typique soumis a une contrainte uniforme transversale

Comme la fibre et la matrice sont supposées être des matériaux élastiques linéaire, les déformations de la fibre et la matrice sont

$$\epsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}; \quad \epsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (1.12)$$

Ces déformations agissent sur une partie de (EVR),  $\epsilon_f$  sur  $V_f W$ , and  $\epsilon_m$  sur  $V_m W$ , tandis que la déformation  $\epsilon_2$  agit sur toute la largeur  $W$ . L'allongement total est

$$\epsilon_2 W = \epsilon_f V_f W + \epsilon_m V_m W \quad (1.13)$$

Simplifier  $W$  et avec la loi d'Hooke pour les constituants, qui sont supposés être isotropes

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_f}{E_f} V_f + \frac{\sigma_m}{E_m} V_m \quad (1.14)$$

Étant donnée que la contrainte est la même dans la fibre et la matrice ( $\sigma_f = \sigma_m = \sigma_2$ )

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_f} V_f + \frac{\sigma_2}{E_m} V_m \quad (1.15)$$

Ensuite, en comparant avec la loi d'Hooke pour le matériau équivalent ( $\sigma_2 = E_2 \epsilon_2$ ), le module transversal est donné par

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad (1.16)$$

De même

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{G_m}{E_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad (1.17)$$

## 1.7 Loi de comportement :

Un matériau possède un comportement élastique linéaire s'il existe une relation linéaire bi-univoque entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

### 1.7.1 Matériau anisotrope :

Les matériaux *isotropes* tel que l'aluminium possède les mêmes propriétés dans toutes les directions. Les matériaux *Anisotropes* ont des propriétés (mécanique, etc.) qui varient avec l'orientation. Les matériaux anisotropes peuvent être homogènes mais les propriétés changent selon l'orientation le long de laquelle la propriété est mesurée. Un exemple typique est le module d'élasticité du bois, qui est plus grand dans le sens de la longueur de l'arbre et petit a travers les troncs. La rigidité d'un matériau isotrope est complètement décrite par deux propriétés, par exemple le module d'élasticité  $E$  et le coefficient de poisson  $\nu$ . En revanche, on peut atteindre les 21 propriétés pour décrire les matériaux anisotropes.

### 1.7.2 Matériau orthotrope :

Un matériau *orthotrope* possède 3 plans de symétrie figure 1.8. Un composite unidirectionnel peut être considéré comme orthotropique. Un plan de symétrie est perpendiculaire à la direction de la fibre, et les deux autres peuvent être parallèles à l'axe des fibres et perpendiculaire entre eux, on peut décrire ce matériau avec 9 constantes seulement :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

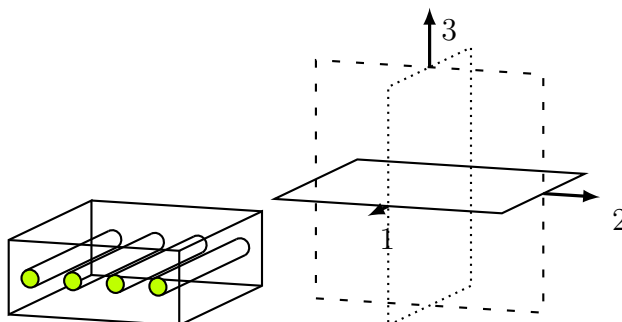


FIGURE 1.8 – Un matériau orthotrope a trois plans de symétrie



### 1.7.3 Matériau monoclinique :

Par définition, un matériau *monoclinique* possède un plan de symétrie matériel. Dans ce cas, la matrice de comportement doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. On montre dans cette partie que lorsque des symétries matérielles existent le nombre de composantes nécessaire à décrire le comportement élastique linéaire est inférieur à 21.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

### 1.7.4 Matériau transversalement isotrope :

Un matériau transversalement isotrope possède un axe de symétrie, la direction des fibres d'un composite unidirectionnel peut être considérée comme axe de symétrie si les fibres sont placées aléatoirement dans la section transversale. dans ce cas, n'importe quel plan contenant la direction de fibre est un plan de symétrie. Un matériau transversalement isotrope est décrit par cinq constantes :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{33}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

### 1.7.5 Matériau isotrope :

Le matériau le plus utilisé dans l'industrie est le matériau *isotrope*, comme l'aluminium, l'acier, etc. Les matériaux isotropes ont un nombre infini de plans de symétrie, signifiant que les propriétés sont indépendants avec l'orientation, deux constantes sont nécessaires pour décrire le comportement élastique des matériaux isotropes. puisque le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  sont obtenues par un simple essai, ils sont utilisées souvent pour décrire les matériaux isotropes. Cependant, d'autres propriétés élastiques peuvent être aussi bien employées. Par exemple, le module de cisaillement d'un matériau isotrope est relatif a  $E$  et  $\nu$  par :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.21)$$

Par conséquent, le comportement élastique des matériaux isotropes peut être représenté par le pair  $(E, G)$ . Encore une autre combinaison valide, ce qui est populaire dans l'élasticité théorique, est le pair  $(\lambda, G)$ , où  $\lambda$  est la constante de *Lamé* définie par :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.22)$$

Un matériau pour lequel, en un point quelconque, les composantes du tenseur sont identiques dans toutes les directions est un matériau *isotrope*. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, un tel matériau est fonction uniquement de deux paramètres caractéristiques indépendantes.

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

## 1.8 Les Avantages et Inconvénients des Matériaux Composites :

- ➔ Une grande résistance à la fatigue,
- ➔ Un faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu-carbone),
- ➔ Sont insensibles aux produits chimiques mécaniques comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole,
- ➔ Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes!
- ➔ Les composites sont très anciens : bois (composite naturel), torchis, béton (agrégats et pâte de ciment), béton armé, bois contre-plaqué (sandwichs), lamifiés décoratifs par exemple.
- ➔ Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre),
- ➔ Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs,
- ➔ Problèmes aux niveaux : manipulation, compatibilité chimique, moulage.

## 1.9 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons détaillé divers types de matériaux composites utilisés dans le domaine de l'ingénierie en fonction de leurs composants en fibre et en matrice, en outre nous avons vu que le nombre de couches et l'orientation des fibres jouent un rôle majeur dans la variation des propriétés du matériau composite. Dans ce qui va suivre, nous allons voir les théories des plaques composites stratifiées, de même, nous allons développer le calcul à la flexion des plaques composites stratifiées à plis croisés.

# Chapitre 2

## Théories des plaques et stratifiés

### 2.1 Cinématique des plaques

#### 2.1.1 Théorie classique des plaques (CPT ou Love-Kirchhoff) :

C'est le cas d'une plaque mince ( $\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$ ) d'une épaisseur constante, le matériau est élastique linéaire, valable pour les petites déformations, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale reste droite perpendiculaire à la surface moyenne après déformation figure 2.1.

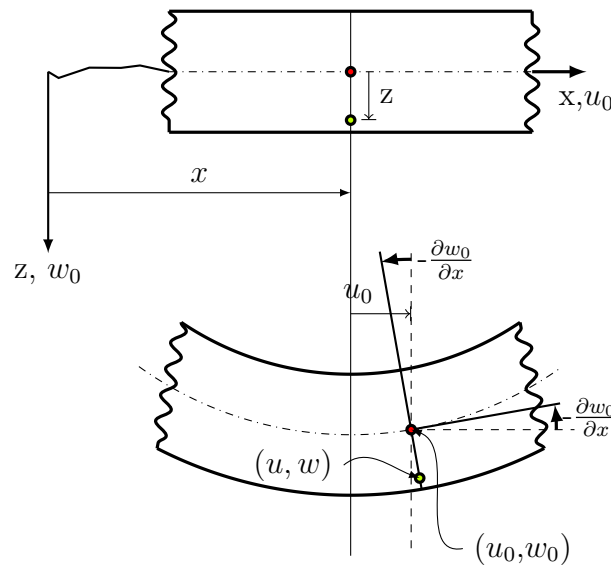


FIGURE 2.1 – Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacement approché de Love-Kirchhoff est de la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

Ou  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont respectivement les déplacements du plan moyen suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont respectivement les déplacement suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Le champ de déformation est obtenue par la dérivation du champ de déplacement(équations 2.1) comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.2)$$

Cette théorie donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

### 2.1.2 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT ou Reissner-Mindlin) :

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre c'est l'extension de la théorie classique des plaques par la prise en compte de l'effet du cisaillement transverse, les contraintes de cisaillement transversales sont supposées constantes à travers l'épaisseur. l'hypothese de la cinématique de Mindlin adoptée est : la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) après la figure 2.2 :

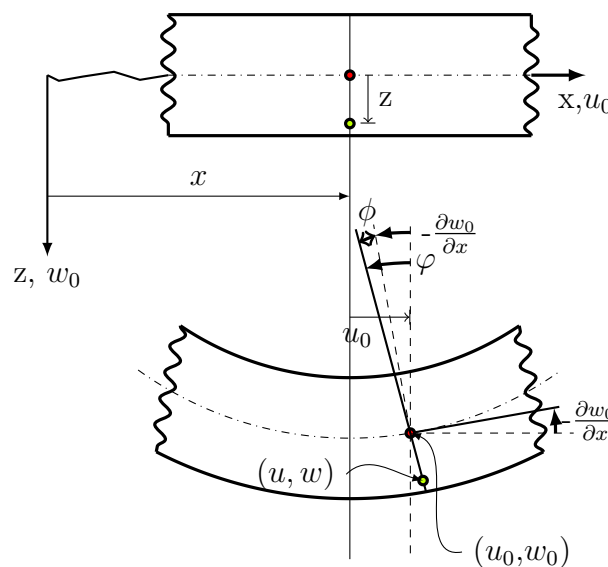


FIGURE 2.2 – Cinématique de Reissner-Mindlin.

Le champ de déplacement approché de Love-Kirchhoff est de la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

Où  $\phi_x$  et  $\phi_y$  : sont les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement. Le champ de déformation est obtenu par la dérivation du champ de déplacement (équations 2.3) comme suit :

➔ Le champ de déformation en membrane-flexion :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2.4)$$

➔ Le champ de déformation en cisaillement transverse :

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x \end{cases} \quad (2.5)$$

L'inconvénient de cette méthode est que les contraintes de cisaillement ne sont pas nulles aux surfaces de la plaque qui nécessite l'introduction d'un coefficient de correction de cisaillement difficile à déterminer et qui dépend de plusieurs paramètres (la géométrie, le coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites).

### 2.1.3 La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Pour franchir les limites de la théorie du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement sous des contraintes dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (figure 2.3).

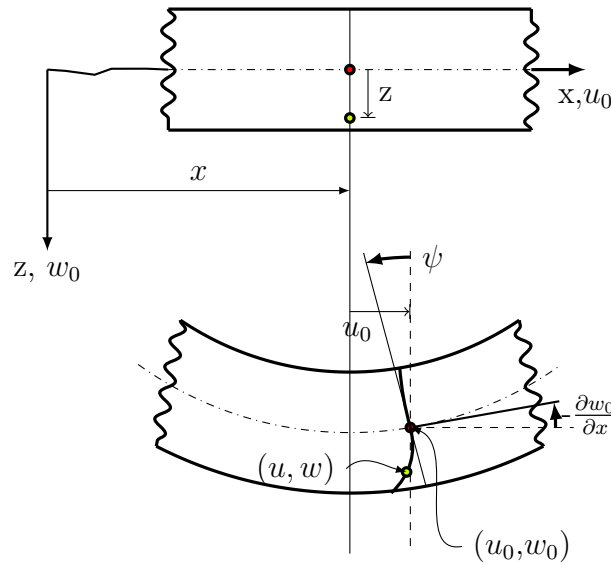


FIGURE 2.3 – Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Le champ de déplacement de cette théorie est généralement écrit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (2.6)$$

avec  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement  $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$ ,  $f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse.

Dans le tableau 2.1 on illustre les quatre théories utilisées dans le reste de ce travail pour la comparaison et la validation des résultats.

## 2.2 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur. Nous citons en particulier :

➔ L'approche d'Ambartsumyan (AMBARTSUMYAN 1970) avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{Z^2}{3} \right) \quad (2.7)$$

➔ L'approche de Reissner (REISSNER 1945b), Panc et Kaczkowski, avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4Z^2}{3h^2}\right) \quad (2.8)$$

➔ L'approche de Levinson, (MURTHY 1981) et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4Z^2}{3h^2}\right) \quad (2.9)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $u_3$ , est constant (REDDY 1984b). Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène (DUONG et al. 2008).

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche) .Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches de deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant (KANT et SWAMINATHAN 2000).

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur (TOURATIER 1991) .La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \cdot \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \cdot \frac{z^6}{h^6} + \dots\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (REDDY 1984b). En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques (POLIT et TOURATIER 1997) et (DAU, POLIT et TOURATIER 2006).

Karama et al, proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche (AFAQ 2003). La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante :

$$f(z) = z \cdot e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (2.11)$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction (sinus) (TOURATIER 1991) ne permet qu'un développement en



puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement inerlaminaire et les contraintes de l'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes (DUONG et al. 2008).

### 2.2.1 Application de la théorie d'ordre élevé pour des structures composites :

Les théories d'ordre élevé envisagées par certains auteurs sont applicables à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambage,..). La performance d'un élément fini est liée à la théorie utilisée. La théorie d'ordre élevé se distingue par son ordre polynomial, son nombre de coefficients ou de paramètres qu'elle engendre et le type d'élément qu'elle utilise.

Kapania et Raciti ont fourni une synthèse détaillée des théories de déformation de cisaillement utilisées dans la statique, vibration et l'analyse de flambement des poutres et des plaques composites (KAPANIA et RACITI 1989).

(MOITA, SOARES et SOARES 1996) a proposé un élément quadrilatère à 9 nœuds et 10 degrés de liberté par nœuds. Les champs déplacements  $u$  et  $v$  sont cubiques par rapport à l'épaisseur et  $w$  est constant. Il est particulièrement efficace pour calculer le flambage des plaques épaisses et minces. Le nombre de paramètres étant important, rend le calcul assez lourd. Kant et al, ont développé un élément basé sur la théorie d'ordre élevé raffinée (surtout sur les plaques sandwich) (KANT et SWAMINATHAN 2001). Ils ont défini un champ de déplacement de telle façon que  $u, v, w$  soient cubiques par rapport à l'épaisseur. Chaque ensemble de deux couches successives est divisé en un certain nombre de sous-couches pour améliorer l'état de contraintes de cisaillement et avoir une continuité aux interfaces. Patel et al (PATEL et al. 2004) ont traité une structure de coque assez compliquée géométriquement au 3ème ordre, afin d'améliorer l'état de déformation. Ils ont introduit l'effet de zig-zag qui assure la continuité sur les interfaces (le nombre de paramètres augmente avec le nombre de couches).

Zen Wu et al, ont proposé une théorie intéressante du point de vue des résultats sur les contraintes (ZHEN et WANJI 2006). Celle-ci assure la continuité sur les interfaces et les conditions nulles (en bas et en haut). Elle définit sur chaque couche un champ de déplacement différent et utilise 11 degrés de libertés par nœud. Elle est communément appelée « high order shear refined theory ». Mechab et Tounsi ont utilisé des théories d'ordre élevés pour étudier le comportement en flexion des poutres courtes en composites stratifiés (MECHAB 2009).

Toutes ces théories sont très intéressantes, d'une part pour traiter le problème de discontinuité des contraintes sur les interfaces et, d'autre part pour éviter l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants. Le seul reproche à faire à ce

type de théories est qu'elles sont gourmandes en temps de calcul. (TAFLA 2007).

Théorie	année	Champ de déplacement	NBR des inconnues
Kirchhoff	1850	$u = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, v = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y}, w = w_0$	03
Mindlin	1951	$u = u_0 - z\phi, v = v_0 - z\psi, w = w_0$	05
Reddy	1984	$u = u_0 + z[\phi - \frac{4}{3}(\frac{z}{h})^2(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x})]$ $v = v_0 + z[\psi - \frac{4}{3}(\frac{z}{h})^2(\psi + \frac{\partial w_0}{\partial y})]$ $w = w_0$	05
Ghugal et al	2013	$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \phi(x, y)$ $v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \psi(x, y)$ $w(x, y, z) = w_0(x, y) + \frac{h}{\pi} \cos \frac{\pi z}{h} \xi(x, y)$	06

TABLE 2.1 – Le champ de déplacement des différentes théories des plaques

# Chapitre 3

## Étude analytique des plaques composites

### 3.1 Analyse mathématique du problème :

Dans cette analyse, on suppose une plaque composite a couches croisées avec une épaisseur constante  $h$ , de longueur  $a$ , et de largeur  $b$  comme représentée sur la figure 3.1 composée de  $N$  couches orthotropiques, ce qui sont parfaitement collées ensemble. La plaque occupe la région  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h/2 \leq z \leq h/2$  dans un système de coordonnées cartésiennes. La plaque soumise à une charge mécanique  $q(x, y)$  sur ça face supérieure ( $z = -h/2$ ).

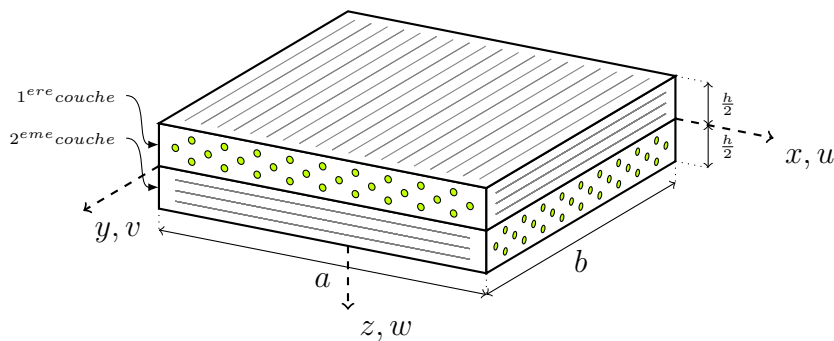


FIGURE 3.1 – Géométrie et système de coordonnées d’une plaque stratifiée a couches croisées antisymétriques.

Le présent modèle est développé sur la base des hypothèses et caractéristiques de la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique proposée avec l’effet d’étirement, les composantes de déplacement en tout point de la plaque peuvent être exprimées sous une forme plus simple :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z) \phi_z(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

Ou  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$ ,  $\theta(x, y)$  et  $\phi_z(x, y)$  sont les cinq inconnues des déplacements de la surface moyenne de la plaque,  $f(z)$  présente la fonction de forme qui définit la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque. Les constantes  $k_1$  et  $k_2$  dépendent de la géométrie. Dans cette étude, on prend la fonction  $f(z)$  comme suit :

$$f(z) = \left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right), \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (3.2)$$

Sur la base de la relation de la théorie de l'élasticité linéaire, les déformations de cisaillement normales et transversales infinitésimales associées au champ de déplacement dans l'équation 3.1 sont généralement exprimés sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z)\varepsilon_z^0$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial u_0^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial v_0^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial u_0^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (3.4a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix},$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{cases} = \begin{cases} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \end{cases}, \varepsilon_z^0 = \phi_z \quad (3.4b)$$

Les termes d'intégrale utilisée dans les expressions précédentes peuvent être résolus en utilisant la solution de Navier et peuvent être exprimés comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (3.5)$$

Où les coefficients  $A'$ ,  $B'$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont adoptés selon le type de solution employée, dans ce cas la solution de Navier. Les coefficients  $A'$ ,  $B'$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (3.6)$$

Où les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis par :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad (3.7)$$

## 3.2 Équations Constitutives :

Les équations constitutives relient les contraintes aux déformations, pour la phase linéaire élastique, ces équations représentent la loi de Hook généralisée. Dans le cas d'un stratifié orthotrope tridimensionnel, on peut noter que les orientations des fibres ne coïncident pas avec les coordonnées globales de la plaque, les relations contraintes-déformations pour chaque couche sont données par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}^{(k)} \quad (3.8)$$

Dans laquelle,  $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}$  et  $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}$  sont les vecteurs des contraintes et déformations respectivement par rapport au système de coordonnées de stratifié  $(x, y, z)$ . Alors que  $\bar{Q}_{ij}$  sont les constantes élastiques transformées de la  $k^{eme}$  couche orthotrope exprimée par :

$$\begin{aligned}
 \overline{Q}_{11}^k &= Q_{11} \cos^4\theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta_k \cos^2\theta_k + Q_{22} \sin^4\theta_k \\
 \overline{Q}_{12}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2\theta_k \cos^2\theta_k + Q_{12}(\sin^4\theta_k + \cos^4\theta_k) \\
 \overline{Q}_{13}^k &= Q_{13} \cos^2\theta_k + Q_{23} \sin^2\theta_k \\
 \overline{Q}_{22}^k &= Q_{11} \sin^4\theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\theta_k \cos^2\theta_k + Q_{22} \cos^4\theta_k \\
 \overline{Q}_{23}^k &= Q_{13} \sin^2\theta_k + Q_{23} \cos^2\theta_k \\
 \overline{Q}_{33}^k &= Q_{33} \\
 \overline{Q}_{44}^k &= Q_{44} \cos^2\theta_k + Q_{55} \sin^2\theta_k \\
 \overline{Q}_{55}^k &= Q_{55} \cos^2\theta_k + Q_{44} \sin^2\theta_k \\
 \overline{Q}_{66}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2\theta_k - \cos^2\theta_k + Q_{66}(\sin^4\theta_k + \cos^4\theta_k)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Où  $\theta_k$  est l'angle entre l'axe principal de stratifié est l'axe de référence de chaque couche et  $Q_{ij}$  les coefficients réduits de rigidité qui peuvent être définis dans le cas d'une déformation transversale normale est différent de zéro ( $\varepsilon_z \neq 0$ ) par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}, \quad Q_{12} = \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})}{\Delta}, \quad Q_{13} = \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\Delta}, \quad Q_{23} = \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\Delta}, \quad Q_{33} = \frac{E_1(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} \\
 Q_{44} &= G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

Où  $E_i$ ,  $G_{ij}$  et  $\nu_{ij}$  sont respectivement le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson .

### 3.3 Équations d'équilibre :

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites associées à la présente théorie de déformation de cisaillement trigonométrique avec l'effet d'étirement sont dérivées en utilisant la version statique du principe des travaux virtuels. Le principe du travail virtuel est appliqué sous la forme analytique suivante :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left( \begin{array}{c} \sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z \\ +\tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} \end{array} \right) dA dz - \int_A q(x,y) \delta w dA = 0 \tag{3.11}$$

Où  $\delta$  est l'opérateur variationnel, A et  $q(x,y)$  sont respectivement la surface supérieure de la plaque et la charge répartie transversale. En remplaçant les expressions des déformations vir-

tuelles données a partir de l'équation 3.3 dans l'équation 3.11, le principe des travaux virtuels peut être exprimé en terme de contraintes par :

$$\int_A \begin{bmatrix} N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 \\ + M_x^b \delta \varepsilon_x^1 + M_y^b \delta \varepsilon_y^1 + M_{xy}^b \delta \gamma_{xy}^1 + M_x^s \delta \varepsilon_x^2 \\ + M_y^s \delta \varepsilon_y^2 + M_{xy}^s \delta \gamma_{xy}^2 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 - q \delta w \end{bmatrix} dA = 0 \quad (3.12)$$

Où  $N$ ,  $M^b$ ,  $M^s$  et  $S^s$  sont les résultantes des contraintes qui varient généralement d'un point à un autre dans une plaque chargée. Ces variations sont gérées par les conditions d'équilibres statiques.

Les résultantes de contraintes sont exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (3.13a)$$

$$N_z = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} g'(z) \sigma_z dz$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (3.13b)$$

Le remplacement de l'équation 3.3 dans l'équation 3.8 donne l'équation 3.13, les contraintes résultantes de la théorie proposée peuvent être représentée dans le terme des déformations virtuelles selon les équations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + B_{11}\varepsilon_x^1 + B_{12}\varepsilon_y^1 + B_{11}^s\varepsilon_x^2 + B_{12}^s\varepsilon_y^2 + X_{13}\varepsilon_z^0, \\
 N_y &= A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + B_{12}\varepsilon_x^1 + B_{22}\varepsilon_y^1 + B_{12}^s\varepsilon_x^2 + B_{22}^s\varepsilon_y^2 + X_{23}\varepsilon_z^0, \\
 N_z &= X_{13}\varepsilon_x^0 + X_{23}\varepsilon_y^0 + Y_{13}\varepsilon_x^1 + Y_{23}\varepsilon_y^1 + Y_{13}^s\varepsilon_x^2 + Y_{23}^s\varepsilon_y^2 + Z_{33}\varepsilon_z^0, \\
 N_{xy} &= A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{66}\gamma_{xy}^1 + B_{66}^s\gamma_{xy}^2, \\
 M_x^b &= B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + D_{11}\varepsilon_x^1 + D_{12}\varepsilon_y^1 + D_{11}^s\varepsilon_x^2 + D_{12}^s\varepsilon_y^2 + Y_{13}\varepsilon_z^0, \\
 M_y^b &= B_{12}\varepsilon_x^0 + B_{22}\varepsilon_y^0 + D_{12}\varepsilon_x^1 + D_{22}\varepsilon_y^1 + D_{12}^s\varepsilon_x^2 + D_{22}^s\varepsilon_y^2 + Y_{23}\varepsilon_z^0, \\
 M_{xy}^b &= B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{66}\gamma_{xy}^1 + D_{66}^s\gamma_{xy}^2, \\
 M_x^s &= B_{11}^s\varepsilon_x^0 + B_{12}^s\varepsilon_y^0 + D_{11}^s\varepsilon_x^1 + D_{12}^s\varepsilon_y^1 + H_{11}^s\varepsilon_x^2 + H_{12}^s\varepsilon_y^2 + Y_{13}^s\varepsilon_z^0, \\
 M_y^s &= B_{12}^s\varepsilon_x^0 + B_{22}^s\varepsilon_y^0 + D_{12}^s\varepsilon_x^1 + D_{22}^s\varepsilon_y^1 + H_{12}^s\varepsilon_x^2 + H_{22}^s\varepsilon_y^2 + Y_{23}^s\varepsilon_z^0, \\
 M_{xy}^s &= B_{66}^s\gamma_{xy}^0 + D_{66}^s\gamma_{xy}^1 + H_{66}^s\gamma_{xy}^2, \quad S_{yz}^s = A_{44}^s\gamma_{yz}^0, \quad S_{xz}^s = A_{55}^s\gamma_{xz}^0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Où  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,...etc. Utilisés dans l'équation 3.14 sont les coefficients de rigidité de la plaque, ils peuvent être définis comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \tag{3.15a}$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{i3}^{(k)} g'(z) (1, z, f(z)) dz, \quad i, j = 1, 2 \tag{3.15b}$$

$$Z_{33} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{33}^{(k)} [g'(z)]^2 dz, \tag{3.15c}$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{ij}^{(k)} [g(z)]^2 dz, \quad i, j = 4, 5 \tag{3.15d}$$

En remplaçant les expressions des contraintes et des déformations de l'équation 3.4 et l'équation 3.8 dans l'équation 3.12 et on intègre par parties et on isole séparément les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta\theta$  et  $\delta\phi_z$ , on obtient les équations d'équilibre comme suit :



$$\begin{aligned}
 \delta u_0 & : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
 \delta v_0 & : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
 \delta w_0 & : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\
 \delta \theta & : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0 \\
 \delta \phi_z & : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z = 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ensuite, en remplaçant les équations 3.4 et 3.14 dans l'équation 3.16, les équations différentielles d'équilibre de la présente théorie peuvent être réécrites en termes de variables de déplacement ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$  et  $\phi_z$ ) comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
 + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + X_{13} \frac{\partial \phi_z}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{3.17a}$$

$$\begin{aligned}
 (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 + B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial \theta}{\partial y} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + X_{23} \frac{\partial \phi_z}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{3.17b}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + Y_{13} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} + Y_{23} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} + q = 0
 \end{aligned} \tag{3.17c}$$

$$\begin{aligned}
 -(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial u_0}{\partial x} - (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial v_0}{\partial y} - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
 + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 - (k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s) \theta + (k_2 B')^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 + (k_1 A')^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k_1 A' A_{55}^s \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} + k_2 B' A_{44}^s \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} - (k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s) \phi_z = 0
 \end{aligned} \tag{3.17d}$$

$$\begin{aligned}
 -X_{13} \frac{\partial u_0}{\partial x} - X_{23} \frac{\partial v_0}{\partial y} + Y_{13}^s \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + Y_{23}^s \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - (k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s) \theta + k_1 A' A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 + k_2 B' A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} - Z_{33} \phi_z = 0
 \end{aligned} \tag{3.17e}$$

### 3.4 Exemples illustratifs :

Afin de prouver l'efficacité de cette théorie, une plaque composite stratifiée carrée simplement appuyée est considérée pour l'étude numérique détaillée. La plaque est soumise à deux types différents de charges mécaniques  $q(x, y)$  agissant à la surface supérieure (c'est-à-dire  $z = -h/2$ ) de la plaque. Avec la solution de Navier, la charge transversale est le plus souvent représentée en double série trigonométrique comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (3.18)$$

Dans lequel les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont déjà définis dans l'équation 3.7 et  $q_{mn}$  est le coefficient d'expansion de charge de Fourier. Les valeurs de ce coefficient pour différents cas de charge sont obtenues en utilisant l'équation suivante :

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy \quad (3.19)$$

#### 3.4.1 Exemple A :

Dans cet exemple une plaque composite stratifiée carrée simplement appuyée dans sur ses quatre cotés est soumise à une charge parabolique transversale  $q(x, y) = q_0(x/a)^2$ , comme représenté dans la figure 3.2. a partir de l'équation 3.19 le coefficient  $q_{mn}$  peut être réécrit sous la forme :

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{a_3b} \int_0^a x^2 \sin(\alpha x) dx \int_0^b \sin(\beta y) dy = \frac{aq_0}{\pi^2 mn} I, \quad m, n = 1, 3, 5... \quad (3.20a)$$

où

$$I = \left( \frac{2}{m\pi} \sin(m\pi) + \frac{2}{m^2\pi^2} \cos(m\pi) - \cos(m\pi) - \frac{2}{m^2\pi^2} \right) (1 - \cos(m\pi)) \quad (3.20b)$$

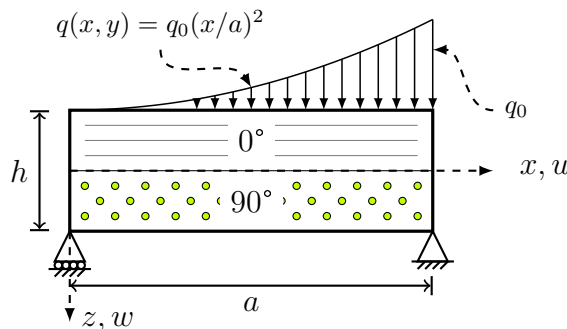


FIGURE 3.2 – Plaque stratifiée simplement appuyée sous une charge parabolique transversale.

### 3.4.2 Exemple B :

Dans cet exemple une plaque composite stratifiée carrée simplement appuyée sur ses quatre cotés tous les bords soumise à une charge suivant une ligne à  $(x = a/2)$ , comme indiqué dans la figure 3.3. Dans ce cas l'amplitude du coefficient  $q_{mn}$  est exprimé comme indiqué ci-dessous :

$$q_{mn} = \frac{2 q_0}{b} \sin \left( \frac{m\pi\xi}{a} \right) \quad (3.21)$$

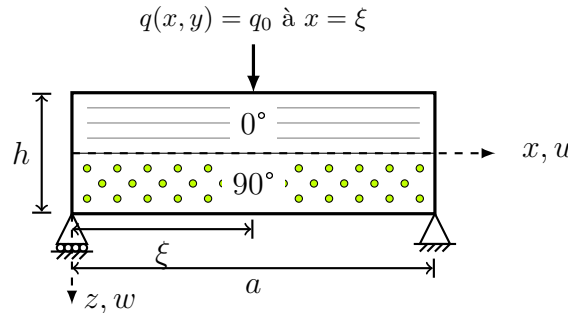


FIGURE 3.3 – Plaque stratifiée simplement appuyée sous une charge linéaire transversale.

Où  $\xi$  et  $q_0$  sont respectivement la distance entre la ligne de chargement et l'axe  $y$  et l'intensité de la charge transversale. Selon le présent modèle, l'analyse des contraintes de flexion d'une plaque composite stratifiée à couches croisées simplement appuyée est obtenue en utilisant la solution de Navier. Les conditions aux limites des plaques simplement appuyées sont supposées sur les bords latéraux de la plaque composite stratifiée comme suit :

$$\text{aux bords } (x = 0, a) : \quad v_0 = w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \theta = 0 \quad (3.22a)$$

$$\text{aux bords } (y = 0, b) : \quad u_0 = w_0 = N_y = M_y^b = M_y^s = \theta = 0 \quad (3.22b)$$

L'expression des variables de déplacement inconnues satisfaisant les conditions aux limites données par l'équation 3.22; et peut être exprimée dans une fonction de sinus a double série de

Fourier comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \phi_z \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Theta_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{mn}$ ,  $\Theta_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$  sont des coefficients inconnues. La Substitution des équations 3.20 ou 3.21 (en fonction du cas de la charge) et l'équation 3.23 dans l'équation 3.17 donne une équation algébrique qui est écrite sous forme de matrice compacte comme suit :

$$[K] \{\Delta\} = \{F\} \quad (3.24)$$

Où  $\{\Delta\}$ ,  $\{F\}$  et  $[K]$  sont respectivement le vecteur des inconnues, le vecteur des forces et la matrice de rigidité. Ces termes peuvent être définis comme suit :

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, U_{mn}, \Theta_{mn}, \Phi_{mn}\}^{Tr} \quad (3.25a)$$

$$\{F\} = \{0, 0, q_{mn}, 0, 0\}^{Tr} \quad (3.25b)$$

Et les composantes de la matrice de rigidité symétrique  $[K]$  sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, & k_{12} &= \alpha\beta A_{12} + \alpha\beta A_{66}, \\
 k_{13} &= -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2 B_{12} - 2\alpha\beta^2 B_{66}, \\
 k_{14} &= -k_1\alpha B_{11}^s - k_2\alpha B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')\alpha\beta^2 B_{66}^s, & k_{15} &= -\alpha X_{13}, \\
 k_{22} &= \beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66}, & k_{23} &= -\beta^3 B_{22} - \alpha^2\beta B_{12} - 2\alpha^2\beta B_{66}, \\
 k_{24} &= -k_1\beta B_{12}^s - k_2\beta B_{22}^s + (k_1 A' + k_2 B')\alpha^2\beta B_{66}^s, & k_{25} &= -\beta X_{23}, \\
 k_{33} &= \alpha^4 D_{11} + 2\alpha^2\beta^2 D_{12} + \beta^4 D_{22} + 4\alpha^2\beta^2 D_{66}, \\
 k_{34} &= k_1(\alpha^2 D_{11}^s + \beta^2 D_{12}^s) + k_2(\alpha^2 D_{12}^s + \beta^2 D_{22}^s) - 2(k_1 A' + k_2 B')\alpha^2\beta^2 D_{66}^s, \\
 k_{35} &= \alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23}, \\
 k_{44} &= -(k_1 A' + k_2 B')^2 \alpha^2 \beta^2 H_{66}^s + k_1(k_1 H_{11}^s + k_2 H_{12}^s) + k_2(K_1 H_{12}^s + k_2 H_{22}^s) + \\
 &\quad (k_2 B')^2 \beta^2 A_{44}^s + (k_1 A')\alpha^2 A_{55}^s, \\
 k_{45} &= k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s + k_2 B' \beta^2 A_{44}^s + k_1 A' \alpha^2 A_{55}^s, \\
 k_{55} &= \beta^2 A_{44}^s + \alpha^2 A_{55}^s + Z_{33},
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

### 3.5 Résultats numériques et discussions :

Dans cette section, certains exemples illustratifs sont étudiés pour vérifier l'exactitude et la validité des présentes formulations sur la base de la théorie de déformation par cisaillement proposée avec l'effet d'étirement pour l'analyse des contraintes de flexion des plaques stratifiées à couches croisées simplement appuyées soumises à une charge parabolique transversale et une charge linéaire. Le déplacement transversal utilise une fonction cosinus en coordonnées d'épaisseur pour introduire l'influence de la déformation normale transversale. Les résultats obtenus pour différentes valeurs du rapport côté/épaisseur  $a/h$  de la plaque composite sont répertoriés et comparés dans le tableau 3.1 avec leurs homologues sur la base de la théorie classique des plaques (CPT) de (KIRCHHOFF 1850), (FSDT) de (MINDLIN 1951), (HSDT) de (REDDY 1984a) et la théorie de déformation par cisaillement trigonométrique quasi-3d des plaques (TSDT) développée par (GHUGAL et SAYYAD 2013), qui comprenait à la fois le cisaillement transversal et les déformations normales. Pour la simplicité, les résultats obtenus pour les déplacements, les contraintes sont présentés sous les formes non dimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \bar{u} \left( 0, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) &= \frac{h^2 E_2}{q_0 a^3} u, & \bar{w} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) &= \frac{100 h^3 E_2}{q_0 a^4} w, \\
 \bar{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_x, & \bar{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_y, \\
 \bar{\tau}_{xy} \left( 0, 0, -\frac{h}{2} \right) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \tau_{xy}, & \bar{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right) &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}, \\
 \bar{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right) &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Les propriétés suivantes de *graphite-époxy* pour les plaques composites stratifiées dans les exemples ci-dessus sont utilisées :

$$\begin{aligned}
 E_1/E_2 = 25, \quad E_3/E_2 = 1, \quad G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \\
 G_{23}/E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3.5.1 Exemple 1 :

Le premier exemple est réalisé pour une plaque composite carrée à deux couches antisymétrique ( $0^\circ / 90^\circ$ ) simplement appuyée soumise à la charge parabolique transversale. Les deux couches ont la même épaisseur et les propriétés des matériaux sont données précédemment. Le tableau 3.1 montre des déplacements planes et transversaux  $w$  et  $u$  et les contraintes  $(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy})$  pour les différentes valeurs du rapport côté/épaisseur  $(a/h)$ . Les résultats obtenus sont comparés à ceux prédits par CPT, FSDT, HSDT et quasi-3D TSDT. de l'analyse du tableau-3.1. on peut observer que les résultats théoriques des déplacements transversaux obtenus en utilisant la théorie actuelle de déformation par cisaillement quasi-3D des plaques correspondent exactement aux résultats de la théorie TSDT quasi-3D donnée par (GHUGAL et SAYYAD 2013), mais une différence marginale est observée par rapport à la théorie de Reddy en raison de la négligence de l'effet d'étirement de l'épaisseur ( $\varepsilon_z = 0$ ) ; De plus, il convient de noter que les résultats des contraintes normales non dimensionnelles dans le plan  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et la contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}_{xy}$  diminuent avec l'augmentation de la valeur du rapport côté/épaisseur  $a/h$ , ainsi que la CPT et FSDT sous-estiment ces contraintes par rapport à celles obtenues par la présente théorie, quasi-3D TSDT et HSDT de Reddy pour tous les rapports. On observe également que, pour une plaque stratifiée carrée mince ( $a/h = 100$ ), toutes les théories prédisent les mêmes résultats pour les déplacements dans le plan et transversaux et les contraintes normales dans le plan ; cela est dû à la négligence du cisaillement transversal et des déformations normales.

La variation de la contrainte normale et de cisaillement transversal dans le plan  $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}^{CR}$  (calculé à l'aide des équations constitutives) a travers l'épaisseur de la plaque stratifiée ( $0^\circ/90^\circ$ ) carrée soumise à une charge parabolique pour un rapport d'épaisseur égale à 4 est représentée sur la figure 3.4 et 3.5, respectivement. On peut voir que la variation des contraintes normales et de

cisaillement transversales dans le plan obtenues par la théorie actuelle pour les plaques stratifiées carrées épaisses soumises à une charge parabolique est en bon accord avec le quasi-3D TSDT de (GHUGAL et SAYYAD 2013). La comparaison des contraintes de cisaillement transversales non dimensionnelles pour une plaque stratifiée carrée simplement appuyée soumise à une charge parabolique est rapportée dans le tableau 3.2 pour les trois valeurs du rapport d'épaisseur ( $a/h = 4, 10, 100$ ). Il est à noter que les résultats numériques obtenus en utilisant la présente théorie sont beaucoup plus proches des solutions quasi-3D TSDT et HSDT. De plus, la contrainte de cisaillement transversale prédite par les relations constitutives  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{yz}^{CR}$  de la théorie de déformation transversale est très loin à celle obtenue à l'aide des équations d'équilibre de la théorie de l'élasticité  $\bar{\tau}_{xz}^{EE}, \bar{\tau}_{yz}^{EE}$  (calculée à l'aide des équations d'équilibre).

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
			(-h/2)	(0)	(-h/2)	(-h/2)	(-h/2)
4	Présente	TSDT	0.0059	0.8799	0.3475	0.0410	0.0340
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0059	0.8790	0.3454	0.0406	0.0354
	Reddy(1984)	HSDT	0.0059	0.8991	0.3491	0.0385	0.0328
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0044	0.8794	0.3043	0.0370	0.0313
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0044	0.5018	0.3071	0.0376	0.0288
10	Présente	TSDT	0.0047	0.5630	0.3143	0.0387	0.0300
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0047	0.5627	0.3134	0.0385	0.0306
	Reddy(1984)	HSDT	0.0047	0.5656	0.3131	0.0376	0.0304
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0044	0.5620	0.3061	0.0373	0.0299
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0044	0.5018	0.3071	0.0376	0.0288
100	Présente	TSDT	0.0044	0.5021	0.3081	0.0383	0.0288
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0044	0.5021	0.3081	0.0383	0.0288
	Reddy(1984)	HSDT	0.0044	0.5024	0.3072	0.0376	0.0298
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0044	0.5023	0.3071	0.0376	0.0288
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0044	0.5018	0.3071	0.0376	0.0288

<sup>(a)</sup> Résultats tirés de la référence (GHUGAL et SAYYAD 2013).

TABLE 3.1 – Comparaison du déplacement dans le plan  $\bar{u}$ , déplacement transversal  $\bar{w}$ , contraintes normales dans le plan  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et la contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  pour une plaque stratifiée carrée à deux couches ( $0^\circ / 90^\circ$ ) simplement appuyée soumise a un chargement parabolique

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$	$\bar{\tau}_{yz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{yz}^{EE}$
			(0)	(0)	(0)	(0)
4	Présente	TSDT	0.1931	0.3491	0.1677	0.2505
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.1956	0.3466	0.1707	0.2444
	Reddy(1984)	HSDT	0.2008	0.3292	0.1721	0.2402
	Mindlin(1951)	FSDT	0.1656	0.2540	0.1347	0.2540
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.2594	—	0.2115
10	Présente	TSDT	0.2207	0.2716	0.1827	0.2154
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.2269	0.2703	0.1903	0.2141
	Reddy(1984)	HSDT	0.2253	0.2681	0.1878	0.2138
	Mindlin(1951)	FSDT	0.1681	0.2578	0.1378	0.2578
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.2594	—	0.2115
100	Présente	TSDT	0.2398	0.2590	0.1925	0.2113
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.2421	0.2589	0.1993	0.2113
	Reddy(1984)	HSDT	0.2368	0.2593	0.1878	0.2114
	Mindlin(1951)	FSDT	0.1691	0.2594	0.1378	0.2594
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.2594	—	0.2115

<sup>(a)</sup> Résultats tirés de la référence (GHUGAL et SAYYAD 2013) .

TABLE 3.2 – Comparaison des contraintes de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$  pour une plaque stratifiée carrée à deux couches (0 °/ 90 °) simplement appuyée soumise a un chargement parabolique

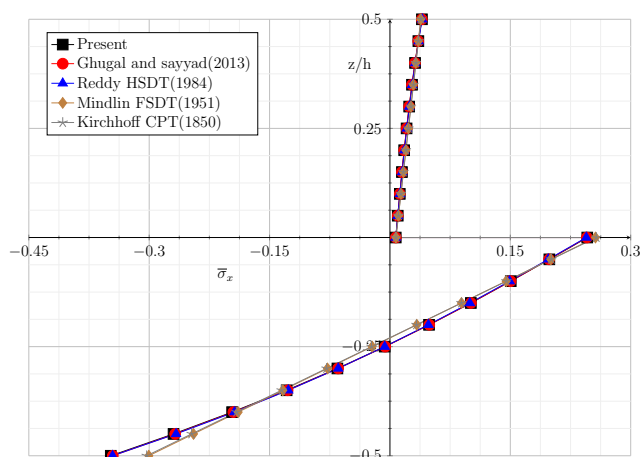


FIGURE 3.4 – Variation dans le plan de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  a travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée (0°/90°) soumise a une charge parabolique pour un rapport d'épaisseur 4 à  $(x = a/2, y = b/2, z)$



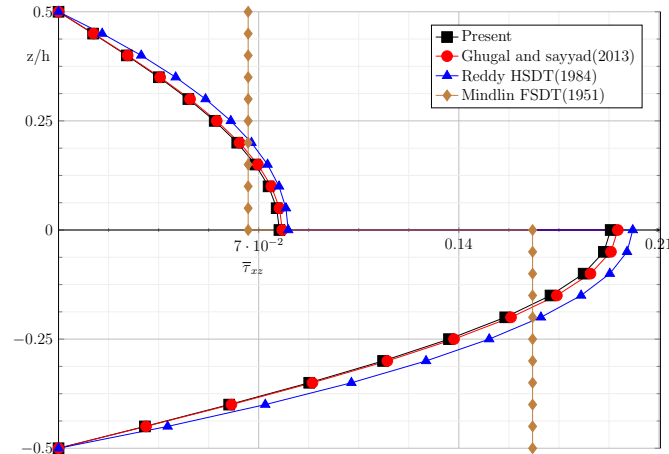


FIGURE 3.5 – Variation de la contrainte transversale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée ( $0^\circ/90^\circ$ ) soumise à une charge parabolique pour un rapport d'épaisseur 4 à ( $x = 0, y = b/2, z$ )

### 3.5.2 Exemple 2 :

Dans le deuxième exemple, une plaque composite stratifiée avec deux couches croisées anti-symétrique soumise à une charge uniforme suivant une ligne. Les tableaux 3.3 et 3.4 montrent la comparaison des déplacements et les contraintes dans le plan et transversales pour les différentes valeurs du rapport d'épaisseur  $a/h$ . L'analyse du tableau 3.3 montre que la présente théorie est en excellent accord tout en prédisant les déplacements dans le plan  $\bar{u}$  et la contrainte normale dans le plan  $\bar{\sigma}_x$  par rapport à ceux présentés par (REDDY 1984a) et (GHUGAL et SAYYAD 2013), tandis que CPT et FSDT les sous estiment, en particulier pour les cas de plaques stratifiées simplement appuyées épaisses et moyennement épaisses. Cependant, la variation de la contrainte normale dans le plan  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{yz}^{CR}$  à travers l'épaisseur, obtenue en utilisant des relations constitutives d'une plaque stratifiée carrée à deux couches croisée soumise à une charge suivant une ligne pour un rapport d'épaisseur égale à 4 est représenté, respectivement sur les figures 3.6 et 3.7. Il est évident à partir des résultats obtenus que les calculs actuels sont dans un excellent accord avec les solutions de quasi-3D fournies par (GHUGAL et SAYYAD 2013). Par conséquent, les résultats de Reddy varient considérablement, par rapport au modèle de la théorie quasi-3D en raison de la négligence de la déformation normale transversale (voir Fig 3.7). En fait, la présente théorie prédit d'excellentes valeurs de contrainte de cisaillement transverse lorsque les équations d'équilibre sont utilisées.

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
			(-h/2)	(0)	(-h/2)	(-h/2)	(-h/2)
4	Présente	TSDT	0.0191	3.8587	3.7158	0.1937	0.1063
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0187	3.8590	3.6899	0.1975	0.1062
	Reddy(1984)	HSDT	0.0190	4.0287	3.5476	0.1655	0.1123
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0157	4.1089	1.7611	0.1451	0.1005
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0164	2.1186	1.8153	0.1402	0.0984
10	Présente	TSDT	0.0168	2.4219	2.4489	0.1631	0.1015
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0167	2.4221	2.4453	0.1636	0.1024
	Reddy(1984)	HSDT	0.0167	2.4430	2.3719	0.1487	0.0968
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0162	2.4372	1.8077	0.1408	0.1002
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0164	2.1186	1.8153	0.1402	0.0984
100	Présente	TSDT	0.0164	2.1204	1.8253	0.1427	0.0982
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0164	2.1204	1.8262	0.1427	0.0983
	Reddy(1984)	HSDT	0.0164	2.1219	1.8255	0.1403	0.0930
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0164	2.1218	1.8077	0.1401	0.0985
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0164	2.1186	1.8153	0.1402	0.0984

<sup>(a)</sup> Résultats tirés de la référence (GHUGAL et SAYYAD 2013) .

TABLE 3.3 – Comparaison du déplacement dans le plan  $\bar{u}$ , déplacement transversal  $\bar{w}$ , contraintes normales dans le plan  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  et la contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  pour une plaque stratifiée carrée à deux couches (0 °/ 90 °) simplement appuyée soumise a un chargement suivant une ligne

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$	$\bar{\tau}_{yz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{yz}^{EE}$
			(0)	(0)	(0)	(0)
4	Présente	TSDT	0.4085	0.4647	1.9714	31.4078
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.4207	0.4514	1.9572	31.5259
	Reddy(1984)	HSDT	0.4113	0.4502	3.2237	29.5337
	Mindlin(1951)	FSDT	0.2953	0.4343	6.6067	9.8324
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.4535	—	9.5442
10	Présente	TSDT	0.3994	0.4645	4.8608	21.9233
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.4303	0.4572	4.7606	21.9704
	Reddy(1984)	HSDT	0.4246	0.4531	6.0254	18.7668
	Mindlin(1951)	FSDT	0.3076	0.4452	6.5471	9.7839
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.4535	—	9.5442
100	Présente	TSDT	0.4143	0.4547	8.6607	9.5217
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.4576	0.4528	8.9480	9.5414
	Reddy(1984)	HSDT	0.4468	0.4534	8.7615	9.5805
	Mindlin(1951)	FSDT	0.3163	0.4534	6.2980	9.5734
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.4535	—	9.5442

<sup>(a)</sup> Résultats tirés de la référence (GHUGAL et SAYYAD 2013) .

TABLE 3.4 – Comparaison des contraintes de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$  pour une plaque stratifiée carrée à deux couches (0 °/ 90 °) simplement appuyée soumise a un chargement suivant une ligne

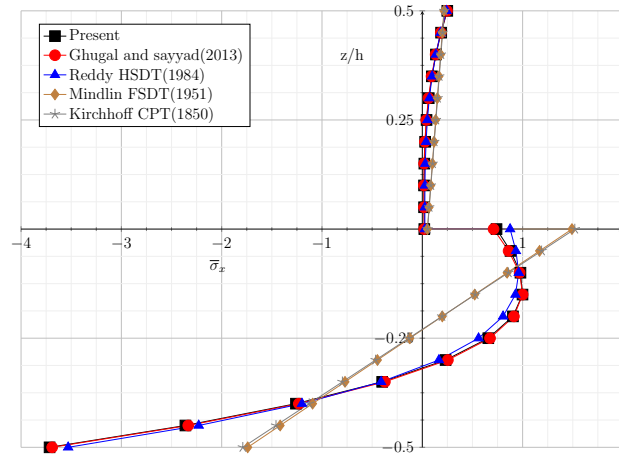


FIGURE 3.6 – Variation dans le plan de la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x$  a travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée ( $0^\circ/90^\circ$ ) soumise a une charge suivant une ligne pour un rapport d'épaisseur 4 à ( $x = a/2, y = b/2, z$ )

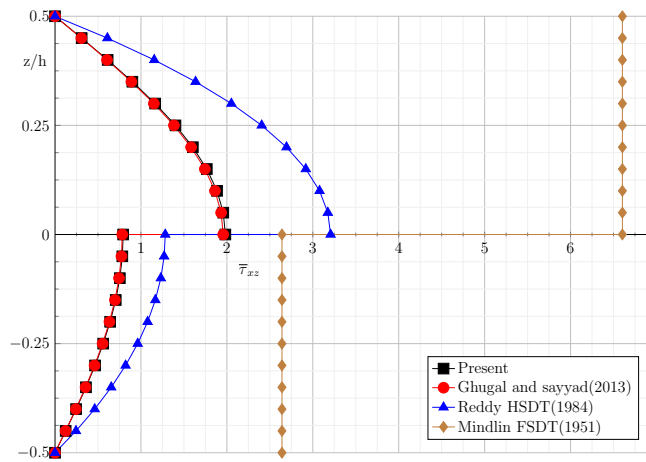


FIGURE 3.7 – Variation de la contrainte transversale de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  a travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée ( $0^\circ/90^\circ$ ) soumise a une charge suivant une ligne pour un rapport d'épaisseur 4 à ( $x = a/2, y = 0, z$ )

### 3.5.3 Exemple 3 :

Cet exemple est une extension de l'exemple précédent, la méthode de la présente théorie est vérifiée pour l'analyse de la contrainte de flexion d'une plaque composite stratifiée carrée simplement appuyée à trois couches ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) soumise à une charge parabolique transversale. Les valeurs numériques des déplacements et les contraintes non dimensionnelles sont présentées dans les tableaux 3.5 et 3.6 pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur  $a/h$ . Il est clair que le déplacement dans le plan  $\bar{u}$  et la contrainte normale dans le plan  $\bar{\sigma}_x$  obtenue par la théorie actuelle concordent à nouveau avec les solutions ((REDDY 1984a), (GHUGAL et SAYYAD 2013)) pour tous les rapports d'épaisseur. Cependant, on peut remarquer que la présente théorie sous-estime les valeurs du déplacement transversal  $\bar{w}$ , de la contrainte normale dans le plan  $\bar{\sigma}_y$  et la contrainte

de cisaillement dans le plan  $\bar{\sigma}_{xy}$  pour les plaques stratifiées carrées a couches croisées ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) épaisses et modérément épaisses par rapport à d'autres théories de déformation par cisaillement, mais elle est en bon accord pour la même forme de stratification de plaques minces. Cela est expliqué par le modèle cinématique utilisé dans la présente théorie avec seulement cinq inconnues. En outre, il peut être constaté que ce modèle ne convient pas à l'analyse de flexion des plaques composites stratifiées symétriques et donne une différence significative dans les résultats numériques par rapport à ceux d'autres théories d'ordre supérieur, dans lesquelles le champ de déplacement implique plus de cinq inconnues. D'un autre côté, on peut noter que la CPT montre plus d'erreur dans les résultats en raison de la négligence du cisaillement transversal et des déformations normales.

le tableau 3.6 montre que les valeurs des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xy}$ , augmentent avec l'augmentation du rapport d'épaisseur lorsque les relations constitutives dérivées et les équations d'équilibre sont utilisées.

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
			(-h/2)	(0)	(-h/2)	(-h/2)	(-h/2)
4	Présente	TSDT	0.0048	0.6348	0.2859	0.0143	0.0256
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0047	0.8493	0.2838	0.0332	0.0359
	Reddy(1984)	HSDT	0.0047	0.8525	0.2807	0.0303	0.0356
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0026	0.6882	0.1902	0.0251	0.0233
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0032	0.1976	0.2357	0.0091	0.0130
10	Présente	TSDT	0.0035	0.2685	0.2427	0.0101	0.0160
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0035	0.3228	0.2427	0.0150	0.0191
	Reddy(1984)	HSDT	0.0035	0.3212	0.2418	0.0142	0.0191
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0031	0.2845	0.2251	0.0131	0.0162
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0032	0.1976	0.2357	0.0091	0.0130
100	Présente	TSDT	0.0032	0.1983	0.2361	0.0093	0.0131
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0032	0.1989	0.2361	0.0094	0.0131
	Reddy(1984)	HSDT	0.0032	0.1989	0.2358	0.0091	0.0131
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0032	0.1985	0.2356	0.0091	0.0131
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0032	0.1976	0.2357	0.0091	0.0130

<sup>(a)</sup> Résultats tirés de la référence (GHUGAL et SAYYAD 2013).

TABLE 3.5 – Comparaison du déplacement dans le plan  $\bar{u}$ , déplacement transversal  $\bar{w}$ , contraintes normales dans le plan  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  et la contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  pour une plaque stratifiée carrée à trois couches ( $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) simplement appuyée soumise a un chargement parabolique

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$	$\bar{\tau}_{yz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{yz}^{EE}$
			(0)	(0)	(0)	(0)
4	Présente	TSDT	0.0780	0.1391	0.1897	0.0254
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.1125	0.1007	0.1234	0.0900
	Reddy(1984)	HSDT	0.1124	0.1122	0.1245	0.1153
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0763	0.2132	0.0954	0.1546
	Kirchhoff(1850) CPT		—	0.2379	—	0.1093
10	Présente	TSDT	0.0938	0.1992	0.2011	0.0875
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.1489	0.1912	0.0969	0.1010
	Reddy(1984)	HSDT	0.1431	0.1965	0.0961	0.1088
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0835	0.2328	0.0735	0.1183
	Kirchhoff(1850) CPT		—	0.2379	—	0.1093
100	Présente	TSDT	0.1065	0.2369	0.2082	0.1089
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.1649	0.2370	0.0910	0.1090
	Reddy(1984)	HSDT	0.1558	0.2371	0.0891	0.1092
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0854	0.2379	0.0682	0.1093
	Kirchhoff(1850) CPT		—	0.2379	—	0.1093

<sup>(a)</sup> Résultats tirés de la référence (GHUGAL et SAYYAD 2013) .

TABLE 3.6 – Comparaison des contraintes de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$  pour une plaque stratifiée carrée à trois couches ( $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ) simplement appuyée soumise à un chargement parabolique

### 3.5.4 Exemple 4 :

Le dernier exemple est consacré à l'analyse des plaques composites stratifiées carrées symétriques à trois couches ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) avec des conditions aux limites des plaques simplement appuyées et soumises à une charge suivant une ligne. Les tableaux 3.7 et 3.8 présentent la comparaison des déplacements et des contraintes pour les différents rapports d'épaisseur  $a/h$ . On peut observer que le déplacement non dimensionnel dans le plan  $\bar{u}$  et la contrainte normale dans le plan  $\bar{\sigma}_x$  obtenus par la théorie actuelle et le quasi-3D TSDT développé par (GHUGAL et SAYYAD 2013) et le HSDT donné par (REDDY 1984a) sont en bon accord les uns avec les autres pour tous les rapports d'épaisseur. Il faut noter à nouveau que la présente méthode sous-estime les valeurs de déplacement transversal maximum  $\bar{w}$ , la contrainte normale dans le plan  $\bar{\sigma}_y$  et la contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  par rapport à d'autres théories de déformation par cisaillement. Le tableau 3.8 présente une comparaison des contraintes de cisaillement transversales pour la plaque stratifiée carrée ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) soumise à une charge suivant une ligne. L'examen des résultats révèle que la présente théorie surestime la valeur de la contrainte de cisaillement transversale maximale  $\bar{\tau}_{xy}^{cr}$  car les relations constitutives obtenues sont utilisées en comparaison avec les résultats publiés précédemment.

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
			(-h/2)	(0)	(-h/2)	(-h/2)	(-h/2)
4	Présente	TSDT	0.0148	2.7021	2.6878	0.0919	0.0763
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0151	3.5799	2.7128	0.1711	0.0930
	Reddy(1984)	HSDT	0.0149	3.6635	2.6460	0.1427	0.0981
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0096	3.1246	0.9299	0.0798	0.0780
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0116	0.7624	1.0815	0.0175	0.0563
10	Présente	TSDT	0.0121	1.1151	1.7180	0.0636	0.0617
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0123	1.3349	1.7217	0.0838	0.0656
	Reddy(1984)	HSDT	0.0123	1.3332	1.6534	0.0606	0.0665
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0113	1.1720	1.0530	0.0301	0.0622
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0116	0.7624	1.0815	0.0175	0.0563
100	Présente	TSDT	0.0116	0.7660	1.0948	0.0192	0.0565
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.0116	0.7685	1.0930	0.0199	0.0568
	Reddy(1984)	HSDT	0.0116	0.7685	1.0912	0.0187	0.0569
	Mindlin(1951)	FSDT	0.0116	0.7665	1.0791	0.0180	0.0567
	Kirchhoff(1850)	CPT	0.0116	0.7624	1.0815	0.0175	0.0563

<sup>(a)</sup> Résultats tirés de la référence (GHUGAL et SAYYAD 2013) .

TABLE 3.7 – Comparaison du déplacement dans le plan  $\bar{u}$ , déplacement transversal  $\bar{w}$ , contraintes normales dans le plan  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  et la contrainte de cisaillement dans le plan  $\bar{\tau}_{xy}$  pour une plaque stratifiée carrée à trois couches (0 ° / 90 ° / 0 °) simplement appuyée soumise a un chargement suivant une ligne

a/h	Théorie	Modèle	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$	$\bar{\tau}_{yz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{yz}^{EE}$
			(0)	(0)	(0)	(0)
4	Présent	TSDT	0.4389	0.5456	2.5800	20.9528
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.3118	0.4254	2.1435	13.0485
	Reddy(1984)	HSDT	0.2981	0.4279	3.7532	7.6620
	Mindlin(1951)	FSDT	0.1723	0.4826	6.6573	10.5762
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.5826	—	6.5485
10	Présent	TSDT	0.4073	0.5524	6.6154	8.0586
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.3783	0.5219	4.8317	5.8024
	Reddy(1984)	HSDT	0.3595	0.5258	6.1266	4.3926
	Mindlin(1951)	FSDT	0.2019	0.5625	6.2571	9.9911
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.5626	—	6.5485
100	Présent	TSDT	0.4013	0.5806	5.3960	6.3369
	Ref <sup>(a)</sup>	TSDT	0.4036	0.5791	6.0101	7.2112
	Reddy(1984)	HSDT	0.3814	0.5796	5.8537	7.2196
	Mindlin(1951)	FSDT	0.2092	0.5817	4.3858	7.1597
	Kirchhoff(1850)	CPT	—	0.5826	—	6.5485

<sup>(a)</sup> Résultats tirés de la référence (GHUGAL et SAYYAD 2013) .

TABLE 3.8 – Comparaison des contraintes de cisaillement transversale  $\bar{\tau}_{xz}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$  pour une plaque stratifiée carrée à trois couches (0 ° / 90 ° / 0 °) simplement appuyées soumise à un chargement suivant une ligne

# Chapitre 4

## Étude numérique des plaques composites

### 4.1 Présentation de la méthode des éléments finis :

En raison de diverses raisons telles que la géométrie, les conditions aux limites et les charges appliquées, les problèmes réels sont trop compliqués pour être résolus analytiquement. Une fois que le matériau passe de l'isotropie à l'orthotropie, la complexité du problème augmente. Si tous ces problèmes sont considérés comme le processus analytique, les solutions sont pratiquement inaccessibles. En conséquence, l'ingénierie assistée par ordinateur (IAO) a été développée en traduisant des méthodes analytiques en logiciels informatiques pratiques pour simuler efficacement les problèmes. Cette ingénierie assistée par ordinateur peut aider à garantir que les caractéristiques du modèle fonctionneront comme prévu dans des conditions réelles et à valider les résultats théoriques.

Diviser l'ensemble du corps structurel en plusieurs petits corps géométriquement simples, appelés éléments, est un concept de base des méthodes des éléments finis. Ces éléments ont des tailles finies donc la méthode est appelée « Méthodes des éléments finis (FEM) ». Un grand nombre de programmes commerciaux existent avec de nombreuses capacités d'analyse par éléments finis pour différentes disciplines d'ingénierie. Ils aident à résoudre des problèmes d'une simple analyse linéaire à une analyse transitoire non linéaire. Certains CAE ont des capacités spéciales pour analyser les matériaux composites, car ces méthodes acceptent les formulations d'éléments programmés par l'utilisateur et les équations constitutives personnalisées telles que *ANSYSTM* et *ABAQUSTM*. Ces types de systèmes sont généralement classés en trois parties : le pré-processeur, le processeur et le post-processeur. Dans cette étude, *ANSYSTM 16.0* est utilisé pour étudier les comportements des matériaux composites dans diverses configurations.

Le but principal de ce chapitre est d'obtenir les résultats par la méthode des éléments finis qui sont utilisés pour la comparaison avec les résultats de la méthode analytique développée au chapitre 3.

### 4.1.1 Types d'éléments :

De nombreux types d'éléments différents sont contenus dans la bibliothèque d'éléments de *ANSYS* 16.0. Le type d'élément détermine la formulation d'élément utilisée, comme le degré de liberté, les fonctions d'interpolation et les dimensions. Des éléments bidimensionnels et des éléments tridimensionnels doivent être utilisés pour les structures composites en raison de leurs comportements orthotropes. En utilisant les fichiers d'aide *ANSYS* 16.0, les types d'élément appropriés pour les structures composites stratifiées sont pris en compte et répertoriés ci-dessous comme référence.

#### 4.1.1.1 Éléments bidimensionnels :

Les éléments 2-D sont largement implémentés et différenciés par des types d'éléments, appelés éléments de coque. Les types d'éléments doivent être choisis en fonction des problèmes et des résultats souhaités. La théorie classique des stratifiées est basée sur la théorie de Kirchhoff selon laquelle la déformation de cisaillement entre les couches est supposée être nulle. Cependant, l'effet de cisaillement dans la structure composite est important. En conséquence, la théorie de Mindlin, qui prend en compte la déformation de cisaillement transverse, est utilisée dans *ANSYS* 16.0. Par conséquent, les éléments de coque énumérés ci-dessous ont inclus la déformation de cisaillement transversale dans leur matrice de rigidité.

##### **SHELL181 (coque en couches de déformation finie) :**

- Convient pour l'analyse des structures de coque minces à moyennement épaisses.
- Élément à quatre nœuds avec six degrés de liberté à chaque nœud. Convient parfaitement pour une rotation linéaire et importante et possède de grandes capacités de déformation.
- Très précis, même avec des maillages grossiers.
- Inclut les effets de la déformation transversale par cisaillement.

##### **SHELL281 (coque en couches de déformation finie) :**

- Convient pour l'analyse des structures de coque minces à moyennement épaisses.
- Élément à huit nœuds avec six degrés de liberté à chaque nœud.
- Convient parfaitement pour une rotation linéaire et importante et possède de grandes capacités de déformation.
- Inclut les effets de la déformation transversale par cisaillement.



#### 4.1.1.2 Éléments tridimensionnels :

Parfois, il n'est pas approprié d'utiliser l'élément de coque dans des cas spécifiques tels que les stratifiés épais. Par ce que les conditions de contrainte plane sont appliqués a des éléments de coque, la contrainte dans la troisième direction ne peut pas être obtenue. Le composite doit être analysé comme solide plutôt que comme plan. Cependant, l'utilisation d'éléments 3D doit être faite à bon escient car ils ont besoin d'un espace informatique élevé pour stocker les données et prennent généralement du temps.

##### **SOLID185 :**

- Éléments en couches avec huit nœuds ayant trois degrés de liberté à chaque nœud.
- Possède une plasticité, un renforcement des contraintes, une grande déflexion et de grandes capacités de déformation.
- Empêche le verrouillage volumétrique du maillage dans les cas presque incompressibles.

##### **SOLID186 :**

- Éléments en couches avec vingt nœuds ayant trois degrés de liberté à chaque nœud.
- Possède une capacité de formulation mixte pour simuler des déformations presque incompressibles de matériaux élastoplastique.
- Autorisez jusqu'à 250 couches avec de grandes capacités de déformation.

#### 4.1.2 Type d'élément dans cette étude :

L'élément *Solid186* qui présente un comportement de déplacement quadratique est sélectionné dans cette étude. L'élément est défini par 20 nœuds. Chaque nœud a trois degrés de liberté, des translations dans les directions nodales x, y et z. Cet élément peut être simulé des solides épais.

#### 4.1.3 Maillage :

L'une des questions les plus fréquemment posées concerne la génération et la sélection de la taille de maillage appropriée afin d'analyser un problème. Chaque problème est différent et il n'y a pas de règles définies pour développer la taille de maillage appropriée. En conséquence, le jugement et l'intuition de l'ingénierie sont nécessaires pour savoir où seront situées les régions de contrainte ou de déformation excessive. La géométrie du problème dictera les zones où des changements de géométrie importants se produisent, nécessitant un maillage plus fin dans cette zone particulière. En général, le maillage rectangulaire doit être utilisé et le maillage triangulaire doit être évité pour les structures composites car le maillage triangulaire a moins de lignes de symétrie par rapport au maillage rectangulaire.

Les déplacements des nœuds ont une valeur unique, ce qui signifie que chaque nœud a une valeur

unique. Les champs de déplacement sont continus mais pas nécessairement lisses. L'utilisation de la fonction de forme continue garantit que les champs de déplacements sont lisses par morceaux mais pas nécessairement lisses à travers les limites des éléments. La raison en est que les valeurs de contrainte sont calculées à partir de la déformation élément par élément. Par conséquent, les nœuds peuvent avoir plusieurs valeurs de contrainte. Par défaut, les contraintes sont moyennées dans les nœuds et les champs de contraintes sont recalculés. Après cela, les valeurs de contrainte sont continuées. En général, la solution est plus précise et la discontinuité des contraintes est moindre pour le maillage.

Il est normalement préférable d'avoir un maillage plus fin dans la région où la charge est appliquée, la région dans laquelle nous sommes intéressés pour obtenir les résultats de contrainte et de déformation. En revanche, un maillage grossier est acceptable dans l'autre région de la structure. Cela peut réduire le nombre d'éléments et augmenter le temps de fonctionnement du modèle. Le modèle est illustré sur la figure 4.1.

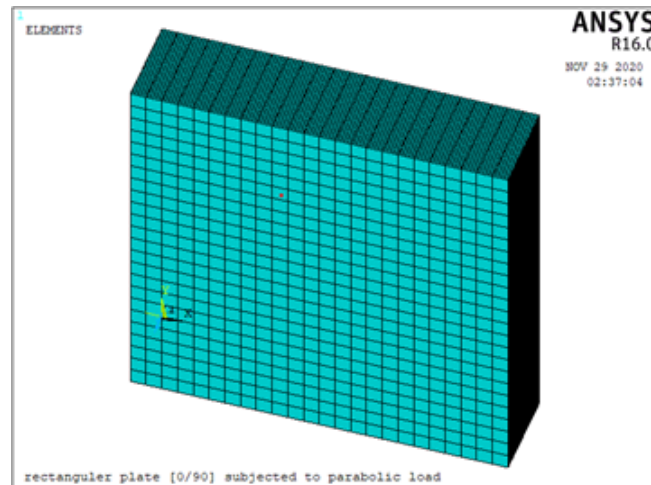


FIGURE 4.1 – Maillage typique du modèle 3-D

Le matériau utilisé dans cette étude est un stratifié graphite-époxy. Les propriétés orthotropes de la couche unidirectionnelle sont comme suite :

$E_1 = 25 \times 10^6$  Psi (175 Gpa),  $E_2 = E_3 = 10 \times 10^6$  Psi (7 Gpa),  $G_{12} = G_{13} = 0.5 \times 10^6$  Psi (3.5 Gpa),  $G_{23} = 0.2 \times 10^6$  Psi (1.4 Gpa),  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$ .

où  $E_1$ ,  $E_2$ , et  $E_3$  sont les modules d'Young de la couche de composite le long des trois axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ , et  $G_{13}$  sont les modules de cisaillement et  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$  et  $\nu_{13}$  sont le coefficient de Poisson par rapport aux plans 1-2, 2-3 et 1-3, respectivement.

#### 4.1.4 Modélisation des plaques composites dans ANSYS :

ANSYS classique (APDL) version 16.0 est utilisé pour réaliser toutes les modélisations et solutions FEM dans ce chapitre. Des étapes simples sont utilisées pour modéliser la plaque composite avec des charges appliquées et des conditions aux limites détaillées dans ce qui suit :

Les conditions aux limites et du chargement dépendent des problèmes. Dans cette étude, deux charges sont appliquées : une charge parabolique sur la surface supérieure de la plaque (**pour l'exemple 1**), une charge linéaire transversale sur la surface supérieure de la plaque à une distance  $x=a/2$  (**pour l'exemple 2**).

➔ Pour les cas de charge parabolique, la pression serait  $q_0 * (x/a)$ , pour la simplicité, la charge  $q_0$  est calculée à partir des formes non dimensionnelles utilisées dans le chapitre précédant.  $q_0 = ht^2/a^2$  pour le calcul de la contrainte  $s_{xx}, s_{yy}$  et  $s_{xy}$  et  $q_0 = 100 * ht^3 * E^2/a^4$  pour le calcul de la flèche  $w$ .

Où  $a$  est le côté de la plaque,  $ht$  est l'épaisseur de la plaque.

➔ Pour le cas d'une plaque avec une charge linéaire transversale, la force serait :

$$chs = \left( \frac{q_0}{\text{Nombre de noeuds sur la section transversale}} \right) \quad (4.1)$$

$$= \frac{q_0}{(2.m_y+1)(2.m_z+1)+(m_y+1)(2.m_z)}$$

comme illustré à la figure 4.2 :

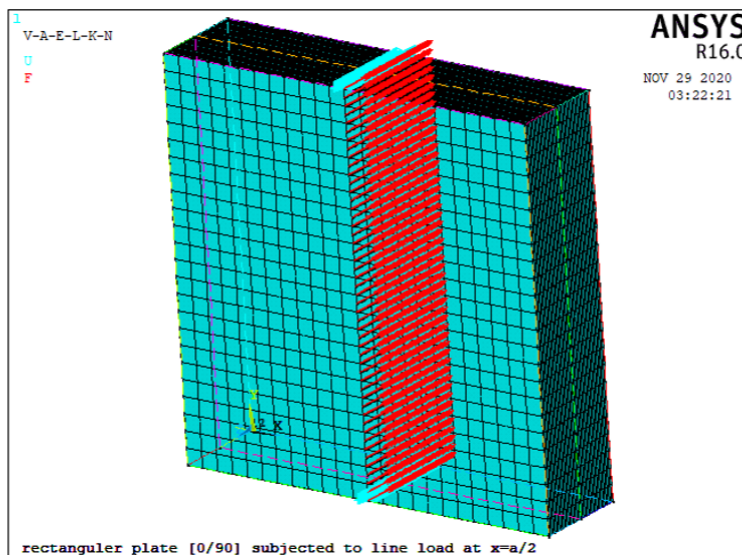


FIGURE 4.2 – Charges linéaires transverses à  $x=a/2$

Où  $m_x, m_y$  et  $m_z$  est le nombre de division par ligne de l'élément solid186 suivant les trois

directions  $x, y$  et  $z$  respectivement, Et  $q_0$  prend les mêmes valeurs que le chargement parabolique.

#### 4.1.5 Convergence des solutions E.F :

Pour un problème donné, la solution EF doit s'approcher de la solution exacte. Des solutions convergentes ne peuvent être obtenues qu'en utilisant les bonnes méthodes d'approche qui sont données ci-dessous :

- ➔ Choisir le type d'élément correct.
- ➔ Utiliser un bon maillage.
- ➔ Éviter les éléments longs et fins.
- ➔ Vérifier la précision du stress.
- ➔ Empêcher le mouvement du corps rigide.
- ➔ Vérifier les forces de réaction.
- ➔ Assurer la connectivité inter-éléments.

## 4.2 Résultats et discussions :

Les deux exemples ci-dessus la plaque composite stratifiée est simplement appuyée sur les quatre cotés comme montre sur la figure 4.3 seront discutés.

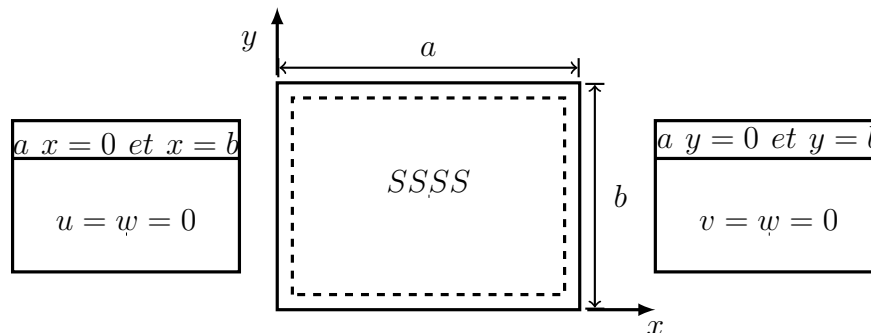


FIGURE 4.3 – Conditions limites

#### 4.2.1 Exemple 1 : (chargement parabolique)

La figure 4.4 illustre une comparaison entre les résultats théoriques et numériques de la distribution des contraintes normales maximales non dimensionnelles  $\sigma_{xx}(a/2, b/2)$  à travers l'épaisseur d'une plaque carrée ( $a/b = 1$ ) à deux couches (0/90) qui ont la même épaisseur, la plaque est soumise à un chargement parabolique transverse pour différentes valeurs du rapport de l'épaisseur ( $a/h = 4, 10, 100$ ). On constate une bonne concordance entre les résultats théoriques et numériques

avec une contrainte normale  $\sigma_{xx}$  maximale dans la face supérieure (*couche 0*) et minimale dans la face inférieure (*couche 90*), à partir de cette distribution, on observe que la contrainte normale change de valeur entre les deux couches en raison de la forte concentration des contraintes, alors que le rapport de l'épaisseur ( $a/h$ ) n'a presque aucun effet sur la distribution des contraintes normales à travers l'épaisseur de la plaque.

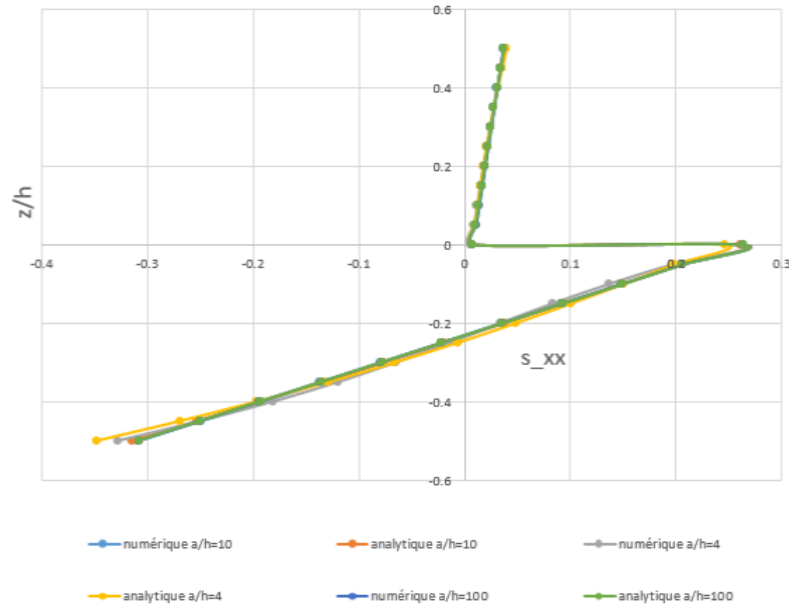


FIGURE 4.4 – Distribution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  pour une plaque rectangulaire  $[0/90]$  sous un chargement parabolique transversal.

La figure 4.5 présente une comparaison entre les résultats théoriques et numériques de la variation de la déflexion maximale non dimensionnelle en fonction du rapport de l'épaisseur ( $a/h$ ) d'une plaque carrée ( $a/b = 1$ ) à deux couches ( $0/90$ ) qui ont la même épaisseur, la plaque est simplement appuyée sur ses quatre cotés et soumise à un chargement parabolique transverse. On remarque que pour les plaques qui ont le rapport de l'épaisseur ( $a/h$ ) inférieure à 10 il existe une différence marginale entre les résultats numériques et théoriques, tandis que pour les plaques dont le rapport dépasse 10 on constate une très bonne concordance entre les deux résultats. Il est à noter que la déflexion diminue en augmentant le rapport ( $a/h$ ) mais dès que ce dernier dépasse 20, la déflexion reste stable, ceci est dû au fait qu'on est passé du cas des plaques épaisses aux cas des plaques minces.

On peut voir sur les figures 4.6, 4.7 et 4.8 la répartition de la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  et le déplacement suivant  $z$  pour les trois rapports d'épaisseur ( $a/h = 4, 10, 100$ ) respectivement.

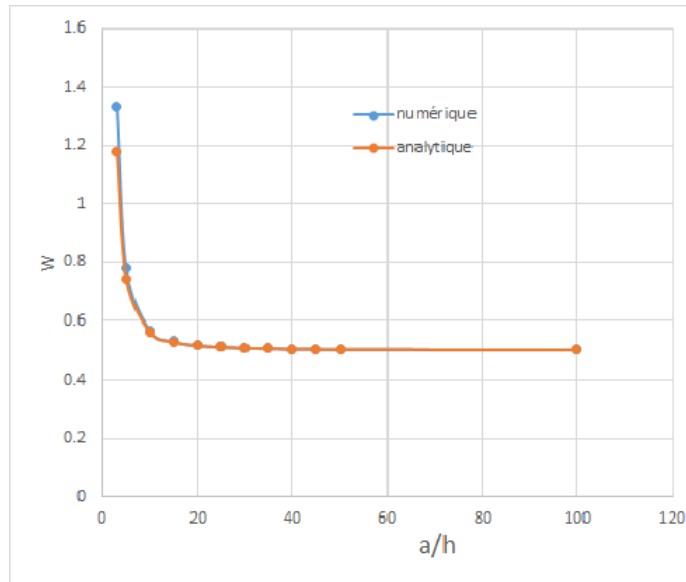


FIGURE 4.5 – Déflexion  $W$  pour une plaque rectangulaire  $[0/90]$  sous un chargement parabolique transversal.

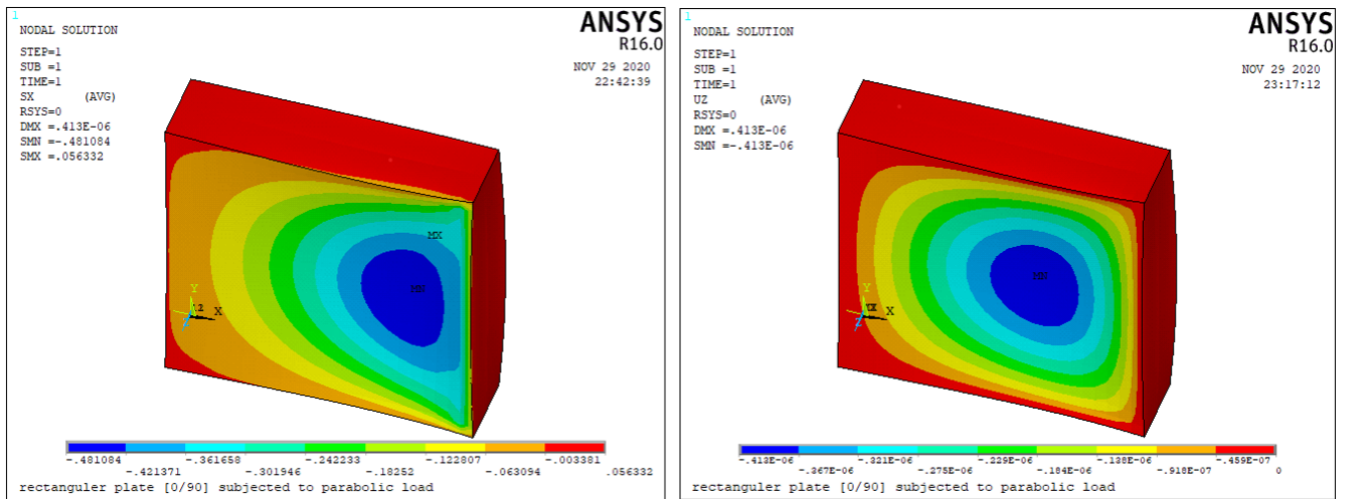


FIGURE 4.6 – Contour de la contrainte  $\sigma_{xx}$  et le déplacement  $U_z$  d'une plaque rectangulaire  $[0/90]$ , ( $a/h=4$ )

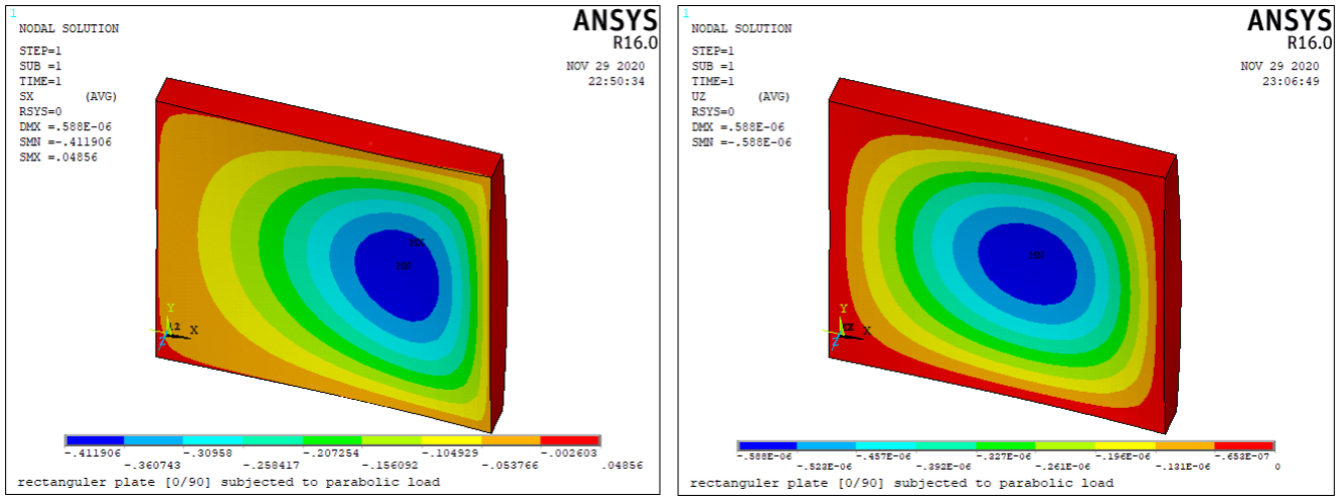


FIGURE 4.7 – Contour de la contrainte  $\sigma_{xx}$  et le déplacement  $U_z$  d'une plaque rectangulaire [0/90], ( $a/h=10$ )

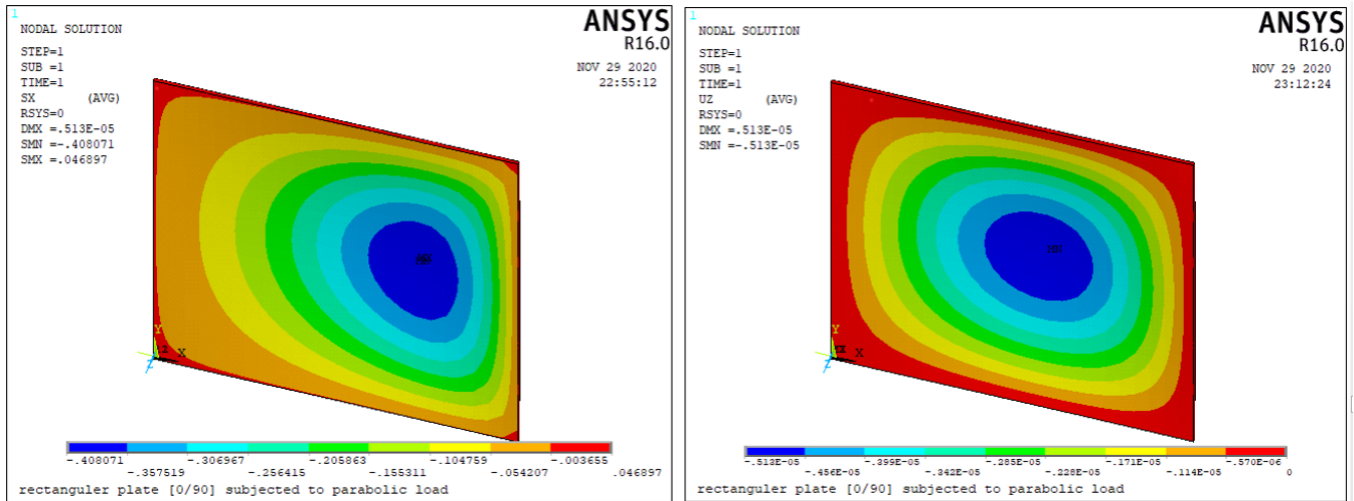


FIGURE 4.8 – Contour de la contrainte  $\sigma_{xx}$  et le déplacement  $U_z$  d'une plaque rectangulaire [0/90], ( $a/h=100$ )

### 4.2.2 Exemple 2 : (chargement linéaire)

La figure 4.9 présente une comparaison entre les résultats théoriques et numériques de la distribution des contraintes normales maximales non dimensionnelles  $\sigma_{xx}(a/2, b/2)$  à travers l'épaisseur d'une plaque carrée ( $a/b = 1$ ) à deux couches (0/90) qui ont la même épaisseur, la plaque est simplement appuyée sur ses quatre cotés et soumise à un chargement linéaire transverse pour différentes valeurs du rapport de l'épaisseur ( $a/h = 4, 10, 100$ ). On remarque que les résultats théoriques sont en accord avec les résultats numériques avec une différence marginale qui apparaît surtout entre les deux couches ce qui est expliqué par la forte présence des contraintes d'interface, on observe aussi que pour les plaques les plus épaisses la contrainte normale atteint son maximum dans la face supérieure et son minimum dans la face inférieure et ces valeurs diminuent lorsque la plaque devient de plus en plus mince.

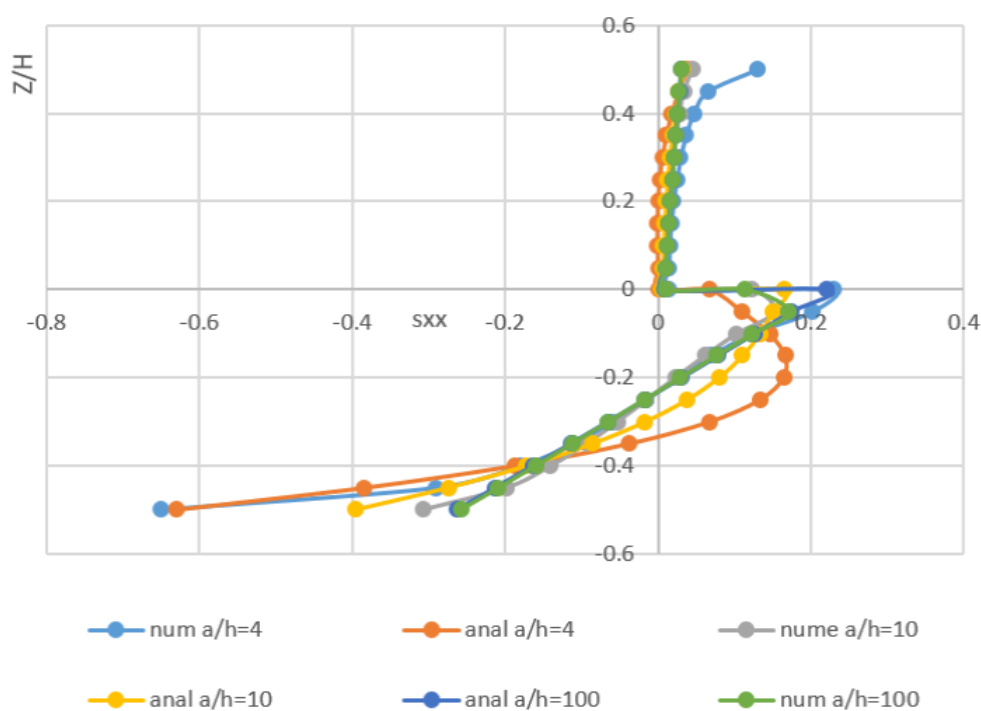


FIGURE 4.9 – Distribution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  pour une plaque rectangulaire [0/90] avec un chargement linéaire à  $x=a/2$ .

La figure 4.10 présente une comparaison entre les résultats théoriques et numériques de la variation de la déflexion maximale non dimensionnelle en fonction du rapport de l'épaisseur ( $a/h$ ) d'une plaque carrée ( $a/b = 1$ ) à deux couches (0/90) qui ont la même épaisseur, la plaque est simplement appuyée sur ses quatre cotés et soumise à un chargement linéaire transverse. On constate que les résultats théoriques correspondent aux résultats numériques sauf que pour les plaques épaisses il existe une différence marginale, et dès que la plaque devient mince les deux résultats ressemblent et la déflexion devient invariante.



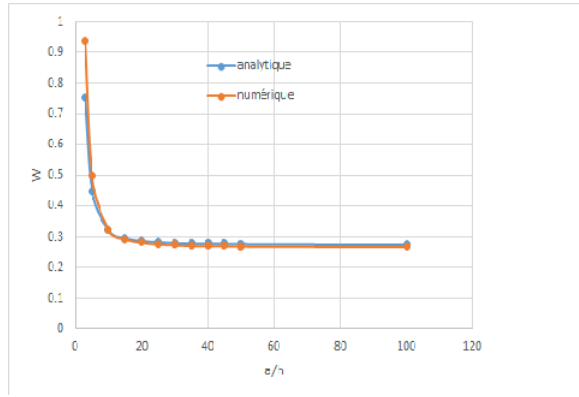


FIGURE 4.10 – La déflexion  $W$  pour une plaque rectangulaire  $[0/90]$  avec un chargement suivant une ligne droite à  $x=a/2$ .

On peut voir sur les figures 4.11, 4.12 et 4.13 la répartition de la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  et le déplacement suivant  $z$   $u_z$  pour les trois rapports d'épaisseur ( $a/h = 4, 10, 100$ ) respectivement.

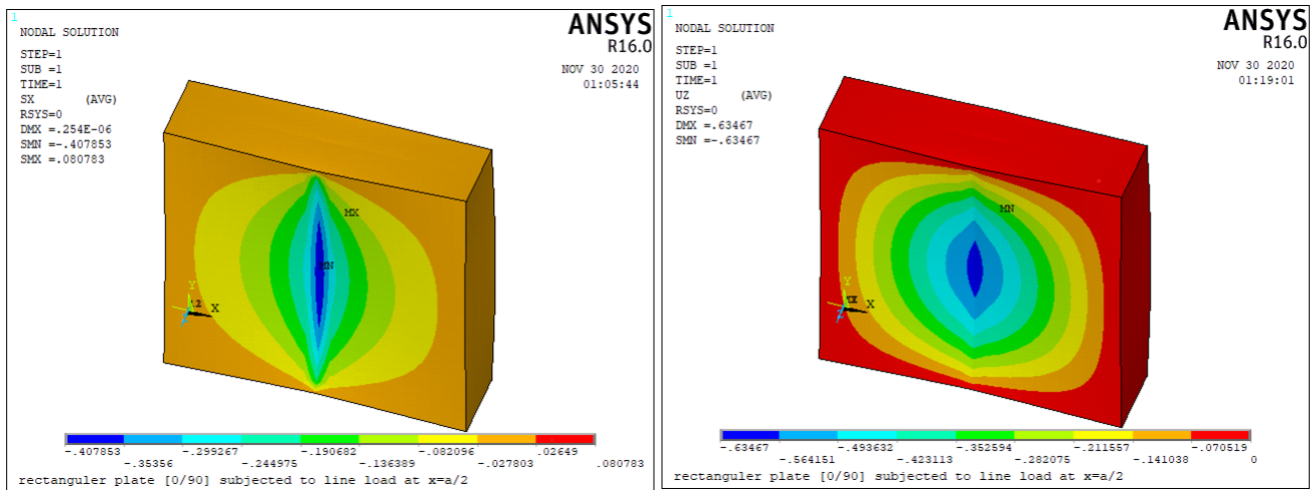


FIGURE 4.11 – Contour de la contrainte  $\sigma_{xx}$  et le déplacement  $U_z$  d'une plaque rectangulaire  $[0/90]$ , ( $a/h=4$ )

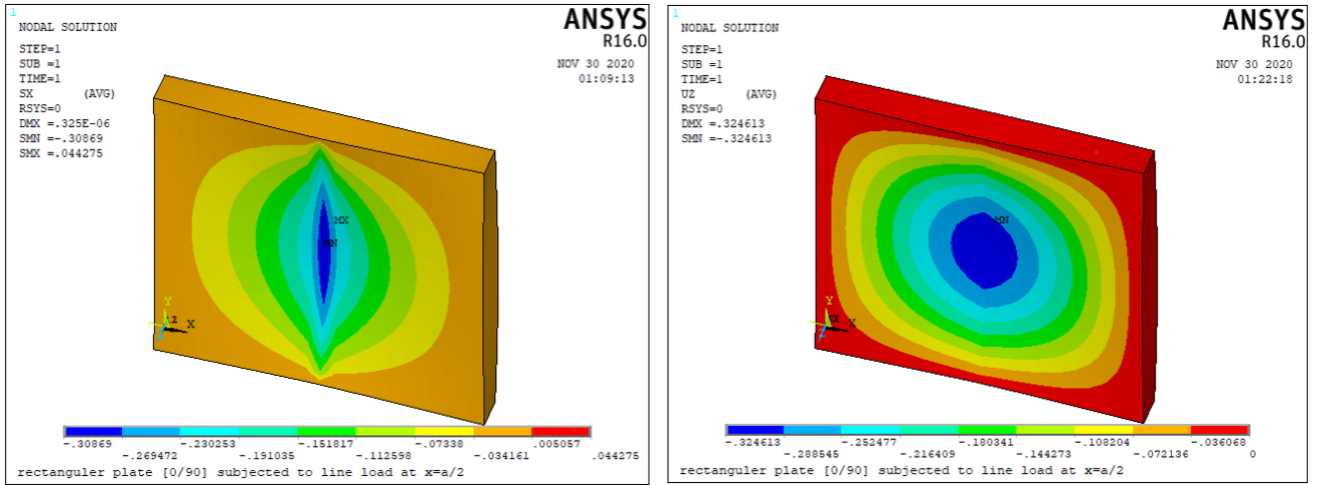


FIGURE 4.12 – Contour de la contrainte  $\sigma_{xx}$  et le déplacement  $U_z$  d'une plaque rectangulaire [0/90], ( $a/h=10$ )

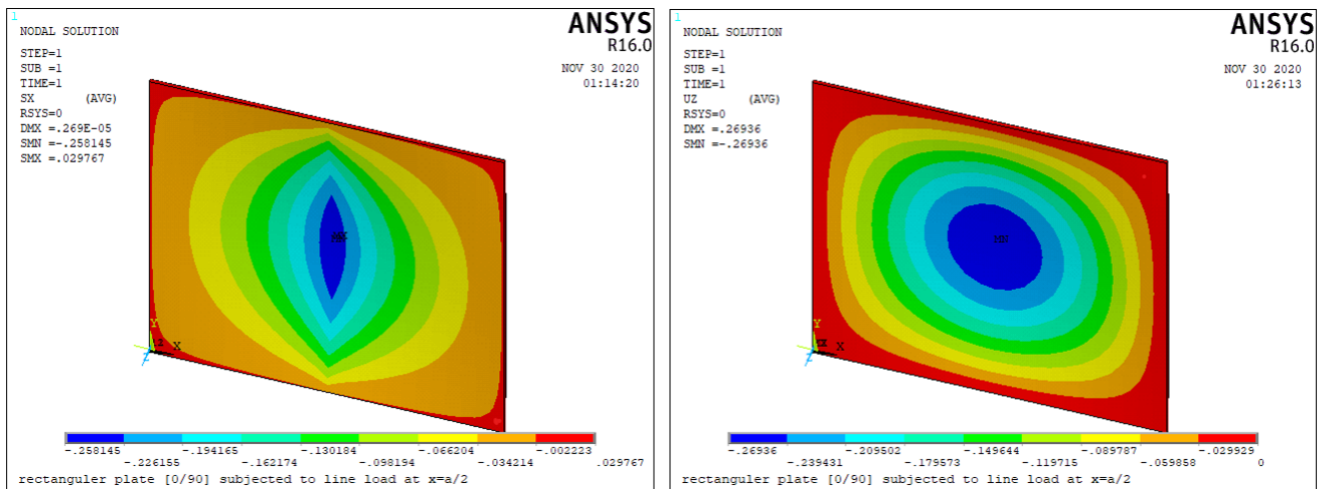


FIGURE 4.13 – Contour de la contrainte  $\sigma_{xx}$  et le déplacement  $U_z$  d'une plaque rectangulaire [0/90], ( $a/h=100$ )

# Conclusion Générale

Dans ce travail, l'analyse de la contrainte de la flexion des plaques laminées à plis croisés simplement appuyées soumises à un chargement parabolique transversal et un chargement linéaire est présentée en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement à ordre élevé en considérant l'effet d'étirement, dans laquelle les déplacements axiaux contiennent une composante d'intégrale. La présente théorie satisfait la condition de nullité des contraintes de cisaillement dans la face supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser des facteurs de correction de cisaillement. La méthode analytique du type Navier est utilisée pour résoudre les équations différentielles. Plusieurs exemples de plaques composites laminées à plis croisés simplement appuyées, antisymétriques et symétriques avec différents rapports d'épaisseur ont été présentés pour valider la théorie proposée, et on constate que la théorie proposée avec cinq inconnues est plus précise pour les plaques composites laminées à plis croisés antisymétriques épaisses et moyennement épaisses qui sont caractérisées par moins de calcul par rapport à d'autres théories de déformation par cisaillement à ordre élevé avec six ou plus d'inconnues. Enfin, il est intéressant de considérer d'autres types de matériaux dans le futur pour développer cette étude ((DAOUADJI 2017);(AYAT, KELLOUCHE, GHRICI et BOUKHATEM 2018);(CHEMI et al. 2018);(BELMAHI et al. 2018);(HUSSAIN, NAEEM, TOUNSI et TAJ 2019);(ASGHAR, NAEEM, HUSSAIN et TOUNSI 2020);(KARAMI, JANGHORBAN et TOUNSI 2019e);(KARAMI, SHAHSAVARI, JANGHORBAN et TOUNSI 2019d);(KARAMI, JANGHORBAN et TOUNSI 2019a);(KARAMI, JANGHORBAN et TOUNSI 2019b);(KARAMI, JANGHORBAN et TOUNSI 2019c);(KHILOUN et al. 2019);(MAHMOUDI et al. 2019);(MEDANI et al. 2019);(MEKSI et al. 2019);(SALAH et al. 2019);(SAHOUANE, HADJI et BOURADA 2019);(SEMMAH, HEIRECHE, BOUSAHLA et TOUNSI 2019);(ZARGA et al. 2019);(ZAOUI, QUINAS et TOUNSI 2019);(BALUBAID, TOUNSI, DAKHEL et MAHMOUD 2019);(TOUNSI et al. 2020))

# Bibliographie

- ABUALNOUR, Moussa et al. (2019). “Thermomechanical analysis of antisymmetric laminated reinforced composite plates using a new four variable trigonometric refined plate theory”. In : *Computers and Concrete* 24.6, p. 489-498.
- ADDOU, Farouk Yahia et al. (2019). “Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT”. In : *Computers and Concrete* 24.4, p. 347-367.
- AFAQ, Kamran Sheikh (2003). “Développement d’un nouveau modèle pour les structures composites” multicouches et sandwiches” avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord”. Thèse de doct. Toulouse 3.
- AHMED, AKIL (2014). “Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory”. In : *Int. J. Civil Struct. Environ* 4.2, p. 59-64.
- ALIMIRZAEI, S, M MOHAMMADIMEHR et Abdelouahed TOUNSI (2019). “Nonlinear analysis of viscoelastic micro-composite beam with geometrical imperfection using FEM : MSGT electromagneto-elastic bending, buckling and vibration solutions”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 71.5, p. 485-502.
- AMBARTSUMYAN, SA (1970). “Theory of anisotropic plates”. In : *Progress in Materials Science Series 2*.
- ASGHAR, Sehar, Muhammad N NAEEM, Muzamal HUSSAIN et Abdelouahed TOUNSI (2020). “Nonlocal vibration of DWCNTs based on Flugge shell model using wave propagation approach”. In : *Steel and Composite Structures* 34.4, p. 599.
- AVCAR, Mehmet (2016). “Effects of material non-homogeneity and two parameter elastic foundation on fundamental frequency parameters of Timoshenko beams”. In : *Acta Physica Polonica A* 130.1, p. 375-378.
- AVCAR., Mehmet (2019). “Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams”. In : *Steel and Composite Structures* 30.6, p. 603-615.
- AVCAR, Mehmet et Waleed Khalid Mohammed MOHAMMED (2018). “Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation”. In : *Arabian Journal of Geosciences* 11.10, p. 232.

- AYAT, Hocine, Yasmina KELLOUCHE, Mohamed GHRICI et Bakhta BOUKHATEM (2018). “Compressive strength prediction of limestone filler concrete using artificial neural networks”. In : *Adv. Comput. Des* 3.3, p. 289-302.
- BALTACIOGLU, Ali Kemal et Omer CIVALEK (2018). “Numerical approaches for vibration response of annular and circular composite plates”. In : *STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES* 29.6, p. 755-766.
- BALUBAID, Mohammed, Abdelouahed TOUNSI, B DAKHEL et SR MAHMOUD (2019). “Free vibration investigation of FG nanoscale plate using nonlocal two variables integral refined plate theory”. In : *Computers and Concrete* 24.6, p. 579-586.
- BATOU, Belaid et al. (2019). “Wave dispersion properties in imperfect sigmoid plates using various HSDTs”. In : *Steel and Composite Structures* 33.5, p. 699-716.
- BEHERA, Susanta et Poonam KUMARI (2018). “Free vibration of Levy-type rectangular laminated plates using efficient zig-zag theory”. In : *Advances in Computational Design* 3.3, p. 213-232.
- BELBACHIR, Nasrine et al. (2019). “Bending analysis of anti-symmetric cross-ply laminated plates under nonlinear thermal and mechanical loadings”. In : *Steel and Composite Structures* 33.1, p. 81-92.
- BELKACEM, Adim et al. (2018). “Mechanical buckling analysis of hybrid laminated composite plates under different boundary conditions”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 66.6, p. 761-769.
- BELMAHI, Samir et al. (2018). “Analysis of boundary conditions effects on vibration of nanobeam in a polymeric matrix”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 67.5, p. 517-525.
- BERGHOUTI, Hana, EA ADDA BEDIA, Amina BENKHEDDA et Abdelouahed TOUNSI (2019). “Vibration analysis of nonlocal porous nanobeams made of functionally graded material”. In : *Advances in nano research* 7.5, p. 351-364.
- BOUANATI, Soumia et al. (2019). “Investigation of wave propagation in anisotropic plates via quasi 3D HSDT”. In : *Geomechanics and Engineering* 18.1, p. 85-96.
- BOUAZZA, Mokhtar, Yamina KENOUSA, Noureddine BENSEDDIQ et Ashraf M ZENKOUR (2017). “A two-variable simplified nth-higher-order theory for free vibration behavior of laminated plates”. In : *Composite Structures* 182, p. 533-541.
- BOUKHLIF, Zoulikha et al. (2019). “A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation”. In : *Steel and Composite Structures* 31.5, p. 503-516.
- BOULEFRAKH, Laid et al. (2019). “The effect of parameters of visco-Pasternak foundation on the bending and vibration properties of a thick FG plate”. In : *Geomechanics and Engineering* 18.2, p. 161-178.
- BOURADA, Fouad et al. (2019). “Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory”. In : *Wind and Structures* 28.1, p. 19-30.

- BOUSSOULA, Abderrafik et al. (2020). "A simple nth-order shear deformation theory for thermo-mechanical bending analysis of different configurations of FG sandwich plates". In : *Smart Structures and Systems* 25.2, p. 197-218.
- BOUTALEB, Sabrina et al. (2019). "Dynamic analysis of nanosize FG rectangular plates based on simple nonlocal quasi 3D HSDT". In : *Advances in nano research* 7.3, p. 191.
- CARLOS M.M.S., Cristoovaaao M.M.S. et Manuel J.M.F (1999). "Mechanics of composite materials and structures". In.
- CETKOVIC, M et Dj VUKSANOVIC (2011). "Large deflection analysis of laminated composite plates using layerwise displacement model". In : *Structural Engineering and Mechanics* 40.2, p. 257-277.
- CHAABANE, Lynda Amel et al. (2019). "Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation". In : *Structural Engineering and Mechanics* 71.2, p. 185-196.
- CHEMI, A et al. (2018). "Critical buckling load of chiral double-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium". In : *Mechanics of Composite Materials* 53.6, p. 827-836.
- CHIKH, Abdelbaki, Abdelouahed TOUNSI, Habib HEBALI et SR MAHMOUD (2017). "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT". In : *Smart Structures and Systems* 19.3, p. 289-297.
- CIVALEK, Ömer (2008). "Analysis of thick rectangular plates with symmetric cross-ply laminates based on first-order shear deformation theory". In : *Journal of Composite Materials* 42.26, p. 2853-2867.
- DAOUADJI, Tahar Hassaine (2017). "Analytical and numerical modeling of interfacial stresses in beams bonded with a thin plate". In : *Advances in Computational Design* 2.1, p. 57-69.
- DAU, Frédéric, Olivier POLIT et Maurice TOURATIER (2006). "C1 plate and shell finite elements for geometrically nonlinear analysis of multilayered structures". In : *Computers & structures* 84.19-20, p. 1264-1274.
- DRAOUI, Aicha, Mohamed ZIDOUR, Abdelouahed TOUNSI et Belkacem ADIM (2019). "Static and dynamic behavior of nanotubes-reinforced sandwich plates using (FSDT)". In : *Journal of Nano Research*. T. 57. Trans Tech Publ, p. 117-135.
- DUONG, Van Anh et al. (2008). "Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites". Thèse de doct. Paris Est.
- FERREIRA, AJM, Luís MS CASTRO et Silvia BERTOLUZZA (2009). "A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory". In : *Composite structures* 89.3, p. 424-432.
- GERE, James M et Stephen P TIMOSHENKO (1961). *Theory of elastic stability*.

- GHUGAL, Yuwaraj M et Atteshamuddin S SAYYAD (2013). “Stress analysis of thick laminated plates using trigonometric shear deformation theory”. In : *International Journal of Applied Mechanics* 5.01, p. 1350003.
- HADJI, Lazreg, Nafissa ZOUATNIA et Fabrice BERNARD (2019). “An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities : Effect of the micromechanical models”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 69.2, p. 231-241.
- HAFIZAH, AK, JH LEE, ZA AZIZ et KK VISWANATHAN (2018). “Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates of Higher-Order Theory with Variable Thickness”. In : *Mathematical Problems in Engineering* 2018.
- HELLAL, Hadjira et al. (2019). “Dynamic and stability analysis of functionally graded material sandwich plates in hygro-thermal environment using a simple higher shear deformation theory”. In : *Journal of Sandwich Structures & Materials*, p. 1099636219845841.
- HIRWANI, Chetan K, Subrata K PANDA et BK PATLE (2018a). “Theoretical and experimental validation of nonlinear deflection and stress responses of an internally debonded layer structure using different higher-order theories”. In : *Acta Mechanica* 229.8, p. 3453-3473.
- HIRWANI, Chetan Kumar et al. (2018b). “Delamination effect on flexural responses of layered curved shallow shell panel-experimental and numerical analysis”. In : *International Journal of Computational Methods* 15.04, p. 1850027.
- HIRWANI, Chetan Kumar et Subrata Kumar PANDA (2018c). “Numerical and experimental validation of nonlinear deflection and stress responses of pre-damaged glass-fibre reinforced composite structure”. In : *Ocean Engineering* 159, p. 237-252.
- (2019). “Nonlinear finite element solutions of thermoelastic deflection and stress responses of internally damaged curved panel structure”. In : *Applied Mathematical Modelling* 65, p. 303-317.
- HUSSAIN, Muzamal, Muhammad Nawaz NAEEM, Abdelouahed TOUNSI et Muhammad TAJ (2019). “Nonlocal effect on the vibration of armchair and zigzag SWCNTs with bending rigidity”. In : *Advances in nano research* 7.6, p. 431-442.
- JOSHAN, Yadwinder S, Neeraj GROVER et BN SINGH (2018). “Assessment of non-polynomial shear deformation theories for thermo-mechanical analysis of laminated composite plates”. In : *Steel and Composite Structures* 27.6, p. 761-775.
- KANT, TARUN et K SWAMINATHAN (2000). “Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites—a selective review and survey of current developments”. In : *Composite structures* 49.1, p. 65-75.
- (2001). “Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory”. In : *Composite structures* 53.1, p. 73-85.

- KAPANIA, Rakesh K et Stefano RACITI (1989). “Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I-Sheareffects and buckling.” In : *AIAA journal* 27.7, p. 923-935.
- KAR, Vishesh R, Trupti R MAHAPATRA et Subrata K PANDA (2015). “Nonlinear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygro-thermo-mechanical loading”. In : *Steel and Composite Structures* 19.4, p. 1011-1033.
- KARAMI, Behrouz, Maziar JANGHORBAN et Abdelouahed TOUNSI (2019a). “Galerkin’s approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions”. In : *Engineering with Computers* 35.4, p. 1297-1316.
- (2019b). “On exact wave propagation analysis of triclinic material using three-dimensional bi-Helmholtz gradient plate model”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 69.5, p. 487-497.
- (2019c). “On pre-stressed functionally graded anisotropic nanoshell in magnetic field”. In : *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 41.11, p. 495.
- KARAMI, Behrouz, Davood SHAHSAVARI, Maziar JANGHORBAN et Abdelouahed TOUNSI (2019d). “Resonance behavior of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets”. In : *International Journal of Mechanical Sciences* 156, p. 94-105.
- KARAMI, Behrouz, Maziar JANGHORBAN et Abdelouahed TOUNSI (2019e). “Wave propagation of functionally graded anisotropic nanoplates resting on Winkler-Pasternak foundation”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 70.1, p. 55-66.
- KATARIYA, Pankaj V, Subrata Kumar PANDA et Trupti Ranjan MAHAPATRA (2018). “Bending and vibration analysis of skew sandwich plate”. In : *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*.
- KATARIYA, Pankaj V et Subrata K PANDA (2019a). “Frequency and deflection responses of shear deformable skew sandwich curved shell panel : A finite element approach”. In : *Arabian Journal for Science and Engineering* 44.2, p. 1631-1648.
- (2019b). “Numerical frequency analysis of skew sandwich layered composite shell structures under thermal environment including shear deformation effects”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 71.6, p. 657-668.
- KHILOUN, Mokhtar et al. (2019). “Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT”. In : *Engineering with Computers*, p. 1-15.
- KIM, Seung-Eock, Huu-Tai THAI et Jaehong LEE (2009). “A two variable refined plate theory for laminated composite plates”. In : *Composite Structures* 89.2, p. 197-205.
- KIRCHHOFF, Gustav (1850). *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*.
- LOVE, A (1944). *EH.,(1944). A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*.



- MAHI, Amale, Abdelouahed TOUNSI et al. (2015). "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates". In : *Applied Mathematical Modelling* 39.9, p. 2489-2508.
- MAHMOUD, SR et Abdelouahed TOUNSI (2019). "On the stability of isotropic and composite thick plates". In : *Steel and Composite Structures* 33.4, p. 551-568.
- MAHMOUDI, Abdelkader et al. (2019). "A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations". In : *Journal of Sandwich Structures & Materials* 21.6, p. 1906-1929.
- MANTARI, JL, AS OKTEM et C Guedes SOARES (2012). "A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates". In : *Computers & structures* 94, p. 45-53.
- MECHAB, I (2009). "Etude des structures composites en utilisant les theories d'ordre élevé sous chargement thermomécanique". In : *Thesis, University of Sidi Bel Abbes*.
- MEDANI, Mohammed et al. (2019). "Static and dynamic behavior of (FG-CNT) reinforced porous sandwich plate using energy principle". In : *Steel and Composite Structures* 32.5, p. 595-610.
- MEHAR, Kulmani et Subrata Kumar PANDA (2019). "Theoretical deflection analysis of multi-walled carbon nanotube reinforced sandwich panel and experimental verification". In : *Composites Part B : Engineering* 167, p. 317-328.
- MEKSI, Rafik et al. (2019). "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates". In : *Journal of Sandwich Structures & Materials* 21.2, p. 727-757.
- MINDLIN, Raymond D (1951). "Influence of rotatory inertia and shear flexural motions of isotropic elastic plates". In.
- MOITA, JoséSimões, Cristóvão M Mota SOARES et Carlos A Mota SOARES (1996). "Buckling behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model". In : *Composite structures* 35.1, p. 75-92.
- MURTHY, MVV (1981). "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates". In.
- NEDRI, K, N EL MEICHE et A TOUNSI (2014). "Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory". In : *Mechanics of Composite Materials* 49.6, p. 629-640.
- PATEL, BP et al. (2004). "Application of higher-order finite element for elastic stability analysis of laminated cross-ply oval cylindrical shells". In : *Finite elements in analysis and design* 40.9-10, p. 1083-1104.
- POLIT, O et M TOURATIER (1997). "A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses". In : *Composite Structures* 38.1-4, p. 37-44.
- REDDY, Junuthula N (1984a). "A simple higher-order theory for laminated composite plates". In.

- REDDY, Junuthula N (1984b). “A simple higher-order theory for laminated composite plates”. In: REISSNER, Eric (1945a). “Buckling of plates with intermediate rigid supports”. In : *Journal of the Aeronautical Sciences* 12.3, p. 375-377.
- (1945b). “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”. In : *J. appl. Mech.*, A69-A77.
- REZAIIEE-PAJAND, Mohaamad, F SHAHABIAN et FH TAVAKOLI (2012). “A new higher-order triangular plate bending element for the analysis of laminated composite and sandwich plates”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 43.2, p. 253-271.
- SAHLA, Meriem et al. (2019). “Free vibration analysis of angle-ply laminated composite and soft core sandwich plates”. In : *Steel and Composite Structures* 33.5, p. 663-679.
- SAHOO, Rosalin et BN SINGH (2014). “A new trigonometric zigzag theory for static analysis of laminated composite and sandwich plates”. In : *Aerospace science and technology* 35, p. 15-28.
- SAHOO, SS, SK PANDA, TR MAHAPATRA et CK HIRWANI (2019). “Numerical analysis of transient responses of delaminated layered structure using different mid-plane theories and experimental validation”. In : *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering* 43.1, p. 41-56.
- SAHOO, Sushree S, Subrata K PANDA et Trupti R MAHAPATRA (2016). “Static, free vibration and transient response of laminated composite curved shallow panel—an experimental approach”. In : *European Journal of Mechanics-A/Solids* 59, p. 95-113.
- SAHOUANE, Abdelkader, Lazreg HADJI et Mohamed BOURADA (2019). “Numerical analysis for free vibration of functionally graded beams using an original HSDBT”. In : *Earthquakes and Structures* 17.1, p. 31-37.
- SALAH, Fethi et al. (2019). “Investigation of thermal buckling properties of ceramic-metal FGM sandwich plates using 2D integral plate model”. In : *Steel and Composite Structures* 33.6, p. 805-822.
- SALAMI, Sattar Jedari et Soheil DARIUSHI (2018). “Analytical, numerical and experimental investigation of low velocity impact response of laminated composite sandwich plates using extended high order sandwich panel theory”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 68.3, p. 325-334.
- SAYYAD, AS et YM GHUGAL (2013). “Effect of stress concentration on laminated plates”. In : *Journal of Mechanics* 29.2, p. 241-252.
- SAYYAD, Atteshamuddin S et Yuwaraj M GHUGAL (2017). “A unified shear deformation theory for the bending of isotropic, functionally graded, laminated and sandwich beams and plates”. In : *International Journal of Applied Mechanics* 9.01, p. 1750007.
- SAYYAD, Atteshamuddin Shamshuddin, Yuwaraj Marotrao GHUGAL et Bharti Machhindra SHINDE (2016). “Thermal stress analysis of laminated composite plates using exponential shear deformation theory”. In : *International Journal of Automotive Composites* 2.1, p. 23-40.

- SEHOUL, Mohammed, Mohamed BENGUEDIAB, Ahmed BAKORA et Abdelouahed TOUNSI (2017). "Free vibrations of laminated composite plates using a novel four variable refined plate theory". In : *Steel and Composite Structures* 24.5, p. 603-613.
- SEMMAH, Abdelwahed, Houari HEIRECHE, Abdelmoumen Anis BOUSAHLA et Abdelouahed TOUNSI (2019). "Thermal buckling analysis of SWBNNT on Winkler foundation by non local FSDT". In : *Advances in nano research* 7.2, p. 89.
- SHERAFAT, Mohammad H, Seyyed Amir M GHANNADPOUR et Hamid R OVESY (2013). "Pressure loading, end-shortening and through-thickness shearing effects on geometrically nonlinear response of composite laminated plates using higher order finite strip method". In : *Structural Engineering and Mechanics* 45.5, p. 677-691.
- SINGH, Durgesh Bahadur et BN SINGH (2017). "New higher order shear deformation theories for free vibration and buckling analysis of laminated and braided composite plates". In : *International Journal of Mechanical Sciences* 131, p. 265-277.
- SOLDATOS, KP et T TIMARCI (1993). "A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories". In : *Composite Structures* 25.1-4, p. 165-171.
- SZILARD, R (1974). "Theory and analysis of plates, 1974". In.
- TAFLA, Achraf (2007). "Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches". Thèse de doct. Reims.
- TIMOSHENKO, Stephen P et Sergius WOINOWSKY-KRIEGER (1959). *Theory of plates and shells*. McGraw-hill.
- TOUNSI, Abdelouahed et al. (2020). "A four variable trigonometric integral plate theory for hygro-thermo-mechanical bending analysis of AFG ceramic-metal plates resting on a two-parameter elastic foundation". In : *Steel and Composite Structures* 34.4, p. 511.
- TOURATIER, M (1991). "An efficient standard plate theory". In : *International journal of engineering science* 29.8, p. 901-916.
- UGURAL, AC (1981). "Stresses in plates and shells, MacGraw-Hills Inc". In : *New York, USA*.
- VO, Thuc P et al. (2017). "Flexural analysis of laminated composite and sandwich beams using a four-unknown shear and normal deformation theory". In : *Composite Structures* 176, p. 388-397.
- WANG, S (1997). "Buckling analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation plate theory". In : *Composite Structures* 37.1, p. 5-19.
- WHITNEY, JM (1969). "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates". In : *Journal of Composite Materials* 3.3, p. 534-547.
- WHITNEY, JM et NJ PAGANO (1970). "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates". In.

- YANG, P Constance, Charles H NORRIS et Yehuda STAVSKY (1966). “Elastic wave propagation in heterogeneous plates”. In : *International Journal of solids and structures* 2.4, p. 665-684.
- ZAMANI, HA, MM AGHDAM et M SADIGHI (2017). “Free vibration analysis of thick viscoelastic composite plates on visco-Pasternak foundation using higher-order theory”. In : *Composite Structures* 182, p. 25-35.
- ZAOUI, Fatima Zohra, Djamel OUINAS et Abdelouahed TOUNSI (2019). “New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations”. In : *Composites Part B : Engineering* 159, p. 231-247.
- ZARGA, Djaloul et al. (2019). “Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory”. In : *Steel and Composite Structures* 32.3, p. 389-410.
- ZHEN, Wu et Chen WANJI (2006). “An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading”. In : *Composite Structures* 73.1, p. 99-109.
- ZINE, Abdallah et al. (2018). “A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells”. In : *Steel and Composite Structures* 26.2, p. 125-137.

# Annexes

## Annexe A

### A.1 Codes Ansys de l'exemple 1.1

```
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/view,1,1,3,3

/title, rectangular plate [0/90] subjected to parabolic transvers load
/prep7

*SET,pp,1e6

UIMP,1, EX ,EY ,EZ ,.25*pp ,.1*pp ,.1*pp
UIMP,1, GXY ,GYZ ,GXZ ,.0.5*pp ,.0.2*pp ,.0.5*pp
UIMP,1, PRXY ,PRYZ ,PRXZ ,.0.25 ,.0.25 ,.0.25

*SET,p,1
*set,ht,2.5
*set,nbrc,2
*SET,h,(ht/nbrc)*10**(p-1)
*SET,a,10**p
*SET,b,10**p
*SET,mx,24
*SET,my,10
*SET,mz,20
*SET,ppp,4001
*set,e2,pp
*set,q0,1

*SET,chs,(nbrc*h)**2/b**2/100**(p-1)*q0 !<- s_x, s_y , s_xy
!*SET,chs,q0 !<- s_xz, s_yz
!*SET,chs,(2*h)**2*e2/b**3 !<- u
!*set,chs,100*(2*h)**3*e2/b**4 !<- W
```

```
ET,1,SOLID186

KEYOPT,1,2,0

LOCAL,11,,0,0,0,90
LOCAL,12,,0,0,0,0
CSYS,0

BLOCK,0,a,0,b,0,h
BLOCK,0,a,0,b,h,2*h
VGLUE,ALL

LSEL,S,LOC,Z,0
LSEL,A,LOC,Z,h
LSEL,A,LOC,Z,2*h
LESIZE,ALL,,,mx

LSEL,S,LOC,Z,h/2
LSEL,A,LOC,Z,3*h/2
LESIZE,ALL,,,mz
LSEL,ALL

MSHKEY,1
ESYS,11
VMESH,1
ESYS,12
VMESH,3
FINISH

/SOLU
ANTYPE,STATIC
```

nsel,s,loc,x,0

nsel,a,loc,x,a

d,all,uz,,,,,uy

nsel,s,loc,y,0

nsel,a,loc,y,a

d,all,uz,,,,,ux

!\*\*\*\*\*

\*DEL,\_FNCNAME

\*DEL,\_FNCMTID

\*DEL,\_FNC\_C1

\*DEL,\_FNC\_C2

\*DEL,\_FNCCSYS

\*SET,\_FNCNAME,'parab'

\*DIM,\_FNC\_C1,,1

\*DIM,\_FNC\_C2,,1

\*SET,\_FNC\_C1(1),chs

\*SET,\_FNC\_C2(1),a

\*SET,\_FNCCSYS,0

\*DIM,%\_FNCNAME%,TABLE,6,5,1,,,,%\_FNCCSYS%

! q0\*({X}/a)^2

\*SET,%\_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999

\*SET,%\_FNCNAME%(2,0,1), 0.0

\*SET,%\_FNCNAME%(3,0,1), %\_FNC\_C1(1)%

\*SET,%\_FNCNAME%(4,0,1), %\_FNC\_C2(1)%

\*SET,%\_FNCNAME%(5,0,1), 0.0

\*SET,%\_FNCNAME%(6,0,1), 0.0

\*SET,%\_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 1, 2, 4, 18

\*SET,%\_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 2, 0, 0, -1

```

*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -3, 0, 1, -1, 17, -2
*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -1, 0, 1, 17, 3, -3
*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, 99, 0, 1, -1, 0, 0
!*****

aSEL,s,LOC,z,nbrc*h
sfa,all,,pres,%parab%
ALLSEL,ALL

SOLVE
FINISH

!-----
*SET,x1,a/2
*SET,y1,b/2 ! sxx , syy , w
!-----
!*SET,x2,0
!*SET,y2,b/2 ! u , sxz
!*SET,x2,a
!*SET,y2,b/2 ! u , sxz
!-----
!*SET,x3,a/2
!*SET,y3,b ! syz
!-----
*SET,x4,0
*SET,y4,0 ! sxy
!-----
/POST1
RSYS ,0
PATH ,P_sx ,2 , ,ppp

```



```

PPATH ,2 ,0 ,x1 ,y1 ,2*h ,0
PDEF ,sx_avg ,s ,x ,AVG
PDEF ,sx_noavg ,s ,x ,NOAVG
PLPATH,sx_avg , sx_noavg
/image,save,sx,bmp,C:\Users\Desktop\resultat
*dim, vsx,array,22
!*dim, vv1,array,ppp
!*do,j,1,ppp
! *get,vv1(j),path,0,item,sx_noavg,PATHPT,j
!*enddo

*do,ii,1,11
  *get,vsx(ii),path,0,item,sx_noavg,PATHPT,(ii-1)*(ppp-1)/20+1
*enddo

*do,ii,1,10
  *get,vsx(11+ii),path,0,item,sx_noavg,PATHPT,(ppp-1)/2+(ii-1)*(ppp-1)/20+2
*enddo
  *get,vsx(22),path,0,item,sx_noavg,PATHPT,ppp

/OUTPUT,s_x,txt,C:\Users\Desktop\resultat
*do,i,1,22
  *VWRITE,vsx(i)
  (f16.8)
/OUTPUT
*enddo
finish
!-----
/POST1
PATH ,P_sy,2 , ,ppp
PPATH ,1 ,0 ,x1 ,y1 ,0 ,0

```

```

PPATH ,2 ,0 ,x1 ,y1 ,2*h ,0
PDEF ,sy_avg ,s ,y ,AVG
PDEF ,sy_noavg ,s ,y ,NOAVG
PLPATH,sy_avg,sy_noavg
/image,save,ssy,bmp,C:\Users\Desktop\resultat
*dim,vsy,array,22
*do,ii,1,11
  *get,vsy(ii),path,0,item,sy_noavg,PATHPT,(ii-1)*(ppp-1)/20+1
*enddo

*do,ii,1,10
  *get,vsy(11+ii),path,0,item,sy_noavg,PATHPT,(ppp-1)/2+(ii-1)*(ppp-1)/20+2
*enddo
  *get,vsy(22),path,0,item,sy_noavg,PATHPT,ppp

/OUTPUT,s_y,txt,C:\Users\Desktop\resultat
*do,i,1,22
  *VWRITE,vsy(i)
  (f16.8)
/OUTPUT
*enddo
finish
!-----
/POST1
PATH ,P_w ,2 , ,ppp
PPATH ,1 ,0 ,x4 ,y4 ,0 ,0
PPATH ,2 ,0 ,x4 ,y4 ,2*h ,0
PDEF ,sxy_avg ,s ,xy ,AVG
PDEF ,sxy_noavg ,s ,xy ,NOAVG
PLPATH,sxy_avg,sxy_noavg
/image,save,sxy,bmp,C:\Users\Desktop\resultat

```

```

*dim, vsxy,array,22
*do,ii,1,11
  *get,vsxy(ii),path,0,item,sxy_noavg,PATHPT,(ii-1)*(ppp-1)/20+1
*enddo

*do,ii,1,10
  *get,vsxy(11+ii),path,0,item,sxy_noavg,PATHPT,(ppp-1)/2+(ii-1)*(ppp-1)/20+2
*enddo

*get,vsxy(22),path,0,item,sxy_noavg,PATHPT,ppp

/OUTPUT,s_xy,txt,C:\Users\Desktop\resultat
*do,i,1,22
  *VWRITE,vsxy(i)
  (f16.8)
/OUTPUT
*enddo
finish
!-----

```

## A.2 Codes Ansys de l'exemple 1.2

```
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/view,1,1,3,3

/title, rectangular plate [0/90] subjected to parabolic transvers load
/prep7

*SET,pp,1e6

UIMP,1, EX ,EY ,EZ , 25*pp , 1*pp ,1*pp
UIMP,1, GXY ,GYZ ,GXZ , 0.5*pp , 0.2*pp ,0.5*pp
UIMP,1, PRXY ,PRYZ ,PRXZ , 0.25 , 0.25 ,0.25

*SET,p,1
*set,ht,2.5
*set,nbrc,2
*SET,h,(ht/nbrc)*10**(p-1)
*SET,a,10**p
*SET,b,10**p
*SET,mx,24
*SET,my,10
*SET,mz,20
*SET,ppp,4001
*set,e2,pp
*set,q0,1

*SET,chs,(nbrc*h)**2/b**2/100**(p-1)*q0 !<- s_x, s_y , s_xy
!*SET,chs,q0 !<- s_xz, s_yz
!*SET,chs,(2*h)**2*e2/b**3 !<- u
!*set,chs,100*(2*h)**3*e2/b**4 !<- W
```

ET,1,SOLID186

KEYOPT,1,2,0

!KEYOPT,1,3,1

!KEYOPT,1,6,1

LOCAL,11,,0,0,0,90

LOCAL,12,,0,0,0,0

CSYS,0

BLOCK,0,a,0,b,0,h

BLOCK,0,a,0,b,h,2\*h

VGLUE,ALL

LSEL,S,LOC,Z,0

LSEL,A,LOC,Z,h

LSEL,A,LOC,Z,2\*h

LESIZE,ALL,,,mx

LSEL,S,LOC,Z,h/2

LSEL,A,LOC,Z,3\*h/2

LESIZE,ALL,,,mz

LSEL,ALL

MSHKEY,1

ESYS,11

VMESH,1

ESYS,12

VMESH,3

FINISH

```

/SOLU
ANTYPE,STATIC

nsel,s,loc,x,0
nsel,a,loc,x,a
d,all,uz,,,,,uy

nsel,s,loc,y,0
nsel,a,loc,y,a
d,all,uz,,,,,ux

!*****
*DEL,_FNCNAME
*DEL,_FNCMTID
*DEL,_FNC_C1
*DEL,_FNC_C2
*DEL,_FNCCSYS
*SET,_FNCNAME,'parab'
*DIM,_FNC_C1,,1
*DIM,_FNC_C2,,1
*SET,_FNC_C1(1),chs
*SET,_FNC_C2(1),a
*SET,_FNCCSYS,0
*DIM,%_FNCNAME%,TABLE,6,5,1,,,,,%_FNCCSYS%
! q0*({X}/a)^2
*SET,%_FNCNAME%(0,0,1), 0.0, -999
*SET,%_FNCNAME%(2,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(3,0,1), %_FNC_C1(1)%
*SET,%_FNCNAME%(4,0,1), %_FNC_C2(1)%
*SET,%_FNCNAME%(5,0,1), 0.0
*SET,%_FNCNAME%(6,0,1), 0.0

```

```
*SET,%_FNCNAME%(0,1,1), 1.0, -1, 0, 1, 2, 4, 18
*SET,%_FNCNAME%(0,2,1), 0.0, -2, 0, 2, 0, 0, -1
*SET,%_FNCNAME%(0,3,1), 0, -3, 0, 1, -1, 17, -2
*SET,%_FNCNAME%(0,4,1), 0.0, -1, 0, 1, 17, 3, -3
*SET,%_FNCNAME%(0,5,1), 0.0, 99, 0, 1, -1, 0, 0
!*****
```

```
aSEL,s,LOC,z,nbrc*h
sfa,all,,pres,%parab%
ALLSEL,ALL
```

```
SOLVE
FINISH
```

```
!-----
*SET,x1,a/2
*SET,y1,b/2 ! sxx , syy , w
```

```
!-----
!*SET,x2,0
!*SET,y2,b/2 ! u , sxz
!*SET,x2,a
!*SET,y2,b/2 ! u , sxz
```

```
!-----
!*SET,x3,a/2
!*SET,y3,b ! syz
```

```
!-----
*SET,x4,0
*SET,y4,0 ! sxy
```

```
!-----
/POST1
RSYS ,0
```

```

PATH ,P_w ,2 , , ,ppp
PPATH ,1 ,0 ,x1 ,y1 ,0 ,0
PPATH ,2 ,0 ,x1 ,y1 ,2*h ,0
PDEF ,w_avg ,u ,z ,AVG
PDEF ,w_noavg ,u ,z ,NOAVG
PLPATH,w_avg , w_noavg
/image,save,w,bmp,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*dim, vw,array,22

*do,ii,1,11
  *get,vw(ii),path,0,item,w_noavg,PATHPT,(ii-1)*(ppp-1)/20+1
*enddo

*do,ii,1,10
  *get,vw(11+ii),path,0,item,w_noavg,PATHPT,(ppp-1)/2+(ii-1)*(ppp-1)/20+2
*enddo
  *get,vw(22),path,0,item,w_noavg,PATHPT,ppp

/OUTPUT,vw,txt,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*do,i,1,22
  *VWRITE,vw(i)
  (f16.8)
/OUTPUT
*enddo
finish
!-----

```



### A.3 Codes Ansys de l'exemple 2.1

```
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/view,1,1,3,3

/title, rectangular plate [0/90] subjected to line load at x=a/2
/prep7

*SET,pp,1e6

!UIMP,1, EX ,EY ,EZ , 25*pp , 1*pp ,1*pp
!UIMP,1, GXZ ,GYZ ,GXZ , 0.5*pp , 0.2*pp ,0.5*pp
!UIMP,1, PRXY ,PRYZ ,PRXZ , 0.25 , 0.25 ,0.25

MP,EX,1,25E6      ! ORTHOTROPIC MATERIAL PROPERTIES
MP,EY,1,1E6
MP,EZ,1,1E6      ! EZ=EY ASSUMED
MP,GXY,1,5E5
MP,GYZ,1,2E5
MP,GXZ,1,5E5
MP,PRXY,1,0.25   ! MAJOR POISSONS RATIO
MP,PRYZ,1,0.25   ! MAJOR POISSONS RATIO
MP,PRXZ,1,0.25   ! MAJOR POISSONS RATIO

*SET,p,1
*set,nbrc,2
*set,ht,2.5*10**(p-1)
*SET,h,ht/nbrc
*SET,a,10**p
*SET,b,10**p
*SET,mx,24
```

```

*SET,my,10
*SET,mz,20
*SET,ppp,4001
*set,e2,pp
*set,nbr20,(2*mx+1)*(2*mz+1)+(mx+1)*(2*mz)

*set,q0,b/nbr20
!*set,q0,1 !/nbr20

*SET,chs,(ht)**2/a**2/100**(p-1)*q0      ! s_x, s_y, s_xy
!*SET,chs,q0                          ! s_xz, s_yz
!*SET,chs,(2*h)**2*e2/b**3            ! u
!*set,chs,100*(2*h)**3*e2/b**4        ! W

ET,1,SOLID186

KEYOPT,1,2,0

LOCAL,11,,0,0,0,90
LOCAL,12,,0,0,0,0
CSYS,0

BLOCK,0,a,0,b,0,h
BLOCK,0,a,0,b,h,2*h
VGLUE,ALL

LSEL,S,LOC,Z,0
LSEL,A,LOC,Z,h
LSEL,A,LOC,Z,2*h
LESIZE,ALL,,,mx

```

```
LSEL,S,LOC,Z,h/2
LSEL,A,LOC,Z,3*h/2
LESIZE,ALL,,,mz
LSEL,ALL
```

```
MSHKEY,1
ESYS,11
VMESH,1
ESYS,12
VMESH,3
FINISH
```

```
/SOLU
ANTYPE,STATIC
```

```
nsel,s,loc,x,0
nsel,a,loc,x,a
d,all,uz,,,,,uy
```

```
nsel,s,loc,y,0
nsel,a,loc,y,a
d,all,uz,,,,,ux
```

```
NSEL,s,LOC,X,a/2
F,ALL,fz,-chs
ALLSEL,ALL
```

```
SOLVE
FINISH
```

```

*SET,x1,a/2
*SET,y1,b/2 ! sxx , syy , w
!-----
!*SET,x2,0
!*SET,y2,b/2 ! u , sxz
!*SET,x2,a
!*SET,y2,b/2 ! u , sxz
!-----
!*SET,x3,a/2
!*SET,y3,b ! syz
!-----
*SET,x4,0
*SET,y4,0 ! sxy
!-----
/POST1
RSYS ,0
PATH ,P_sx ,2 , ,ppp
PPATH ,1 ,0 ,x1 ,y1 ,0 ,0
PPATH ,2 ,0 ,x1 ,y1 ,2*h ,0
PDEF ,sx_avg ,s ,x ,AVG
PDEF ,sx_noavg ,s ,x ,NOAVG
PLPATH,sx_avg , sx_noavg
/image,save,sx,bmp,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*dim, vsx,array,22

*do,ii,1,11
  *get,vsx(ii),path,0,item,sx_avg,PATHPT,(ii-1)*(ppp-1)/20+1
*enddo

*do,ii,1,10

```

```

*get,vsx(11+ii),path,0,item,sx_avg,PATHPT,(ppp-1)/2+(ii-1)*(ppp-1)/20+2
*enddo

*get,vsx(22),path,0,item,sx_avg,PATHPT,ppp

/OUTPUT,s_x,txt,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*do,i,1,22
  *VWRITE,vsx(i)
  (f16.8)
/OUTPUT
*enddo
finish
!-----
/POST1
PATH ,P_sy,2 , ,ppp
PPATH,1 ,0 ,x1 ,y1 ,0 ,0
PPATH,2 ,0 ,x1 ,y1 ,2*h ,0
PDEF ,sy_avg ,s ,y ,AVG
PDEF ,sy_noavg ,s ,y ,NOAVG
PLPATH,sy_avg,sy_noavg
/image,save,ssy,bmp,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*dim, vsy,array,22
*do,ii,1,11
  *get,vsy(ii),path,0,item,sy_avg,PATHPT,(ii-1)*(ppp-1)/20+1
*enddo

*do,ii,1,10
  *get,vsy(11+ii),path,0,item,sy_avg,PATHPT,(ppp-1)/2+(ii-1)*(ppp-1)/20+2
*enddo

*get,vsy(22),path,0,item,sy_avg,PATHPT,ppp
/OUTPUT,s_y,txt,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*do,i,1,22

```

```

    *VWRITE,vsy(i)
    (f16.8)
/OUTPUT
*enddo
finish
!-----
/POST1
PATH ,P_w,2 , ,ppp
PPATH,1 ,0 ,x4 ,y4 ,0 ,0
PPATH,2 ,0 ,x4 ,y4 ,2*h ,0
PDEF ,sxy_avg ,s ,xy ,AVG
PDEF ,sxy_noavg ,s ,xy ,NOAVG
PLPATH,sxy_avg,sxy_noavg
/image,save,sxy,bmp,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*dim, vsxy,array,22
*do,ii,1,11
    *get,vsxy(ii),path,0,item,sxy_avg,PATHPT,(ii-1)*(ppp-1)/20+1
*enddo
*do,ii,1,10
    *get,vsxy(11+ii),path,0,item,sxy_avg,PATHPT,(ppp-1)/2+(ii-1)*(ppp-1)/20+2
*enddo
    *get,vsxy(22),path,0,item,sxy_avg,PATHPT,ppp

/OUTPUT,s_xy,txt,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*do,i,1,22
    *VWRITE,vsxy(i)
    (f16.8)
/OUTPUT
*enddo
finish

```

## A.4 Codes Ansys de l'exemple 2.2

```
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/view,1,1,3,3

/title, rectangular plate [0/90] subjected to line load at  $x=a/2$ 
/prep7

*SET,pp,1e6

!UIIMP,1, EX ,EY ,EZ , 25*pp , 1*pp ,1*pp
!UIIMP,1, GXY ,GYZ ,GXZ , 0.5*pp , 0.2*pp ,0.5*pp
!UIIMP,1, PRXY ,PRYZ ,PRXZ , 0.25 , 0.25 ,0.25

MP,EX,1,25E6
MP,EY,1,1E6
MP,EZ,1,1E6
MP,GXY,1,5E5
MP,GYZ,1,2E5
MP,GXZ,1,5E5
MP,PRXY,1,0.25
MP,PRYZ,1,0.25
MP,PRXZ,1,0.25

*SET,p,1
*set,nbrc,2
*set,ht,0.1*10**(p-1)
*SET,h,ht/nbrc
*SET,a,10**p
*SET,b,10**p
*SET,mx,24
*SET,my,24
```

```

*SET,mz,20
*SET,ppp,4001
*set,e2,pp
*set,nbr20,(2*my+1)*(2*mz+1)+(my+1)*(2*mz)

*set,q0,b/nbr20

*SET,chs,(ht)**2/a**2/100**(p-1)*q0    !s_x, s_y , s_xy
!*SET,chs,q0                !s_xz, s_yz
!*SET,chs,(2*h)**2*e2/b**3        !u
*set,chs,100*(ht)**3*e2/b**4*q0    !W

ET,1,SOLID186

KEYOPT,1,2,0
!KEYOPT,1,3,1
!KEYOPT,1,6,1

LOCAL,11,,0,0,0,90
LOCAL,12,,0,0,0,0
CSYS,0

BLOCK,0,a,0,b,0,h
BLOCK,0,a,0,b,h,2*h
VGLUE,ALL

LSEL,S,LOC,Z,0
LSEL,A,LOC,Z,h
LSEL,A,LOC,Z,2*h
LESIZE,ALL,,,mx

```



```
LSEL,S,LOC,Z,h/2
LSEL,A,LOC,Z,3*h/2
LESIZE,ALL,,,mz
LSEL,ALL
```

```
MSHKEY,1
ESYS,11
VMESH,1
ESYS,12
VMESH,3
FINISH
```

```
/SOLU
ANTYPE,STATIC
```

```
nsel,s,loc,x,0
nsel,a,loc,x,a
d,all,uz,,,,,uy
```

```
nsel,s,loc,y,0
nsel,a,loc,y,a
d,all,uz,,,,,ux
```

```
NSEL,s,LOC,X,a/2
F,ALL,fz,-chs
ALLSEL,ALL
```

```
SOLVE
FINISH
```

```

!-----
*SET,x1,a/2
*SET,y1,b/2 ! sxx , syy , w
!-----
!*SET,x2,0
!*SET,y2,b/2 ! u , sxz
!*SET,x2,a
!*SET,y2,b/2 ! u , sxz
!-----
!*SET,x3,a/2
!*SET,y3,b ! syz
!-----
*SET,x4,0
*SET,y4,0 ! sxy
!-----
/POST1
RSYS ,0
PATH ,P_w,2 , ,ppp
PPATH,1 ,0 ,x1 ,y1 ,0 ,0
PPATH,2 ,0 ,x1 ,y1 ,2*h ,0
PDEF ,w_avg ,u ,z ,AVG
PDEF ,w_noavg ,u ,z ,NOAVG
PLPATH,w_avg , w_noavg
/image,save,w,bmp,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*dim, vw,array,22

*do,ii,1,11
  *get,vw(ii),path,0,item,w_avg,PATHPT,(ii-1)*(ppp-1)/20+1
*enddo

*do,ii,1,10

```

```
*get,vw(11+ii),path,0,item,w_avg,PATHPT,(ppp-1)/2+(ii-1)*(ppp-1)/20+2
*enddo
*get,vw(22),path,0,item,w_avg,PATHPT,ppp

/OUTPUT,vw,txt,C:\Users\hichem\Desktop\resultat
*do,i,1,22
  *VWRITE,vw(i)
  (f16.8)
/OUTPUT
*enddo
finish
!-----
```

## Annexe B

### Codes Maple : calcul théorique(Reddy)

```
> restart;
> with(linalg):
>
u(x,y,z):=u0(x,y)+z*(phix(x,y)-4/3*(z/h)^2*(phix(x,y)+diff(w0(x,y),x)));
v(x,y,z):=v0(x,y)+z*(phiy(x,y)-4/3*(z/h)^2*(phiy(x,y)+diff(w0(x,y),y)));
w(x,y,z):=w0(x,y):
> epsilon_x:=diff(u(x,y,z),x):
epsilon_y:=diff(v(x,y,z),y):
epsilon_z:=diff(w(x,y,z),z):
epsilon_xy:=diff(u(x,y,z),y)+diff(v(x,y,z),x):
epsilon_xz:=diff(u(x,y,z),z)+diff(w(x,y,z),x):
epsilon_yz:=diff(v(x,y,z),z)+diff(w(x,y,z),y):
> defor:=array([[epsilon_x],[epsilon_y],[epsilon_z],
[epsilon_yz],[epsilon_xz],[epsilon_xy]]):
> m_orth:=array([[Q11(z),Q12(z),Q13(z),0,0,0],
[Q12(z),Q22(z),Q23(z),0,0,0], [Q13(z),Q23(z),Q33(z),0,0,0],
[0,0,0,Q44(z),0,0],
[0,0,0,0,Q55(z),0], [0,0,0,0,0,Q66(z)]]):
> sigma:=multiply(m_orth, defor):
> sigma_1:=sigma[1,1]:
sigma_2:=sigma[2,1]:
sigma_3:=sigma[3,1]:
sigma_4:=sigma[4,1]:
sigma_5:=sigma[5,1]:
sigma_6:=sigma[6,1]:
> N_1(x,y):=expand(expand(int(sigma_1,z))):
N_2(x,y):=expand(expand(int(sigma_2,z))):
N_6(x,y):=expand(expand(int(sigma_6,z))):
> M_1(x,y):=expand(expand(int(z*sigma_1,z))):
M_2(x,y):=expand(expand(int(z*sigma_2,z))):
M_6(x,y):=expand(expand(int(z*sigma_6,z))):
> p_1(x,y):=expand(expand(int(z^3*sigma_1,z))):
p_2(x,y):=expand(expand(int(z^3*sigma_2,z))):
p_6(x,y):=expand(expand(int(z^3*sigma_6,z))):
> q_1(x,y):=expand(expand(int(sigma_5,z))):
q_2(x,y):=expand(expand(int(sigma_4,z))):
r_1(x,y):=expand(expand(int(z^2*sigma_5,z))):
r_2(x,y):=expand(expand(int(z^2*sigma_4,z))):
>
N_1(x,y):=subs(int(Q11(z),z)=A11,int(Q12(z),z)=A12,int(Q11(z)*z,z)=B11,
,int(Q12(z)*z,z)=B12,int(Q11(z)*z^3,z)=E11,int(Q12(z)*z^3,z)=E12,
N_1(x,y)):
>
```

```

N_2(x,y):=subs(int(Q22(z),z)=A22,int(Q12(z),z)=A12,int(Q12(z)*z,z)
)=B12,
int(Q22(z)*z,z)=B22,int(Q12(z)*z^3,z)=E12,int(Q22(z)*z^3,z)=E22,N
_2(x,y)):
> N_6(x,y):=subs(int(Q66(z),z)=A66,
int(Q66(z)*z,z)=B66,int(Q66(z)*z^3,z)=E66,N_6(x,y)):
>
m_1(x,y):=subs(int(Q11(z)*z,z)=B11,int(Q12(z)*z,z)=B12,int(Q11(z)
)*z^2,z)=D11,
int(Q12(z)*z^2,z)=D12,int(Q11(z)*z^4,z)=F11,int(Q12(z)*z^4,z)=F12
,M_1(x,y)):
>
m_2(x,y):=subs(int(Q22(z)*z,z)=B22,int(Q12(z)*z,z)=B12,int(Q22(z)
)*z^2,z)=D22,
int(Q12(z)*z^2,z)=D12,int(Q22(z)*z^4,z)=F22,int(Q12(z)*z^4,z)=F12
,
int(Q23(z)*z*diff(g(z),z),z)=Bs23,M_2(x,y)):
> m_6(x,y):=subs(int(Q66(z)*z,z)=B66,int(Q66(z)*z^2,z)=D66,
int(Q66(z)*z^4,z)=F66,M_6(x,y)):
> p_1(x,y):=subs(int(Q11(z)*z^3,z)=E11,int(Q12(z)*z^3,z)=E12,
int(Q11(z)*z^4,z)=F11,int(Q12(z)*z^4,z)=F12,int(Q11(z)*z^6,z)=H11
,
int(Q12(z)*z^6,z)=H12,p_1(x,y)):
> p_2(x,y):=subs(int(Q22(z)*z^3,z)=E22,int(Q12(z)*z^4,z)=F12,
int(Q22(z)*z^4,z)=F22,int(Q12(z)*z^3,z)=E12,
int(Q22(z)*z^6,z)=H22,int(Q12(z)*z^6,z)=H12,p_2(x,y)):
> p_6(x,y):=subs(int(Q66(z)*z^3,z)=E66,int(Q66(z)*z^4,z)=F66,
int(Q66(z)*z^6,z)=H66,p_6(x,y)):
> q_1(x,y):=subs(int(Q55(z),z)=A55,
int((Q55(z)*z^2,z),z)=D55,q_1(x,y)):
> q_2(x,y):=subs(int(Q44(z),z)=A44,
int((Q44(z)*z^2,z),z)=D44,q_2(x,y)):
> r_1(x,y):=subs(int(Q55(z)*z^4,z)=F55,
int((Q55(z)*z^2,z),z)=D55,r_1(x,y)):
> r_2(x,y):=subs(int(Q44(z)*z^4,z)=F44,
int((Q44(z)*z^2,z),z)=D44,r_2(x,y)):
> eq1:=(diff(N_1(x,y),x)+diff(N_6(x,y),y)):
> eq2:=(diff(N_2(x,y),y)+diff(N_6(x,y),x)):
> eq3 :=diff(q_1(x,y),x)+diff(q_2(x,y),y)+
q(x,y)-4/h^2*(diff(r_1(x,y),x)+
diff(r_2(x,y),y))+4/(3*h^2)*(diff(p_1(x,y),x,x)+
2*diff(p_6(x,y),x,y)+diff(p_2(x,y),y,y)):
> eq4 :=diff(m_1(x,y),x)+diff(m_6(x,y),y)-q_1(x,y)+
4/h^2*r_1(x,y)-4/(3*h^2)*(diff(p_1(x,y),x)+diff(p_6(x,y),y)):
> eq5:=diff(m_6(x,y),x)+diff(m_2(x,y),y)-q_2(x,y)+
4/h^2*r_2(x,y)-4/(3*h^2)*(diff(p_6(x,y),x)+diff(p_2(x,y),y)):
> u0(x,y):=Umn*cos(alpha*x)*sin(beta*y):

```

```

v0(x,y):=Vmn*sin(alpha*x)*cos(beta*y):
w0(x,y):=Wmn*sin(alpha*x)*sin(beta*y):
phix(x,y):=phixmn*cos(alpha*x)*sin(beta*y):
phiy(x,y):=phiymn*sin(alpha*x)*cos(beta*y):
q(x,y):=qmn*sin(alpha*x)*sin(beta*y):
> q1:=eval(eq1,[cos(alpha*x)=1,sin(beta*y)=1,
sin(alpha*x)=1,cos(beta*y)=1]):
> q2:=eval(eq2,[cos(alpha*x)=1,sin(beta*y)=1,
sin(alpha*x)=1,cos(beta*y)=1]):
> q3:=eval(eq3,[cos(alpha*x)=1,sin(beta*y)=1,
sin(alpha*x)=1,cos(beta*y)=1]):
> q4:=eval(eq4,[cos(alpha*x)=1,sin(beta*y)=1,
sin(alpha*x)=1,cos(beta*y)=1]):
> q5:=eval(eq5,[cos(alpha*x)=1,sin(beta*y)=1,
sin(alpha*x)=1,cos(beta*y)=1]):
> q1:=collect(q1,[Umn,Vmn,Wmn,phixmn,phiymn,qmn]):
q2:=collect(q2,[Umn,Vmn,Wmn,phixmn,phiymn,qmn]):
q3:=collect(q3,[Umn,Vmn,Wmn,phixmn,phiymn,qmn]):
q4:=collect(q4,[Umn,Vmn,Wmn,phixmn,phiymn,qmn]):
q5:=collect(q5,[Umn,Vmn,Wmn,phixmn,phiymn,qmn]):
> k11:=coeff(q1,Umn):
k12:=coeff(q1,Vmn):
k13:=coeff(q1,Wmn):
k14:=coeff(q1,phixmn):
k15:=coeff(q1,phiymn):
> k21:=coeff(q2,Umn):
k22:=coeff(q2,Vmn):
k23:=coeff(q2,Wmn):
k24:=coeff(q2,phixmn):
k25:=coeff(q2,phiymn):
> k31:=coeff(q3,Umn):
k32:=coeff(q3,Vmn):
k33:=coeff(q3,Wmn):
k34:=coeff(q3,phixmn):
k35:=coeff(q3,phiymn):
> k41:=coeff(q4,Umn):
k42:=coeff(q4,Vmn):
k43:=coeff(q4,Wmn):
k44:=coeff(q4,phixmn):
k45:=coeff(q4,phiymn):
> k51:=coeff(q5,Umn):
k52:=coeff(q5,Vmn):
k53:=coeff(q5,Wmn):
k54:=coeff(q5,phixmn):
k55:=coeff(q5,phiymn):
> simplify(k12/k21):    simplify(k13/k31):    simplify(k14/k41):
simplify(k15/k51):

```

```

simplify(k23/k32):      simplify(k24/k42):      simplify(k25/k52):
simplify(k34/k43):      simplify(k35/k53):
simplify(k45/k54):
> K:=matrix([[k11,k12,k13,k14,k15],[k21,k22,k23,k24,k25],
[k31,k32,k33,k34,k35],[k41,k42,k43,k44,k45],[k51,k52,k53,k54,k55]
]):
> pi:=evalf(Pi,100):      alpha:=m*pi/a:      beta:=n*pi/b:      a:=10:
b:=10:
> e1:= 25:
e2:=1:
e3:= e2:
g12:=0.5*e2: g13:=g12:      g23:=0.2*e2:
mul2:=0.25: mu21:=mul2/25 mu13:= 0.2 mu31:=mul3/25:
mu23:= 0.25:mu32:=mu23:
>
ddl:=(1-mul2*mu21-mu23*mu32-mu31*mul3-2*mul2*mu23*mu31)/(e1*e2*e3
):
signe:=-1:
c11:=(1-mu23*mu32)/(e2*e3*ddl):
c12:=(mu21-signe*mu31*mu23)/(e2*e3*ddl):
c13:=(mu31-signe*mu21*mu32)/(e2*e3*ddl):
c22:=(1-mul3*mu31)/(e1*e3*ddl):
c23:=(mu32-signe*mul2*mu31)/(e1*e3*ddl):
c33:=(1-mul2*mu21)/(e1*e2*ddl):
c44:=g23:
c55:=g13:
c66:=g12:
qq:=array([[c11,c12,c13,0,0,0],
[c12,c22,c23,0,0,0],
[c13,c23,c33,0,0,0],
[0,0,0,c44,0,0],
[0,0,0,0,c55,0],
[0,0,0,0,0,c66]]):
> ii:=<0,pi/2>;      jj:=1:
for tt in ii do
kc[jj][1,1]:=c11*cos(tt)^4+2*(c12+2*c66)*sin(tt)^2*cos(tt)^2+c22*
sin(tt)^4:
kc[jj][1,2]:=(c11+c22-4*c66)*sin(tt)^2*cos(tt)^2+c12*(sin(tt)^4+c
os(tt)^4):
kc[jj][1,3]:=c13*cos(tt)^2+c23*sin(tt)^2:
kc[jj][2,2]:=c11*sin(tt)^4+c22*cos(tt)^4+2*(c12+2*c66)*sin(tt)^2*
cos(tt)^2:
kc[jj][2,3]:=c13*sin(tt)^2+c23*cos(tt)^2:
kc[jj][3,3]:=c33:
kc[jj][4,4]:=c44*cos(tt)^2+c55*sin(tt)^2:
kc[jj][4,5]:=0:
kc[jj][5,5]:=c55*cos(tt)^2+c44*sin(tt)^2:

```

```

kc[jj][1,6]:=0;   kc[jj][2,6]:=0;   kc[jj][3,6]:=0:
kc[jj][6,6]:=sin(tt)^2*cos(tt)^2*(c11+c22-2*c12-2*c66)+
c66*(cos(tt)^4+sin(tt)^4):
jj:=jj+1:
od:
> nn:=2:
> A11:=0:   A12:=0:   A22:=0:   A16:=0:   A26:=0:   A66:=0:
  A44:=0:   A45:=0:   A55:=0:
B11:=0:   B12:=0:   B22:=0:   B16:=0:   B26:=0:   B66:=0:
D11:=0:   D12:=0:   D22:=0:   D16:=0:   D26:=0:   D66:=0:
D44:=0:   D45:=0:   D55:=0:
E11:=0:   E12:=0:   E22:=0:   E16:=0:   E26:=0:   E66:=0:
F11:=0:   F12:=0:   F22:=0:   F16:=0:   F26:=0:   F66:=0:
  F44:=0:   F45:=0:   F55:=0:
H11:=0:   H12:=0:   H22:=0:   H16:=0:   H26:=0:   H66:=0:
> pp:=<1,2>:   nn:=2:   # nbr de couche
> for i in pp do
h1:=-h/2+(i-1)*h/nn:   h2:=-h/2+i*h/nn:
A11:=A11+kc[i][1,1]*int(1,z=h1..h2):
A12:=A12+kc[i][1,2]*int(1,z=h1..h2):
  A22:=A22+kc[i][2,2]*int(1,z=h1..h2):
A16:=A16+kc[i][1,6]*int(1,z=h1..h2):
A26:=A26+kc[i][2,6]*int(1,z=h1..h2):
  A66:=A66+kc[i][6,6]*int(1,z=h1..h2):
A44:=A44+kc[i][4,4]*int(1,z=h1..h2):
A55:=A55+kc[i][5,5]*int(1,z=h1..h2):
  A45:=A45+kc[i][4,5]*int(1,z=h1..h2):
B11:=B11+kc[i][1,1]*int(z,z=h1..h2):
B12:=B12+kc[i][1,2]*int(z,z=h1..h2):
B22:=B22+kc[i][2,2]*int(z,z=h1..h2):
B16:=B16+kc[i][1,6]*int(z,z=h1..h2):
B26:=B26+kc[i][2,6]*int(z,z=h1..h2):
  B66:=B66+kc[i][6,6]*int(z,z=h1..h2):
D11:=D11+kc[i][1,1]*int(z^2,z=h1..h2):
D12:=D12+kc[i][1,2]*int(z^2,z=h1..h2):
D22:=D22+kc[i][2,2]*int(z^2,z=h1..h2):
D16:=D16+kc[i][1,6]*int(z^2,z=h1..h2):
D26:=D26+kc[i][2,6]*int(z^2,z=h1..h2):
D66:=D66+kc[i][6,6]*int(z^2,z=h1..h2):
D44:=D44+kc[i][4,4]*int(z^2,z=h1..h2):
D55:=D55+kc[i][5,5]*int(z^2,z=h1..h2):
D45:=D45+kc[i][4,5]*int(z^2,z=h1..h2):
E11:=E11+kc[i][1,1]*int(z^3,z=h1..h2):
E12:=E12+kc[i][1,2]*int(z^3,z=h1..h2):
E22:=E22+kc[i][2,2]*int(z^3,z=h1..h2):
E16:=E16+kc[i][1,6]*int(z^3,z=h1..h2):
E26:=E26+kc[i][2,6]*int(z^3,z=h1..h2):

```



```

E66:=E66+kc[i][6,6]*int(z^3,z=h1..h2):
F11:=F11+kc[i][1,1]*int(z^4,z=h1..h2):
F12:=F12+kc[i][1,2]*int(z^4,z=h1..h2):
F22:=F22+kc[i][2,2]*int(z^4,z=h1..h2):
F16:=F16+kc[i][1,6]*int(z^4,z=h1..h2):
F26:=F26+kc[i][2,6]*int(z^4,z=h1..h2):
F66:=F66+kc[i][6,6]*int(z^4,z=h1..h2):
F44:=F44+kc[i][4,4]*int(z^4,z=h1..h2):
F55:=F55+kc[i][5,5]*int(z^4,z=h1..h2):
F45:=F45+kc[i][4,5]*int(z^4,z=h1..h2):
H11:=H11+kc[i][1,1]*int(z^6,z=h1..h2):
H12:=H12+kc[i][1,2]*int(z^6,z=h1..h2):
H22:=H22+kc[i][2,2]*int(z^6,z=h1..h2):
H16:=H16+kc[i][1,6]*int(z^6,z=h1..h2):
H26:=H26+kc[i][2,6]*int(z^6,z=h1..h2):
H66:=H66+kc[i][6,6]*int(z^6,z=h1..h2):
od:
> K:=matrix([ [k11,k12,k13,k14,k15], [k21,k22,k23,k24,k25],
[k31,k32,k33,k34,k35], [k41,k42,k43,k44,k45], [k51,k52,k53,k54,k55]
]):
> iii:=(2/(m*pi)*sin(m*pi)+2/(m^2*pi^2)*cos(m*pi)-cos(m*pi)
-2/(m^2*pi^2))*(-cos(n*pi)+1):
qmn:=4*q0/(pi^2*m*n)*iii:
> vv:=<0,0,-qmn,0,0>:
> #Soll:=LinearSolve(K,vv):
Soll:=linsolve(K,vv):
> umn:=Soll[1]: vmn:=Soll[2]: wmn:=Soll[3]: phixmn:=Soll[4]:
phiymn:=Soll[5]:
> u0:=umn*cos(m*pi/a*x)*sin(n*pi/b*y):
v0:=vmn*sin(m*pi/a*x)*cos(n*pi/b*y):
w0:=wmn*sin(m*pi/a*x)*sin(n*pi/b*y):
phix:=phixmn*cos(m*pi/a*x)*sin(n*pi/b*y):
phiy:=phiymn*sin(m*pi/a*x)*cos(n*pi/b*y):
> u:=u0+z*(phix-4/3*(z/h)^2*(phix+diff(w0,x))):
v:=v0+z*(phiy-4/3*(z/h)^2*(phiy+diff(w0,y))):
w:=w0:
ex:=diff(u,x):
ey:=diff(v,y):
ez:=diff(w,z):
gxy:=diff(u,y)+diff(v,x):
gxz:=diff(u,z)+diff(w,x):
gyz:=diff(v,z)+diff(w,y):
> s:=a/h:
for i from 1 to nn do
sx[i]:=kc[i][1,1]*ex+kc[i][1,2]*ey+kc[i][1,3]*ez:
sy[i]:=kc[i][1,2]*ex+kc[i][2,2]*ey+kc[i][2,3]*ez:
sz[i]:=kc[i][1,3]*ex+kc[i][2,3]*ey+kc[i][3,3]*ez:

```

```

txy[i]:=kc[i][6,6]*gxy:
txz[i]:=kc[i][5,5]*gxz:
tyz[i]:=kc[i][5,5]*gyz:
txzee[i]:=-int(diff(sx[i],x)+diff(txy[i],y),z=(-h/2+(i-1)*h/nn)..
z):
tyzee[i]:=-int(diff(sy[i],y)+diff(txy[i],x),z=(-h/2+(i-1)*h/nn)..
z):
sxb[i]:=sx[i]/(q0*s^2):
syb[i]:=sy[i]/(q0*s^2):
txyb[i]:=txy[i]/(q0*s^2):
txzb[i]:=txz[i]/(q0*s):
tyzb[i]:=tyz[i]/(q0*s):
txzbee[i]:=txzee[i]/(q0*s):
tyzbee[i]:=tyzee[i]/(q0*s):
od:
> etr:=25:
ub:=simplify(u*e2/(q0*h*s^3)):
wb:=evalf(w*100*e2/(q0*h*s^4)):      uub:=0:      wwb:=0:
for ii from 1 to etr by 2 do
  for jj from 1 to etr by 2 do
    uub:=uub+subs(m=ii,n=jj,ub):
    wwb:=wwb+subs(m=ii,n=jj,wb):
  od:
od:
> for i from 1 to nn do
  val1:=0:  val2:=0:  val3:=0: val4:=0:val5:=0: val6:=0:
  val7:=0:
  for ii from 1 to etr by 2 do
    for jj from 1 to etr by 2 do
      val1:=val1+subs(m=ii,n=jj,sxb[i]):
      val2:=val2+subs(m=ii,n=jj,syb[i]):
      val3:=val3+subs(m=ii,n=jj,txyb[i]):
      val4:=val4+subs(m=ii,n=jj,txzb[i]):
      val5:=val5+subs(m=ii,n=jj,tyzb[i]):
      val6:=val6+subs(m=ii,n=jj,txzbee[i]):
      val7:=val7+subs(m=ii,n=jj,tyzbee[i]):
    od:
  od:
ssxb[i]:=evalf(val1):  ssyb[i]:=evalf(val2):
ttxyb[i]:=evalf(val3):
  ttxzb[i]:=evalf(val4):  ttyzb[i]:=evalf(val5):
  ttxzbee[i]:=evalf(val6):  ttyzbee[i]:=evalf(val7):
od:
>
> hh:=<2.5,1,0.1>:
#zxz:=<-0.85,-57/200,-0.0225>:  zyz:=<0.8,53/200,0.0225>: #
zxz:=<-0.85,-57/200,-0.0225>:  zyz:=<0.8125,53/200,0.0225>: #

```

```

#zxz:=<-0.6125,-13/50,-0.022>:   zyz:=<0.925,73/200,0.0235>: #
for j from 1 to 3 do
  t1[j,1]:=simplify(subs(x=0,y=b/2,z=-hh[j]/2,h=hh[j],uub));
  t1[j,2]:=simplify(subs(x=a/2,y=b/2,z=0,h=hh[j],wub));

t1[j,3]:=simplify(subs(x=a/2,y=b/2,z=-hh[j]/2,h=hh[j],ssxb[1]));

t1[j,4]:=simplify(subs(x=a/2,y=b/2,z=-hh[j]/2,h=hh[j],ssyb[1]));
t1[j,5]:=simplify(subs(x=0,y=0,z=-hh[j]/2,h=hh[j],ttxyb[1]));
t2[j,1]:=simplify(subs(x=0,y=b/2,z=0,h=hh[j],ttxzb[1]));

t2[j,2]:=simplify(subs(x=0,y=b/2,z=zxz[j],h=hh[j],ttxzbee[1]));
t2[j,3]:=simplify(subs(x=a/2,y=0,z=0,h=hh[j],ttypzb[1]));

t2[j,4]:=simplify(subs(x=a/2,y=0,z=zyz[j],h=hh[j],ttypzbee[2])+
subs(x=a/2,y=0,z=0,h=hh[j],ttypzbee[1]));
od:
>print(t1[1,1], t1[1,2],t1[1,3],t1[1,4],t1[1,5]):
print(t1[2,1], t1[2,2],t1[2,3],t1[2,4],t1[2,5]):
print(t1[3,1], t1[3,2],t1[3,3],t1[3,4],t1[3,5]):

>print(t2[1,1], t2[1,2], t2[1,3], t2[1,4]):
print(t2[2,1], t2[2,2], t2[2,3], t2[2,4]):
print(t2[3,1], t2[3,2], t2[3,3], t2[3,4]):
>#zh:=array(1..102):
nbr:=18:   hh:=2.5:   l:=0:
for i from 1 to nn do
  for j from 1 to (nbr/2+1) do
    l:=l+1:
    zh[l]:=-hh/2+(i-1)*hh/nn+hh/nbr*(j-1):
  od:
od:
>#g1:=array(1..102): g2:=array(1..102): g3:=array(1..102):
g4:=array(1..102):
  g5:=array(1..102): g6:=array(1..102):
#g7:=array(1..102):
vv1:=0:   vv2:=0:   l:=0:   max6:=0:   zmax6:=0:   max7:=0:
zmax7:=0:
for i from 1 to nn do
  for j from 1 to (nbr/2+1) do
    l:=l+1:

g1[l]:=evalf(subs(x=a/2,y=b/2,z=zh[l],h=hh,ssxb[i])):

g2[l]:=evalf(subs(x=a/2,y=b/2,z=zh[l],h=hh,ssyb[i])):
g3[l]:=evalf(subs(x=0,y=0,z=zh[l],h=hh,ttxyb[i])):
g4[l]:=evalf(subs(x=0,y=b/2,z=zh[l],h=hh,ttxzb[i])):

```

```

g5[1]:=evalf(subs(x=a/2,y=0,z=zh[1],h=hh,ttzbe[i])):
g6[1]:=vv1+evalf(subs(x=0,y=b/2,z=zh[1],h=hh,ttzbee[i])):
g7[1]:=vv2+evalf(subs(x=a/2,y=0,z=zh[1],h=hh,ttzbee[i])):
    if max6<g6[1] then
        max6:=g6[1]: zmax6:=zh[1]:
    fi:
    if max7<g7[1] then
        max7:=g7[1]: zmax7:=zh[1]:
    fi:
od:
vv1:=g6[nbr/2+1]: vv2:=g7[nbr/2]:
od:
> max6: zmax6: max7: zmax7:
> for i from 1 to 20 do
g1[i]:
od:
> for i from 1 to 20 do
g4[i]:
od:
> for i from 1 to 20 do
g6[i]:
od:
> with(plots):
> plot([[g1[k],zh[k]] $k=1..nbr+2],style=point, title=`sx`):
plot([[g2[k],zh[k]] $k=1..nbr+2],style=point, title=`sy`):
plot([[g3[k],zh[k]] $k=1..nbr+2],style=point, title=`txy`):
plot([[g4[k],zh[k]] $k=1..nbr+2],style=point, title=`txz_cr`):
plot([[g5[k],zh[k]] $k=1..nbr+2],style=point, title=`tyz_cr`):
plot([[g6[k],zh[k]] $k=1..nbr+2],style=point, title=`txz_ee`):
plot([[g7[k],zh[k]] $k=1..nbr+2],style=point, title=`tyz_ee`):

```

# Annexe C

## Codes Matlab : calcul théorique(Present)

```
clear all
digits(7)
a=10;
b=10;
syms z q0 x y e2 m n tet qmn h
% cas de deux couches
lambda=m*pi/a;      mu=n*pi/b;      kl=lambda^2;
k2=mu^2;
f=z/(2*pi)*(pi+2*cos(pi*z/h));      % Tounsi
% f=h/pi*sin(pi*z/h);                % article de base
%f=z*(1-(4*z^2)/3*h^2);                % redy
%f=1/2*tanh(2*z/h)-4/3*z^3/(h^2*cosh(1)^2);
%f=sinh(03*z/h)^(-1)-z*6/(h*sqrt(13));
g=((diff(f,z)));
gg=((diff(g,z)));
e1= 25*e2;      e3= e2;  g12=0.5*e2;  g13=g12;  g23=0.2*e2;
mul2=0.25;      mu21=mul2/25;  mul3= 0.25;  mu31=mul3/25;  mu23= 0.25;
mu32=mu23;
ddl=1-mul2*mu21-mu23*mu32-mu31*mul3-2*mu21*mu32*mul3;
q11=e1*(1-mu23*mu32)/ddl;
q12=e1*(mu21+mu31*mu23)/ddl;
q13=e1*(mu31+mu21*mu32)/ddl;
q22=e2*(1-mul3*mu31)/ddl;
q23=e2*(mu32+mul2*mu31)/ddl;
q33=e3*(1-mul2*mu21)/ddl;
q66=g12;
q44=g23;
q55=g13;
q=[q11 q12 q13 0 0 0;q12 q22 q23 0 0 0;q13 q23 q33 0 0 0;0 0 0
q44 0 0;0 0 0 0 q55 0;0 0 0 0 0 q66];
qq(:, :, 1)=r(q, 0);
qq(:, :, 2)=r(q, pi/2);
nn=2;      %nbr de couche
a11=0;      a12=0;      a22=0;      a66=0;
b11=0;      b12=0;      b22=0;      b66=0;
c11=0;      c12=0;      c22=0;      c66=0;
d11=0;      d12=0;      d22=0;      d23=0;      d66=0;
e11=0;      e12=0;      e22=0;      e66=0;
f11=0;      f12=0;      f22=0;      f33=0;      f66=0;
o44=0;      o55=0;      h13=0;      h23=0;      hg33=0;      i13=0;      i23=0;
j13=0;      j23=0;
pp=[1,2];
for i=1:nn
    h1=-h/2+(i-1)*h/nn;      h2=-h/2+i*h/nn;
% h1=h/2-(i-1)*h/nn;      h2=h/2-i*h/nn;
    op=pp(i);

a11=vpa(a11+qq(1,1,op)*int(1,z,h1,h2));a12=vpa(a12+qq(1,2,op)*int(1,
z,h1,h2));a22=vpa(a22+qq(2,2,op)*int(1,z,h1,h2));a66=vpa(a66+qq(6,6,
op)*int(1,z,h1,h2));

b11=vpa(b11+qq(1,1,op)*int(z,z,h1,h2));b12=vpa(b12+qq(1,2,op)*int(z,
z,h1,h2));b22=vpa(b22+qq(2,2,op)*int(z,z,h1,h2));b66=vpa(b66+qq(6,6,
op)*int(z,z,h1,h2));

c11=vpa(c11+qq(1,1,op)*int(f,z,h1,h2));c12=vpa(c12+qq(1,2,op)*int(f,
```

```

z,h1,h2));c22=vpa(c22+qq(2,2,op)*int(f,z,h1,h2));c66=vpa(c66+qq(6,6,
op)*int(f,z,h1,h2));

d11=vpa(d11+qq(1,1,op)*int(z^2,z,h1,h2));d12=vpa(d12+qq(1,2,op)*int(
z^2,z,h1,h2));d22=vpa(d22+qq(2,2,op)*int(z^2,z,h1,h2));d66=vpa(d66+q
q(6,6,op)*int(z^2,z,h1,h2));

e11=vpa(e11+qq(1,1,op)*int(z*f,z,h1,h2));e12=vpa(e12+qq(1,2,op)*int(
z*f,z,h1,h2));e22=vpa(e22+qq(2,2,op)*int(z*f,z,h1,h2));e66=vpa(e66+q
q(6,6,op)*int(z*f,z,h1,h2));

f11=vpa(f11+qq(1,1,op)*int(f^2,z,h1,h2));f12=vpa(f12+qq(1,2,op)*int(
f^2,z,h1,h2));f22=vpa(f22+qq(2,2,op)*int(f^2,z,h1,h2));f33=vpa(f33+q
q(3,3,op)*int(f^2,z,h1,h2));f66=vpa(f66+qq(6,6,op)*int(f^2,z,h1,h2))
;

h13=vpa(h13+qq(1,3,op)*int(gg,z,h1,h2));h23=vpa(h23+qq(2,3,op)*int(g
g,z,h1,h2));
hg33=vpa(hg33+qq(3,3,op)*int(gg*gg,z,h1,h2));

i13=vpa(i13+qq(1,3,op)*int(gg*z,z,h1,h2));i23=vpa(i23+qq(2,3,op)*int
(gg*z,z,h1,h2));

j13=vpa(j13+qq(1,3,op)*int(gg*f,z,h1,h2));j23=vpa(j23+qq(2,3,op)*int
(gg*f,z,h1,h2));

o44=vpa(o44+qq(4,4,op)*int(g^2,z,h1,h2));o55=vpa(o55+qq(5,5,op)*int(
g^2,z,h1,h2));
end
k11=-(lambda^2*a11+mu^2*a66); k12=-lambda*mu*(a12+a66);
k13=lambda^3*b11+lambda*mu^2*(b12+2*b66);
k14=(k1*c11+k2*c12)*lambda+2*lambda*mu^2*c66;
k15=lambda*h13;
k22=-
(mu^2*a22+lambda^2*a66);k23=mu^3*b22+lambda^2*mu*(b12+2*b66);
k24=mu*(k1*c12+k2*c22)+2*lambda^2*mu*c66;
k25=mu*h23;
k33=-(lambda^4*d11+mu^4*d22+2*lambda^2*mu^2*(d12+2*d66));
k34=-
((k1*e11+k2*e12)*lambda^2+(k1*e12+k2*e22)*mu^2+4*lambda^2*mu^2*e66);
k35=-(lambda^2*i13+mu^2*i23);
k44=-(k1^2*f11+2*k1*k2*f12+k2^2*f22)-4*lambda^2*mu^2*f66-
lambda^2*o55-mu^2*o44; k45=-(k1*j13+k2*j23)+lambda^2*o55+mu^2*o44;
k55=-(hg33+lambda^2*o55+mu^2*o44);
K=[k11 k12 k13 k14 k15 ;
k12 k22 k23 k24 k25 ;
k13 k23 k33 k34 k35 ;
k14 k24 k34 k44 k45 ;
k15 k25 k35 k45 k55];
xi=b/2;
qmn=(2*q0/b)*sin(m*pi*xi/a);
%qmn=(2*q0/a)*sin(n*pi*xi/b);
%qmn=(8*q0/pi*a*m)*sin(n*pi*xi/a);
vv=[0;0;-qmn;0;0]; Soll=linsolve(K,vv);
umn=Soll(1); vmn=Soll(2); wmn=Soll(3);
tetamn=Soll(4); phimn=Soll(5);

```

```

u0=umn*cos(m*pi/a*x)*sin(n*pi/b*y);
v0=vmn*sin(m*pi/a*x)*cos(n*pi/b*y);
w0=wmn*sin(m*pi/a*x)*sin(n*pi/b*y);
teta=tetamn*sin(m*pi/a*x)*sin(n*pi/b*y);
phi=phimn*sin(m*pi/a*x)*sin(n*pi/b*y);

%*****
%*****
*
u=u0-z*diff(w0,x)-kl*f*1/(lambda^2)*diff(teta,x);
% ~
v=v0-z*diff(w0,y)-k2*f*1/(mu^2)*diff(teta,y);
w=(w0+g*phi);
%-----
-----
ex=diff(u0,x)-z*diff(diff(w0,x),x)+kl*f*teta;
ey=diff(v0,y)-z*diff(diff(w0,y),y)+k2*f*teta;
ez=gg*phi;
gxy=(diff(u0,y)+diff(v0,x)-
2*z*diff(diff(w0,y),x)+f*(kl*diff(int(teta,x),y)+k2*diff(int(teta,y)
,x)));
gxz=g*(diff(phi,x)+kl*int(teta,x));
gyz=g*(diff(phi,y)+k2*int(teta,y));
%-----
-----
sxl=qq(1,1,1)*ex+qq(1,2,1)*ey+qq(1,3,1)*ez;
sx2=qq(1,1,2)*ex+qq(1,2,2)*ey+qq(1,3,2)*ez;
syl=qq(1,2,1)*ex+qq(2,2,1)*ey+qq(2,3,1)*ez;
sy2=qq(1,2,2)*ex+qq(2,2,2)*ey+qq(2,3,2)*ez;
szl=qq(1,3,1)*ex+qq(2,3,1)*ey+qq(3,3,1)*ez;
sz2=qq(1,3,2)*ex+qq(2,3,2)*ey+qq(3,3,2)*ez;
txyl=qq(6,6,1)*gxy; %*****
txy2=qq(6,6,2)*gxy;
txz_crl=qq(5,5,1)*gxz;
txz_cr2=qq(5,5,2)*gxz;
tyz_crl=qq(4,4,1)*gyz;
tyz_cr2=qq(4,4,2)*gyz;
txz_eel=-int(diff(sxl,x)+diff(txyl,y),z,-h/2,z);
%????????????????????????????????
txz_ee2=-int(diff(sx2,x)+diff(txy2,y),z,0,z);
%????????????????????????????????
tyz_eel=-int(diff(syl,y)+diff(txyl,x),z,-h/2,z);
tyz_ee2=-int(diff(sy2,y)+diff(txy2,x),z,0,z); %modifie -h/2---
->0

%----- tableau 01-----
-----
s=a/h;
u_bar=vpa(u*e2/(q0*h*s^3));
w_bar=vpa(w*100*e2/(q0*h*s^4));
s_xb=sxl/(q0*s^2); s_xb2=sx2/(q0*s^2);
s_yb=syl/(q0*s^2); t_xyb=txyl/(q0*s^2);
t_xz_cr_b1=txz_crl/(q0*s); t_xz_cr_b2=txz_cr2/(q0*s);
t_yz_cr_b1=tyz_crl/(q0*s); t_yz_cr_b2=tyz_cr2/(q0*s);
t_xz_ee_b1=txz_eel/(q0*s); t_xz_ee_b2=txz_ee2/(q0*s);
t_yz_ee_b1=tyz_eel/(q0*s); t_yz_ee_b2=tyz_ee2/(q0*s);

```

```

%-----
uu_bar=0; ww_bar=0;
ss_xb=0;
ss_xb2=0;

ss_yb=0;
tt_xyb=0;
tt_xz_cr_b1=0;
tt_xz_cr_b2=0;
tt_xz_ee_b1=0;
tt_xz_ee_b2=0;
tt_yz_cr_b1=0;
tt_yz_cr_b2=0;

tt_yz_ee_b1=0;
tt_yz_ee_b2=0;

for i=1:11
    for j=1:11
        uu_bar=uu_bar+subs(u_bar,[m,n],[i,j]);
        ww_bar=ww_bar+subs(w_bar,[m,n],[i,j]);
        ss_xb=ss_xb+subs(s_xb,[m,n],[i,j]);
        ss_xb2=ss_xb2+subs(s_xb2,[m,n],[i,j]);
        ss_yb=ss_yb+subs(s_yb,[m,n],[i,j]);
        tt_xyb=tt_xyb+subs(t_xyb,[m,n],[i,j]);

        tt_xz_cr_b1=tt_xz_cr_b1+subs(t_xz_cr_b1,[m,n],[i,j]);
        tt_xz_cr_b2=tt_xz_cr_b2+subs(t_xz_cr_b2,[m,n],[i,j]);

        tt_yz_cr_b1=tt_yz_cr_b1+subs(t_yz_cr_b1,[m,n],[i,j]);
        tt_yz_cr_b2=tt_yz_cr_b2+subs(t_yz_cr_b2,[m,n],[i,j]);

        tt_xz_ee_b1=tt_xz_ee_b1+subs(t_xz_ee_b1,[m,n],[i,j]);
        tt_xz_ee_b2=tt_xz_ee_b2+subs(t_xz_ee_b2,[m,n],[i,j]);

        tt_yz_ee_b1=tt_yz_ee_b1+subs(t_yz_ee_b1,[m,n],[i,j]);
        tt_yz_ee_b2=tt_yz_ee_b2+subs(t_yz_ee_b2,[m,n],[i,j]);

    end
end
hhh=2.5; %ratio 4
%hhh=[-hhh/2,-hhh*9/20,-hhh*8/20,-hhh*7/20,-hhh*6/20,-hhh*5/20,-
hhh*4/20,-hhh*3/20,-hhh*2/20,...
% -hhh/20,0];
hh1=-50*hhh/100:hhh/100:0;
%
hh2=[0, hhh/20, 2*hhh/20, 3*hhh/20, 4*hhh/20, hhh*5/20, hhh*6/20, hhh*7/20,
hhh*8/20, hhh*9/20, hhh/2];
hh2=0:hhh/100:50*hhh/100;
for i=1:51
    gln(i)=vpa(subs(ss_xb,[x,y,z,h],[a/2,b/2,hh1(i),hhh]));
    glp(i)=vpa(subs(ss_xb2,[x,y,z,h],[a/2,b/2,hh2(i),hhh]));
    g2n(i)=vpa(subs(tt_xz_cr_b1,[x,y,z,h],[0,b/2,hh1(i),hhh]));
    g2p(i)=vpa(subs(tt_xz_cr_b2,[x,y,z,h],[0,b/2,hh2(i),hhh]));
    g3n(i)=vpa(subs(tt_xz_ee_b1,[x,y,z,h],[0,b/2,hh1(i),hhh]));

```



```

g4n(i)=vpa(subs(tt_ys_cr_b1,[x,y,z,h],[a/2,0,hh1(i),hhh]));
g4p(i)=vpa(subs(tt_ys_cr_b2,[x,y,z,h],[a/2,0,hh2(i),hhh]));
g5n(i)=vpa(subs(tt_ys_ee_b1,[x,y,z,h],[a/2,0,hh1(i),hhh]));
end
for i=1:51

g3p(i)=g3n(51)+vpa(subs(tt_xz_ee_b2,[x,y,z,h],[0,b/2,hh2(i),hhh]));

g5p(i)=g5n(51)+vpa(subs(tt_ys_ee_b2,[x,y,z,h],[a/2,0,hh2(i),hhh]));
%modification
end
figure(1)
plot(g1n(:),hh1(:),g1p(:),hh2(:),grid
title('sigma_x'),xlabel('sigma_x'),ylabel('z/h')
figure(2)
plot(g2n(:),hh1(:),g2p(:),hh2(:),grid
title('to_cr_xz'),xlabel('to_xz'),ylabel('z/h')
figure(3)
plot(g3n(:),hh1(:),g3p(:),hh2(:),grid
title('to_ee_xz'),xlabel('to_xz'),ylabel('z/h')
figure(4)
plot(g4n(:),hh1(:),g4p(:),hh2(:),grid
title('to_cr_ys'),xlabel('to_ys'),ylabel('z/h')
figure(5)
plot(g5n(:),hh1(:),g5p(:),hh2(:),grid
title('to_ee_ys'),xlabel('to_ys'),ylabel('z/h')

hh=[2.5,1,0.1];
for i=1:3
t1(i,1)=vpa(subs(uu_bar,[x,y,z,h],[0,b/2,-hh(i)/2,hh(i)]));
%????????????????????????????????????????
t1(i,2)=vpa(subs(ww_bar,[x,y,z,h],[a/2,b/2,0,hh(i)]));
t1(i,3)=vpa(subs(ss_xb,[x,y,z,h],[a/2,b/2,-hh(i)/2,hh(i)]));
t1(i,4)=vpa(subs(ss_yb,[x,y,z,h],[a/2,b/2,-hh(i)/2,hh(i)]));
t1(i,5)=vpa(subs(tt_xyb,[x,y,z,h],[0,0,-hh(i)/2,hh(i)]));
t2(i,1)=vpa(subs(tt_xz_cr_b1,[x,y,z,h],[0,b/2,0,hh(i)]));
t2(i,2)=vpa(subs(tt_xz_ee_b1,[x,y,z,h],[0,b/2,-
5*hh(i)/30,hh(i)]));
t2(i,3)=vpa(subs(tt_ys_cr_b2,[x,y,z,h],[a/2,0,0,hh(i)]));

t2(i,4)=vpa(subs(tt_ys_ee_b2,[x,y,z,h],[a/2,0,11*hh(i)/30,hh(i)]));
end
t3(1,:)=["u_bar","w_bar","sx_bar","sy_bar","txy_bar"];
t4(1,:)=["t_xz_cr","t_xz_ee","t_sy_cr","t_sy_ee"];
tab1=[t3;t1]
tab2=[t4;t2]
function [m2]=r(m1,ro)% changement de base (m1: lamatrice a
transformée,ro: angle de transformation) m2: matrice transformée
ts1=[cos(ro)^2 sin(ro)^2 0 0 0 2*sin(ro)*cos(ro);
sin(ro)^2 cos(ro)^2 0 0 0 -2*sin(ro)*cos(ro);
0 0 1 0 0 0;
0 0 0 cos(ro) -sin(ro) 0;
0 0 0 sin(ro) cos(ro) 0;
-sin(ro)*cos(ro) sin(ro)*cos(ro) 0 0 0 cos(ro)^2-sin(ro)^2];
ts2=[cos(ro)^2 sin(ro)^2 0 0 0 sin(ro)*cos(ro);
sin(ro)^2 cos(ro)^2 0 0 0 -sin(ro)*cos(ro);

```

```
0 0 1 0 0 0;  
0 0 0 cos(ro) -sin(ro) 0;  
0 0 0 sin(ro) cos(ro) 0;  
-2*sin(ro)*cos(ro) 2*sin(ro)*cos(ro) 0 0 0 cos(ro)^2-  
sin(ro)^2];  
m2=vpa(tsl*m1*inv(ts2));  
end
```