

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES
Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et Matériaux

Présentée par

ELMASCRI Setti

Sujet de thèse

**Contribution à l'étude de l'effet de température sur le comportement
vibratoire des structures en matériaux composites avancés**

Soutenu le : 02 / 12 / 2020

Composition du jury :

Président :	Mr FAHSI Bouazza	Pr	UDL-SBA
Directrice de thèse:	Mme BESSAIM Aicha	MCA	UMS Mascara
Co-Directeur de thèse :	Mr TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL-SBA
Examineur :	Mr KACI Abdelhakim	Pr	U-SAIDA
Examineur :	Mme BACHIR BOUIDJRA Rabbab	MCA	UMS Mascara
Examineur :	Mr BOURADA Mohamed	MCA	UDL-SBA

Année universitaire 2020/2021

DEDICACES

À la mémoire de ma très chère mère.

À mon père,

À mes frères et sœurs,

À mon cher époux Mansour,

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de ce travail.

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) à l'université de Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès

*Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à ma directrice de thèse **Dr BESSAIM Aicha** et mon co-directeur le professeur **TOUNSI Abdelouahed** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour leur aide, leur amabilité et leur rigueur scientifique. Leurs encouragements constants et leur amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.*

*J'exprime également toute ma reconnaissance au **Pr HOUARI Mohammed Sid Ahmed**, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés m'ont permis d'aplanir bien des difficultés.*

*Je remercie chaleureusement Messieurs : **Pr FAHSI Bouazza**, **Pr KACI Abdelhakim**, **Dr BOURADA Mohamed** et **Dr BACHIR BOUIDJRA Rabbab** de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.*

Je voudrais remercier aussi tous les membres du Laboratoire matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès pour l'environnement fraternel et scientifique qu'ils ont toujours su imposer.

Mes plus profonds remerciements vont à mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.

*Enfin, je tiens à remercier mon époux **Mr TAHLAITI Mansour** pour sa patience, ses encouragements ainsi que pour son soutien moral tout le long de ma thèse.*

Table des matières

Abstract

Résumé

الملخص

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des notations

Introduction générale..... 17

Chapitre I: Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

I.1.Introduction..... 22

I.2. Concept des matériaux composites avancés..... 22

I.3. Historique sur l'évolution des matériaux composites avancés..... 24

I.4. Processus de fabrication des FGM..... 26

I.5. Classification des FGM..... 28

I.5.1 Selon la structure FGM..... 28

I.5.2 Selon le type de gradient FGM..... 29

I.5.3 Selon la nature du processus de gradation des FGM..... 29

I.6. Le domaine d'application..... 30

I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM..... 32

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM..... 33

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM..... 34

I.7.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM..... 35

I.8. Conclusion..... 36

Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques

II.1 Introduction..... 38

II.2 Les modèles analytiques des plaques FGM..... 38

II.2.1 Théorie classique des plaques (CPT).....	38
II.2.2 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).....	39
II.2.3 Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT).....	40
II.3. Aperçu sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé.....	43
II.4. L'influence de la déformation normale (effet stretching).....	46
II.4. Conclusion.....	47

CHAPITRE III : Le modèle théorique et le développement analytique

III.1 Introduction.....	49
III.2 Formulation théorique de la présente théorie.....	49
III.2.1 Propriétés des matériaux.....	50
III.2.2 Théorie des plaques hyperboliques incluant un effet d'étirement.....	50
III.2.2.1 Hypothèses de la présente théorie.....	51
III.2.2.2 Cinématique et équations constitutives.....	51
III.2.2.3 Équations gouvernantes.....	54
III.3 Champs de température.....	57
III.3.1. Température uniforme.....	57
III.3.2. Température linéaire.....	57
III.3.3. Température non linéaire.....	57
III.3.4. Température sinusoïdale.....	58
III.4. Solution analytique pour une plaque en FGM simplement appuyée.....	58
III.5. Conclusion.....	59

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1.Introduction.....	62
IV.2. Résultats du comportement thermique et mécanique des plaques en FGM.....	62
IV.3.Validation des résultats.....	66

IV.3.1.Résultats des plaques FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$)	67
IV.3.2.Résultats des plaques FGM ($Si_3N_4/SUS304$)	69
IV.3.3.Résultats des plaques FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) pour différents modes de vibrations.....	70
IV.3.4. Comparaison des résultats des plaques FGM ($Si_3N_4/SUS304$)	72
IV.3.5.Résultats numériques de la présente étude.....	73
IV.4.Conclusion.....	76
Conclusion Générale et Perspectives.....	78
Référence bibliographiques.....	81
Annexe.....	104

Abstract

The objective of the present work is the analysis of the free vibration of FGM plates simply supported in a thermal environment with material properties which depend on temperature.

The developed theory is a hyperbolic shear deformation theory with consideration of normal strain (the stretching effect), and presents a parabolic variation of transverse shear stresses depending on the thickness. Moreover, this theory ensures the nullity of the shear stress on the free edges of the plate, without introducing a correction factor. Unlike other theories, the number of unknowns in the proposed theory is only five, while six and more in other high order shear strain theories. The new approach has a new displacement field which introduces indeterminate variables. The uniform, linear, non-linear and sinusoidal thermal conditions are imposed on the top and bottom surfaces of the FGM plate which is simply supported. The equations of motion are determined from the Hamilton principle. Navier type analytical solutions are used for the analysis of free vibration of simply supported plates.

The validity of the present theory is verified by comparing the results obtained by this theory with those available in the literature. The effects of normal strain, thermal load, side-to-thickness ratio and volume fraction index on free vibration responses of functionally graded plates are investigated. It can be concluded that the present theory is not only accurate but also simple to predict the natural frequencies of functionally graded plates taking into account the effect of stretching in a thermal environment.

Keywords: Functionally graded (FG) plates; vibration; new plate theory; shear and normal deformation, analytical modeling, thermal environment.

Résumé

L'objectif du présent travail est l'analyse de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées dans un environnement thermique ayant des propriétés matérielles qui dépendent de la température.

La théorie développée est une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique avec la prise en compte de la déformation normale (l'effet stretching), et présente une variation parabolique des contraintes de cisaillement transversales suivant l'épaisseur. De plus, cette théorie assure la nullité de la contrainte de cisaillement sur les bords libre de la plaque, sans introduire de facteur de correction. Contrairement aux autres théories, le nombre d'inconnues dans la théorie proposée est seulement cinq, tandis que six et plus dans les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé. La nouvelle approche a un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables indéterminées. Les conditions thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdale sont imposées aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque FGM qui est simplement appuyée. Les équations de mouvement sont déterminées à partir du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques de type Navier sont utilisés pour l'analyse de la vibration libre des plaques simplement appuyée.

La validité de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats obtenus par cette théorie à ceux disponibles dans la littérature. Les effets de la déformation normale, la charge thermique, le rapport longueur-épaisseur (L/h) et l'indice de puissance de la fraction volumique (p) sur les réponses aux vibrations libres des plaques fonctionnellement graduées sont étudiés. On peut conclure que la théorie actuelle est non seulement précise mais aussi simple pour prédire les fréquences naturelles des plaques fonctionnellement graduées avec la prise en compte de l'effet d'étirement dans un environnement thermique.

Mots-clés: plaques (FGM); vibration; nouvelle théorie des plaques; cisaillement et déformation normale, modélisation analytique, environnement thermique

ملخص

الهدف من هذا العمل، هو تحليل الاهتزاز الحر للصفائح المتدرجة وظيفيا المدعومة في بيئة حرارية ذات خصائص مادية تعتمد على الحرارة .

النظرية التي تم تطويرها هي نظرية تشوه القص القطعي مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير التشوه الناظمي (تأثير التمدد) و تعطي وصفاً مكافئاً للإجهات القص العرضي وفقاً للسمك. بالإضافة إلى ذلك، تحقق هذه النظرية انعدام إجهاد القص على الحواف الحرة للصفحة، دون إدخال عامل تصحيح.

تستخدم هذه النظرية خمسة مجاهيل، مقارنة بالنظريات الأخرى. النموذج الجديد يعتمد على حقل إزاحة والذي يدخل بدوره متغيرات متكاملة غير محددة. يتم فرض الظروف الحرارية المنتظمة، الخطية، غير الخطية و الجيبية مطبقة على الأسطح العلوية والسفلية للصفحة.

بتطبيق مبدأ هاميلتون نحصل على معادلات الحركة وكذلك على الحلول التحليلية من نوع نافيه للصفائح المدعومة.

تم التحقق من صحة هذه النظرية بمقارنة النتائج المتحصل عليها بنتائج النظريات الأخرى. تمت دراسة تأثيرات التشوه العادي، الحمولة الحرارية، ومؤشر قدرة القوة للجزء الحجمي، نسبة الطول على السمك على استجابات الاهتزازات الحرة للصفائح المتدرجة وظيفياً.

نستخلص أن النظرية المقترحة دقيقة وبسيطة للتنبؤ بالترددات الطبيعية للصفائح المتدرجة وظيفياً مع تأثير التمدد في البيئات الحرارية.

الكلمات الرئيسية: صفحة (FG)؛ اهتزاز؛ النظرية الجديدة للصفائح، القص والتشوه العادي، البيئة الحرارية

Liste des Figures

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Figure I.1 : Développement matériel vers les FGM.....	23
Figure I.2 : la variation possible des propriétés dans les composites conventionnels par rapport aux FGM.....	24
Figure I.3 : Techniques de traitement couramment utilisées pour la production de FGM.....	27
Figure I.4 : Exemples de combinaisons de matériaux possibles utilisées dans les FGM.....	28
Figure I.5: Matériaux fonctionnellement classés avec différentes formes de gradient]. a FGM discrètes / discontinues avec interface. b FGM en continu sans .interface. c , f Gradient de composition. d , g Gradient d'orientation. e , h Gradient de fraction.....	29
Figure I.6: Exemple typique de trois types différents de gradient de FGM.....	30
Figure I.7: Les principaux domaines d'application des FGM.....	31
Figure I.8 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	32
Figure I.9 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	34
Figure I.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	35
Figure I.11 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	36

Chapitre II : Rappel sur les théories des plaques

Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.....	39
Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	40
Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé.....	41

Chapitre III : Le modèle théorique et le développement analytique

Figure III.1 : La Géométrie d'une plaque à gradient fonctionnel dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires..... 49

Chapitre IV : Résultats et Discussions

Figure IV.1 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans un champ thermique uniforme pour différentes valeurs de l'indice matériel p 64

Figure IV.2 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans un champ thermique linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel p 64

Figure IV.3 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans un champ thermique non linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel p 65

Figure IV.4 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans un champ thermique sinusoïdal pour différentes valeurs de l'indice matériel p 65

Figure IV.5 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans des champs thermiques : uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal pour différentes valeurs de l'indice matériel p 66

Figure IV.6: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température uniforme d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec ($a/h = 10, a = 0.2, p = 1$)..... 74

Figure IV.7: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température linéaire d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec ($a/h = 10, a = 0.2, p = 1$)..... 75

Figure IV.8: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température non linéaire d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec ($a/h = 10, a = 0.2, p = 1$)..... 75

Figure IV.9: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température sinusoïdale d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec ($a/h = 10, a = 0.2, p = 1$)..... 76

Liste des Tableaux

Chapitre I

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	23
---	----

Chapitre II

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM.....	45
---	----

Chapitre IV

Tableau IV. 1: les coefficients des propriétés matérielles dépendant de la température pour ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) et ($Si_3N_4/SUS304$)	63
Tableau IV.2 : Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée dans un environnement thermique.....	68
Tableau IV.3 : Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ($Si_3N_4/SUS304$) simplement appuyée dans un environnement thermique.....	70
Tableau IV.4 : Paramètre de fréquence non dimensionnel de la plaque FGM simplement supportée ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) dans les environnements thermiques ($p = 2$).....	71
Tableau IV.5 : Fréquence naturelle non-dimensionnelle de la plaque FGM dépendante de la température ($Si_3N_4/SUS304$) pour différents index de fraction de volume p dans les environnements thermiques, Mode (1, 1).....	72
Tableau IV.6 : Paramètre de fréquence naturelle non dimensionnelle de la plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée dans les environnements thermiques et pour différents modes de vibration.....	73

Liste des notations

$\{ \}$ Vecteur colonne

$[]$ Matrice P propriété matérielle

$\Delta(z)$ variation de la température

$V(z)$ Fraction volumique

h L'épaisseur de la plaque

p L'indice de la puissance (la loi de puissance)

$E(z)$ Module de Young en fonction de l'épaisseur

$\rho(z)$ La masse volumique

E_m Module Young (Métal)

E_c Module Young (céramique)

a La largeur de la plaque

b La longueur de la plaque

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ Les composants des contraintes

$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ Les composants des déformations

ε^0 Champ des déformations en membrane

k^b Champ des déformations en flexion

k^s Champ des déformations en cisaillement

σ_x^t, σ_y^t Les contraintes thermiques

i, j Nombre naturelle

ν Coefficient de poisson

u Déplacement suivant x

v Déplacement suivant y

w Déplacement suivant z

u_0, v_0, w_0 Les déplacements au niveau du plan moyen ($z=0$)

$\int \theta(x, y, t) dx$, $\int \theta(x, y, t) dy$, φ_z rotation de la normale en plan médian par rapport à l'axe x,y,z

$f(z)$ La fonction de forme (fonction de cisaillement)

P_c modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux céramiques

P_m modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux métalliques

U_d l'énergie de contrainte due aux contraintes mécaniques

U_T l'énergie de contrainte due aux contraintes thermique

\int Intégrale indéterminée

$g(z)$ La première dérivée de la fonction de forme

k_1, k_2 Des coefficients dépendent de la géométrie

A', B' Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)

δ Variation

U L'énergie de déformation

K L'énergie cinétique de la plaque

$\frac{\partial}{\partial x}$ Dérivée partielle par rapport à x

$\frac{\partial}{\partial y}$ Dérivée partielle par rapport à y

$g'(z)$ La première dérivée de la fonction $g(z)$

α Nombre d'onde selon x

β Nombre d'onde selon y

T_0 la température ambiante

T_b Température au niveau de la surface inférieure de la plaque

T_t Température au niveau de la surface supérieure de la plaque

$K(z)$ la conductivité thermique

(z, T) Coefficient de dilatation thermique en fonction de l'épaisseur et la température

C_{ij} Les coefficients de rigidité

A la surface supérieure de la plaque

($\ddot{\quad}$) La dérivée seconde par rapport au temps

ε Vecteur de déformation

k^b Vecteur de courbure

k^s Vecteur de rotation normal

γ^0, γ^1 Vecteur d'ordre élevé,

i, j Nombre naturelle

(N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) Sont des charges appliquées dans le plan

$I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, J_2, K_2, K_3$ Composants de moment d'inertie

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$ Composants de rigidité

$(E_{11}^T, F_{11}^T, A_{44}^s)$ et $(E_{22}^T, F_{22}^T, A_{55}^s)$ Composants de rigidité

(L, L^s, R, R^s) Composants de rigidité (quasi-3d)

$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$ Les opérateurs différentiels

\sum La somme

m Nombre de mode selon x

n Nombre de mode selon y

$(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Z_{mn})$ les paramètres arbitraires

ω Fréquence naturelle

$[a]$ La matrice de rigidité

$[M]$ La matrice de masse

ϖ Fréquence adimensionnelle

$\|$ Déterminant

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle classe de composites de plus en plus utilisés dans de nombreux domaines de l'ingénierie, en particulier dans les applications à haute température telles que les structures de chargement thermomécaniques, les avions, les engins spatiaux, les revêtements plasmatiques pour les réacteurs à fusion et autres structures techniques dans un environnement à haute température (Li et al., 2008; Kar et Panda, 2015; Taleb et al., 2018; Tu et al., 2019), les inconvénients des matériaux composites conventionnels sont éliminés avec l'arrivée des FGM tels que les problèmes d'interface et la répartition des contraintes (Taleb et al. 2018). Ceci peut être obtenu en variant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement lisse et continu d'une surface à l'autre. Typiquement la FGM est faite de céramique et de métal, le constituant céramique fournit la résistance à haute température en raison de sa faible conductivité thermique, tandis que le constituant métallique ductile empêche la rupture en raison de sa ténacité, ils sont donc capables de résister à un fort gradient de température tout en préservant l'intégrité structurale (Tu et al., 2019; Huang et Shen, 2004). Les matériaux à gradient fonctionnel ont été conçus pour la première fois comme matériaux de barrière thermique pour les réacteurs de fusion et les structures aérospatiales où existent des températures extrêmement élevées et un fort gradient thermique (Ebrahimi, 2013). Ainsi, la réponse thermique de ces structures a reçu une attention considérable. Aujourd'hui, les matériaux fonctionnellement gradués sont employés dans de larges applications d'ingénierie, y compris le nucléaire, le génie mécanique et le génie civil. Il est donc extrêmement important d'examiner leurs réponses sous différents types de charges en utilisant des modèles précis de structures (plaques, poutres et coquille). Par la suite, de nombreuses études sur l'analyse des comportements de flexion, de vibration, thermomécaniques et de flambage des éléments structuraux fonctionnellement gradués ont été réalisées ces dernières années par de nombreux chercheurs (Ebrahimi et Jafari, 2016; Kar et Panda, 2014; Kolahchi et al., 2015; Darilmaz et al., 2015; Darilmaz, 2015; Bousahla et al., 2016; Pandey et Pradyumna, 2015; Khalili et Mohammadi, 2012; Yaghoobi et Yaghoobi, 2013; Alibeigloo et Alizadeh, 2015; Fazzolari, 2016; Mehar et Panda, 2018; Lashkari et Rahmani, 2016; Van Long et al., 2016; Akbaş, 2017; Adhikari et Singh, 2019; Tornabene, 2009; Neves et al., 2019; Carrera et al., 2011; El Meiche et al., 2011; Zenkour et Sobhy 2010; Zarga et al., 2019; Karami et al., 2019), et une vaste gamme de théories des plaques a été développée pour fournir plus correctement leurs réponses mécaniques.

La but de ce travail est l'utilisation des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur récemment développés par Tounsi et ses collègues (Karami et al., 2018ab; Zaoui et al., 2019; Zarga et al., 2019; Boutaleb et al., 2019; Boukhelif et al., 2019; Abualnour et al., 2019; Boulefrakh et al. 2019; Addou et al., 2019; Chaabane et al., 2019; Medani et al., 2019; Mahmoudi et al., 2019) en incluant l'effet d'étirement pour étudier l'analyse des vibrations libres des plaques graduées dans l'environnement thermique. Il convient de noter que l'effet d'étirement de l'épaisseur est ignoré dans ces nouvelles théories de plaque à quatre variables et le déplacement transversal est considéré comme constant dans la direction de l'épaisseur, comme dans les théories de plaque mince de type Kirchhoff-Love. Cela semble tout à fait insuffisant puisque les plaques FGM sont caractérisées par une forte variation des propriétés des matériaux dans le sens de l'épaisseur. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle tient compte d'une variation hyperbolique des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfait aux conditions limites de traction zéro sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement. Il convient de noter que la fonction hyperbolique a été utilisée pour la première fois par (Nguyen, 2015) et (Taleb et al., 2018). En utilisant la théorie proposée, l'analyse des vibrations libre des plaques FGM dans un environnement thermique est étudiée. Quatre types de conditions environnementales, à savoir la charge thermique uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdale, sont imposées à la surface supérieure et inférieure pour les plaques FGM simplement supportées. Les propriétés des matériaux sont supposées être dépendantes de la température, et varient continuellement avec l'épaisseur selon une loi de distribution de puissance en termes de lois de puissance de volume des constituants. Dans cette étude, on obtient des solutions d'analyse des vibrations pour les plaques à gradation fonctionnelle et on vérifie l'exactitude en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. Les influences de certains paramètres, y compris l'indice de gradient, la géométrie de la plaque, le nombre de mode et la charge thermique sur les caractéristiques de vibration des plaques FGM sont présentées. On peut conclure que les théories actuelles sont non seulement précises, mais aussi simples pour prédire les réponses aux vibrations libres des plaques FGM dépendantes de la température.

Pour atteindre notre objectif, ce travail de thèse s'articule autour de quatre chapitres.

Après une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse est présentée. Le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs

méthodes de fabrication, leurs classifications ainsi que leurs domaines d'application et enfin les lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM. Le deuxième chapitre passera en revue les différents types de théories des plaques.

Le troisième chapitre expose une nouvelle théorie de déformation de cisaillement qui inclut des intégrales à variables indéterminées et contient seulement cinq inconnues avec l'effet d'étirement pour l'analyse des vibrations libres des plaques graduées dans l'environnement thermique. Le quatrième et le dernier chapitre est consacré à la validation des modèles proposés à travers les résultats connus de la littérature.

Il sera consacré à la présentation des résultats obtenus par l'étude de l'influence du chargement thermique sur le comportement vibratoire des plaques FGM tout en étudiant l'effet de la géométrie de la plaque, l'indice matériel et les composantes des matériaux. Le manuscrit sera finalisé par une conclusion générale sur le travail réalisé et les principaux résultats obtenus, ainsi que des propositions sur diverses perspectives sur l'étude de plusieurs problèmes liés à la flexion, aux vibrations et au comportement dynamique des macros / nanostructures composites isotropes, classiques et avancées.

CHAPITRE I
GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE
PROPRIETES

I.1. Introduction

De nombreuses applications telles que l'aérospatiale, l'automobile, la production d'électricité, la microélectronique, la structure et la bio-ingénierie exigent des propriétés qui ne sont pas disponibles dans les matériaux d'ingénierie conventionnels (Gupta B, 2017), (Edwin A et al., 2017). Ces applications nécessitent des propriétés mutuellement exclusives pour avoir une résistance aux contraintes thermo-mécaniques ainsi qu'une stabilité chimique. La nécessité de répartir les propriétés se retrouve dans une variété de produits courants qui doivent avoir de multiples fonctions, comme les engrenages, qui doivent être suffisamment solides à l'intérieur pour résister à la fracture, mais doivent également être durs à l'extérieur pour éviter l'usure (J. N. Reddy, 2000).

Les matériaux composites sont la forme la plus avancée de matériaux qui sont fabriqués à partir de deux ou plusieurs constituants avec des propriétés physiques et chimiques significativement différentes des matériaux individuels. L'hétérogénéité, l'anisotropie, la symétrie et la hiérarchie sont les principales caractéristiques de ces matériaux qui suscitent un intérêt particulier pour diverses applications. Cependant, ils sont soumis à une transition abrupte des propriétés à l'interface qui peut entraîner une défaillance des composants dans des conditions de travail extrêmes. Cet inconvénient des composites conventionnels est éliminé par une forme modifiée de composites appelés matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Ces matériaux remplacent une interface nette par une interface en dégradé qui se traduit par une transition en douceur des propriétés d'un matériau à l'autre.

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) constituent une nouvelle classe émergente de matériaux avancés, très attrayants pour une large gamme d'applications d'ingénierie car ils permettent la conception de différentes performances fonctionnelles au sein d'une pièce. Ce concept a suscité l'intérêt de la communauté scientifique, ce qui a donné lieu à plusieurs recherches et applications technologiques. Cependant, les technologies utilisées pour la fabrication des matériaux fonctionnellement gradués sont très coûteuses et longues, limitant l'utilisation de ces matériaux à des applications d'ingénierie très sélectives.

I.2. Concept des matériaux composites avancés

Les FGM sont des matériaux hétérogènes présentant une variation spatiale contrôlée de leurs caractéristiques chimiques et / ou structurelles dans au moins une direction. Le gradient de propriété dans le matériau est provoqué par une dépendance de position de la composition chimique, de la microstructure ou de l'ordre atomique.

Les FGM sont une combinaison entre deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec un changement graduel et continu de leur composition structurale et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Ils sont généralement constitués d'un mélange de céramique et de métal, avec une variation sur une surface riche en céramique et une autre riche en métal dont un changement attendu des fractions volumiques entre les deux surfaces de ces deux matériaux (J. N. Reddy, 2000).

Le tableau I-1 présente les propriétés mécaniques de ces deux composants

Tableau I.1: une comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal. [Houari, 2011]

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

C'est en 1972, que la structure à gradation fonctionnelle Materials (FGM) a été proposée pour les composites et les matériaux polymères (Bohidar et al., 2014) imitant ainsi la structure et le comportement des matériaux naturels tels que les os, les dents (Bakar et al., 2018) et des arbres de bambou (Sato et al., 2017) etc.

C'est en 1984, au Japon que le concept de FGM a été appliqué pour la première fois lors de la conception d'une navette spatiale (Kokanee, 2017). L'objectif était la fabrication d'un corps à partir d'un matériau présentant une résistance thermique et des propriétés mécaniques améliorées avec une modification progressivement des compositions pour une résistance à écart important de température de 1000 ° C. La figure I.1 illustre l'évolution historique des métaux purs aux métaux classés de manière fonctionnelle.



Figure I.1 : Développement matériel vers les FGM [Mahamood et al, 2012]

Les FGM introduisent des moyens pour contrôler la réponse des matériaux à la déformation, à la charge dynamique ainsi qu'à la corrosion et à l'usure (Maimunnisa et al., 2018), etc. En outre, ils donnent la possibilité de profiter des avantages de différents systèmes de matériaux, par exemple la céramique et les métaux (Petit et al., 2018). Les FGM peuvent également fournir une barrière thermique et peuvent être utilisés comme une résistance élevée aux rayures et un revêtement à contrainte résiduelle réduite (Saleh et al., 2019). De même, les FGM peuvent être utilisés comme interface de liaison à haute résistance pour connecter deux matériaux incompatibles (Udupa et al., 2014).

La figure I.2 illustre la variation possible des propriétés dans les composites conventionnels par rapport aux FGM. Une seule FGM peut être obtenue par un seul composant / phase dispersé qui n'est pas uniformément réparti dans la matrice par rapport aux composites conventionnels, tandis que plus d'un constituant / phase dans le cas d'une double FGM. Le gradient continu est obtenu dans tous les cas, en fonction de la densité de distribution du changement entre les constituants / phases utilisées et la matrice.

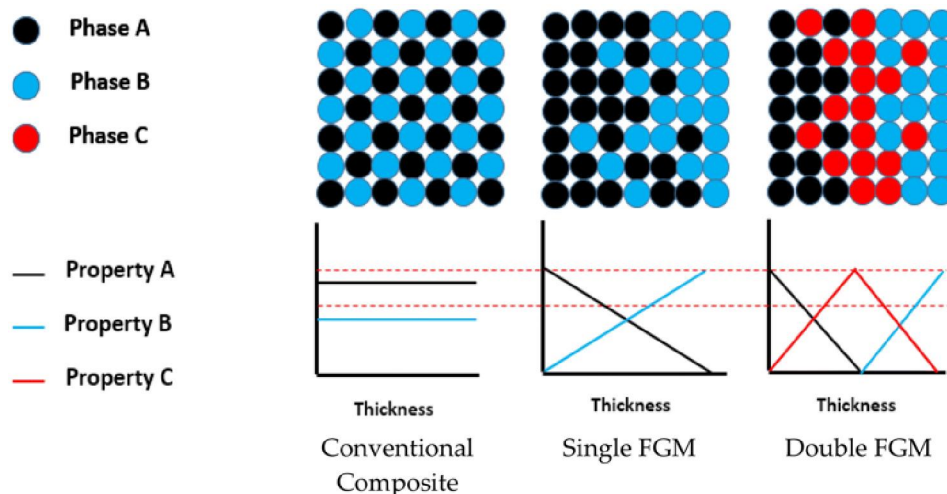


Figure I.2 : la variation possible des propriétés dans les composites conventionnels par rapport aux FGM. [Bohidar SK et al., 2014]

I.3 Historique sur l'évolution des matériaux composites avancés

C'est par un groupe de scientifiques dans la région de Sendai au Japon au milieu des années 80 qu'a été élaboré le terme FGM (functionally graded materials), comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique (Yamanouchi et al., 1990), (Koizumi, 1993).

L'objectif recherché était le développement des matériaux à haute performance et à résistance élevée à la chaleur en utilisant la technologie de gradient à propriété qui a été poursuivi. Cette nouvelle classe de matériaux est utilisée dans divers domaines à savoir : barrières thermiques sous forme d'enduit pour les moteurs en céramique, à gaz, couches minces d'optiques, (Nguyen et al., 2007). En 1987, un projet de recherche a été lancé par les japonais qui traitent le développement de Matériaux à Gradient de propriétés avec l'étude de la relaxation des contraintes thermiques. L'intérêt de ce projet est le développement des matériaux présentant une résistance à haute température dans les domaines de l'aérospatial. Des laboratoires nationaux de recherches dont 17 d'entre eux, plusieurs universités ainsi que des entreprises ont été engagées dans ce projet (Koizumi, 1997).

L'intérêt était le développement d'une architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications. Pour la conception de ces matériaux, il est indispensable de prendre en considération les caractéristiques suivantes :

- Pour la couche superficielle du matériau : une endurance thermique ainsi qu'une résistance à l'oxydation à haute température;
- Raideur du matériau côté à basse température;
- Relâchement effectif de la contrainte thermique le long du matériau (Abdizadeh, 1997).

L'intérêt dans le développement de cette nouvelle classe de matériaux « FGM » est d'obtenir des matériaux répondant à la fois à des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température).

Dans la première phase (1987-1989), Des chercheurs ont réussi la fabrication de pièces à titre expérimental avec des dimensions de (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) qui ont la capacité de résister à des températures maximales de surfaces de 2000K et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde phase (1990-1991), l'objectif était la fabrication avec des tailles plus grandes ainsi que des formes plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première phase. Durant les années 90, le cercle d'applications des FGM s'est élargi pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température en allant vers les domaines de la biomécaniques, l'optique, et bien d'autres (Okamura, 1991).

I.4 Processus de fabrication des FGM

Un grand nombre de techniques et de voies de fabrication bien connues sont largement utilisées pour la production de FGM, comme le résume la figure I.3. Celles-ci vont des techniques anciennes et simples aux techniques avancées et complexes et couvrent divers principes physiques et chimiques.

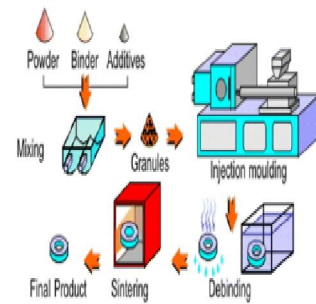
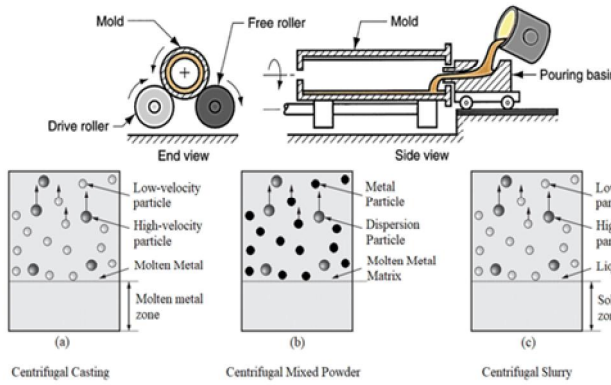
Les techniques de production de FGM incluent la coulée centrifuge, la métallurgie des poudres, la pulvérisation au plasma, le dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD / PVD), les méthodes de laminage et d'infiltration, en plus de la famille de la fabrication en forme libre solide (SFF) ou de la fabrication additive (AM) avec ses sous-catégories.

De nos jours, divers types de matériaux peuvent être utilisés dans les processus AM, y compris le matériau métallique dans LENS et DMD, le matériau polymère dans FDM et SLA et le matériau biologique dans l'impression jet d'encre et la micro extrusion. (Liu ZY et al, 2018).

De nombreuses publications qui se concentrent sur la description des détails des différentes méthodes de production et discutent des différents aspects techniques, avantages, limites, applications et tendances à la recherche se trouvent dans la littérature (Gupta A, Talha M, 2015), (Akinlabi R, Mahamood E, 2017), (Tan C et al., 2017), (Mahamood RM, Akinlabi ET, 2015), (Watanabe Y, Sato H, 2011), (Miyamoto Y, 1999), (Miyamoto Y, 1996), (Sobczak J, Drenchev L, 2009), (Gasik M, 2010), (Kieback et al., 2003).

Il est clair que la plupart des travaux de recherche se sont concentrés sur la caractérisation mécanique expérimentale (en particulier la traction et la dureté) (Jayakumar et al., 2018), la prédiction du taux d'usure (EL-Galy et al., 2018) ou l'évaluation des propriétés thermiques (Guo-qin et al., 2009).

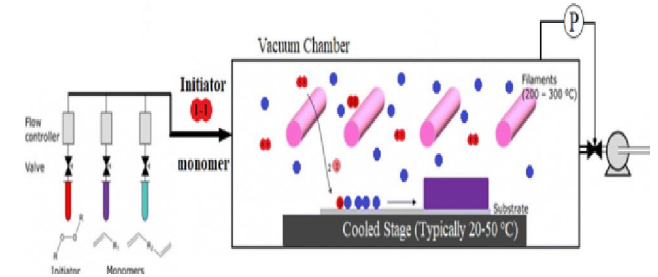
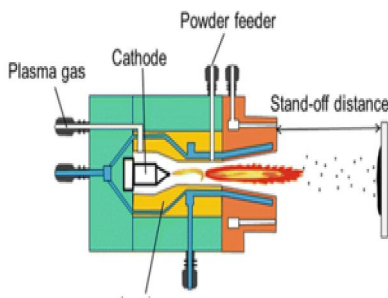
Très peu de groupes de recherche envisagent la simulation numérique des FGM. Cela peut être dû au haut degré de complexité lié à la modélisation des différents constituants et de leurs propriétés, à la modélisation des interfaces et au changement progressif de structure.



Méthodes de coulée centrifuge [Watanabe Y et al., 2011 ;

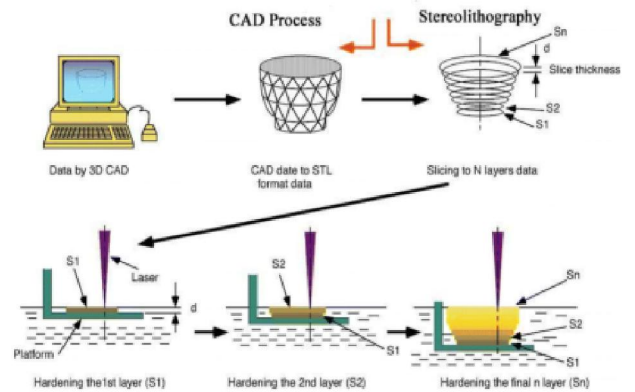
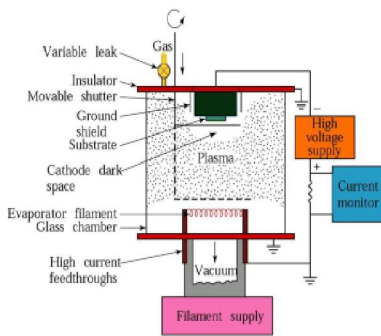
Métallurgie des poudres [Popoola P et al., 2016]

Tripathy A et al., 2018]



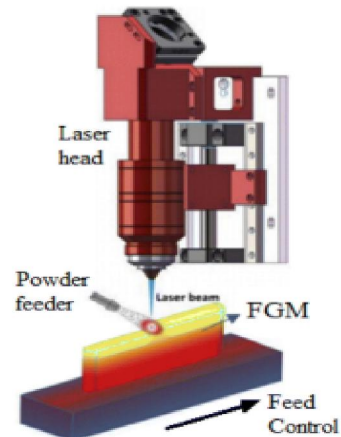
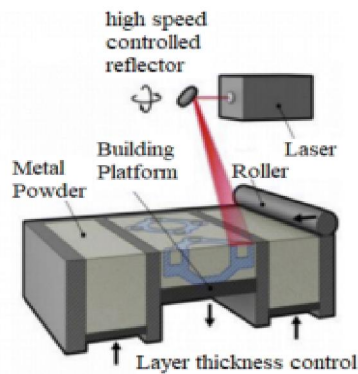
Dépôt chimique en phase vapeur [Ansari A et al., 2010]

Formation par projection de plasma [Malandrino G, 2009]



Dépôt physique de vapeur [Seol Y et al., 2012]

Fabrication solide de forme libre [Chen F et al., 2019]



I.5 Classification des FGM

Laser sélectif frittage / fusion [Leu MC et al., 2012] ; Mise en forme du filet par laser basée sur le dépôt de poudre [Leu MC et al., 2012]

Figure I.3 : Techniques de traitement couramment utilisées pour la production de FGM

I.5. Classification des FGM

Au fil du temps, et en raison du développement des d'applications et des technologies pour produire des FGM à différentes échelles, différentes classifications sont apparues. Nous nous contenterons de citer trois critères de classifications, à savoir : la structure, le type et le domaine d'application des FGM (Saleh et al., 2019), (Parihar et al., 2016).

I.5.1 Selon la structure des FGM

Les FGM peuvent généralement être classés en deux groupes principaux: matériau gradué continu et discontinu comme le montre la figure I.4 (Makwana et al., 2014). Dans le premier groupe, aucune zone claire ou ligne de coupe de séparation ne peut être observée à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone. Dans le deuxième groupe, les ingrédients du matériau changent selon une gradation par étape discontinue qui est connue sous le nom de FGM en couches ou discrètes. Continus et discrets peuvent en outre être classés en trois types: gradient de composition (Figure. I.4 c, f), gradient d'orientation (Figure I.4 d, g), gradient de fraction (Figure. I.4 e, h). Un autre sous-groupe peut être obtenu en considérant le changement de taille (par exemple, grossissement de la taille des grains ou granulométrie différente) (Chen et al., 2019).

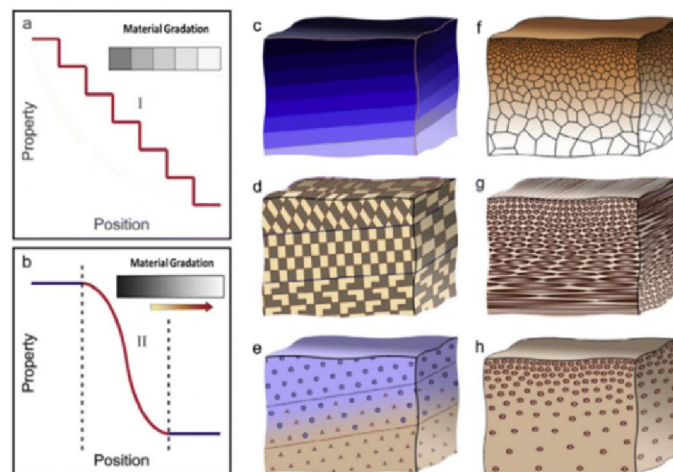


Figure I.4: Matériaux fonctionnellement classés avec différentes formes de gradient [Chen et al. 2019]. **a** FGM discrètes / discontinues avec interface. **b** FGM en continu sans interface. **c, f** Gradient de composition. **d, g** Gradient d'orientation. **e, h** Gradient de fraction

I.5.2. Selon le type de gradient FGM

Les FGM peuvent généralement être classés en trois groupes différents de gradient: composition, microstructure et porosité comme le montre la figure I.5 (Mahmoud et al., 2017). Le type de composition du gradient de FGM dépend de la composition du matériau, qui varie d'une substance à l'autre, conduisant à différentes phases avec des structures chimiques différentes. Ces différentes phases de production dépendent de la quantité synthétique et des conditions dans lesquelles les matériaux renforcés sont produits (Popoola et al., 2016). Au cours du processus de solidification, le type de microstructure du gradient FGM peut être obtenu de sorte que la surface du matériau s'éteigne. Dans ce type, le noyau du même matériau peut refroidir lentement, contribuant à générer différentes microstructures de la surface à l'intérieur du matériau (Popovich et al., 2016), (Zhang et al., 2018). Avec les changements de localisation spatiale dans le matériau en vrac, le type de porosité du gradient de FGM dans le matériau change (Mota et al., 2019). Les tailles de particules de poudre peuvent être mesurées en faisant varier les tailles de particules de pores utilisées pendant la gradation à différentes positions dans le matériau en vrac (Gabbrielli et al., 2008).

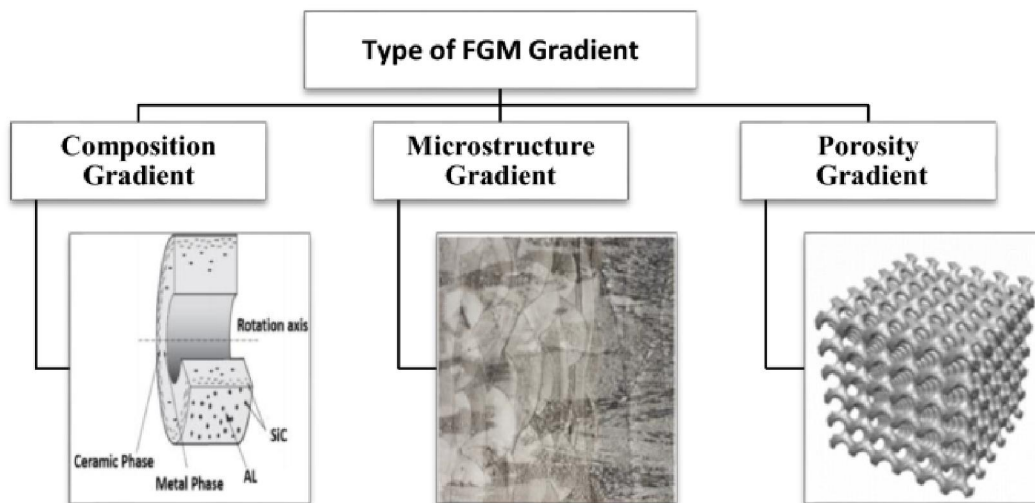


Figure I.5: Exemple typique de trois types différents de gradient de FGM
[Popoola et al. 2016]

I.5.3. Selon la nature du processus de gradation des FGM

Une autre classification du processus de gradation divise la production des FGM en un traitement constructif et de transport (Siddhartha AP, 2009). La première catégorie suppose une construction couche par couche commençant par une distribution opposée dans laquelle les gradients consécutifs sont exactement construits (Ngo et al., 2018). Alors que dans la

deuxième catégorie, les gradients à l'intérieur des structures dépendent de la physique de la méthode de transport (par exemple, écoulement de fluide, diffusion ou conduction thermique) (Wang K, 2012), (Kaushal et al., 2017). L'avantage des méthodes constructives est la possibilité de fabriquer un nombre illimité de dégradés. Les progrès de la fabrication additive au cours des deux dernières décennies ont prouvé que les processus de gradation constructive sont technologiquement et économiquement réalisables, en particulier pour les prototypes et la production en petites séries (Figure I.6), même avec des constituants qui ne sont pas entièrement compatibles ou de nature homogène (Pai et al., 2009). Les techniques de fabrication additive (AM) offrent des avantages supplémentaires sous forme de précision et de répétitivité pour reproduire les gradients et les propriétés conçus (Wei et al., 2019).

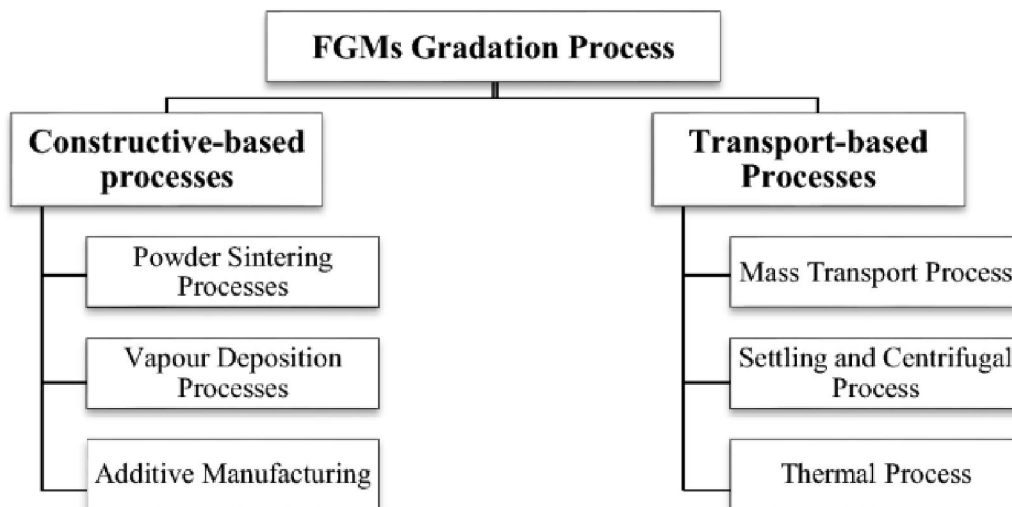


Figure I.6: Classification des FGM selon la méthode de gradation [Pai et al. 2009]

I.6. le domaine d'application

Dans la figure I.7, sont illustrés les différents domaines d'application des FGM. Au début, ils étaient élaborés pour les structures aéronautiques et les réacteurs à fusion (Hirai, 1999) et (Uemura, 2003) du fait de leur capacité à résister à des contraintes thermiques abusives. Au fil du temps, leur utilisation a été élargie dans une multitude de domaines, du fait qu'ils assurent d'énormes performances sous des conditions très dures. Du fait de sa résistance à la fatigue thermique et sa durée de vie, la céramique est utilisée fréquemment comme barrière thermique pour les moteurs, les turbines à gaz, et en optiques (Nguyen, 2007), des sondes

(Müller, 2003), des déclencheurs (Qiu et al., 2003), des armures metal/ceramic (Liu, 2003), des détecteurs photoélectriques (Paszkievicz, 2008) et des implants dentaires (Watari et al., 2004). Aujourd’hui, les matériaux produits sont plus légers, plus performants avec une résistance et une durabilité exceptionnelle, leur application s’est élargie dans de nombreux domaines à savoir : le domaine du Génie civil et des travaux publics, l’énergie nucléaire, l’électronique, l’optique. (HOUARI, 2011).

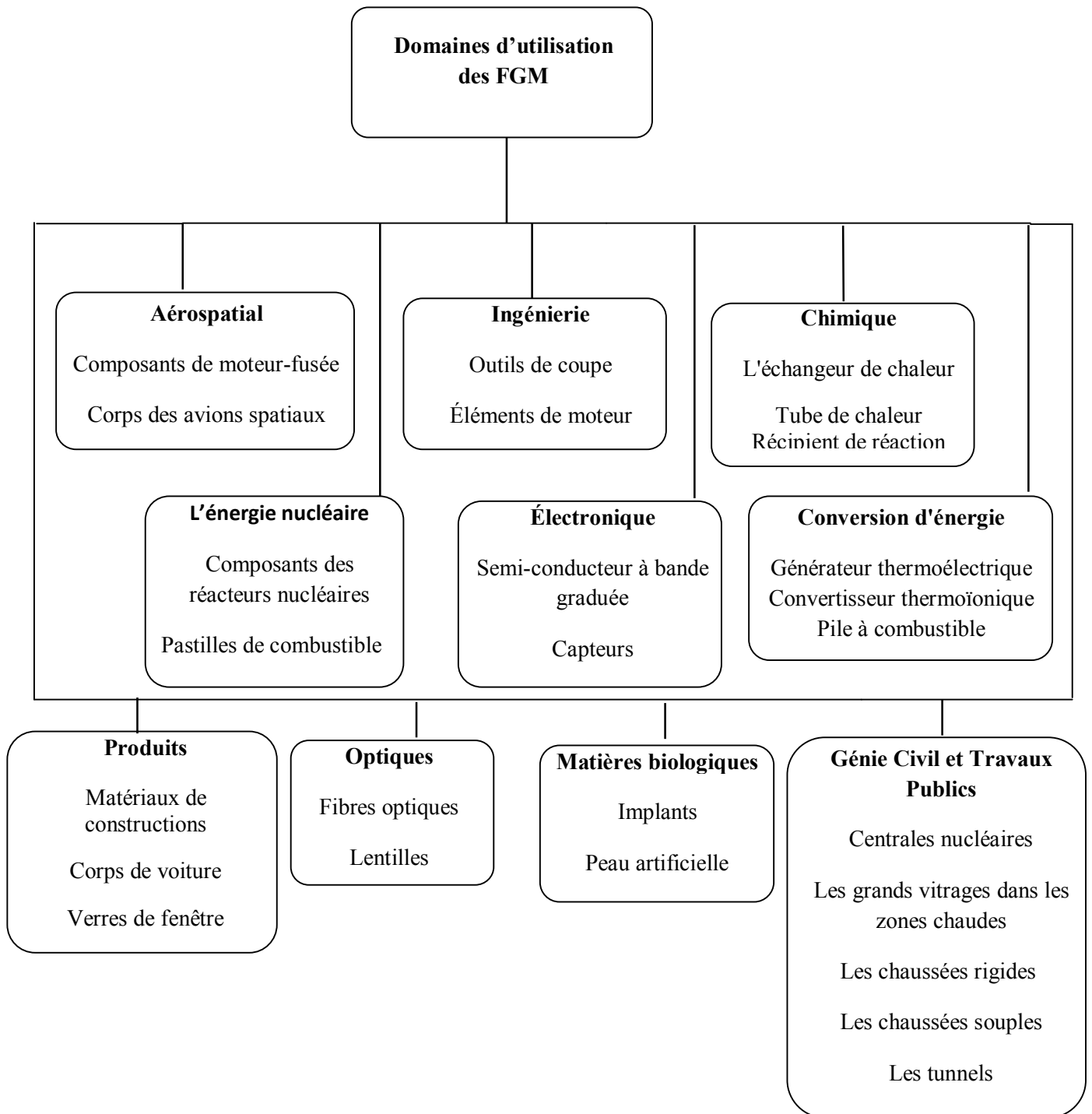


Figure I.7: Les principaux domaines d’application des FGM

I.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) constituent une nouvelle classe émergente de matériaux avancés, très attrayants pour une large gamme d'applications d'ingénierie car ils permettent la conception de différentes performances fonctionnelles au sein d'une pièce. Ils sont des matériaux hétérogènes présentant une variation spatiale contrôlée de leurs caractéristiques chimiques et / ou structurelles dans au moins une direction. Le gradient de propriété dans le matériau est provoqué par une dépendance de position de la composition chimique, de la microstructure ou de l'ordre atomique. Les FGM se distinguent des matériaux composites conventionnels par ce changement continu des caractéristiques. Afin d'analyser les fractions de volume, différentes fonctions de : puissance, exponentielle, sigmoïde sont utilisées par la majorité des chercheurs.

Une bonne adhérence entre les particules à l'intérieur comme à l'extérieur empêchera l'usure et la rupture de la plaque

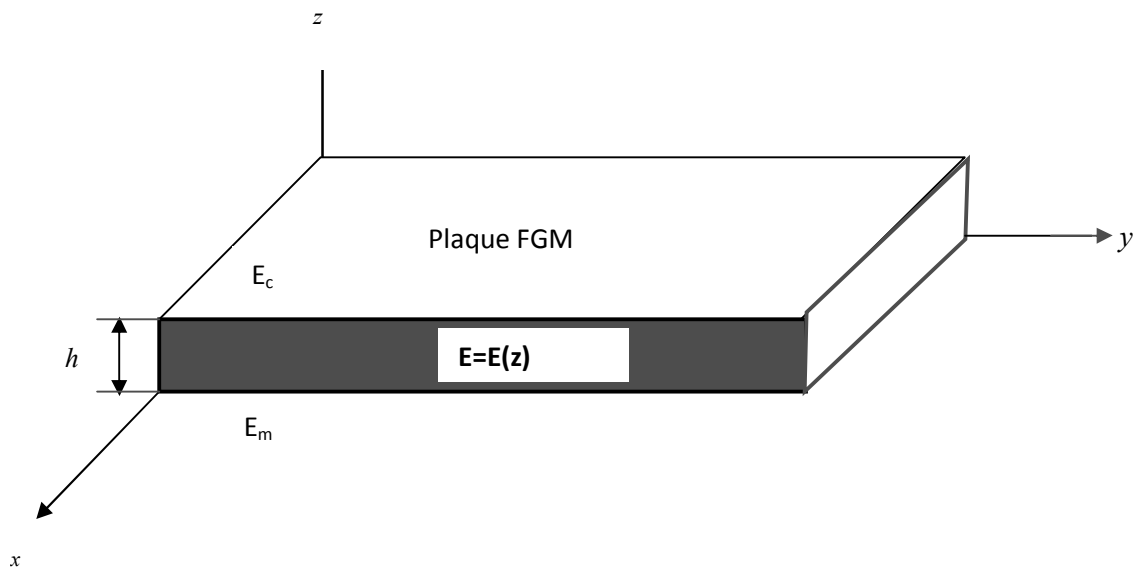


Figure I.8 : Géométrie d'une plaque en FGM.

x et y sont les coordonnées qui représentent le plan de la plaque, alors que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les surfaces supérieure et inférieure ont des propriétés matérielles différentes à savoir le module de Young et le coefficient de Poisson qui sont déterminés en fonction des demandes d'exécution. Ils sont en continuelle variation dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit:

$$E = E(z), \nu = \nu(z).$$

La variation du module de Young se fait en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou de la fonction sigmoïde (S-FGM) ou avec la fonction exponentielle (E-FGM).

I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM se soumet à la fonction de la loi de puissance qui suit.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.1)$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM ne peuvent être déterminées par la loi des mélanges (G. Bao et al. 1995) que si la fraction volumique locale $\nu(z)$ ne soit définie:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la figure I.9 illustre la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM, on constate le changement rapide de la fraction volumique près de la surface inférieure pour $k < 1$, contre une augmentation rapide près de la surface supérieure pour $k > 1$.

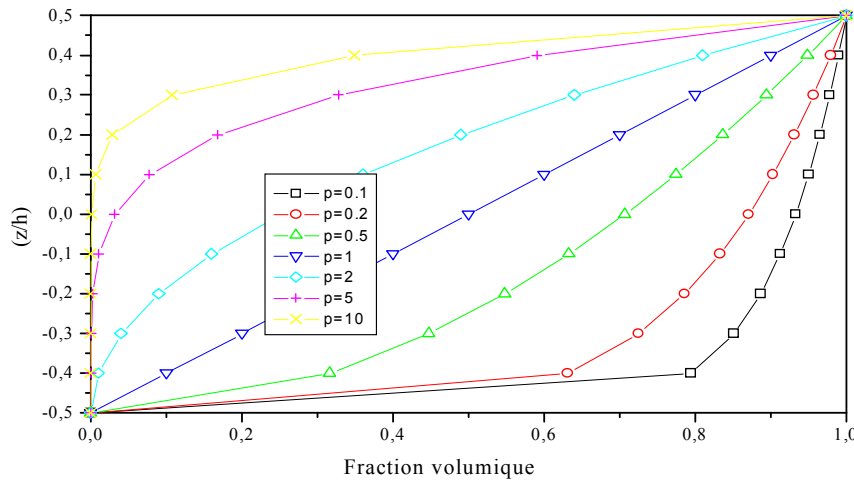


Figure I.9 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

En ajoutant à une plaque composite multicouche une plaque P-FGM d'une simple fonction de la loi de puissance, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement (G. Bao et al., 1995). De ce fait, Chung et chi (Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, 2003) ont utilisé deux fonctions de la loi de puissance pour définir la fraction de volume de la plaque FGM afin d'assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de la loi de puissance sont présentée par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En appliquant la loi des mélanges, le calcul du module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.10 représente la variation de la fraction volumique des équations (I.4.a) et (I.4.b) et qui montre les distributions sigmoïdes dans une plaque FGM dont le nom est (Plaque S-FGM)

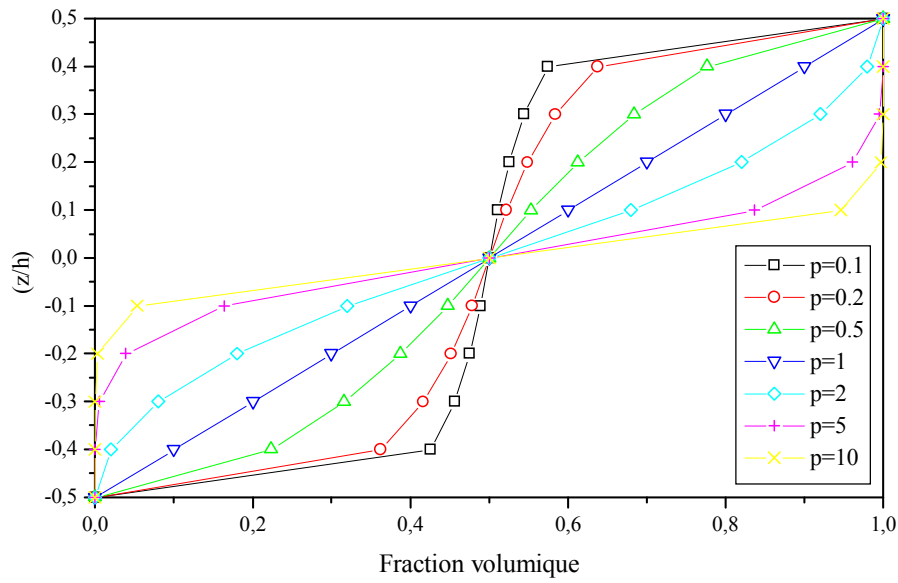


Figure I.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.7.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

La fonction exponentielle est utilisée par la majorité des chercheurs afin de décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, et qui s'écrit sous la forme, (F. Delale., F. Erdogan, 1983):

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \tag{I.5.a}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \tag{I.5.b}$$

La figure I.11 présente la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM

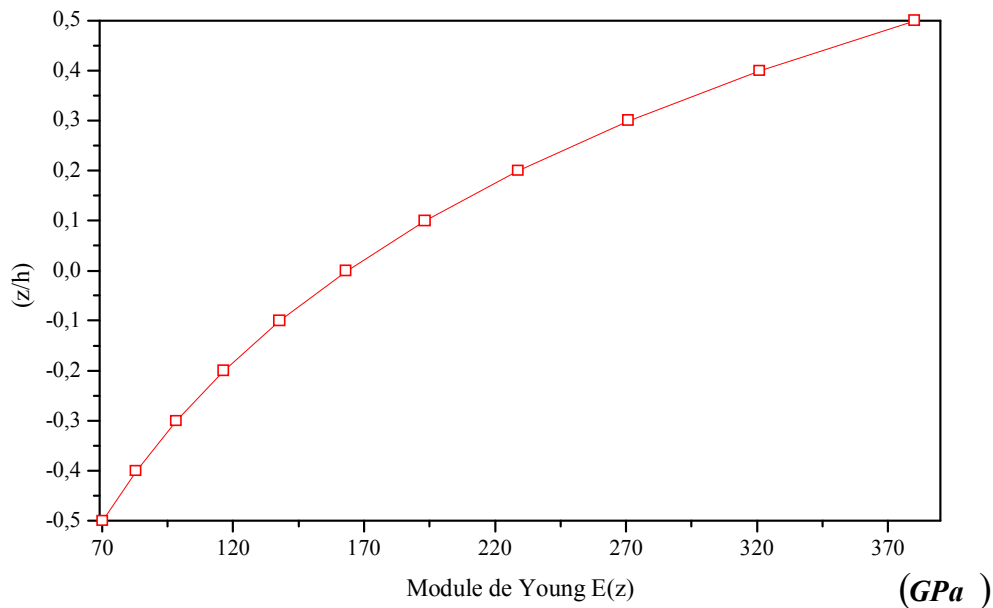


Figure I.11 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur évolution, leurs principales méthodes de fabrication, leur classification et leurs domaines d'application ainsi que les lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.

Une multitude de structures dans des domaines différents peuvent être créées et exploitées avec le changement progressif dans les propriétés des matériaux à gradients de propriétés à savoir les structures spéciales et de génie civil.

Chapitre II

Rappel sur les théories des plaques

II.1. Introduction :

La résolution des problèmes liés aux comportements statiques et dynamiques des structures des plaques FGM ou des poutres nécessite le choix de la bonne théorie ainsi que la méthode à appliquer.

En 1888, Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, qui sont inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli afin de créer une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love. Sur la base des travaux de (Rayleigh, 1877), (Timoshenko, 1921), (Reissner, 1945) et (Uflyand, 1948), Mindlin a renforcé la théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre). Une amélioration des hypothèses des théories classiques et du premier ordre est apparue plus tard, avec des théories d'ordre supérieur lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il ne faut pas oublier qu'il y a aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Ce chapitre présentera des modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature afin que la variation du champ de déplacement à travers l'épaisseur des plaques soit améliorée.

II.2. Les modèles analytiques des plaques FGM :

II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :

On parle d'une plaque mince Lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable par rapport à la flèche générée par la courbure de la plaque. La part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement dans le cas d'une plaque homogène isotrope. (L/h).

En se basant sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, la théorie classique des plaques minces (CPT) qui définit qu'une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation comme illustré sur la figure II.1, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

On peut se référer à ce modèle de plaque à Timoshenko et Woinowsky-Krieger (Timoshenko, 1959), (Reddy, 1997), (Reddy, 1999).

Le champ de déplacement basé sur les hypothèses ci-dessus, est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

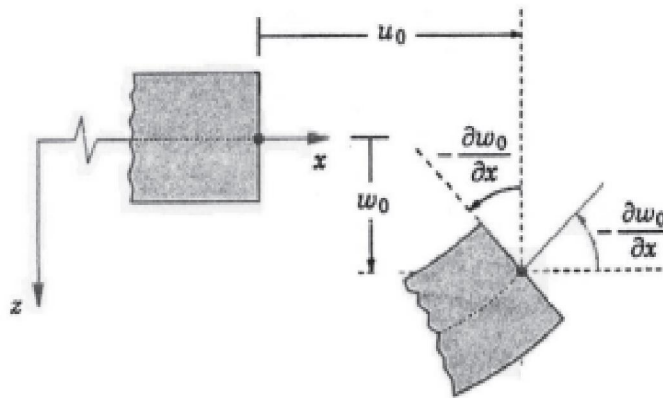


Figure II.1 : Représentation de la plaque de Love Kirchhoff [Reddy, 1997].

Etant donné que l'effet de cisaillement transverse n'est pas pris en considération dans ce modèle, donc les résultats obtenus sont imprécis pour les plaques épaisses.

II.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :

Contrairement à la théorie précédente, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre tient compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, donc un facteur de correction est indispensable. Les études établis par (Reissner, 1945), (Mindlin, 1951) sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ont abouti au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi qu'au modèle de Timoshenko et Woinowsky-Krieger (Timoshenko, 1959), (Reddy, 1997), (Reddy, 1999).

La théorie du premier ordre repose sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z\varphi_x(x, y) \quad (\text{II.2.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z\varphi_y(x, y) \quad (\text{II.2.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.2.c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

En remplaçant ϕ_x et ϕ_y dans le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus, ce qui permettra de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière

section $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$; $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$.

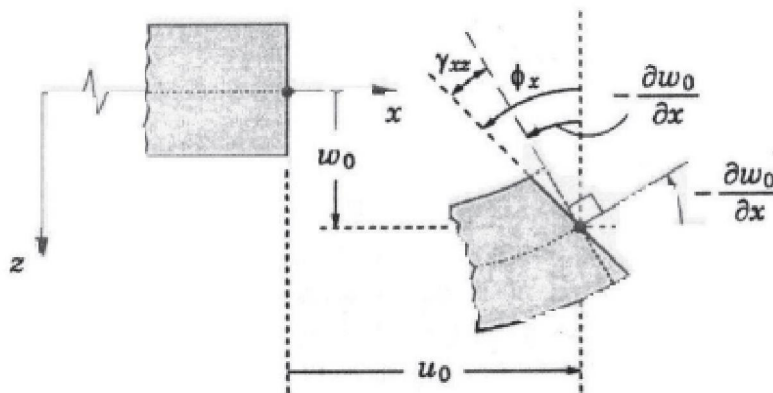


Figure II.2 Représentation de la plaque de Reissner-Mindlin [Reddy, 1997].

Des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées, afin d'éviter l'introduction d'un facteur de correction.

II.2.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

La théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur contrairement à la théorie CPT et la théorie FSDT avec les accords de la distribution linéaire du déplacement dans l'épaisseur. De ce fait, les effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale sont pris en considération. Par contre les facteurs de correction ne sont pas exigés. On peut consulter sur de tels modèles (Hildebrand, 1949), (Naghdi, 1957), (Reissner, 1975), (Reddy, 1984), et

(Kant, 2002). Nous présenterons ici quatre modèles de plaque utilisées pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

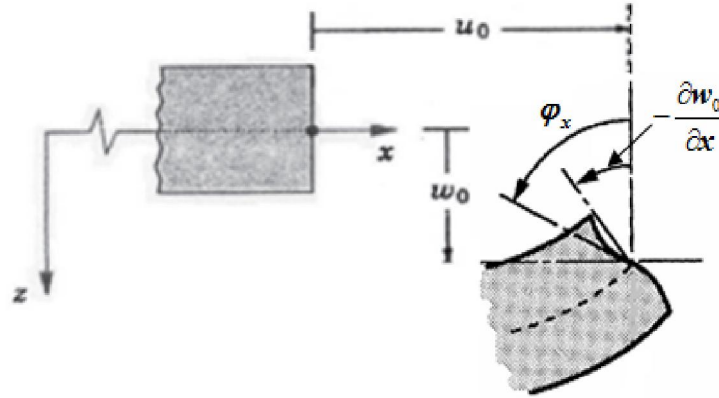


Figure II.3: Représentation de la plaque d'ordre élevé [Reddy, 1997].

Le champ de déplacement s'écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y) \quad (\text{II.3.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y) \quad (\text{II.3.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3.c})$$

Où :

(u_0, v_0, w_0) sont les déplacements en membrane,

(ϕ_x, ϕ_y) les rotations autour des axes x et y ,

$\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

En effet, dans la théorie classique des plaques (CPT) les déplacements sont obtenus en prenant $\Psi(z) = 0$, tandis que dans la théorie de premier ordre (FSDT) ils sont obtenus par $\Psi(z) = z$.

Les déplacements de la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre dans l'approche de Reddy (TSDT) (Reddy, 1997), (Reddy, 1999) :

$$\Psi(z) = z\left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \quad (\text{II.4})$$

Le champ de déplacement membranaire est cubique dans le modèle de Reddy. Ce qui donne une bonne approximation des contraintes de cisaillement transverse en comparaison avec la solution d'élasticité tridimensionnelle.

Sur les surfaces libres, les conditions aux limites sont satisfaisantes et les contraintes de cisaillement transverse suivent une distribution parabolique dans l'épaisseur.

(Touratier, 1991) a proposé le modèle sinus (SSDT) qui n'a pas de fonction polynomiale ce qui le rend différent des autres modèles d'ordre supérieur. Pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur une fonction trigonométrique sinusoïdale est introduite. La fonction de cisaillement transverse est comme suit :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Avec le modèle sinus les contraintes de cisaillement transverse obtenues ont une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. Ce modèle présente une meilleure précision en le comparant avec la solution exacte de la théorie de Reddy.

Karama et al ont développé un modèle exponentiel de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT).

on obtient :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ Et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.6})$$

(Ait Atmane, 2010) a développé un modèle hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) on obtient:

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

II.3. Aperçu sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Afin d'atteindre leur objectif qui est de dépasser les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé à travers leurs travaux de recherches des modèles d'ordre élevé qui se distinguent dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $\psi(z)$. Ils sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) (Whitney, 1973) ; (Nelson, 1974) ; (Lo, 1977); (Touratier, 1991). Nous citons en particulier :

-Pour d'Ambartsumyan (Ambartsumyan, 1969) avec ;

$$\psi(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- Pour Reissner (Reissner, 1945) avec ;

$$\psi(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- Pour Levinson, Murthy (Murthy, 1981) et Reddy Avec ;

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Sur les surfaces libres, les conditions aux limites sont satisfaisantes et les contraintes de cisaillement transverse suivent une distribution parabolique dans l'épaisseur. Les résultats obtenus par le modèle de Reddy sont très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par (Kan, 2002).

Le modèle (sinus) qu'a proposé Touratier n'utilise pas de fonction polynomiale ce qui le rend différent des autres modèles d'ordre élevé. La modélisation de la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur est effectué après l'introduction de la fonction

trigonométrique sinusoïdale (Touratier, 1991) .La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{(2n+1)} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots\right)\end{aligned}\quad (\text{II.11})$$

Avec le modèle sinus on obtient les contraintes de cisaillement transverse qui prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. Ce modèle présente une meilleure précision (Reddy ,1984). En se référant aux travaux de Touratier, la construction d'un élément fini triangulaire à six nœuds est réalisé pour les structures multicouches géométriquement non linéaires (Polit, 1997) et (Dau, 2006).

(Afaq et al., 2003) ont dernièrement proposé un modèle exponentiel dont la cinématique est plus importante. La fonction de distribution de cisaillement transverse est comme suit :

$$\Psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.12})$$

Le développement en puissance pair et impair de la variable z pour la fonction exponentielle, est différent de celui de la fonction (sinus) de (Touratier, 1991) qui ne permet qu'un développement en puissance impair.

Les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, demeurent discontinues, même si les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface. Donc, les structures multicouches avec des propriétés différentes des interfaces seront plus difficiles a analyser. (Duong, 2008).

Le tableau suivant regroupe les différentes fonctions de cisaillement avec une comparaison sur les différents modèles.

Tableau II.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM [BOUKHARI Ahmed 2015]

Théorie	Intitulé	Fonction de cisaillement $\psi(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement	Domaine de validité
CPT.Kirchoff [Kirchoff, 1850a] et [Kirchoff, 1850b]	Théorie classique des plaques	0	Plaques minces
FSDT Midlin [Midlin, 1951]	Théorie de déformation des plaques du 1er ordre	z	constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [Ambartsumian, 1958]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Linéaire	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner [Reissner, 1975]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier [Touratier, 1991]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama et al. [Karama, 2003]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z e^{-2(z/h)^2}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT, Levinson [Levinson, 1980], Reddy [Reddy, 1984]	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [Aydogdu, 2003]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses

Elmeiche, Tounsi et al [Elmeiche, 2011]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sin\left(\frac{hz}{\pi}\right) z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aite atmane et al [Aite atmane, 2010]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} z$ $-\frac{h}{\pi} \frac{\sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [Shimpi, 2002]	Théorie raffinée des plaques	$h\left[\frac{1}{4}\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{5}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses

II.4 L'influence de la déformation normale (effet de stretching)

Dans les différentes théories d'ordre élevé qui comprennent les contraintes normales transversales, les termes d'ordre supérieur sont introduits dans les hypothèses cinématiques pour les deux composantes de déplacement. Nombreux modèles HSDT ont été proposés ces dernières années pour l'étude des structures FGM. Parmi Ces modèles, il existe ceux qui prennent en considération l'influence de la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur. En introduisant l'effet de la déformation normale dans un modèle, le déplacement transversal est supposé dépendant des coordonnées d'épaisseur satisfaisant ainsi les prescriptions de (Koiter, 1959), c'est-à-dire $\varepsilon_z \neq 0$. L'effet de la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur sur la réponse mécanique des structures FGM est récemment démontrée par Bousahla et al (Bousahla, 2014), Fekrar et al (Fekrar, 2014), Belabed et al (Belabed, 2014), Hebali et al (Hebali, 2014), Bessaim et al (Bessaim, 2013) , Saidi et al (Saidi, 2013), Houari et al (Houari, 2013), Hamidi et al. (Hamidi, 2015), Bourada et al. (Bourada, 2015), Larbi Chaht et al. (Larbi Chaht, 2015), (Benbakhti, 2016). Abualnour et al. (Abualnour, 2018), et donc, le champ de déplacement s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y, t) dx \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y, t) dy \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + g(z) \phi_z
 \end{aligned}
 \tag{II.13}$$

Avec :

φ_z : C'est la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général sur les différentes théories des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques FGM à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Nous avons aussi présenté une synthèse sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé et les travaux des auteurs sur les modèles qui prennent en considération l'influence de la déformation normale (ou l'effet de stretching) dans la direction de l'épaisseur. les différentes théories d'ordre élevé qui prennent en considération les contraintes normales transversales sur la réponse mécanique des structures FGM.

CHAPITRE III

Le modèle théorique et le développement analytique

III.1 Introduction

Beaucoup de théories ont été développées afin de résoudre des problèmes liés aux déplacements et déformations des différents types de structures en s'appuyant sur le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords de la structure, et au final complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Nous exposons dans ce chapitre une nouvelle théorie de plaque de déformation de cisaillement hyperbolique, avec la prise en compte de l'effet d'étirement pour l'analyse de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées simplement supportées dans les environnements thermiques. La théorie tient compte de la distribution parabolique des contraintes transversales de cisaillement et satisfait aux conditions limites de traction nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement. Cette théorie n'a que cinq inconnues par rapport aux autres théories de cisaillement et de déformation normale.

III.2 Formulation théorique de la présente théorie

Considérons une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée simplement supportée de longueur a , largeur b et d'épaisseur h uniforme dans la configuration de référence sans contrainte. Le système de coordonnées pour les plaques FGM est illustré dans la Figure III. 1.

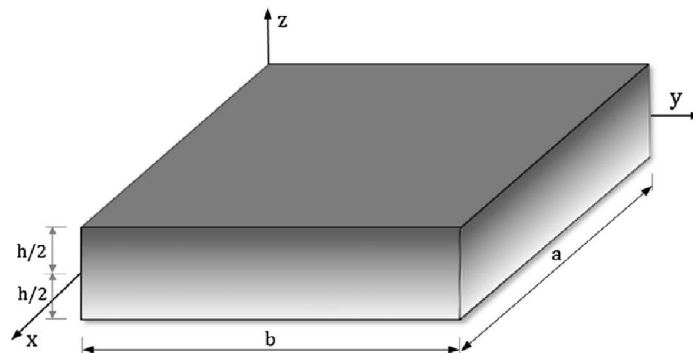


Figure III.1 : La Géométrie d'une plaque à gradient fonctionnel dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

III.2.1 Propriétés des matériaux

La plaque FGM est constituée d'un matériau élastique et isotrope à gradation fonctionnelle dont les propriétés de matériau varient en douceur uniquement dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés efficaces du matériau de la plaque FGM tels que le module de Young $E(z)$, la conductivité thermique $k(z)$, la dilatation thermique $\alpha(z)$ et la densité de masse $\rho(z)$ basés sur la règle du mélange, et qui sont exprimées comme (Bourada et al., 2019; Berghouti et al., 2019):

$$P_{eff}(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (III.1)$$

Pour prédire plus précisément le comportement des FGM à haute température, il est nécessaire de tenir compte de la dépendance de la température des propriétés du matériau. L'équation non linéaire des propriétés des matériaux thermo-élastiques en fonction de la température $T(K)$ peut être exprimée comme suit (Shahrjerdi et al., 2011; Attia et al., 2015):

$$P(z) = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (III.2)$$

Où $P(z)$ désigne la propriété matérielle et $T = T_0 + \Delta T(z)$ indique la température de l'environnement; $T_0 = 300(K)$ est la température ambiante; P_{-1} , P_0 , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients des propriétés des matériaux dépendant de la température propres aux matériaux constitutifs visibles dans le tableau des propriétés des matériaux (Tableau V.1) pour FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$), et ($Si_3N_4/SUS304$) et $\Delta T(z)$ est l'augmentation de température uniquement dans le sens de l'épaisseur, tandis que la conductivité thermique k est indépendante de la température.

III.2.2 Théorie d'ordre élevé hyperboliques incluant un effet d'étirement.

Contrairement aux autres théories de cisaillement et de déformation normale, le nombre d'inconnues dans la présente théorie est seulement de cinq. La théorie tient compte de la distribution parabolique des contraintes transversales de cisaillement et satisfait aux conditions limites de traction nulle sur les surfaces de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement.

III.2.2.1 Hypothèses de la présente théorie

- (i) Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur h de la plaque et par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.
- (ii) Les composantes des déplacements u et v dans les directions (x) et (y)

$$u = u_0 + u_b + u_s$$

$$v = v_0 + v_b + v_s$$

Tels que : u_0 et v_0 représentent les déplacements en membrane, ils sont donnés par :

$$u_0(x, y, t) \text{ et } v_0(x, y, t) \text{ respectivement.}$$

u_b et v_b , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques, elles sont données par :

$$z \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ et } z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

u_s et v_s sont les composantes de cisaillement, elles sont données par :

$$k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \text{ et } k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \text{ respectivement.}$$

- (iii) Le déplacement transversal $w(x, y, z, t)$ est composé de deux termes : $\omega_0(x, y, t)$ et $g(z)\varphi_z(x, y, t)$ qui représentent la partie de la flèche de la plaque, tel que la dérivée de cette composante est égale numériquement à la rotation de la section transversale et la contrainte transversale de cisaillement à travers l'épaisseur respectivement.

III.2.2.2 Cinématique et équations constitutives

Les relations constitutives linéaires pour les FGM élastiques et isotropes, peuvent s'écrire:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.3}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont des composantes de contrainte et de déformation, respectivement.

Le calcul des constantes élastiques Q_{ij} dépend de ε_z dans l'hypothèse considérée. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation. (III.1), les coefficients de rigidité, Q_{ij} , peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{(1-\nu)E(z,T)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.4a})$$

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu E(z,T)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (\text{III.4b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z,T)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.4c})$$

Notez que pour la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) qui néglige l'étirement de l'épaisseur $\varepsilon_z = 0$, les coefficients Q_{ij} devrait être:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z,T)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11} \quad (\text{III.5a})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z,T)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.5b})$$

Sur la base de la théorie de la plaque épaisse et en incluant l'effet de la contrainte normale transversale (effet d'étirement de l'épaisseur), les hypothèses de base pour le champ de déplacement de la plaque peuvent être décrites comme

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie et la théorie proposée dans la présente étude a une fonction hyperbolique sous la forme (Taleb et al.,2018; Nguyen, 2015):

$$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z \frac{6}{h\sqrt{13}} \quad (\text{III.7})$$

On peut observer que la cinématique de l'équation. (III.6) utilise seulement cinq inconnues

(u_0 , v_0 , w_0 , θ et φ_z). Les expressions de déplacement de contraintes, basées sur cette formulation, sont données comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III.8})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \quad (\text{III.9b})$$

Et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{III.9c})$$

On peut observer à partir de l'équation (III.8) que les déformations transversales de cisaillement $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont égales à zéro aux surfaces supérieure $(z = h/2)$ et inférieure $(z = -h/2)$ de la plaque. Un coefficient de correction de cisaillement n'est donc pas nécessaire.

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une procédure de type Navier et peuvent être exprimées comme suit (Taleb et al., 2018):

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.10})$$

Où les coefficients A' et B' sont considérés en fonction du type de solution utilisée, dans ce cas via la méthode Navier. Par conséquent A', B', k_1 et k_2 sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{III.11})$$

Où

α et β sont définis dans l'équation (III.34).

III.2.2.3 Équations gouvernantes

Les équations du mouvement pour la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées peuvent être dérivées du principe de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U) dt = 0 \quad (\text{III.12})$$

Où :

t est le temps, t_1 et t_2 sont les temps initial et de fin, respectivement, δK est la variation de l'énergie cinétique et δU est la variation de l'énergie de contrainte totale. L'énergie de déformation totale du faisceau peut être représentée par :

$$U = U_d + U_T \quad (\text{III.13})$$

Où :

U_d est l'énergie de déformation due aux contraintes mécaniques et U_T est l'énergie de déformation provoquée par les contraintes initiales dues à l'élévation de température. L'énergie de déformation U_d et U_T sont donnés par (Li et al., 2008; Kim, 2005; Shahrjerdi et al., 2011)

$$U_d = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \quad (\text{III.14})$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x^T d_{11} + \sigma_y^T d_{22}] dV \quad (\text{III.15})$$

Où :

d_{ij} , ($i, j = 1, 2$) est la relation non linéaire déformation-déplacement (Shahrjerdi et al., 2011).

En substituant d_{ij} en équation (III.15) l'équation suivante est obtenue :

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V \left[\sigma_x^T \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma_y^T \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \right] dV \quad (\text{III.16})$$

Dans l'équation (III.16), les contraintes thermiques σ_x^T et σ_y^T sont données par (Attia et al., 2015; Daikh, 2019),

$$\sigma_x^T = -(Q_{11} + Q_{12})\alpha(z, T)\Delta T(z) \text{ et } \sigma_y^T = -(Q_{21} + Q_{22})\alpha(z, T)\Delta T(z) \quad (\text{III.17})$$

L'énergie cinétique de la plaque s'exprime comme suit:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(z, T)(\dot{u} + \dot{v} + \dot{w})dV \quad (\text{III.18})$$

En substituant les équations (III.13) et (III.18), dans l'équation (III.12) et intégrant par parties, les équations du mouvement en termes de composantes de déplacement de la plaque FGM sont obtenues comme suit:

$$\begin{aligned} & (A_{11} + A_{11}^T)d_{11}u_0 + (A_{66} + A_{22}^T)d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - (B_{11} + B_{11}^T)d_{111}w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T)d_{122}w_0 + (B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_2 B' + B_{22}^{sT} k_1 A') d_{122}\theta \\ & + (B_{11}^s + B_{11}^{sT})k_1 A' d_{111}\theta + L d_1 \varphi_z = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + k_1 A' J_1 d_1 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III.19 a})$$

$$\begin{aligned} & (A_{22} + A_{22}^T)d_{22}v_0 + (A_{66} + A_{11}^T)d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12}u_0 - (B_{22} + B_{22}^T)d_{222}w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T) d_{112}w_0 + (B_{66}^s(k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_1 A' + B_{11}^{sT} k_2 B') d_{112}\theta \\ & + (B_{22}^s + B_{22}^{sT})k_2 B' d_{222}\theta + L d_1 \varphi_z = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + k_2 B' J_1 d_2 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III.19 b})$$

$$\begin{aligned} & (B_{11} + B_{11}^T)d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T)d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T) d_{112}v_0 + (B_{22} + B_{22}^T)d_{222}v_0 \\ & - (D_{11} + D_{11}^T)d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122}w_0 - (D_{22} + D_{22}^T)d_{2222}w_0 + (D_{11}^s + D_{11}^{sT})k_1 A' d_{1111}\theta \\ & + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s)(k_1 A' + k_2 B')) d_{1122}\theta + (D_{22}^s + D_{22}^{sT})k_2 B' d_{2222}\theta + (D_{11}^{sT} k_2 B' + D_{22}^{sT} k_1 A') d_{1122}\theta \\ & - (D_{11}^T + D_{22}^T)d_{1122}w_0 + A_{11}^T d_{11}w_0 + A_{22}^T d_{11}w_0 + (L^s + E_{11}^T)d_{11}\varphi_z + (L^s + E_{22}^T)d_{22}\varphi_z = I_0 \ddot{w}_0 + \\ & I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) + J_0 \ddot{\varphi}_z \end{aligned} \quad (\text{III.19 c})$$

$$\begin{aligned}
& -\left(B_{11}^s + B_{11}^{sT}\right)k_1 A' d_{111} u_0 - \left(B_{12}^s k_2 B' + B_{22}^{sT} k_1 A' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')\right) d_{122} u_0 \\
& - \left(B_{12}^s k_1 A' + B_{11}^{sT} k_2 B' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')\right) d_{112} v_0 - \left(B_{22}^s + B_{22}^{sT}\right) k_2 B' d_{222} v_0 \\
& + \left(D_{11}^s + D_{11}^{sT}\right) k_1 A' d_{1111} w_0 + \left(\left(D_{12}^s + 2D_{66}^s\right) (k_1 A' + k_2 B')\right) d_{1122} w_0 + \left(D_{22}^s + D_{22}^{sT}\right) k_2 B' d_{2222} w_0 \\
& - \left(H_{11}^s + H_{11}^{sT}\right) (k_1 A')^2 d_{1111} \theta - \left(H_{22}^s + H_{22}^{sT}\right) (k_2 B')^2 d_{2222} \theta - \left(2 H_{12}^s k_1 k_2 A' B' + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s\right) d_{1122} \theta \\
& + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta + \left(D_{11}^{sT} k_2 B' + D_{22}^{sT} k_1 A'\right) d_{1122} w_0 \\
& - \left(H_{11}^{sT} (k_2 B')^2 + H_{22}^{sT} (k_1 A')^2\right) d_{1122} \theta + k_1 A' (R - A_{55}^s) d_{11} \varphi_z + k_2 B' (R - A_{44}^s) d_{22} \varphi_z = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) \\
& + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 \left((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta} \right)
\end{aligned} \tag{III.19 d}$$

$$\begin{aligned}
& L d_1 u_0 + L d_2 v_0 - \left(L^s + E_{11}^T\right) d_{11} w_0 - \left(L^s + E_{22}^T\right) d_{22} w_0 + k_1 A' (L^s - A_{55}^s) d_{11} \theta + k_2 B' (L^s - A_{44}^s) d_{22} \theta \\
& - \left(A_{55}^s + F_{11}^T\right) d_{11} \varphi_z - \left(A_{44}^s + F_{22}^T\right) d_{22} \varphi_z + R^s \varphi_z = J_0 \dot{w} + K_3 \ddot{\varphi}_z
\end{aligned} \tag{III.19 e}$$

Où :

d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \tag{III.20}$$

Et les composantes de rigidité sont calculées comme

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \\ A_{12}, B_{12}, D_{12}, B_{12}^s, D_{12}^s, H_{12}^s \\ A_{66}, B_{66}, D_{66}, B_{66}^s, D_{66}^s, H_{66}^s \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right\} dz \tag{III.21}$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \tag{III.22}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} [g^2(z)] dz \tag{III.23}$$

$$(L, L^s, R, R^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) Q_{13} dz \tag{III.24}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}^T, B_{11}^T, D_{11}^T, B_{11}^{sT}, D_{11}^{sT}, H_{11}^{sT}, E_{11}^T, F_{11}^T \\ A_{22}^T, B_{22}^T, D_{22}^T, B_{22}^{sT}, D_{22}^{sT}, H_{22}^{sT}, E_{22}^T, F_{22}^T \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z), g(z), g(z)^2) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \end{array} \right\} dz \tag{III.25}$$

Les inerties sont également définies comme :

$$(I_0, J_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, g(z), z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.26a})$$

$$(J_1, J_2, K_2, K_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (f(z), z f(z), f^2(z), g^2(z)) \rho(z) dz \quad (\text{III.26b})$$

III.3. Champs de température

Dans cette étude, quatre cas de distribution de température unidimensionnelle à travers l'épaisseur sont considérés, avec $T = T(z)$

III.3.1. Température uniforme :

Dans le cas de température uniforme, le champ utilisé est donné comme suit :

$$T(z) = T_0 + \Delta T(z) \quad (\text{III.27})$$

Où :

$\Delta T(z)$ indique le changement de température et $T_0 = 300K$ est la température ambiante.

III.3.2. Température linéaire :

Pour une plaque fonctionnellement graduée, en supposant des températures T_b et T_t sont imposées en bas et en haut de la plaque, le champ de température sous élévation linéaire de la température le long de l'épaisseur peut être obtenu comme suit:

$$T(z) = T_0 + \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{III.28})$$

III.3.3. Température non linéaire :

L'élévation de la température non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque est déterminée en résolvant l'équation de conduction thermique unidimensionnelle. L'équation unidimensionnelle de conduction de chaleur en régime permanent dans la direction z est donnée par :

$$T(z) = -\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) \quad (\text{III.29})$$

avec la condition aux limites $T(h/2) = T_t$ et $T(-h/2) = T_b = T_0$. Ici, un état sans stress est supposé existé à $T_0 = 300K$. Le coefficient de conductivité thermique $k(z)$ est supposé ici obéir à la relation de puissance en équation (III.1). La solution analytique à l'équation (III.17) est :

$$T(z) = T_b - (T_t - T_b) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz}{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz} \quad (\text{III.30})$$

Dans le cas de la plaque FGM en loi de puissance, la solution de l'équation (III.17) peut également être exprimée au moyen d'une série polynomiale (Shahrjerdi et al., 2011 ; Attia et al., 2015)

$$T(z) = T_b + \frac{(T_t - T_b)}{C_{ib}} \left[\left(\frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{k_{ib}}{(p+1)k_b} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{p+1} + \frac{k_{ib}^2}{(2p+1)k_b^2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{2p+1} - \frac{k_{ib}^3}{(4p+1)k_b^3} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{3p+1} + \frac{k_{ib}^4}{(4p+1)k_b^4} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{4p+1} - \frac{k_{ib}^5}{(5p+1)k_b^5} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{5p+1} \right] \quad (\text{III.31})$$

Avec :

$$C_{ib} = 1 - \frac{k_{ib}}{(p+1)k_b} + \frac{k_{ib}^2}{(2p+1)k_b^2} + \frac{k_{ib}^3}{(3p+1)k_b^3} + \frac{k_{ib}^4}{(4p+1)k_b^4} + \frac{k_{ib}^5}{(5p+1)k_b^5} \quad (\text{III.32})$$

Où, $k_{ib} = k_t - k_b$, avec k_t et k_b sont la conductivité thermique des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement.

III.3.4. Température sinusoïdale :

Le champ de température sous une évolution sinusoïdale à travers l'épaisseur est donné comme [Shahrjerdi, 2011; Bouazza, 2009]:

$$T(z) = T_b + \Delta T \left(1 - \cos \left(\frac{\pi z}{2h} \right) - \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (\text{III.33})$$

III.4. Solution analytique pour une plaque en FGM simplement appuyée:

Dans ce travail, nous nous intéressons aux solutions exactes de l'équation (III.19) pour une nano-plaque simplement appuyée. À l'aide de la procédure de solution de Navier, les expressions suivantes de déplacements (u_0 , v_0 , w_0 , θ , et φ_z) sont prises:

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{cases} = \begin{cases} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Z_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

$$\alpha = m\pi/a, \quad \beta = n\pi/b \quad (\text{III.35})$$

Où :

$$i = \sqrt{-1},$$

ω est la fréquence naturelle et (U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} , Z_{mn}) les coefficients de déplacement maximum inconnus.

En substituant les équations (III-34) dans l'équation (III-19), les solutions analytiques peuvent être déterminées par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & M_{14} & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & M_{35} & 0 & M_{55} \end{pmatrix} \begin{cases} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Z_{mn} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

Où

a_{ij} et M_{ij} sont donnés en annexe.

III.5. Conclusion

Ce chapitre nous a permis de prendre connaissance de la présente théorie. Cette théorie de plaque d'ordre supérieur de déformation de cisaillement a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, et n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Nous avons proposé une solution générale du comportement vibratoire des plaques FGM en utilisant une théorie hyperbolique d'ordre élevé avec la prise en compte de l'effet d'étirement. Cette théorie n'a que cinq inconnues, ce qui est avantageux par rapport aux autres théories de cisaillement et de déformation normale. Dans le chapitre qui suit, nous présenterons les résultats qui permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant aux résultats des autres théories d'ordre élevé.

Chapitre IV
Résultats et Discussions

IV.1. Introduction

Le choix du matériau pour la conception d'une nouvelle structure est très important, car il doit offrir plusieurs avantages et posséder des caractéristiques spécifiques élevées (bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'autres qualités).

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle classe de composites de plus en plus utilisés dans de nombreux domaines de l'ingénierie, en particulier dans les applications à haute température telles que les structures de chargement thermomécaniques, les aéronefs, les engins spatiaux, les revêtements plasmatiques pour les réacteurs à fusion et autres structures techniques dans un environnement à haute température (Li et al., 2008; Kar et Panda, 2015; Taleb et al., 2018; Tu et al., 2019), les avantages offerts par les matériaux à graduation fonctionnelle par rapport aux matériaux composites conventionnels c'est l'élimination des problèmes d'interface et la diminution de la répartition des contraintes (Taleb et al., 2018). L'utilisation des FGM semble être plus efficace pour la réalisation durable des structures.

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats numériques de l'analyse de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées simplement supportées dans des environnements thermiques, en utilisant une nouvelle théorie de plaque de déformation de cisaillement hyperbolique, y compris l'effet d'étirement. Dans cette théorie on n'utilise que cinq inconnues par rapport aux autres théories Ce modèle a un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées. Les propriétés du matériau des plaques à graduation fonctionnelle sont supposées dépendantes de la température et varient progressivement dans le sens de l'épaisseur selon un modèle de la loi de puissance.

IV.2. Résultats du comportement thermique et mécanique des plaques en FGM

Une association de deux matériaux, sont utilisés dans l'analyse du comportement thermique et mécanique des plaques FGM. Le $(\text{ZrO}_2/\text{Ti}-6\text{Al}-4\text{V})$ et le $(\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304})$. La description des propriétés est présentée au tableau (IV.1).

Tableau IV. 1: les coefficients des propriétés matérielles dépendant de la température pour (ZrO₂/Ti-6Al-4V) et (Si₃N₄/SUS304)

Matériel	Propriétés	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Si ₃ N ₄	$E(\text{GPa})$	348.43	0	-3.070×10^{-4}	2.160×10^{-7}	-8.946×10^{-11}
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	5.8723×10^{-6}	0	9.095×10^{-6}	0	0
	$\rho(\text{Kg/m}^3)$	2370	0	0	0	0
	ν	0.24	0	0	0	0
	k	9.19	0	0	0	0
SUS304	$E(\text{GPa})$	201.04	0	3.079×10^{-4}	-6.534×10^{-7}	0
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	12.330×10^{-6}	0	8.086×10^{-4}	0	0
	$\rho(\text{Kg/m}^3)$	8166	0	0	0	0
	ν	0.3262	0	-2.002×10^{-4}	3.797×10^{-7}	0
	k	12.04	0	0	0	0
ZrO ₂	$E(\text{GPa})$	$244.27 \times 10^{+9}$	0	-1.371×10^{-3}	1.214×10^{-6}	-3.681×10^{-10}
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	12.766×10^{-6}	0	-1.491×10^{-3}	1.006×10^{-5}	-6.788×10^{-11}
	$\rho(\text{Kg/m}^3)$	3000	0	0	0	0
	ν	0.3330	0	0	0	0
	k	1.80	0	0	0	0
Ti-6Al-4V	$E(\text{GPa})$	$122.56 \times 10^{+9}$	0	-4.586×10^{-4}	0	0
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	7.75788×10^{-6}	0	6.638×10^{-4}	-3.147×10^{-6}	0
	$\rho(\text{Kg/m}^3)$	4429	0	0	0	0
	ν	0.2888	0	1.108×10^{-4}	0	0
	k	7.82	0	0	0	0

Selon la littérature ci-dessus, la distribution de la température a une influence significative sur le comportement de la plaque FGM. Les propriétés thermiques et mécaniques des FGM soumises à une température de fonctionnement élevée ont été affectées de manière importante par la variation de température. Par exemple, le module de Young de l'acier inoxydable, du nickel et de la zircone est réduit de 37%, 21%, 34% et 31%, respectivement, lorsque la température augmente par rapport à la température ambiante (Yang et Shen 2003). La réponse structurelle réelle de la plaque à gradation fonctionnelle requise pour tenir compte de la dépendance à la température des propriétés du matériau et de la distribution de la température à travers l'épaisseur de la plaque.

La variation du module Young dans les plaques FGM à travers l'épaisseur en température ambiante, conditions thermiques uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdales est présentée dans les figures IV.1 à IV.5. La température ambiante $T_0 = 300(K)$ est définie pour toutes les conditions thermiques. L'augmentation de la température en température linéaire est $T_b = T_t = 600(K)$, les conditions thermiques non linéaires sont $T_b = 0(K)$ et $T_t = 600(K)$ et les

conditions thermiques sinusoïdales sont $T_b = 300(K)$ et $T_t = 300(K)$.

Les figures IV.1 et IV.2 montrent que la variation du module de Young élastique des plaques fonctionnellement graduées sur la température ambiante et la variation linéaire de la température avec l'indice de fraction volumique.

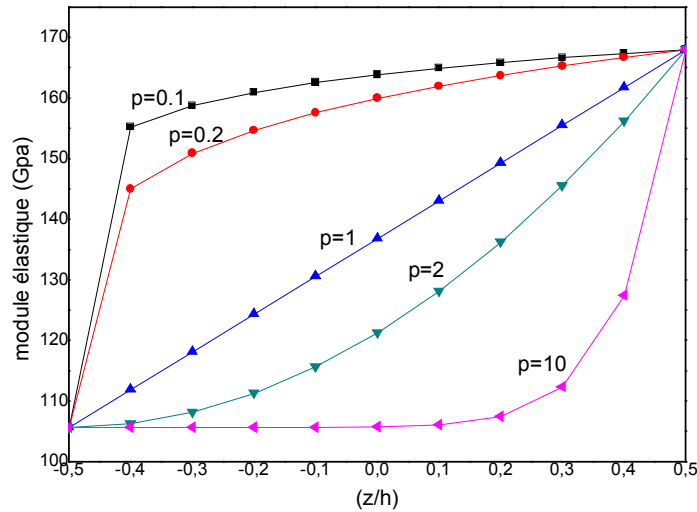


Figure IV.1 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans un champ thermique uniforme pour différentes valeurs de l'indice matériel p

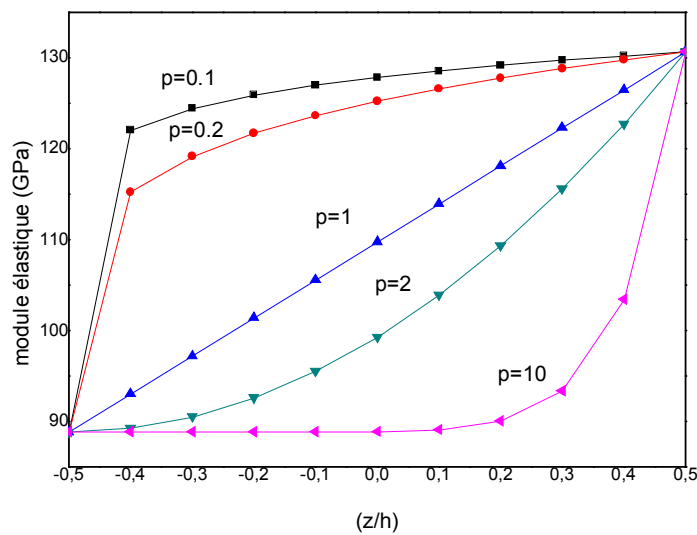


Figure IV.2 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans un champ thermique linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel p

Il ressort des figures ci-dessus que le module de Young est similaire pour les conditions de température ambiante et de température uniforme, mais les graphiques passent à des valeurs plus petites avec l'augmentation uniforme de la température. Il est clair que le module de Young diminue avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance.

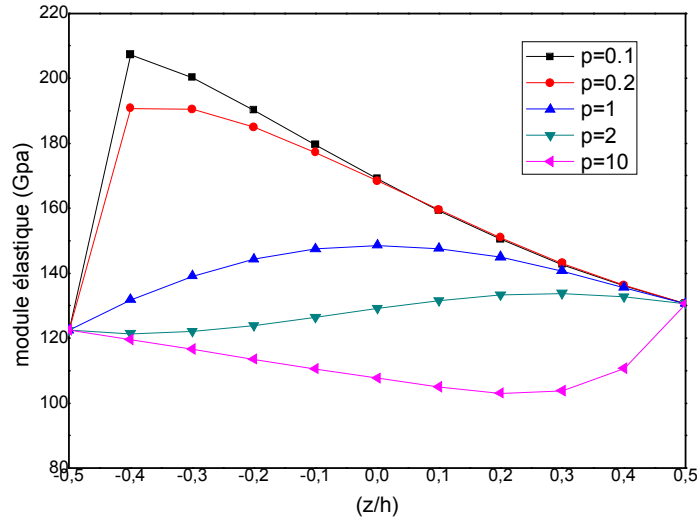


Figure IV.3 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans un champ thermique non linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel p

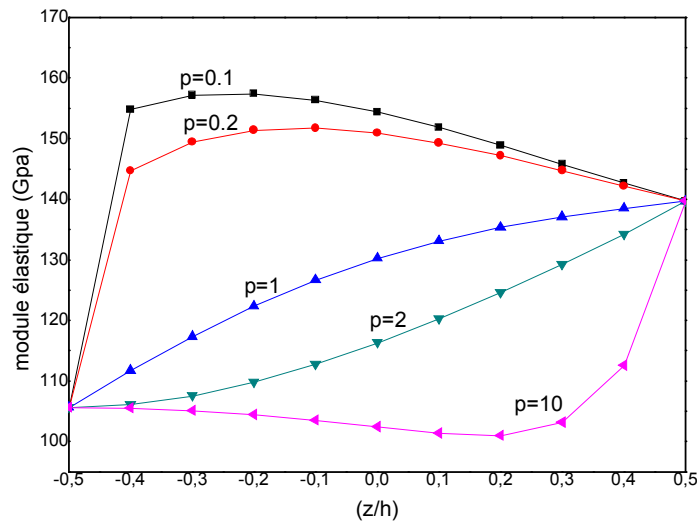


Figure IV.4 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FG dans un champ thermique sinusoïdal pour différentes valeurs de l'indice matériel p

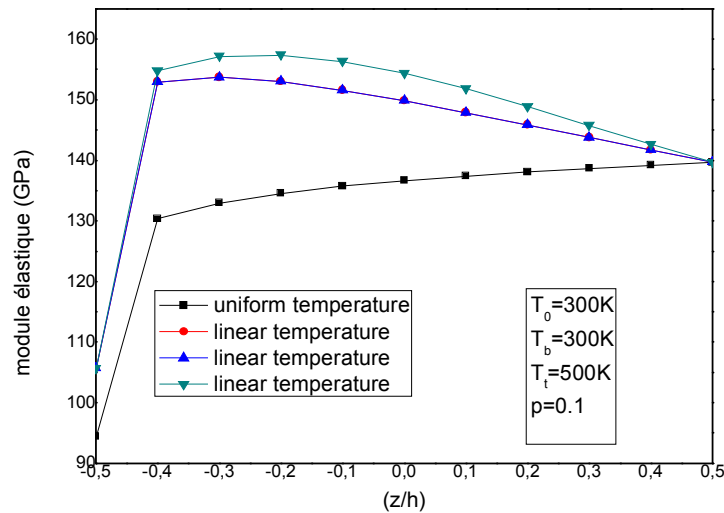


Figure IV.5 : Variation du module élastique en fonction de z/h d'une plaque FGM dans des champs thermiques : uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal pour différentes valeurs de température.

On peut observer dans les figures IV.3 et IV.4 que la variation du module de Young dans les charges thermiques non linéaires et sinusoïdales est complètement différent dans les cas de température ambiante et linéaire. Le module de Young diminue pour les valeurs comprises ($1 \leq p < 10$) et augmente pour les valeurs ($p > 10$).

On peut donc conclure que le type des conditions environnementales a un effet considérable sur le module de Young. Une étude comparative sur le module de Young est effectuée dans des conditions thermiques uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdales ce qui est illustré sur la figure IV.5.

IV.3. validation des résultats

Dans cette partie, la précision de la théorie de la plaque hyperbolique raffinée présentée avec effet d'étirement ($\varepsilon_z \neq 0$) n'ayant que cinq inconnues pour la vibration libre des plaques FGM dépendantes seulement de la température sont démontrées, en comparant la solution actuelle avec celles d'autres résultats disponibles dans la littérature des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur celles de (Taleb et al., 2018), (Huang et Shen, 2004) et (Shahrjerdi et al., 2011) sans effet d'étirement et avec plus d'inconnues (Huang et Shen, 2004; Shahrjerdi et al., 2011). En outre, les influences de divers paramètres

tels que le paramètre de l'indice de puissance p , la déformation par cisaillement, la distribution de la température sur la réponse aux vibrations de la plaque fonctionnellement graduée ont été étudiées. Le paramètre de fréquence non dimensionnel est pris en considération (Huang et Shen, 2004; Shahrjerdi et al., 2011). Deux types de FGM sont envisagés : $(\text{ZrO}_2/\text{Ti}-6\text{Al}-4\text{V})$ et $(\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304})$. La description des propriétés des matériaux utilisés dans l'analyse est présentée au tableau IV.1.

IV.3.1. Résultats des plaques FGM $(\text{ZrO}_2/\text{Ti}-6\text{Al}-4\text{V})$

Dans le tableau IV.2, une comparaison des premiers paramètres de fréquence naturelle non dimensionnelle est réalisée pour une plaque FGM $(\text{ZrO}_2/\text{Ti}-6\text{Al}-4\text{V})$ dans les environnements thermiques. La plaque FGM est faite d'alliage de titane $(\text{Ti}-6\text{Al}-4\text{V})$ sur sa surface inférieure et d'oxyde de zirconium (ZrO_2) sur sa surface supérieure.

La géométrie prise pour la plaque FGM est : $h=0.0025\text{m}$, $a=b=0.2\text{m}$. La valeur du coefficient de Poisson est supposée identique pour la céramique et le métal $\nu=0.3$.

La validation du modèle de plaque hyperbolique raffiné proposé avec effet d'étirement ($\varepsilon_z \neq 0$) est effectuée en comparant les résultats obtenus avec ceux calculés par la théorie des plaques de déformation hyperbolique obtenue par (Taleb et al., 2018), la théorie des plaques de déformation par cisaillement du deuxième ordre (SSDT) développée par (Shahrjerdi et al., 2011) et la théorie des plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSST) développée par (Huang et Shen, 2004).

Tableau IV.2 : Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée dans un environnement thermique

Les fréquences Naturelles		$T_b = 300(K)$				
		$T_t = 300(K)$	$T_t = 400(K)$		$T_t = 600(K)$	
			Température-dépendant	Température-indépendant	Température-dépendant	Température-indépendant
ZrO_2	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	8.333	7.614	7.892	5.469	6.924
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	8.273	7.886	8.122	6.685	7.686
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	8.288	7.818	8.070	6.547	7.613
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	8.478	7.919	8.189	6.305	7.578
$p = 0.5$	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	7.156	6.651	6.844	5.255	6.175
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	7.139	6.876	7.154	6.123	6.776
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	7.120	6.791	6.968	5.941	6.656
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	7.288	6.896	7.088	5.832	6.672
$p = 1$	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	6.700	6.281	6.446	5.167	5.904
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	6.657	6.435	6.592	5.819	6.362
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	6.665	6.383	6.537	5.675	6.275
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	6.825	6.491	6.658	5.608	6.309
$p = 2$	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	6.333	5.992	6.131	5.139	5.711
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	6.286	6.101	6.238	5.612	6.056
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	6.294	6.055	6.189	5.476	5.974
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	6.445	6.163	6.308	5.449	6.023
Ti-6Al-4V	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	5.439	5.103	5.333	4.836	5.115
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	5.400	5.322	5.389	5.118	5.284
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	5.410	5.290	5.357	5.097	5.250
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	5.533	5.398	5.463	5.188	5.321

Comme le montre clairement le tableau IV.2, les résultats de la théorie des plaques de déformation par cisaillement hyperbolique obtenus par (Taleb et al., 2018), la théorie des plaques (SSDT) développée par (Shahrjerdi et al., 2011) et la théorie des plaques (HSST) développée par (Huang et Shen, 2004) sont en bon accord avec les résultats actuels de la théorie des plaques hyperboliques raffinée avec effet d'étirement ($\varepsilon_z \neq 0$) et ceci pour toutes les valeurs de l'indice de la loi de puissance p , soit pour le cas de plaques FGM dépendantes de la température et indépendantes de la température.

En outre, les résultats obtenus révèlent que les fréquences fondamentales non dimensionnelles de la plaque FGM diminuent avec l'augmentation de l'indice de puissance p et que la hausse de température diminue les fréquences fondamentales non dimensionnelles. L'inclusion de

l'effet d'étirement d'épaisseur ($\varepsilon_z \neq 0$) rend les plaques FGM plus rigides, et donc, conduit à augmenter légèrement la fréquence naturelle.

IV.3.2. Résultats des plaques FGM ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$).

Le tableau IV. 3 présente les fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une plaque FGM de type ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) pour différentes valeurs d'indice de puissance p . Pour ces matériaux, le coefficient de Poisson est $\nu = 0.28$. Les résultats obtenus par la présente théorie sont comparées à ceux publiés par (Taleb et al., 2018), (Shahrjerdi et al., 2011) et (Huang et Shen, 2004) de la théorie des plaques hyperboliques raffinée.

Tableau IV.3 : Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) simplement appuyée dans un environnement thermique

Les fréquences Naturelles		$T_b = 300(\text{K})$				
		$T_t = 300(\text{K})$	$T_t = 400(\text{K})$		$T_t = 600(\text{K})$	
			Température- dépendant	Température- indépendant	Température- dépendant	Température- indépendant
Si_3N_4	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	12.506	12.175	12.248	11.461	11.716
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	12.495	13.397	12.382	11.984	12.213
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	12.519	12.319	12.389	11.899	12.126
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	12.749	12.513	12.586	12.012	12.254
$p = 0.5$	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	8.652	8.361	8.405	7.708	7.887
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	8.675	8.615	8.641	8.269	8.425
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	8.617	8.461	8.507	8.127	8.281
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	8.782	8.596	8.643	8.190	8.358
$p = 1$	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	7.584	7.306	7.342	6.674	6.834
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	7.555	7.474	7.514	7.171	7.305
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	7.551	7.406	7.444	7.090	7.225
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	7.698	7.523	7.563	7.137	7.286
$p = 2$	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	6.811	6.545	6.575	5.929	6.077
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	6.777	6.693	6.728	6.398	6.523
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	6.777	6.638	6.670	6.330	6.454
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	6.906	6.738	6.773	6.362	6.499
SUS304	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	5.410	5.161	5.178	4.526	4.682
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	5.405	5.311	5.335	4.971	5.104
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	5.415	5.278	5.300	4.929	5.061
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	5.515	5.346	5.369	4.922	5.066

On peut voir que les valeurs de fréquence fondamentales calculées à partir du modèle actuel sont en bon accord avec celles rapportées par (Taleb et al., 2018), (Shahrjerdi et al., 2011) et (Huang et Shen, 2004). En outre, l'inclusion de l'effet d'étirement d'épaisseur ($\varepsilon_z \neq 0$) rend les plaques FGM plus rigides, et donc, conduit à une augmentation de la fréquence naturelle.

IV.3.3. Résultats des plaques FGM ($\text{ZrO}_2/\text{Ti}-6\text{Al}-4\text{V}$) pour différents modes de vibration

Le tableau IV.4 présente la fréquence fondamentale non-dimensionnelle pour une plaque FGM ($\text{ZrO}_2/\text{Ti}-6\text{Al}-4\text{V}$) pour différents modes de vibration. Pour les modes (m,n) , les nombres entiers m et n désignent le nombre de demi-ondes dans les directions x et y , respectivement. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats de (Taleb et al., 2018), la (SSDT) de (Shahrjerdi et al., 2011) et (HSDT) de (Huang et Shen, 2004).

Tableau IV.4 : Paramètre de fréquence non dimensionnel de la plaque FGM simplement supportée ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) dans les environnements thermiques ($p = 2$)

Les fréquences Naturelles		$T_b = 300(K)$				
		$T_t = 300(K)$	$T_t = 400(K)$		$T_t = 600(K)$	
			Température-dépendant	Température-indépendant	Température-Dépendant	Température-indépendant
(1,1)	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	6.333	5.992	6.132	5.139	5.711
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	6.286	6.101	6.238	5.612	6.056
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	6.294	6.055	6.189	5.476	5.974
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	8.478	6.163	6.308	5.449	6.023
(1,2)	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	14.896	14.383	14.684	13.260	14.253
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	14.625	14.372	14.655	13.611	14.474
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	14.699	14.301	14.588	13.453	14.363
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	15.073	14.622	14.927	13.633	14.633
(2,2)	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	22.608	21.942	22.386	20.557	21.935
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	21.978	21.653	22.078	20.652	21.896
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	22.197	21.663	22.082	20.581	21.849
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	22.784	22.190	22.633	20.958	22.330
(1,3)	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	27.392	26.630	27.163	25.077	26.700
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	26.454	26.113	26.605	24.961	26.435
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	26.811	26.190	26.689	24.954	26.446
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	27.534	26.850	27.377	25.453	27.059
(2,3)	SSDT ^(a) $\varepsilon_z = 0$	34.106	33.211	33.867	31.425	33.384
	TSDT ^(b) $\varepsilon_z = 0$	32.659	32.239	32.840	30.904	32.664
	RSDT ^(c) $\varepsilon_z = 0$	33.271	32.540	33.148	31.118	32.904
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	34.192	33.393	34.034	31.803	33.715

^(a) [Shahrjerdi et al. 2011] ^(b) [Huang et Shen (2004)] ^(c) Taleb et al. (2018)

On constate que la théorie actuelle de la plaque hyperbolique raffinée avec effet d'étirement ($\varepsilon_z \neq 0$) est en bon accord avec les résultats précédemment publiés (Taleb et al. 2018; Shahrjerdi et al. 2011, Huang et Shen 2004) et ceci pour différents modes de forme considérée.

IV.3.4. Comparaison des résultats des plaques FGM ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$)

Afin de vérifier la précision de la théorie actuelle pour la grande valeur de l'indice de fraction volumique p et les différentes valeurs des charges thermiques, une plaque FGM est maintenant examinée. Les fréquences non dimensionnelles pour les plaques FGM prédites par (Shahrjerdi et al., 2011) en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du second ordre (SSDT), et la théorie actuelle sont présentées dans le tableau IV.5.

Tableau IV.5 : Fréquence naturelle non-dimensionnelle de la plaque FGM ($\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$) dépendante de la température pour différents index de fraction de volume p dans les environnements thermiques, Mode (1, 1)

Charge thermique		$T_b = 300(\text{K})$	$T_b = 300(\text{K})$	$T_b = 300(\text{K})$
$T_0 = 300 (\text{K}), b = a = 0.2, h = 0.025$		$T_t = 300(\text{K})$	$T_t = 400(\text{K})$	$T_t = 600(\text{K})$
Si_3N_4	SSDT(a) $\varepsilon_z = 0$	12.506	12.175	11.461
	RSDT(b) $\varepsilon_z = 0$	12.519	12.319	11.899
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	12.749	12.513	12.012
$p = 0.5$	SSDT(a) $\varepsilon_z = 0$	8.652	8.361	7.708
	RSDT(b) $\varepsilon_z = 0$	8.617	8.461	8.127
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	8.782	8.596	8.190
$p = 10$	SSDT(a) $\varepsilon_z = 0$	5.907	5.645	5.031
	RSDT(b) $\varepsilon_z = 0$	5.868	5.731	5.412
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	5.975	5.809	5.419
$p = 20$	SSDT(a) $\varepsilon_z = 0$	5.711	5.450	4.825
	RSDT(b) $\varepsilon_z = 0$	5.676	5.540	5.210
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	5.781	5.613	5.212
$p = 40$	SSDT(a) $\varepsilon_z = 0$	5.591	5.329	4.694
	RSDT(b) $\varepsilon_z = 0$	5.558	5.420	5.083
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	5.660	5.492	5.082
SUS304	SSDT(a) $\varepsilon_z = 0$	5.410	5.161	4.526
	RSDT(b) $\varepsilon_z = 0$	5.415	5.278	4.929
	Present $\varepsilon_z \neq 0$	5.515	5.346	4.922

Il y a une concordance entre les résultats prévus par (SSDT) de (Shahrjerdi et al., 2011), (Taleb et al., 2018) et la théorie actuelle. Il convient de noter que la présente théorie contient cinq inconnues avec effet d'étirement ($\varepsilon_z \neq 0$) contre sept dans le cas de (SSDT) de (Shahrjerdi et al., 2011). Donc on peut conclure que la présente théorie est non seulement précise, mais aussi efficace et simple dans la prévision des réponses aux vibrations libres des plaques FGM dans l'environnement thermique.

IV.3.5. Résultats numériques de la présente étude

Le tableau IV.6 affiche les valeurs des fréquences non dimensionnelles dans la plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) pour différentes charges thermiques. Le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnelle est défini comme suit : $\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_b(1-\nu^2)}/E_b$, où E_b et ρ_b sont à $T_0 = 300(K)$ (Shahrjerdiet *al.*, 2011). Pour voir l'effet de l'indice de puissance p sur les fréquences, les mêmes valeurs de charge thermique et le mode de forme sont considérés.

Tableau IV.6 : Paramètre de fréquence naturelle non dimensionnelle de la plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée dans les environnements thermiques et pour différents modes de vibration

Les fréquences Naturelles		$T_b = 300(K)$				
		$T_t = 300(K)$	$T_t = 400(K)$		$T_t = 600(K)$	
			Température-dépendant	Température-indépendant	Température-dépendant	Température-Indépendant
ZrO_2	(1,1)	8.478	6.163	6.308	5.449	6.023
	(1,2)	19.862	18.999	19.558	16.945	18.935
	(2,2)	30.065	28.930	29.749	26.432	29.106
	(1,3)	36.361	35.050	36.031	32.244	35.363
	(2,3)	45.195	43.653	44.860	40.473	44.182
$p = 0.5$	(1,1)	7.288	6.896	7.088	5.832	6.672
	(1,2)	17.091	16.481	16.881	15.080	16.454
	(2,2)	25.890	25.090	25.673	23.373	25.234
	(1,3)	31.325	30.403	31.099	28.470	30.641
	(2,3)	38.957	37.878	38.728	35.686	38.266
$p = 1$	(1,1)	6.825	6.491	6.658	5.608	6.309
	(1,2)	15.994	15.469	15.818	14.284	15.459
	(2,2)	24.215	23.526	24.032	22.065	23.663
	(1,3)	29.289	28.495	29.098	26.847	28.713
	(2,3)	36.410	35.483	36.218	33.612	35.830
$p = 2$	(1,1)	6.445	6.163	6.308	5.449	6.023
	(1,2)	15.073	14.622	14.927	13.633	14.633
	(2,2)	22.784	22.190	22.633	20.958	22.330
	(1,3)	27.534	26.850	27.377	25.453	27.059
	(2,3)	34.192	33.393	34.034	31.803	33.715
$Ti-6Al-4V$	(1,1)	5.533	5.398	5.463	5.188	5.321
	(1,2)	12.963	12.724	12.890	12.303	12.741
	(2,2)	19.623	19.292	19.546	18.682	19.392
	(1,3)	23.732	23.343	23.652	22.616	23.491
	(2,3)	29.498	29.030	29.417	28.140	29.253

Les fréquences deviennent plus importantes lorsque le module de Young augmente du métal pur à la céramique pure. Par ailleurs, elles diminuent en augmentant la différence de température entre les surfaces supérieure et inférieure pour la même valeur de l'indice de la loi de puissance et le mode de forme qui représentent les effets des charges thermiques.

Les fréquences sont plus faibles pour les plaques FGM dépendantes de la température, que celles qui sont indépendantes de la température, ce qui prouve la précision et l'efficacité des propriétés des matériaux dépendantes de la température.

La variation des quatre premières fréquences en fonction des champs de température uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdaux dans une plaque FGM simplement appuyée est représentée sur les Figures IV.6- IV.9.

Le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnel est défini comme : $\bar{\omega} = \omega (b^2 / \pi^2) \sqrt{I_0 / D_0}$ où $I_0 = \rho h$ et $D_0 = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ et il est noté que ρ , ν et E sont choisis pour être les valeurs de (ZrO₂/Ti-6Al-4V) évalués à une température ambiante.

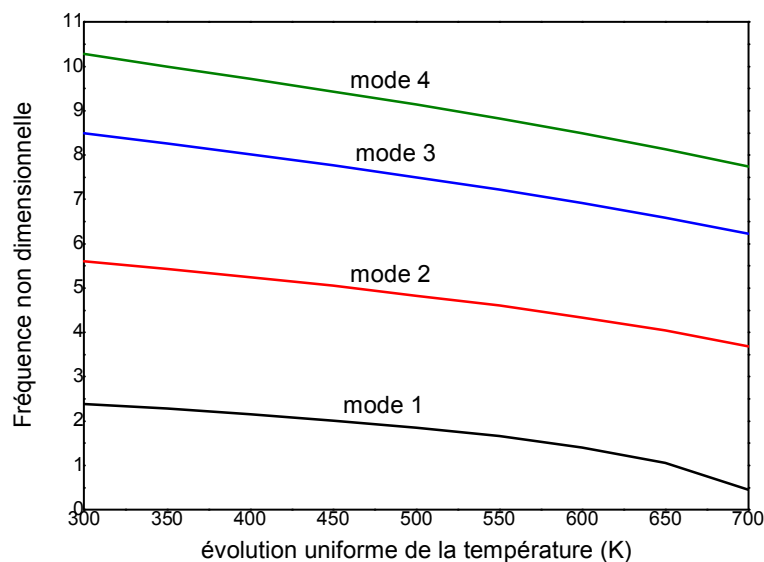


Figure IV.6: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température uniforme d'une plaque FGM (ZrO₂/Ti-6Al-4V) simplement appuyée avec $(a / h = 10, a = 0.2, p = 1)$.

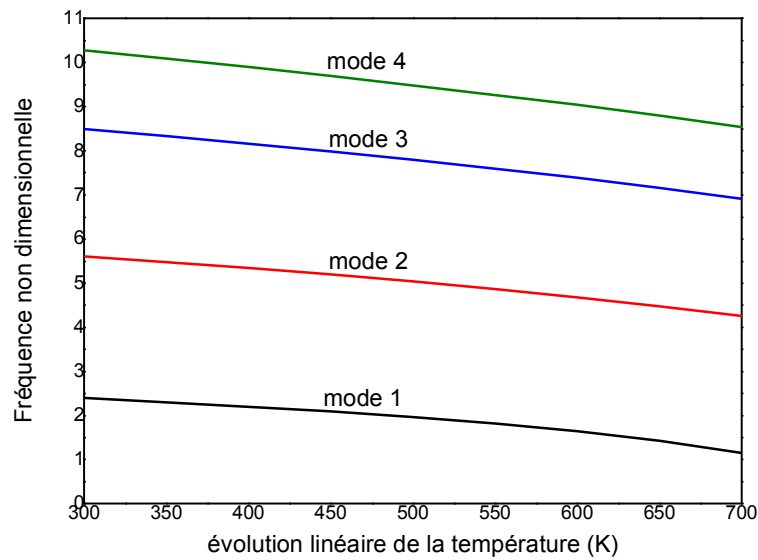


Figure IV.7: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température linéaire d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec ($a/h = 10$, $a = 0.2$, $p = 1$).

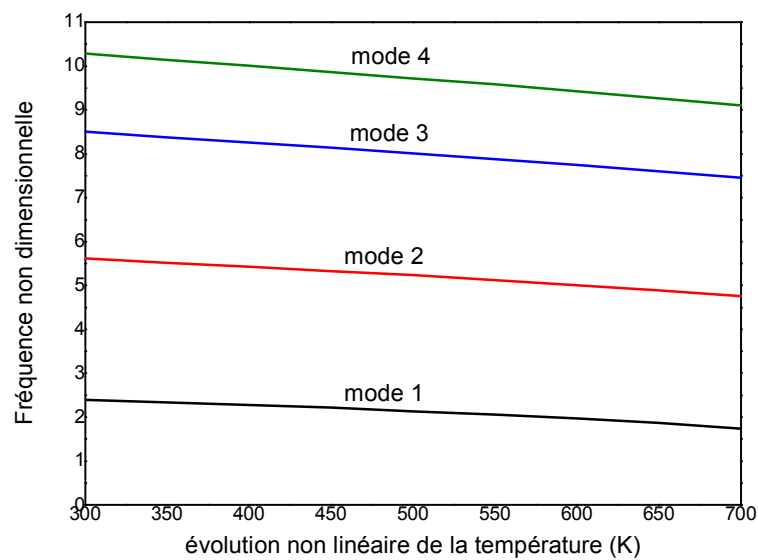


Figure IV.8: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température non linéaire d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec ($a/h = 10$, $a = 0.2$, $p = 1$).

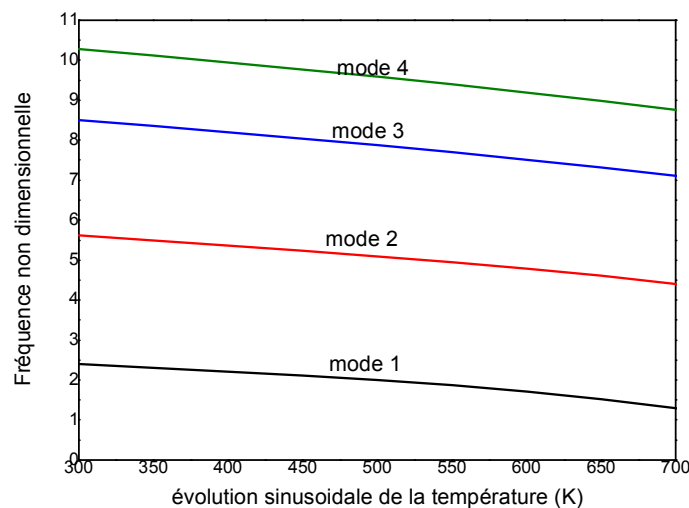


Figure IV.9: Les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température sinusoïdale d'une plaque FGM ($ZrO_2/Ti-6Al-4V$) simplement appuyée avec ($a/h = 10$, $a = 0.2$, $p = 1$).

Comme prévu, les fréquences sont réduites avec l'augmentation de la température et ceci est dû à la diminution du module de Young avec la hausse des températures. On peut constater que la pente décroissante des fréquences dans les modes inférieurs est plus faible que dans les modes supérieurs. À la même température, nous constatons que la différence entre deux modes inférieurs consécutifs est plus grande que dans deux modes supérieurs consécutifs.

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et interprété les résultats numériques de la nouvelle théorie qui est une théorie de plaque de déformation de cisaillement hyperbolique, avec la prise en compte de l'effet d'étirement pour l'analyse de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées simplement supportées dans les environnements thermiques et développé pour les plaques FGM dépendantes de la température et soumises à des champs de température uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdaux.

La théorie proposée satisfait la contrainte de cisaillement transversale libre aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et tient compte de l'effet d'étirement dans le sens de l'épaisseur, en utilisant que cinq inconnues, ainsi les résultats numériques obtenus montrent une bonne concordance avec les résultats disponibles dans la littérature.

De ce fait, on peut en conclure que les théories proposées sont précises et simples pour résoudre le problème de la vibration libre des plaques FGM ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des matériaux multifonctionnels, qui contiennent une variation spatiale de composition et / ou de microstructure dans le but spécifique de contrôler les variations des propriétés thermiques, structurelles ou fonctionnelles. Ces matériaux ont attiré une grande attention des chercheurs au cours de la dernière décennie en raison de leurs propriétés graduées à chaque point et dans diverses dimensions.

Beaucoup de travaux de recherches ont été réalisés dans ce domaine. Des travaux similaires à notre étude ont été effectués, nous citerons ceux, de (ATTIA, 2014) qui a présenté plusieurs théories raffinées à quatre variables pour analyser la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées avec des propriétés matérielles dépendantes de la température, En décomposant le déplacement transversal en une composante de flexion et une composante de cisaillement. Ces théories considèrent des distributions parabolique, sinusoïdale, hyperbolique et exponentielle des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur. (TALEB et al ; 2019) quand à eux, ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées dans un environnement thermique ayant des propriétés matérielles qui dépendent de la température. La théorie contient seulement quatre inconnues.

La nouveauté de notre travail est le développement d'une nouvelle théorie de la plaque de déformation par cisaillement hyperbolique, avec la prise en compte de l'effet d'étirement.

La nouvelle théorie proposée, est mise en œuvre dans cette étude, pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM simplement supportées dans un environnement thermique et développée pour les plaques FGM dépendantes de la température soumises à des couches uniformes, linéaires, non linéaires et champs de température sinusoïdaux. La théorie proposée satisfait la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et prend en compte l'effet d'étirement dans le sens de l'épaisseur, ainsi les résultats numériques montrent la concordance avec les travaux disponibles dans la littérature. Les propriétés des matériaux des plaques FGM sont supposées dépendre de la température et classées à travers l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance en termes de fractions volumiques des constituants. En envisageant de simplifier davantage les

hypothèses de la théorie existante de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur, avec l'incorporation d'un terme intégral indéterminé, la présente théorie n'a que cinq inconnues, ce qui est encore moins que les autres théories de la déformation de cisaillement, avec la prise en compte de l'effet d'étirement, et donc de faire de ce modèle simple et efficace une utilisation appropriée. L'équation de mouvement de la structure vibrante obtenue via le principe classique d'Hamilton et résolue en utilisant les solutions de Navier. Les principaux points obtenus par la présente étude:

- (1) Un excellent accord est observé lors de la comparaison du présent travail avec la théorie existante de déformation par cisaillement.
- (2) La fréquence diminue à mesure que le changement de température augmente dans tous les types de champs de température.
- (3) La nouvelle théorie actuelle des plaques de déformation par cisaillement hyperbolique est non seulement précise mais aussi simple pour prédire l'analyse des vibrations des plaques FGM en environnement thermique.
- (4) L'inclusion de l'effet d'étirement de l'épaisseur ($\varepsilon_z \neq 0$) rend les plaques FGM plus rigides et, par conséquent, conduit à une augmentation de la fréquence naturelle.
- (5) L'effet d'étirement de l'épaisseur joue un rôle important dans les plaques FGM épaisses et moins épaisses et doit être pris en compte dans la modélisation.

Enfin, la formulation se prête particulièrement bien à l'étude de plusieurs problèmes liés à la flexion, aux vibrations et au comportement dynamique des macros / nanostructures composites isotropes, classiques et avancées (Youzera et al.,2017; Draiche et al.,2019; Karami et al.,2019abcd; Khiloun et al.,2019).

Références Bibliographiques

- [Abdizadeh H, 1997] Abdizadeh H. élaboration et caractérisation de composites «composites laminaires tri-couches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 1997 212 p.
- [Abualnour et al., 2018] Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., "A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates", *Compos. Struct*, 184, 688-697, 2018.
- [Abualnour et al., 2019] Abualnour, M.,Chikh, A.,Hebali, H.,Kaci, A.,Tounsi, A.,Bousahla, A.A.,Tounsi, A., "Thermomechanical analysis of antisymmetric laminated reinforced composite plates using a new four variable trigonometric refined plate theory", *Computers and Concrete*, 24(6), 2019.
- [Addou et al., 2019] Addou, F.Y., Meradjah, M., Bousahla,A.A, Benachour, A., Bourada, F., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., "Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT", *Computers and Concrete*, 24(4),347-367, 2019.
- [Adhikari et al., 2019] Adhikari, B., & Singh, B. N. Dynamic response of functionally graded plates resting on two-parameter-based elastic foundation model using a quasi-3D theory. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-31, 2019.
- [Afaq , 2003] Afaq. K.S. Développement d'ONU nouveau modèle verser les structures composites multicouches et sandwichs Avec prix en Compte du cisaillement transversal et des Effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [Ait Atmane, 2010] Ait Atmane, H ., Tounsi, A ., Mechab,I., Adda ,B. E. A : Analyse des vibrations libres des plaques en FGM posées sur appuis élastiques en utilisant une nouvelle fonction de

- cisaillement. *Int. J. Mech and Mater in Design*. 6 (2), 113-121, 2010.
- [Akbaş, Ş. D., 2017] Akbaş, Ş. D. Vibration and static analysis of functionally graded porous plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 3(3), 199-207, 2017.
- [Akinlabi et al., 2017] Akinlabi R, Mahamood E. *Functionally graded materials*. Springer, Cham, 2017.
- [Alibeigloo et al., 2015] Alibeigloo, A., & Alizadeh, M. Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 54, 252-266, 2015.
- [Ambartsumian, 1958] Ambartsumian, S.A. *En théorie de plaques de flexion*. *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR*, 5, 69–77. 1958.
- [Ambartsumyan, 1969] Ambartsumian S.A. *Théorie des plaques anisotrope*. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Ansari A et al., 2010] Ansari A, Alhoshan M, Alsalhi M, Aldwayyan A. Prospects of nanotechnology in clinical immunodiagnosics. *Sensors* 10:6535–6581, 2010.
- [Attia et al., 2015] Attia, A., Tounsi, A., Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct.*, 18(1), 187-212, 2015.
- [Aydogdu, 2003] Aydogdu, M. Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour les plaques composites stratifiées. *Composite Structures*, 94– 101, 2003.
- [Bakar et al., 2018] Bakar W, Basri S, Jamaludin SN, Sajjad A. *Functionally graded materials: an overview of dental applications*. *World J Dent* 9:137–144, 2018.

- [Belabed et al., 2014] Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, 60, 274–283, 2014.
- [Berghouti et al., 2019] Berghouti, H., Adda Bedia, E.A. Benkhedda, A., Tounsi, A. "Vibration analysis of nonlocal porous nanobeams made of functionally graded material", *Advances in Nano Research*, 7(5), 351-364, 2019.
- [Bessaim et al., 2013] Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., AddaBedia, E.A. "A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15, 671–703, 2013.
- [Bohidar et al., 2014] Bohidar SK, Sharma R, Mishra PR. Functionally graded materials: a critical review. *Int J Sci Footpr* 2:18–29, 2014.
- [Boukhari, A., 2015] Boukhari, A. « Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement pour l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses ». Thèse de Doctorat Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès.
- [Boukhlif et al., 2019] Boukhlif, Z., Bouremana, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Tounsi, A., Al-Osta, M.A. "A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, 31(5), 503-516, 2019.
- [Boulefrakh et al. 2019] Boulefrakh, L., Hebali, H., Chikh, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. "The effect of parameters of visco-Pasternak foundation on the bending and vibration

- properties of a thick FG plate", *Geomechanics and Engineering*, 18(2), 161-178, 2019.
- [Bourada et al., 2015] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, 18(2), 409 – 423, 2015.
- [Bourada et al.,2019] Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Azzaz, A., Zinata, A., Tounsi, A. "Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory", *Wind and Structures*, 28(1), 19-30, 2019.
- [Bousahla et al., 2014] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., AddaBedia, E.A. « A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates », *International Journal of Computational Methods*, 11(6), 1350082, 2014.
- [Bousahla et al., 2016] Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(2), 313-335, 2016.
- [Boutaleb et al., 2019] Boutaleb, S., Benrahou, K.H., Bakora, A., Algarni, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. "Dynamic Analysis of nanosize FG rectangular plates based on simple nonlocal quasi 3D HSDT", *Advances in Nano Research*, 7(3), 189-206, 2019.
- [Carrera et al., 2011] Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M., & Soave, M. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites Part B: Engineering*, 42(2), 123-133, 2011.

- [Chaabane et al., 2019] Chaabane, L.A., Bourada, F., Sekkal, M., Zerouati, S., Zaoui, F.Z., Tounsi, A., Derras, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. "Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation", *Structural Engineering and Mechanics*, **71**(2), 185-196, 2019.
- [Chakraverty et al., 2014] Chakraverty, S., & Pradhan, K. K. Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. *Aerospace Science and Technology*, **36**, 132-156, 2014.
- [Chen F et al., 2019] Chen F, Zhang C, Chen F, Huang Z, Jia M, Chen G, Ye Y, Lin Y, Liu W, Chen B, Shen Q, Zhang L, Lavernia EJ. Additive manufacturing of functionally graded materials: a review. *Mater Sci Eng A* 764:138209, 2019.
- [Chi et al., 2003] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; **70** (10), 1227–1243, 2003.
- [Cui, D., Hu, H., 2016] Cui, D., Hu, H. "Thermal buckling and natural vibration of a rectangular thin plate with in-plane stick-slip-stop boundaries", *Journal of Vibration and Control.*, **22**(7), 1950-1966, 2016.
- [Daikh, A. A., 2019] Daikh, A. A. Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. *Materials Research Express*, **6**(6), 065702, 2019.
- [Darilmaz, K., 2015] Darilmaz, K. "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 395-408, 2015.

Références Bibliographiques

- [Darilmaz et al., 2015] Darilmaz, K., Aksoylu, M.G. and Durgun, Y. "Buckling analysis of functionally graded material grid systems", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **54**(5), 877-890, 2015.
- [Dau, 2006] Dau. F, O. Polit, and M. Touratier. Plaque de C1 et shell éléments finis pour l'analyse géométriquement non linéaire de structures multicouche. *Computers and Structures*, 84:1264-1274, 2006.
- [Draiche et al., 2019] Draiche, K., Bousahla, A. A., Tounsi, A., Alwabli, A. S., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. Static analysis of laminated reinforced composite plates using a simple first-order shear deformation theory. *Computers and Concrete*, 24(4), 369-378, 2019.
- [Ebrahimi, F., 2013] Ebrahimi, F. "Analytical investigation on vibrations and dynamic response of functionally graded plate integrated with piezoelectric layers in thermal environment", *Mechanics of Advanced Materials and Structures.*, 20(10), 854-870, 2013.
- [Ebrahimi et al., 2016] Ebrahimi, F., Jafari, A. "Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory", *Struct. Eng. Mech.*, 59(2), 343-371, 2016.
- [Edwin A et al., 2017] Edwin A, Anand V, Prasanna K. Sustainable development through functionally graded materials: an overview. *Rasayan J Chem* 10:149–152, 2017.
- [El Meiche et al., 2011] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., & Mechab, I. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4), 237-247, 2011.

Références Bibliographiques

- [EL-Galy et al., 2018] EL-Galy IM, Bassiouny BI, Ahmed MH. Empirical model for dry sliding wear behavior of centrifugally cast functionally graded composite based on pure Al/SiCp. *Key Eng Mater* 786:276–285, 2018.
- [Fazzolari, F. A, 2016] Fazzolari, F. A. Modal characteristics of P-and S-FGM plates with temperature-dependent materials in thermal environment. *Journal of Thermal Stresses*, 39(7), 854-873, 2016.
- [Fekrar et al, 2014] Fekrar A., Houari M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R. “A new five-unknown refined theory based on neutral surface”, *Meccanica* 49, 795–810, 2014.
- [G. Bao et al., 1995] G. Bao., L. Wang. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [Gabbrielli et al., 2008] Gabbrielli R, Turner IG, Bowen CR. Development of modelling methods for materials to be used as bone substitutes. *Key Eng Mater* 363:903–906, 2008.
- [Gasik M, 2010] Gasik M. Functionally graded materials: bulk processing techniques. *Int J Mater Prod Technol* 39:20–29, 2010.
- [Guo-qin et al., 2009] Guo-qin C, Zi-yang X, Song-he M, Gao-hui W, De-zhi Z. Thermal expansion and mechanical properties of high reinforcement content SiCp/Cu composites fabricated by squeeze casting technology. *Trans Nonferrous Met Soc China* 19:s600–s604, 2009.
- [Gupta A et al., 2015] Gupta A, Talha M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Prog Aerosp Sci* 79:1–14, 2015.
- [Gupta B, 2017] Gupta B. Few studies on biomedical applications of functionally graded material. *Int J Eng Technol Sci Res IJETS* 4:39–43, 2017.

Références Bibliographiques

- [Hamidi et al., 2015] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, 18(1), 235 – 253, 2015.
- [Hebali et al., 2014] Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A., AddaBedia, E.A. "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *ASCE J. Engineering Mechanics*, 140, 374 – 383, 2014.
- [Hildebrand, 1949] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.
- [Hirai et al., 1999] Hirai T. and Chen L. Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514, 1999.
- [Houari et al., 2013] Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. "Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory", *International Journal of Mechanic*, 2013.
- [Houari.M.S.A, 2011] Houari.M.S.A. "Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances", Thèse de Doctorat Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès, 2011.
- [Huang et al., 2004] Huang et Shen. "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments". *International Journal of Solids and Structures.*, 41(9), 2403-2427, 2004.
- [J. N. Reddy, 2000] J. N. Reddy. "Analysis of functionally graded plates", *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL*

- METHODS IN ENGINEERING, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 47, 663,684, 2000.
- [Jayakumar et al., 2018] Jayakumar E, Praveen AP, Rajan TPD, Pai BC. Studies on tribological characteristics of centrifugally cast SiCp-reinforced functionally graded A319 aluminium matrix composites. *Trans Indian Inst Met*, 2018.
- [Joshi et al., 2016] Joshi, P. V., Jain, N. K., Ramtekkar, G. D., & Viridi, G. S. Vibration and buckling analysis of partially cracked thin orthotropic rectangular plates in thermal environment. *Thin-Walled Structures*, 109, 143-158, 2016.
- [Kant, 2002] T. Kant., K. Swaminathan. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.
- [Kant. T, 1993] Kant. T. "A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches", *Composite structures.*, 23(4), 293-312, 1993.
- [Kant et al., 2001] Kant, T., & Swaminathan, K. "Free vibration of isotropic, orthotropic, and multilayer plates based on higher order refined theories", *Journal of Sound and Vibration.*, 241(2), 319-327, 2001.
- [Kar et al., 2015] Kar, V.R. and Panda, S.K. "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 693-709, 2015.
- [Kar et al., 2014] Kar, V.R., Panda, S.K. "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(4), 661 – 679, 2014.

Références Bibliographiques

- [Karama et al., 2003] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou. Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiées avec cisaillement transversal de stress continuité. *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [Karami et al, 2019a] Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. "Galerkin's approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions", *Engineering with Computers*, 35, 1297-1316, 2019a.
- [Karami et al, 2019c] Karami, B., Janghorban, M., & Tounsi, A. Wave propagation of functionally graded anisotropic nanoplates resting on Winkler-Pasternak foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, 70(1), 55-66, 2019c.
- [Karami et al, 2019d] Karami, B., Janghorban, M., & Tounsi, A. On exact wave propagation analysis of triclinic material using three-dimensional bi-Helmholtz gradient plate model. *Structural Engineering and Mechanics*, 69(5), 487-497, 2019d.
- [Karami et al, 2018] Karami, B., Janghorban, M., Shahsavari, D., & Tounsi, A. A size-dependent quasi-3D model for wave dispersion analysis of FG nanoplates. *Steel and Composite Structures*, 28(1), 99-110, 2018.
- [Karami et al, 2018b] Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. "Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles", *Steel and Composite Structures*, 27(2), 201-216, 2018b.
- [Karami et al, 2019b] Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., & Tounsi, A. Resonance behavior of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene

- nanoplatelets. *International Journal of Mechanical Sciences*, 156, 94-105, 2019b.
- [Kaushal et al., 2017] Kaushal S, Gupta D, Bhowmick H . An approach for functionally graded cladding of composite material on austenitic stainless steel substrate through microwave heating. *J Compos Mater*, 2017.
- [Khalili et al., 2012] Khalili, S. M. R., & Mohammadi, Y. Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 35, 61-74, 2012.
- [Khiloun et al., 2019] Khiloun, M., Bousahla, A. A., Kaci, A., Bessaim, A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT. *Engineering with Computers*, 1-15, 2019.
- [Kieback et al., 2003] Kieback B, Neubrand A, Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Mater Sci Eng A* 362:81–105, 2003.
- [Kim, Y. W, 2005] Kim, Y. W. Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3-5), 531-549, 2005.
- [Koizumi. M, 1993] Koizumi. M. The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, 34(1), 3–10, 1993.
- [Kokanee. AA, 2017] Kokanee. AA. Review on functionally graded materials and various theories. *Int Res J Eng Technol* 4:890–893, 2007.
- [Kolahchi et al., 2015] Kolahchi, R., Bidgoli, A.M.M. and Heydari, M.M. “Size-dependent bending analysis of FGM nano-

- sinusoidal plates resting on orthotropic elastic medium”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **55**(5), 1001-1014, 2015.
- [Larbi Chaht et al, 2015] Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size- dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 425-442, 2015.
- [Lashkari et al., 2016] Lashkari. M. J & Rahmani. Bending analysis of sandwich plates with composite face sheets and compliance functionally graded syntactic foam core. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **230**(20), 3606-3630, 2016.
- [Leu MC et al., 2012] Leu MC, Deuser BK, Tang L, Landers RG, Hilmas GE, Watts JL. Freeze-form extrusion fabrication of functionally graded materials. *CIRP Ann Manuf Technol* **61**:223–226, 2012.
- [Li, Q et al., 2008] Li, Q., Iu, V. P., Kou, K. P. "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates", *Journal of Sound and Vibration.*, **311**(1), 498-515, 2008.
- [Liu L.-S et al., 2003] Liu L.-S., Zhang Q.-J., and Zhai P.-C. The optimization design of metal=ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method, *Materials Science Forum*, **423– 425**, 791–796, 2013.
- [Liu ZY et al, 2018] Liu ZY, Li C, Fang XY, Guo YB. Energy consumption in additive manufacturing of metal parts. *Procedia Manuf* **26**:834–845, 2018.

Références Bibliographiques

- [Lo, 1977] Lo. K.H & R.M. Christensen. Une théorie d'ordre supérieur de la déformation de la plaque. Partie 1: plates homogène, Vol.44, N° 4, pages 669-676, 1977.
- [M. Koizumi, 1997] M. Koizumi. FGM activities in Japan. Composites; 28 (1-2):1– 4. 1997.
- [Mahamood. et al., 2015] Mahamood. RM & Akinlabi.ET. Effect of laser power and powder flow rate on the wear resistance behaviour of laser metal deposited TiC/Ti6Al4V composites. Mater Today Proc 2:2679–2686, 2015.
- [Mahamood et al., 2012] Mahamood RM, Shukla M, Pityana S. Functionally graded material: an overview. World Congr Eng III: 2–6, 2012.
- [Mahmoud et al.,2017] Mahmoud D & Elbestawi M. Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: a review. J Manuf Mater Process 1:13 , 2017.
- [Mahmoudi et al., 2019] Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. "A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundations", Journal of Sandwich Structures and Materials, **21**(6), 1906-1926, 2019.
- [Maimunnisa et al., 2018] Maimunnisa S, Gore P, Rajan TPD, Raja VS. Role of centrifugal casting on electrochemical corrosion behavior of A356-SiCp composite in 3.5 wt% NaCl. J Mater Eng Perform, 2018.
- [Makwana et al., 2014] Makwana. A & Panchal. KC. Stress analysis of functionally graded material plate with cut-out. Int J Eng Res Technol 3:2020–2025, 2014.
- [Malandrino. G, 2009] Malandrino. G. Chemical vapour deposition. In: Jones C, Hitchman M (eds) Precursors, processes and applications.

- Angewandte Chemie International Edition, 48, pp 7478–7479, 2009.
- [Medani et al., 2019] Medani, M., Benahmed, A., Zidour, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. “Static and dynamic behavior of (FG-CNT) reinforced porous sandwich plate”, *Steel and Composite Structures*, **32**(5), 595-610, 2019.
- [Meharet et al., 2018] Mehar. K & Kumar Panda. S. Thermal free vibration behavior of FG-CNT reinforced sandwich curved panel using finite element method. *Polymer Composites*, 39(8), 2751-2764, 2018.
- [Mindlin, 1951] Mindlin. R.D. Influence de l'inertie de rotation et de cisaillement sur les motions de flexion, plaques élastiques isotropes. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Mindlin, 1951] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, 1951.
- [Miyamoto. Y, 1996] Miyamoto. Y. The applications of functionally graded materials in Japan. *Mater Technol* 11:230–236, 1996.
- [Miyamoto. Y, 1999] Miyamoto. Y. Functionally graded materials: design, processing and applications. Kluwer Academic, Dordrecht, 1999.
- [Mota et al., 2019] Mota AF, Loja MAR. Mechanical behavior of porous functionally graded nanocomposite materials. *J Carbon Res* 5:34, 2019.
- [Müller, 2003] Müller E., Drašar C., Schilz J., and Kaysser W.A. Functionally graded materials for sensor and energy

- applications, *Materials Science and Engineering*, A362, 17–39, 2003.
- [Murthy, 1981] Murthy. M.V.V. Une théorie de déformation de cisaillement transversal amélioré pour plaque anisotrope laminé. Rapport technique, NASA, 1981.
- [Naghdi, 1957] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380, 1957.
- [Nelson, 1974] Nelson. R.B & D.R.Lorch. Une théorie raffinée pour plates orthotrope stratifié. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, pages 177-183, 1974.
- [Neves et al., 2013] Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering*, 44(1), 657-674, 2013.
- [Ngo et al., 2018] Ngo TD, Kashani A, Imbalzano G, Nguyen KTQ, Hui D. Additive manufacturing (3D printing): A review of materials, methods, applications and challenges. *Compos B Eng* 143:172–196, 2018.
- [Nguyen T.K, 2015] Nguyen T.K. “A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials”, *Int.J.Mech.Mater.Des.*, **11**(2), 203-219, 2015.
- [Okamura, 1991] H. Okamura. State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3- 9,1991.

Références Bibliographiques

- [Pai BC et al., 2009] Pai BC & Rajan TPD. Development in manufacturing processes of functionally graded materials. *IJAEA* 2:64–74, 2009.
- [Pandey. S et al., 2015] Pandey. S & Pradyumna. S. Free vibration of functionally graded sandwich plates in thermal environment using a layerwise theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 51, 55-66, 2015.
- [Parida. S et al., 2018] Parida. S & Mohanty. S. C. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Skew Plate in Thermal Environment Using Higher Order Theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 10(01), 1850007, 2018.
- [Parihar et al., 2016] Parihar RS, Setti SG, Sahu RK. Recent advances in the manufacturing processes of functionally graded materials: a review. *Sci Eng Compos Mater*, 2016.
- [Paszkievicz, 2008] Paszkiewicz B., Paszkiewicz R., Wosko M., Radziejewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., and Tlaczala M. Functionally graded semiconductor layers for devices application, *Vacuum*, 82, 389–394, 2008.
- [Petit et al., 2018] Petit C, Montanaro L, Palmero P. Functionally graded ceramics for biomedical application: concept, manufacturing, and properties. *Int J Appl Ceram Technol*, 2018.
- [Polit, 1997] Polit. O and M. Touratier. Un nouvel élément triangulaire Interface fini laminé pour assurer la continuité des déplacements et stresses. *Composite Structures*, 38(1-4):37-44, 1997.
- [Popoola et al., 2016] Popoola P, Farotade G, Fatoba G, Popoola O. Laser engineering net shaping method in the area of development of functionally graded materials (FGMs) for aero engine applications. In: Paul MC (ed) *A Review*,

- from "Fiber Laser", Chap 17, pp 383–400. ISBN: 978-953-51-2257-9, 2016.
- [Popovich et al., 2016] Popovich VA, Borisov EV, Popovich AA, Sufiiarov VS, Masaylo DV, Alzina L. Functionally graded Inconel 718 processed by additive manufacturing: crystallographic texture, anisotropy of microstructure and mechanical properties. *JMADE* 114:441–449, 2016.
- [Qiu et al., 2003] Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., and Du H. Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators, *Smart Materials and Structures*, 12, 115–121, 2003.
- [Reddy, 1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, 1984.
- [Reddy, 1997] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [Reddy, 1999] J.N. Reddy. *Theory and Analysis of Elastic plates*. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [Reissner, 1945] Reissner.E. Une théorie simple d'ordre supérieur pour plates composite stratifiée. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [Reissner, 1975] Reissner. E. Sur flexion transversale de plaques, y compris les effets de déformation transversale de cisaillement. *Int. J. Solids Structures*; 25(5):495-502, 1975.
- [Saidi et al, 2013] Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel and Composite Structures*, 15(2), 221-245, 2013.

- [Saleh et al., 2019] Saleh B, Jiang J, Ma A, Song D, Yang D. Effect of main parameters on the mechanical and wear behaviour of functionally graded materials by centrifugal casting: a review. *Met Mater Int*, 2019.
- [Saleh et al., 2019] Saleh B, Jiang J, Ma A, Song D, Yang D, XU Q. A Review on the influence of different reinforcements on the microstructure and wear behavior of functionally graded aluminum matrix composites by centrifugal casting. *Met Mater Int*, 2019.
- [Sato et al., 2017] Sato M, Inoue A, Shima H. Bamboo-inspired optimal design for functionally graded hollow cylinders. *PLoS ONE* 12:1–14, 2017.
- [Seol Y et al., 2012] Seol Y, Kang T, Cho D (2012) Solid freeform fabrication technology applied to tissue engineering with various biomaterials. *Soft Matter View* 8:1730–1735.
- [Shahrjerdi et al., 2011] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A. “Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory”, *J. Mech. Sci. Technol.*, 25(9), 2195-2209, 2011.
- [Shimpi, 2002] Shimpi, R.P. Théorie des plaques raffinée et ses variantes. *AIAA Journal*, 137–146, 2002.
- [Siddhartha. AP, 2009] Siddhartha. AP. Functionally graded materials manufacturing techniques. *Mater Sci* 5:523–539, 2009.
- [Singh. AK, 2018] Singh. AK. A novel technique for manufacturing polypropylene based functionally graded materials. *Int Polym Process* 33:197–205, 2018.
- [Sobczaket al., 2009] Sobczak. J & Drenchev. L. Metal based functionally graded materials engineering and modeling. Bentham Science Publishers Ltd., Sharjah, 2009.

Références Bibliographiques

- [Nguyen et al., 2007] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [Taleb et al.,2018] Taleb, O., Houari, M.S.A ., Bessaim, A., Tounsi, A and Mahmoud, S.R. "A new plate model for vibration response of advanced composite plates in thermal environment", *Structural Engineering and Mechanics.*, Int. J., 18(3), 693-709, 2018.
- [Tan C et al., 2017] Tan C, Wang C, Wang S, Wang G, Ji L, Tong Y, Duan X. Investigation on 316L/316L-50 W/W plate functionally graded materials fabricated by spark plasma sintering. *Fusion Eng Des*, 2017.
- [Thaiet al., 2013] Thai. H. T. & Choi, D. H. A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 101, 332-340, 2013.
- [Tornabene. F, 2009] Tornabene. F. Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37-40), 2911-2935, 2009.
- [Touratier, 1991] Touratier, M. Un efficace theoryl de plaque standard. *Engng Sci*, vol. 29, no 8, pages 901-916, 1991.
- [Tripathy A et al., 2018] Tripathy A, Sarangi SK, Chaubey A. A review of solid state processes in manufacture of functionally graded materials. *Int J Eng Technol* 7:1–5, 2018.
- [Tu, T. M. et al., 2019] Tu, T. M., Quoc, T. H., & Van Long, N. Vibration analysis of functionally graded plates using the eight-unknown higher order shear deformation theory in thermal

- environments. *Aerospace Science and Technology*, 84, 698-711, 2019.
- [Udupa et al., 2014] Udupa G, Rao SS, Gangadharan KV. Functionally graded composite materials: an overview. *Procedia Mater Sci* 5:1291–1299, 2014.
- [Van Long et al., 2016] Van Long, N., Quoc, T. H., & Tu, T. M. Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using new eight-unknown shear deformation theory by finite-element method. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, 8(4), 391-399, 2016.
- [Wang. K, 2012] Wang. K. An approach for increase of reinforcement content in particle rich zone of centrifugally cast SiCP/Al composites. *J Compos Mater*, 2012.
- [Wang et al., 2017] Wang, Y. Q. & Zu, J. W. Vibration behaviors of functionally graded rectangular plates with porosities and moving in thermal environment. *Aerospace Science and Technology*, 69, 550-562, 2017.
- [Watanabe et al., 2011] Watanabe. Y& Sato. H. Review Fabrication of Functionally Graded Materials under a Centrifugal Force. In: Cuppoletti J (ed) *Nanocomposites with unique properties and applications in medicine and industry*, Chap 7. InTech, Rijeka, Shanghai and New York, pp 133–150, 2011.
- [Watari et al., 2004] Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., and Kawasaki T. Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for biomedical application, *Composites Science and Technology*, 64, 893–908, 2004.
- [Wattanasakulpong et al.,2013] Wattanasakulpong, N., Prusty, G. B., & Kelly, D. W. "Free and forced vibration analysis using improved third-

- order shear deformation theory for functionally graded plates under high temperature loading". *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(5), 583-606, 2013.
- [Wei. Cet al., 2019] Wei. Cet, Sun. Z, Chen. Q, Liu. Z & Li. L. Additive manufacturing of horizontal and 3D functionally graded 316L/Cu10Sn components via multiple material selective laser melting. *J Manuf Sci Eng* 141:1–8, 2019.
- [Yaghoobiet al., 2013] Yaghoobi. H & Yaghoobi. P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. *Meccanica*, 48 (8), 2019-2035, 2013.
- [Yang et al., 2003] Yang, J., Kitipornchai, S., & Liew, K. M. Large amplitude vibration of thermo-electro-mechanically stressed FGM laminated plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (35-36), 3861-3885, 2003.
- [Youzera et al.,2017] Youzera. H, Meftah. S. A & Daya. E. M. Superharmonic resonance of cross-ply laminates by the method of multiple scales. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 12(5), 2017.
- [Zaoui et al., 2019] Zaoui, F. Z., Ouinas, D., & Tounsi, A. New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations. *Composites Part B: Engineering*, 159, 231-247, 2019.
- [Zarga et al., 2019] Zarga, D., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Bourada, F., Mahmoud, S.R. "Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory", *Steel and Composite Structures*, **32**(3), 389-410, 2019.

Références Bibliographiques

- [Zenkour et al., 2010] Zenkour. A. M & Sobhy. M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Composite Structures*, 93(1), 93-102, 2010.
- [Zhang et al., 2018] Zhang X, Fang G, Leeftang S, Zadpoor AA, Zhou J. Topological design, permeability and mechanical behavior of additively manufactured functionally graded porous metallic biomaterials. *Acta Biomater*, 2018.

ANNEXE

Les coefficients de rigidité et d'inertie (a_{ij}, M_{ij}) apparus dans l'équation directrice (III.21) sont les suivants:

$$a_{11} = -(\alpha^2(A_{11} + A_{11}^T) + \beta^2(A_{22}^T + A_{66})), \quad a_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}),$$

$$a_{13} = \alpha^3(B_{11} + B_{11}^T) + \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T),$$

$$a_{22} = -(\alpha^2(A_{66} + A_{11}^T) + \beta^2(A_{22}^T + A_{22}))$$

$$a_{14} = -\alpha(\alpha^2(B_{11}^s + B_{11}^{sT})k_1A' + (k_2B'B_{12}^s + k_1A'B_{22}^{sT} + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s)\beta^2), \quad a_{15} = L\alpha$$

$$a_{23} = \beta^3(B_{22} + B_{22}^T) + \alpha^2\beta(B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T),$$

$$a_{24} = -\beta(\beta^2(B_{22}^s + B_{22}^{sT})k_2B' + (k_1A'B_{12}^s + (k_1A' + k_2B')B_{66}^s + k_2B'B_{11}^{sT})\alpha^2)$$

$$a_{25} = L\beta$$

$$a_{33} = -(\alpha^4(D_{11} + D_{11}^T) + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + (D_{11}^T + D_{22}^T)\alpha^2\beta^2 + (D_{22} + D_{22}^T)\beta^4 + A_{11}^T\alpha^2 + A_{22}^T\beta^2)$$

$$a_{34} = k_1A'(D_{11}^s\alpha^4 + D_{12}^s\alpha^2\beta^2) + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\alpha^2\beta^2 + k_2B'(D_{22}^s\beta^4 + D_{12}^s\alpha^2\beta^2) + k_1A'\alpha^4D_{11}^{sT} + k_2B'D_{22}^{sT} + (k_1A'D_{22}^{sT} + k_2B'D_{11}^{sT})\alpha^2\beta^2 + k_1A'\alpha^2A_{11}^T + k_2B'\beta^2A_{22}^T$$

$$a_{35} = -L^s(\alpha^2 + \beta^2) - (E_{11}^T\alpha^2 + E_{22}^T\beta^2)$$

$$a_{44} = (k_1A')^2(H_{11}^s k_1 + H_{12}^s k_2)\alpha^4 + (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 + (H_{22}^s + H_{22}^{sT})(k_2B')^2 \beta^2 + (H_{11}^{sT}(k_2B')^2 + H_{22}^{sT}(k_1A')^2 + 2H_{11}^s k_1 k_2 A'B')\alpha^2 \beta^2 - (k_1A')^2(A_{55}^s + A_{11}^T)\alpha^2 - (k_2B')^2(A_{44}^s + A_{22}^T)\beta^2$$

$$a_{45} = k_1A'A_{55}^s\alpha^2 + k_2B'A_{44}^s\beta^2 + R(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2) - E_{11}^T\alpha^2 - E_{22}^T\beta^2$$

$$a_{55} = -(A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2 + F_{11}^T\alpha^2 + F_{22}^T\beta^2 + R^s)$$

$$M_{11} = -I_0, \quad M_{13} = \alpha I_1, \quad M_{14} = -k_1A'\alpha J_1, \quad M_{15} = 0$$

$$M_{22} = -I_0, \quad M_{23} = \beta I_1, \quad M_{24} = -k_2B'\beta J_1, \quad M_{25} = 0$$

$$M_{33} = -I_0 - I_2(\alpha^2 + \beta^2), \quad M_{34} = J_2(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2), \quad M_{35} = -J_2$$

$$M_{44} = -K_2((k_1A')^2\alpha^2 + (k_2B')^2\beta^2), \quad M_{45} = M_{35}$$

$$M_{55} = -K_3$$