

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil
Option : Structures et Matériaux

Présentée par

ALI RACHEDI Mohamed

Intitulé de la thèse

**Approche mathématique pour l'étude des structures non homogènes
reposant sur fondation élastique variable**

Soutenu le : / ... / Composition du jury :

Président	M. TOUNSI Abdelouahed	Pr	U de Sidi Bel Abbés
Directeur de thèse	M. BENYOUCEF Samir	Pr	U de Sidi Bel Abbés
Examineur	M. FAHSI Bouazza	Pr	U de Sidi Bel Abbés
Examineur	M. DRAICHE Kada	MCA	U de Tiaret
Examineur	M. ABDELBAKI Chikh	MCA	U de Tiaret
Examineur	M. BELABED Zakaria	MCA	C.U de Naama
Invité	M. BOURADA Mohamed	MCA	U de Sidi Bel Abbés

Année universitaire 2020-2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قال الله تعالى:

﴿ إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لآيَاتٍ لِأُولِي الْأَبْصَارِ ﴿١٩٠﴾ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾ [آل عمران : 190-191].

وقال الله عز وجل:

﴿ هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿٥﴾ [يونس: 5].

صدق الله العظيم

Remerciements

Je remercie Allah le tout-puissant, qui m'a aidé et donné la force et la persévérance de mener à bien ce travail, puisque sans lui rien de tout cela ne serait possible. Ma reconnaissance envers Dieu est sans limite.

Mes remerciements vont à :

À mon encadreur, Monsieur Benyoucef Samir

Qui m'a honoré en acceptant de m'encadrer et qui par sa grande compréhension et ses judicieuses directives m'a été d'une grande aide, ainsi que par sa disponibilité sans égal m'a appris à affronter toutes les difficultés qui se sont posées à moi. Comme je le remercie également pour sa générosité et sa collaboration d'avoir corrigé et examiné mon travail.

Mille fois merci Monsieur Benyoucef Samir.

J'exprime, aussi ma reconnaissance et ma gratitude aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail en y joignant leurs temps, leurs savoirs et leurs expériences.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé pendant l'élaboration de ma thèse et notamment Monsieur Bouhadra Abdel-hakim pour son intérêt et son soutien, sa grande disponibilité et ses nombreux conseils durant l'élaboration de cette thèse.

Au terme de ce parcours, je remercie celles et ceux qui me sont chers leurs attentions et encouragements m'ont accompagné tout au long de ces années. Merci à toute ma famille, ma femme, mon fils, mon frère et mes sœurs pour leur soutien.

Finalement, je ne remercierai jamais assez mes très chers parents qui ont su m'entourer de tout leur amour, tendresse et affection faisant de moi ce que je suis maintenant.

Merci pour toutes et tous.

Résumé

Un des problèmes actuels des plaques en matériau à gradient fonctionnel est l'analyse de l'effet de la dépendance thermique des propriétés mécaniques sur leurs comportements. Le présent travail comporte une analyse du comportement flexionnel d'une plaque en FGM reposant sur une fondation élastique variable dont les propriétés varient en fonction de la température et l'impact de cette variation sur la réponse thermomécanique de cette plaque en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D à quatre variables. Le modèle quasi-3D en question prend en considération la déformation par cisaillement ainsi que l'effet de l'étirement de l'épaisseur en assurant une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales et la nullité de ces dernières sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans introduction d'un facteur de correction de cisaillement.

Les propriétés effectives de la plaque sont supposées varier à travers l'épaisseur et sont déterminées par l'intermédiaire de plusieurs modèles micromécaniques selon une distribution simple suivant une loi puissance. Les équations gouvernantes sont obtenues par le principe des travaux virtuels et la solution de Navier est utilisée pour la résolution analytique du système d'équations pour une plaque simplement appuyée.

La validation de la précision des résultats de la présente théorie est effectuée par comparaison avec différents résultats issus de la littérature traitant du même sujet. Une analyse paramétrique est entreprise pour observer l'influence de différents paramètres sur le comportement flexionnel thermomécanique de la plaque FGM.

Mots-clés

Théories des plaques, modèle quasi-3D, effet de l'étirement de l'épaisseur, fondation élastique variable, modèles micromécaniques, comportement thermomécanique.

Abstract

One of the current problems of plates made with functionally graded materials gradient is the analysis of the effect of thermal dependence of mechanical properties on their behaviour. This work concerns with the analysis of the flexional behaviour of an FGM plate resting on a variable elastic foundation. The properties materials vary across the thickness and are considered to be temperature-dependent. A quasi 3D theory is used with only four unknown functions. This theory considers both shear deformation and stretching effect by ensuring a parabolic distribution of the transverse shear stresses and their nullity on the plate's extimities (upper and lower) without the introduction of a shear correction factor. Several micromechanical models are used to estimate the effective material properties such Voigt, Tamura , Mori-Tanaka and Reuss. The governing equations are obtained by the principle of virtual works and the Navier solution is used for the analytical resolution of the system of equations for a simply supported plate. The validation of the accuracy of the results of this theory is carried out by comparison with different results from the literature dealing with the same subject. A parametric analysis is performed to observe the influence of different parameters on the flexional thermomechanical behaviour of the FGM plate.

Keywords

Plate theories, quasi 3D model, stretching effect, variable elastic foundation, micromechanical models, thermomechanical behaviour.

ملخص

من المشاكل الحالية التي تواجه الصفائح المتدرجة وظيفيا تأثير الحرارة على خواصها الميكانيكية وانعكاس هذا التأثير على سلوكها. يتناول هذا العمل تحليلاً للسلوك المرن لصفحة متدرجة وظيفيا مستند على أساس مرن متغير ذات خصائص تتغير تبعاً لدرجة الحرارة وتأثير هذا التغير على السلوك الحراري الميكانيكي لهذه الصفحة باستخدام نظرية جديدة شبه ثلاثية الأبعاد تحتوي على أربعة متغيرات. يأخذ هذا النموذج شبه ثلاثي الأبعاد بعين الاعتبار تشوّه القص وتأثير التمدد كما يضمن الشروط اللازمة على إجهادات القص العرضية والتي تنعدم عند الحافة العلوية والسفلية للصفحة وذلك بدون معامل تصحيح.

تتوزع الخصائص الميكانيكية للصفحة بشكل مستمر عبر السمك وفقاً لنماذج ميكانيكية مختلفة وحسب دالة أسية. يتم التحصل على معادلات التوازن والاستقرار باستعمال مبدأ العمل الافتراضي ويتم معالجة هذه المعادلات بفضل حل نافييه من أجل صحيفة ذات دعم بسيط.

يتم التحقق من دقة النتائج المتحصل عليها عن طريق هذا النموذج بالمقارنة مع البحوث السابقة التي تطرقت إلى نفس الموضوع. تم تقديم تحليل رقمي تفصيلي لمعرفة تأثير مختلف العوامل على سلوك الصحيفة فيما يخص الانحناء الحراري الميكانيكي.

كلمات البحث

نظريات الصفائح، نموذج شبه ثلاثي الأبعاد، تأثير التمدد، أساس مرن متغير، نماذج ميكانيكية، سلوك ميكانيكي حراري.

Table des Matières

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Fonctionnellement Gradués	5
I.1 Introduction.....	6
I.2 Matériaux à gradient fonctionnel (FGM).....	7
I.2.1 Concept des matériaux à gradient fonctionnel :	7
I.2.2 Historique sur les matériaux à gradient fonctionnel (FGM).....	9
I.2.3 Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel.....	11
I.3 Propriétés matérielles des matériaux à gradient fonctionnel	12
I.3.1 Propriétés matérielles d'une plaque P-FGM	15
I.3.2 Propriétés matérielles d'une plaque S-FGM :	16
I.3.3 Loi de mélange exponentielle (E-FGM).....	17
I.3.4 Modèle de Mori-Tanaka (1973) :	18
I.3.5 Modèle auto-cohérent de Hill (1965)	19
I.4 Techniques de fabrication des matériaux à gradient fonctionnel	20
I.4.1 Fabrication par métallurgie des poudres	21
I.4.1.1 La centrifugation	21
I.4.1.2 La pulvérisation de poudre	22
I.5 Conclusion	23
Chapitre II : Introduction Aux Théories Des Plaques.....	24
II.1 Introduction.....	25
II.2 Définition des plaques	25
II.3 Historique sur le développement des théories des plaques.....	26
II.4 Théories de déformations des plaques	28
II.4.1 Théorie classique des plaques (Modèle classique Love-Kirchhoff).....	28
II.4.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	30
II.4.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	31
II.4.4 Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)	34
II.4.5 Théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D).....	35
II.4.6 Théorie de déformation des plaques quasi-3D	36

II.5 Conclusion	37
Chapitre III : Revue Des Travaux Sur L'analyse Thermomécanique des plaques FGM	38
III.1 Introduction.....	39
III.2 Analyse thermomécanique des plaques FGM	39
III.3 Plaques reposant sur fondations élastiques	41
III.3.1 Modèle de Winkler	42
III.3.2 Modèle de Pasternak.....	42
III.3.3 Modèle de Kerr.....	42
III.3.4 Fondation élastique variable.....	43
III.3.5 Analyse des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques	44
III.4 Analyse micromécanique des plaques FGM	45
III.5 Conclusion	47
Chapitre IV : Étude Thermomécanique Des Plaques FGM	48
IV.1 Introduction.....	49
IV.2 Formulation théorique.....	49
IV.3 Propriétés Matérielles de la plaque FGM	50
IV.4 Modèles micromécaniques	50
IV.4.1 Modèle Voigt :	50
IV.4.2 Modèle Reuss	50
IV.4.3 Modèle Tamura :	51
IV.4.4 Description par un élément de volume représentatif (LRVE).....	51
IV.4.5 Modèle Mori-Tanaka.....	51
IV.4.6 Fraction de volume :	52
IV.5 Cinématique et équations constitutives.....	52
IV.5.1 Champ de déplacements	52

IV.5.2 Champ de déformations.....	53
IV.5.3 Équations constitutives.....	53
IV.6 Équations d'équilibre.....	55
IV.7 Champ de température.....	58
IV.8 Solution analytique pour une plaque FGM simplement appuyée.....	59
IV.9 Conclusion.....	61
Chapitre V : Résultats Et Discussions.....	62
V.1 Introduction.....	63
V.2 Résultats et discussions.....	63
V.3 Validation des résultats.....	64
V.4 Étude paramétrique.....	66
V.5 Effet des modèles micromécaniques.....	69
V.6 Conclusion.....	72
Conclusion Générale.....	73
Références Bibliographiques.....	76

Liste des Figures

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Fonctionnellement Gradués

Figure I. 1 : Fonction de variation des propriétés des FGM. 8

Figure I. 2 : Schéma de la variation de la microstructure d'un F.G.M composé d'une phase céramique et d'une phase Métallique. (A-schéma, B-photo)..... 8

Figure I. 3 : Représentation schématique de l'évolution de la microstructure et des propriétés. 9

Figure I. 4 : Historique des matériaux à gradient..... 11

Figure I. 5 : Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel. 12

Figure I. 6 : Géométrie d'une plaque FGM. 15

Figure I. 7 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une plaque P-FGM. 16

Figure I. 8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM..... 17

Figure I. 9 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-F.G.M. 18

Figure I. 10 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière (Mori, 1973).. 18

Figure I. 11 : Microstructure squelettique d'un matériau FGM à deux phases (Hill, 1965). . 19

Figure I. 12 : Illustration schématique des différents procédés de fabrication (ILSCHNER B. 1994)..... 21

Figure I. 13 : Méthode de centrifugation. 22

Figure I. 14 : Procédé de pulvérisation de poudres (Kawasaki A, Watanabe R, 1990)..... 23

Figure I. 15 : Coupes transversales d'échantillons pulvérisés ((a) dosage manuel ; (b) dosage contrôlé par ordinateur). 23

Chapitre II : Introduction Aux Théories Des Plaques

Figure II. 1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire..... 25

Figure II. 2 : Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) (Reddy. 2007). 29

Figure II. 3 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie (FSDT) (Reddy, 2007)..... 30

Figure II. 4 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie (HSDT) (Reddy. 2007)..... 31

Figure II. 5 : Comparaison entre les différentes théories de plaques (CPT, FSDT, HSDT). 31

Chapitre III : Revue Des Travaux Sur L'analyse Thermomécanique des plaques FGM

Figure III. 1 : Effet du champ de température sur la courbe du flambement d’une plaque d’épaisseur moyenne excentrique sous charge de compression (Cong et al, 2015). 39

Figure III. 2 : Distribution de la contrainte transversale à travers l’épaisseur en fonction de différentes variations de température (Trinh et al, 201). 40

Figure III. 3 : Différents modèles de fondations (a-Winkler, b-Pasternak et c-kerr). 43

Figure III. 4 : Représentation du paramètre variable de Winkler (Pradhan .2009). 44

Figure III. 5 : Effet de la fondation variable sur la contrainte transversale [(a) et (b) Attia et al, (2018), (c) Sobhy et al, (2015)]. 45

Figure III. 6 : Différence relative entre flèches pour divers modèles micromécaniques (Bouiadjra et al, 2018). 46

Figure III. 7 : Variations de la charge critique de flambement des panneaux coniques E-FGM dans un environnement thermique non linéaire, obtenues par plusieurs modèles micromécaniques (Nemati et al. 2019). 46

Chapitre IV : Étude Thermomécanique Des Plaques FGM

Figure IV. 1 : Géométrie de la plaque en FGM reposant sur une fondation élastique. 49

Chapitre V : Résultats Et Discussions

Figure V. 1 : Variation de la déflexion w par rapport à (a/h) pour une plaque FGM en fonction de l’indice matériel p : (a) Chargement mécanique, (b) Chargement thermomécanique. 67

Figure V. 2 : Variation de la distribution de la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} à travers l’épaisseur de la plaque FGM en fonction de l’indice matériel p : (a) Chargement mécanique, (b) Chargement thermomécanique. 67

Figure V. 3 : Variation de la déflexion w des plaques FGM sous charge thermomécanique par rapport à (a/h) en fonction du paramètre de Winkler ($p=1, \xi=20, \Delta T=300$). 68

Figure V. 4 : Variation de la contrainte de cisaillement τ_{yz} des plaques FGM sous charge thermomécanique par rapport à (a/h) en fonction du paramètre de Winkler ($p=1, \xi=20, \Delta T=300$). 68

Figure V. 5 : Variation de la déflexion w de la plaque sous charge thermomécanique en fonction du rapport (a/h) pour différentes valeurs du paramètre parabolique ξ ($p=1, J_1=1000, \Delta T=300$). 69

Figure V. 6 : Déflexion w d'une plaque FGM en fonction de l'indice matériel p pour différents modèles micromécaniques reposant sur une fondation élastique parabolique ($\xi=10, J_1=J_2=100, \Delta T=0$). 69

Figure V. 7 : Différence relative entre déflexions données par différents modèles micromécaniques..... 70

Figure V. 8 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique parabolique en fonction de différents modèles micromécaniques ($p=1, \zeta=10, J_1=J_2=100, \Delta T=0$). 71

Figure V. 9 : Variation de la contrainte normale σ_x à travers l'épaisseur de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique parabolique en fonction de différents modèles micromécaniques ($p=1, \zeta=10, J_1=J_2=100, \Delta T=0$)..... 71

Liste des Tableaux

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Fonctionnellement Gradués

Tableau I. 1 : Module d'élasticité E des matériaux céramiques et métalliques (en Pa). 13

Tableau I. 2 : Coefficient de dilatation thermique des matériaux céramiques et métalliques (en K^{-1}). 14

Tableau I. 3 : Conductivité thermique K des matériaux céramiques et métalliques (WmK^{-1}). 14

Tableau I. 4 : Coefficient de Poisson ν des matériaux céramiques et métalliques. 14

Chapitre II : Introduction Aux Théories Des Plaques

Tableau II. 1 : Diverses fonctions présentées par la littérature pour la théorie HDST..... 34

Chapitre V : Résultats Et Discussions

Tableau V. 1 : Propriétés matérielles des matériaux utilisées dans la plaque FGM. 63

Tableau V. 2 : Déflexion centrale w pour une plaque FGM carrée ou rectangulaire simplement appuyée et reposant sur une fondation élastique ($\Delta T=300, p=1$). 64

Tableau V. 3 : Déflexion centrale w pour une plaque FGM carrée reposant ou non sur une fondation élastique ($\Delta T=300, p=1$). 65

Tableau V. 4 : Déflexion centrale w^- pour une plaque FGM carrée reposant ou non sur une fondation élastique ($\Delta T=300, p=1, \xi=0$). 66

Liste des Notations

P	Propriétés mécaniques
V	Fraction volumique
T	Température
P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3	Coefficient de la température
E	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
K	Conductivité thermique
α	Coefficient de dilatation thermique
P_i	Propriétés mécaniques du constituant i
V_i	Fraction volumique du constituant i
P_1	Propriétés mécaniques de la céramique
V_1	Fraction volumique de la céramique
P_2	Propriétés mécaniques du métal
V_2	Fraction volumique du métal
x, y, z	Coordonnées cartésiennes
$E(z)$	Module de Young en fonction de z
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de z
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de z
p	Paramètre matériel
h	Épaisseur de la plaque
a	Largeur de la plaque
b	Longueur de la plaque
$P(z)$	Propriétés mécaniques en fonction de z
$P(z, T)$	Propriétés mécaniques en fonction de z et de la température
K	Module de compressibilité
G	Module de cisaillement
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0, w_0	composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
ϕ_x, ϕ_y	Rotations totales à la normale au plan moyen autour des axes x et y
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y

$f(z)$	Fonction de gauchissement
$g(z)$	Première dérivée de la fonction $f(z)$
$g'(z)$	Première dérivée de la fonction $g(z)$
w_b, w_s	Composante de flexion et de cisaillement du déplacement transversal
θ	Déplacement transversal dû au cisaillement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations transversales
f_1, f_2, f_3	Forces volumiques
ρ	Masse volumique
$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$	Composantes du vecteur d'accélération
$P_f(T, Z)$	Propriétés mécaniques en fonction de z et de la température
P_c	Propriétés mécaniques de la céramique
P_m	Propriétés mécaniques du métal
k_1, k_2, α, β	coefficients dépendent de la géométrie
A', B'	Coefficients dépendent de la solution de Navier
C_{ij}	Coefficient de rigidité élastique
$\lambda(z, T), \mu(z, T)$	Coefficients de Lamé en fonction de z et de la température
i et j	Nombres naturels
R_f	Densité de la réaction de la fondation élastique
\bar{K}	Paramètre de Winkler
\bar{G}	Rigidité de la couche de cisaillement
∇^2	Opérateur Laplacien
δU	variation de l'énergie de déformation
δV	variation du travail externe
δU_f	Variation du travail de la fondation élastique
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$	Variation du champ de déplacements

N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion dans la plaque
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments supplémentaires dus au cisaillement transverse
$Q_{yz}^s, Q_{xz}^s, S_{yz}^s, S_{xz}^s$	Effort de cisaillement
q	Charge mécanique
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
F_{ii}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
X_{ii}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
T_t	Température de la face supérieure (céramique)
T_b	Température de la face inférieure (métallique)
k_t	Conductivité thermique de la face supérieure (céramique)
k_b	Conductivité thermique de la face inférieure (métallique)
k_{tb}	Variation de la conductivité thermique
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$	Paramètres arbitraires
q_{mn}	Charge transversale
a_{ij}	Composants de la matrice de rigidité
$\{ \}$	Vecteur
$[]$	Matrice

INTRODUCTION GENERALE

Aujourd'hui les matériaux doivent remplir des fonctions multiples et souvent dans des conditions extrêmes, ce qui les mènent à acquérir des caractéristiques complexes et parfois même contradictoires. Parmi les propriétés d'emplois exigées dans l'industrie l'aptitude d'un matériau à résister à la dégradation sous sollicitations multiples (mécanique, thermique, vibration...). pour répondre à cette problématique, le développement des matériaux composites est né de la volonté d'allier les qualités techniques aux besoins d'allègement dans un même matériau, qui par la suite doit s'adapter aux solutions technologiques.

Même si considérés comme des matériaux modernes, les composites sont en réalité utilisés depuis très longtemps et ils ont été le résultat des idées nées pour la nécessité de résoudre des problèmes divers, les exemples typiques sont les briques en argile et les alliages comme le bronze. Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux composants dont les propriétés se complètent. Le nouveau matériau ainsi constitué, hétérogène, possède des propriétés que les composants à eux seuls ne possèdent pas. Ce phénomène, qui permet d'améliorer la qualité de la matière face à une certaine utilisation (légèreté, rigidité à un effort, etc.) explique l'utilisation croissante des matériaux composites dans différents secteurs industriels. Néanmoins, la description fine des composites reste complexe du point de vue mécanique de par la non-homogénéité du matériau.

Les domaines d'utilisation des composites ne cessent de croître au fur et à mesure des progrès technologiques (industrie aérospatiale, aéronautique et automobile). De ce fait, ils sont de plus en plus retenus pour leurs propriétés d'isolations électriques associées à de bonnes propriétés mécaniques pour des structures résistantes et légères. Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dû à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Grâce aux recherches scientifiques et au développement technologique une catégorie de matériaux innovante a vu le jour. Cette nouvelle classe de matériaux dénommée matériaux à gradient fonctionnel par référence à leur nomination anglaise (Functional Gradient Materials (FGM)) représente un nouveau concept qui consiste en une évolution graduelle des propriétés d'une surface à l'autre par un changement continu de la composition. Les FGM sont des matériaux composites avancés composés de deux phases ou plus avec une variation continue

des propriétés du matériau d'une surface à l'autre. Les caractéristiques mécaniques des FGM changent dans le sens de l'épaisseur du matériau en fonction de la fraction volumique des constituants. Grâce à cette caractéristique, les FGM présentent certains avantages, tels que l'élimination de la discontinuité du matériau, l'évitement de la rupture par délamination et diminuant ainsi les niveaux des contraintes et les déformations. La combinaison de ces propriétés attire l'application des FGM dans de nombreux domaines de l'ingénierie telles que la mécanique, l'aérospatiale, le génie civil, le biomédical (Ahmed, 2014, Swaminathan and Naveenkumar. 2014, Hadji et al. 2015 et 2016, Abdelhak et al. 2016. Ahouel et al. 2016, Ghorbanpour Arani et al. 2016a, Aldousari, 2017, et Rahmani et al. 2017).

L'objectif de ce travail est d'étudier par le biais d'une théorie quasi-3D le comportement flexionnel d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique variable dont les propriétés sont dépendantes de la température et de déterminer les effets des différents modèles micromécaniques sur la réponse thermomécanique de cette plaque. Un modèle quasi-3D prenant en compte la déformation de cisaillement ainsi que l'effet de l'étirement de l'épaisseur avec un nombre d'inconnus réduit à quatre est utilisé. Pour parvenir au but escompté, la thèse compte cinq chapitres :

Le premier chapitre présentera une introduction à l'univers des matériaux à gradient fonctionnel, l'histoire de leur développement, leurs propriétés, les différents domaines dont lesquels ils interviennent ainsi que plusieurs techniques de leur fabrication seront abordés.

Le deuxième chapitre concernera la présentation des différentes théories de plaques, leurs hypothèses ainsi que d'une partie de l'histoire de leur développement seront exposés.

Dans le troisième chapitre, une revue générale sur les travaux antérieurs de littérature traitant du comportement thermomécanique des plaques et l'impact de l'introduction des différents types de fondations élastiques sur les structures FGM sera présentée.

Le quatrième chapitre sera consacré à la formulation théorique du problème de la flexion thermomécanique d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique variable, en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D avec quatre variables. Le développement théorique sera présenté en détail à commencer par le champ de déplacements passant par les équations gouvernantes et en finissant par la méthode de résolution proposée.

Dans le cinquième et dernier chapitre seront exposés les résultats numériques obtenus par le modèle proposé et sa validation par comparaison avec d'autres modèles issus de la littérature

traitant la même problématique. Une étude paramétrique sera présentée pour observer l'influence de différents éléments tels que, le type de paramètre de la fondation élastique et les différents modèles mécaniques sur le comportement thermomécanique en flexion et en dynamique des plaques FGM.

Une conclusion générale clôturera cette étude permettant ainsi de résumer les résultats obtenus et de mettre l'accent sur les points les plus importants ainsi que de définir les éventuelles perspectives afin d'élargir le champ de recherches sur structure en FGM.

CHAPITRE I

Généralités

Sur

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués

I.1 Introduction

Le monde industriel en perpétuel développement est à la recherche continue de perfection. Cette évolution ne peut se concrétiser sans une avancée technologique qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'études et de recherches scientifiques permettant de concevoir des procédés innovants pour le développement industriel. Le domaine des matériaux est considéré comme un axe de recherche très important et fondamental pour tout développement industriel, car toute pièce, tout composant sont à la base un matériau et innover dans cette discipline, c'est révolutionner le monde de l'industrie.

La composition et la structure d'un matériau déterminent très fortement les fonctions de celui-ci. Ainsi, afin de répondre aux exigences de plus en plus sévères requises lors du service, il est devenu nécessaire de pouvoir associer plusieurs types de matériaux en fonction de leurs propriétés. Cependant, des concentrations de contrainte, aux conséquences néfastes, peuvent apparaître lors de la mise en forme et des sollicitations fonctionnelles statiques ou dynamiques. Celles-ci sont générées par la contraction différentielle qui existe entre les matériaux du fait de la différence de leurs propriétés physiques et caractéristiques mécaniques (Désaccord Elastique, Différences De Plasticité Et De Dilatation Thermique) (N. Cherradi et al. 1996).

Le développement des matériaux composites est né de la volonté d'allier les qualités techniques de plusieurs matériaux, au besoin d'allègement dans un même matériau, qui par la suite doivent s'adapter aux solutions technologiques des problèmes à résoudre. Les matériaux à gradient « Functional Gradient Materials, FGM », apportent une solution élégante et efficace à ce problème. Selon cette conception, la composition du matériau varie au moins dans une direction, par exemple, l'épaisseur. Le but de l'introduction d'un gradient dans les composants est tout d'abord de pouvoir réaliser en chaque point, notamment à la surface et à l'intérieur, les fonctions requises par l'emploi et correspondant en général à des sollicitations mécaniques, chimiques ou autres, variables d'une zone à l'autre. Ainsi, en fonction des propriétés désirées, un profil de concentration peut être élaboré. Les pièces auront des propriétés graduelles spéciales comme le module d'élasticité, la conductivité électrique, la réponse au flux magnétique, etc. De plus, le gradient est utilisé afin d'éviter les transitions abruptes entre les revêtements et les substrats qui se trouvent à l'origine des contraintes localisées pouvant endommager le composant lors du service (N. Cherradi et al. 1996).

Les matériaux non homogènes connus sous le nom de « matériaux à gradient fonctionnel (FGM) » sont apparus en 1984. Cette nouvelle classe de matériaux composites a suscité une

attention particulière et un intérêt grandissant ces dernières décennies, grâce à l'avantage de la continuité des propriétés physiques dans une ou plusieurs directions, ainsi en raison de leur capacité à diminuer la disparité dans les propriétés matérielles, ce qui confère au matériau un comportement optimisé. Ces matériaux sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie telle que : aérospatial, nucléaire, semi-conducteurs et en génie civil.

I.2 Matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce, par exemple, l'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace. Cependant, l'association de différents matériaux a fait surgir le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Material). Ces matériaux ont une microstructure et une composition qui varie graduellement et continuellement de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. L'idée d'intégration des fonctions désirées dès la conception, au cœur même de la matière, les rend des matériaux intelligents. Les applications spécifiques et les conditions environnementales conduisent à choisir chaque interface, ainsi du point de vue de leur potentiel d'application, ces matériaux possèdent de multiples avantages : amélioration en termes de rigidité, tenue à la fatigue, résistance à la corrosion ou conductivité thermique. En plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

I.2.1 Concept des matériaux à gradient fonctionnel :

Les matériaux à gradient fonctionnel ou matériaux fonctionnellement gradués ou encore matériaux à gradient de propriétés sont des matériaux composites dont les propriétés varient selon une loi de fonction continue ou discrète (figure I.1) à travers l'épaisseur. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.

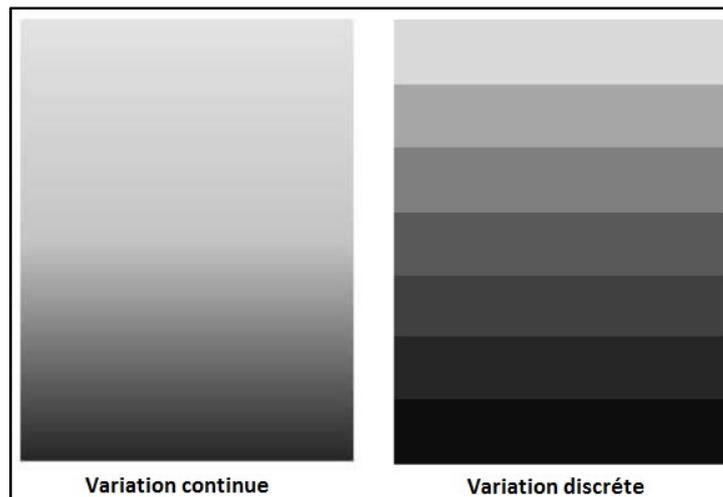


Figure I. 1 : Fonction de variation des propriétés des FGM.

La figure I.2 schématise la variation continue dans la structure d'un FGM composé de céramique et de métal.

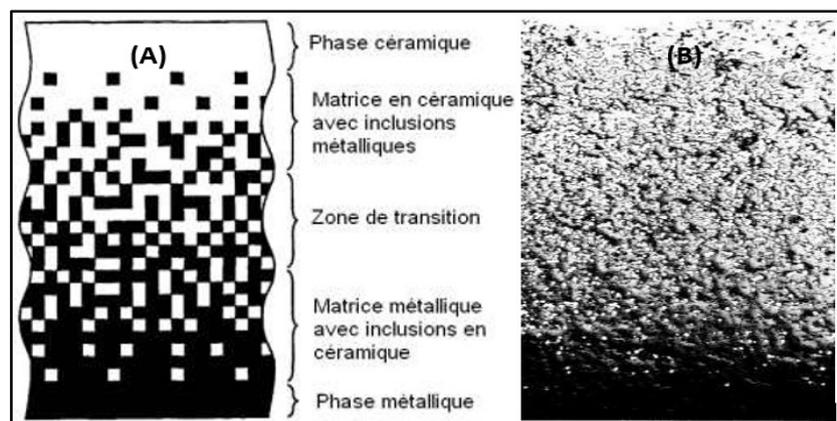


Figure I. 2 : Schéma de la variation de la microstructure d'un F.G.M composé d'une phase céramique et d'une phase Métallique. (A-schéma, B-photo).

Avec le concept des matériaux à gradient, toute propriété P peut-être optimisée selon la méthode cartésienne par une variation continue de P suivant x (la distance). Ceci peut en effet conduire à un grand nombre de possibilités. Pour plusieurs composés structuraux, les conditions d'utilisation demandent des caractéristiques et performances à des endroits différents (Sheppard L.M. 1993. Makino A, Araki N. Ishiguro T, 1993).

Les matériaux à gradient de composition peuvent bien souvent être considérés comme des matériaux composites du fait du caractère inhomogène de la microstructure. Cependant, le changement continu dans la composition et/ou la structure les distingue des composites classiques (Aihara T, Kaji M, Igarashi T. 1990). Ces différences sont représentées schématiquement sur la figure I-3. Outre les propriétés des compositions chimiques, le gradient offre un second degré de liberté dans la conception de pièces. Ainsi, par une combinaison

adéquate des gradients de concentration et des traitements thermiques, les phénomènes de décomposition et les effets thermoélastiques peuvent être exploités.

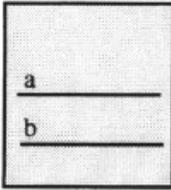
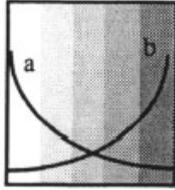
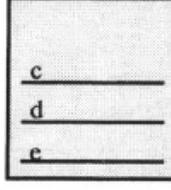
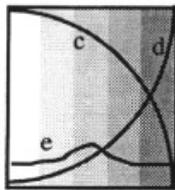
	Matériaux homogènes	Matériaux à gradient
Fonction/Propriété a) Résistance thermique b) Ductilité		
Structure/Texture c) Céramique d) Metal e) Pores, Fibres		

Figure I. 3 : Représentation schématique de l'évolution de la microstructure et des propriétés.

Une telle approche offre ainsi un plus grand nombre d'avantages que la plupart des méthodes traditionnelles de conception des matériaux. Par l'introduction intentionnelle d'un gradient, elle ouvre de nouveaux horizons pour de nouvelles applications et permet d'intégrer à la fois le matériau et les conditions structurales dans le produit fini (Cherradi N, Kawasaki A, Gasik M. 1994).

I.2.2 Historique sur les matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

Le concept des "matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai sur l'île de Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues dans le cadre de son travail sur les barrières thermiques (Koizumi, 1992). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux à comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique (Koizumi, 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques (Nguyen et Sab, 2007).

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux

présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet (Koizumi, 1997).

Trois caractéristiques étaient prises en compte pour la conception d'un matériau pour résister à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapor deposition C.V.D)
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,
- Le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches (Okamura, 1991).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles qui sont réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur optique (Okamura, 1991).

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de formes plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques...etc (Okamura, 1991).

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire (Kieback et Neubrand, 2003). À partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

La figure I-4 (Portevin A. 1991) retrace l'historique de la conception des matériaux à gradient.

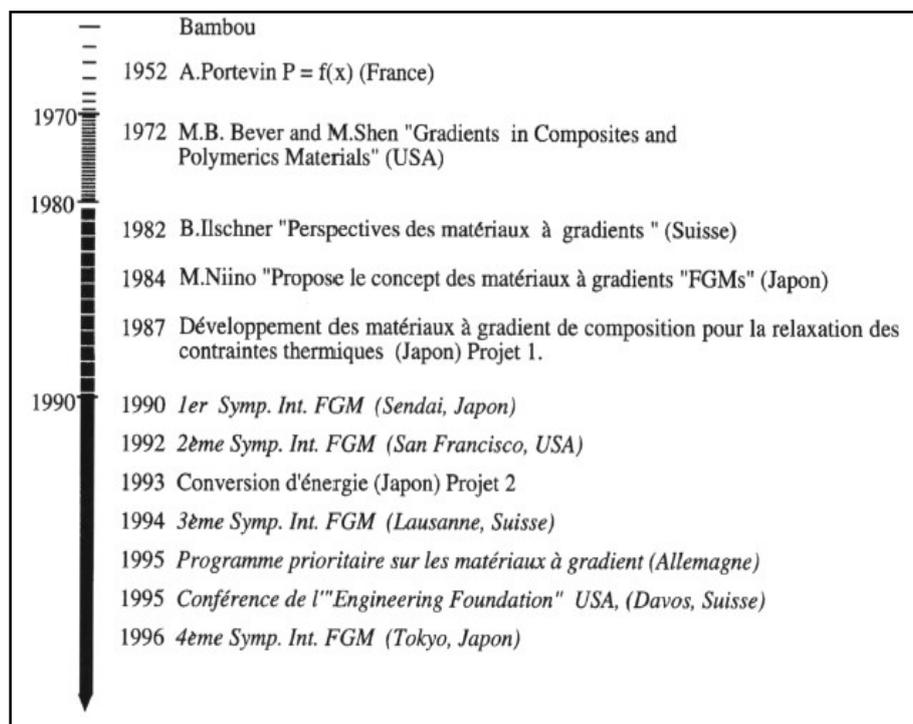


Figure I. 4 : Historique des matériaux à gradient.

I.2.3 Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel

Les caractéristiques performantes des matériaux à gradient fonctionnel permettent plusieurs utilisations dans l'industrie et la technologie qui exigent une conception optimale de leurs structures. Les matériaux FGM présentent aussi une bonne résistance aux phénomènes de dégradations matérielles tels que l'usure, la fatigue et la corrosion. L'utilisation des matériaux FGM est sans aucun doute la solution la plus adéquate, d'une part pour éliminer la concentration

des contraintes thermiques et d'autre part pour des raisons fonctionnelles telles que : l'isolation thermique et l'hygrothermique dans le matériau. La figure I.5 illustre les différents domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés selon (Jha et al. 2013).

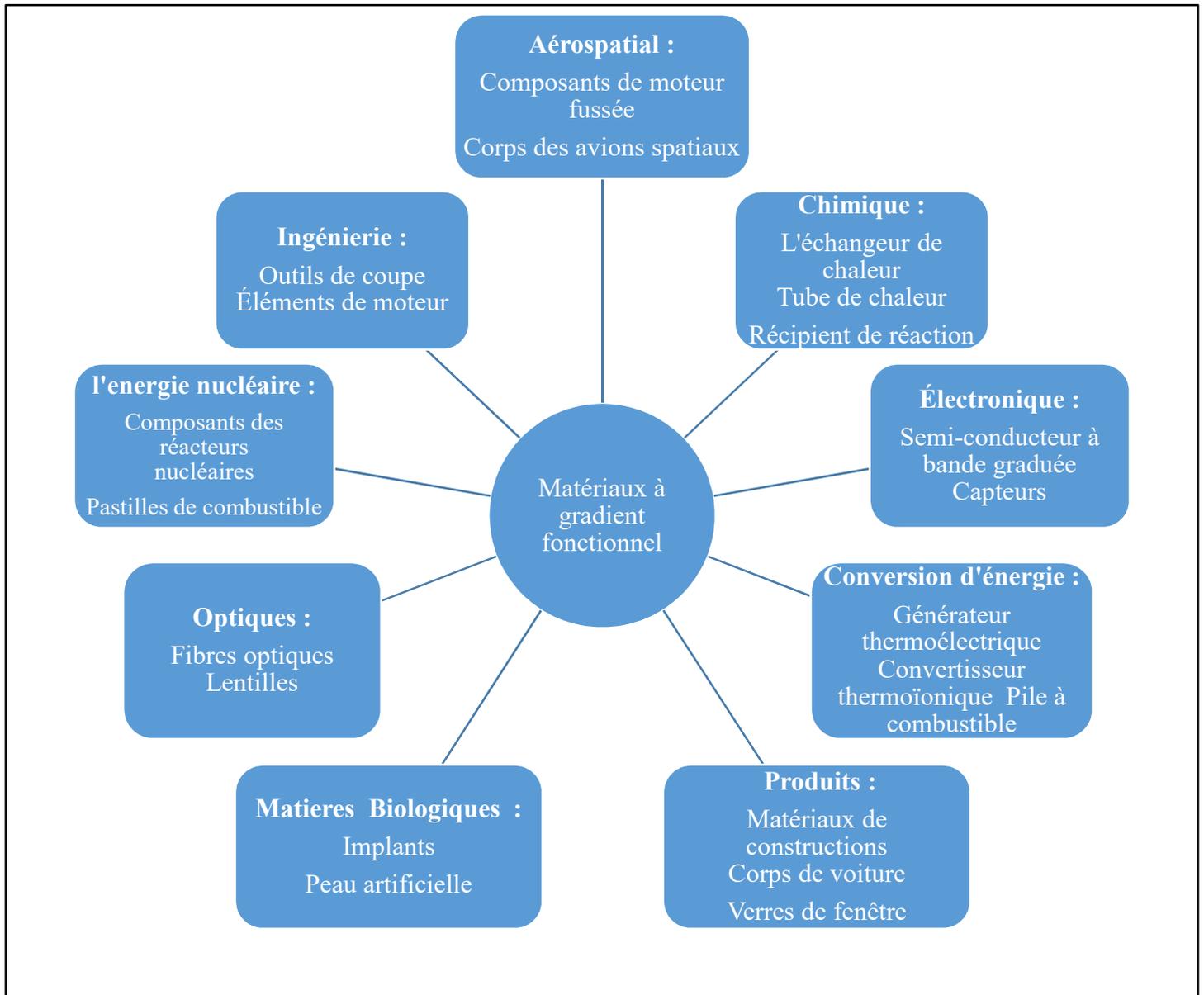


Figure I. 5 : Domaines d'application des matériaux à gradient fonctionnel.

I.3 Propriétés matérielles des matériaux à gradient fonctionnel

Les matériaux à gradient fonctionnel FGM consistent en l'association de plusieurs ou deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clés à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Shen 2009).

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I-1})$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I-2})$$

Étant donné que les structures à gradient fonctionnel sont le plus souvent utilisées dans un environnement à température élevée où l'on s'attend à des changements importants dans les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs (Reddy et Chin, 1998), il est essentiel de tenir compte de cette dépendance à la température pour prévoir avec précision la réponse mécanique.

Ainsi, le module effectif de Young, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique sont supposés être fonction de la température et peuvent être exprimés suivant une fonction non linéaire de la température (Touloukian, 1967) :

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T^1 + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (\text{I-3})$$

Où : P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients de température T (en K) et sont propres aux matériaux constitutifs. Les valeurs typiques pour le module E de Young (en Pa), le rapport de Poisson ν , le coefficient de dilatation thermique (en K^{-1}) et la conductivité thermique K (en $W mK^{-1}$) de la céramique et des métaux sont énumérées aux tableaux (I-1-4) (Reddy and Chin 1998).

Tableau I. 1 : Module d'élasticité E des matériaux céramiques et métalliques (en Pa).

Matériaux	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Zirconia	$244.27 e^{+9}$	0	$-1.371 e^{-3}$	$1.214 e^{-6}$	$-3.681 e^{-10}$
Aluminum oxide	$349.55 e^{+9}$	0	$-3.853 e^{-4}$	$4.027 e^{-7}$	$-1.673 e^{-10}$
Silicon nitride	$348.43 e^{+9}$	0	$-3.070 e^{-4}$	$2.160e e^{-7}$	$-8.946 e^{-11}$
Ti-6Al-4V	$122.56 e^{+9}$	0	$-4.586 e^{-4}$	0	0
Stainless steel	$201.04 e^{+9}$	0	$3.079 e^{-4}$	$-6.534 e^{-7}$	0
Nickel	$223.95 e^{+9}$	0	$-2.794 e^{-4}$	$-3.998 e^{-7}$	0

Tableau I. 2 : Coefficient de dilatation thermique des matériaux céramiques et métalliques (en K⁻¹).

Matériaux	P ₀	P ₋₁	P ₁	P ₂	P ₃
Zirconia	12.766 e ⁻⁶	0	-1.491 e ⁻³	1.006 e ⁻⁵	-6.778 e ⁻¹¹
Aluminum oxide	6.8269 e ⁻⁶	0	1.838 e ⁻⁴	0	0
Silicon nitride	5.8723 e ⁻⁶	0	9.095 e ⁻⁴	0	0
Ti-6Al-4V	7.5788 e ⁻⁶	0	6.638 e ⁻⁴	-3.147 e ⁻⁶	0
Stainless steel	12.330 e ⁻⁶	0	8.086 e ⁻⁴	0	0
Nickel ^(a)	9.9209 e ⁻⁶	0	8.705 e ⁻⁴	0	0

Tableau I. 3 : Conductivité thermique K des matériaux céramiques et métalliques (WmK⁻¹).

Matériaux	P ₀	P ₋₁	P ₁	P ₂	P ₃
Zirconia	1.7000	0	1.276 e ⁻⁴	6.648 e ⁻⁸	0
Aluminum oxide	-14.087	-1123.6	-6.227 e ⁻³	0	0
Silicon nitride	13.723	0	-1.032 e ⁻³	5.466 e ⁻⁷	-7.876 e ⁻¹¹
Ti-6Al-4V	1.0000	0	1.704 e ⁻²	0	0
Stainless steel	15.379	0	-1.264 e ⁻³	2.092 e ⁻⁶	-7.223 e ⁻¹⁰
Nickel ^(a)	187.66	0	-2.869 e ⁻³	4.005 e ⁻⁶	-1.983 e ⁻⁹
Nickel ^(b)	58.754	0	-4.614 e ⁻⁴	6.670 e ⁻⁷	-1.523 e ⁻¹⁰

Tableau I. 4 : Coefficient de Poisson ν des matériaux céramiques et métalliques.

Matériaux	P ₀	P ₋₁	P ₁	P ₂	P ₃
Zirconia	0.2882	0	1.133 e ⁻⁴	0	0
Aluminum oxide	0.2600	0	0	0	0
Silicon nitride	0.2400	0	0	0	0
Ti-6Al-4V	0.2884	0	1.121 e ⁻⁴	0	0
Stainless steel	0.3262	0	-2.002 e ⁻⁴	3.797 e ⁻⁷	0
Nickel	0.3100	0	0	0	0

L'annotation (a) et (b) pour le Nickel désignent la température dans l'intervalle suivant (Reddy and Chin 1998) :

- (a) pour : 300 K ≤ T ≤ 635 K.
- (b) pour : 635 K ≤ T.

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont en général à deux constituants, de la céramique et du métal inoxydable. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (\text{I-4})$$

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I-5})$$

Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour

décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

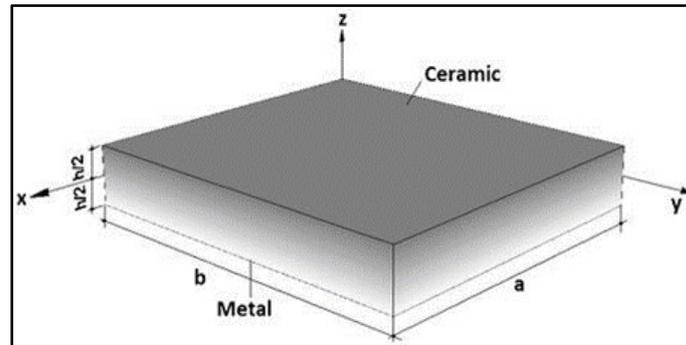


Figure I. 6 : Géométrie d'une plaque FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

Jin et Batra (1996) indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM). Ces lois de mélange sont pratiques et simples à utiliser, mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. De ce fait, plusieurs modèles permettant d'évaluer les propriétés globales ont été développés dont le modèle basé sur le schéma de Mori et Tanaka (Mori 1973) ou la méthode du schéma auto-cohérent de Hill (self-consistent method) (Hill, 1995).

I.3.1 Propriétés matérielles d'une plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I-6})$$

Où h est l'épaisseur de la plaque et p est un paramètre matériels ($0 \leq p \leq \infty$).

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao et Wang 1995):

$$P(z) = P_1 + (P_2 - P_1)V(z) \quad (\text{I-7})$$

Dans le cas de dépendance à la température des propriétés des matériaux FGM l'équation I-7.a s'écrit :

$$P(z, T) = P(T)_1 + [P_2(T) - P_1(T)]V(z) \quad (\text{I-7.a})$$

Où P_1 et P_2 sont respectivement les propriétés matérielles de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la structure FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la structure P-FGM est représentée sur la figure I.7, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

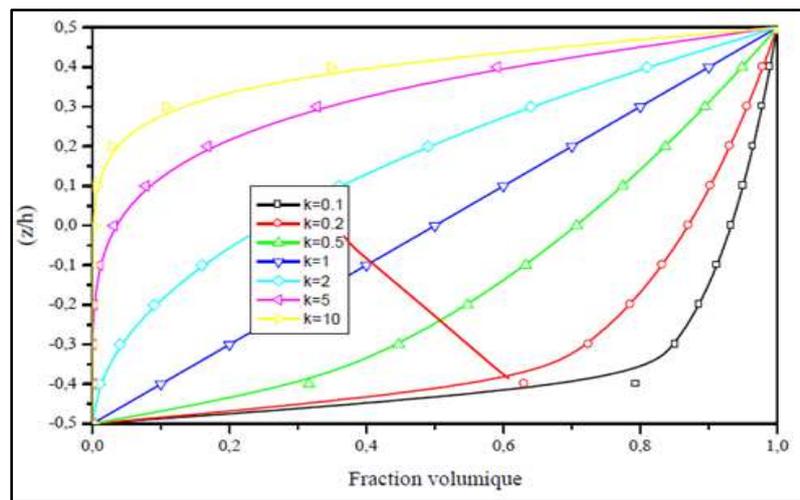


Figure I. 7 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur d'une plaque P-FGM.

I.3.2 Propriétés matérielles d'une plaque S-FGM :

Dans le cas où serait ajoutée une plaque P-FGM avec une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao, 1995). Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-6})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-7})$$

En utilisant la loi de mélanges, les propriétés de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$P(z) = V_1(z)P_1 + [1 - V_1(z)]P_2 \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I-8})$$

$$P(z) = V_2(z)P_1 + [1 - V_2(z)]P_2 \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I-9})$$

La variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes est présentée dans la figure I.8 et par conséquent la structure FGM est appelée (S- FGM).

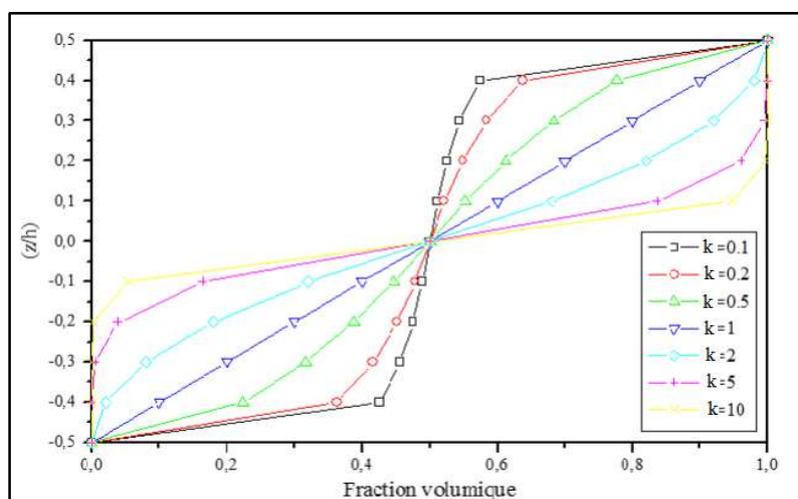


Figure I. 8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.3.3 Loi de mélange exponentielle (E-FGM)

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale et Erdogan 1983) :

$$P(z) = P_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{I-10})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad (\text{I-11})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est donnée par la figure I.9 :

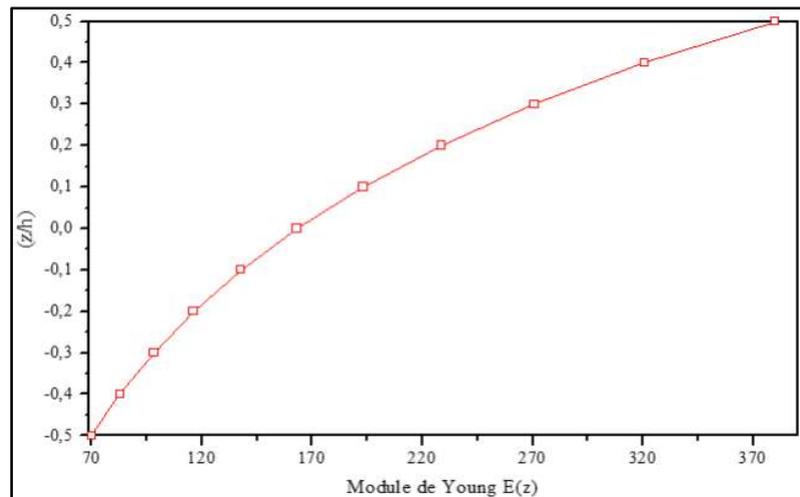


Figure I. 9 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-F.G.M.

I.3.4 Modèle de Mori-Tanaka (1973) :

Ce modèle est basé sur le schéma de Mori et Tanaka (Mori, 1973). qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues Figure I.10.

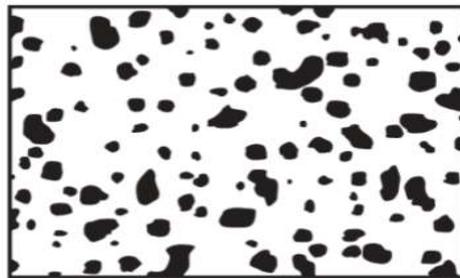


Figure I. 10 : Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire (Mori, 1973).

Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulaire dénotée par l'indice 2. Si on note par V la fraction volumique, K le module de compressibilité, par G le module de cisaillement et par α le coefficient de dilatation thermique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka (Mori, 1973), pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par (Vel et Batra, 2004), (Shen, 2009) :

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + 4/3G_1)} \quad (\text{I-12})$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)/(G_1 + f_1)} \quad (\text{I-13})$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad (\text{I-14})$$

Avec :

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)} \quad (\text{I-15})$$

I.3.5 Modèle auto-cohérent de Hill (1965)

Cette méthode suppose que chaque inclusion du renforcement est incorporée et contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite. Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement, impliquant que le même module global est estimé dans un autre composite où les rôles des deux phases sont permutés. Cela permet l'estimation du module effectif dans les régions dont le squelette de la microstructure à une forme continue telle que présentée sur la figure I.11.

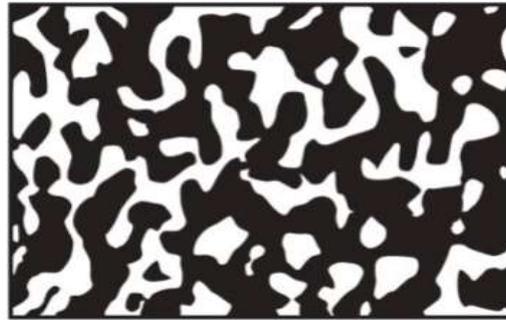


Figure I. 11 : Microstructure squelettique d'un matériau FGM à deux phases (Hill, 1965).

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{\delta}{K} = \frac{V_1}{K - K_2} + \frac{V_2}{K - K_1} \quad (\text{I-16})$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{G - G_2} + \frac{V_2}{G - G_1} \quad (\text{I-17})$$

Ou δ et η :

$$\delta = 3 - 5\eta = \frac{K}{K + (4/3)G} \quad (\text{I-18})$$

D'après l'équation I-16 il est obtenu :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1 + (4/3)G} + \frac{V_2}{K_2 + (4/3)G}} - \frac{4}{3}G \quad (\text{I-19})$$

Le module de cisaillement G est obtenu on résolvant l'équation quadratique suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{K_1 + (4/3)G} + \frac{V_2 K_2}{K_2 + (4/3)G} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad (\text{I-20})$$

Les propriétés effectives qui sont le module de Young E ainsi que le coefficient de poisson ν peuvent être déterminées par les équations suivantes :

$$E = \frac{9KG}{3K} + G \quad (\text{1-21})$$

$$\nu = \frac{(3K - 2G)}{2(3K + G)} \quad (\text{1-22})$$

Une comparaison entre le modèle Mori-Tanaka, le modèle auto-cohérent et la simulation par éléments finis des FGM a été présentée dans (Reuter et al,1997) et (Reuter et Dvorak, 1998). Le modèle Mori-Tanaka avait donné une estimation précise des propriétés à l'aide d'une matrice continue bien définie et les inclusions discontinues, alors que le modèle auto-cohérent était meilleur pour les microstructures squelettiques caractérisées par une large zone de transition entre régions où prédomine l'une des phases constitutives.

I.4 Techniques de fabrication des matériaux à gradient fonctionnel

Les procédés de fabrication sont conçus à partir des différentes méthodes de production bien établies dans la synthèse des matériaux à l'échelle industrielle, moyennant de petites modifications ou développements afin de les adapter pour la production des gradients. On distingue plusieurs approches pour fabriquer des matériaux à gradient (ILSCHNER B. 1994. SASAKI M, HIRAI T, 1991). Ils peuvent être obtenus à partir de l'état gazeux, liquide ou solide. Les matériaux sont ainsi traités soit chimiquement, soit physiquement afin d'obtenir la distribution désirée (Figure I-12).

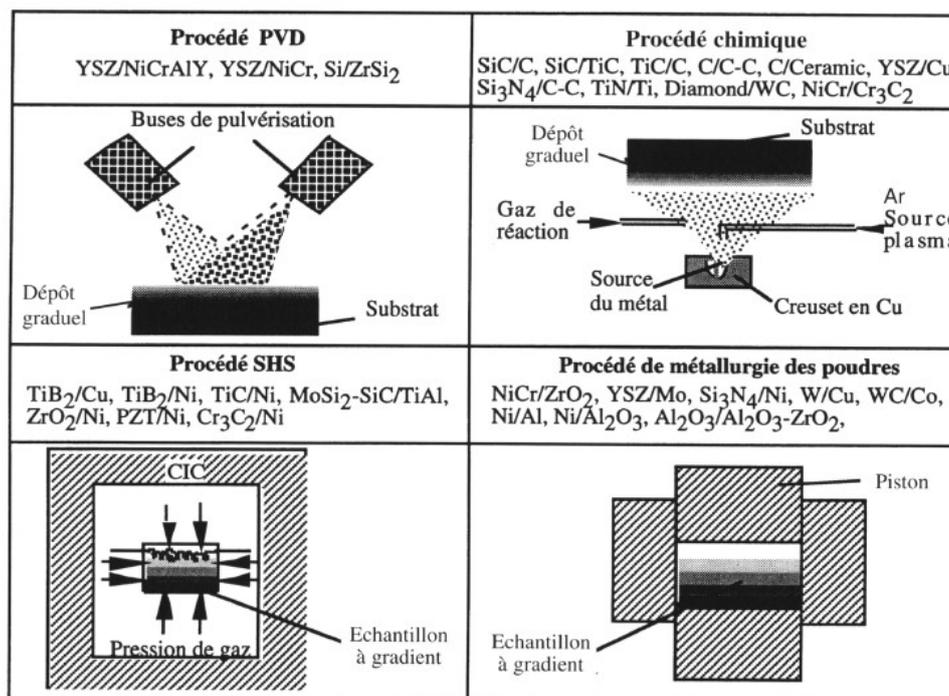


Figure I. 12 : Illustration schématique des différents procédés de fabrication (ILSCHNER B. 1994).

Dans ce qui suit est décrit seulement la production à partir de l'état solide et particulièrement la méthode de métallurgie des poudres.

I.4.1 Fabrication par métallurgie des poudres

Par la facilité de contrôle de la microstructure et son adaptabilité, la métallurgie des poudres offre de larges possibilités de production de matériaux à gradient. De plus, ce procédé est considéré comme économiquement intéressant et techniquement fiable. Des structures complexes peuvent être produites avec deux ou plusieurs composés, et l'épaisseur de la phase graduée peut varier d'une épaisseur inférieure au millimètre jusqu'à atteindre plusieurs centimètres. Différentes techniques ont été proposées et testées afin d'obtenir un corps cru à gradient.

I.4.1.1 La centrifugation

Cette méthode utilise la force de centrifugation. Elle permet la fabrication d'un gradient lisse. Les caractéristiques de ce procédé (Ilschner B, Delfosse D, 1989) sont le dosage pilote par ordinateur et la mise en forme par centrifugation (Figure I-13). L'ordinateur commande, selon le profil de concentration prédéfini en tenant compte du retrait dû au compactage et au frittage, les trois moteurs pas-a-pas du système de dosage. Le flux de poudre ainsi généré change continûment de composition, ce qui permet l'obtention d'un gradient lisse. Au sommet des cylindres de stockage, les poudres sont récoltées sur un plateau ou, au moyen d'un racleur

rotatif, elles sont transférées, prè-mixées et introduites dans un mélangeur dynamique. Finalement, ce mélange arrive sur un disque d'accélération couplé à la centrifugeuse, ou il se trouve projeté contre les parois de la centrifugeuse et y forme un anneau avec un gradient de composition radial (selon l'épaisseur). La force centrifuge étant insuffisante pour compacter la poudre, une cire liquide est injectée à la fin du procédé pour stabiliser la préforme. L'anneau est ensuite extrait, découpé en morceaux, et, en raison de sa plasticité, facilement compacté à froid puis fritté.

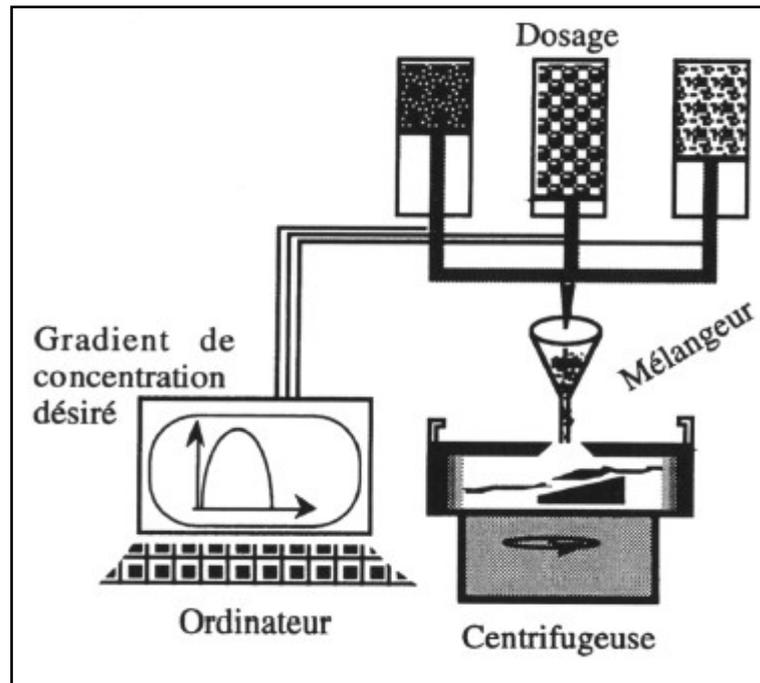


Figure I. 13 : Méthode de centrifugation.

I.4.1.2 La pulvérisation de poudre

C'est une technique de mise en forme par jet de poudre (powder spray forming process) (Kawasaki A, Watanabe R, 1990). Elle permet la fabrication de matériaux à gradient lisse. Les poudres mises en suspension sont pulvérisées sur un substrat. Au fur et à mesure que l'épaisseur du dépôt croît, la composition de la suspension pulvérisée change. Le procédé consiste tout d'abord en une mise en suspension de chaque poudre dans un solvant. Afin de garder une bonne homogénéité, chaque barbotine est remuée en continu par un mélangeur à ultrasons. De plus, les containers sont placés en série pour compenser l'interaction entre particules due à la différence de potentiel électrique (Figure I-14). Le contrôle du taux de mélange des poudres est assuré par un ordinateur qui commande le débit de poudre à pulvériser, par air comprimé à travers une buse, sur un substrat préchauffé afin de sécher la poudre.

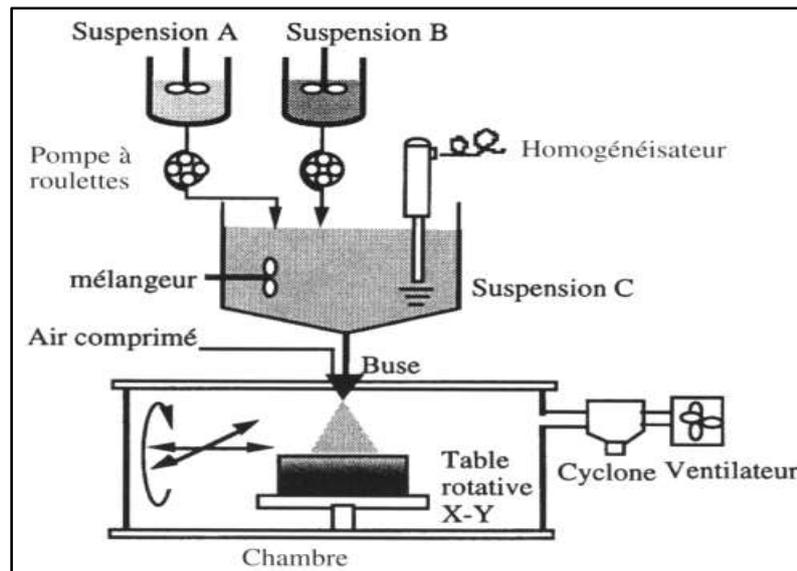


Figure I. 14 : Procédé de pulvérisation de poudres (Kawasaki A, Watanabe R, 1990).

La figure (Figure I-15) présente un exemple de microstructure d'une coupe transverse d'échantillons pressés isostatiquement à chaud (HIP). Le contrôle manuel du système de dosage laisse encore distinguer les différentes couches, alors qu'un dosage piloté par ordinateur permet une évolution continue de la composition. Cependant, les couches successives obtenues par dosage manuel sont beaucoup plus fines que celles obtenues par empilage de couches de poudres.

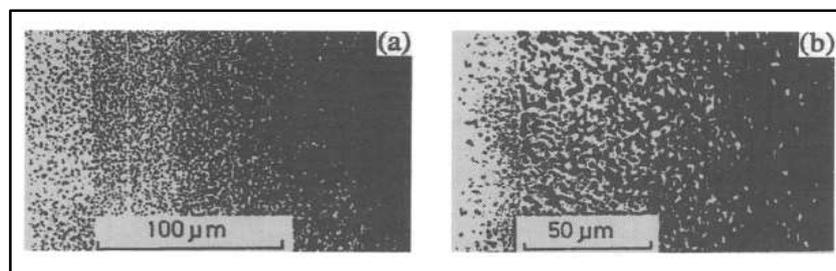


Figure I. 15 : Coupes transversales d'échantillons pulvérisés ((a) dosage manuel ; (b) dosage contrôlé par ordinateur).

I.5 Conclusion

Ce chapitre présente une introduction aux matériaux à gradient fonctionnel, il retrace leur historique du concept au développement et met en évidence leurs propriétés, domaines d'application, modèles d'homogénéisation, décrit les lois de constitution matérielle et finalement cite quelques procédés de fabrication basés sur la métallurgie des poudres. Les propriétés et avantages des matériaux à gradient fonctionnel permettent de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II

Introduction aux Théories des Plaques

II.1 Introduction

Les plaques sont des éléments de structures indispensables dans plusieurs domaines tels que l'aérospatiale, génie civil, énergétique et industriel. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. L'utilisation des plaques est très répandue en génie civil, car elles font partie de nombreuses structures, notamment, les dalles, les parois, les réservoirs, les enceintes de réacteurs, barrages, les ouvrages d'art...

Les plaques utilisées en génie civil présentent certaines particularités de calcul et de modélisation et afin de résoudre les problèmes liés à ce type d'élément dans le domaine élastique, il est impératif de choisir une théorie reflétant correctement le comportement statique, thermique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Les théories des plaques permettent de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elles s'inspirent de la théorie des poutres. Plusieurs modèles sur les théories des plaques sont développés dans la littérature avec différentes équations de la variation du champ de déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.2 Définition des plaques

Les plaques sont des solides limités par deux surfaces planes parallèles dont la distance entre-elles (appelée épaisseur h) est petite par rapport aux dimensions, elle est généralement employée pour modéliser des structures minces. Les plaques peuvent être rectangulaires, circulaires, polygonales ou de forme quelconque. Est défini (figure II-1) :

- **Le plan moyen (plan médian)** : plan situé à équidistance entre les faces.
- **La fibre neutre** : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y), avec $z = 0$.
- **Une fibre normale** : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné, elle a pour direction z .

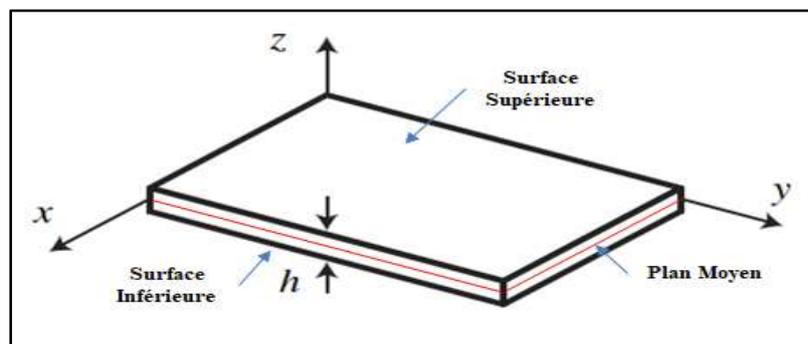


Figure II. 1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire.

II.3 Historique sur le développement des théories des plaques

Le premier à avoir établi l'énoncé mathématiquement des problèmes de plaques a probablement été Euler, qui en 1776 a effectué une analyse de vibration libre des problèmes de plaque (Euler, L. 1766). Chladni, un physicien allemand, a découvert les différents modes de vibrations libres (Chladni, EF. 1802). J. Bernoulli (Bernoulli, J. 1789) a tenté de justifier théoriquement les résultats de ces expériences acoustiques. La solution de Bernoulli était basée sur les résultats des travaux précédents qui ont abouti à la théorie de flexion des poutres d'Euler-D.Bernoulli.

Le mathématicien français Germain a développé une équation différentielle des plaques qui n'inclut pas le terme de gauchissement (Germain, S. 1826). Lagrange, étant l'un des critiques de son travail, a corrigé les résultats de Germain (1813) en ajoutant le terme manquant (Lagrange, J.L. 1828) ainsi, il était la première personne à présenter l'équation générale des plaques correctement. Cauchy (Cauchy, A.L. 1828) et Poisson (Poisson, S.D. 1829) ont été les premiers à formuler le problème de flexion des plaques sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. En 1829, Poisson étendit avec succès l'équation Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous chargement statique. Cependant, dans cette solution la rigidité flexionnelle était prise égale à un terme constant.

La première théorie satisfaisante de la flexion des plaques est associée à Navier (Navier. 1823), qui a considéré l'épaisseur de la plaque dans l'équation générale comme une fonction de rigidité. Il a également introduit une méthode « exacte » qui a transformé l'équation différentielle en expressions algébriques par l'utilisation de séries trigonométriques de Fourier. En 1850, Kirchhoff a publié une importante thèse sur la théorie des plaques minces (Kirchhoff, G.R. 1850). Dans cette thèse, Kirchhoff a énoncé deux hypothèses de base indépendantes qui sont maintenant largement acceptées dans la théorie des plaques en flexion et sont connues sous le nom d'hypothèses « Kirchhoff's ». À l'aide de ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié l'énergie fonctionnelle de la théorie 3D de l'élasticité pour les plaques fléchies.

Le livre de Kirchhoff a été traduit par Clebsch (Clebsch. 1883). Cette traduction contient de nombreux commentaires précieux de Saint-Venant, le plus important étant l'extension de l'équation différentielle de Kirchhoff de plaques minces, qui a considéré, d'une manière mathématiquement correcte l'action combinée de flexion et d'étirement. Saint-Venant a également souligné que la série proposée par Cauchy et Poissons est en général divergente.

À la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^e siècle, les constructeurs de navires ont changé leurs méthodes de construction en remplaçant le bois par de l'acier de construction. Ce changement dans les matériaux structurels a été extrêmement fructueux dans le développement de diverses théories de plaque. Krylov (Krylov, A.N. 1898) et son étudiant Bubnov (Bubnov, I.G. 1914) ont largement contribué à la théorie des plaques minces avec des rigidités flexionnelles et extensionnelles.

Timoshenko a apporté une contribution importante à la théorie et l'application de l'analyse de la flexion des plaques (Timoshenko, S.P. 1915. et Timoshenko, S.P. 1913). Des études approfondies dans le domaine de la théorie de la flexion des plaques et de ses diverses applications ont été réalisées par des scientifiques éminents tels que Hencky (Hencky, H. 1921), Huber (Huber, M.T. 1929), Von Karman (Von Karman, T. 1929 , Von Karman, T, Ef Sechler et Donnel. 1932), Nadai (Nadai, A. 1915), Foppl (Foppl, A. 1951).

Le développement de l'industrie aéronautique moderne a donné une forte impulsion vers des enquêtes analytiques plus rigoureuses des problèmes des plaques soumises au flambement et à la vibration. E. Reissner (Reissner, E. 1945) a mis au point une théorie rigoureuse des plaques qui tient compte des déformations causées par les forces de cisaillement transversales. Dans l'ancienne Union soviétique, les travaux de Volmir (Volmir, A.S. 1956) et de Panov (Panov, D.Yu. 1941) étaient principalement consacrés à la solution de problèmes non linéaires de la flexion des plaques.

Les équations gouvernantes des plaques rectangulaires minces soumises à des forces de compression directes ont d'abord été dérivées par Navier (Navier. 1823). Le problème de flambement d'une plaque simplement appuyée, soumise à des forces de compression directes et constantes agissant dans une ou deux directions, a été résolu en premier lieu par Bryan (Bryan, G.N. 1981) en utilisant la méthode de l'énergie. Cox (Cox, H.L. 1933) et Hartmann (Hartmann, F. 1933) ont présenté des solutions à divers problèmes de flambement des plaques rectangulaires minces en compression. Timochenko et Gere (Timoshenko, S.P, et Gere, J.M, 1961) et Bubnov (Bubnov, I.G. 1914) ont étudié le comportement de flambement d'une plaque rectangulaire sous des forces de compression directes non uniformes. Le comportement de flambage des plaques de différentes formes a été analysé par Karman et al. (Karman, Th et al. 1952), Levy (Levy, S. 1942), Marguerre (Marguerre, K. 1937).

Une équation différentielle du mouvement des plaques minces peut être obtenue en appliquant soit le principe de D'Alambert, soit la formulation de travail basée sur la conservation de

l'énergie. La première solution exacte du problème des vibrations libres pour les plaques rectangulaires, dont les deux faces opposées sont simplement appuyées, a été réalisée par Voight (Voight, W. 1893). Ritz (Ritz, W. 1909) a utilisé le problème de la vibration libre d'une plaque rectangulaire à bords libres pour démontrer sa méthode célèbre pour étendre le principe de Rayleigh pour obtenir des limites supérieures sur les fréquences de vibration. Les monographies de Timoshenko et Young (Timoshenko, S.P. and Young, D.H. 1963), Den Hartog (Den Hartog, J.P. 1958), Thompson (Thompson, W. 1973), etc., contiennent une analyse complète et des considérations de conception de vibrations libres et forcées de plaques de formes diverses.

La tendance récente dans le développement des théories de plaque est caractérisée par une forte dépendance sur les ordinateurs modernes à grande vitesse d'analyse et le développement de méthodes basées sur l'analyse numérique, ainsi que par l'introduction de théories plus rigoureuses concernant divers effets physiques, types de charges, etc.

Le résumé ci-dessus est un aperçu très bref du contexte historique du développement de la théorie des plaques et de son application et n'inclut pas tous les travaux et recherches menés dans cet axe. Pour un historique plus détaillé et approfondi se référer ouvrages de Timoshenko, S.P (Timoshenko, S. P. 1953) et Truesdell, C (Truesdell, C. 1968).

II.4 Théories de déformations des plaques

II.4.1 Théorie classique des plaques (Modèle classique Love-Kirchhoff)

La théorie classique des plaques CPT (Classical Plate Theory) se présente comme la plus simple des approches, elle est basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff (G. Kirchhoff. 1850). Lorsque la flèche engendrée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche engendrée par la courbure de la plaque, donc on parle d'une plaque mince.

Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (E. Reissner et al. 1961). Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la contribution de l'effet de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h). Il suppose les hypothèses ci-après :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen.
- Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan, seul est considéré le déplacement transversal w des points du plan neutre.

- Les sections droites, initialement normales au plan moyen, restent planes et normales à celui-ci (Figure II.2), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse ($\varepsilon_x = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).
- L'épaisseur est faible et par conséquent, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$).

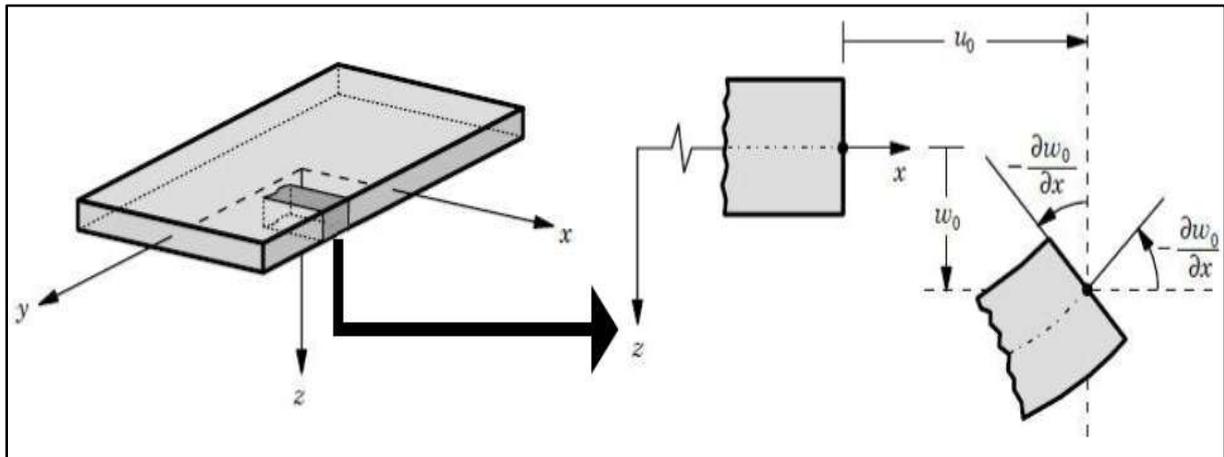


Figure II. 2 : Schématisation des déformations des plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT) (Reddy. 2007).

Ce modèle de plaque peut être référé à Timoshenko et Woinowsky-Krieger. (Timoshenko et Woinowsky-Krieger. 1959), (Reddy. 1997) et (Reddy. 1999). En se basant sur les hypothèses Ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II-1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II-1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II-1.c})$$

Avec : $(u_0 = v_0 = w_0)$ sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élancement h/a ou h/b est supérieur ou égal à 0.05. Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à des résultats imprécis pour des plaques épaisses qui peuvent être interprétées par une surestimation de la rigidité de flexion et par conséquent une sous-estimation des déplacements.

II.4.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans (Reissner. 1945), (Mindlin. 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que (Timoshenko et Woinowsky-Krieger. 1959), (Reddy. 1997) et (Reddy. 1999).

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) se base sur les hypothèses de (Reissner. 1945 – Mindlin. 1951), d'où :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.
- La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes.
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée (figure II-3).
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

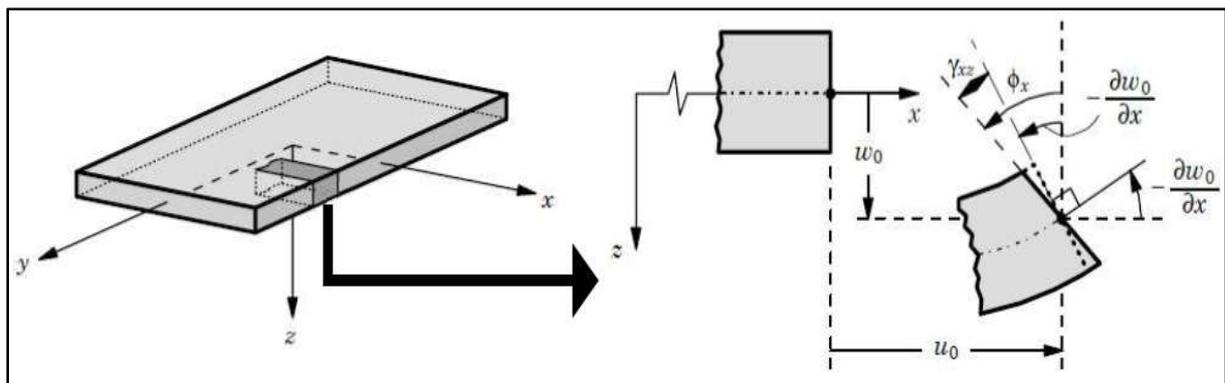


Figure II. 3 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie (FSDT) (Reddy, 2007).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II-2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II-2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II-2.c})$$

Avec : $(u_0 = v_0 = w_0)$ et ϕ_x et ϕ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le

remplacement : $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

L'utilisation de ce champ de déplacement implique que dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un facteur de correction proposé par Mindlin. (1951) à appliquer pour la contrainte de cisaillement.

II.4.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Afin de remédier à l'insuffisance la théorie classique des plaques qui perd en précision lors de l'augmentation du rapport h/a (h/b), et de s'affranchir des limitations liées aux théories de déformation en cisaillement du premier ordre qui considèrent une variation constante de la déformation transverse à travers l'épaisseur de la plaque, et qui nécessitent un facteur arbitraire de correction, les théories d'ordre supérieur ont été développées.

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur (figure II.4 et II.5) par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al. 1949), (Naghdi. 1957), (Reissner. 1975), (Reddy. 1984), (Kant et Swaminathan. 2002).

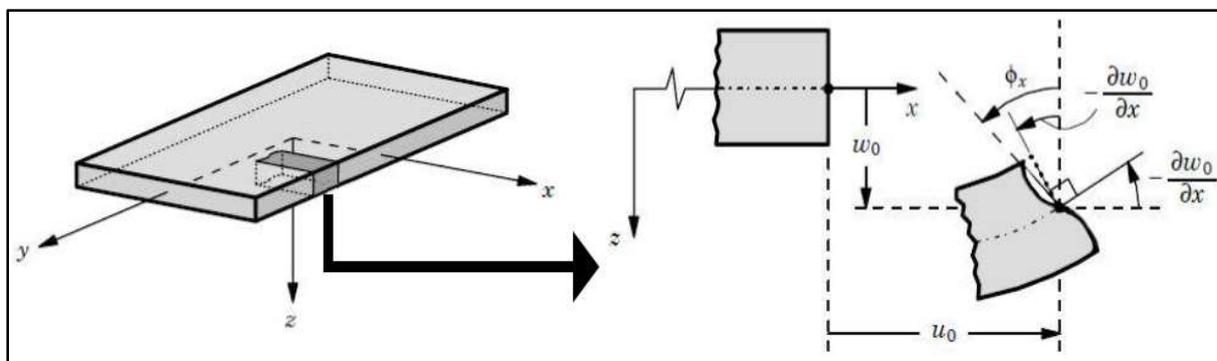


Figure II. 4 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie (HSDT) (Reddy. 2007).

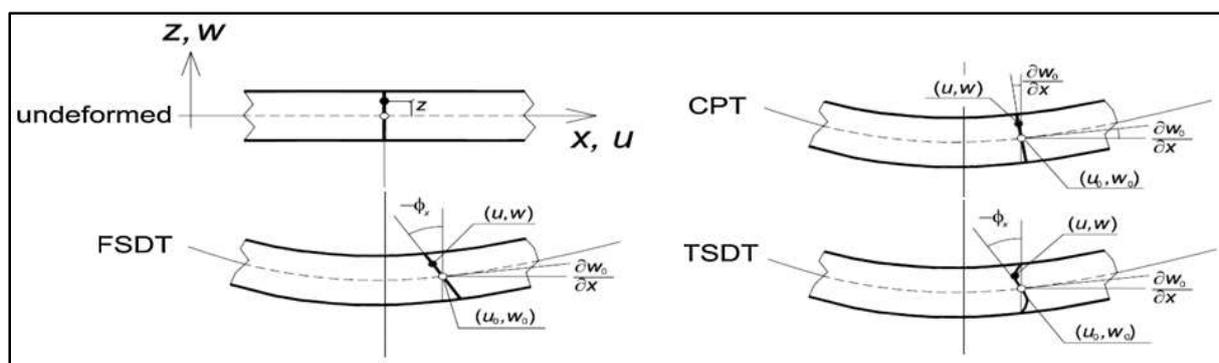


Figure II. 5 : Comparaison entre les différentes théories de plaques (CPT, FSDT, HSDT).

La plupart des théories d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u(x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2) + z\phi_j^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_j^{0(2)}(x_1, x_2) + \dots + z^n\phi_j^{0(n)}(x_1, x_2) \quad (\text{II-3})$$

Le principe de départ est que l'utilisation de différents ordres est admise en fonction de la complexité du problème et de la précision recherchée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3^{ème} ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_j^{0(i)}$ pour $j=2, 3, 4 \dots$. En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est-à-dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées. Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la contrainte de cisaillement s'annule sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque ou de la poutre dans la direction transverse (CUGNONI. 2004).

Le champ de déplacement est généralement donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \quad (\text{II-3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \quad (\text{II-3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II-3.c})$$

Avec : u_0, v_0, w_0 et φ_x, φ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes

x et y respectivement. $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$ et $\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$ et $f(z)$ est une fonction de cisaillement

transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus en prenant $f(z)=0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue pour $f(z)=z$.

La théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre de Reddy (TSDT), (Reddy. 1997, Reddy. 1999) est obtenue par :

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (\text{II-3.d})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier. (1991) propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{z}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II-3.e})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Mantari et al. (2012) propose un nouveau modèle sinusoïdal (NSSDT) qui est similaire au modèle de Touratier . La fonction de cisaillement transverse est comme suit :

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{avec} \quad m \geq 0 \quad (\text{II-3.f})$$

La version exponentielle de la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. (2003) est obtenue avec la fonction :

$$f(z) = z e^{-\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II-3.g})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al. (2010) avec la fonction :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{\frac{z}{h} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad (\text{II-3.h})$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été développées en intégrant différentes fonctions de cisaillement transverse, sur le tableau II.1 sont exposées différentes fonctions présentes dans la littérature.

Tableau II. 1 : Diverses fonctions présentées par la littérature pour la théorie HDST.

Théories	Fonction
TSDT	
Reissner (1975)	$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
HSDT	
Nguyen (2014)	$f(z) = h \arctan \frac{rz}{h} - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}$
HSDPT	
Refrafi (2020)	$f(z) = (0.1212\pi z \left[\pi - (0.135)^{1/3} \cosh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right])$
ESSDPT	
Belkhouja (2020)	$f(z) = \frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} \left[e^{\left(\frac{hz}{\pi}\right)} \left(\pi^2 \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) + h^2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) - h^2 \right]$

II.4.4 Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002, un modèle raffiné pour les plaques isotropes et qui a été nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory) (Shimpi, R.P. 2002). Cette théorie propose des caractéristiques très intéressantes telles que la non-nécessité d'un coefficient de correction pour les contraintes de cisaillement et les similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Contrairement aux autres théories d'ordre supérieur, le nombre d'inconnues dans la présente théorie est égal à quatre, par contre, égal à cinq ou plus pour d'autres théories d'ordre élevé (H. Ait Atmane et al. 2010), (J.N. Reddy. 1984), (M. Touratier. 1991), (M. Karama et al. 2003). Cette théorie propose le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II-4})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II-4.a})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II-4.b})$$

Où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque et (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de la flexion et du cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse.

II.4.5 Théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)

Pour étudier le comportement exact des plaques épaisses, le plus laborieux est de trouver une description précise des champs de contraintes à travers l'épaisseur surtout les contraintes de cisaillement sans omissions et simplifications dues à l'application de la théorie classique ou celle du premier ordre. Bien que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, reste-il que la déformation normale transverse est négligée ce qui influence directement et de manière importante la précision des résultats. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc primordial, les approches principales pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs de contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations. Les équations différentielles régissent la flexion dans le cas tridimensionnel sont tirées de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_2 &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

Où : $f_1, \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ et ρ sont respectivement les forces volumiques, les composantes du vecteur d'accélération et la masse volumique.

De plus, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, les méthodes numériques sont les seules permettant d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que pour différentes conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives offrent des avantages et des potentialités capitales, ces méthodes dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent un outil informatique puissant pour obtenir des résultats d'une très grande et satisfaisante précision. Huang et al. (2008) et Amini et al. (2009) ont donné des solutions tridimensionnelles exactes

dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, Malekzadeh. (2009), a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles, Zenkour. (2007) a étudié des plaques en FGM épaisses se basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle de propriétés matérielles à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel).

II.4.6 Théorie de déformation des plaques quasi-3D

Afin d'éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle, l'approche quasi-tridimensionnelle est devenue une alternative importante, cette approche consiste en introduisant l'effet de déformation normale transverse, afin de définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire.

De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche se base sur la jonction d'une fonction non-linéaire à la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque. En procédant de la sorte, le but est de réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En général, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale dans lesquelles est pris en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera (Car. 2001), (Car. 2003), (Car. 2005), et récemment évoluée par Demasi (Dem. 2009a), (Dem. 2009b), (Dem. 2009c), (Dem. 2009d) et (Dem. 2009e). Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera se référer aux ouvrages de l'auteur (Car. 2011a) et (Car. 2011b). Talha et al. (2010) ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé. Thai et Kim. (2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. Hebali et al. (2014), Tounsi et al. (2015), Hamidi et al. (2015), Thai. (2014), Belabed et al. (2014) et Bennoun et al. (2016) ont proposé à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D.

En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FGM, les plaques sandwichs (Zenkour, 2013) et des plaques composites stratifiées (Zenkour, 2015). Mantari et Guedes Soares. (2014), ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement graduées en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z) , alors la cinématique devient :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II-4})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II-4.a})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (\text{II-4.b})$$

Où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque et (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse avec : $g(z) = 1 - f'(z)$

II.5 Conclusion

Ce chapitre présente un aperçu général sur les différentes théories des plaques ainsi que leurs évolutions. Commenant par la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces puis la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) qui est plus générale, mais qui nécessite l'introduction d'un coefficient de sécurité, ensuite la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) avec ses différents modèles pour arriver à la théorie raffinée des plaques (RPT) qui divise le déplacement transversal en une composante de flexion et une de cisaillement. Ensuite pour étudier le comportement exact des plaques épaisses la théorie des plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D) a été présentée avec une alternative plus simple qui est la théorie de déformation des plaques quasi-3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur.

CHAPITRE III

Revue Des Travaux
Sur
L'analyse Thermomécanique
Des
Plaques FGM

III.1 Introduction

Dans l'industrie moderne, l'utilisation de matériaux composites avancés dans les applications d'ingénierie est accrue en raison de leur capacité à résister aux contraintes causées par le chargement thermomécanique. Les matériaux à gradient fonctionnel appartiennent à cette nouvelle génération de matériaux composites dans lesquels les propriétés thermiques et mécaniques changent graduellement suivant une ou plusieurs directions selon la fraction volumique de ses matières constitutives.

Grâce à l'application massive des FGM dans les technologies modernes telles que les sources d'énergie, l'aérospatiale, l'automobile, les réacteurs nucléaires, la mécanique, les nanostructures, les secteurs civils, électroniques et de la construction navale. De nombreux chercheurs se sont concentrés sur l'étude et l'élaboration de théories relatives au comportement des structures en FGM et en particulier à l'analyse thermomécanique. Diverses théories sur les plaques ont été développées pour prédire le comportement des structures au cours des dernières décennies, comme la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

III.2 Analyse thermomécanique des plaques FGM

Plusieurs auteurs ont étudié le comportement thermomécanique des plaques en FGM en utilisant diverses théories. La FSDT a été utilisée par Cong et al. (2015) pour étudier la stabilité non-linéarité des plaques FGM d'une épaisseur moyenne excentrique et des propriétés de matériaux dépendantes de la température soumises à une compression normale au plan transversal et à un chargement thermomécanique (Figure III-1).

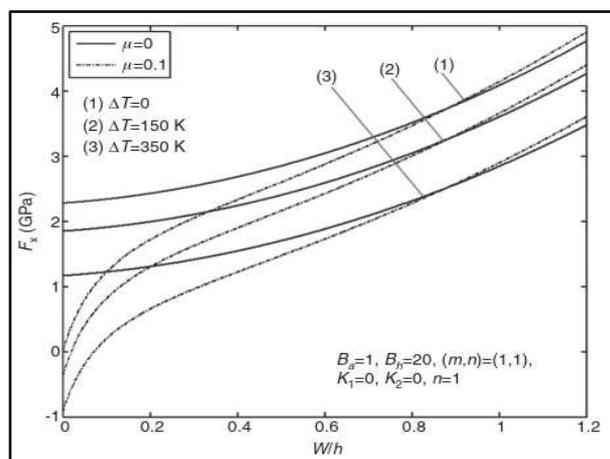


Figure III. 1 : Effet du champ de température sur la courbe du flambement d'une plaque d'épaisseur moyenne excentrique sous charge de compression (Cong et al, 2015).

Les mêmes chercheurs (Cong et al. 2017) ont étudié la réponse dynamique non linéaire des plaques FGM dans un milieu thermique soumises à des charges mécaniques et thermiques en tenant compte de la dépendance thermique des propriétés des matériaux.

Dans le même cadre, Ping et al. (2014) ont utilisé la méthode locale sans maillage avec interpolation en mouvement de Kriging pour l'analyse géométrique non linéaire des plaques fonctionnellement graduées dans un environnement thermique en utilisant la théorie de déformation du cisaillement du troisième ordre (TSDT). Ghiasian et al. (2014) ont étudié le flambement thermique des plaques FGM circulaires et annulaires avec des propriétés dépendantes de la température. Zhu et al. (2014) ont analysé le comportement thermomécanique des plaques de MGF modérément épaisses en utilisant une méthode locale sans maillage avec la technique d'interpolation de Kriging.

Trinh et al. (2017) ont étudié la flexion, le flambement et la vibration libre des microplaques sandwiches FGM soumises à une charge thermomécanique sur la base de la théorie modifiée du « couple stress » en utilisant les solutions de Navier. La figure III-2 présente l'influence du changement de température sur la contrainte transversale.

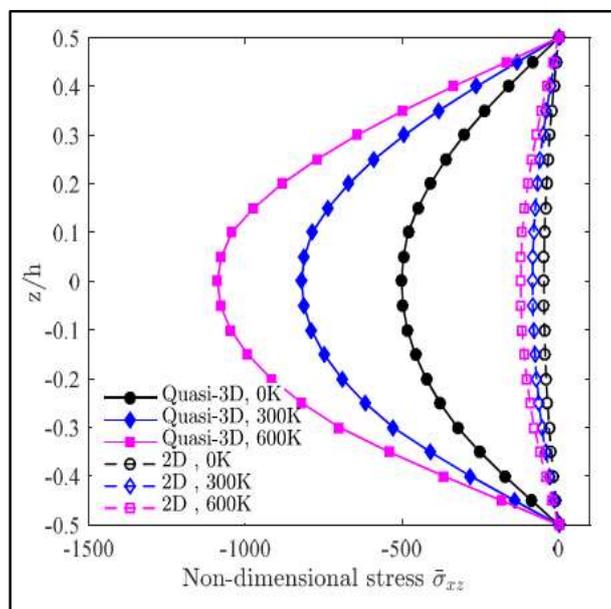


Figure III. 2 : Distribution de la contrainte transversale à travers l'épaisseur en fonction de différentes variations de température (Trinh et al, 2017).

Li et al. (2016, 2017) ont utilisé la théorie des plaques raffinées à quatre variables pour étudier la flexion thermomécanique des plaques sandwiches FGM. À l'aide de la théorie HSDT, Kar et al. (2016) ont étudié la déformation linéaire et non linéaire d'un panneau sphérique en FGM soumis à une charge thermomécanique. Ils ont inclus la géométrie non linéaire.

Parida et Mohanty (2017) ont réalisé un modèle mathématique pour étudier les vibrations libres non linéaires d'une plaque inclinée en FGM dans un environnement thermique. Ils présentent une formulation basée sur la théorie HSDT en conjonction avec la non-linéarité géométrique du type Green-Lagrange. Yoosefian et al. (2020) ont étudié la flexion thermoélastique non linéaire des plaques sandwichs symétriques circulaires ou annulaires en FGM. Zarga et al. (2019) ont présenté une analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwichs FGM par une théorie quasi-3D de déformation de cisaillement.

Tounsi et al. (2020) ont présenté une théorie d'intégrales trigonométriques de quatre variables pour l'analyse de flexion hygro-thermo-mécanique des plaques FGM céramique-métal reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Boussoula et al. (2020) ont développé une théorie simple de déformation de cisaillement pour l'analyse de flexion thermomécanique de différentes configurations de plaques sandwichs FGM. Il convient également de noter que les effets thermiques sont étudiés pour les structures stratifiées (Abualnour et al., 2019, Belbachir et al., 2019 et 2020).

III.3 Plaques reposant sur des fondations élastiques

La modélisation des plaques reposant sur les fondations élastiques présente un problème très délicat lors de l'analyse du comportement résultant de cette association. Cette difficulté est due principalement aux types de fondations étudiées (rigides ou souples) et à la nature du sol de fondation (Cohérent ou pulvérulent) qui est par définition un matériau hétérogène. Ainsi pour parvenir à des résultats cohérents, le développement de modèles plus réalistes de fondation et mathématiquement plus au moins simples afin de résoudre le problème complexe d'interaction sol-structure est indispensable.

La philosophie de la conception des fondations étant de répartir la charge de la structure sur le sol, la modélisation idéale des fondations est celle dans laquelle la répartition de la pression de contact est simulée de manière plus réaliste (Taylor D. 1964). Cependant, le comportement mécanique du sol est complètement erratique et complexe du fait de son hétérogénéité, il semble impossible d'établir une loi mathématique conforme à l'observation réelle (Dutta SC. 2002). Plusieurs auteurs, on étudie des fondations reposant sur différents types de sols afin d'établir des modèles de calcul reflétant le plus réellement possible leurs comportements. Dans ce qui suit seront présentes quelques modèles de fondations élastiques issus de la littérature.

III.3.1 Modèle de Winkler

Winkler représente le sol comme un système de ressorts identiques, linéairement élastiques, proches les uns des autres. Selon ce postulat, la déformation de la fondation due à la charge appliquée est limitée aux régions chargées uniquement (Dutta SC. 2002). La densité de réaction de cette fondation est donnée par (Daikh. A. 2019) :

$$q_{winkler} = K_w w \quad (III-1)$$

Ou : K_w est le module de réaction du sol et w représente le fléchissement.

III.3.2 Modèle de Pasternak

Dans ce modèle, Pasternak suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les éléments de ressort, qui est réalisée en reliant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque qui ne subit qu'une déformation de cisaillement transverse. Cette interaction est assurée par l'intermédiaire d'un coefficient de rigidité tangentielle K_p du sol en plus de la rigidité normale Winkler K_w . La relation charge-flèche est obtenue en considérant l'équilibre vertical d'une couche de cisaillement (Dutta SC. 2002). La densité de réaction de cette fondation est donnée par (Daikh. A. 2019) :

$$q_{Pasternak} = K_w w - K_p \nabla^2 w \quad (III-2)$$

Ou : K_p est le module de cisaillement de la couche de cisaillement.

III.3.3 Modèle de Kerr

Le modèle Kerr est un modèle élastique à trois paramètres, composé d'une couche de cisaillement K_s , d'une couche élastique supérieure K_u et d'une couche élastique inférieure K_l . cette couche de cisaillement est introduite dans la fondation de Winkler et les constantes de ressort situées au-dessus et au-dessous de cette couche sont supposées être différentes selon cette formulation. La densité de réaction de cette fondation est donnée par (Daikh. A. 2019):

$$q_{Kerr} = \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) w - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 w \quad (III-3)$$

Ou : K_s est le module de cisaillement, K_u est le module élastique de la couche supérieure et K_l le module élastique de la couche inférieure.

La figure III.3 schématise les différents modèles de fondations (Daikh. A. 2019).

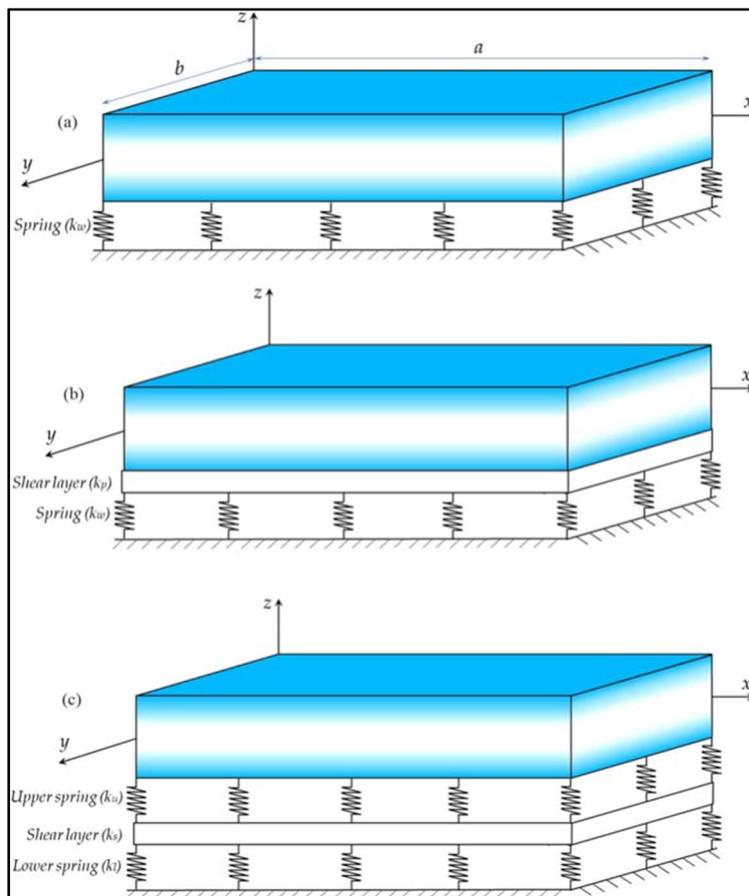


Figure III. 3 : Différents modèles de fondations [(a) Winkler, (b) Pasternak et (c) kerr].

III.3.4 Fondation élastique variable

La distribution des couches de sol n'est pas uniforme d'un point à un autre. Cela signifie que le module de Winkler est variable et n'est pas fixé sur la longueur d'une structure sous forme de plaque ou de poutre. La réaction de cette fondation peut être exprimée sous forme linéaire, parabolique ou sinusoidale (Sobhy 2015, Attia et al. 2018, Pradhan et Murmu 2009) :

$$R_f(x) = K_w(x)w + K_p \nabla^2 w \quad (\text{III-4})$$

Où : R_f est la densité de la force de réaction de la fondation élastique, K_w est le paramètre Winkler dépendant de x seulement. Il peut être exprimé sous forme linéaire, parabolique ou sinusoidale représenté sur la figure III.4 (Sobhy 2015, Attia et al. 2018, Pradhan et Murmu 2009) :

$$K_w(x) = \frac{J_1 h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & \text{-- Linéaire (a)} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{-- Parabolique (b)} \\ 1 + \zeta \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) & \text{-- Sinusoïdale (c)} \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

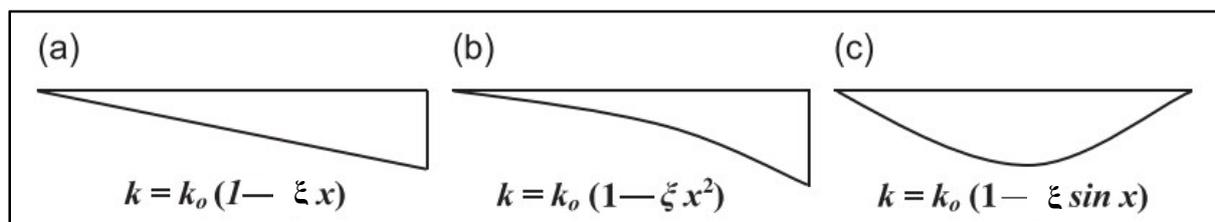


Figure III. 4 : Représentation du paramètre variable de Winkler (Pradhan .2009).

Où J_1 est une constante et ξ un paramètre variable. K_p est la rigidité de la couche de cisaillement ∇^2 est l'opérateur laplacien en x et y , et w est la déflexion de la plaque.

Il est à noter que, si le paramètre variable $\xi = 0$ la fondation élastique devient celle de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient la fondation Winkler.

III.3.5 Analyse des plaques FGM reposant sur des fondations élastiques

Les plaques reposant sur des fondations élastiques ont fait l'objet de plusieurs études et discutées par un certain nombre de chercheurs utilisant plusieurs techniques. Trinh et Kim (2018) ont présenté une procédure théorique fondée sur la FSDT pour étudier les charges de flambement et l'équilibre post-flambement des coques sandwiches en FGM modérément épaisses reposant sur des fondations élastiques et soumises à des charges thermomécaniques.

Nguyen et al. (2016) ont présenté une solution analytique pour étudier la stabilité thermique d'une plaque FGM d'épaisseur excentrique reposant sur des fondations élastiques soumises à une charge mécanique, thermique et thermomécanique en utilisant la théorie TSDT de Reddy. En utilisant la même théorie, Nguyen et al. (2018) ont étudié la réponse thermomécanique non linéaire des coques cylindriques sigmoïdes S-FGM reposant sur des fondations élastiques.

Kolahchi et al. (2016) ont étudié le comportement de la stabilité dynamique non linéaire des plaques viscoélastiques polymériques renforcées par des SWCNT dépendantes de la température reposant sur un milieu élastique orthotrope.

La plus grande partie des recherches sur les plaques ou poutres FGM reposant sur des fondations élastiques ont été entreprises avec des modules constants. Cependant, les études sur les structures basées sur des fondations élastiques variables sont rares et ont fait l'objet d'un traitement limité dans la littérature.

Pradhan et Murmu (2009) ont illustré l'analyse thermomécanique des vibrations des poutres FGM et des poutres sandwiches FGM reposant sur des fondations élastiques variables.

Sobhy (2015) a présenté une théorie 2D basée sur la théorie SSDT pour étudier la flexion thermomécanique des plaques FGM avec diverses conditions aux limites et reposant sur des fondations élastiques variables. Attia et al. (2018) ont utilisé une analyse 2D avec la théorie HSDT pour étudier la flexion thermomécanique des plaques FGM dépendantes de la température reposant sur des fondations élastiques variables.

La figure III-3 présente l'effet de la fondation variable sur la contrainte transversale donné par différents auteurs.

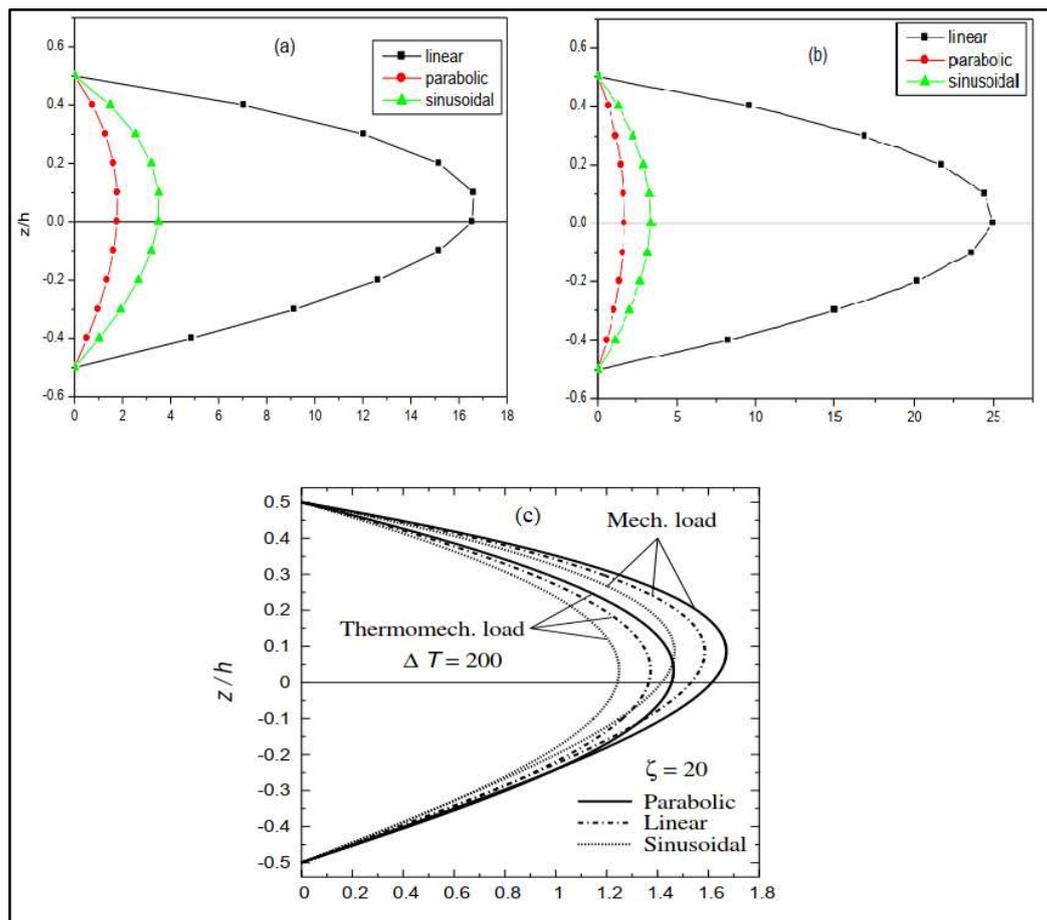


Figure III. 5 : Effet de la fondation variable sur la contrainte transversale [(a) et (b) Attia et al. (2018), (c) Sobhy et al. (2015)].

III.4 Analyse micromécanique des plaques FGM

La plupart des recherches sur les FGM utilisent des lois de mélange pour évaluer les propriétés matérielles effectives, un modèle micromécanique approprié doit être appliqué pour estimer avec précision ces propriétés. Parmi les travaux présents dans la littérature, quelques modèles micromécaniques standards peuvent être cités (Nemati et Mahmoodabadi 2019) comme , Voigt (1889), Reuss (1929) et Mori-Tanaka (1973).

Benyoucef et ses collègues (Bachir Bouiadjra et al. 2018, Yahiaoui et al. 2018) ont présenté (Figure III-4) des recherches sur l'effet des modèles micromécaniques sur la réponse des structures en FGM.

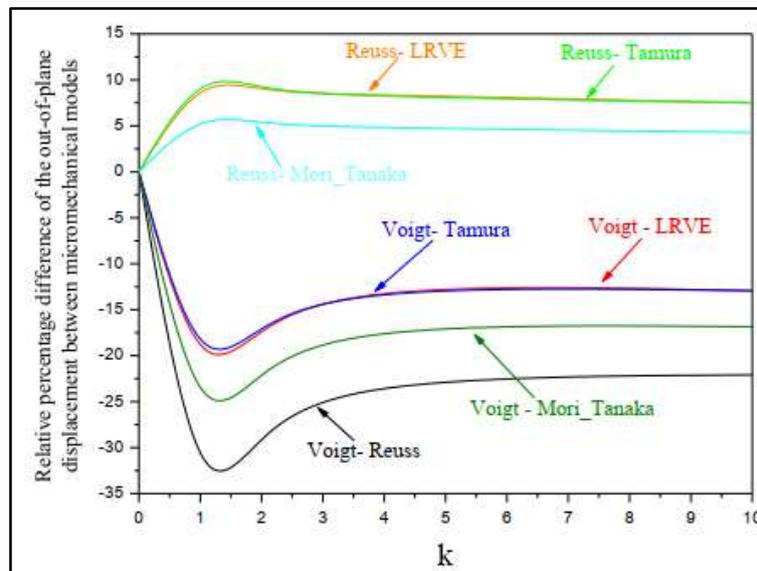


Figure III. 6 : Différence relative entre flèches pour divers modèles micromécaniques (Bouiadjra et al, 2018).

Nemati et al. (2019) ont proposé une approche analytique pour étudier le flambement mécanique des panneaux coniques minces en FGM reposant sur fondation élastique. Les propriétés matérielles à travers l'épaisseur des FGM sont supposées dépendre de la température et sont déterminées par l'intermédiaire de différents modèles micromécaniques (Figure III-5).

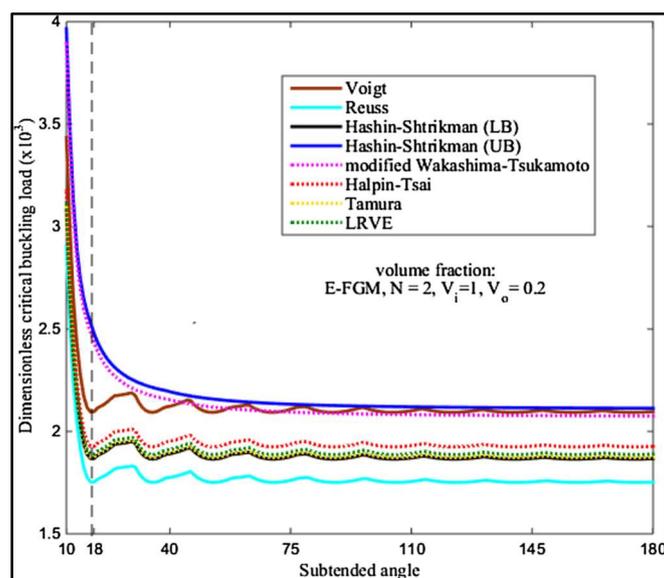


Figure III. 7 : Variations de la charge critique de flambement des panneaux coniques E-FGM dans un environnement thermique non linéaire, obtenues par plusieurs modèles micromécaniques (Nemati et al. 2019).

III.5 Conclusion

Comme l'indique la revue documentaire ci-dessus, l'analyse thermoélastique des structures FGM dont les propriétés dépendent de la température ainsi que le traitement des cas de fondations élastiques variables n'ont reçu que peu d'attention. Alors que les structures en FGM sont souvent utilisées dans des environnements thermiques très sévères, la compréhension de leur performance thermoélastique et l'influence des changements des propriétés en fonction de la température sont d'importance capitale afin d'évaluer leur comportement.

CHAPITRE IV

Étude Thermomécanique
Des
Plaques FGM

IV.1 Introduction

Chaque théorie utilisée pour résoudre un problème de la mécanique des milieux continus a pour objectif un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base d'un système d'équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites complétés par une loi de comportement représentant les matériaux et reliant les contraintes aux déformations.

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement thermomécanique des plaques FGM avec des propriétés dépendantes de la température reposant sur une fondation élastique variable, en plus de traiter l'effet des modèles micromécaniques sur la réponse thermoélastique de ces plaques en utilisant une théorie quasi-3D. Ainsi, la présente étude vise à améliorer la théorie 2D développée par Attia et al. (2018) en incluant l'effet d'étirement dans l'épaisseur (stretching effect) et étudier l'effet de plusieurs modèles micromécaniques sur la réponse thermomécanique des plaques épaisses en FGM reposant sur des fondations élastiques variables. L'avantage de la théorie Quasi-3D utilisée est qu'elle contient un nombre réduit de variables et d'équations gouvernantes par rapport aux théories quasi-3D conventionnelles. Différents modèles micromécaniques sont considérés pour déterminer les propriétés matérielles effectives des plaques FGM. Les effets de ces modèles, la charge thermomécanique et la fondation élastique sur la réponse globale des plaques, seront discutés en détail par une étude paramétrique.

IV.2 Formulation théorique

Soit une plaque rectangulaire de dimensions en plan (a et b) et d'une épaisseur uniforme h (Figure IV.1). Le système de coordonnées cartésiennes (x , y , z) est utilisé de telle sorte que le plan x - y coïncide avec le plan médian de la plaque et est utilisé pour décrire des déformations infinitésimales de cette plaque élastique.

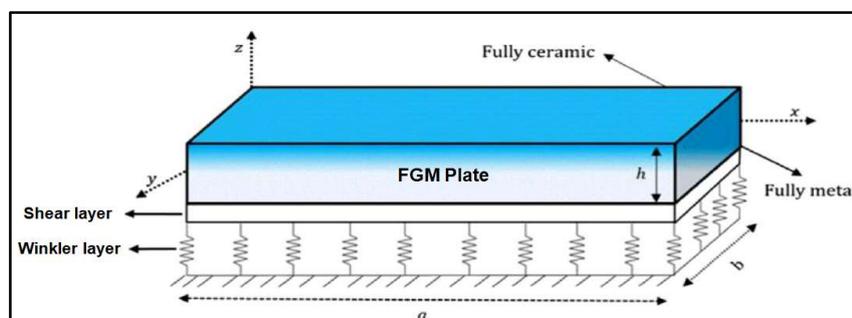


Figure IV. 1 : Géométrie de la plaque en FGM reposant sur une fondation élastique.

La plaque est supposée reposer sur une fondation élastique variable à deux paramètres, composée d'une rigidité de winkler représenté par des ressorts étroitement espacés

interconnectés par une couche de cisaillement (rigidité de cisaillement) qui ne se déforment que par un cisaillement transversal.

IV.3 Propriétés Matérielles de la plaque FGM

Les FGM sont des matériaux composites avancés constitués généralement par la céramique et le métal. Étant donné qu'ils sont utilisés dans des environnements à température élevée, les constituants des FGM peuvent avoir des propriétés dépendantes de la température (Reddy et Chin, 1998). Par conséquent, les propriétés incluant le module de Young E , l'expansion thermique et la conductivité thermique k sont supposées être en fonction de la température et sont exprimées comme suit (Attia et al, 2018. Nemati et Mahmoodabadi, 2019):

$$P_f(T, Z) = P_0 \left(P_{-1}T(z)^{-1} + 1 + P_1T(z)^1 + P_2T(z)^2 + P_3T(z)^3 \right) \quad (IV-1)$$

Où : P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3 sont les coefficients de température T exprimée en kelvin et sont propres aux matériaux constitutifs, ΔT représente l'augmentation de température dans la direction de l'épaisseur et $P_f(T, Z)$ symbolise les propriétés effectives des matériaux constitutifs (Céramique et Métallique).

IV.4 Modèles micromécaniques

Contrairement aux microstructures traditionnelles, dans les FGM les propriétés matérielles varient dans l'espace, ce qui n'est pas négligeable pour le modèle micromécanique (Jaesang et Addis 2014). L'analyse du comportement thermomécanique de la plaque FGM se base pour la détermination des propriétés effectives sur les modèles micromécaniques suivants : Voigt, Reuss, LRVE, Tamura et Mori-Tanaka.

IV.4.1 Modèle Voigt :

Le modèle Voigt est un modèle relativement simple, il est fréquemment utilisé dans la plupart des analyses pour évaluer les propriétés des FGM (Mishnaevsky, 2007, Zimmerman, 1994):

$$P(T, z) = P_c(T, z)V(z) + P_m(T, z)(1 - V(z)) \quad (IV-2)$$

IV.4.2 Modèle Reuss

Reuss a supposé l'uniformité de la contrainte à travers le matériau et a déterminé les propriétés effectives suivant la formule (Mishnaevsky, 2007, Zimmerman, 1994):

$$P(T, z) = \frac{P_c(T, z)P_m(T, z)}{P_c(T, z)(1 - V(z)) + P_m(T, z)V(z)} \quad (IV-3)$$

IV.4.3 Modèle Tamura :

Le modèle Tamura utilise une loi de mélange linéaire, introduisant un paramètre d'ajustement empirique connu sous le nom de "stress-to-strain transfer" qui peut être traduit par "transfert contrainte-déformation" (Gasik, 1995. Zuiker, 1995) avec:

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (\text{IV-4})$$

Pour une valeur de $q = 0$, le modèle de Tamura correspond à celui de Reuss et coïncide au modèle de Voigt pour $q = +\infty$. Étant indifférent par rapport aux phases du matériau (matrice et renfort), les propriétés effectives sont données par :

$$P(T, z) = \frac{(1-V(z))P_m(T, z)(q - P_c(T, z)) + (V(z)P_c(T, z))(q - P_m(T, z))}{(1-V(z))(q - P_c(T, z)) + V(z)(q - P_m(T, z))} \quad (\text{IV-5})$$

IV.4.4 Description par un élément de volume représentatif (LRVE)

La LRVE est développée en partant de l'hypothèse que la microstructure du matériau hétérogène est connue. La méthode utilisée par la LRVE pour la détermination de la structure micromécanique est généralement la moyenne du volume ou la moyenne de l'ensemble des descripteurs de la microstructure. La propriété effective est exprimée par la LRVE comme suit (Akbarzadeh et al. 2015):

$$P(T, z) = P_m(T, z) \left(1 + \frac{V(z)}{FE - \sqrt[3]{V(z)}} \right) \quad \text{avec :} \quad FE = \frac{1}{1 - \frac{P_m(T, z)}{P_c(T, z)}} \quad (\text{IV-6})$$

IV.4.5 Modèle Mori-Tanaka

Selon le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka, le module de compression (K) effective et le module de cisaillement (G) effectif sont donnés par (Mori et Tanaka, 1973) :

$$P(T, z) = P_m(T, z) + (P_c(T, z) - P_m(T, z)) \left(\frac{V_c}{1 + (1 - V_c)(P_c(T, z) / P_m(T, z) - 1)(1 + \nu) / (3 - 3\nu)} \right) \quad (\text{IV-7.a})$$

Ou :

$$V_c = \left(0.5 + \frac{z}{h} \right)^p \quad (\text{IV-7.b})$$

IV.4.6 Fraction de volume :

Dans tous les modèles décrits ci-dessus, les indices (c) et (m) font référence respectivement à la céramique et au métal et $P(T, z)$, c'est une propriété qui peut être, le module E de Young, l'expansion thermique ou la conductivité thermique k de la plaque FGM. Les fractions de volumes des phases céramique et métallique sont reliées par $V_c + V_m = 1$ et V_c est exprimé comme suit:

$$V_c = \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^P \quad \text{avec} \quad P \geq 0 \quad (\text{IV-8})$$

IV.5 Cinématique et équations constitutives

IV.5.1 Champ de déplacements

Le champ de déplacements proposé satisfait les conditions des contraintes de cisaillement transversales et par conséquent ceux des déformations, qui sont nulles sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque ($z = \pm h/2$) et prend en considération l'effet d'étirement d'épaisseur. Le champ de déplacements est donné comme suit (Achouri et al. 2019, Khiloun et al. 2019, Boutaleb et al. 2019, Sahla et al. 2019) :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{IV-9.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV-9.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\theta(x, y) \quad (\text{IV-9.c})$$

Où : u_0 , v_0 , w_0 et θ sont les quatre déplacements inconnus déplacements du plan médian de la plaque, et les coefficients $k_1 = \alpha^2$ et $k_2 = \beta^2$ dépendent de la géométrie.

$f(z)$ représente la fonction de gauchissement définissant la variation des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur. $f(z)$ et $g(z)$ sont exprimées comme suit :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (\text{IV-10.a})$$

Et :

$$g(z) = \frac{2}{12} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{IV-10.b})$$

IV.5.2 Champ de déformations

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements de l'équation. (IV.9.a-c) soit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{IV-11})$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta \, dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \, dy \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-12.a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta \, dy \\ k_1 \int \theta \, dx \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \theta \quad (\text{IV-12.b})$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par la solution de Navier et peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta \, dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \, dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta \, dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta \, dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV-13.a})$$

Où les coefficients A' et B' sont déterminés en fonction de la solution utilisée, dans ce cas celle de Navier, et sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2} \quad (\text{IV-13.b})$$

Avec α et β définis par :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{m\pi}{b} \quad (\text{IV-13.c})$$

IV.5.3 Équations constitutives

En se limitant à une loi de comportement élastique linéaire, les relations contraintes déformations avec prise en considération de l'influence thermique s'écrivent comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha\Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha\Delta T \\ \varepsilon_z - \alpha\Delta T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-14})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. Les coefficients de rigidité, C_{ij} , sont exprimés par :

$$C_{ii} = \frac{(1-\nu(z,T))\lambda(z,T)}{\nu(z,T)}, \quad (i=1,2,3) \quad (\text{IV-15.a})$$

$$C_{ij} = \lambda(z,T), \quad (i, j=1,2,3). \quad (\text{IV-15.b})$$

$$C_{ii} = \mu(z,T), \quad (i=4,5,6) \quad (\text{IV-15.c})$$

$$\lambda(z) = \frac{E(z,T)}{(1-2\nu(z,T))(1+\nu(z,T))} \quad (\text{IV-15.d})$$

$$\mu(z) = \frac{E(z,T)}{2(1+\nu(z,T))} \quad (\text{IV-15.e})$$

La plaque est supposée reposer sur un modèle de fondation élastique à deux paramètres, qui consistent en ressorts étroitement espacés interconnectés par une couche de cisaillement composée d'éléments verticaux incompressibles, qui se déforment uniquement par cisaillement transversal. L'équation de réponse de cette fondation est donnée par :

$$R_f(x, y) = \bar{K}(x)w(x, y) + \bar{G}\nabla^2 w(x, y) \quad (\text{IV-16})$$

Où : R est la densité de la force de réaction de la fondation élastique, \bar{K} est le paramètre Winkler dépendant de x seulement. Il peut être exprimé sous forme linéaire, parabolique ou sinusoidale (Sobhy 2015, Attia et al. 2018, Pradhan et Murmu 2009) :

$$\bar{K}(x) = \frac{J_1 h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & - \text{Linéaire} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 & - \text{Parabolique} \\ 1 + \zeta \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) & - \text{Sinusoïdale} \end{cases} \quad (\text{IV-17})$$

Où J_1 est une constante et ξ un paramètre variable. \bar{G} est la rigidité de la couche de cisaillement ∇^2 est l'opérateur laplacien en x et y, et w est la déflexion de la plaque. Notez que, si le paramètre variable $\xi = 0$ la fondation élastique devient celle de Pasternak et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, la fondation Pasternak devient la fondation Winkler.

IV.6 Équations d'équilibre

Afin d'établir l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que l'introduction des conditions aux limites, le principe des travaux virtuels est appliqué. Celui-ci indique que pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs la somme du travail des forces internes et le travail des forces externes est nulle pour tout champ virtuel. L'énoncé du principe des travaux virtuels pour l'étude de la flexion thermomécanique d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique est exprimé comme suit :

$$\int_V (\delta U + \delta V + \delta U_f) dV = 0 \quad (IV-18)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation, δV est la variation du travail externe effectuée par la charge extérieure, δU_f est la variation du travail de la fondation élastique. La variation de l'énergie de déformation δU de la plaque est exprimée par :

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \gamma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV = 0 \quad (IV-18.a)$$

En remplaçant les équations (IV-11), (IV-12) et (IV-14) dans l'équation (IV-18.a) et intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV-18.a) Peut-être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + \\ M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1] dA = 0 \end{aligned} \quad (IV-18.b)$$

Où A est la surface supérieure et les contraintes résultantes M, N, S et Q sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (IV-19)$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz \quad (IV-20.a)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (IV-20.b)$$

$$(Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) f'(z) dz \quad (\text{IV-20.c})$$

La variation de l'énergie potentielle du chargement mécanique appliqué est exprimée comme suit :

$$\delta V = - \int_A q \delta (w_0(x, y) + g(z)\theta(x, y)) dA \quad (\text{IV-21})$$

La variation de l'énergie potentielle de la fondation élastique est calculée par :

$$\delta U_R = \int_A R_f \delta (w_0(x, y) + g(z)\theta(x, y)) dA \quad (\text{IV-22})$$

En remplaçant les expressions de variations des énergies δU , δV et δU_f dans l'équation (IV-18) :

$$\begin{aligned} \delta U - \delta V + \delta U_R = & \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ & + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1] dA \quad (\text{IV-23}) \\ & - \int_A q \delta w_0 dA - \int_A q g(z) \delta \theta dA + \int_A R_f \delta w_0 dA + \int_A R_f g(z) \delta \theta dA = 0 \end{aligned}$$

En intégrant par parties et recueillant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 et $\delta \theta$, les équations gouvernantes sont déterminées comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q - R = 0 \quad (\text{IV-24}) \\ \delta \theta : \quad & -N_z - k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} \\ & + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + qg(z) - Rg(z) = 0 \end{aligned}$$

Les contraintes résultantes M, N, S et Q peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{bmatrix} \varepsilon_0^z, \quad \begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s & X^s \\ X^s & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-25.a})$$

$$N_z = R^a \varepsilon_z^0 + L(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^a(k_x^b + k_y^b) + R(k_x^s + k_y^s) \quad (\text{IV-25.b})$$

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\} \quad (\text{IV-26.a})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}, Q = \{Q_{xz}^s, Q_{yz}^s\}, \quad (\text{IV-26.b})$$

$$\gamma^0 = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}, \gamma^1 = \{\gamma_{xz}^1, \gamma_{yz}^1\}, \quad (\text{IV-26.c})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad (\text{IV-26.d})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-26.e})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z, T) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{IV-26.f})$$

Où les coefficients de rigidité sont déterminés par:

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z, T) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ f(z) \\ zf(z) \\ f^2(z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV-27.a})$$

$$F^s = \begin{bmatrix} F_{44}^s & 0 \\ 0 & F_{55}^s \end{bmatrix}, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, X^s = \begin{bmatrix} X_{44}^s & 0 \\ 0 & X_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV-27.b})$$

$$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) = (F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{E(z, T)}{2(1+\nu)} [f'^2(z), f'(z)g(z), g^2(z)] \right) dz \quad (\text{IV-27.c})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV-27.d})$$

En introduisant l'équation (IV-25) dans l'équation (IV-24), les équations gouvernantes de la présente théorie quasi-3D peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w_0, θ) comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\ & + (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2 + L) \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-28.a})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : \quad & A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\ & + (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2 + L) \frac{\partial \theta}{\partial y} + B_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-28.b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : \quad & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\ & - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - (2D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + (D_{12}^s k_2 + D_{11}^s k_1 + L^a) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ & + (D_{12}^s k_1 + D_{22}^s k_2 + L^a) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + q - R = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-28.c})$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : \quad & -(L + k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial u_0}{\partial x} - (A' k_1 + B' k_2) B_{66}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^1 \partial y^2} - (L + k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial v_0}{\partial y} - \\ & + (A' k_1 + B' k_2) B_{66}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y^1} + (L^a + k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (L^a + k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ & + 2(A' k_1 + B' k_2) D_{66}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - (k_1^2 H_{11}^s + 2k_1 R + 2k_1 k_2 H_{12}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2Rk_2 + R^a) \theta \\ & + (k_2^2 B^2 F_{44}^s + k_2 B' X_{44}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + (A_{44}^s + k_2 B' X_{44}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + (k_1^2 A'^2 F_{44}^s + k_1 A' X_{44}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ & (A_{44}^s + k_1 A' X_{44}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - H_{66}^s (A' k_1 + B' k_2)^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + qg(z) - Rg(z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-28.d})$$

IV.7 Champ de température

L'analyse thermique est effectuée en imposant des températures constantes sur la surface supérieure (céramique) et inférieure (métallique) de la plaque. La variation de la température est supposée se produire seulement en suivant la direction de l'épaisseur. L'analyse thermique est conduite en résolvant l'équation de conduction de chaleur unidimensionnelle. L'équation de conduction de chaleur à l'état unidimensionnel stationnaire dans la direction z est donnée par:

$$-\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (\text{IV-29})$$

Avec comme conditions aux limites, $T(h/2) = T_t$ et $T(-h/2) = T_b = T_0$ et $\Delta T = (T_t - T_b)$. Ici, un état sans contrainte est supposé exister à $T_0 = 300$ K. La solution analytique de l'équation est :

$$T(z) = T_b - (T_t - T_b) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k(z)} dz} \quad (\text{IV-30})$$

Dans le cas d'une plaque P-FGM, la solution de l'équation (IV-29) peut-être exprimées au moyen d'une série polynomiale :

$$T(z) = T_b + \frac{(T_t - T_b)}{C_{ib}} \left[\begin{aligned} &\left(\frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{k_{ib}}{(p+1)k_b} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{p+1} + \frac{k_{ib}^2}{(2p+1)k_b^2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{2p+1} \\ &- \frac{k_{ib}^3}{(3p+1)k_b^3} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{3p+1} + \frac{k_{ib}^4}{(4p+1)k_b^4} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{4p+1} - \frac{k_{ib}^5}{(5p+1)k_b^5} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{5p+1} \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-31})$$

Avec :

$$C_{ib} = \left[1 - \frac{k_{ib}}{(p+1)k_b} + \frac{k_{ib}^2}{(2p+1)k_b^2} - \frac{k_{ib}^3}{(3p+1)k_b^3} + \frac{k_{ib}^4}{(4p+1)k_b^4} - \frac{k_{ib}^5}{(5p+1)k_b^5} \right] \quad (\text{IV-32})$$

Où : $k_{ib} = k_t - k_b$, avec k_t et k_b sont respectivement la conductivité thermique des faces supérieure et inférieure de la plaque.

IV.8 Solution analytique pour une plaque FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appui utilisé, cette partie concerne la détermination de la solution exacte des équations (IV-28.a-d) pour une plaque FGM simplement appuyée sur les quatre côtés. Pour ce cas, les conditions aux limites pour la présente théorie s'écrivent :

$$v_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \varphi = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{at } x=0,a \quad (\text{IV-33.a})$$

$$u_0 = w_0 = \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \varphi = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{at } y=0,b \quad (\text{IV-33.b})$$

En employant la solution de Navier, la solution des variables de déplacement u_0 , v_0 , w_0 et θ satisfaisant les conditions aux limites ci-dessus peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{cases} = \begin{cases} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \quad (\text{IV-34})$$

Où : U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et X_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, α et β sont exprimés comme suit : $\alpha = m\pi / a$, $\beta = n\pi / b$.

La charge transversale q est également développée en série des sinus de Fourier de la manière suivante:

$$q(x, y) = q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{IV-36})$$

En introduisant les équations (IV-34) et (IV-36) dans l'équation (IV-28), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-37})$$

Avec :

$$a_{11} = (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)$$

$$a_{12} = \alpha \beta (A_{12} + A_{66})$$

$$a_{13} = -\alpha (B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\beta^2)$$

$$a_{14} = \alpha (B_{11}^s k_1) + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha\beta^2 - L\alpha$$

$$a_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}$$

$$a_{23} = -\beta (B_{22}\beta^2 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2)$$

$$a_{24} = \beta B_{22}^s k_2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2\beta - L\beta$$

(IV-38)

$$a_{33} = \alpha^2 (D_{11}\alpha^2 + (2D_{12} + 4D_{66})\beta^2) + D_{22}\beta^4 + \bar{K} + \bar{G}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$a_{34} = -D_{11}^s k_1 \alpha^2 - D_{12}^s (\alpha^2 k_2 + \beta^2 k_1) - D_{22}^s k_2 \beta^2 + 2D_{66}^s (A' k_1 + B' k_2) \beta^2 \alpha^2 \\ + L_a (\beta^2 + \alpha^2) + g(z)\bar{K} + g(z)\bar{G}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$a_{44} = H_{11}^s k_1^2 + 2k_1 k_2 (H_{12}^s + 2H_{66}^s) + H_{22}^s k_2^2 + \beta^2 (B^2 F_{44}^s k_2^2 - B X_{44}^s k_2)$$

$$+ \alpha^2 (A^2 F_{44}^s k_1^2 - A X_{44}^s k_1) + \beta^2 (-B X_{44}^s k_2 + A_{44}^s) + \alpha^2 (X_{44}^s + A_{44}^s)$$

$$- 2(k_1 + k_2)R + Ra + g^2(z)\bar{K} + g(z)^2\bar{G}(\alpha^2 + \beta^2)$$

IV.9 Conclusion

Dans ce chapitre est présenté le développement d'une solution générale du comportement thermomécanique à la flexion des plaques en matériaux fonctionnellement gradués reposant sur une fondation élastique variable en utilisant une nouvelle théorie quasi 3-D. En plus de réduire le nombre d'inconnus à quatre, cette théorie prend en considération la déformation du cisaillement et les effets d'étirement de l'épaisseur de la plaque sans l'introduction d'un facteurs de correction de cisaillement et assure une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de nullité de ces dernières sur les bords libres.

CHAPITRE V

Résultats et Discussions

V.1 Introduction

Après développement théorique du problème de la flexion thermomécanique des plaques FGM reposant sur une fondation élastique variable avec propriétés dépendantes de la température. Cette partie est réservée à la présentation des résultats de cette analyse et validation de la théorie développée dans cette étude. La validation de ce modèle est faite par l'intermédiaire de comparaisons avec d'autres modèles issus de la littérature.

V.2 Résultats et discussions

Dans cette section sont présentés les résultats de l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques FGM. Ces résultats sont obtenus en utilisant une théorie de déformation de cisaillement type quasi-3D avec prise en considération de l'influence de l'effet d'étirement de l'épaisseur. Cette section sera divisée en trois parties : validation des résultats, étude paramétrique et effet des modèles micromécaniques sur la réponse des plaques FGM reposant sur une fondation élastique variable. La plaque FGM étudiée est fabriquée à partir d'un alliage de Titanium (Ti-6Al-4V) et zirconium (ZrO₂). Les propriétés dépendantes de la température telle que le module de Young, le coefficient d'expansion thermique ainsi que la conductivité thermique sont présentées dans le Tableau V-1, tandis que le coefficient de poisson est supposé constant et égale à 0.3.

Tableau V. 1 : Propriétés matérielles des matériaux utilisées dans la plaque FGM.

	P₀	P₋₁	P₁	P₂	P₃
ZrO₂ (Céramique)					
E	244.27 e+9	0	-1371 e-03	1214 e-06	-3681e-10
α	12.766 e-06	0	-1491 e-03	1006 e-05	-6778e-11
ρ	3000	0	1133 e-04	0	0
k	1.8	0	0	0	0
v	0.3	0	0	0	0
Ti-4V-6Al (Métallique)					
E	122.56e+9	0	4.586e-4	0	0
α	7.5788e-6	0	6.638e-4	-3.147e-6	0
ρ	4429	0	0	0	0
k	7.82	0	0	0	0
v	0.3	0	0	0	0

Les expressions adimensionnelles sont utilisées dans la présente analyse :

$$\overline{w} = \frac{100h}{q_0 a^2} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad \overline{\sigma}_x = -\frac{10h^2}{q_0 a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad \overline{\tau}_{xz} = -\frac{10hb}{q_0 a^2} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$$

$$\overline{\tau}_{xy} = -\frac{100h^2 b}{q_0 a^3} \tau_{xy}\left(0, 0, -\frac{h}{2}\right), \quad \overline{\tau}_{yz} = -\frac{10h}{q_0 a} \tau_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right), \quad J_2 = \frac{\overline{G} a^2}{h^3}$$

Il est à noter que sauf indication contraire le modèle de Voigt ainsi que les valeurs suivantes sont utilisés dans les différents calculs : $a/h=10$, $J_1=J_2=100$, $b/a=1$, $m=n=1$, $q_0=10^5$, $\xi=10$.

V.3 Validation des résultats

Afin de valider les résultats numériques obtenus et confirmer l'exactitude du modèle proposé lors du développement théorique des comparaisons sont faites avec les résultats obtenus par les études 2D de Attia et al. (2018) et Sobhy (2015).

Le tableau V.2 présente la déflexion centrale adimensionnelle en fonction de différents modes (m, n) pour les plaques FGM de type $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ reposant sur des fondations élastiques variables avec un module Winkler parabolique.

Tableau V. 2 : Déflexion centrale \bar{w} pour une plaque FGM carrée ou rectangulaire simplement appuyée et reposant sur une fondation élastique ($\Delta T=300$, $p=1$).

m	n	Théorie	Plaque carrée	Plaque rectangulaire (b/a=2)
1	1	SPT – Sobhy (2015) 2D	1.57312	3.11472
		Attia et al. (2018) 2D	1.58118	3.14664
		Présent Quasi 3D	1.58019	3.14943
	3	SPT - Sobhy (2015) 2D	-0.10770	-0.72382
		Attia et al. (2018) 2D	-0.10770	-0.72551
		Present Quasi 3D	-0.10578	-0.72290
2	1	SPT - Sobhy (2015) 2D	0.00000	0.00000
		Attia et al. (2018) 2D	0.00000	0.00000
		Présent Quasi 3D	0.00000	0.00000
	3	SPT - Sobhy (2015) 2D	0.00000	0.00000
		Attia et al. (2018) 2D	0.00000	0.00000
		Présent Quasi 3D	0.00000	0.00000
3	1	SPT - Sobhy (2015) 2D	-0.10765	-0.12701
		Attia et al. (2018) 2D	-0.10773	-0.12296
		Present Quasi 3D	-0.10578	-0.12091
	3	SPT - Sobhy (2015) 2D	0.04059	0.08825
		Attia et al. (2018) 2D	0.04060	0.08831
		Présent Quasi 3D	0.03936	0.08651
4	1	SPT - Sobhy (2015) 2D	0.00000	0.00000
		Attia et al. (2018) 2D	0.00000	0.00000
		Présent Quasi 3D	0.00000	0.00000
	3	SPT - Sobhy (2015) 2D	0.00000	0.00000
		Attia et al. (2018) 2D	0.00000	0.00000
		Présent Quasi 3D	0.00000	0.00000

Il ressort de ces résultats qu'il existe un bon accord entre les conclusions obtenues par le modèle proposé concernant la flexion thermomécanique des plaques FGM et celles d'Attia et al. (2018) et de Sobhy (2015) et ceci pour les deux cas de plaque rectangulaire et carrée.

Un autre exemple est exposé dans le tableau V.3 pour une plaque FGM, reposant ou non sur une fondation élastique pour différentes valeurs du rapport épaisseur-largeur (a/h). Les résultats de la déflexion centrale adimensionnelle pour la présente théorie sont comparés à ceux de Sobhy (2015) pour différentes théories de HSDT et ceux d'Attia et al. (2018). La comparaison démontre qu'il y a une concordance entre les différents modèles. La différence minimale qui existe est due au fait que la présente théorie est en 3D et que par sa nature, elle tient compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur dans sa formulation. En revanche, En plus d'être des théories en 2D cet effet est négligé dans les autres modèles (Attia et al.2018. Sobhy. 2015).

Tableau V. 3 : Déflexion centrale \bar{w} pour une plaque FGM carrée reposant ou non sur une fondation élastique ($\Delta T=300$, $p=1$).

J_1	J_2	Théorie	a/h						
			5	10	15	20	25	30	50
0	0	FPT - Sobhy (2015) 2D	0.72464	2.50034	5.45984	9.60314	14.93025	21.44115	59.32280
		HPT - Sobhy (2015) 2D	0.72413	2.50010	5.45965	9.60296	14.93007	21.44098	59.32257
		SPT - Sobhy (2015) 2D	0.72385	2.49988	5.45944	9.60276	14.92988	21.44079	59.32241
		Attia et al. (2018) 2D	0.72382	2.49972	5.45916	9.60237	14.92936	21.44014	59.32124
		Présent Quasi 3D	0.70872	2.48344	5.44116	9.58200	14.90590	21.41292	59.27192
10^3	0	FPT - Sobhy (2015) 2D	0.56180	2.00022	4.39367	7.74398	12.05137	17.31589	47.94570
		HPT - Sobhy (2015) 2D	0.56149	2.00006	4.39355	7.74386	12.05126	17.31578	47.94558
		SPT - Sobhy (2015) 2D	0.56132	1.99992	4.39367	7.74373	12.05113	17.31566	47.94544
		Attia et al. (2018) 2D	0.56130	1.99982	4.39323	7.74347	12.0508	17.31526	47.94468
		Présent Quasi 3D	0.55604	1.99318	4.38539	7.73404	12.03934	17.30132	47.91632
10^3	10^3	FPT - Sobhy (2015) 2D	0.10335	0.40422	0.90506	1.60613	2.50748	3.60913	10.01867
		HPT - Sobhy (2015) 2D	0.10334	0.40421	0.90505	1.60612	2.50748	3.60912	10.01865
		SPT - Sobhy (2015) 2D	0.10333	0.40421	0.90505	1.60612	2.50747	3.60912	10.01865
		Attia et al. (2018) 2D	0.10333	0.40420	0.90504	1.60612	2.50746	3.60910	10.01862
		Présent Quasi 3D	0.10586	0.40704	0.90793	1.60897	2.51026	3.61180	10.02070

Le tableau V.4 présente une autre comparaison des résultats de la formulation actuelle avec ceux de la littérature. La variation des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ en fonction du rapport a/h pour différentes configurations de la plaque FGM avec ou sans fondation élastique est exprimée. Il existe une bonne correspondance entre les résultats du modèle proposé et ceux de Sobhy (2015) (HPT et SPT) et Attia et al. (2018). L'infime différence qui existe pour les petites

valeurs du rapport a/h où la plaque est considérée comme épaisse peut s'expliquer par le fait que les théories HSDT négligent l'effet de l'éirement de l'épaisseur qui est pris en considération par la solution Quasi 3D actuelle.

Cette différence devient moins importante lorsque le rapport (a/h) augmente, c'est-à-dire lorsque l'on tend vers des plaques minces. En ce qui concerne la différence qui existe avec la SPT de Sobhy (2015), ce dernier nécessite un facteur de correction de cisaillement et la distribution des contraintes de cisaillement n'est pas aussi précise que les autres.

Tableau V. 4 : Contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ pour une plaque FGM carrée reposant ou non sur une fondation élastique ($\Delta T=300$, $p=1$, $\xi=0$).

J_1	J_2	Théorie	a/h						
			5	10	15	20	25	30	50
0	0	FPT - Sobhy (2015) 2D	1.91547	1.91547	1.91547	1.91547	1.91547	1.91547	1.91547
		HPT - Sobhy (2015) 2D	2.38438	2.38915	2.39004	2.39035	2.39049	2.39057	2.39069
		SPT - Sobhy (2015) 2D	2.45911	2.46518	2.46632	2.46671	2.46687	2.46700	2.46714
		Attia et al. (2018) 2D	2.45911	2.46517	2.46630	2.46669	2.46683	2.46698	2.46713
		Présent Quasi 3D	2.24585	2.40065	2.45867	2.48368	2.49631	2.50348	2.51432
10^3	0	FPT - Sobhy (2015) 2D	1.48501	1.53232	1.54142	1.54462	1.54612	1.54694	1.54811
		HPT - Sobhy (2015) 2D	1.84885	1.91131	1.92334	1.92758	1.92956	1.93062	1.93220
		SPT - Sobhy (2015) 2D	1.90696	1.97216	1.98473	1.98918	1.99122	1.99235	1.99399
		Attia et al. (2018) 2D	1.90698	1.97219	1.98474	1.98918	1.99124	1.99236	1.99398
		Présent Quasi 3D	1.76200	1.92674	1.98160	2.00469	2.01624	2.02278	2.03261
10^3	10^3	FPT - Sobhy (2015) 2D	0.27321	0.30969	0.31754	0.32037	0.32171	0.32243	0.32349
		HPT - Sobhy (2015) 2D	0.34029	0.38629	0.39624	0.39981	0.40149	0.40245	0.40379
		SPT - Sobhy (2015) 2D	0.35107	0.39860	0.40886	0.41257	0.41433	0.41525	0.41667
		Attia et al. (2018) 2D	0.35107	0.39862	0.40887	0.41258	0.41432	0.41527	0.41666
		Présent Quasi 3D	0.33545	0.39347	0.41026	0.41705	0.42039	0.42227	0.42507

Après comparaison faite avec différentes théories, il s'avère que la théorie proposée est appropriée, efficace et efficiente compte tenu de sa simplicité et du nombre réduit de variables pour l'étude du comportement thermomécanique des plaques FGM reposant sur fondations élastiques variables.

V.4 Étude paramétrique

Après confirmation de la validité de la théorie et de la formulation actuelles, certains résultats sont exposés pour indiquer les effets de l'indice matériel de la loi de puissance, fondation élastique, géométrie des plaques et du champ de température sur la flexion thermomécanique des plaques FGM. Les Figures V.1(a) et V. 1(b) montrent la variation de la

déflexion \bar{w} en fonction du rapport largeur/épaisseur (a/h) avec différentes valeurs de l'indice matériel p de la loi de puissance pour la plaque FGM reposant sur des fondations élastiques types paraboliques.

Deux aspects du problème sont traités, le premier l'application d'un chargement mécanique et le second étant l'application d'un chargement thermomécanique. Il est à noter que la déflexion augmente à mesure que le rapport (a/h) augmente quelle que soit la charge appliquée et le type de plaque (isotrope ou FGM). En outre, les valeurs des déflexions des plaques FGM sont comprises entre ceux des deux plaques isotropes (métalliques et céramiques. Figures V.1 (a-b)).

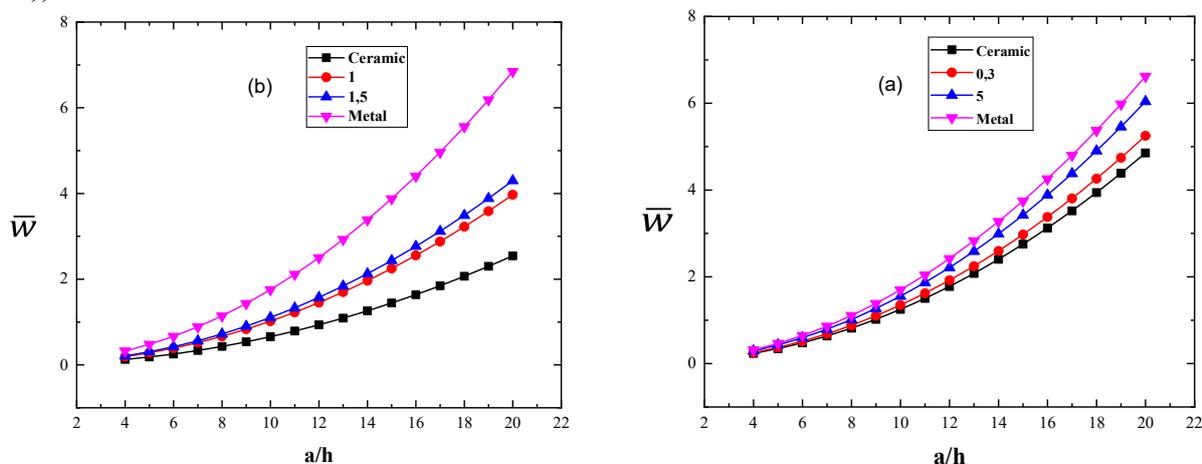


Figure V. 1 : Variation de la déflexion \bar{w} par rapport à (a/h) pour une plaque FGM en fonction de l'indice matériel p : (a) Chargement mécanique, (b) Chargement thermomécanique.

La variation de la distribution de la contrainte de cisailment transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique variable en fonction de l'indice matériel p est présentée par la figure V.2.

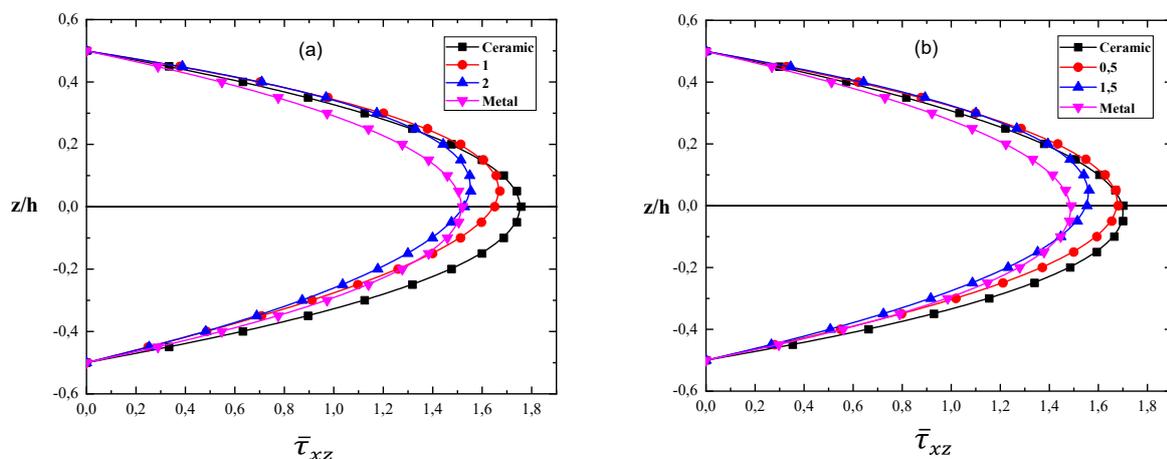


Figure V. 2 : Variation de la distribution de la contrainte de cisailment transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM en fonction de l'indice matériel p : (a) Chargement mécanique, (b) Chargement thermomécanique.

Les résultats indiquent que dans le cas de la plaque isotrope, le maximum de la contrainte de cisaillement apparaît au centre de la plaque. Par contre, ce qui n'est pas le cas pour les plaques FGM, cela est évident et s'explique par hétérogénéité de la plaque FGM. De plus, la valeur maximale de ces contraintes diminue avec l'augmentation de l'indice matériel p .

Les figures V.3 et V.4 montrent respectivement la variation de la déflexion \bar{w} et de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{yz}$ des plaques FGM sous charge thermomécanique au regard du rapport largeur/épaisseur (a/h) en fonction des trois cas du paramètre de Winkler (linéaire, parabolique et sinusoïdale). Les résultats révèlent que les contraintes de cisaillement sont plus influencées par le paramètre de Winkler par rapport aux déflexions.

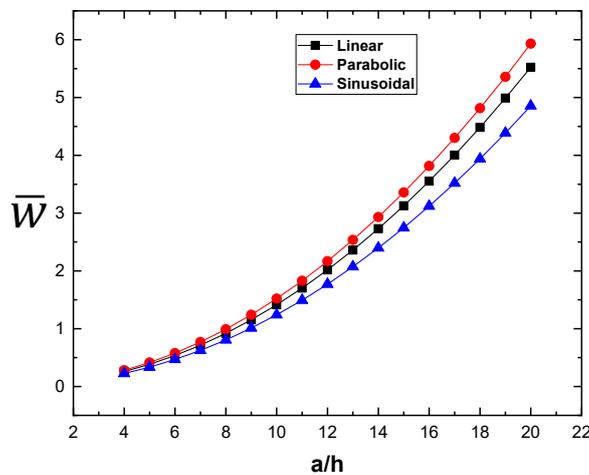


Figure V. 3 : Variation de la déflexion \bar{w} des plaques FGM sous charge thermomécanique par rapport à (a/h) en fonction du paramètre de Winkler ($p=1, \xi=20, \Delta T=300$).

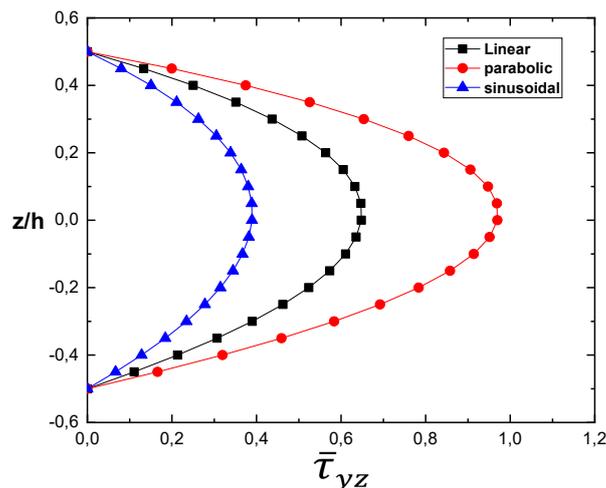


Figure V. 4 : Variation de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{yz}$ des plaques FGM sous charge thermomécanique par rapport à (a/h) en fonction du paramètre de Winkler ($p=1, \xi=20, \Delta T=300$).

La figure V.5 décrit la variation de la déflexion \bar{w} de la plaque sous charge thermomécanique en fonction du rapport Largeur-épaisseur (a/h) pour différentes valeurs du paramètre parabolique ξ .

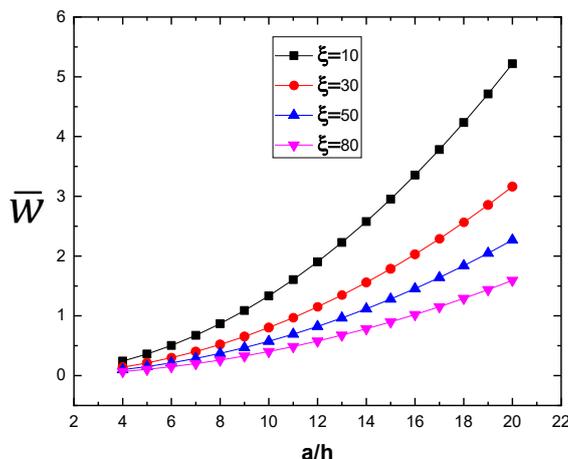


Figure V. 5 : Variation de la déflexion \bar{w} de la plaque sous charge thermomécanique en fonction du rapport (a/h) pour différentes valeurs du paramètre parabolique ξ ($p=1$, $J_1=1000$, $\Delta T=300$).

La figure indique que l'augmentation du paramètre ξ entraîne une réduction de la déflexion. Cela peut s'expliquer par le fait que l'accroissement de ce paramètre augmente la rigidité de la plaque et par conséquent limite la déformation.

V.5 Effet des modèles micromécaniques

La plupart des recherches dans la littérature utilisent le schéma micromécanique de Voigt pour la simulation multi-échelle du comportement mécanique des composants FGM. L'objectif de cette étude paramétrique est de discuter l'influence des modèles micromécaniques sur le comportement thermomécanique des plaques FGM reposant sur une fondation élastique variable. Sur la Figure V.6, sont présentées les variations de la déflexion de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique parabolique en fonction de l'indice matériel p pour différents modèles micromécaniques.

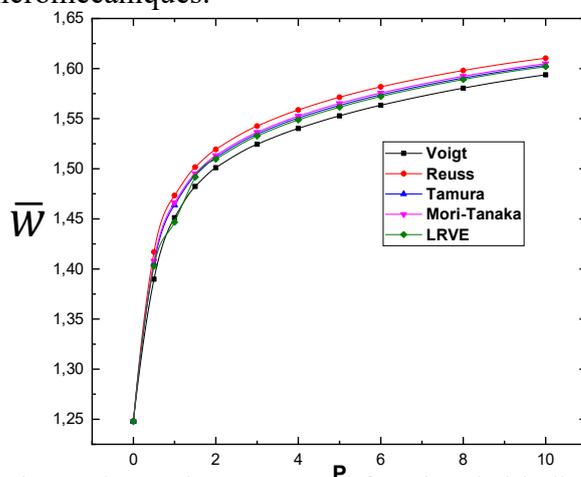


Figure V. 6 : Déflexion \bar{w} d'une plaque FGM en fonction de l'indice matériel p pour différents modèles micromécaniques reposant sur une fondation élastique parabolique ($\xi=10$, $J_1=J_2=100$, $\Delta T=0$).

Il ressort de la figure V.6 que l'augmentation de l'indice matériel p de la loi de puissance provoque une augmentation des valeurs de la déflexion. De plus, dans le cas d'une plaque isotrope ($p=0$) tous les modèles donnent la même valeur de déflexion. La différence entre modèles micromécaniques en matière de déflexion augmente imperceptiblement avec l'augmentation des valeurs de l'indice de puissance. Les plus grandes valeurs sont obtenues par le modèle de Reuss et les plus petites par Voigt, les modèles restants sont compris entre les deux. Cependant, la différence entre les différents modèles reste très faible.

La différence relative en pourcentage de la déflexion entre les modèles micromécaniques en fonction de l'indice matériel de la loi de puissance p est illustrée sur la figure V.7. L'écart entre déflexions des plaque FGM estimées par les modèles Voigt, Reuss et autres modèles micromécaniques n'est pas fortement dépendant de l'indice de puissance p . L'écart entre le modèle Voigt et d'autres modèles micromécaniques pour les valeurs estimées de la déflexion atteint un maximum de 2% entre Voigt et Reuss et il est de 1,3% entre Voigt et Mori-Tanaka. Alors qu'entre Voigt et le modèle Tamura l'écart ne dépasse pas 1,15 %.

La deuxième comparaison présentée dans cette figure est l'écart entre les valeurs de déflexion entre le modèle Reuss et d'autres modèles micromécaniques. La différence est insignifiante entre Reuss et Mori-Tanaka et a atteint un maximum de 1,8 % entre Reuss et LRVE. Il est à noter que ces différences entre les modèles micromécaniques sont obtenues pour une valeur de $p = 1$. Dépassant la valeur de $p = 2$, tous les modèles gardent une différence plus ou moins constante n'excédant pas 1 %.

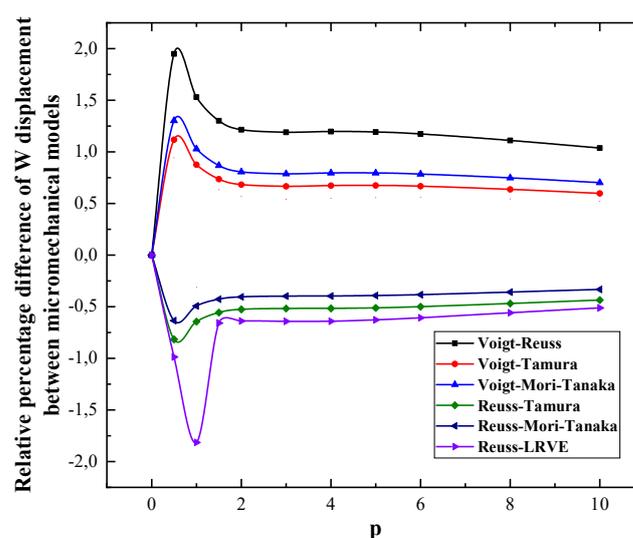


Figure V. 7 : Différence relative entre déflexions données par différents modèles micromécaniques.

La figure V.8 exprime la variation de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ pour différents modèles micromécaniques à travers l'épaisseur de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique parabolique. Les valeurs maximales des contraintes sont obtenues par le modèle Voigt et les valeurs minimales par le modèle LRVE. Les valeurs des autres modèles sont comprises entre les deux.

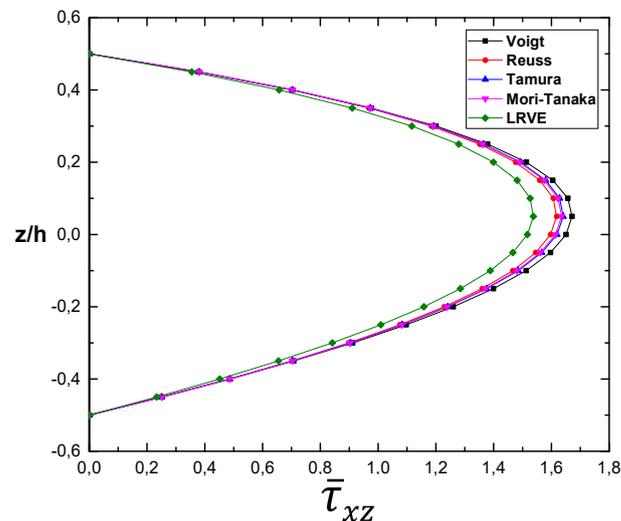


Figure V. 8 : Variation de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique parabolique en fonction de différents modèles micromécaniques ($p=1$, $\zeta=10$, $J_1=J_2=100$, $\Delta T=0$).

La figure V.9 trace la variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur pour différents modèles micromécaniques. Comme l'indique cette figure, tous les modèles micromécaniques donnent les mêmes valeurs de cette contrainte.

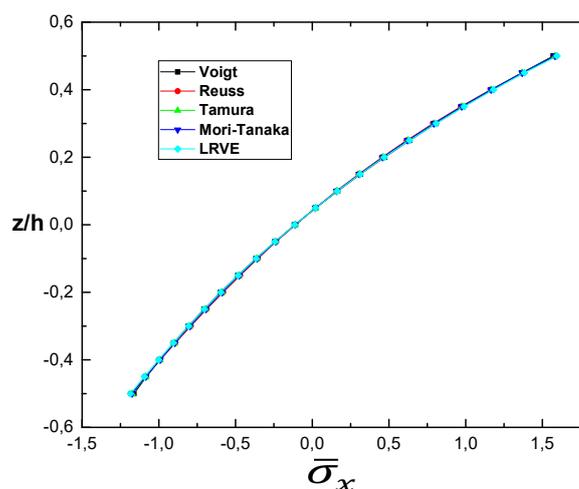


Figure V. 9 : Variation de la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique parabolique en fonction de différents modèles micromécaniques ($p=1$, $\zeta=10$, $J_1=J_2=100$, $\Delta T=0$)

Dans l'ensemble, il est clair que l'utilisation d'un modèle micromécanique ou d'un autre pour la détermination des propriétés effectives d'une plaque FGM reposant sur une fondation élastique variable soumise à un chargement thermomécanique n'affecte pas fortement la réponse de cette plaque en matière de déplacements et de contraintes.

V.6 Conclusion

Cette analyse avait pour objectif d'étudier le comportement des plaques FGM dont les propriétés sont dépendantes de la température reposant sur des fondations élastiques variables et exposées à des charges thermomécaniques, sur la base d'une théorie quasi 3D. Plusieurs modèles micromécaniques ont été utilisés pour obtenir les propriétés matérielles effectives de la plaque FGM. Les équations gouvernantes ont été résolues par la méthode de Navier pour l'analyse des plaques FGM simplement appuyées. La présente étude est comparée aux résultats numériques existants où un bon accord a été trouvé.

Une étude paramétrique détaillée est présentée pour mettre en évidence les effets de tous les paramètres influençant le comportement thermomécanique des plaques FGM reposant sur une fondation élastique. Il a également été constaté que la différence entre les modèles micromécaniques n'affecte pas la réponse en matière de déplacements et de contraintes.

D'autres travaux peuvent être réalisés à l'avenir en considérant d'autres types de matériaux et d'autres théories ayant un effet de déformation par cisaillement. (Salamat and Sedighi 2017, Panjehpour et al. 2018, Othman and Fekry 2018, Fenjan et al. 2019b, Bohlooly and Fard 2019, Hamad et al. 2019, Medani et al. 2019, Selmi 2019, Alimirzaei et al. 2019, Al-Maliki et al. 2019, Nikkhoo et al. 2019, Kossakowski and Uzarska 2019, Hussain et al. 2019 and 2020a, b, Semmah et al. 2019, Fládr et al. 2019, Bakhshi and Taheri-Behrooz 2019, Karami et al. 2019a, b, Al-Basyouni et al. 2020, Bellal et al. 2020, Ouakad et al. 2020, Ghadimi 2020, Ghannadpour and Mehrparvar 2020, Matouk et al. 2020, Taj et al. 2020, Bousahla et al. 2020, Asghar et al. 2020, Bourada et al. 2020, Timesli 2020, Lee et al. 2020, Shokrieh and Kondori 2020, Kar and Panda 2020).

CONCLUSION GENERALE

Les matériaux à gradient fonctionnel représentent une avancée importante dans le domaine technologique et scientifique et ceci grâce à leurs caractéristiques révolutionnaires qui apportent des solutions efficaces aux problèmes de l'industrie moderne et en tenant compte de la diversité de leurs applications, ils représentent un domaine en constante évolution et des axes de recherche variés et très vastes. Le développement théorique pour l'analyse des plaques constitue lui aussi l'un des axes de recherche les plus importants de la modélisation des solides et des structures car en plus des caractéristiques des matériaux FGM, il est indispensable de développer des théories adéquates permettant d'étudier les divers problèmes liés aux plaques en FGM avec une grande précision sous les différentes configurations géométriques, matérielles et chargements.

Ce travail s'est porté sur l'analyse du comportement thermomécanique des plaques FGM avec des propriétés dépendantes de la température reposant sur une fondation élastique variable par l'intermédiaire d'une théorie des plaques quasi-3D, ainsi que de traiter l'effet des modèles micromécaniques sur la réponse thermoélastique de ces plaques. En plus de prendre en considération la déformation du cisaillement et les effets d'étirement de l'épaisseur sans l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement, l'avantage du modèle quasi-3D employé est le nombre réduit de variables et d'équations gouvernantes par rapport aux théories quasi-3D conventionnelles. La solution du système d'équations a été déterminée en se basant sur la méthode de Navier pour les plaques FGM simplement appuyées. Une étude paramétrique a été entreprise afin de déterminer l'influence et les effets des différents paramètres sur la réponse thermomécanique des plaques FGM reposant sur une fondation élastique variable.

La validation de la théorie proposée est établie par comparaison de ses résultats avec d'autres théories de déformation de cisaillement issus de la littérature traitant du même sujet où une excellente adéquation et une très grande précision ont été observées. L'infime différence qui existe pour les petites valeurs du rapport a/h où la plaque est considérée comme épaisse peut s'expliquer par le fait que la solution 3D actuelle prend en compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur, alors qu'en plus de négliger cet effet les théories HSDT de référence sont développées en 2D.

Après traitement des résultats donnés par le modèle quasi 3D utilisé, les conclusions suivantes ont pu être tirées :

- ✓ La déflexion augmente avec l'accroissement du rapport a/h et cela pour les deux types de chargement (mécanique et thermomécanique).

- ✓ L'influence de la fondation élastique variable avec les différents paramètres de Winkler est plus visible sur les contraintes de cisaillement transversales que sur les déflexions. Cette observation est la même quel que soit le type de chargement (mécanique et thermomécanique).
- ✓ Les plus grandes valeurs des déflexions et des contraintes de cisaillement transversales sont obtenues par le paramètre parabolique de Winkler et les plus petites par le paramètre sinusoïdal de Winkler.
- ✓ L'accroissement du paramètre ξ entraîne la diminution de la déflexion.
- ✓ L'augmentation de l'indice matériel de la loi de puissance provoque l'augmentation de la déflexion, cette relation est observée pour tous les modèles micromécaniques.
- ✓ Les plus grandes déflexions sont obtenues par le modèle Reuss et les plus petites par le modèle Voigt. La différence relative entre les différents modèles et celui de Voigt est comprise dans un intervalle de [1.15% ÷ 2%], ces valeurs correspondent respectivement au modèle de Tamura et celui de Reuss.
- ✓ La variation des valeurs de déflexion des différents modèles micromécaniques n'est pas fortement dépendante de l'indice de puissance p . Dépassant la valeur de $p = 2$, tous les modèles gardent une différence plus ou moins constante n'excédant pas 1 %.
- ✓ Pour les contraintes de cisaillement transversales, les valeurs maximales sont obtenues par le modèle Voigt et les valeurs minimales par le modèle LRVE.
- ✓ Les modèles micromécaniques n'ont pas d'influence sur la contrainte normale.
- ✓ L'utilisation de modèles micromécaniques n'affecte pas fortement les résultats de l'analyse en matière de déplacements et de contraintes.

En perspective, il est prévu d'élargir ce travail en proposant de nouveaux champs de déplacements et de récents modèles micromécaniques, afin d'analyser le comportement des plaques FGM sous différentes sollicitations et différentes conditions d'appuis, sous la combinaison des différents types de chargement et dépendantes des conditions thermiques. Ainsi que d'entamer une procédure de simulation numérique par l'intermédiaire de logiciels performants dans le domaine de la structure telle que l'ABAQUS, dans le dessein de diversifier les outils de recherche et de validation des résultats.

Enfin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des matériaux composites à gradient fonctionnel et précisément leur comportement thermodynamique sous fondations élastiques variables.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

-A-

- Abualnour, M., Chikh, A., Hebali, H., Kaci, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2019), "Thermomechanical analysis of antisymmetric laminated reinforced composite plates using a new four variable trigonometric refined plate theory", *Comput. Concrete*, 24(6), 489-498.
- Achouri, F., Benyoucef, S., Bourada, F, Bachir Bouiadjra, R. and Tounsi, A. (2019), "Robust quasi 3D computational model for mechanical response of FG thick sandwich plate", *Struct. Eng. Mech.*, 70(5), 571-589.
- Ahmed, R.A., Fenjan, R.M. and Faleh, N.M. (2019), "Analyzing post-buckling behavior of continuously graded FG nanobeams with geometrical imperfections", *Geomech. Eng.*, 17(2), 175-180.
- Aihara (T.), Kaji (M.), Igarashi (T). (1990), "Numerical analysis of compositional distribution change in functionally gradient materials. *J. Jap. Inst. Met.*, 54, p. 758-764.
- Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A. (2010), "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.
- Akbarzadeh, A.H., Abedini, A. and Chen, Z.T. (2015), "Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 119, 598-609.
- Akbaş, Ş.D. (2019), "Hygro-thermal nonlinear analysis of a functionally graded beam", *J. Appl. Comput. Mech.*, 5(2), 477-485.
- Al-Basyouni, K.S., Ghandourah, E., Mostafa, H.M. and Algarni, A. (2020), "Effect of the rotation on the thermal stress wave propagation in non-homogeneous viscoelastic body", *Geomech. Eng.*, 21(1), 1-9.
- Alimirzaei, S., Mohammadimehr, M. and Tounsi, A. (2019), "Nonlinear analysis of viscoelastic micro-composite beam with geometrical imperfection using FEM: MSGT electro-magneto-elastic bending, buckling and vibration solutions", *Struct. Eng. Mech.*, 71(5), 485-502.
- Al-Maliki, A.F., Faleh, N.M. and Alasadi, A.A. (2019), "Finite element formulation and vibration of nonlocal refined metal foam beams with symmetric and non-symmetric porosities", *Struct. Monit. Maint.*, 6(2), 147-159.
- Al-Maliki, A.F.H., Ahmed, R.A., Moustafa, N.M. and Faleh, N.M. (2020), "Finite element based modeling and thermal dynamic analysis of functionally graded graphene reinforced beams", *Adv. Comput. Des.*, 5(2), 177-193.

Almitani, K.H. (2018), "Buckling behaviors of symmetric and antisymmetric functionally graded beams", *J. Appl. Comput. Mech.*, 4(2), 115-124.

Amini MH, Soleimani M, Rastgoo A. (2009), "Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation". *Smart Mater Struct*; 18(8):085015.

Asghar, S., Naeem, M.N., Hussain, M., Taj, M. and Tounsi, A. (2020), "Prediction and assessment of nonlocal natural frequencies of DWCNTs: Vibration analysis", *Comput. Concrete*, 25(2), 133-144.

Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R and Alwabli, S. (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundation", *Struct. Eng. Mech.*, 65(4), 453-464.

Aydogdu, M. (2009), "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, 94-101.

-B-

Bachir Bouiadjra, R., Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Bernard, F., (2018), "Analytical investigation of bending response of FGM plate using a new quasi 3D shear deformation theory: Effect of the micromechanical models", *Struct. Eng. Mech.*, 66(3), 317-328.

Bakhshi, N. and Taheri-Behrooz, F. (2019), "Length effect on the stress concentration factor of a perforated orthotropic composite plate under in-plane loading", *Compos. Mater. Eng.*, 1(1), 71-90.

Balubaid, M., Tounsi, A., Dakhel, B. and Mahmoud, S.R. (2019), "Free vibration investigation of FG nanoscale plate using nonlocal two variables integral refined plate theory", *Comput. Concrete*, 24(6), 579-586.

Bao, G, Wang, L. (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int J Solids Struct*, 32(19), 2853 – 2871.

Batou, B., Nebab, M., Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bouremana, M. (2019), "Wave dispersion properties in imperfect sigmoid plates using various HSDTs", *Steel Compos. Struct.*, 33(5), 699-716.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos.: Part B*, 60, 274-283.

- Belbachir, N., Bourada, M., Draiche, K., Tounsi, A., Bourada, F., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2020), "Thermal flexural analysis of anti-symmetric cross-ply laminated plates using a four variable refined theory", *Smart Struct. Syst.*, 25(4), 409-422.
- Belbachir, N., Draich, K., Bousahla, A.A., Bourada, M., Tounsi, A. and Mohammadimehr, M. (2019), "Bending analysis of anti-symmetric cross-ply laminated plates under nonlinear thermal and mechanical loadings", *Steel Compos. Struct.*, 33(1), 81-92.
- Bellal, M., Hebali, H., Heireche, H., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Bourada, F., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2020), "Buckling behavior of a single-layered graphene sheet resting on viscoelastic medium via nonlocal four-unknown integral model", *Steel Compos. Struct.*, 34(5), 643-655.
- Belkhodja Y. Ouinas D. Zaoui F, Z. and Fekirini F. (2020), "An exponential-trigonometric higherorder shear deformation theory(HSDT) for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates", *Advanced Composites Letters*. 29, 1-19.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 23(4), 423-431.
- Berghouti, H., Adda Bedia, E.A., Benkhedda, A. and Tounsi, A. (2019), "Vibration analysis of nonlocal porous nanobeams made of functionally graded material", *Adv. Nano Res.*, 7(5), 351-364.
- Bernoulli, J., Jr. (1789) "Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies et libers", *Nova Acta Acad Petropolit*, vol. 5, pp. 197–219.
- Bessaim, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A., Kaci, A., Tounsi, A., and Adda Bedia, E.A. (2018), "Buckling analysis of embedded nanosize FG beams based on a refined hyperbolic shear deformation theory", *J. Appl. Comput. Mech.*, 4(3), 140-146.
- Bohlooly, M., Fard, K.M. (2019), "Buckling and postbuckling of concentrically stiffened piezo-composite plates on elastic foundations", *J. Appl. Comput. Mech.*, 5(1), 128-140.
- Boukhelif, Z., Bouremana, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Tounsi, A. and Al-Osta, M.A. (2019), "A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation", *Steel Compos. Struct.*, 31(5), 503-516.
- Boulefrakh, L., Hebali, H., Chikh, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2019), "The effect of parameters of visco-Pasternak foundation on the bending and vibration properties of a thick FG plate", *Geomech. Eng.*, 18(2), 161-178.

Bourada, F., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou, K.H. and Tounsi, A. (2020), “Stability and dynamic analyses of SW-CNT reinforced concrete beam resting on elastic-foundation”, *Comput. Concrete*, In Press.

Bousahla, A.A., Bourada, F., Mahmoud, S.R., Tounsi, A., Algarni, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2020), “Buckling and dynamic behavior of the simply supported CNT-RC beams using an integral-first shear deformation theory”, *Comput. Concrete*, 25(2), 155-166.

Boussoula, A., Boucham, B., Bourada, M., Bourada, F., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2020), “A simple nth-order shear deformation theory for thermomechanical bending analysis of different configurations of FG sandwich plates”, *Smart Struct. Syst.*, 25(2), 197-218.

Boutaleb, S., Benrahou, K.H., Bakora, A., Algarni, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2019), “Dynamic Analysis of nanosize FG rectangular plates based on simple nonlocal quasi 3D HSDT”, *Adv. Nano Res.*, 7(3), 191-208.

Bryan, G.N. (1981) “On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane”, *Proc London Math Soc*, 22, 54–67.

Bubnov, I.G.(1914) “Theory of Structures of Ships”, vol. 2, St . Petersburg.

-C-

Carrera E, (2001), “Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner’s Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells”, *Appl. Mech. Revs.* 54, 301-329.

Carrera E, (2003), “Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking”, *Arch. Comp. Meth. Eng.* 10, 215-296.

Carrera E, A. (2005), Ciuffreda. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems”. *Compos. Struct.* 69, 271-293.

Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M. (2011a), “Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells”. *Comp. Part B: Eng* 42, 123-133.

Carrera E, Brischetto S, Nali P. (2011b), “Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis”, Wiley, New York, USA.

Cauchy, A.L. (1828), “Sur l’équilibre le mouvement d’une plaque solide, *Exercices Math*”, vol. 3, p. 328 .

- Chaabane, L.A., Bourada, F., Sekkal, M., Zerouati, S., Zaoui, F.Z., Tounsi, A., Derras, A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2019), “Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation”, *Struct. Eng. Mech.*, 71(2), 185-196.
- Cherradi (N.), Kawasaki (A.), Gasik (M.). (1994), “Worldwide trends in functional gradient materials research and development”. *Composites Engineering*, 4, n° 8 , p. 883-894.
- Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), “Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”, *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- Chikr, S.C., Kaci, A., Bousahla, A.A., Bourada, F., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou, S.R. and Tounsi, A. (2020), “A novel four-unknown integral model for buckling response of FG sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions using Galerkin’s approach”, *Geomech. Eng.*, 21(5), 471-487.
- Chladni, E.F. (1802), *Die Akustik*, Leipzig, .
- Clebsch, A. (1883), “*Theorie de l’Elasticite des Corps Solids, Avec des Notes Entendues de Saint Venant*”, Dunod, Paris, pp. 687–706.
- Cong, P.H., An, P.T.N. and Duc, N.D. (2015), “Nonlinear stability of shear deformable eccentrically stiffened functionally graded plates on elastic foundations with temperature-dependent properties”, *Sci. Eng. Compos. Mater.*, 24(3), 1-15.
- Cong, P.H., Anh, V.M. and Duc, N.D. (2017), “Nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened FGM plate using Reddy’s TSDT in thermal environment”, *J. Therm. Stresses*, 40(6), 704-732.
- Cox, H.L. (1933), “Buckling of Thin Plates in Compression”, *Rep. and Memor.*, No. 1553,1554.
- Cugnoni.J (2004) ,” Identification par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites.” Thèse de doctorat de l’école polytechnique fédérale de Lausanne.

-D-

- Delale, F, Erdogan, F. (1983), "The crack problem for a nonhomogeneous plane", *ASME J Appl Mech*, 50, 609 – 614.
- Demasi L. (2009a), “ Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations. *Compos. Struct.* 87, 1-11.

- Daikh, A. (2019), "Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation". *Mater. Res. Express* 6 065702.
- Demasi L. (2009B), "Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories". *Compos. Struct.* 87, 183-194.
- Demasi L. (2009C), "Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: Zig-zag theories". *Compos. Struct.* 87, 195-205.
- Demasi L. (2009D), "Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results". *Compos. Struct.* 88, 1-16.
- Demasi L. (2009E), "Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part II: Layerwise theories". *Compos. Struct.* 87, 12-22.
- Den Hartog, J.P. (1958), "Mechanical Vibrations", 4th edn, McGraw-Hill, New York.
- Dinnik, A.N., A. (1911), "stability of compressed circular plate", *Izv Kiev Polyt In-ta*, (in Russian).
- Draiche, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Alwabli, A.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2019), "Static analysis of laminated reinforced composite plates using a simple first-order shear deformation theory", *Comput. Concrete*, 24(4), 369-378.
- Dutta SC, Roy R. A. (2002), "critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system". *Computers & structures*. 2002. 80(20-21). 1579.

-E-

- El Meiche, N, Tounsi, A, Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A., "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, 237– 247, 2011.
- Esmacili, M. and Beni, Y.T. (2019), "Vibration and buckling analysis of functionally graded flexoelectric smart beam", *J. Appl. Comput. Mech.*, 5(5), 900-917.
- Euler, L. (1766), "De motu vibratorio tympanorum", *Novi Commentari Acad Petropolit*, vol. 10, pp. 243–260.

-F-

- Faleh, N.M., Ahmed, R.A. and Fenjan, R.M. (2018), "On vibrations of porous FG nanoshells", *Int. J. Eng. Sci.*, 133, 1-14.

Fenjan, R.M., Ahmed R.A. and Faleh, N.M. (2019a), “Investigating dynamic stability of metal foam nanoplates under periodic in-plane loads via a three-unknown plate theory”, *Adv. Aircraft Spacecraft Sci.*, 6(4), 297-314.

Fenjan, R.M., Ahmed, R.A., Alasadi, A.A. and Faleh, N.M. (2019a), “Nonlocal strain gradient thermal vibration analysis of double-coupled metal foam plate system with uniform and non-uniform porosities”, *Coupled Syst. Mech.*, 8(3), 247-257.

Fládr, J., Bílý, P. and Broukalová, I. (2019), “Evaluation of steel fiber distribution in concrete by computer aided image analysis”, *Compos. Mater. Eng.*, 1(1),49-70.

Foppl, A. (1944, 1951), “Vorlesungen uber technische Mechanik, vols 1 and 2” , 14th and 15th edns, Verlag R., Oldenburg, Munich.

-G-

Gafour, Y., Hamidi, A., Benahmed, A., Zidour, M. and Bensattalah, T. (2020), “Porosity-dependent free vibration analysis of FG nano beam using non-local shear deformation and energy principle”, *Adv. Nano Res.*, 8(1), 49-58.

Gasik, M. (1995), “Scand. Ch226”, *Acta Polytech.*, 72.

Ghadimi, M.G. (2020), “Buckling of non-sway Euler composite frame with semi-rigid connection”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 13-24.

Germain, S. (1826), “Remarques sur la nature, les bornes et l’etendue de la question des surfaces elastiques et equation general de ces surfaces”, Paris.

Ghannadpour, S.A.M. and Mehrparvar, M. (2020), “Modeling and evaluation of rectangular hole effect on nonlinear behavior of imperfect composite plates by an effective simulation technique”, *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 25-41.

-H-

H. Okamura. (1991), “State of the arte of material design projects for severe service applications”, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9.

Hamad, L.B., Khalaf, B.S. and Faleh, N.M. (2019), “Analysis of static and dynamic characteristics of strain gradient shell structures made of porous nano-crystalline materials”, *Adv. Mater. Res.*, 8(3),179.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.

- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015) “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- Hartmann, F., *Knickung, Kippung, Beulung*, Springer-Verlag, Berlin, 1933.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *J. Eng. Mech., ASCE*, 140(2), 374- 383.
- Hellal, H., Bourada, M., Hebali, H., Bourada, F., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2019), “Dynamic and stability analysis of functionally graded material sandwich plates in hygro-thermal environment using a simple higher shear deformation theory”, *J. Sandw. Struct. Mater.*
- Hencky, H. (1921), “Der spanngszustand in rechteckigen platten (Diss.)”, *Z Andew Math und Mech*, vol. 1.
- Hildebrand F.B., E. Reissner., G.G. Thomas. (1949), “Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells”. NACA T. N. N°:1833.
- Hill R. (1965), “A self-consistent mechanics of composite materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13, 213–222.
- Huang Z.Y, C.F. Lu, W.Q. Chen. (2008), “Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations”, *Compos. Struct.* 85 (95), 104.
- Huber, M.T. (1929), “Probleme der Static Techish Wichtiger Orthotroper Platten”, Warsawa.
- Hussain, M., Naeem, M.N., Khan, M.S. and Tounsi, A. (2020b), “Computer-aided approach for modelling of FG cylindrical shell sandwich with ring supports”, *Comput. Concrete*, 25(5), 411-425.
- Hussain, M., Naeem, M.N., Taj, M. and Tounsi, A. (2020a), “Simulating vibrations of vibration of single-walled carbon nanotube using Rayleigh-Ritz’s method”, *Adv. Nano Res.*, 8(3), 215-228.
- Hussain, M., Naeem, M.N., Tounsi, A. and Taj, M. (2019), “Nonlocal effect on the vibration of armchair and zigzag SWCNTs with bending rigidity”, *Adv. Nano Res.*, 7(6), 431-442.

-I-

- Igari (T), Notomi (A.), Tsunoda (H.), Hida (K.), Kotoh (T), Kunishima (S.). (1990), “Material properties of functionally gradient material for fast breeder reactor”. *Proc. of FGM’90*, Ed. M. Yamanouchi et al., FGM Forum, Japan, p. 209-213.

Ilschner (B.), Delfosse (D.). (1989), “Synthesis of multiphase powder systems with a composition gradient”. *Solid State Phenomena*, 8-9, p. 61-70.

Ilschner (B.). - Structural and compositional gradients: basic idea, preparation, applications. *Proc. of Euro Materials 1994*, Paris, p. 763-772.

-J-

Jaesang, Y. and Addis, K. (2014), “Modeling functionally graded materials containing multiple heterogeneities”, *Acta Mech.*, 225(7), 1931-1943.

Jha D.K., Kant T., Singh R.K., (2013), “A critical review of recent research on functionally graded plates”, *Compos. Struct.* 96, 833–849.

Jin. Z. H, Batra. R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339.

Jüngling (T), Brombach (J.), Kieback (B.). (1995), “Ceramlc/metal functional gradient materials by sedimentation”. *Proc FGM’94*, Ed. B. Ilschner and N. Cherradi, PPUR, Switzerland, p. 161-166.

-K-

Kaddari, M., Kaci, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Bourada, F., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Al-Osta, M.A. (2020), “A study on the structural behaviour of functionally graded porous plates on elastic foundation using a new quasi-3D model: Bending and Free vibration analysis”, *Comput. Concrete*, 25(1), 37-57.

Kar, V.R. and Panda, S.K. (2016), “Nonlinear thermomechanical deformation behaviour of P-FGM shallow spherical shell panel”, *Chin. J. Aeronaut.*, 29(1), 173-183.

Kar, V.R. and Panda, S.K. (2020), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel Compos. Struct.*, 18(3), 693-709.

Karama M., K.S. Afaq., S. Mistou. (2003), “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.

Karami, B., Janghorban, M and Tounsi, A. (2019b), “On pre-stressed functionally graded anisotropic nanoshell in magnetic field”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 41, 495.

Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2019a), “Galerkin’s approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions”, *Eng. Comput.*, 35, 1297-1316.

- Karman, Th., Sechler, E.E. and Donnel, L.H. (1952), “The strength of thin plates in compression, *Trans ASME*, 54, 53–57.
- Kawasaki (A.), Watanabe (R.). (1990), “Fabrication of sintered functionally gradient materials by powder spray forming process”. *Proc. of FGM’90*, Ed. M. Yamanouchi et al., FGM Forum, Japan, p. 197-202.
- Khiloun, M., Bousahla, A.A., Kaci, A., Bessaim, A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2019), “Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT”, *Eng. Comput.*, 1-15.
- Kieback B., Neubrand A., Riedel H. (2003), “Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106.
- Kirchhoff, G.R. (1850), “Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe”, *J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51–88.
- Koizumi, (1992), “Recent Progress of functionally graded materials in Japan”. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347.
- Koizumi. M, (1997), “FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry”. Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan.
- Kolahchi, R., Safaria, M. and Esmailpour, M. (2016), “Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium”, *Compos. Struct.*, 150, 255-265.
- Kosakowski, P.G. and Uzarska, I. (2019), “Numerical modeling of an orthotropic RC slab band system using the Barcelona model”, *Adv. Comput. Des.*, 4(3), 211-221.
- Krylov, A.N. (1898), “On stresses experienced by a ship in a sea way, *Trans Inst Naval Architects*, vol. 40, London, pp. 197–209.

-L-

- Lagrange, J.L., *Ann Chim*, vol. 39, pp. 149–207 (1828).
- Lal, A., Jagtap, K.R. and Singh, B.N. (2017), “Thermo-mechanically induced finite element based nonlinear static response of elastically supported functionally graded plate with random system properties”, *Adv. Comput. Des.*, 2(3), 165-194.
- Lee, N.J., Lai, G.S., Lau, W.J. and Ismail, A.F. (2020), “Effect of poly(ethylene glycol) on the properties of mixed matrix membranes for improved filtration of highly concentrated oily solution”, *Compos. Mater. Eng.* 2(1), 43-51.
- Levy, S., “Bending of Rectangular Plates with Large Deflections, NACA, Rep. No.737, 1942.
-

Li, D., Deng, Z. and Xiao, H. (2016), "Thermomechanical bending analysis of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Compos. B Eng.*, 106, 107-119.

Li, D., Deng, Z., Chen, G., Xiao, H. and Zhu, L. (2017), "Thermomechanical bending analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded core", *Compos Struct.*, 169, 29-41.

-M-

Makino (A.), Araki (N.), Ishiguro (T.). (1993), "Transient temperature response in FGM for step-or pulsewise heating". *Proc. of FGM'92, Ceramic Transaction, Vol 34, Ed. B. Holt and M. Koizumi, The American Ceramic Society, USA, p. 305- 312.*

Malekzadeh P. (2009), "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations". *Compos Struct*; 89(3):367–73.

Mantari J.L., C. Guedes Soares. (2012), "Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates". *Compos. Struct.* 94, 2561- 2575.

Mantari JL, Granados EV, Hinostroza MA, Guedes Soares C. (2014), "Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT". *Compos Struct*; 118:455–71.

Marguerre, K. (1937), "Die mittragende briete des gedru"ckten plattenstreifens", *Luftfahrtforschung*, 14, No. 3.

Matouk, H., Bousahla, A.A., Heireche, H., Bourada, F., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. and Benrahou, K.H. (2020), "Investigation on hygro-thermal vibration of P-FG and symmetric S-FG nanobeam using integral

Matsunaga H. (2009), "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2 D higher-order deformation theory". *Compos Struct*; 90 (1): 76–86.

Medani, M., Benahmed, A., Zidour, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2019), "Static and dynamic behavior of (FG-CNT) reinforced porous sandwich plate using energy principle", *Steel Compos. Struct.*, 32(5), 595-610.

Mindlin RD. (1951), "Influence de l'inertie rotative et du cisaillement sur les mouvements de flexion des plaques élastiques isotropes". *J. Appl. Mech.*, 18, 31-8.

Mirza (S.), Richardson (J.F.). (1979), "Sedimentation of suspensions of particles of two or more sizes". *Chem. Eng. Sci.*, 34, p. 447-454.

Mishnaevsky, J.L. (2007), *Computational Mesomechanics of Composites*, John Wiley & Sons, U.K. Mori, T. and Tanaka, K. (1973), “Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions”, *Acta Metall.*, 21(5), 571-574.

Mori T. and Tanaka K. (1973), “Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions”, *Acta Metallurgica*, 2, 1571–574.

-N-

Naghdi P.M. (1957), “on the theory of thin elastic shells”. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.

Navier, C.L.M.H. (1823), “Bulletin des Sciences de la Societe Philomathique de Paris”.

Nemati, A.R. and Mahmoodabadi, M.J. (2019), “Effect of micromechanical models on stability of functionally graded conical panels resting on Winkler-Pasternak foundation in various thermal environments”, *Arch. Appl. Mech.*, 1-33.

Nguyen .T. K , Sab K, G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.

Nguyen, V-H., Nguyen, T-K., Thai, H-T., Vo, T.P. (2014). “A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates”, *Composites: Part B* (2014).

Nguyen, D.D., Cong, P.H. and Quang, V.D. (2016), thermal stability of eccentrically stiffened FGM plate on elastic foundation based on Reddy’s third-order shear deformation plate theory”, *J. Therm. Stresses*, 39(7), 772-794.

Nguyen, D.D., Nguyen, D.K. and Hoang, T.T. (2018) “Nonlinear thermo-mechanical response of eccentrically stiffened Sigmoid FGM circular cylindrical shells subjected to compressive and uniform radial loads using the Reddy’s third-order shear deformation shell theory”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 25(13), 1156-1167.

Nikkhoo, A., Asili, S., Sadigh, S., Hajirasouliha, I. and Karegar, H. (2019), “A low computational cost method for vibration analysis of rectangular plates subjected to moving sprung masses”, *Adv. Comput. Des.*, 4(3), 307-326.

-O-

Othman, M. and Fekry, M. (2018), “Effect of rotation and gravity on generalized thermo-viscoelastic medium with voids”, *Multidisciplin. Model. Mater. Struct.*, 14(2), 322-338.

Ouakad, H.M., Sedighi, H.M. and Al-Qahtani, H.M. (2020), “Forward and backward whirling of a spinning nanotube nano-rotor assuming gyroscopic effects”, *Adv. Nano Res.*, 8(3), 245-254.

-P-

Panjehpour, M., Loh, E.W.K. and Deepak, T.J. (2018), “Structural Insulated Panels: State-of-the-Art”, *Trends Civ. Eng. Archit.*, 3(1) 336-340.

Panov, D.Yu. (1941), “On large deflections of circular plates, *Prikl Matem Mech*, vol. 5, No. 2, pp. 45–56, (in Russian).

Parida, S. and Mohanty, S.C. (2017), “Thermoelastic vibration analysis of functionally graded skew plate using nonlinear finite element method”, *J, Therm. Stresses*, 40(9), 1111-1133.

Ping, Z., Zhang, L.W. and Liew, K.M., (2014), “Geometrically nonlinear thermomechanical analysis of moderately thick functionally graded plates using a local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation”, *Compos. Struct.*, 107, 298-314.

Poisson, S.D. (1829), “Memoire sur l’equilibre et le mouvement des corps elastique, *Mem Acad Sci*, vol. 8, p. 357.

Portevin (A.). (1991), “Méthode générale du gradient dans les études ou recherches. *Mém. Et. Sci. Rev. Mét.*, 88, n° 7/8, p. 419-423.

Pradhan, S.C. and Murmu, T. (2009), “Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method”, *J. Sound Vib.*, 321, 342-362.

-R-

Rahmani, M.C., Kaci, A., Bousahla, A.A., Bourada, F., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou, K.H. and Tounsi, A. (2020), “Influence of boundary conditions on the bending and free vibration behavior of FGM sandwich plates using a four-unknown refined integral plate theory”, *Comput. Concrete*, 25(3), 225-244.

Ramirez, D., Cuba, L., Mantari, J.L., and Arciniega, R.A. (2019), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates via optimized non-polynomial higher order theories”, *J. Appl. Comput. Mech.*, 5(2), 281-298.

Reddy & C. D. Chin (1998), “Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates”, *Journal of Thermal Stresses*, 21:6, 593-626.

- Reddy J.N. (1984), “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752.
- Reddy J.N. (1997), “Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis”. CRC Press, Boca Raton.
- Reddy J.N. (2007), “Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells”. CRC Press.
- Reddy J.N. (1999), “Theory and Analysis of Elastic plates”. Taylor & Francis, Philadelphia.
- Reddy, J.N. and Chin, C.D. (1998), “Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates”, *J. Therm. Stresses*, 21(6), 593-629.
- Refrafi, S., Bousahla, A.A., Bouhadra, A., Menasria, A., Bourada, F., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou, K.H. and Tounsi, A. (2020), “Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations”, *Comput. Concrete*, 25(4), 311-325.
- Reissner E & Y. Stavsky. (1961), “Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate”. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408.
- Reissner E. (1975), “on transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation”, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- Reissner, E. (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J Appl Mech Trans ASME*, vol. 12, pp. A69–A77.
- Reuss, A. (1929), “Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle”, *J. Appl. Math. Mech.*, 9, 49-58 (in German).
- Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A.R. and Mokhtari, M. (2018), “Static analysis of functionally graded non-prismatic sandwich beams”, *Adv. Comput. Des.*, 3(2), 165-190.
- Reuter T. and Dvorak G.J. (1998), “Micromechanical models for graded composite Materials: II. Thermomechanical loading, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 46, 1655–1673.
- Reuter T., Dvorak G.J., and Tvergaard V. (1997), “Micromechanical models for graded composite materials, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 45, 1281–1302.
- Ritz, W. (1909), “Theorie der transversalschwingungen, einer quadratischen platte mit frein raändern”, *Ann Physic, Bd.*, 28, pp. 737–786.

-S-

- Sahla, F., Saidi, H., Draiche, K., Bousahla, A.A., Bourada, F. and Tounsi, A. (2019), “Free vibration analysis of angle-ply laminated composite and soft core sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.*, 33(5), 663-679.
-

- Salah, F., Boucham, B., Bourada, F., Benzair, A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2019), "Investigation of thermal buckling properties of ceramic-metal FGM sandwich plates using 2D integral plate model", *Steel Compos. Struct.*, 33(6), 805-822.
- Salamat, D. and Sedighi, H.M. (2017), "The effect of small scale on the vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes with a moving nanoparticle", *J. Appl. Comput. Mech.*, 3(3), 208-217.
- Sasaki (M.), Hirai (T). "Fabrication and properties of functionally gradient materials. *J. Ceram. Soc. Jap.*, 99, (1991), p. 970-980.
- Sayyad, A. and Ghumare, S. (2019), "A new quasi-3D model for functionally graded plates", *J. Appl. Comput. Mech.*, 5(2), 367-380
- Sedighi, H.M., Daneshmand, F. and Abadyan, M. (2015),
- Selmi, A. (2019), "Effectiveness of SWNT in reducing the crack effect on the dynamic behavior of aluminium alloy", *Adv. Nano Res.*, 7(5), 365-377
- Semmah, A., Heireche, H., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2019), "Thermal buckling analysis of SWBNNT on Winkler foundation by non local FSDT", *Adv. Nano Res.*, 7(2), 89-98.
- Shen, H.-S. (2009), "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Sheppard (L.M.). "Innovative process for advanced ceramics. *Amer. Ceram. Soc. Bull.*, 72 (1993), p. 48-58.
- Shimpi, R.P. (2002), "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137– 146.
- Shokrieh, M.M. and Kondori, M.S, (2020), "Effects of adding graphene nanoparticles in decreasing of residual stresses of carbon/epoxy laminated composites", *Compos. Mater. Eng.*, 2(1), 53-64.
- Sobhy, M. (2015), "Thermoelastic response of FGM plates with temperature-dependent properties resting on variable elastic foundations", *J. Appl. Mech.*, 7(6), 1550082.
- Soldatos K. P. and Timarci T. (1993), "A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories". *Composite Structures*, 25:165–171.

-T-

- T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet. (2007), "Shear correction factors of functionally graded plates". *Mech. Advanced Mater. Struct.*; 14 (8): 567-575.

- Taj, M., Majeed, A., Hussain, M., Naeem, M.N., Safeer, M., Ahmad, M., Khan, H.U. and Tounsi, A. (2020). “Non-local orthotropic elastic shell model for vibration analysis of protein microtubules”, *Comput. Concrete*, 25(3), 245-253.
- Talha M, B.N. Singh. (2010). “Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl. Math. Modell.* 34 3991-4011.
- Taylor, D. (1964) “Fundamentals of soil mechanics. New York: John Wiley and Sons”. 1964.
- Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK.(2014) “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates”. *Acta Mech*; 225(3):951–64.
- Thompson, W.T. “Theory of Vibrations and Applications, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- Timesli, A. (2020), “An efficient approach for prediction of the nonlocal critical buckling load of double-walled carbon nanotubes using the nonlocal Donnell shell theory”, *SN Appl. Sci.*, 2, 407 (2020).
- Timoshenko “beam theory”, *Adv. Nano Res.*, 8(4), 293-305.
- Timoshenko S.P., S.Woinowsky-Krieger, (1959), “Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York.
- Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961), “Theory of Elastic Stability, 2nd edn, McGraw-Hill, New York.
- Timoshenko, S.P. and Young, D.H. (1963), “Vibration Problems in Engineering”, John Wiley and Sons., New York.
- Timoshenko, S.P. (1953), “History of Strength of Materials, McGraw-Hill, New York.
- Timoshenko, S.P. (1915), “On large deflections of circular plates, *Mem Inst Ways Commun*, 89.
- Timoshenko, S.P. (1913), “Sur la stabilite des systemes elastiques, *Ann des Points et Chaussees*, vol. 13”, pp. 496–566; vol. 16, pp. 73–132.
- Tlidji, Y., Zidour, M., Draiche, K., Safa, A., Bourada, M., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2019), “Vibration analysis of different material distributions of functionally graded microbeam”, *Struct. Eng. Mech.*, 69(6), 637-649.
- Touloukian Y.S. (1967), “Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials, McMillan, New York.
- Tounsi, A., Al-Dulaijan, S.U., Al-Osta, M.A., Chikh, A., Al-Zahrani, M.M., Sharif, A. and Tounsi, A. (2020), “A four variable trigonometric integral plate theory for hygro-thermo-

mechanical bending analysis of AFG ceramic-metal plates resting on a two-parameter elastic foundation”, *Steel Compos. Struct.*, 34(4), 511-524.

Touratier M. (1991), “An efficient standard plate theory”, *Int. J. Eng. Sc.*; 29 (8): 901-916.

Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.T. and Mantari, J.L. (2017), “Size-dependent behaviour of functionally graded sandwich microplates under mechanical and thermal loads”, *Compos. B Eng.*, 124, 218-241.

Trinh, M.C. and Kim, S.E. (2018), “Nonlinear stability of moderately thick functionally graded sandwich shells with double curvature in thermal environment”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 84, 672-685.

Truesdell, C. (1968), “Essays in the History of Mechanic”, Springer-Verlag, Berlin.

-V-

Vel S.S, Batra R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”. *J Sound Vib*, 272(3–5):703–30.

Voight, W. (1893), “Bemerkungen zu dem problem der transversalem schwingungen rechteckiger platten”, *Nachr. Ges (Goettingen)*, No. 6, pp. 225–230.

Voigt, W., (1889), “Über die beziehung zwischen den beiden elastizitätskonstanten isotroper körper”, *Wied. Ann. Phys.*, 38, 573-587.

Volmir, A.S. (1956), “Flexible Plates and Shells”, Gos. Izd-vo Techn.-Teoret. Lit-ry, Moscow, (in Russian).

von Karman, T. (1910), “Festigkeitsprobleme in Maschinenbau”, *Encycl der Math Wiss*, vol. 4, pp. 348–351.

von Karman,T. (1932), “Ef Sechler and Donnel, L.H. The strength of thin plates in compression”, *Trans ASME*, vol. 54, pp. 53–57.

-W-

Watanabe (R.), Kawasaki (A.). (1987), “Powder metallurgy fabrication of the thermal-stress relief type of functionally gradient materials” . *Proc. of the Inter. Instit. for the Sci. of Sintering (IISS)*, Ed. S. Somiya & al, Japan, p. 1197-1202.

-Y-

Yahiaoui, M., Tounsi, A., Fahsi, B., Bouiadjra Bouiadjra, R. and Benyoucef, S. (2018), “The role of micromechanical models in the mechanical response of elastic foundation FG sandwich thick beams”, *Struct. Eng. Mech.*, 68(1), 53-66.

Yoosefian, A.R., Golmakani, M.E. and Sadeghian, M. (2020), “Nonlinear bending of functionally graded sandwich plates under mechanical and thermal load”, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 84, 105161.

Yoshitake (A.), Tamura (M.), Shiota (I.), Niino (M.). (1990), “Fabrication of the functionally gradient materials”, *The state of the art. Proc. of Space Applications of Advanced Structural Materials*, ESTEC, NL, p. 103-107.

-Z-

Zarga, D., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Bourada, F. and Mahmoud, S.R. (2019), “Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct.*, 32(3), 389-410.

Zenkour AM. (2006), “Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate”. *Arch Appl Mech* 2006; 77(4):197–214.

Zenkour AM. (2013), “A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates”. *Appl Math Model*; 37(20–21):9041–51.

Zenkour AM. (2013), “Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory”. *J Sandwich Struct Mater* ; 15(6):629–56.

Zenkour AM. (2015), “Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory”. *Compos Struct*; 122:260–70.

Zhu, P., Zhang, L.W. and Liew, K.M. (2014), “Geometrically nonlinear thermomechanical analysis of moderately thick functionally graded plates using a local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation”, *Compos. Struct.*, 107, 298-314.

Zimmerman, R.W. (1994), “Behavior of the Poisson ratio of a two-phase composite material in the high-concentration limit”, *Appl. Mech. Rev.*, 47(1), 38-44.

Zuiker, J.R. (1995), “Functionally graded materials-choice of micromechanics model and limitations in property variation”, *Compos. Eng.*, 5(7), 807-819.

Žur KK, Arefi M, Kim J, Reddy JN, Free vibration and buckling analyses of magneto-electro-elastic FGM nanoplates based on nonlocal modified higher-order sinusoidal shear deformation theory, *Composites Part B* (2019).