

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés



Faculté de technologie
Département de Génie Civil & travaux publics
Laboratoire des matériaux & hydrologie

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

Mme BOUANATI Soumia

Intitulé de la thèse

Présentation d'une nouvelle formulation analytique pour l'étude du comportement mécanique des structures épaisses non homogènes

Devant le jury composé de :

Mr. BENACHOUR Abdelkader	Pr	UDL-SBA	Président
Mr. BENRAHOU Kouider Halime	Pr	UDL-SBA	Directeur de thèse
Mr. TOUNSI Abdelouahed	Pr	UDL-SBA	Co- directeur de thèse
Mr. SADOUNE Mohamed	MCA	U.de Mascara	Examineur
Mr. DRAICHE Kada	MCA	U.de Tiaret	Examineur
Mr. AMARA Khaled	Pr	C.U de A.Temouchent	Examineur

Année universitaire : 2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Je voudrais d'abord remercier ALLAH le Tout Puissant de m'avoir accordé la santé, la volonté et d'avoir eu la bonté de m'entourer de personnes formidables qui ont, chacune à sa façon, et ce, à différentes étapes de mon cheminement, contribué, d'une manière ou d'une autre, à la réalisation de cette thèse de doctorat.

*J'adresse en premier lieu mes plus vifs sentiments de gratitude à mon directeur de thèse, Mr **BENRAHOU Kouider Halim**, Professeur à l'université de Sidi Bel Abbes qui a été attentif à l'évolution de mes recherches et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années de thèse.*

*J'exprime également toute ma reconnaissance à l'égard de mon Co-directeur de thèse, le Professeur **TOUNSI Abdelouahed** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche, sa rigueur scientifique, sa disponibilité et ses conseils précieux m'ont permis d'aplanir bien des difficultés.*

*J'adresse aussi mes remerciements les plus vifs à Monsieur **A. BENACHOUR** pour avoir accepté de présider le jury de thèse, et aussi Messieurs, **M.SADOUNE, K.DRAICHE** et **K.AMARA** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse.*

*Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire Matériaux et Hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, et particulièrement **Dr M. BOURADA** pour ses encouragements, ses conseils et sa disponibilité.*

*Je souhaite en outre, exprimer ma reconnaissance à Mr **F. BOURADA** enseignant au centre universitaire de Tissemsilt à qui j'éprouve une sincère gratitude pour sa disponibilité et son aide précieuse, sa contribution a apporté un soutien scientifique important à ce travail*

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma chère MAMAN, mon cher époux, ma famille, mes amies, leur amour, leur tendresse, leur confiance me portent et me guident tous les jours. Un grand merci.

Une pensée pour terminer ces remerciements à la mémoire de mon défunt PAPA, qui m'a toujours encouragé pour avancer dans mes études, hélas il n'a pas assisté à cette importante étape de ma vie J'espère que, du monde qui est sien maintenant qu'il soit fier de sa e fille. Cher PAPA ce travail t'est dédié.

Abstract

The analysis of bending, buckling, free vibration and wave propagation in functionally graduated, triclinic and orthotropic plates, is presented in this thesis, using new 2D and quasi-3D theories (HSDTs), respectively. The novelty in this work is transcribed by the minimization in the present model, of the number of unknown variables, instead of the five variables (or more) appearing on conventional theories, for the study of the different behaviors of functionally graduated plates simply supported. Another advantage of the present theory is the consideration of the effect of shear deformation in a parabolic manner and the fact of ensuring the condition of the nullity of the shear stresses at the level of the free surfaces of the anisotropic plates, without the use of shear correction factors. The Hamilton principle is used here as a derivative of the motion's equations, which are solved by the Navier method.

The accuracy and efficiency of the present models are verified by comparing our results with those found in the literature for the various models of anisotropic plates.

Keywords : FGM plates, plate theories, vibration, bending, buckling, thick anisotropic plates.

Résumé

L'analyse de la flexion, flambement, la vibration libre et la propagation des ondes dans les plaques fonctionnellement graduées, tricliniques et orthotropes est présentée dans ce travail en utilisant des nouvelles théories 2D et quasi 3D (HSDTs), respectivement. La nouveauté dans ce travail se retranscrit par la minimisation dans le présent modèle, du nombre de variables inconnues, au lieu des cinq variables (ou plus) figurant sur les théories conventionnelles, pour l'étude des différents comportements des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées. Autre avantage de la présente théorie, est la prise en considération de l'effet de déformation de cisaillement d'une façon parabolique et le fait d'assurer la condition de la nullité des contraintes de cisaillement au niveau des surfaces libres des plaques anisotropes, sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations de mouvements, ces dernières sont résolues par la méthode de Navier.

L'exactitude et l'efficacité des présents modèles sont vérifiées en comparant nos résultats avec ceux trouvés dans la littérature pour les différents modèles des plaques anisotropes.

Mots-clés : Plaques FGM, théories des plaques, vibration, flexion, flambement, les plaques épaisses anisotropes.

ملخص

هذا العمل يقدم تحليل الانحناء، الانبعاج، الإهتزاز الحر وإنتشار الموجات في اللوحات متباينة الخواص والمتدرجة وظيفياً وذلك باستخدام نظريات جديدة ثنائية وثلاثية الأبعاد على التوالي.

تتمثل الحدائة في هذا العمل في التقليل إلى الحد الأدنى في النموذج الحالي ، من عدد المتغيرات غير المعروفة ، بدلاً من المتغيرات الخمسة (أو أكثر) التي تظهر في النظريات التقليدية ، وذلك لدراسة مختلف السلوكيات للوحات المتدرجة وظيفياً المدعمة ببساطة.

ميزة أخرى للنظريات الحالية هي أنها تأخذ بعين الاعتبار تأثير تشوه القص بطريقة متكافئة وتضمن انعدام القص على مستوى الأسطح الحرة للوحات وهذا دون اللجوء لاستخدام عوامل تصحيح القص.

يستخدم مبدأ Hamilton هنا لإشتقاق معادلات الحركة، والتي يتم حلها بواسطة طريقة Navier.

يتم التحقق من دقة وكفاءة النماذج الحالية من خلال مقارنة نتائجنا مع الدراسات الموجودة سابقاً لنماذج مختلفة من اللوحات المتدرجة وظيفياً متباينة الخواص.

الكلمات المفتاحية

اللوحات المتدرجة وظيفية، نظريات اللوحات، الإهتزاز، الإنحناء، الإنبعاج، اللوحات السميكة متباينة الخواص.

Table des matières

Résumé

Abstract

المخلص

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des notations

Introduction Générale	1
I. Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites	5
I.1. INTRODUCTION.....	5
I.2. LES CONSTITUANTS ÉLÉMENTAIRES DU MATÉRIAU COMPOSITE....	6
I.2.1. Les fibres.....	7
I.2.1.1. Les fibres de verre.....	9
I.2.1.2. Les fibres de Carbone.....	10
I.2.1.3. Les fibres d'aramides « Kevlar ».....	12
I.2.1.4. Les fibres de bore et de carbure de silicium.....	14
I.2.1.5. Architecture des renforts.....	15
I.2.2. La matrice.....	16
I.2.2.1. La matrice organique.....	17
I.2.2.2. Les matrices minérales.....	21
I.2.3. Charges et aditifs.....	22
I.3. L'ASPECT DES MATERIAUX COMPOSITES.....	23

TABLE DES MATIERES

I.3.1. Les monocouches	23
I.3.2. Les Stratifiés.....	24
I.3.3. Les Sandwichs.....	25
I.3.4. La zone d'interface.....	27
I.4. LES LOIS DE COMPORTEMENT DANS UN MILIEU COMPOSITE.....	27
I.4.1. Types de matériaux	28
I.4.1.1. Matériau isotrope	28
I.4.2. Matériau Anisotrope.....	29
I.4.3. Matériau monoclinique	29
I.4.4. Matériau orthotropes	30
I.4.4.1. Matériau transversalement isotrope ou unidirectionnel	30
I.5. CONCLUSION	32
II. CHAPITRE 02 : DÉVELOPPEMENT DES MATÉRIAUX	
FONCTIONNELLEMENT GRADUÉS	33
II.1. INTRODUCTION	33
II.2. CONCEPT DES MATERIAUX FGM	34
II.3. HISTOIRE DE DEVELOPPEMENT DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES.....	37
II.4. METHODES D'ELABORATION DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES.....	39
II.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	39

TABLE DES MATIERES

II.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	40
II.4.3. Compaction sèche des Poudres.....	41
II.4.4. Projection plasma.....	41
II.4.5. Frittage.....	42
II.4.6. Implantation Ionique (Sputtering).....	43
II.4.7. Dépôt par Centrifugation.....	43
II.5. DOMAINES D'APPLICATIONS DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES.....	44
II.5.1. Aéronautique et aérospatiale.....	44
II.5.2. Génie civil.....	44
II.5.3. Réacteurs nucléaire.....	45
II.5.4. Produits militaires.....	46
II.5.5. Electronique et optoélectronique.....	46
II.5.6. Lames de turbine.....	46
II.5.7. Cylindre de moteur de voiture.....	46
II.5.8. Médecine.....	47
II.5.9. Autres applications.....	47
II.6. LOIS REGISSANTES LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES DES PLAQUES FGM.....	47
II.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	49
II.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	50

TABLE DES MATIERES

II.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	51
II.7. CONCLUSION.....	52
III. CHAPITRE 03 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES THÉORIES DES PLAQUES	53
III.1. INTRODUCTION	53
III.2. LES MODELES ANALYTIQUES DES MONOCOUCHEs EQUIVALENTS	54
III.2.1. Le modèle de Love-Kirchhoff (CPT)	55
III.2.1.1. Hypothèses de base (CPT).....	55
III.2.1.2. Cinématique et déformation (CPT)	55
III.2.2. Le modèle de Reissner et Mindlin (FSDT)	57
III.2.2.1. Hypothèses de base (FSDT)	58
III.2.2.2. Cinématique et déformation (FSDT).....	58
III.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	61
III.2.3.1. Hypothèses de base (HSDT)	62
III.2.3.2. Cinématique et déformation (HSDT)	62
III.3. NOUVELLE THEORIE RAFFINEE DE DEFORMATION DES PLAQUES (RPT)	69
III.3.1. Hypothèses de base (RPT).....	69
III.3.1.1. Cinématique et déformation (RPT)	70
III.3.2. Théorie de déformation des plaques quasi-3D	71

TABLE DES MATIERES

III.3.2.1. Cinématique et déformation (Quasi 3D)	72
III.3.3. Théorie de zig-zag	72
III.4. CONCLUSION	74
IV. CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES EPAISSES FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION DE CISAILLEMENT (HSDT)	75
IV.1. INTRODUCTION.....	75
IV.2. CONFIGURATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PLAQUE À GRADIENT DE PROPRIÉTÉ.....	75
IV.3. LA LOI DE VARIATION DU MATÉRIEL	76
IV.4. LE CHAMP DE DÉPLACEMENT (I-HSDT)	77
IV.5. EQUATIONS CONSTITUTIVES	79
IV.6. PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS.....	80
IV.7. SOLUTION ANALYTIQUE.....	82
IV.8. RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSIONS	83
IV.8.1. Analyse de flexion.....	84
IV.8.2. Analyse de flambement.....	97
IV.9. CONCLUSION	101
V. CHAPITRE 05 : ETUDE DE LA VIBRATION LIBRE ET DE LA PROPAGATION DES ONDES..... DES PLAQUES FG ANISOTROPES EN UTILISANT UNE NOUVELLE THÉORIE QUASI 3D HSDT	103
V.1. INTRODUCTION.....	103

TABLE DES MATIERES

V.2. CONFIGURATION GÉOMETRIQUE	103
V.3. LES ÉQUATIONS GOUVERNANTES	103
V.3.1. Équations cinématiques	103
V.3.2. Équations de mouvements	105
V.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION	115
V.5. CONCLUSION	120
Conclusion Générale	121
Références Bibliographiques	

Liste des Figures

Figure I.1 : <i>Exemple d'un matériau composite</i>	6
Figure I.2 : <i>Constituants d'un matériau composite</i>	7
Figure I.3 : <i>Classification des fibres</i>	8
Figure I.4 : <i>Fibres de verre</i>	9
Figure I.5 : <i>Fibres de carbone</i>	10
Figure I.6 : <i>Tissu de Fibre de Carbone</i>	11
Figure I.7 : <i>Fibre d'aramide</i>	12
Figure I.8 : <i>Fibre d'aramide</i>	13
Figure I.9 : <i>Fibres unidirectionnelles</i>	15
Figure I.10 : <i>Fibres multidirectionnelles</i>	15
Figure I.11 : <i>Fibres orientées</i>	16
Figure I.12 : <i>Les différentes familles de matrice</i>	17
Figure I.13 : <i>Pli à Renforcement unidirectionnel</i>	24
Figure I.14 : <i>Constituants d'un stratifié</i>	24
Figure I.15 : <i>Matériau composite sandwich</i>	25
Figure I.16 : <i>Matériau sandwich à âmes pleines</i>	26
Figure I.17 : <i>Matériau sandwich à âmes creuse</i>	26
Figure I.18 : <i>Matériau composite unidirectionnel</i>	31

Figure II.1 : <i>Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives</i>	35
II.2 : <i>Concept des matériaux à gradient de propriétés</i>	36
Figure II.3 : <i>Protection thermique</i>	37
Figure II.4 : <i>Principe de la méthode coulage en bande</i>	40
Figure II.5 : <i>Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique</i>	42
Figure II.6 : <i>Schéma du procédé dépôt par centrifugation</i>	43
Figure II.7 : <i>Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité</i>	45
Figure II.8 : <i>Cylindre de moteur de la voiture</i>	46
Figure II.9 : <i>Les champs potentiels de l'application des FGM</i>	47
Figure II.10 : <i>Géométrie d'une plaque en FGM</i>	48
Figure II.11 : <i>Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FG</i>	49
Figure II.12 : <i>Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM</i>	50
Figure II.13 : <i>Variation du module de Young dans une plaque E-FGM</i>	51
Figure III.1 : <i>Géométrie d'une plaque</i>	54
Figure III.2 : <i>Illustration des déformations selon le modèle de Love Kirchhoff</i>	55
Figure III.3 : <i>Illustration des déformations selon la théorie FSDT</i>	58
Figure III.4 : <i>La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers</i>	60
Figure III.5 : <i>Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant</i>	60
Figure III.6 : <i>Illustration des déformations selon la théorie HSDT</i>	62
Figure III.7 : <i>La distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers</i>	64

Figure III.8 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en	68
Figure III.9 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents	68
Figure III.10 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre	73
Figure III.11 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé	73
Figure IV.1 : Géométrie de la plaque à gradient fonctionnel	76
Figure IV.2 : La variation de la fraction volumique E-FGM à travers l'épaisseur	77
Figure IV.3 : La variation de la fraction volumique P-FGM à travers l'épaisseur	77
Figure IV.4 : Variation du déplacement plan non-dimensionnel à travers l'épaisseur pour une plaque épaisse fonctionnellement graduée ($b/a=1$, $a/h=2$)	93
Figure IV.5 : Variation de la contrainte normale non -dimensionnelle à travers l'épaisseur pour une plaque épaisse fonctionnellement graduée E-FGM ($b/a= 1$, $a/h = 2$).....	94
Figure IV.6 : Variation de la contrainte de cisaillement plan non-dimensionnelle à travers l'épaisseur pour une plaque épaisse fonctionnellement graduée E-FGM ($b/a=1$, $a/h=2$)	94
Figure IV.7 : Variation de la contrainte de cisaillement transverse non dimensionnelle à travers l'épaisseur pour une plaque épaisse fonctionnellement graduée E-FGM ($b/a=1$, $a/h=2$).....	94
Figure IV.8 : Effet du rapport de l'indice matériel sur la flèche adimensionnelle pour divers rapports de géométrie d'une plaque carrée P-FGM ($b/a=1$).....	96
Figure IV.9 : Effet du rapport de l'indice matériel sur la flèche adimensionnelle pour divers rapports de dimension d'une plaque P-FGM ($a/h=10$).....	96
Figure IV.10 : Effet de l'indice matériel P et du rapport d'épaisseur a/h sur la charge critique de flambement N_{cr} des plaques rectangulaires Al / SiC	98
Figure IV.11 : Effet de la charge de compression axiale sur la charge critique de flambement non dimensionnel pour divers indices de puissance ($b/a=1$, $a/h=10$)	101

Figure V.1 : *L'effet du nombre d'onde et de l'épaisseur sur les fréquences des plaques rectangulaires triclinique* ($h=0.01m, k_1 = k_2$) 118

Figure V.2 : *L'effet du nombre d'onde et l'épaisseur sur la vitesse de phases des plaques rectangulaires tricliniques* $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, k_2 = 0$ 119

Liste des Tableaux

Tableau I.1 : <i>Propriétés des fibres de verre</i>	9
Tableau I.2 : <i>Avantages et Handicaps des fibres de verre</i>	10
Tableau I.3 : <i>Propriétés des fibres de carbone</i>	11
Tableau I.4 : <i>Avantages et Handicaps des fibres de carbone</i>	12
Tableau I.5 : <i>Les propriétés des fibres de kevlar</i>	13
Tableau I.6 : <i>Avantages et Handicaps des fibres aramides</i>	14
Tableau I.7 : <i>Propriétés des fibres de bore</i>	14
Tableau I.8 : <i>Caractéristiques moyennes des matrices TD</i>	19
Tableau I.9 : <i>Caractéristiques moyennes des matrices TP</i>	20
Tableau I.10 : <i>Principales différences entre TP et TD</i>	20
Tableau I.11 : <i>Les composites à matrice métallique</i>	22
Tableau II.1 : <i>Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal</i>	36
Tableau IV.1 : <i>Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG</i>	76
Tableau IV.2 : <i>Validation des déplacements et contraintes non dimensionnels pour une plaque carrée fonctionnellement graduée P-FGM avec ($a/h = 10$)</i>	85
Tableau IV.3 : <i>Validation des déplacements transversaux non dimensionnels pour une plaque à gradation exponentielle P-FGM</i>	87
Tableau IV.4 : <i>Validation des contraintes normales non dimensionnelles pour une plaque à gradation exponentielle. E-FGM</i>	89
Tableau IV.5 : <i>Validation des déplacements transversaux non dimensionnels pour une plaque à gradation exponentielle E-FGM avec ($a/h = 10$)</i>	91

Tableau IV.6 : <i>Validation des contraintes normales non dimensionnelles pour une plaque à gradation exponentielle. E-FGM avec ($a/h = 10$)</i>	92
Tableau IV.7 : <i>Comparaison de la charge critique de flambement des plaques carrées Al / SiC ($a/h = 10$ et $a/b=1$) en fonction de l'indice matériel sous différents types de chargement)</i>	97
Tableau IV.8 : <i>Comparaison de la charge critique de flambement des plaques carrées Al/SiC en fonction de l'indice matériel, rapport de géométrie et de dimension sous chargement de compression uniaxial et biaxial</i>	100
Tableau V.1 : <i>Comparaison des fréquences circulaires des matériaux tricliniques et orthotropes ($h=0.01m$, $k_1 = k_2$)</i>	116
Tableau V.2 : <i>Comparaison des vitesses de phase des matériaux triclinique et orthotrope ($h=0.01m, \varpi = \frac{\omega}{k}$ rad/s.m), $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, k_2 = 0$</i>	117

LISTE DES NOTATIONS ET SYMBOLES

$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_0, E_m	Module Young (Métal)
E_c	Module Young (céramique)
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
ρ	La densité du matériau
a	La longueur de la plaque
b	La largeur de la plaque
h	L'épaisseur de la plaque
P	L'indice de la puissance (paramètre matériel)
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0, w_0	Les déplacements au niveau du plan moyen (z=0)
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y
θ_x, θ_y	Les rotations autour des axes x et y (les termes du second ordre)
$f(z), \psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
ϕ	Fonction de coordonnées x, y
$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$	Contraintes normales
$(\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy})$	Contraintes de cisaillement
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$	Déformations dans les directions x, y, z
$(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$	Déformations de distorsion
δU	Variation de l'énergie de déformation
δK	Variation de l'énergie cinétique

δV	Variation du travail des forces extérieures
∂	Dérivée partielle
(..)	Dérivée seconde par rapport au temps
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_{zx}$	Champ de déformation longitudinale virtuel
$(\delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz})$	Champ de déformation transversale virtuel
(N_x, N_y, N_{xy})	Efforts normaux
(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b)	Moments de flexion
(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s)	Moments supplémentaires dus au cisaillement transverse
(S_{xz}^s, S_{yz}^s)	Efforts de cisaillement transverse
(V_{xz}^s, V_{yz}^s)	Efforts de cisaillement transverse
(I_0, I_1, I_2)	Moments d'inertie
K_1, K_2	Des coefficients dépendant de la géométrie de la plaque
i, j, m et l	Nombres naturels
$\int \theta(x, y) dx, \int \theta(x, y) dy$	Les variables intégrales indéterminées
q	Charge transversale
q_0	Charge transversale initiale
q_{mn}	Coefficient de Fourier
A_{ij}	Terme de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Terme de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Terme de rigidité de flexion de la plaque
$\{A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\}$	Termes de rigidité en cisaillement de la plaque
N_{cr}	Charge critique du flambement
γ	Type de chargement axial de la plaque
$[K]$	La matrice de rigidité
$[M]$	La matrice de masse

a_{ij}	Coefficients de matrice de rigidité
$\{\Delta\}$	Vecteur de déplacement généralisé
$(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn})$	Paramètres arbitraires
ω	Fréquence propre
m, n	Modes propres
k_1, k_2	Nombre d'onde dans les direction x et y
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice

Introduction Générale

La science des matériaux de structure, est considérée comme un axe de recherche très porteur, car tout composant, toute pièce, toute machine est à la base un matériau. Avec le développement de l'industrie, et les nouveaux challenges auxquels font face les concepteurs, il est devenu plus qu'indispensable de concocter des matériaux à haute performance, qui sont à même de répondre à l'intégralité des critères escomptés, d'où le concept des matériaux « multifonctionnels », connus sous le nom de matériaux composites.

Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Cependant, ces matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches, ont connu des problèmes majeurs tels que la discontinuité des propriétés qui provoque de fortes concentrations de contraintes au niveau des interfaces, ainsi qu'un grave problème de délaminage, dus à une transition brutale de la composition.

Toujours en quête de conception de matériaux plus performants, et afin d'assurer une meilleure résistance mécanique et thermique, tout en évitant les phénomènes de la décohésion inter faciale, et d'endommagement des matériaux composites conventionnels, des chercheurs ont développé une nouvelle génération de matériaux composites appelée les matériaux fonctionnellement gradués (en anglais : *Functionally Graded Materials* : *F.G.M.*).

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été proposé par un groupe de scientifiques japonais dans les années 1980, afin d'en faire usage en tant que matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales, et les réacteurs nucléaires. [Yamanouchi et al ,1990 ; Koizumi, 1993].

Ces matériaux peuvent être fabriqués en variant le pourcentage des constituants de deux matériaux ou plus pour avoir une propriété graduée suivant la direction spatiale désirée.

Ils se caractérisent par la variation continue de leurs propriétés matérielles d'une surface à une autre, par un gradient de composition, ce qui permet de réduire la disparité dans : les propriétés matérielles, les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les facteurs de concentration de contrainte, rencontrée dans les composites classiques.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Avec le temps, l'utilisation des FGM a connu une généralisation tous azimuts, à l'instar des structures de barrières thermiques, comme moyen de lutter contre l'usure et comme revêtements résistant à la corrosion etc. La pertinence accrue des composants structurels des FGM a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant de nombreux scientifiques depuis plusieurs décennies, et les a exhortés à étudier le comportement des plaques fonctionnellement graduées (FG) dans le domaine élastique, afin de prédire leurs réponses statiques et dynamiques, et à développer ainsi plusieurs théories de plaques, à savoir : la théorie classique des plaques (CPT) ; qui est une théorie qui néglige l'effet de la déformation de cisaillement transversal, mais qui fournit néanmoins des résultats satisfaisants pour les plaques minces ; la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), qui prend en compte l'effet de cisaillement transversal par le moyen d'une variation linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur ; et la théorie de la déformation de cisaillement de l'ordre supérieur (HSDT) ; avec des variations non linéaires des déplacements dans l'épaisseur de la structure.

Récemment, de nombreuses théories de déformation de cisaillement ont été développées par plusieurs scientifiques, pour résoudre les problèmes : de flexion, de flambement et de vibration des structures. Tounsi et al. (2016) ont développé une nouvelle HSDT avec 03 inconnus pour l'analyse du flambement et la vibration des plaques sandwich fonctionnellement graduée. Zhang (2014) a utilisé la méthode de Ritz et la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, basée sur la surface neutre avec les hypothèses de Von-Karman, pour étudier la réponse non linéaire de la flexion des plaques FG, reposant sur une fondation élastique dans des environnements thermiques à six conditions aux limites différentes. Mantari et Guedes Soares (2012) ont proposé une nouvelle HSDTs hybride quasi-3D généralisée, avec 06 inconnus, pour l'étude de la flexion des plaques composites avancées. Akbarzadeh et al. (2011) quant à eux, ont présenté les réponses statiques et dynamiques des plaques FG sous chargement latérales.

Il est à noter que plusieurs travaux ont été menés aussi sur la propagation des ondes dans les structures : Nayfeh et Chimenti (1989) ont présenté l'étude sur la propagation des ondes dans les plaques anisotropes. Ils ont en effet envisagé une étude formelle sur les ondes dans une plaque triclinique symétrique. Zerwer et al. (2000) ont analysé le mouvement des ondes de Rayleigh dans des feuillets minces de plexiglas. Rovetta et al. (2006) ont proposé une étude approfondie de la propagation des ondes élastiques dans les plaques minces. Ils ont montré que,

INTRODUCTION GÉNÉRALE

dans la gamme de fréquences considérée et pour des épaisseurs de plaques modestes, les seules ondes pouvant être excitées et propagées dans la structure sont des ondes guidées. Edalati et al. (2006) ont étudié la faisabilité des tests par ultrasons des ondes de Lamb pour détecter les défauts dans une plaque mince en aluminium. Quintanilla et al. (2015) ont utilisé une technique de collocation spectrale pour traiter les problèmes des ondes guidées plus complexes et réalistes nécessaires à une évaluation non destructive.

L'effet de cisaillement transverse est crucial et important dans la modélisation de la propagation des ondes ultrasonores dans les composites. Maio et al. (2015) ont utilisé la méthode des éléments finis, basée sur la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre, pour évaluer la vitesse de propagation du premier mode d'onde de Lamb anti symétrique, dans des plaques composites graphite/époxy par approche numérique. Rauter et Lammering (2015) ont analysé la propagation des ondes cumulatives non linéaires en tenant compte des fissures micro-structurelles dans les plaques isotropes minces. Yahia et al. (2015) ont utilisé diverses théories de plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour la propagation des ondes dans les plaques FG poreuses. Fourn et al. (2018) ont proposé une nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables pour l'étude de la propagation des ondes dans les plaques FG. Benadouda et al. (2017) ont présenté une théorie de déformation de cisaillement efficace pour l'analyse propagation des ondes dans les poutres FG poreuses. Aminipour et Janghorban (2017) ont étudié la propagation des ondes dans les plaques anisotropes en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement trigonométrique.

La présente thèse traite deux volets : le premier a pour objectif de proposer une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique, pour les analyses de flexion et de flambement des plaques FG. Le champ de déplacement du modèle actuel utilise des termes intégrés indéterminés, et ne contient que quatre variables, au lieu de cinq ou plus dans le cas des autres théories (HSDT). Ce modèle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en satisfaisant les conditions aux limites des plaques ; et le deuxième vise à développer un simple modèle quasi-3D HSDT pour analyser la vibration libre et la propagation des ondes dans les plaques épaisses tricliniques et orthotropes FG. En prenant une autre hypothèse sur le HSDT quasi-3D existant. La théorie proposée a un nombre d'équations gouvernantes réduit à trois inconnus. Les influences de certains paramètres tels que le nombre d'ondes sur les fréquences, les vitesses de phase et les vitesses de groupe sont également étudiées.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Pour atteindre nos objectifs, cette thèse s'articule autour de cinq chapitres et d'une conclusion générale :

- Dans le premier chapitre nous exposons d'une manière générale les matériaux composites.
- Le deuxième chapitre présente les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application.
- Le troisième chapitre se focalise sur les théories des plaques ainsi que les travaux de recherche qui lui sont associés.
- Le quatrième chapitre détaille un nouveau modèle analytique, ainsi que les résultats obtenus pour l'analyse de la flexion, et du flambement des plaques à gradient fonctionnel, simplement appuyées.
- Dans le cinquième et dernier chapitre, une autre théorie de déformation de cisaillement quasi 3d, et les résultats obtenus par l'analyse de la vibration libre et la propagation des ondes des plaques anisotropes, ont été présentés.
- Et enfin, une conclusion générale, synthétisant les résultats inédits de ce travail, ainsi que les perspectives pour les travaux futurs.

Chapitre I

Généralité sur les matériaux composites

I. Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. INTRODUCTION

Avec le développement en plein essor des nouvelles technologies, la demande en matériaux à haute performance à la fois résistants, rigides, légers et surtout adaptables à des utilisations spécifiques ne cesse de croître. Partant du principe que les matériaux traditionnels limitent les champs d'action de par leurs propriétés mécaniques et leurs techniques de mise en œuvre ; le challenge se situe principalement dans la rareté des matériaux qui répondent d'une façon intégrale aux exigences décrites plus haut. Chose qui a incité la communauté scientifique à s'évertuer au développement de nouveaux matériaux tels que les matériaux composites façonnables à volonté au gré du concepteur ; permettant ainsi l'ouverture d'un large éventail d'application, et répondant à des utilisations bien spécifiques.

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels, car ils apportent de nombreux avantages fonctionnels, à savoir : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent en effet d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques, ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu, ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions.

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme étant la combinaison macroscopique de deux ou plusieurs matériaux aux caractéristiques différentes et souvent complémentaires, donnant un matériau hétérogène et anisotrope.

Le matériau ainsi constitué possède des propriétés que les éléments constitutifs seuls ne possèdent pas. Il a des qualités qui se combinent avec synergie pour présenter des propriétés particulières en réponse à un besoin bien escompté.

On appelle de façon courante, matériaux composites, des arrangements de renforts (fibres et/ou particules) noyés dans une matrice (résines), dont la résistance mécanique est

CHAPITRE 01 : GÉNÉRALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

beaucoup plus faible, que celle des renforts. La matrice assure la cohésion du matériau et l'orientation et la tenue des fibres. Elle permet aussi de transmettre à ces fibres, qui assurent l'ossature du matériau, les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts, sous forme de fibres, contribuent à l'amélioration de la résistance mécanique et de la rigidité de la pièce obtenue, dans laquelle ils sont incorporés.

Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite. En effet, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases de la structure pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques élastiques.

Le but recherché dans ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériaux pour réaliser des pièces ou des produits directement à la forme désirée, avec des propriétés bien précises.

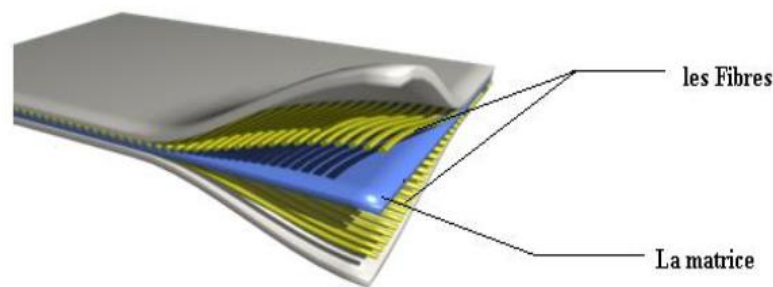


Figure I.1 : *Exemple d'un matériau composite* [Benatta, 2011]

I.2. LES CONSTITUANTS ÉLÉMENTAIRES DU MATÉRIAU COMPOSITE

En général les constituants principaux d'un matériau composite sont : la matrice, le renfort et l'interface (figure I.2). Dans certains cas, des charges et des additifs peuvent être utilisés.

Les performances mécaniques des composites fibreux sont directement liées aux caractéristiques mécaniques de leurs constituants :

- La rigidité d'un composite est assurée principalement par les *fibres* qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice.

- Quant à la *matrice*, elle permet de donner la forme géométrique de la structure et d'assurer la cohésion de l'ensemble des fibres et de les protéger contre le milieu ambiant. Mais son rôle principal reste de transférer les efforts mécaniques d'une fibre à l'autre.

- L'*interface* est la zone de transition entre les fibres et la matrice. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des deux. Une large gamme de fibres et de matrices est disponible, mais dans ce qui suit, nous présenterons quelques-uns des matériaux les plus couramment utilisés.

-**Les charges et renforts** : Il faut différencier charges et renforts. Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la couleur, le démoulage, la tenue aux chocs, la résistance aux UV, la résistance au vieillissement, le comportement au feu...). Les renforts, sous forme de fibres, quant à eux contribuent uniquement à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

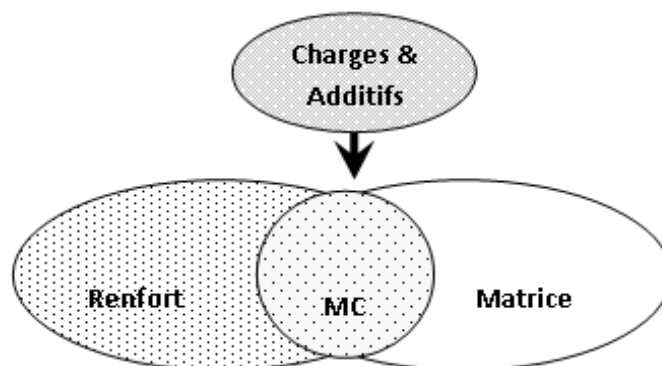


Figure I.2 : *Constituants d'un matériau composite* [Benatta 2011]

I.2.1. Les fibres

Les fibres ou les renforts, confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines des propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Les caractéristiques recherchées pour

CHAPITRE 01 : GÉNÉRALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

les renforts sont : des caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec les résines, une bonne facilitée de mise en œuvre, un faible coût, etc.

Le renfort se présente généralement sous la forme de fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elles doivent supporter.

Les principaux types de renforts se distinguent par leur géométrie (particules, billes, fibres courtes, fibres longues), par leur disposition, notamment pour les 3D (feutres, nappe de mat 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissage 3D) ou par leur nature (minérale ou organique).

Une variété de fibres est présentement disponible : différents types de fibres de verre, de carbone, d'aramide (Kevlar), de graphite, de bore, de silice, de carbure de silicium et d'aluminium sont disponibles. Elles représentent une gamme de propriétés mécaniques incluant des résistances en traction de 700 à 4200 MPa et des modules d'élasticité de 50 GPa à 400 GPa. Les principales fibres utilisées sont :

- Fibre de Verre;
- Fibre de Carbone ;
- Fibre de Kevlar ;
- Fibre de Bore et de carbure de silicium.

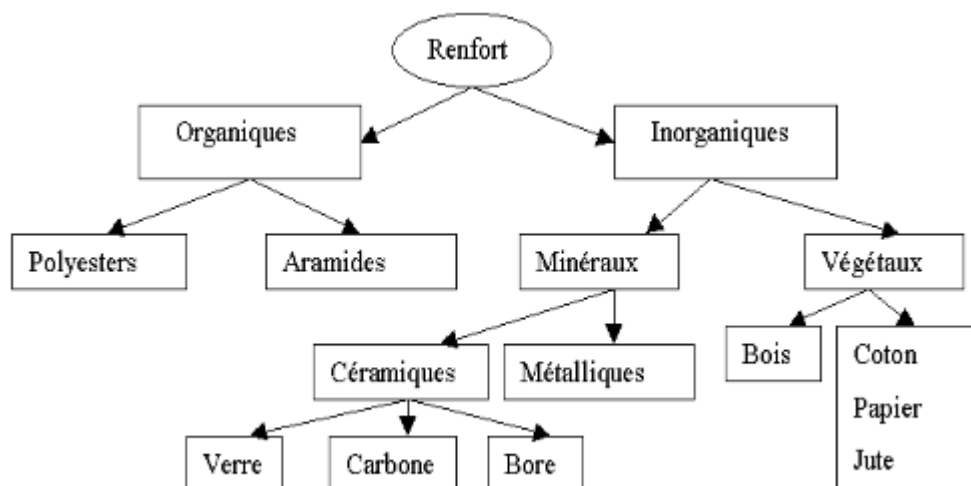


Figure I.3 : Classification des fibres

I.2.1.1. Les fibres de verre

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD).

Elles sont élaborées à partir d'un verre filable, appelé verre textile, composé de silice, alumine, chaux, magnésie, etc. Ces produits peu coûteux, associés à des procédés assez simples d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport performances/prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites. Il existe une multitude de fibres de verre dont les propriétés dépendent de leur composition. L'industrie verrière propose plusieurs produits différents par leur composition chimique et suivant les applications auxquelles elles sont destinées : le verre E d'une part et d'autre part les verres R et S très voisins (le premier est français et le second américain).

- Fibres E, employées dans les composites grandes diffusions (GD)
- Fibres D, utilisées pour la fabrication des circuits imprimés
- Fibres R et S, plus rigides et résistants utilisées pour la fabrication des composites hautes performances (HP).



Figure I.4 : *Fibres de verre* [Glossaire, 2006]

Les propriétés de ces fibres sont présentées dans le tableau I.1.

Tableau I.1 : *Propriétés des fibres de verre* [Bouchafa.A, 2011]

Propriétés mécaniques	Verre E	Verre D	Verre R	Verre S
Résistance à la rupture (MPa)	3400	2500	4400	4900
Module de Young (MPa)	73000	55000	86000	87000
Allongement à la rupture (%)	4,9	4,8	5,2	5,2
Masse volumique (g/cm ³)	2,54	2,53	2,55	2,54

CHAPITRE 01 : GÉNÉRALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

Dans le tableau ci-après sont énumérées quelques avantages et limites d'utilisation des fibres de verre:

Tableau I.2 : *Avantages et Handicaps des fibres de verre* [Maurice, 1998]

Avantages	Handicaps
<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance spécifique (pour le verre R),- Une bonne adhérence entre fibres et résines,- Tenue à la température élevée,- Incombustibilité,- Dilatation et conductivité thermique faibles,- Bon apport de performances mécanique/prix,- Bonne propriétés diélectriques.	<ul style="list-style-type: none">- Faible module (par rapport au carbone ou aramide),- Vieillessement au contact de l'eau.

I.2.1.2. Les fibres de Carbone

Ce sont les fibres les plus utilisées dans les applications hautes performances. Elles sont élaborées par carbonisation de fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres, aboutissant à une graphitisation. Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone.

Il existe toute une variété de fibres de carbone mais actuellement trois sortes sont commercialisées :

- Les fibres à haute résistance classique (HR) (types : As4, As6, T300 et X635).
- Les fibres à haute résistance module intermédiaire (type : IM6, X636).
- Les fibres à haut module (HM) (type : M40 et HM5).



Figure I.5 : *Fibres de carbone* [Glossaire 2006]

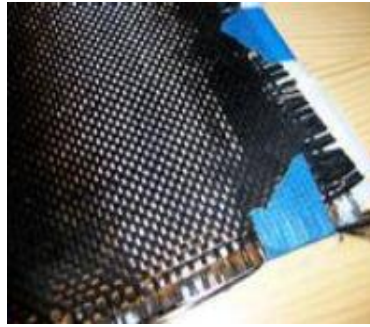


Figure I.6 : *Tissu de Fibre de Carbone* [Sallai, 2011]

D'un fabricant à l'autre, les propriétés mécaniques varient suivant les propriétés physiques et mécaniques moyennes.

Les propriétés mécaniques et physiques des différents types de fibres de carbone sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Tableau I.3 : *Propriétés des fibres de carbone* [Tounsi, 2006]

Propriétés en traction	HR		IM	HM	Propriétés en traction
R_t (MPa)	3000 à 5000	4000 à 4500	47000 à 52000	2000 à 2500	1100 à 2000
E_{0T} (MPa)	220000 à 240000	235000 à 250000	275000 à 300000	350000 à 400000	450000 à 500000
A_R (%)	1,2 à 1,5	1,6 à 1,8	1,4 à 1,6	0,5 à 0,7	0,3 à 0,5
Masse volumique (g/cm ³)	1,75 à 1,8	1,75 à 1,8	1,7 à 1,8	1,8 à 1,85	1,9 à 1,95

R_t : Résistance à la rupture ;

E_{0T} : Module de Young ;

A_R : l'allongement à la rupture.

Dans le tableau ci-dessous sont énumérées quelques avantages et limites d'utilisation des fibres de carbonées :

Tableau I.4 : *Avantages et Handicaps des fibres de carbone*

Avantages	Handicaps
<ul style="list-style-type: none">- Excellentes propriétés mécaniques,- Très bonne tenue en température (non oxydante),- Dilatation thermique nulle,- Bonne conductibilité thermique et électrique,- Bonne tenue à l'humidité,- Usinage aisé,- Faible densité.	<ul style="list-style-type: none">- Prix très élevé,- Précautions à prendre dans la mise en œuvre (fibres cassantes),- Tenue limitée au chocs et à l'abrasion,- Difficile avec les résines,- Mauvais comportement chimique avec :<ul style="list-style-type: none">* Oxygène : 400 °C* Acides oxydants chaud* Métaux corrosion galvanique

I.2.1.3. Les fibres d'aramides « Kevlar »

Généralement connues sous le nom de « Kevlar », nom commercial de la fibre mise au point par Dupont de Nemours (USA)[Berthelot,2010].

Les fibres aramides sont des fibres poly-aramides ou polyamides aromatiques de synthèse.

Actuellement il existe deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- Les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;
- La fibre haute module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

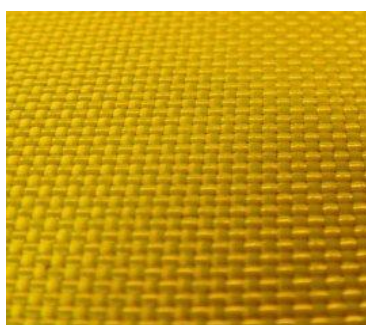


Figure I.7 : *Fibre d'aramide* [Glossaire, 2006]



Figure I.8 : *Fibre d'aramide* [Sallai, 2010]

Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (jusqu'à 200°C en fonction de la matrice), présentent des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leur résistance à la compression est faible, cette déficience peut être attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite.

L'utilisation de composites à fibres hybrides permet de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides.

Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

Les propriétés physiques et mécaniques de ces deux types de fibres sont représentées dans le tableau suivant :

Tableau I.5 : *Les propriétés des fibres de kevlar*

Propriétés en traction	Kevlar 49	Kevlar 29
R_t (MPa)	3000	2700
E_{OT} (MPa)	120000 à 130000	60000
A_R (%)	2,1	4
Masse volumique (g/cm ³)	1,45	1,44

Dans le tableau ci-après sont énumérées quelques avantages et limites d'utilisation des fibres aramides selon (Maurice 1998):

CHAPITRE 01 : GÉNÉRALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

Tableau I.6 : *Avantages et Handicaps des fibres aramides* [Maurice, 1998]

Avantages	Handicaps
<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance spécifique à la traction,- Faible densité (1,45),- Dilatation thermique nulle,- Absorption des vibrations, amortissement,- Excellente résistance aux chocs et à la fatigue,- Bon comportement chimique vis-à-vis des carburants.	<ul style="list-style-type: none">- Prix très élevé,- Faible tenue en pression,- Reprise d'humidité importante (4%)- Etuvage avant imprégnation,- Faible adhérence avec les résines d'imprégnation,- Sensibilité aux UV,- Usinage difficile,- Tenue au feu, (décomposition à 400°C)

I.2.1.4. Les fibres de bore et de carbure de silicium

Ces deux types de renforts sont appelés au même principe de fabrication et ont des propriétés et des domaines d'application voisins. Leur utilisation reste toutefois très marginale (navette spatiale).

Ces matériaux sont fabriqués à base de bore, bore-carbure, bore de silicium ; On opère par dépôt en phase gazeuse sur une âme en tungstène porté à 1200°C, qui sert de substrat. Le diamètre du mono filament est plus important que pour les autres fibres (100 à 150 microns).

Les prix et difficultés de mise en œuvre (fragilité, usinage difficile, manipulation dangereuse) freinent le développement de ces types de renforts.

Tableau I.7 : *Propriétés des fibres de bore* [Bouchafa.A, 2011]

Propriétés mécaniques	Bore
Résistance à la rupture (MPa)	3500
Module de Young (MPa)	400000
Allongement à la rupture (%)	0,8
Masse volumique (g/cm ³)	2,63

I.2.1.5. Architecture des renforts

a. Feutre de fibres agglomérées par un liant : le matériau peut être à fibres courtes (longueur inférieure à 50 mm), sans orientations particulière ou à fibres continues.

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement.

Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée aux contraintes mécaniques. En fonction des propriétés recherchées, on rencontre plusieurs architectures de renforcements :

-Les unidirectionnels (UD) : Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand.

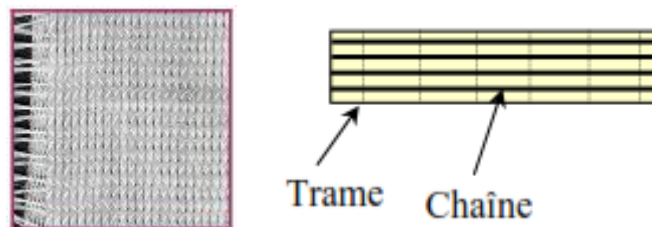


Figure I.9 : *Fibres unidirectionnelles* [Glossaire, 2006]

-Multidirectionnelles aléatoires (MD) :

b. Fibres coupées et broyées, sans arrangement particulier

c. Feutre de fibres agglomérées par un liant : le matériau peut être à fibres courtes (longueur inférieure à 50 mm), sans orientations particulière ou à fibres continues.



Figure I.10 : *Fibres multidirectionnelles* [Gornet, 2008]

-**Orientée** : Le tissu comporte des fils de chaîne ou de trame (fibres bidirectionnelles) ; suivant le mode de croisement de la trame et de la chaîne, le tissu sera une toile, un sergé ou un satin.

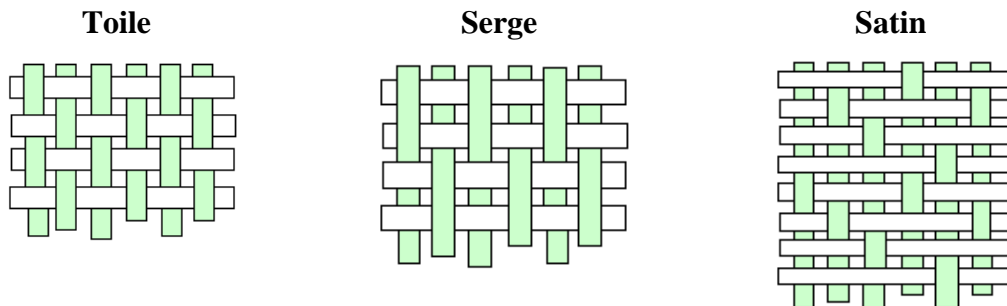


Figure I.11 : *Fibres orientées* [Glossaire, 2006]

Les performances mécaniques des divers tissus dépendent :

- Du type de fils constituant le tissu : nature (verre, carbone, etc.), fils avec ou sans torsion, etc.
- De l'armure, Les armures unidirectionnelles et à haut module donnent les meilleures Performances. L'armure satin est à un degré moindre, le sergé a des performances supérieures à celles de l'armure toile.

I.2.2. La matrice

La matrice est l'un des constituants de base des matériaux composites, la matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.) et (parfois) de charge dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le coût de production. L'ensemble résine-charge se comporte comme un matériau homogène, et le composite est considéré comme constitué d'une matrice et d'un renfort.

A partir de la nature de la matrice les matériaux composites sont classés en trois catégories :

- Les composites à matrice polymère ou organique (CMO),
- Les composites à matrice métallique,
- (Espace_réservé1) Les composites à matrice céramique.

CHAPITRE 01 : GÉNÉRALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

La matrice a pour rôle de donner la forme désirée au produit, assurer la cohésion des fibres renforts pour une meilleure homogénéisation de l'ensemble, répartir les charges mécaniques et les contraintes encaissées, apporter la tenue chimique de la structure et la protection des renforts vis-à-vis du milieu extérieur (chocs thermiques ou mécaniques). Pour obtenir les caractéristiques d'imprégnation les plus élevées, la résine doit, dans sa configuration finale, occuper tous les espaces inter-fibres et présenter le moins de bulles d'air possible. Pour réaliser cette imprégnation, la viscosité de la résine est diminuée avec un apport thermique.

Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2200°C peuvent être atteintes. [Bourada.F 2018]

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure suivante :

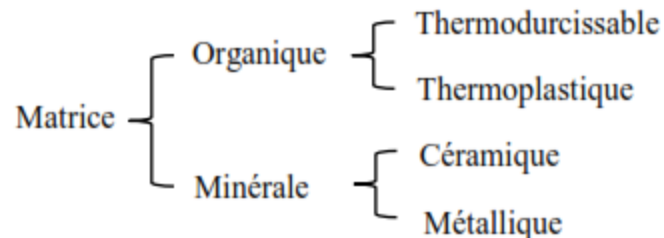


Figure I.12 : *Les différentes familles de matrice* [Gornet, 2008]

I.2.2.1. La matrice organique

La conception de matériau composite à matrice organique (CMO), est un enjeu majeur dans de nombreux secteurs industriels : génie civil, aéronautique, construction navale, etc. cela revient aux gains potentiels apportés par ces matériaux comme la réduction de la masse, la réduction des coûts.

Il existe deux catégories de matrice organique : les résines thermodurcissables qui représentent 3/4 des composites à matrice organique actuels et les résines thermoplastiques.

Ces deux types de résine possèdent la faculté de pouvoir être moulés ou mis en forme, pour donner soit un produit fini, soit un produit semi-fini dont la forme peut être modifiée.

a. Les résines thermodurcissables (TD)

C'est la résine la plus utilisée dans l'application de composite de grande distribution pour des raisons de coût et de facilité de mise en œuvre.

Elles sont formées de macromolécules orientées selon un réseau tridimensionnel et polymérisent selon la forme souhaitée par une transformation irréversible comme leur nom l'indique, qu'il est très difficile de rompre, sinon par l'apport d'une importante quantité de chaleur. Les avantages principaux sont le procédé de fabrication relativement mature et le poids faible. Ce type de composites a été développé surtout pour les applications aéronautiques où la réduction de poids est essentielle.

On distingue trois familles de résines thermodurcissables principalement utilisées :
[Berthelot, 1992]

- Les résines phénoliques (résines de condensation) sont utilisées dans les applications nécessitant des propriétés de tenue au feu imposées par les normes qui régissent les transports civils. Elles présentent l'inconvénient d'être peu résistantes aux sollicitations.
- Les résines polyamides présentent d'excellentes propriétés mécaniques notamment à haute température ; elles sont par contre très sensibles aux chocs. Afin de remédier à cet inconvénient, il est possible d'améliorer leur ténacité en les mélangeant à des résines thermoplastiques avant polymérisation.
- Les résines époxydes possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques. Elles sont généralement renforcées par des fibres de carbone ou de verre (longerons, dérives, nacelles, voilure, bateaux et automobiles de compétition, etc.).

Les caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables sont regroupées dans le tableau suivant:

Tableau I.8 :Caractéristiques moyennes des matrices TD [Ait Atmane, 2011]

Matrices TD	Masse volumique (Kg.m-3)	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Module de cisaillement (MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) (MPa)	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique $\times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
Epoxyde	1200	4500	1600	0,4	130	2	10
Phénolique	1300	3000	1100	0,4	70	2,5	1
Polyester	1200	4000	1400	0,4	80	2,5	8
Polycarbonate	1200	2400	--	0,35	60	--	6
Vinylester	1150	3300	--	--	75	4	5
Silicone	1100	2200	--	0,5	35	--	--
Uréthane	1100	700 à 7000	--	--	30	100	--
Polyimide	1400	4000 à 19000	1100	0,35	70	1	8

b. Les résines thermoplastiques (TD)

La famille des résines thermoplastiques est très vaste, et peut être séparée en plastiques de grande diffusion et plastiques techniques (ou technopolymères).

Ils se présentent sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible et ces polymères sont recyclés par simple chauffage. L'intérêt des thermoplastiques réside dans leur faible coût, résultant à la fois de matières premières disponibles et la facilité de leurs procédés de fabrication. Toutefois, ce faible coût est lié à des propriétés mécaniques et thermomécaniques faibles car le changement d'état solide/liquide ou pâteux peut se faire plusieurs fois mais avec une perte de caractéristiques à chaque cycle. [Menail, 2009]

Les principales matrices thermoplastiques utilisées (possédant toutes une tenue en température supérieure à 100 °C, sont les suivantes :

- Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;
- Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse ;
- Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible.

On utilise de plus en plus des thermoplastiques thermostables (tenue thermomécanique est de l'ordre de 140°C), en particulier les suivants :

CHAPITRE 01 : GÉNÉRALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

- Polyéther-imide (PEI) ;
- Polyéther-sulfone (PES) ;
- Polyéther-éther-cétone (PEEK).

Les propriétés physiques et mécaniques de plusieurs types de résines thermoplastiques sont présentées sans le tableau suivant :

Tableau I.9 : Caractéristiques moyennes des matrices TP [Ait Atmane, 2011]

Matrices TP	Masse volumique (Kg.m ³)	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Coefficient de poisson	Contrainte de rupture (traction) (MPa)	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C ⁻¹
PP	900	1200	0.4	30	20 à 400	9x10 ⁻⁵
PPS	1300	4000	--	65	100	5x10 ⁻⁵
PA	1100	2000	0.35	70	200	8x10 ⁻⁵
PES	1350	3000	--	85	60	6x10 ⁻⁵
PEI	1150	3300	--	105	60	6x10 ⁻⁵
PEEK	1300	4000	--	90	50	5x10 ⁻⁵

Les différences fondamentales des deux types de matrices thermodurcissable et thermoplastique sont citées dans le tableau suivant :

Tableau I.10 : Principales différences entre TP et TD [Glossaire, 2006]

Matrices	Thermoplastiques (TP)	Thermodurcissables (TD)
Etat de base	Solides prêt à l'emploi	Liquide visqueux à polymériser
Stockage	Illimité	Réduit
Mouillabilité renforts	Difficile	Aisée
Moulage	Chauffage + refroidissement	Chauffage continu
Cycle	Court	Long
Tenue de choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite	Bonne
Chutes et déchets	Recyclables	Perdus ou recyclés en charge
Conditions de travail	Propreté	Emanation pour « méthode humide »

I.2.2.2. Les matrices minérales

a. Les matrices céramiques

L'utilisation des céramiques n'a pas connu l'ampleur prévisible des applications thermo-structurales possibles en raison de leur sensibilité à la propagation de fissures qui induit un manque de fiabilité vis-à-vis des chocs mécaniques ou thermiques.

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

b. Les matrices métalliques

Les matériaux composites à matrice métallique sont considérés comme matériaux de pointe.

Plusieurs recherches ont été menées aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût, bien supérieur à celui des matériaux plus conventionnels. [Couillault, 2010]

À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. La matrice métallique apporte au matériau composite une bonne ductilité, bonne résistance à certains solvants, une meilleure tenue en température que les résines, une meilleure usinabilité. Mais d'autre part elles sont difficiles à mettre en œuvre à cause de leur densité élevée et la réactivité des matériaux pouvant créer des problèmes au niveau de l'interface (fibres-matrice).

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300°C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont

CHAPITRE 01 : GÉNÉRALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel. Sur le tableau ci-après quelques composites à matrices métalliques :

Tableau I.11 : Les composites à matrice métallique [Ait Atmane, 2011]

Symbole	Définition
CMAI	Composite à matrice aluminium
CMM	Composite à matrice métallique
CMMg	Composite à matrice magnésium
CMTi	Composite à matrice titane
PAN	Polyacrylonitrile
PCS	Polycarbosilane
PTCS	Polytitanocarbosilane

I.2.3. Charges et aditifs

Le nom général de charge suggère toute substance inerte, minérale ou végétale qui, ajoutée à un polymère de base, permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques du matériau transformé. Elle peut aussi, améliorer l'aspect de surface ou bien simplement de réduire le prix de revient de ce matériau. A l'inverse des matières thermoplastiques, les matières thermodurcissables ont toujours contenu des charges à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60% de la masse.

On distingue toute une variété des charges (minérales ou celluloses) et additifs (colorants, pigments, plastifiants, protecteurs, agents anti-UV, etc.). Ils sont ajoutés aux matériaux composites au cours de leur élaboration ou de leur transformation pour but de leur conférer des caractéristiques particulières utiles lors de la transformation ou des fonctionnalités utiles à leur usage final.

Pour un polymère donné, le choix d'une charge est déterminé en fonction des modifications recherchées pour le produit fini. Mais, d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matières plastiques devront d'abord satisfaire à un certain nombre d'exigences à savoir :

- Compatibilité avec la résine de base;

- Mouillabilité;
- Uniformité de qualité et de granulométrie;
- Faible action abrasive ;
- Coûts de revient bas.

Les charges peuvent se trouver sous différentes formes :

- Charges organiques ;
- Charges minérales ;
- Oxydes et hydrates métalliques ;
- Verre ;
- Carbone.

I.3. L'ASPECT DES MATERIAUX COMPOSITES

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement decouches, leur orientation, leur nature, leur séquence d'empilement, etc.

Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches ;
- Les stratifiés ;
- Les sandwiches.

I.3.1. Les monocouches

Les monocouches (Figure I.13) ou pli, représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées ou à fibres courtes.

Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère, ce qui donne un taux de déséquilibre élevé.

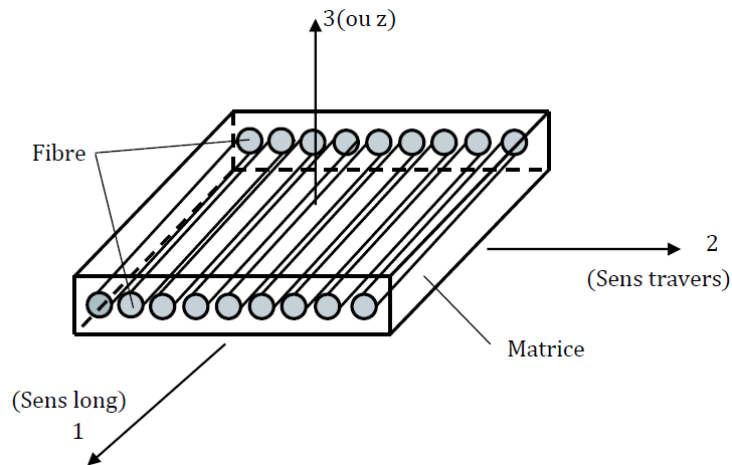


Figure I.13 : *Pli à Renforcement unidirectionnel* [Draiche.k, 2015]

I.3.2. Les Stratifiés

Les stratifiés sont constitués de couches successives, (figure I.14) (appelées parfois plis) de renforts (fils, strati-fils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines.

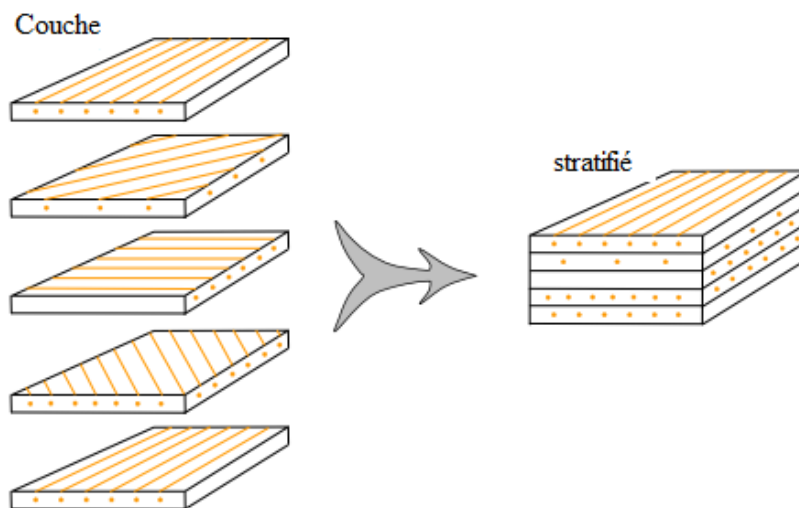


Figure I.14 : *Constituants d'un stratifié* [Berthelot, 2010]

Chaque couche doit être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

Le choix de la nature et de l'empilement des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposées :

CHAPITRE 01 : GÉNÉRALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

- Les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la direction des fibres ;
- Les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées ;
- Une stratification croisée sera sensible au délaminage inter laminaire ;
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

Il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.

I.3.3. Les Sandwichs

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une *âme* (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux « feuilles », appelées *peaux*, possédant de bonnes caractéristiques en traction. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence.

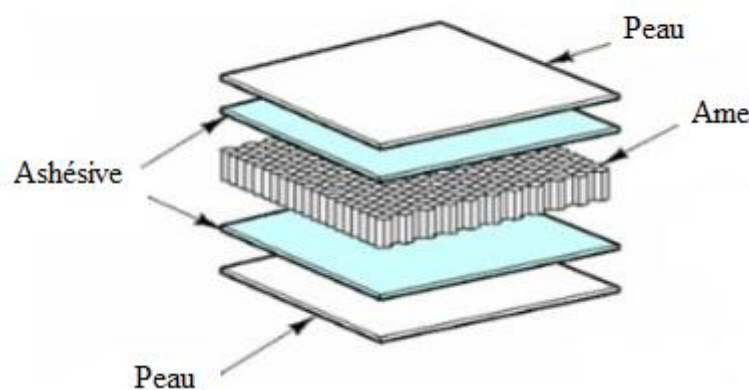


Figure I.15 : *Matériau composite sandwich*

L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité.

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.).

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

- Pour les *âmes pleines* (figure I.16) :
 - Le balsa ou bois cellulaire;
 - Diverses mousses cellulaires ;
 - Des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques.

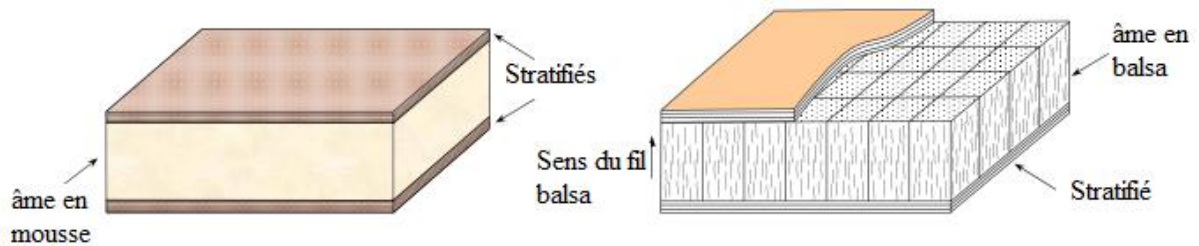


Figure I.16 : *Matériau sandwich à âmes pleines* [Berthelot, 2010]

- Pour les *âmes creuses* (figure I.17), essentiellement nid d'abeilles et profilés :
 - Des alliages métalliques légers ;
 - Du papier kraft (enduit ou non de résine) ;
 - Du papier polyamide, type papier Nomex.

Des âmes mixtes peuvent être utilisées.

Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou des feuilles d'alliages légers. Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

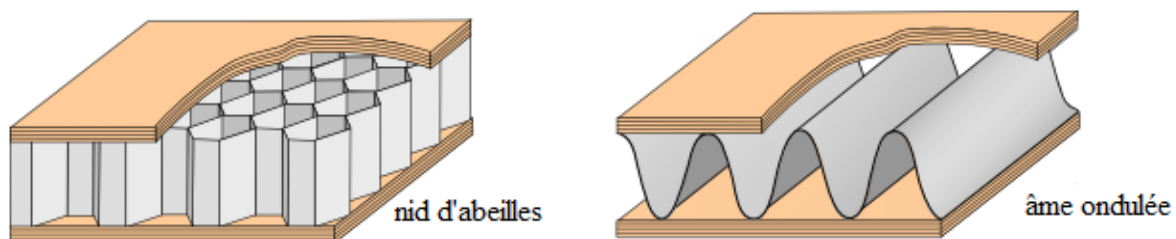


Figure I.17 : *Matériau sandwich à âmes creuses* [Berthelot, 2010]

I.3.4. La zone d'interface

Les matériaux composites à fibres sont généralement composés de deux matériaux dont les propriétés mécaniques sont différentes, et de deux interfaces: fibre/ensimage et résine/ensimage. L'ensimage est une opération de lubrification réalisée en sortie de filière sur les fils de base. Le filament est revêtu d'une pellicule d'ensimage constituée, en général, d'une dispersion aqueuse de divers composés chimiques présentant chacun une fonction bien définie. Cet ensimage est ensuite enlevé et remplacé par l'ensimage définitif à base de silane pour accrochage. Il se forme donc une interface qui constitue et assure la continuité. Elle peut être considérée comme un troisième constituant avec des propriétés mécaniques particulières, si son épaisseur n'est pas négligeable. La contrainte appliquée sur la matrice est transmise à la fibre par l'intermédiaire de l'interface. Ses propriétés ont donc une influence importante sur les propriétés du composite. L'interface joue un rôle primordial dans la résistance à la propagation des fissures.

I.4. LES LOIS DE COMPORTEMENT DANS UN MILIEU COMPOSITE

Les lois empiriques de comportement sont des lois dérivées des observations et de l'expérience, qui décrivent les déformations ou les contraintes en fonction des sollicitations (Vitesse de déformation, température...).

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu composite, sont liés par ces lois caractérisant le comportement mécanique du matériau. A chaque catégorie de matériau correspond un type de loi. Si on s'intéresse au cas d'un matériau élastique linéaire et donc à la loi de Hooke généralisée [Tounsi, 2008], qui peut s'écrire sous la forme:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (\text{I.1})$$

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet de lui associer une matrice carrée (6x6) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad \text{I.2)}$$

C'est une matrice de rigidité qui est symétrique et qui réduit le nombre de coefficient à 21.

I.4.1. Types de matériaux

Les matériaux sont classés en fonction du comportement pour une condition de chargement particulière. Ceux-ci inclus :

- Matériaux isotropes
- Matériaux anisotropes
- Matériaux monocliniques
- Matériaux orthotrope

I.4.1.1. Matériau isotrope

Un matériau est isotrope si ses propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions (axiale, latérale et intermédiaire). Ainsi, le matériau contient un nombre infini de plans de symétrie des propriétés du matériau passant par un point. C'est-à-dire que les propriétés des matériaux sont indépendantes de la direction.

La matrice de rigidité doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. L'application de cette propriété dans un matériau unidirectionnel conduit aux relations suivantes:

$$C_{11} = C_{22} \quad C_{12} = C_{23} \quad C_{66} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad \text{(I.3)}$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (I-4)$$

I.4.2. Matériau Anisotrope

Un matériau quelconque ne présentant pas de symétrie élastique, est dit anisotrope. La prise en compte de l'anisotropie est essentielle pour la conception et le dimensionnement d'une structure en matériaux composites car son comportement sera très différent de celui d'une structure isotrope de géométrie identique.

Les matériaux composites sont la plupart du temps anisotropes par opposition aux matériaux métalliques qui sont isotropes. Un matériau anisotrope est caractérisé par 21 constantes élastiques indépendantes, ce qui implique qu'il n'y'a aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé "**matériau triclinique**".

C'est la relation de comportement (I.2) qui lie les contraintes aux déformations.

L'anisotropie; est le contraire de l'isotropie, une qualité d'un milieu dont les propriétés varient suivant la direction. Grâce à l'anisotropie, on peut disposer les matériaux en fonction des états de chargement en chaque point, ce qui permet une réduction importante de la quantité de matière et donc du poids, critère vital en aéronautique et dans le domaine spatial.

I.4.3. Matériau monoclinique

Par définition, un matériau monoclinique possède un plan de symétrie matériel. L'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan [Berthelot, 2010].

Supposons le plan (e1, e2) plan de symétrie du matériau, la loi de Hooke se résume à l'expression suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I-5)$$

Le nombre de constantes indépendantes d'élasticité se réduit à 13.

I.4.4. Matériau orthotropes

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. (Berthelot 2005)

L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I-6)$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

I.4.4.1. Matériau transversalement isotrope ou unidirectionnel

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e_1 . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotrope, la matrice a cinq constantes et s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I-7})$$

Un matériau unidirectionnel peut être considéré comme une fibre noyée dans un cylindre de matrice (figure I.18), il se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant un axe de symétrie qui est l'axe de la révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). L'exploitation de cette propriété conduit à :

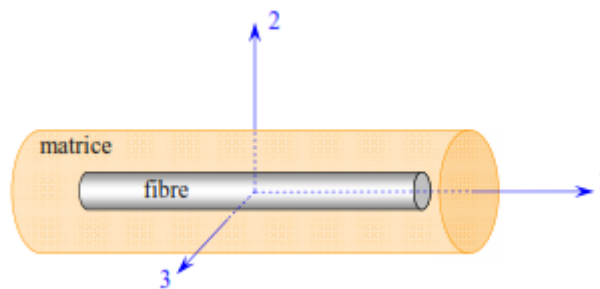


Figure I.18 : *Matériau composite unidirectionnel*

I.5. CONCLUSION

Les multiples avantages des matériaux composites se découlent de leurs caractéristiques qui se résument dans les caractéristiques suivantes : la facilité de la mise en forme, la légèreté qui permet un gain de poids de près de 50%, l'adaptabilité, la résistance à la corrosion ou à l'oxydation et enfin l'isolation électrique et thermique.

Cependant, les composites présentent également quelques inconvénients qui limitent leurs applications, nous citons la tenue limitée en température et au feu, le danger pour l'environnement dû au fait que les résines dégagent des vapeurs de solvant notamment en phase de fabrication, des problèmes de recyclage des matériaux en fin de vie, composés d'un mélange quasi indissociable de résine organique et de fibres de verre. Il faut noter par ailleurs que les résines courantes sont fabriquées à partir de dérivés du pétrole et consomment donc une matière non renouvelable.

Les caractéristiques mécaniques dépendent du positionnement des fibres et ne sont donc pas homogènes dans toutes les directions, les composites sont difficilement usinables avec précision. L'inhomogénéité et l'anisotropie des matériaux composites rendent leurs mécanismes d'endommagement nombreux et complexes. Au sein d'une structure composite, on peut voir apparaître un endommagement diffus constitué de micro décohésions et de microfissures, des ruptures de plis, des délaminages et des ruptures de stratifiés. Ces endommagements sont la conséquence de chargements de service (statique et fatigue) ou des chargements accidentels (impacts).

Vu les inconvénients qui nuisent au développement des matériaux composites, de gros efforts sont fournis dans la recherche, notamment en ce qui concerne les matériaux à gradient évalué FGMs. Ceux-ci sont considérés comme étant des matériaux composites avancés et machinés pour une variation spatiale sans heurt des propriétés matérielles. Pour leur fabrication, nous devons disposer d'une variation spatiale progressive relative à la fraction de volume et la microstructure du matériau constitué. Le choix des phases des matériaux est motivé par les conditions d'exécution fonctionnelles.

Chapitre II

Développement des matériaux FGM

II. CHAPITRE 02 : DEVELOPPEMENT DES MATÉRIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUÉS

II.1. INTRODUCTION

Le développement des matériaux composite a été l'un des centre d'intérêt majeures des chercheurs depuis le début du vingtième siècle, les poussant sans cesse à essayer d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'amélioration des performances des pièces structurelles peut conduire à chercher au sein d'un même matériau des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites fut l'aboutissement des recherches portant sur l'association des propriétés spécifiques à différents matériaux, (grande dureté, résistance à la corrosion, conductivité thermique optimale, etc.). Ces performances dépendent en grande partie des propriétés du matériau, mais aussi de l'optimisation de l'architecture des phases en présence. [Mishnaevsky,L. et Schmauder,S,2001]

Malgré les avantages que présentent ces matériaux (grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté...), ils présentent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité.

Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces.

Le changement brutal des propriétés du matériau à travers l'interface entre des matériaux distincts peut provoquer de fortes contraintes inter-laminaires et entraîner plusieurs pathologies comme le décollement, le délaminage, une déformation plastique ou une fissuration.

Cela peut arriver par exemple, dans une application à haute température où deux métaux avec un coefficient de dilatation différent sont utilisés.

Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches. [Navid Saeedi, 2012]

À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Materials «FGM») dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure.[Baron et al., 2008]

En effet, les FGMs sont une nouvelle génération de matériaux composites dont la microstructure et composition varient graduellement et continûment, conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés. [Nabil Ferguen et al, 2011]

Ce type de matériau, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison de ses avantages permettant de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. [Zhong et Yu, 2007]

Le potentiel des matériaux à gradient de propriétés est illustré pour les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et le génie civil. [Bouaziz, 2011].

Cette stratégie de développement semble très prometteuse en particulier pour optimiser la tenue en température et la ténacité.

II.2. CONCEPT DES MATERIAUX FGM

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials : FGM) a connu le jour au japon à la fin des années 1980 par un groupe de scientifiques au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA). L'idée était de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion dont les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C, alors qu'il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique. [Koizumi, 1992]

Supposant qu'un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont

la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal. Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes.

Pour y remédier les chercheurs ont procédé en variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, ainsi leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre. C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction.

Donc un FGM (functionally graded material) consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini et al. 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

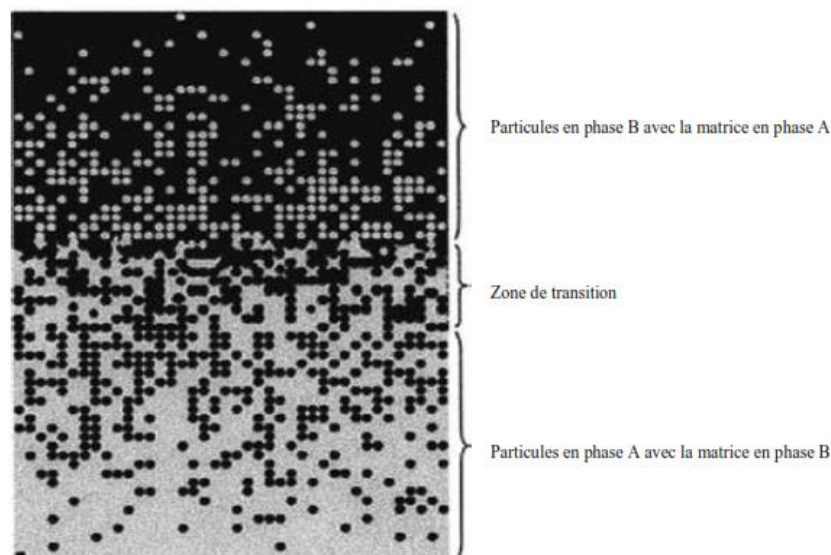


Figure II.1 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale [Yin, 2004]

La majorité des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau II.1.

Tableau II.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [SEKKAL, 2018]

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique, - Bonne résistance à l'oxydation, - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	- Élimination des problèmes de l'interface, - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique, - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure II.2. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente. [Boch et al. 1986]

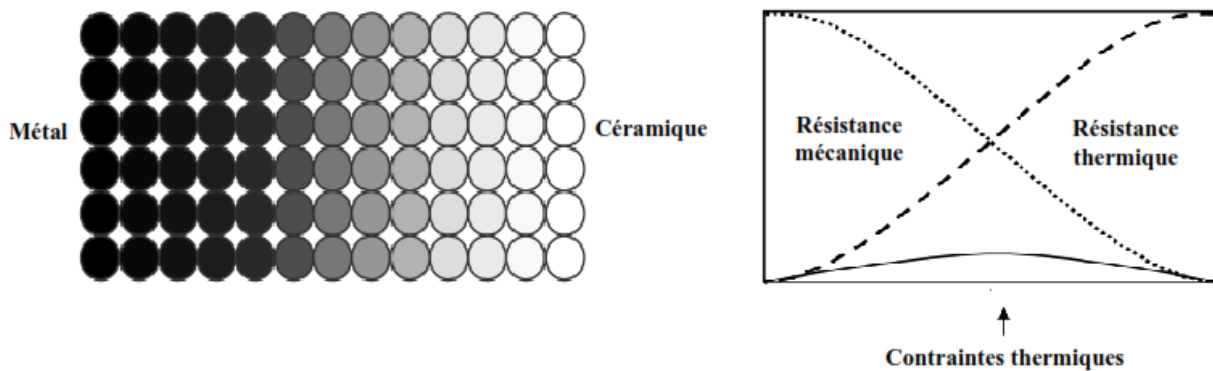


Figure II.2 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [BOUHADRA, 2015]

La figure II.3 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Elle montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en

changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

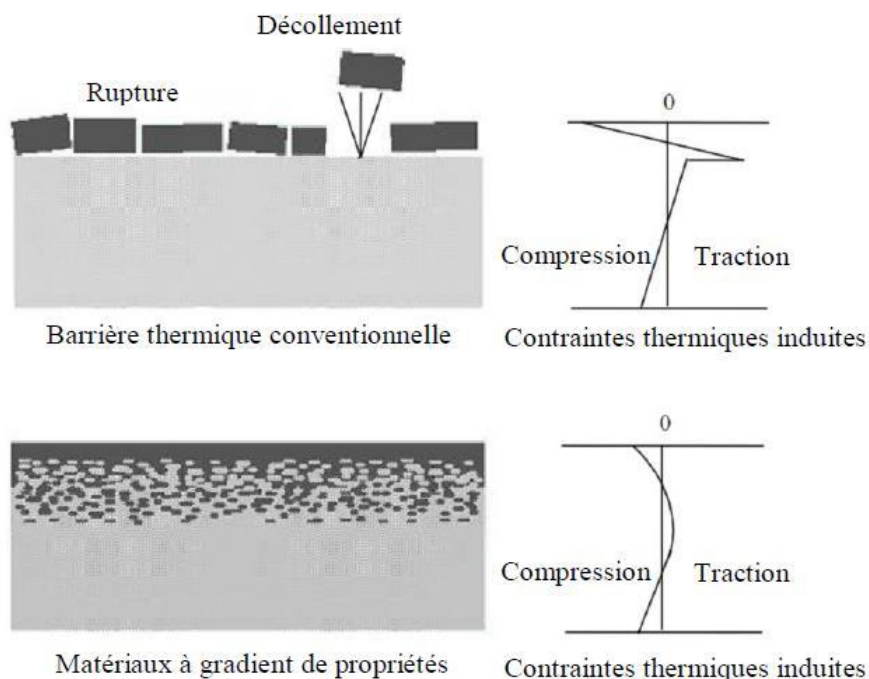


Figure II.3 : *Protection thermique*[BOUHADRA, 2015]

II.3. HISTOIRE DE DEVELOPPEMENT DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre-vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie.

En 1984 M.Niino et ses collègues à Sendai (japon) a proposé pour la première fois le concept FGM. L'idée était de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. [Hirai, 1999], [Chan, 2001], [Uemura, 2003]

Le véritable élan de ce matériau a commencé en 1987. À cette époque-là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1.215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie.

L'intérêt du projet était de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci était de développer l'architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques étaient à considérer pour la conception de tels matériaux :

- La résistance thermique et la résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- La ténacité du matériau côté basse température.
- La relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau. [Abdizadeh, 1997]

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure.

Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont: le système SiC/C par C.V.D, le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂Y₂O₃) par projection plasma à double torches. [Okamura, 1991]

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à

d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, constructions.
[Okamura, 1991]

Le concept des matériaux à gradient de propriétés a de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants en vue d'utilisations sur les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

II.4. METHODES D'ELABORATION DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

Il existe de nombreux procédés d'élaboration des matériaux à gradient de propriété FGM, les paragraphes suivants illustrent les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

II.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est devenu une technique largement utilisée pour la fabrication de feuilles métalliques ou céramiques.

Il s'agit d'une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur une surface plane en couches minces et régulières [Ait atmane, 2011]. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot de coulage. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure II.4), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur.

La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande.

Deux types de configuration existent pour les montages servant au coulage en bande :

- Le coulage continu : le support est mobile et le sabot est fixe. Ce type de configuration est généralement utilisé en fabrication industrielle ;
- Le coulage discontinu : le sabot se déplace sur le support fixe. Ce type de banc est approprié à l'étude des paramètres de coulage : vitesse de déplacement, hauteur du couteau, atmosphère de séchage.

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

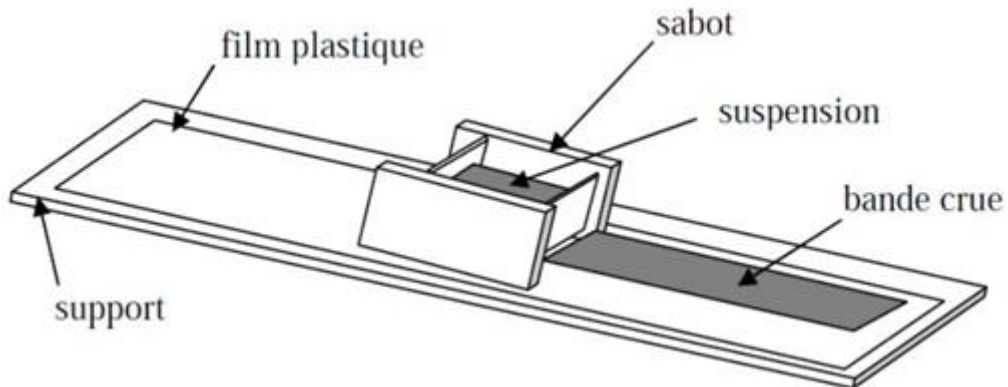


Figure II.4 : *Principe de la méthode coulage en bande* [Lostec, 1997]

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler, 1973] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermocompression. [Boch, 1986]

II.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting):

Le coulage en barbotine connu sous la dénomination anglaise (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Le coulage se décompose alors en deux étapes essentielles:

- Formation du tesson ou « prise » ;
- Consolidation du tesson ou « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique); [Moya et al. 1992]
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

II.4.3. Compaction sèche des Poudres

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage [Atarashiya K et al, 1993], [Leushake U et al, 1998]. Il s'agit de verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale. [Bishop et al, 1993]

II.4.4. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces

en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens et al, 1990].

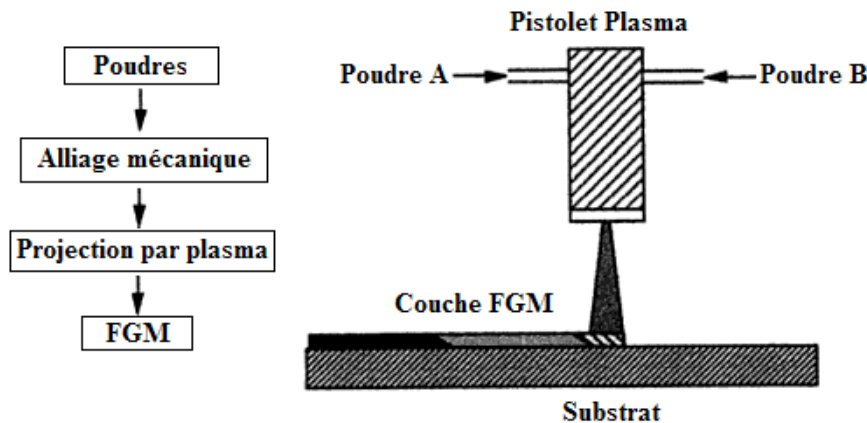


Figure II.5 : *Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane.*

II.4.5. Frittage

Le frittage est un processus qui permet d'agglomérer des poudres et d'obtenir des produits compacts, denses et durs, sans atteindre nécessairement la température de fusion de l'un de ses constituants.

Cette consolidation s'effectue par la formation de liaisons entre les grains. Au point de vue physico-chimique, trois types de frittage sont distingués [TALIDI Abdellah, 2006] :

- *La vitrification* : Il y'a apparition d'une phase vitreuse largement suffisante pour combler la porosité. Ce procédé est largement utilisé pour densifier les céramiques.
- *Le frittage en phase liquide* : La quantité du liquide qui apparait est juste suffisante pour réarranger les particules, il consiste à former des ponts entre les grains et les amener ainsi au contact les uns aux autres. Ce type de frittage est polyphasé il se produit lorsque la température de traitement est supérieure au point de fusion du constituant le plus fusible.
- *Le frittage en phase solide* : Tous les constituants restent solides. La consolidation est produite par soudure et le changement de forme des grains. Ce type de frittage peut être monophasé à un constituant ou polyphasé.

II.4.6. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs.

Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé. [Benien et al, 1990] et [Chigasaki et al, 1990]

II.4.7. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré.

Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure II.6). [Lucchini et al 1995], [Hillman et al, 1996], [Sbaizero et al, 1996]

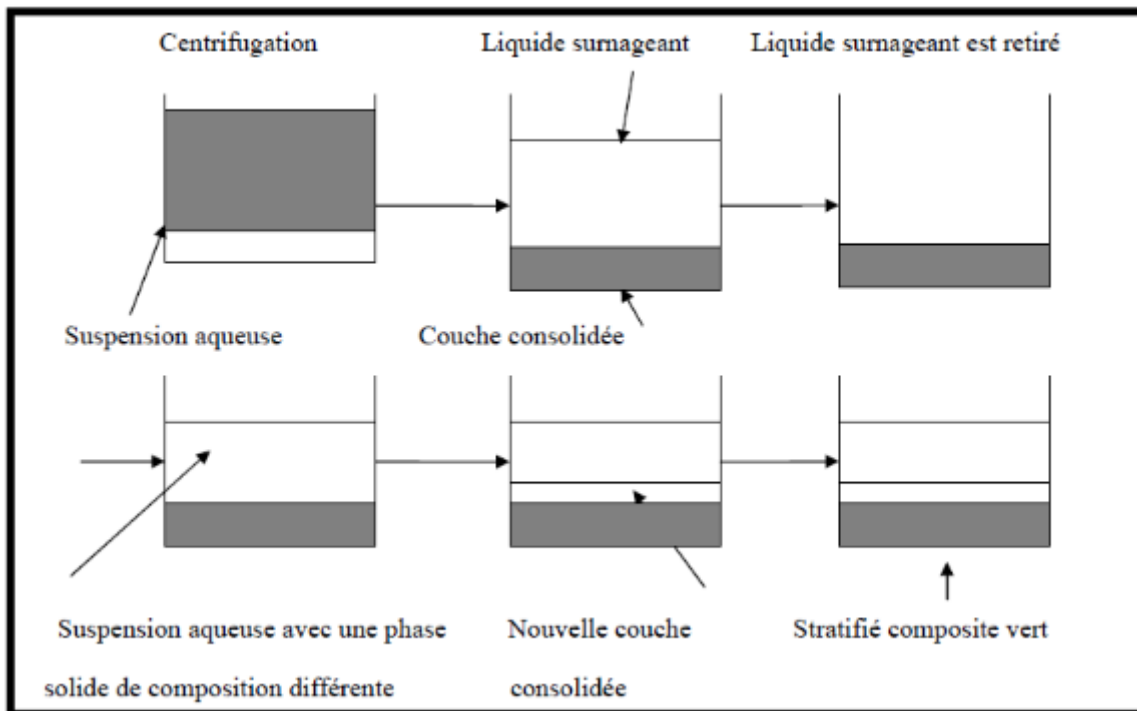


Figure II.6 : Schéma du procédé de dépôt par centrifugation [Lucchini et al, 1995]

II.5. DOMAINES D'APPLICATIONS DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

De nos jours les matériaux FGM font partie des matériaux révolutionnaires qui ont été conçus pour des applications à plusieurs conditions d'exploitation.

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de mécanique et d'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires, telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

Le potentiel d'exploitation commerciale touche un vaste éventail d'applications industrielles.

Nous citons quelques-unes d'entre elles dans ce qui suit :

II.5.1. Aéronautique et aérospatiale

Le concept de FGM a été initialement conçu pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial. Le développement des matériaux FGM a permis l'obtention d'un matériau nouveau avec des caractéristiques qui peuvent répondre aux exigences multiples de ce domaine. Cette technologie est devenue indispensable dans la construction de station spatiale, la fabrication de roquette... Les FGMs sont également applicables à un mur externe d'une navette spatiale et des parties de moteur de fusée.

II.5.2. Génie civil

La gradation fonctionnelle des éléments en béton permet d'aligner la composition interne des composants structurels avec des exigences de performance structurelles et thermiques spécifiques. Cet alignement est rendu possible en modifiant continuellement les caractéristiques du matériau, y compris sa porosité, sa résistance ou sa rigidité.

Le changement graduel des composants en béton permet l'altération continue des propriétés du béton dans toutes les dimensions spatiales. Minimiser la porosité améliore les

caractéristiques structurelles du composant, tandis que la maximisation de la porosité optimise ses propriétés d'isolation thermique et son propre poids (Figure II.7).

Les matériaux « FGM » présentent aussi un grand intérêt pour le renforcement et la réhabilitation d'éléments structuraux en béton armé, tels que les poutres, les dalles, les colonnes et les murs. Malgré leur prix élevé, ils présentent un avantage économique car ils peuvent être mis en œuvre directement sur les structures par moulage au contact, ce procédé est appelé polymérisation in-situ ou stratification directe. Ceci permet de réduire considérablement les coûts liés à la manipulation des matériaux ainsi que les problèmes liés aux interruptions des activités des ouvrages réparés.

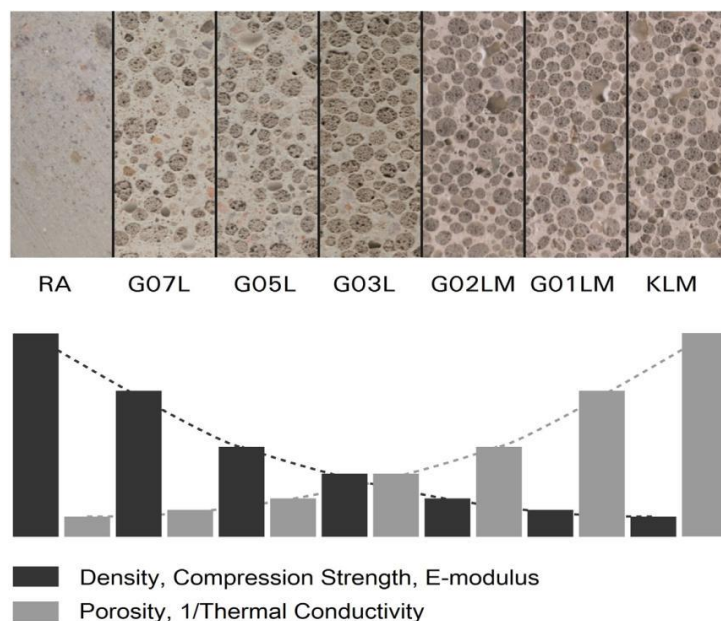


Figure II.7 : *Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité*[Hermann, 2017]

2.5.3. Réacteurs nucléaire

Les parois internes des réacteurs nucléaires sont constituées de FGM (Céramique / Métal) dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, tel que le métal.

II.5.4. Produits militaires

Pour la fabrication des missiles, l'une des principales caractéristiques recherchées dans les produits est l'association performance-légèreté. D'où l'idée d'utiliser des matériaux FGM afin de pouvoir répondre à ces exigences. On cite aussi l'utilisation des FGM sur les ailettes de guidage des missiles qui permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale. A cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de l'air sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent fondre dans certaines conditions et le missile poursuit sa trajectoire sans contrôle, ce qui entraîne une perte de précision du tir. L'utilisation de matériaux FGM sur les ailettes, en vertu de leur faible conductivité thermique fait qu'en fin de mission, les ailettes conservent une certaine intégrité de forme, ce qui permet de maintenir la trajectoire du missile sans perte de précision.

2.5.5. Electronique et optoélectronique

Les matériaux fonctionnellement gradués « FGM » sont utilisés dans la fabrication des fibres optiques afin d'assurer une transmission de signaux optique à très haute vitesse.

Ils peuvent aussi être l'un des composants des cartes de circuit imprimés, et des téléphones cellulaires.

2.5.6. Lames de turbine

Les FGM sont applicables dans la fabrication des lames de la turbine. Les revêtements typiques pour les applications à haute température impliquent un revêtement résistant à l'oxydation et qui forme une barrière thermique (TBC).

2.5.7. Cylindre de moteur de voiture

Dans l'industrie mécanique, les cylindres des moteurs de voitures peuvent être fabriqués à base de matériau FGM. La phase interne du cylindre est en céramique et la phase externe est en métal comme le montre la figure II.8.



Figure II.8 : Cylindre de moteur de la voiture

2.5.8. Médecine

Les tissus vivants tels que les os et les dents sont caractérisés en tant que matériel gradué fonctionnellement de la nature, pour substituer à ces tissus, un matériau compatible est nécessaire pour servir le but du bio-tissu original. La solution idéale pour cette application est un matériau fonctionnellement gradué. Les FGM ont un large éventail d'utilisation dans les applications dentaires et orthopédiques pour le remplacement des dents et des os.

2.5.9. Autres applications

Les matériaux FGM peuvent également trouver une application dans les techniques de communication et d'information. Les outils abrasifs pour la coupe de métal et de pierre sont d'autres exemples importants où la gradation de la couche de surface a amélioré les performances.

La figure I.8 illustre les différents domaines d'application des matériaux FGM.

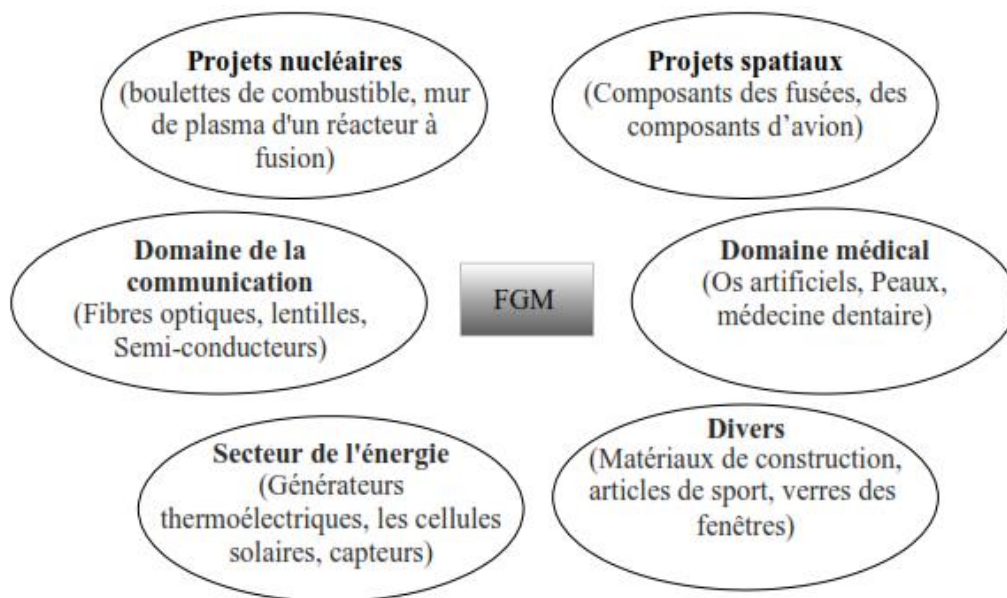


Figure II.9 : Les champs potentiels de l'application des FGM

II.6. LOIS REGISSANTES LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES DES PLAQUES FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes Avec des macro-propriétés graduées dans l'espace.

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

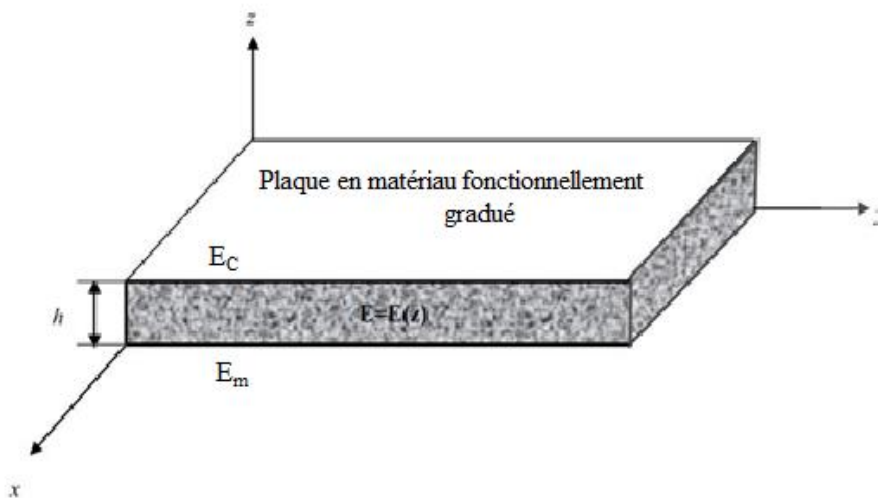


Figure II.10 : Géométrie d'une plaque en FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur z .

Les propriétés matérielles, module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents mais peuvent être déterminés selon les demandes d'exécution

Toutefois le module de Young et le coefficient de poisson des plaques varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit: $E= E(z)$, $\nu = \nu(z)$.

Jin et Batra indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie, soit en fonction de la loi de puissance (P-FGM), de la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

II.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

Les propriétés matérielles des plaques P-FGM sont liées directement à leur fraction volumique (obéissent à une fonction en loi de puissance).

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^P \tag{II.1}$$

Où P est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao, 1995] :

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1) V(z) \tag{II.2}$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface du métal (surface inférieure $z = -h/2$) et de la surface de céramique (surface supérieure $z = +h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure II.11, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

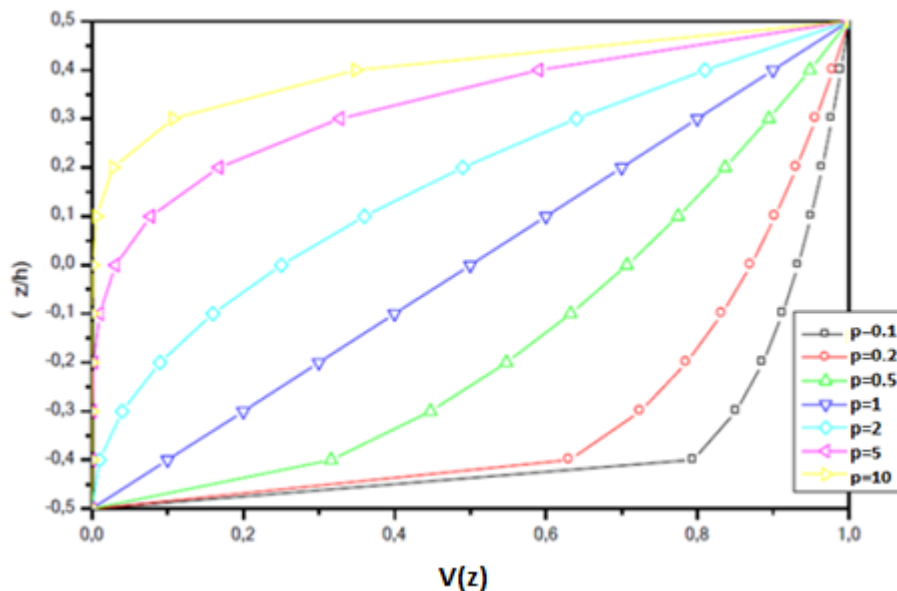


Figure II.11 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FG

II.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

En (2003) Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes à travers toutes les interfaces, car dans le cas où on ajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [Bao, 1995].

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.3.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure II.12 illustre que la variation de la fraction volumique $V(z)$ dans les équations (II.4.a) et (II.4.b) représente les courbes sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

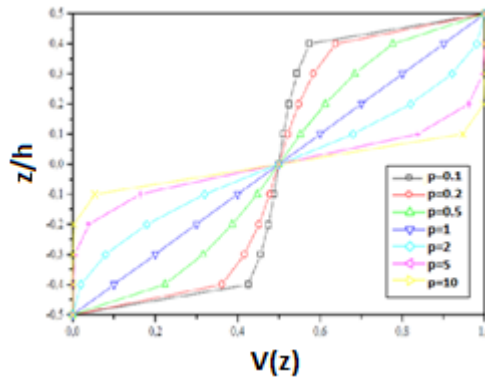


Figure II.12 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

II.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme : [Delale, 1983]

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \tag{II.5}$$

Avec
$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \tag{II.6}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.13.

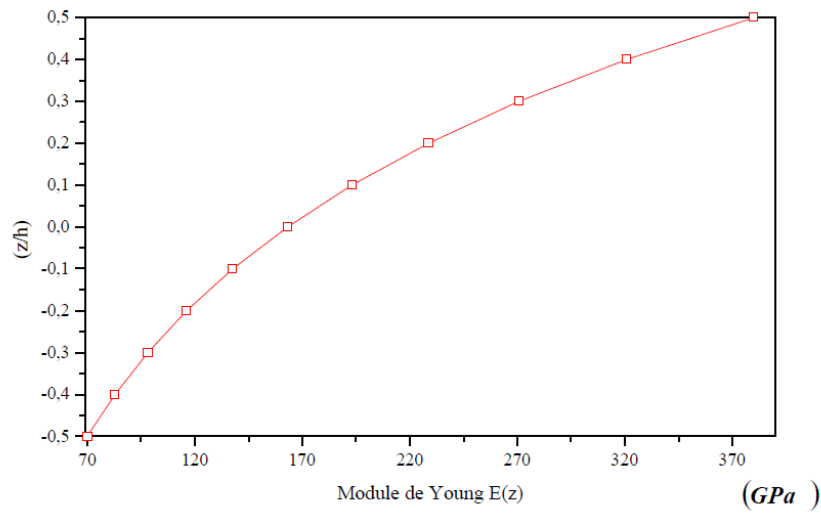


Figure II.13 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM

II.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », puis nous avons mis en évidence l'évolution des matériaux FGM à travers le temps ainsi que leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés, a permis de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

A la fin nous avons présenté les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la plaque.

Le chapitre suivant portera sur la conception des plaques FGM en définissant les différentes théories des plaques et en exposant les différentes théories rencontrées dans la littérature pour l'étude de la déformation de cisaillement des plaques.

Chapitre III

Revue bibliographique sur théories des plaques

CHAPITRE 03 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES THÉORIES DES PLAQUES

3.1. INTRODUCTION

Les plaques sont des éléments structuraux largement utilisés dans le domaine du génie civil et travaux publics (radier, voile, dalle pleine, corps de chaussée rigide etc.).

Une plaque est considérée comme un solide bidimensionnel, défini par une surface plane (plan x, y) et par une petite épaisseur notée (h) par rapport aux autres dimensions (longueur, largeur, voir Fig. II.1) ; le plan inférieur est dit le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou bien non homogène. Il existe trois catégories de plaques :

1) *Isotropes*: Elles sont composées uniquement d'un seul matériau isotrope, et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art, ...).

2) *Orthotropes*: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques (E_1, E_2, V_1, V_2), on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art. [Batoz, 1990]

3) *Anisotropes*: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Elles sont généralement constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

Plusieurs travaux de recherches ont été publiés pour l'étude des différents comportements statiques et dynamiques des plaques tel que (Praveen et Reddy, 1998; Yang et al., 2004; Ganapathi et al., 2006; Kim et al., 2008; HosseiniHashemi et al., 2010; Akbarzadeh et al., 2011; Hu et Zhang, 2011; Mantari et al., 2012; Tounsi et al., 2013; Pradhan, 2014;

Sadoune et al., 2014; Bourada et al., 2016; Tounsi et al., 2016; Bellifa et al., 2016 ; Ait sidhoum et al. 2017 et 2018 ; Bourada et al., 2018, Bousoula et al. 2019 ; Zarga et al 2019 et Addou et al. 2019).

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des plaques dans le domaine élastique, il est nécessaire de bien choisir la théorie adéquate, décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Nous présentons dans ce chapitre une revue sur les modèles analytiques des plaques existant dans la littérature.

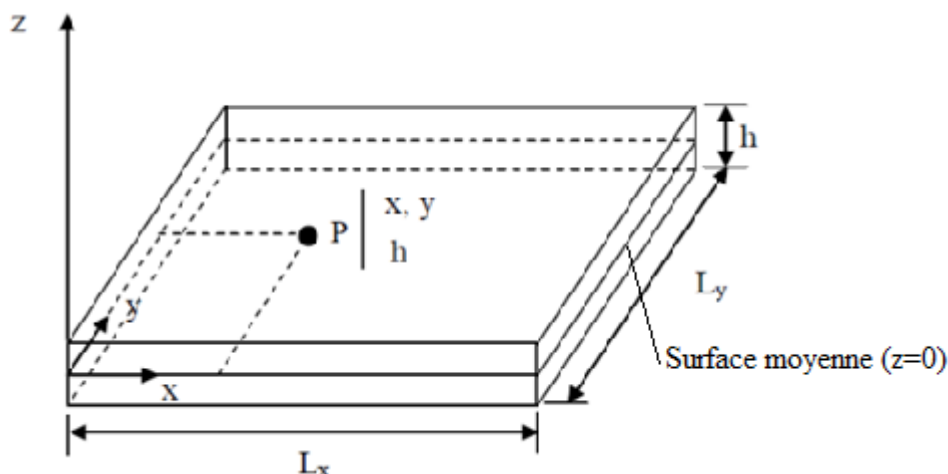


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque

3.2. LES MODELES ANALYTIQUES DES MONOCOUCHEs EQUIVALENTS

Parmi les modèles ESL existants, on trouve celui de Kirchoff (1850) qui est le premier modèle ayant été développé, aussi connu comme, la théorie classique des plaques (CPT), qui néglige les effets de cisaillement transverse et de la déformation normale ($\epsilon_z=0$). Ainsi, il est seulement applicable pour les plaques minces. Le deuxième modèle ESL est celui de Mindlin (1951) nommé aussi la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) où l'effet de déformation de cisaillement est pris en compte par le biais d'une variation linéaire des déplacements plans à travers l'épaisseur de la plaque ce qui nécessite l'introduction des facteurs de correction de cisaillement. Ces facteurs de correction de cisaillement sont difficiles à déterminer car ils dépendent non seulement des paramètres géométriques, mais

également de la charge et des conditions aux limites. Pour éviter l'utilisation de ces facteurs, les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDTs) ont été développées.

Les différents modèles ESL sont présentés en détails dans ce qui suit.

3.2.1. Le modèle de Love-Kirchhoff (CPT)

Ce modèle est basé sur l'hypothèse adoptée par Kirchhoff 1950 des contraintes planes. Plusieurs chercheurs ont examiné les comportements des plaques en se basant sur la CPT tel que Loy et al. (1999), Ghannadpour et Alinia (2009), Du et al. (2014), Chakraverty et Pradhan (2014), Ebrahimi et Najafizadeh (2014), Ruan et Wang (2014).

3.2.1.1. Hypothèses de base (CPT)

- La section plane et perpendiculaire à l'axe neutre avant déformation *reste plane et perpendiculaire* à l'axe neutre après déformation (Figure III.2)
- Les normales ne changent pas de longueur
- Les effets de déformation en cisaillement transverse sont négligés

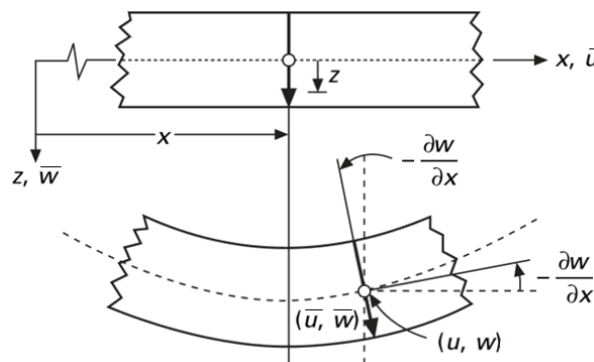


Figure III.2 : Illustration des déformations selon le modèle de Love Kirchhoff

3.2.1.2. Cinématique et déformation (CPT)

En se basant sur les hypothèses précédentes (Kirchhoff, 1950), le champ de déplacement de la théorie classique des plaques est exprimé par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (\text{III.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (\text{III.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{III.1c})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

Ce champ se décompose en:

- Déplacement de la membrane $u_0(x, y), v_0(x, y)$ (III.2a)

- Déplacement dû à la flexion $z \frac{\partial w_0}{\partial x}, z \frac{\partial w_0}{\partial y}$, (III.2b)

- Déplacement transversal $w_0(x, y)$ (III.2c)

Sous ces considérations, les sections droites de la plaque ne subissent aucun glissement, en effet:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Qui en résulte une contrainte nulle de cisaillement :

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de la théorie CPT est obtenu comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5a})$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5b})$$

Plusieurs chercheurs ont utilisé la théorie des plaques classique (CPT) pour étudier la stabilité élastique des plaques FG. Javaheri et Eslami (2002) ont utilisé la CPT pour étudier le comportement en flambement des plaques FG sous quatre types de charges thermiques et de charges de compression. Le flambement des plaques fonctionnellement graduées soumises à la compression non uniforme a été examiné par Mahdavian (2009) en utilisant la CPT et les solutions de Fourier. La vibration non linéaire des FG dans des environnements thermiques a été étudiée par Woo et al. (2006). Abrate (2008) a calculé les fréquences naturelles d'une plaque FG simplement appuyée en utilisant le modèle (CPT). En se basant sur la théorie classique des plaques et les hypothèses de Von-Karman, Hu et Zhang (2011) ont examiné la vibration et la stabilité des plaques FG sous excitation en plan. Des solutions analytiques pour la charge critique du flambement des plaques FG ont été dérivées par Mohammadi et al. (2010). Aussi le flambement thermique des plaques FG encastées et reposant sur une fondation élastique a été analysé par Kiani et al. (2011).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation normale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959). [MEKSI, P.32]

(Reissner, 1945; Mindlin, 1951) ont amélioré le modèle précédent en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

3.2.2. Le modèle de Reissner et Mindlin (FSDT)

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko (1921), et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de

cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur de la plaque (Reissner 1945 et Mindlin 1951), ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement.

La théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) peut se trouver dans les travaux de (Kant and Swaminathan, 2001; Chen, 2005; Hosseini-Hashemi et al., 2010, Valizadeh et al., 2013; Memar Ardestani et al., 2014; Mantari and Granados, 2015; Meksi et al., 2015; Hadji et al., 2016 et Bellifa et al., 2016)

3.2.2.1. Hypothèses de base (FSDT)

- La section plane et perpendiculaire à l'axe neutre avant déformation reste *plane et perd sa perpendicularité* à l'axe neutre après déformation (Figure III.3).
- Les normales ne changent pas de longueur
- Les effets de déformation en cisaillement sont pris en compte

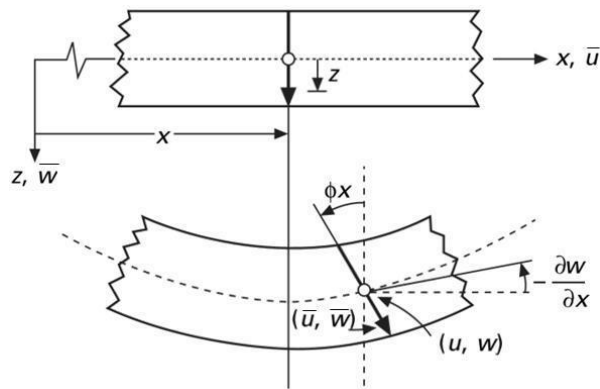


Figure III.3 : Illustration des déformations selon la théorie FSDT

3.2.2.2. Cinématique et déformation (FSDT)

A partir des hypothèses de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) on peut dériver le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y), \tag{III.6a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y), \tag{III.6b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \tag{III.6c}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x, respectivement.

Le champ de déplacement se décompose en:

- Déplacement de la membrane $u_0(x, y), v_0(x, y)$ (III.7a)

- Déplacement dû à la flexion $z \frac{\partial w_0}{\partial x}, z \frac{\partial w_0}{\partial y}$, (III.7b)

- Déplacement dû au cisaillement $Z\theta_x(x, y), Z\theta_y(x, y)$ (III.7c)

Pour calculer la contrainte de cisaillement :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \theta_x \quad (III.8)$$

Et

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0, \tau_{xz} = G \cdot \theta_x \quad (III.9)$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement (FSDT) de l'Equation (III.6) est obtenu comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^{sb} \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \text{ avec } \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (III.10)$$

Dans ce cas les contraintes et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur de la plaque (voir figure III.4), mais cela ne représente pas la réalité. Ce qui nécessite l'introduction des facteurs de correction de cisaillement ks afin de régler ce problème

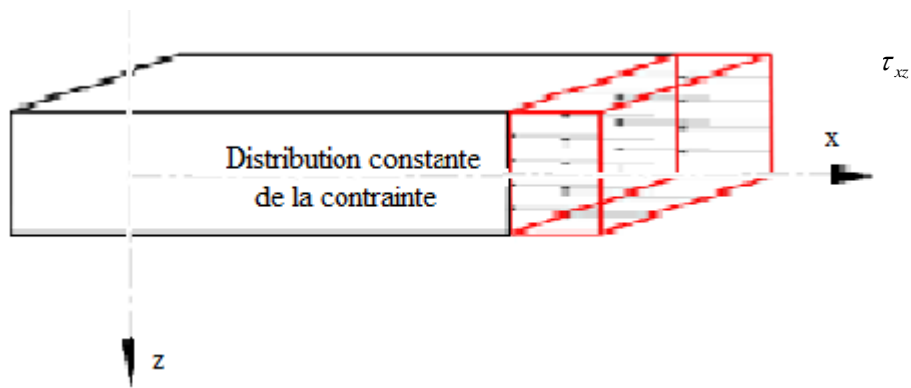


Figure III.4 : La distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT

Il existe trois facteurs de correction :

$K_s=1$: sans correction

$K_s=2/3$: pour une géométrie circulaire.

$K_s=5/6$: pour une géométrie rectangulaire.

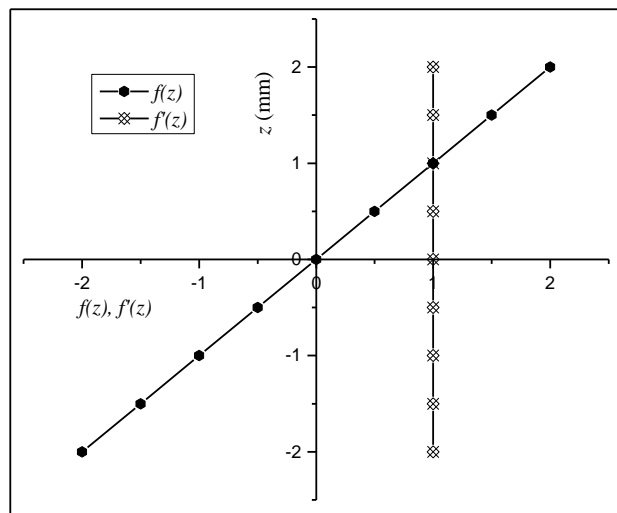


Figure III.5 : Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant l'épaisseur

Plusieurs chercheurs ont proposé aussi des nouvelles théories basées sur la FSDT avec seulement quatre variables inconnues pour l'étude du comportement statique et dynamique des structures fonctionnellement graduées à savoir les modèles de Sadoune et al. (2014), Meksi et al. (2015) et Bellifa et al. (2016).

Des solutions analytiques pour la température critique du flambement ont été dérivées en se basant sur la procédure de Navier et la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre par Lanhe (2004) et Bouazza et al. (2010). La charge de flambement des plaques fonctionnellement graduées sous chargement plan, a été aussi examiné par Mohammadi et al. (2010) en utilisant l'approche de la solution type Levy et la théorie FSDT. Aussi la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a été employée par Hosseini-Hashemi et al. (2010) pour l'analyse dynamique de plaque type Levy reposant sur une fondation élastique. Yaghoobi et Torabi (2013) ont suivi une approche similaire pour dériver la solution type Levy pour la charge de flambement des plaques FG, soumises à un chargement thermique. Prakash et al. (2009) ont reformulé la FSDT basée sur la surface neutre pour étudier l'effet de la position de la surface neutre, sur la stabilité non linéaire des plaques obliques FG sous chargement plan. Les poutres FG simplement appuyées ont été examinées aussi par Hadji et al. (2016), en utilisant une nouvelle théorie de déformation du premier ordre.

Pour éviter l'introduction des facteurs de correction à chaque fois pour corriger le cisaillement aux surfaces libres de la structure, partant du principe qu'ils sont difficiles à déterminer à cause de leur dépendance, à la fois : de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites ; plusieurs auteurs proposent des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

3.2.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. La théorie d'ordre élevé (HSDT) peut se trouver dans les travaux de (Naghdi, 1957; Reissner, 1975; Reddy, 1984; Kantet Swaminathan, 2002 ; Akavci 2010 ; Mantari et Guedes Soares 2012 ; Mantari et

Guedes Soares 2013 ; Mahi et al. 2014, Merazi et al., 2015; Bakora and Tounsi, 2015; Tebboune et al., 2015; Larbi Chaht et al., 2015; Nguyen et al., 2015; Bourada et al., 2015; Mahi et al., 2015; Chikh et al., 2016; Eltaher et al., 2016; Bourada et al., 2016 et 2018; Bounouara et al., 2016; Mouaici et al., 2016; Beldjelili et al., 2016 et Bennoun et al., 2016).

3.2.3.1. Hypothèses de base (HSDT)

- La section plane et perpendiculaire à l'axe neutre avant déformation *perd sa perpendicularité et sa planéité* après déformation (Figure III.6)
- Les normales ne changent pas de longueur

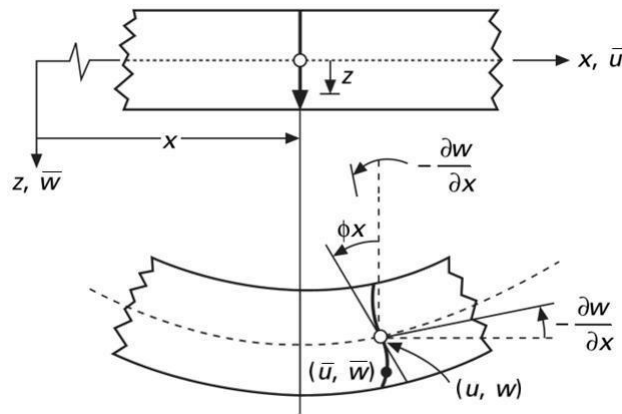


Figure III.6 : Illustration des déformations selon la théorie HSDT

3.2.3.2. Cinématique et déformation (HSDT)

A partir des hypothèses de base ci-dessus. Le champ de déplacement de la théorie (HSDT) est donné comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \tag{III.11a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \tag{III.11b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{III.11c}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x , respectivement $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$

On trouve les mêmes parties : le déplacement de la membrane, le déplacement dû à la flexion et le déplacement dû au cisaillement. Mais cette fois, le déplacement axial dû au cisaillement n'est plus linéaire. Donc, on remplace le « z » pour la théorie précédente par une fonction $f(z)$ qu'on appelle « fonction de gauchissement » ou « fonction de forme ». En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

La fonction $f(z)$ représente l'allure de la déformation de la section transversale, c'est ce qu'on appelle « le gauchissement », donc elle doit être impaire pour prendre la forme de « S » aplatie qui est remarquée lors de la déformation de la plaque. La fonction de gauchissement doit aussi satisfaire les conditions aux limites de la nullité des contraintes tangentielles aux surfaces supérieur et inférieur de la plaque. Donc :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + f'(z)\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = f'(z)\theta_x \quad (\text{III.12})$$

Et

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot f'(z)\theta_x \Rightarrow f'(z) = (\pm h/2) = 0 \quad (\text{III.13})$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de la théorie HSDT (l'Equation III.11) est obtenu comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.14a})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.14b})$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

Dans ce cas les contraintes de cisaillement sont paraboliques à travers l'épaisseur de la plaque voir fig.III.7.

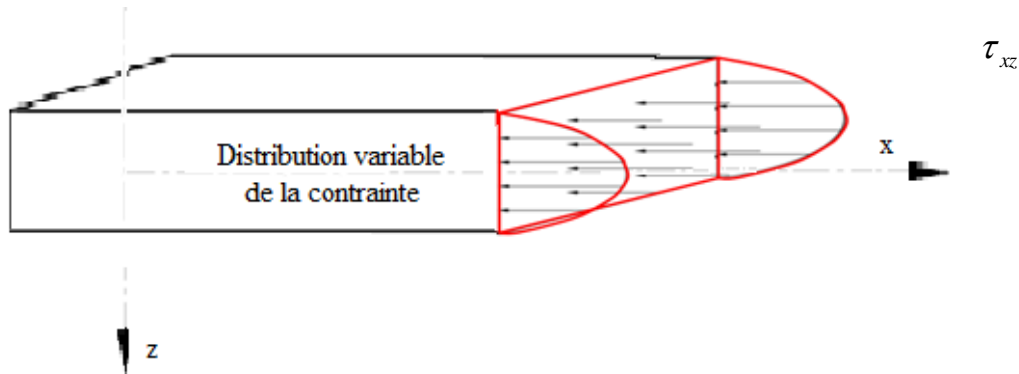


Figure III.7 : La *distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT*

Nous avons cité dans cette partie quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distinguées dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de gauchissement $f(z)$ qui assure la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces libres de la plaque.

a. Les Fonctions polynomiales

[Ambartsumain S.A. 1970]

$$f(z) = \frac{h^2}{8} z - \frac{z^3}{6} \quad (\text{III.15})$$

[Kaczkowski Z. 1968], [Panc V. (1975) and [Reissner E. 1975] (KPR)

$$f(z) = \frac{5z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2} \quad (\text{III.16})$$

[Levinson M. 1980], [Murthy M.V.1981] and [Reddy J.N.1984] (LMR)

$$f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^2} \quad (\text{III.17})$$

[Nguyen-Xuan H. 2013]

$$f(z) = \frac{7z}{8} - \frac{2z^3}{h^2} + \frac{2z^5}{h^4} \quad (\text{III.18})$$

b. Les fonctions trigonométriques

[Levy M. 1877], [Stein M. 1986] et [Touratier M. 1991] (LST)

$$f(z) = \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.19})$$

[Arya H et al. 2002]

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.20})$$

[Thai CH et al.2014]

$$f(z) = -z + h \tan^{-1}\left(\frac{2z}{h}\right) \quad (\text{III.21})$$

[Mantari1 et al 2012]

$$f(z) = \tan(mz) - mz \sec^2 \frac{mh}{2}; m = \frac{1}{5h} \quad (\text{III.22})$$

[Mantari2 et al 2012]

$$f(z) = \tan(mz) - mz \sec^2 \frac{mh}{2}; m = \frac{\pi}{2h} \quad (\text{III.23})$$

[Mantari2 et al 2012]

$$f(z) = \cot^{-1}\left(\frac{rh}{z}\right) - z \frac{4r}{h(4r^2 + 1)}; r = 0.46 \quad (\text{III.24})$$

[Grover2 et al 2013]

$$f(z) = z \sec\left(\frac{rz}{h}\right) - z \sec\left(\frac{r}{2}\right) \left[1 + \frac{r}{2} \tan \frac{r}{2}\right]; r = 0.1 \quad (\text{III.25})$$

[Nguyen V.H et al 2014]

$$f(z) = h \tan^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}; r = 1 \quad (\text{III.26})$$

c. Les fonctions hyperboliques

[Soldatos K.P. 1992]

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{III.27})$$

[EL Meiche N. et al 2011]

$$f(z) = \frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} - z \quad (\text{III.28})$$

[Akavci1 S.S. et al 2008]

$$f(z) = \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{III.29})$$

[Akavci2 S.S. et al 2008]

$$f(z) = z \operatorname{sech}\left(\frac{\pi z^2}{h^2}\right) - z \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (\text{III.30})$$

[Mahi A. et al 2015]

$$f(z) = \frac{h}{2} \tanh\left(\frac{2z}{h}\right) - \frac{4}{3 \cosh^2(1)} \frac{z^3}{h^2} \quad (\text{III.31})$$

[Grover3 N. et al 2013]

$$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - z \frac{2r}{h\sqrt{r^2 + 4}}; r = 3 \quad (\text{III.32})$$

d. Les fonctions exponentielles

[Karama M. et al 2003]

$$f(z) = z \times e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.33})$$

[Aydogdu M. 2009]

$$f(z) = z \times 3^{\frac{-2}{\log 3} \left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.34})$$

[Mantari3 J. et al 2011]

$$f(z) = z \times 2.85^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} + 0.028z \quad (\text{III.35})$$

e. Les fonctions combinées

[Mantari4 J. et al 2012]

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \times e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{\pi z}{2h} \quad (\text{III.36})$$

[Mantari5 J. et al 2012]

$$f(z) = \sinh\left(\frac{z}{h}\right) \times e^{m \cosh\left(\frac{z}{h}\right)} - \frac{z}{h} \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) + m \sinh^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] \times e^{m \cosh\left(\frac{1}{2}\right)}; m = -6 \quad (\text{III.37})$$

[Mantari6 J. et al 2012]

$$f(z) = \sinh\left(\frac{z}{h}\right) \times e^{m \cosh\left(\frac{z}{h}\right)} - \frac{z}{h} \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) + m \sinh^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] \times e^{m \cosh\left(\frac{1}{2}\right)}; m = -7 \quad (\text{III.38})$$

[Mantari7 J. et al 2014]

$$f(z) = z \times e^{m \cos\left(\frac{nz}{h}\right)} - z \times \left[e^{m \cos\left(\frac{n}{2}\right)} - \frac{1}{2} dmn \sin\left(\frac{n}{2}\right) \times e^{m \cos\left(\frac{n}{2}\right)} \right]; m = 1, n = 2.9 \quad (\text{III.39})$$

[Thai2 CH. 2014]

$$f(z) = \tan^{-1} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.40})$$

[Thai3 CH. 2014]

$$f(z) = \sinh^{-1} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{III.41})$$

Les figures ci-dessous représentent la variation de la fonction de gauchissement à travers l'épaisseur z (variations des déplacements), et la variation de la dérivée de la fonction $f(z)$ (distributions des contraintes de cisaillement transverse)

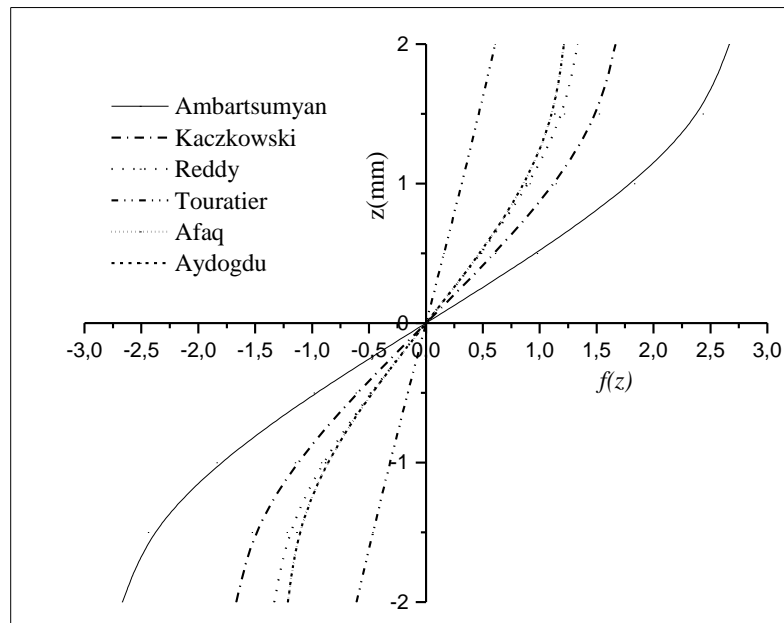


Figure III.8 : *Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur*

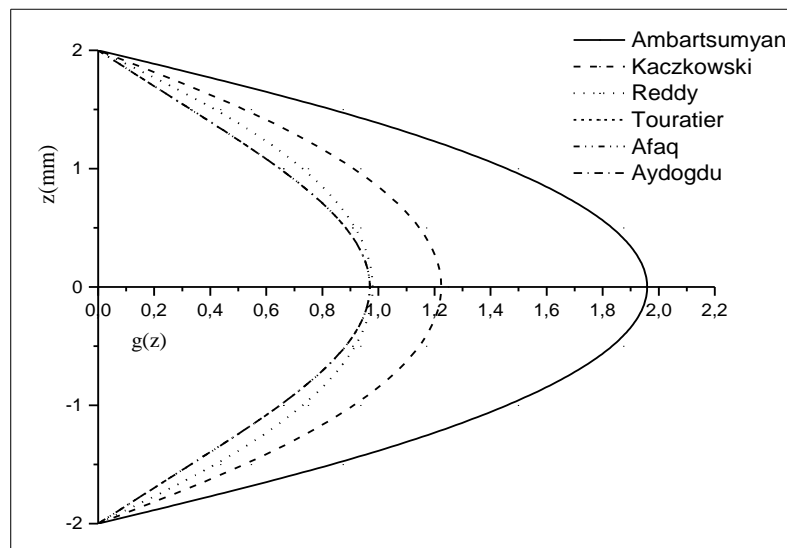


Figure III.9 : *Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur*

La théorie de déformation de cisaillement a été largement utilisée dans plusieurs travaux. Reddy (1984) a proposé une théorie HSĐT (d'ordre trois) avec des distributions cubiques des déplacements axiaux. L'analyse de la stabilité et de la vibration des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées a été étudiée par Lo et al. (1977) en

utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé « HSDT » avec une fonction polynomiale. L'étude de la stabilité et le comportement dynamique des plaques FG sous une combinaison de contrainte d'extension de traction et d'une contrainte de flexion pure a été examiné par Chen et al. (2009). Xiang et al. (2011) ont proposé une théorie de déformation de cisaillement à n-ordre pour la vibration libre des plaques FG et composite sandwich. Guedes Soares (2012) a développé Une théorie HSDT pour les plaques isotropes, composites et sandwiches et les plaques FG. Mantari et al. (2012) ont aussi utilisé une théorie HSDT pour l'analyse statique des plaques isotrope, composites et sandwichs, Mantari et al. (2014) ont proposé une combinaison de fonctions tangentielles et exponentielles pour développer une théorie HSDT pour les plaques FG. pour analyser le flambement et la vibration des plaques sandwich fonctionnellement graduée, Saidi et al. (2016) ont aussi développé une nouvelle théorie hyperbolique simple HSDT pour l'analyse dynamique des plaques rectangulaires FG reposé sur une fondation élastique. Tounsi et al. (2016) ont développé une nouvelle HSDT à 03 inconnues. Récemment, plusieurs HSDT ont été proposées dans les travaux de Ait Sidhoum et al 2017 et Bourada et al.2018, Bousola et al. 2020.

3.3. NOUVELLE THEORIE RAFFINEE DE DEFORMATION DES PLAQUES (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002 un modèle raffiné pour les plaques isotropes qu'on a nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory). Cette méthode propose des caractéristiques très intéressantes tel que la non nécessité d'un coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments.

3.3.1. Hypothèses de base (RPT)

Les hypothèses de la théorie raffinée des plaques de Shimpi (2002) sont :

- Le déplacement est petit par rapport à l'épaisseur de la plaque,
- La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes σ_x et σ_y ,
- Le déplacement $w(x, y)$ normal au plan médian de la plaque est la somme des deux composantes de la flexion $w_b(x, y)$ et de cisaillement $w_s(x, y)$,

- Les déplacements aux plans $u(x, y)$ et $v(x, y)$ suivant les axes x et y sont constitués de deux composantes de flexion et de cisaillement $u_0(x, y)$ et $v_0(x, y)$ dues aux forces normales au plan.
- Les composantes de flexion $u_b(x, y)$ et $v_b(x, y)$ sont considérées comme semblables aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques :

$$u_b(x, y) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad , \quad v_b(x, y) = -z \frac{\partial w_b}{\partial y}$$

- Les composantes de cisaillement $u_s(x, y)$ et $v_s(x, y)$ sont liées à la composante de déplacement de cisaillement w_s .

3.3.1.1. Cinématique et déformation (RPT)

Le champ de déplacement de la théorie RPT s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.42a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.42b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.42c})$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (III.42) deviennent alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} - f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix}, \quad g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.44})$$

Après le développement de la théorie RPT par Shimpi (2002), La fiabilité de cette méthode a été démontrée par plusieurs chercheurs. Kim et Thai.(2009), Ait Atmane et Tounsi (2010) ont analysé la flexion statique et le flambage d'une plaque composite. Puis Thai et Kim (2011) et Hadji et al. (2011) ont adapté la RPT avec succès au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwiches respectivement. Thai et Uy (2013) ont reformulé la RPT basée sur la surface neutre et ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG type Levy. Des solutions analytiques pour la déflexion, la charge de flambement et la fréquence naturelle ont été obtenues pour les plaques dans des conditions limites arbitraires en utilisant la méthode des solutions de Sobhy (2013). La théorie RPT a été utilisée dans les travaux de (Merdaci et al. 2011, Tounsi et al. 2013, et Thai et Vo2013) pour les plaques sandwich FG, et enfin les plaques FG Thai et Choi (2014) ont amélioré la RPT en introduisant l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques FG en se basant sur une fonction tangentielle inverse.

3.3.2. Théorie de déformation des plaques quasi-3D

En divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, et le cisaillement et en prenant en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque, Thai et Kim (2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. Hebali et al (2014), Tounsi et al (2013), Hamidi et al (2015), Thai et al (2014), Bessaim et al 2013) et Bennoun et al (2014) Ont proposée à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D, En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour AM (2013) a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FGM, les plaques sandwich Zenkour AM.2 (2013) et des plaques composites stratifiées Zenkour AM.3 (2013). Mantari et Guedes Soares (2014) ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement gradués en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

3.3.2.1. Cinématique et déformation (Quasi 3D)

Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.45 a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.45 b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y) \quad (\text{III.45 c})$$

Où (u_0, v_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque. (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal. φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse.

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{III.46})$$

3.3.3. Théorie de zig-zag

Ce modèle est basé sur la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre (FSDT) et d'une fonction zig-zig, la fonction zig-zig donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue à travers l'épaisseur, mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. III.10). Ce modèle a été proposé par Di Sciuva (1987) où les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

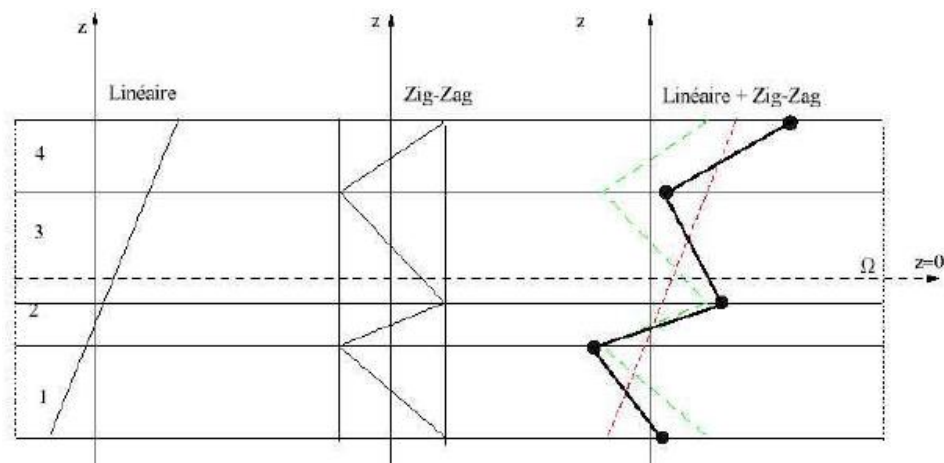


Figure III.10 : Champ de déplacements des modèles zig-zig du premier ordre
(Nguyen 2004)

Plusieurs chercheurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zig (Murakami, 1986 ; He, 1994 ; Icardi, 2001 ; Carrera, 2004) en se basant sur le concept de Di Sciuva (1987). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (figure III.11). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres. [Tafla, 2007]

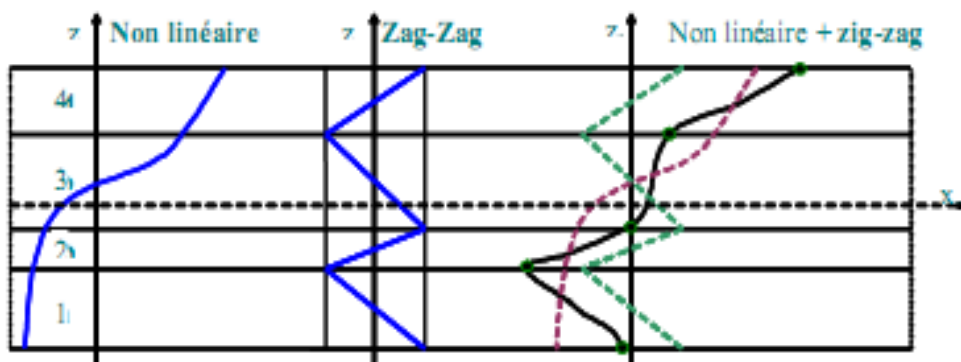


Figure III.11 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé
(Carrera, 2004)

3.4. CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre une revue bibliographique sur : les différents modèles analytiques existant dans la littérature, leurs hypothèses, champ de déplacement et leurs déformations. Nous concluons que l'approche monocouche équivalente (CPT, FSDT et HSDT) est mieux adaptée pour les matériaux FGM, car il n'y a pas de changements brusques dans les caractéristiques mécaniques, contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter. Donc nous avons eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé, où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

Chapitre IV

*Analyse de la flexion et du flambement
des plaques épaisses FG en se basant
sur une théorie de déformation de
cisaillement HSDT*

IV. CHAPITRE 04: ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION DE CISAILLEMENT (HSDT)

4.1. INTRODUCTION

L'objectif principal de toute théorie, est le calcul des grandeurs généralisées sur la base du système des équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites relatives à la structure, Elle a pour but ainsi la mise en place d'une loi de comportement.

Nous nous intéressons dans ce chapitre au développement d'une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé intégral (I-HSDT) pour l'étude du comportement statique des plaques fonctionnellement graduées. Les plaques sont soumises à un chargement transversal pour l'analyse de la flexion et sous un effort axial (uni axiale et bi axiale) pour l'étude du flambement. Les solutions analytiques sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuel et la méthode de Navier.

4.2. CONFIGURATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PLAQUE À GRADIENT DE PROPRIÉTÉ

La géométrie d'une plaque FG est présentée dans la Figure IV.1 Les dimensions des plaques sont $a*b*h$, où "a" étant la largeur, « b » la longueur et « h » l'épaisseur de la plaque.

La gradation des caractéristiques du matériau est dans le sens de l'épaisseur. Le métal et la céramique étant les constituants typiques, dans ce chapitre deux types de plaques seront utilisées : E-FGM et P-FGM constitués respectivement : d'Aluminium Al et d'Alumine Al_2O_3 .

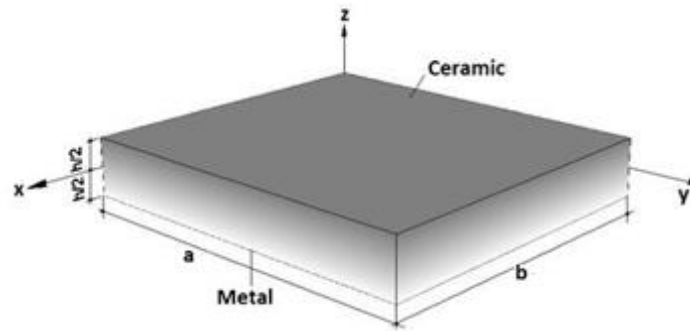


Figure IV.1 : Géométrie de la plaque à gradient fonctionnel

4.3. LA LOI DE VARIATION DU MATÉRIEL

On considère que les propriétés matérielles de la plaque FG, varient suivant l'épaisseur de la plaque selon la loi exponentielle et la loi de puissance comme suit :

- Plaque E-FGM

$$E(z) = E_0 e^{P(\frac{z}{h} + \frac{1}{2})} \quad (IV.1a)$$

- Plaque P-FGM

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) V(z) \quad , \text{avec} \quad V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^P \quad (IV.1b)$$

Où $E(z)$, E_m et E_c sont les modules de Young de la plaque à travers l'épaisseur, du métal et de la céramique respectivement, E_0 représente le module de Young à la surface inférieure, Pour notre étude $E_0 = E_m$ qui est le module de Young du métal. P est l'indice matériel, $V(z)$ est la fraction volumique de la plaque et ν est le coefficient de poisson.

Les valeurs typiques pour la céramique et le métal utilisées dans la plaque FG sont résumées dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1 : Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG

Propriétés	Métal	Céramique
	Aluminium (Al)	Alumina (Al ₂ O ₃)
E (GPa)	70	380
ν	0.3	

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

La variation des fractions volumiques des plaques E-FG et P-FG à travers l'épaisseur est présentée dans les figures IV.2 et IV.3 respectivement

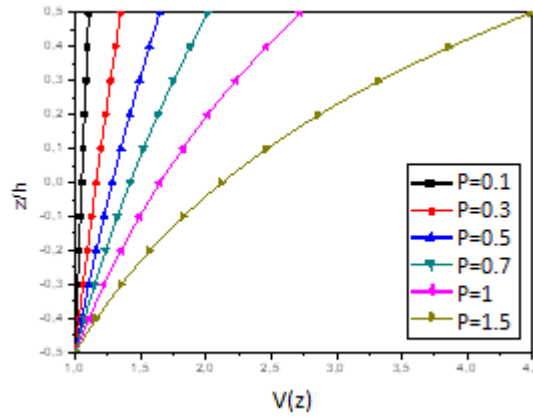


Figure IV.2 : La variation de la fraction volumique E-FGM à travers l'épaisseur

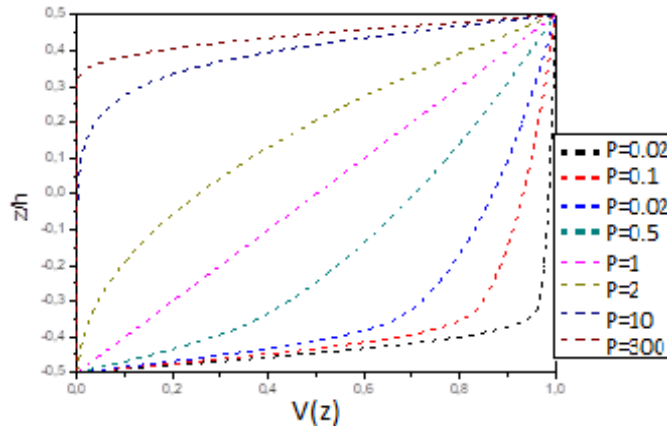


Figure IV.3 : La variation de la fraction volumique P-FGM à travers l'épaisseur

4.4. LE CHAMP DE DÉPLACEMENT (I-HSDT)

En considérant dans ce modèle, quelques hypothèses et modifications simplificatrices sur les théories HSDTs conventionnelle, afin de réduire le nombre des variables inconnues (cinq variable et plus dans les théories HSDT classique). La cinématique de la théorie HSDT conventionnelle est donnée comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \quad (IV.2a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \quad (IV.2b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (IV.2c)$$

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

Où $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ sont les inconnus des déplacements de la surface moyenne de la plaque, $f(z)$ représente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur.

En utilisant l'équation (IV.2) et en supposant que $\varphi_x = \int \theta(x, y) dx$ et $\varphi_y = \int \theta(x, y) dy$, le champ de déplacement de la théorie actuel devient sous la forme simplifiée suivante :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \quad (IV.3a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad (IV.3b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (IV.3c)$$

Les coefficients (k_1) et (k_2) dépendent de la géométrie. On peut voir que la cinématique dans l'équation (IV.3) ne présente que quatre inconnus (u_0, v_0, w_0 , et θ).

La fonction de gauchissement de cisaillement utilisée dans ce travail est prise sous la forme hyperbolique suivante :

$$f(z) = -\left[\frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) \quad (IV.4)$$

Cette fonction assure automatiquement les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement transverse à la surface libre de la plaque FG (surfaces supérieure et inférieure).

Les déformations non nulles associées avec la cinématique de l'équation (IV.03) sont:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad (IV.5)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad (IV.6a)$$

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.6b})$$

Les termes d'intégrales présentées dans les équations ci-dessus peuvent être résolus en utilisant la méthode de Navier et peuvent être exprimées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta \, dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta \, dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta \, dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta \, dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.7})$$

Où les coefficients (A') et (B') sont considérés selon le type de solution employée, qui est dans notre cas la solution de Navier. Ainsi, (A') et (B') sont définie par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV.8})$$

Où (α) et (β) sont définie dans l'expression (IV.21).

4.5. EQUATIONS CONSTITUTIVES

Pour des plaques élastiques en FGM, les relations constitutives (contrainte-déformation) peuvent être exprimées par la loi de Hook généralisé comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

Où (Q_{ij}) présente des constantes élastiques en élasticité plane de la matrice de rigidité dans les axes matériels de la plaque, et sont exprimé par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.10})$$

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

4.6. PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

Le principe des travaux virtuels est utilisé dans cette investigation pour dériver les équations gouvernantes du système. Le principe des travaux virtuels peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Où (δU) est la variation de l'énergie de déformation, et (δV) est la variation du travail extérieur engendrée par les charges extérieures appliquées à la plaque.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque fonctionnellement graduée est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Où A est la surface et N , M et S sont les résultantes des contraintes et sont exprimées par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy) \quad \text{and} \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{IV.13})$$

La variation du travail des charges extérieures peut être exprimée par :

$$\delta V = - \int_A \left(\left(N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) + q \delta w_0 \right) dA \quad (\text{IV.14})$$

Où (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont les charges axiales appliquées à la plaque et (q) est le chargement mécanique transversal.

En remplaçant les équations (IV.12) et (IV.14) dans l'équation (IV.11), on obtient les quatre équations d'équilibre suivantes :

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
 \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = 0 \\
 \delta \theta : \quad & -M_x^s - M_y^s - (A' + B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{IV.15}$$

En remplaçant l'équation (IV.5) dans l'équation (IV.9) et les résultats obtenus dans l'équation (IV.13), les résultantes de contraintes peuvent être exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \tag{IV.16a}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \tag{IV.16b}$$

Et les composantes de rigidité sont définies par :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)\} dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \tag{IV.17a}$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} [g(z)]^2 dz, \quad i, j = 4, 5 \tag{IV.17b}$$

En substituant les équations (IV.16) dans l'équation (IV.15), les équations gouvernantes du système peuvent être exprimées en termes de déplacements comme suit :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - (B_{11} d_{111} w_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0) \\
 & + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{122} \theta + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_1 \theta = 0,
 \end{aligned} \tag{IV.18a}$$

$$\begin{aligned}
 & (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + A_{66} d_{22} v_0 + A_{22} d_{22} v_0 - ((B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 + B_{22} d_{222} w_0) \\
 & + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{112} \theta + (k_2 B_{22}^s + k_1 B_{12}^s) d_2 \theta = 0,
 \end{aligned} \tag{IV.18b}$$

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

$$\begin{aligned}
 & (B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0) + ((B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0) \\
 & - D_{11}d_{1111}w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_0 - D_{22}d_{2222}w_0 \\
 & + (k_1D_{11}^s + k_2D_{12}^s)d_{11}\theta + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s d_{1122}\theta + (k_1D_{12}^s + k_2D_{22}^s)d_{22}\theta \\
 & + N_x^0 d_{11}w_0 + 2N_{xy}^0 d_{12}w_0 + N_y^0 d_{22}w_0 + q = 0
 \end{aligned} \tag{IV.18c}$$

$$\begin{aligned}
 & -((k_1A' + k_2B')B_{66}^s d_{122}u_0 + (k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s)d_{11}u_0) - ((k_1A' + k_2B')B_{66}^s d_{112}v_0 + (k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s)d_{22}v_0) \\
 & + (D_{11}^s + D_{12}^s)d_{11}w_0 + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s d_{1122}w_0 + (D_{12}^s + D_{22}^s)d_{22}w_0 \\
 & - k_1^2 H_{11}^s \theta - k_2^2 H_{22}^s \theta - 2k_1k_2 H_{12}^s \theta - (k_1A' + k_2B')^2 H_{66}^s d_{1122}\theta \\
 & + A_{44}^s (k_2B')^2 d_{22}\theta + A_{55}^s (k_1A')^2 d_{11}\theta = 0
 \end{aligned} \tag{IV.18d}$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont des opérateurs différentiels tel que :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \tag{IV.19}$$

4.7. SOLUTION ANALYTIQUE

Dans ce travail, la plaque fonctionnellement graduée est considérée comme étant simplement appuyée aux extrémités. La méthode de la solution de Navier est utilisée ici pour résoudre le système d'équations gouvernantes (Equation IV.18). La méthode de Navier est exprimée par les séries de fourrier comme suit :

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \tag{IV.20}$$

Avec

$$\alpha = m\pi / a \text{ et } \beta = n\pi / b \tag{IV.21}$$

Et U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer.

En substituant l'équation (IV.20) dans l'équation (IV.18), la solution analytique de la charge de flambement peut être déterminée comme suit:

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} + \bar{N} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

Où

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), S_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), S_{13} = \alpha(B_{11}\alpha^2 + B_{12}\beta^2 + 2B_{66}\beta^2), \\ S_{14} &= \alpha(k_1B_{11}^s + k_2B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\beta^2), \\ S_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), S_{23} = \beta(B_{22}\beta^2 + B_{12}\alpha^2 + 2B_{66}\alpha^2), S_{24} = \beta(k_2B_{22}^s + k_1B_{12}^s - (k_1A' + k_2B')B_{66}^s\alpha^2), \\ S_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4), \\ S_{34} &= -(k_1D_{11}^s + k_2D_{12}^s)\alpha^2 + 2(k_1A' + k_2B')D_{66}^s\alpha^2\beta^2 - (k_2D_{22}^s + k_1D_{12}^s)\beta^2, \\ S_{44} &= -k_1(k_1H_{11}^s + k_2H_{12}^s) - (k_1A' + k_2B')^2(H_{66}^s\alpha^2\beta^2) - k_2(k_1H_{12}^s + k_2H_{22}^s) - (k_1A')^2A_{55}^s\alpha^2 - (k_2B')^2A_{44}^s\beta^2 \\ \bar{N} &= N_{cr}(\alpha^2 + \gamma\beta^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Considérons que la plaque est soumise à des charges de compressions axiale de la forme

$$N_x^0 = N_{cr}, N_y^0 = \gamma N_{cr}, N_{xy}^0 = 0.$$

4.8. RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSIONS

Dans ce qui suit, divers exemples numériques sur l'analyse statique et le flambement des plaques FG sont étudiés pour vérifier l'exactitude du présent modèle. L'effet de l'indice matériel, du rapport d'épaisseur, du rapport de dimensions et des conditions de chargement sont évalués

La variation des propriétés des matériaux des plaques fonctionnellement graduées FG est soit en fonction de la loi de puissance P-FG, ou la loi exponentielle E-FG.

Pour l'analyse de flexion, les déplacements axiaux et transversaux et les contraintes sont évalués et pour l'analyse du flambement, la charge critique de flambement sous compression uni-axiale et bi-axiale est calculée.

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

Les paramètres non-dimensionnels utilisés sont comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(z) &= \frac{1000E_c h^3}{q_0 a^4} u(0, b/2, z), \quad \tilde{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w(a/2, b/2) \\ \tilde{\sigma}_{xx}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xx}(a/2, b/2, z), \quad \tilde{\sigma}_{yy}(z) = \frac{h}{q_0 a} \sigma_{yy}(0, 0, z) \\ \tilde{\sigma}_{xz}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}(0, b/2, z), \quad \tilde{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}\end{aligned}\tag{IV.24}$$

4.8.1. Analyse de flexion

La plaque FG est supposée sous l'action de la charge transversale (q), Dans la présente étude la distribution de la charge transversale est supposée uniforme sous la forme bi-sinusoïdale suivante :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$$

Où

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi mn}$$

Dans cette section, la réponse flexionnelle des plaques FG est obtenue sous l'action d'un chargement transversal réparti. Le tableau IV.2 montre la validation des résultats de flexion générés à partir de la théorie actuelle avec les différentes théories de déformation de cisaillement disponibles dans la littérature ; la plaque carrée en FGM est considérée dans ce cas épaisse avec un rapport de géométrie $a/h = 10$. Le tableau présente les déplacements et les contraintes axiales et de cisaillement pour les différentes valeurs d'indices matériels. Les résultats sont comparés avec la théorie quasi 3D Carrera et.al. (2008), Wu et Chiu (2011) et les théories 2D modifiés de Zenkour (2006), Mantari et al. (2012), Wu et Li (2010). Thai et Kim (2013) Nguyen (2014).

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

Tableau IV.2 : Validation des déplacements et contraintes non dimensionnels pour une plaque carrée fonctionnellement graduée P-FGM avec $a/h = 10$

P	Théorie	$\bar{u}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4}\right)$	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \frac{h}{6}\right)$
1	SSDT Zenkour (2006)	0.6626	0.5889	1.4894	0.611	0.2622
	Quasi-3D Carrera et al. (2008)	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.251
	TSDT Wu and Li (2010)	0.6414	0.589	1.4898	0.6111	0.2599
	Quasi-3D Wu and Chiu (2011)	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	HSDT Mantari et al. (2012)	0.6398	0.588	1.4888	0.6109	0.2566
	HSDT Thai and Kim (2013)	0.6414	0.589	1.4898	0.6111	0.2608
	HSDT Nguyen (2014)	0.6401	0.5883	1.4892	0.6110	0.2552
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.6402	0.5884	1.4891	0.6110	0.2582
	Présent	0.6417	0.5889	1.4902	0.6112	0.2589
2	SSDT Zenkour (2006)	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	Quasi-3D Carrera et al. (2008)	0.9012	0.757	1.4147	0.5421	0.2496
	TSDT Wu and Li (2010)	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2721
	Quasi-3D Wu and Chiu (2011)	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	HSDT Mantari et al. (2012)	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	HSDT Thai and Kim (2013)	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2737
	HSDT Nguyen (2014)	0.8961	0.7567	1.3947	0.5439	0.2721
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.8963	0.7569	1.3946	0.5439	0.2748
	Présent	0.8988	0.7572	1.3966	0.5443	0.2708
4	SSDT Zenkour (2006)	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.258
	Quasi-3D Carrera et al. (2008)	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

	TSDT Wu and Li (2010)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2519
	Quasi-3D Wu and Chiu (2011)	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	HSDT Mantari et al. (2012)	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	HSDT Thai and Kim (2013)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
	HSDT Nguyen (2014)	1.0466	0.8818	1.1766	0.5664	0.2593
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	1.0469	0.8820	1.1766	0.5664	0.2611
	Présent	1.0510	0.8810	1.1802	0.5671	0.2494
8	SSDT Zenkour (2006)	1.1340	0.975	0.9466	0.8556	0.2121
	Quasi-3D Carrera et al. (2008)	1.0830	0.9738	0.9687	0.5879	0.2262
	TSDT Wu and Li (2010)	1.0763	0.9747	0.9477	0.5858	0.2087
	Quasi-3D Wu and Chiu (2011)	1.0830	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	HSDT Mantari et al. (2012)	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	HSDT Thai and Kim (2013)	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088
	HSDT Nguyen (2014)	1.0719	0.9744	0.9444	0.5852	0.2117
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	1.0724	0.9747	0.9447	0.5853	0.2135
	Présent	1.0773	0.9740	0.9486	0.5860	0.2054

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

Tableau IV.3 : Validation du déplacement transversal non dimensionnel (\bar{w}) pour une plaque à gradation exponentielle E-FGM

a/h	b/a	Theory	P=0,1	P=0,3	P=0,5	P=0,7	P=1	P=1,5
2	3	3D Zenkour (2007)	1.4430	1.3116	1.1913	1.0812	0.9334	0.7275
		Quasi-3D Zenkour (2007)	1.4354	1.2977	1.1722	1.0580	0.9057	0.6962
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	1.4421	1.3037	1.1776	1.0628	0.9104	0.6993
		HSDT Mantari et al. (2012)	1.5341	1.3874	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506
		SSDT Zenkour (2006)	1.4354	1.2977	1.1722	1.058	0.9057	0.6962
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	1.5158	1.371	1.2394	1.1200	0.9613	0.7433
		Présent	1.5344	1.3877	1.2543	1.1331	0.9719	0.7504
	2	3D Zenkour (2007)	1.1945	1.0859	0.9864	0.8952	0.7727	0.6017
		Quasi-3D Zenkour (2007)	1.188	1.7400	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	1.1941	1.0795	0.975	0.8799	0.7538	0.5786
		HSDT Mantari et al. (2012)	1.2776	1.1553	1.0441	0.9431	0.893	0.6238
		SSDT Zenkour (2006)	1.188	1.0740	0.9701	0.8755	0.7594	0.5758
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	1.2608	1.1402	1.0307	0.9312	0.7988	0.6170
		Présent	1.2780	1.1557	1.0444	0.94323	0.8087	0.6236
	1	3D Zenkour (2007)	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3727	0.2890
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.5779	0.5224	0.4718	0.4257	0.3649	0.2794
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.6363	0.5752	0.5195	0.4687	0.4018	0.3079
		SSDT Zenkour (2006)	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.6238	0.5640	0.5094	0.4598	0.3937	0.3027
		Présent	0.6369	0.5757	0.5200	0.4691	0.4014	0.3080

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

4	3	3D Zenkour (2007)	1.0134	0.9190	0.8335	0.7561	0.6533	0.5121
		Quasi-3D Zenkour (2007)	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	1.0124	0.9155	0.8272	0.7470	0.6404	0.4941
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
		SSDT Zenkour (2006)	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	1.0290	0.9313	0.8431	0.7635	0.6581	0.5141
		Présent	1.0325	0.9344	0.8458	0.7658	0.6600	0.5153
	2	3D Zenkour (2007)	0.8153	0.7395	0.6708	0.6085	0.5257	0.4120
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.8145	0.7365	0.6655	0.6009	0.5151	0.3973
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.415
		SSDT Zenkour (2006)	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.8293	0.7505	0.6794	0.6151	0.5301	0.4139
		Présent	0.8324	0.7533	0.6718	0.6173	0.5318	0.4149
	1	3D Zenkour (2007)	0.349	0.3168	0.2875	0.2608	0.2253	0.1805
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.3486	0.3152	0.2848	0.2571	0.2203	0.1697
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
		SSDT Zenkour (2006)	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.3581	0.3240	0.2932	0.2653	0.2283	0.1778
		Présent	0.3601	0.3259	0.2948	0.2667	0.2295	0.1785

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

Tableau IV.4 : Validation des contraintes normales non dimensionnelles ($\tilde{\sigma}_{yy}$) pour une plaque à gradation exponentielle. E-FGM

a/h	b/a	Théorie	P=0,1	P=0,3	P=0,5	P=0,7	P=1	P=1,5
2	3	3D Zenkour (2007)	0.3081	0.3253	0.3436	0.3633	0.3953	0.4562
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.3042	0.3261	0.3493	0.3741	0.4143	0.4904
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.2912	0.3118	0.3337	0.3571	0.3954	0.4673
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.2368	0.2539	0.2721	0.2914	0.3220	0.3788
		SSDT Zenkour (2006)	0.3042	0.3261	0.3493	0.3741	0.4143	0.4904
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.2419	0.2595	0.2782	0.2981	0.3303	0.3907
		Présent	0.2353	0.2523	0.2704	0.2895	0.3205	0.3787
	2	3D Zenkour (2007)	0.3200	0.3385	0.3583	0.3796	0.4142	0.4799
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.3146	0.3376	0.3620	0.3880	0.4300	0.5093
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.3042	0.3261	0.3495	0.3743	0.4148	0.4905
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.2539	0.2723	0.2919	0.3128	0.3469	0.4064
		SSDT Zenkour (2006)	0.3146	0.3376	0.3620	0.3880	0.4300	0.5093
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.2599	0.2789	0.2992	0.3207	0.3555	0.4208
		Présent	0.2522	0.2705	0.2899	0.3106	0.3439	0.4066
	1	3D Zenkour (2007)	0.3103	0.3292	0.3495	0.3713	0.1068	0.4741
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.2955	0.3181	0.3421	0.3675	0.4085	0.4851
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.2924	0.3147	0.3383	0.3633	0.4041	0.4785
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.2522	0.2710	0.291	0.3123	0.3477	0.4035
		SSDT Zenkour (2006)	0.2955	0.3181	0.3421	0.3675	0.4085	0.4851
		ISTDT	0.2607	0.2804	0.3013	0.3235	0.3594	0.4266

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

		Kulkarni et al. (2015)						
		Présent	0.2498	0.2684	0.2881	0.3090	0.3430	0.4065
3	3	3D Zenkour (2007)	0.2319	0.2469	0.2630	0.2800	0.3078	0.3602
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.2493	0.2656	0.2831	0.3017	0.3323	0.3911
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.2272	0.2414	0.2566	0.2731	0.3004	0.3540
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.2162	0.2312	0.2472	0.2642	0.2917	0.3435
		SSDT Zenkour (2006)	0.2493	0.2656	0.2831	0.3017	0.3223	0.3911
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.2175	0.2327	0.2488	0.2660	0.2937	0.346
		Présent	0.2158	0.2309	0.2470	0.2641	0.2918	0.3440
4	2	3D Zenkour (2007)	0.2431	0.2591	0.2762	0.2943	0.3239	0.3797
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.2588	0.2761	0.2946	0.3143	0.3464	0.4079
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.2395	0.2550	0.2715	0.2894	0.3187	0.3756
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.2294	0.2454	0.2624	0.2805	0.3097	0.3647
		SSDT Zenkour (2006)	0.2588	0.2761	0.2946	0.3143	0.3464	0.4079
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.2310	0.2472	0.2643	0.2826	0.3121	0.3677
		Présent	0.2290	0.2450	0.2619	0.2799	0.3091	0.3640
4	1	3D Zenkour (2007)	0.2247	0.24	0.2562	0.2736	0.3018	0.3589
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.2346	0.251	0.2684	0.2870	0.3171	0.3739
		Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.2237	0.2391	0.2554	0.2729	0.3014	0.3556
		HSDT Mantari et al. (2012)	0.2164	0.2316	0.2477	0.2649	0.2927	0.3451
		SSDT Zenkour (2006)	0.2346	0.251	0.2684	0.2870	0.3171	0.3739
		ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.2187	0.2342	0.2506	0.2680	0.2963	0.3494
		Présent	0.2158	0.2309	0.2470	0.2640	0.2918	0.3440

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

$$\text{Avec } \bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \frac{h^2}{q_0 a^2}$$

Les tableaux IV.3 et IV.4 valident les résultats du déplacement transversal (\tilde{w}) et de la contrainte normale non dimensionnelle ($\tilde{\sigma}_{yy}$) respectivement pour les plaques type E-FGM.

En considérant deux valeurs du rapport de géométrie ($a/h= 2$ et 4) et le rapport de dimension ($a/b = 1, 2$ et 3) respectivement. Les résultats sont comparés avec : la solution d'élasticité 3D de Zenkour (2007), la théorie quasi-3D donnée par Zenkour (2007) et Mantari et Soares (2012), les théories d'ordre supérieur données par Mantari et al. (2012), Zenkour (2006) et Kulkarni (2015).

On constate que les résultats sont en bon accord avec les résultats existants. La théorie actuelle donne presque les mêmes résultats que la théorie d'ordre supérieur de Mantari et al. (2012). La différence entre les résultats actuels et les résultats de la solution d'élasticité 3D diminue au fur et à mesure que la valeur de l'exposant augmente.

Tableau IV.5 : Validation des déplacements transversaux non dimensionnels (\tilde{w}) pour une plaque à gradation exponentielle E-FGM ($a/h=10$)

b/a	Théorie	P=0,1	P=0,3	P=0,5	P=0,7	P=1	P=1,5
3	Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.8877	0.8027	0.7255	0.6554	0.5622	0.4346
	HSDT Mantari et al. (2012)	0.8909	0.8066	0.7307	0.6622	0.572	0.4489
	SSDT Zenkour (2006)	0.8849	0.8002	0.7233	0.6534	0.5605	0.4333
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.8904	0.8061	0.7302	0.6619	0.5717	0.4487
	Présent	0.8909	0.8065	0.7306	0.6622	0.5720	0.4489
2	Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.7037	0.6364	0.5752	0.5196	0.4457	0.3445
	HSDT Mantari et al. (2012)	0.7066	0.6397	0.5795	0.5252	0.4536	0.3560
	SSDT Zenkour (2006)	0.7015	0.6344	0.5734	0.548	0.4444	0.3435

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.7061	0.6393	0.5791	0.5249	0.4533	0.3558
	Présent	0.7066	0.6397	0.5795	0.5252	0.4536	0.3559
1	Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.2799	0.2531	0.2287	0.2066	0.1772	0.137
	HSDT Mantari et al. (2012)	0.2816	0.255	0.2309	0.2093	0.1807	0.1417
	SSDT Zenkour (2006)	0.279	0.2523	0.228	0.206	0.1767	0.1366
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.2813	0.2547	0.2307	0.2091	0.1805	0.1416
	Présent	0.2816	0.2550	0.2309	0.2093	0.1807	0.1417

Tableau IV.6 : Validation des contraintes normales non dimensionnelles ($\tilde{\sigma}_{xx}$) pour une plaque à gradation exponentielle. E-FGM ($a/h=10$)

b/a	Théorie	P=0,1	P=0,3	P=0,5	P=0,7	P=1	P=1,5
3	Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.5275	0.5635	0.6018	0.6425	0.7085	0.8335
	HSDT Mantari et al. (2012)	0.5288	0.5651	0.6037	0.6447	0.7112	0.8365
	SSDT Zenkour (2006)	0.5514	0.5896	0.6302	0.6733	0.7427	0.8730
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.5294	0.5658	0.6044	0.6455	0.7120	0.8375
	Présent	0.5287	0.5650	0.6036	0.6446	0.7110	0.8362
2	Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.4340	0.4634	0.4947	0.5280	0.5822	0.6849
	HSDT Mantari et al. (2012)	0.4350	0.4649	0.4966	0.5303	0.5850	0.6881
	SSDT Zenkour (2006)	0.4552	0.4867	0.5200	0.5554	0.6126	0.7201
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.4355	0.4654	0.4972	0.5310	0.5858	0.6891
	Présent	0.4348	0.4647	0.4964	0.5302	0.5848	0.6879
1	Quasi-3D Mantari and Soares (2012)	0.2063	0.2199	0.2344	0.2499	0.2753	0.3240
	HSDT Mantari et al. (2012)	0.2062	0.2204	0.2355	0.2515	0.2774	0.3264

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

	SSDT Zenkour (2006)	0.2196	0.2345	0.2503	0.2671	0.2844	0.3460
	ISTDT Kulkarni et al. (2015)	0.2066	0.2208	0.2359	0.2520	0.2780	0.3271
	Présent	0.2061	0.2203	0.2353	0.2514	0.2773	0.3262

Les tableaux IV.5 et IV.6 montrent la comparaison des résultats actuels du déplacement transversal et de la contrainte normale non-dimensionnelle ($\tilde{\sigma}_{xx}$) respectivement avec ceux obtenus avec la théorie quasi 3D de Mantari et Soares (2012) et les théories d'ordre supérieur de Mantari et al. (2012) et Zenkour (2006) pour des plaques E-FGM avec un rapport ($a/h = 10$). Les résultats sont identiques à ceux de la théorie HSDT de Mantari et al. (2012). On peut conclure que le modèle actuel donne des résultats satisfaisants pour l'analyse des plaques épaisses.

La variation de propriétés telles que le déplacement plan adimensionnel $U(a/2, b/2, z)$, la contrainte normale adimensionnelle $\sigma_{xx}(a/2, b/2, z)$, la contrainte de cisaillement dans le plan adimensionnelle $\tau_{xy}(a/2, b/2, z)$, les contraintes de cisaillement transversal adimensionnelle $\tau_{xz}(0, b/2, z)$ pour les diverses valeurs de l'indices matériel sont respectivement sur les figures (IV.4, IV.5, IV.6 et IV.7). La plaque carrée E-FG est considérée épaisse avec ($a/h = 2$) et ($b/a = 1$)

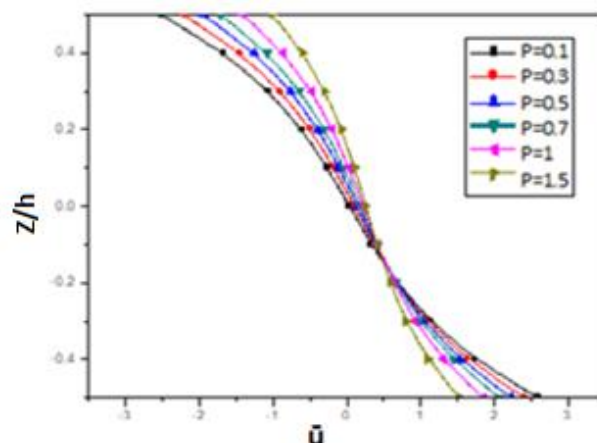


Figure IV.4 : Variation du déplacement plan adimensionnel à travers l'épaisseur pour une plaque épaisse fonctionnellement graduée E-FGM ($b/a=1, a/h=2$)

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
ÉPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

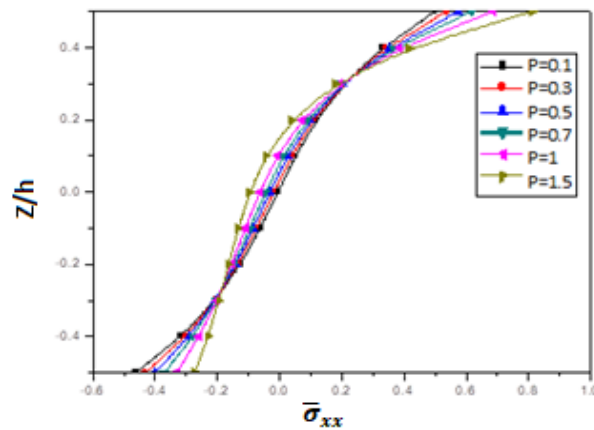


Figure IV.5 : Variation de la contrainte normale adimensionnelle à travers l'épaisseur pour une plaque épaisse fonctionnellement graduée E-FGM ($b/a=1, a/h=2$)

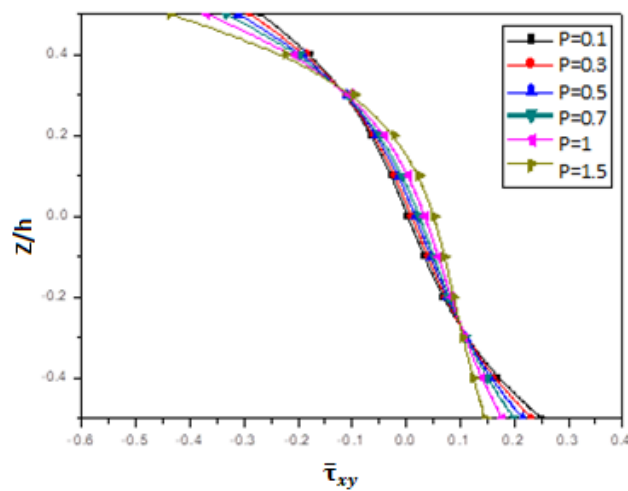


Figure IV.6 : Variation de la contrainte de cisaillement plan adimensionnelle à travers l'épaisseur pour une plaque épaisse fonctionnellement graduée E-FGM ($b/a=1, a/h=2$)

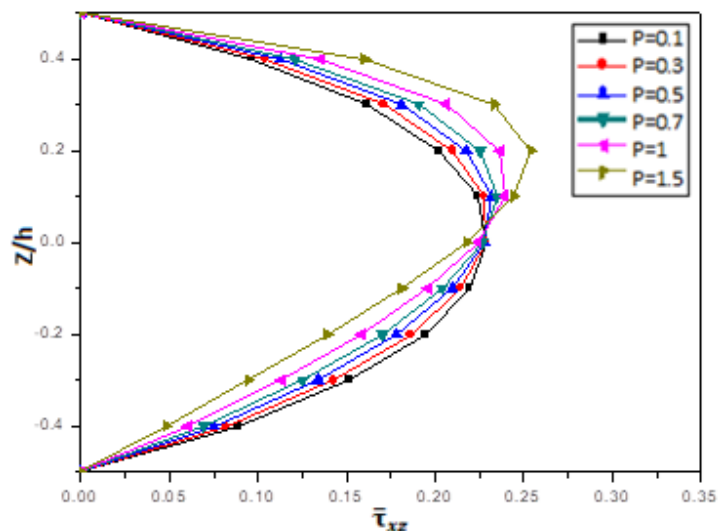


Figure IV.7 : Variation de la contrainte de cisaillement transverse adimensionnelle à travers l'épaisseur pour une plaque épaisse fonctionnellement graduée ($b/a=1, a/h=2$)

CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION DE CISAILLEMENT (HSDT)

Les indices matériels (P) considérés sont respectivement 0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 1 et 1,5. La non linéarité des courbes des figures IV.4 et IV.5 est due à la variation non linéaire des propriétés à travers l'épaisseur ainsi qu'en raison de la nature non linéaire du champ de déplacement considéré, également lorsque l'indice matériel augmente, ces courbes deviennent de plus en plus décalées, c'est-à-dire qu'elles s'écartent du plan médian de la plaque FG.

Le déplacement plan nul ($u = 0$) pour les valeurs dont l'indice matériel est petit, est situé près du plan médian de la plaque, mais à mesure que la valeur de l'indice matériel augmente, ce déplacement plan nul se déplace vers la surface supérieure de la plaque.

Le même comportement est observé pour les contraintes normales nulles ($\sigma_{xx} = 0$) et les contraintes planes de cisaillement nulles ($\tau_{xy} = 0$). A partir de la figure IV.4, on observe que la valeur du déplacement axial maximal non-dimensionnel diminue à mesure que l'indice matériel augmente; tandis que, d'après les Figure IV.5 et IV.6, on observe que les valeurs de la contrainte normale maximale non dimensionnelle et de la contrainte de cisaillement augmentent à mesure que l'indice matériel augmente. En effet, l'augmentation de l'indice matériel augmente la rigidité de la plaque.

Sur la figure IV.7, les valeurs de la contrainte de cisaillement transverse, aux surfaces supérieure et inférieure est nulle, ce qui est dû au respect de la condition de la déformation de cisaillement transversal nulle aux surfaces supérieure et inférieure, supposée dans le champ de déplacement actuel. De plus, la répartition de ces contraintes est continue sur toute l'épaisseur du fait de la variation continue des propriétés du matériau.

L'effet de l'indice matériel et du rapport de géométrie a/h sur la flèche non dimensionnelle est illustré dans la figure IV.8. La plaque FG est considérée carrée avec une variation des propriétés selon la loi de puissance. La flèche adimensionnelle augmente avec l'augmentation des valeurs de l'indice matériel, c'est-à-dire qu'une plaque FG riche en céramique présente une flèche adimensionnelle moindre que la plaque riche en métal.

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

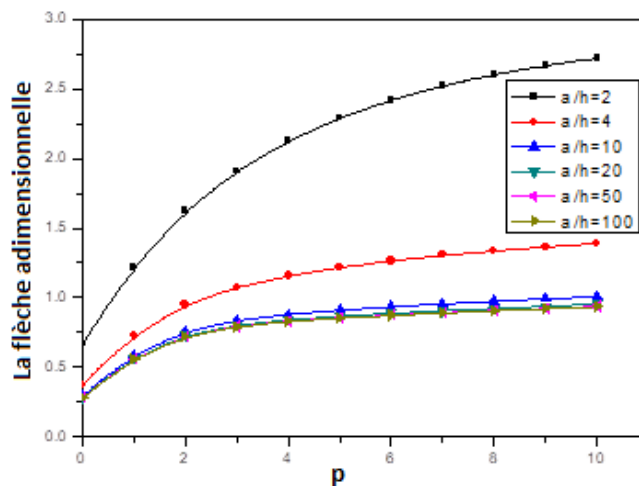


Figure IV.8 : Effet de l'indice matériel sur la flèche adimensionnelle pour divers rapports de géométrie d'une plaque P-FG carrée.

La plaque la plus épaisse présente des valeurs de la flèche adimensionnelle plus élevées que les plaques les plus minces, également le taux d'augmentation de cette flèche adimensionnelle par rapport à l'augmentation de l'indice matériel est plus élevé pour une plaque épaisse que celui d'une plaque mince.

L'effet de l'indice matériel et du rapport de dimension (b/a) sur la déflexion centrale non dimensionnelle est illustré sur la figure IV.9.

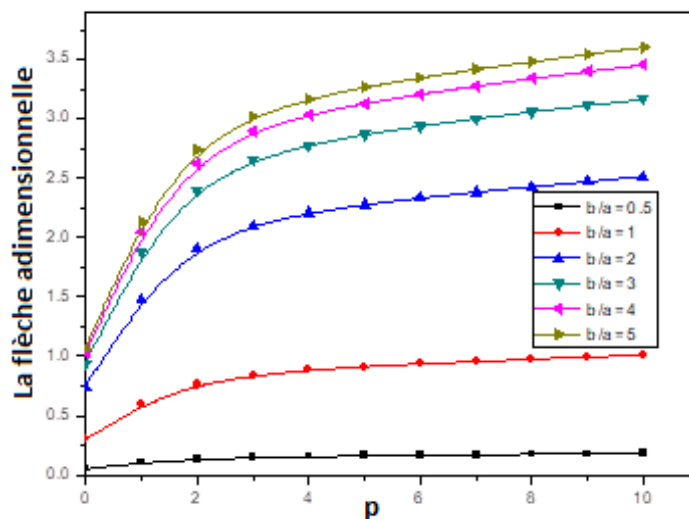


Figure IV.9 : Effet de l'indice matériel sur la flèche adimensionnelle pour divers rapports de dimension d'une plaque P-FGM ($a/h=10$)

La plaque FG avec un rapport ($a/h=10$) a été considéré. L'augmentation de la flèche adimensionnelle a été observée en fonction de l'augmentation de l'indicateur matériel. On peut

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

constater que la flèche adimensionnelle est plus élevée pour une plaque avec un rapport de dimension plus grand; de plus, les plaques avec un rapport de dimension élevé donnent un incrément plus élevé de la flèche adimensionnelle en fonction de l'indice matériel, que celui pour un rapport de dimension plus faible.

4.8.2. Analyse de flambement

Dans cette section, l'analyse de flambement est effectuée en appliquant un chargement uniaxial et biaxial dans le plan pour les différentes valeurs de l'indice matériel, de rapports de dimension et de géométrie.

Les charges critiques de flambement non dimensionnelles obtenues dans la présente analyse sont comparées à celles obtenues par analyse par éléments finis en utilisant un élément d'élasticité tridimensionnelle (Asemi et al, (2013)), ainsi qu'avec CPT (Javaheri et Eslami,(2002)) et FSDT (Shariyat et Eslami,(2007)).

Le tableau IV.7 présente une comparaison de la charge critique de flambement des plaques carrées Al / SiC ($a/h = 10$) sous différents types de chargement. A partir du tableau, Il est observé que la plaque sous chargement biaxial de compression suivant x et de traction suivant y ($\gamma = -1$) est la plus stable.

Les résultats du présent modèle sont en bon accord avec les solutions précédentes (FSDT de Mohammadi et al. (2010)), HSDT de Bodaghi et Saidi (2010) et HSDT de Thai et Choi (2012)).

Tableau IV.7 : Comparaison de la charge critique de flambement des plaques carrées ($a/b=1$ et $a/h =10$) Al / SiC en fonction de l'indice matériel sous différents types de chargement.

γ	Théorie	P					
		0	0.5	1	2	5	10
0	FSDT Mohammadi et al (2010)	37.3708	-	37.7132	37.7089	-	-
	HSDT Bodaghi et Saidi (2010)	37.3714	-	37.7172	37.5765	-	-
	HSDT Thai et Choi (2012)	37.3721	-	37.7143	37.6042	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	37.4215	37.6650	37.7560	37.6327	36.8862	36.5934
	Présent	37.3738	37.6314	37.7157	37.6100	36.9425	36.5777

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

1	FSDT Mohammadi et al (2010)	18.6854	-	18.8566	18.8545	-	-
	HSDT Bodaghi et Saidi (2010)	18.6860	-	18.8571	18.8020	-	-
	HSDT Thai et Choi (2012)	18.6861	-	18.8572	18.8021	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	18.7107	18.8325	18.8780	18.8163	18.4431	18.2967
	Présent	18.6869	18.8157	18.8579	18.805	18.4712	18.2889
-1	FSDT Mohammadi et al (2010)	72.0834	-	73.6307	73.6112	-	-
	HSDT Bodaghi et Saidi (2010)	72.2275	-	73.6645	73.1587	-	-
	HSDT Thai et Choi (2012)	72.0983	-	73.6437	73.1436	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	72.3281	73.4526	73.8426	73.2827	69.9876	68.7244
	Présent	72.1041	73.2638	73.6487	73.1681	70.2122	68.6530

La figure IV.10 présente les charges critiques de flambement des plaques rectangulaires en fonction de l'indice matériel (P) pour différents types des chargement (γ) et en fonction du rapport de géométrie (a/h). Il est observé à partir de cette figure que les charges critiques de flambement diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel et que le cas du chargement ($\gamma = -1$) est le système le plus stable.

On constate aussi que la charge critiques du flambement augmentent avec le rapport de géométrie jusqu'à $a/h=30$, et au-delà de cette valeur les résultats de la charge critiques du flambement deviennent constantes.

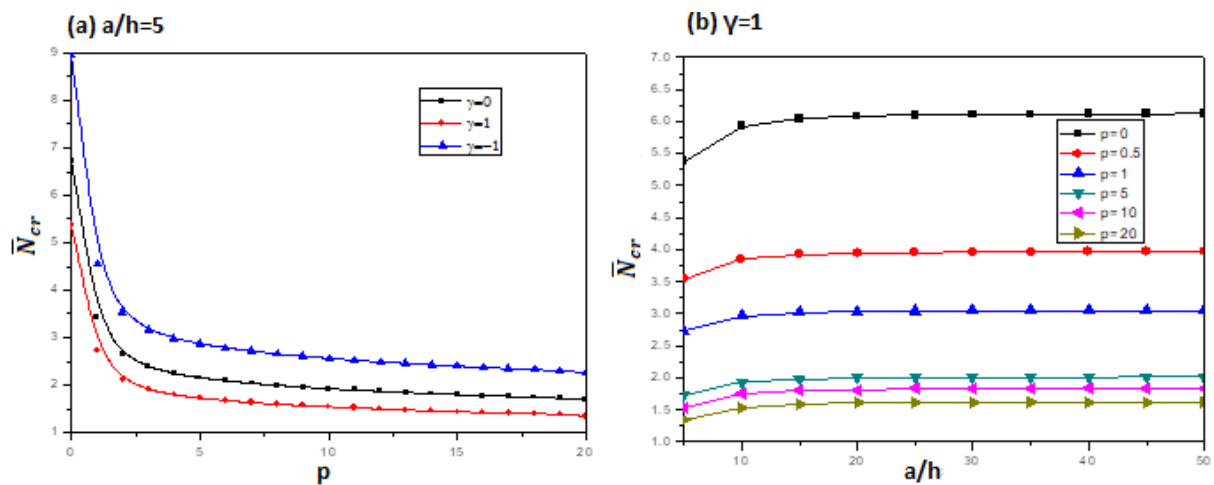


Figure IV.10 : Effet de l'indice matériel P et du rapport de géométrie (a/h) sur la charge critique de flambement (\bar{N}_{cr}) des plaques rectangulaires Al / SiC

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

Le tableau IV.8 présente les valeurs de la charge critique de flambement des plaques sous un chargement uniaxial et biaxial en fonction de l'indice matériel, du rapport de dimension et de géométrie. Les résultats sont validés avec la théorie de la déformation de cisaillement à deux dimensions modifiée par Thai et Choi (2012) et avec la théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique inverse de Nguyen (2014). Les résultats comparés sont en bon accord pour les différents cas.

Tableau IV.8 : Comparaison de la charge critique de flambement des plaques Al/SiC en fonction de l'indice matériel, rapport de géométrie et de dimension sous chargement de compression uniaxiale et biaxiale.

γ	a/b	a/h	Théorie	P					
				0	0.5	1	2	5	10
0	0.5	5	HSDT Thai et Choi (2012)	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213
			HSDT Nguyen (2014)	6.7417	4.4343	3.4257	2.6503	2.1459	1.9260
			Présent	6.7207	4.4236	3.4166	2.6460	2.1513	1.9229
		10	HSDT Thai et Choi (2012)	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896
			HSDT Nguyen (2014)	7.4115	4.8225	3.7137	2.8911	2.4155	2.1911
			Présent	7.4056	4.8207	3.7111	2.8900	2.4174	2.1901
	20	HSDT Thai et Choi (2012)	7.5993	4.9315	3.7930	2.9582	2.4944	2.2690	
		HSDT Nguyen (2014)	7.6009	4.9307	3.7937	2.9585	2.4942	2.2695	
		Présent	7.5994	4.9314	3.7931	2.9583	2.4947	2.2691	
	1	5	HSDT Thai et Choi (2012)	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807
			HSDT Nguyen (2014)	16.1003	10.6670	8.2597	6.3631	5.0459	4.4981
			Présent	16.0226	10.6260	8.2250	6.3460	5.0629	4.4857
10		HSDT Thai et Choi (2012)	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	
		HSDT Nguyen (2014)	18.6030	12.1317	9.3496	7.2687	6.0316	5.4587	
		Présent	18.5793	12.1233	9.3394	7.2641	6.0390	5.4549	
20		HSDT Thai et Choi (2012)	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668	
		HSDT Nguyen (2014)	19.3593	12.5652	9.6702	7.5386	6.3437	5.7689	
		Présent	19.3530	12.5669	9.6674	7.5377	6.3457	5.7674	

**CHAPITRE 04 : ANALYSE DE LA FLEXION ET DU FLAMBEMENT DES PLAQUES
EPAISSE FG EN SE BASANT SUR UNE THÉORIE DE DÉFORMATION
DE CISAILLEMENT (HSDT)**

1	0.5	5	HSDT Thai et Choi (2012)	5.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
			HSDT Nguyen (2014)	5.3934	3.5475	2.7406	2.1202	1.7167	1.5408
			Présent	5.3769	3.5390	2.7333	2.1169	1.7210	1.5383
		10	HSDT Thai et Choi (2012)	5.9243	3.8565	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517
			HSDT Nguyen (2014)	5.9292	3.8580	2.9710	2.3129	1.9324	1.7529
			Présent	5.9244	3.8566	2.9690	2.3120	1.9339	1.7521
		20	HSDT Thai et Choi (2012)	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152
			HSDT Nguyen (2014)	6.0807	3.9445	3.0350	2.3668	1.9953	1.8156
			Présent	6.0794	3.9451	3.0344	2.3666	1.9957	1.8153
	1	5	HSDT Thai et Choi (2012)	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403
			HSDT Nguyen (2014)	8.0501	5.3335	4.1299	3.1815	2.5230	2.2491
			Présent	8.0111	5.3129	4.1126	3.1731	2.5314	2.2429
		10	HSDT Thai et Choi (2012)	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264
			HSDT Nguyen (2014)	9.3015	6.0659	4.6748	3.6344	3.0158	2.7293
			Présent	9.2897	6.0617	4.6697	3.6321	3.0194	2.7274
		20	HSDT Thai et Choi (2012)	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834
			HSDT Nguyen (2014)	9.6796	6.2826	4.8351	3.7693	3.1718	2.8844
			Présent	9.6766	6.2834	4.8337	3.7687	3.1729	2.8837

L'effet de la charge de compression uniaxiale, biaxiale (égale et inégale) sur la charge critique de flambement non dimensionnelle en fonction de l'indice matériel est illustré dans la figure IV.11. Quand la plaque est sous l'action d'une compression uniaxiale ($\gamma = 0$), elle a une charge de flambement plus critique qu'une compression biaxiale ($\gamma = 1$).

De plus, quand la plaque est sous l'action d'une compression biaxiale égale ($\gamma = 1$), elle a une charge de flambement plus critique qu'une compression biaxiale inégale ($\gamma > 1$).

On constate aussi que la charge critique de flambement diminue lorsque l'indice matériel augmente, ce qui veut dire que la plaque riche en céramique à un niveau critique supérieur.

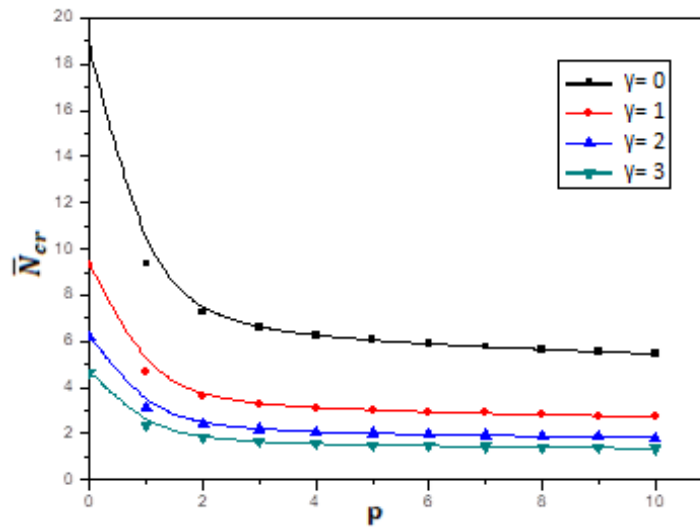


Figure IV.11 : Effet de la charge de compression axiale sur la charge critique de flambement adimensionnel pour divers indices matériels ($b/a=1$, $a/h=10$)

4.9. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes étapes de l'étude analytique de la stabilité des plaques fonctionnellement graduée soumises à un chargement mécanique, en utilisant une nouvelle théorie d'ordre élevée (HSDT) à quatre variables, au lieu de cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

Dans la présente théorie les déplacements de rotations sont remplacés par des termes en intégrale dans les champs de déplacement. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par la suite nous avons présenté les résultats numériques de la présente théorie développée ; après comparaison nous avons constaté que tous les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature. Par conséquent, on peut conclure que la théorie proposée est précise pour résoudre les problèmes de flexion et de flambement des plaques épaisses fonctionnellement graduées.

Chapitre V

Etude de la vibration libre et de la propagation des ondes des plaques anisotropes en utilisant une théorie quasi-3D HSDT

V. CHAPITRE 05 : ETUDE DE LA VIBRATION LIBRE ET DE LA PROPAGATION DES ONDES DES PLAQUES ANISOTROPES EN UTILISANT UNE NOUVELLE THÉORIE QUASI 3D HSDT

V.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie est présentée afin d'analyser la vibration libre et la propagation des ondes des plaques anisotropes (tricliniques et orthotropes) en utilisant une nouvelle théorie de déformation par cisaillement quasi-3D HSDT.

Le présent modèle (quasi-3d HSDT) respecte les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation de facteur de correction de cisaillement. Le point culminant de la présente théorie proposée c'est qu'elle contient seulement trois variables inconnus, ce qui est inférieur à d'autres théories quasi-3D HSDT. Les équations de mouvement pour l'analyse des vibrations libres et la propagation des ondes dans la plaque FGM sont déterminées à partir du principe d'Hamilton. Ces équations sont ensuite résolues en utilisant la procédure de Navier pour les plaques simplement appuyées. L'exactitude des résultats de cette théorie est vérifiée en les comparants avec d'autres quasi-3D HSDTs de la littérature.

V.2. CONFIGURATION GÉOMETRIQUE

Les caractéristiques géométriques des plaques du chapitre précédant sont conservées dans ce chapitre (figure IV.1).

V.3. LES ÉQUATIONS GOUVERNANTES

V.3.1. Équations cinématiques

Les déplacements de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi 3D sont exprimés par (Shimpi 2002, Hadji et al. 2011, Meziane et al.2014 et Boukhari et al. 2016).

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{V.1a})$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} - z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{V.1b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \varphi(x, y, t) \quad (\text{V.1c})$$

Où (w_b) et (w_s) sont les composantes de flexion, et de cisaillement transversal, respectivement; φ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement).

A partir des relations précédentes on peut constater que les déplacements dans la direction d'épaisseur ne sont pas indépendants de (z) , comme d'autres théories.

Suivant le champ de déplacement précédent, les relations déformation-déplacement peuvent être obtenues comme :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{V.2a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad (\text{V.2b})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -z \frac{10}{h^2} + \varphi \quad (\text{V.2c})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad (\text{V.2d})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} + \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{V.2e})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} + \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{V.2f})$$

V.3.2. Équations de mouvements

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour déterminer les équations de mouvement [Beldjelili et al. 2016, Besseghier et al.2017, Abdelaziz et al. 2017, Avcar and Mohammed 2018]

$$0 = \int_0^t (\delta U - \delta K) dt \quad (V.3)$$

Où (δU) est la variation de l'énergie de déformation et (δK) est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par : [Al-Basyouni et al. 2015, LarbiChaht et al. 2015, Ahouel et al. 2016, Draiche et al. 2016, Benahmed et al. 2017, Benchohra et al. 2018, Yazid et al. 2018, Mokhtar et al.2018, Bourada et al. 2018]

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA = 0 \end{aligned} \quad (V.4)$$

Où A est la surface supérieure et les contraintes résultantes M et S sont définies par :

$$M_i^b = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i z dz, \quad (i = x, y, xy), \quad (V.5a)$$

$$M_i^s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] z dz \quad (i = x, y, xy) \quad (V.5b)$$

$$V_i^s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] dz \quad (i = xz, yz) \quad (V.5c)$$

$$V_z^s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \left(\frac{10}{h^2} \right) z dz \quad (V.5d)$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque est exprimée par (Bourada et al. 2015, Mahi et al. 2015, Bennoun et al. 2016, Bounouara et al. 2016, Bouafia et al. 2017, Hachemi et al. 2017, Boukhlif et al. 2019, Bourada et al. 2019, Draoui et al. 2019)

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} \int_A [\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}] \rho(z_{ns}) dA dz_{ns} \\
 &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta\dot{w}_b + \delta\dot{w}_s)] \right. \\
 &\quad \left. + I_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial\delta\dot{w}_b}{\partial y} \right) + \frac{I_2}{84} \left(\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial\delta\dot{w}_s}{\partial y} \right) \right\} dA
 \end{aligned} \tag{V.6}$$

Où le point exposant indique la dérivée par rapport aux variables temps et I_0, I_2 sont l'inertie de masse définie par :

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2) \rho(z) dz \tag{V.7}$$

En substituant les expressions de δU et δK de l'équation (V.4) et (V.6) dans l'équation (V.3), et après avoir intégré par partie et collecté les coefficients de $\delta w_b, \delta w_s$ et $\delta \varphi$, les équations gouvernantes suivantes pour l'étude de la propagation des ondes de la plaque sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta w_b : & -\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = \\
 & I_0 \left(\ddot{w}_b + \dot{w}_s + \frac{5}{6}\ddot{\varphi} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x\partial y} \right) \\
 \delta w_s : & -\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - \frac{\partial V_{xz}^s}{\partial x} - \frac{\partial V_{yz}^s}{\partial y} = \\
 & I_0 \left(\ddot{w}_b + \dot{w}_s + \frac{5}{6}\ddot{\varphi} \right) - \frac{I_2}{84} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x\partial y} \right) \\
 \delta \varphi : & -V_z^s - \frac{\partial V_{xz}^s}{\partial x} - \frac{\partial V_{yz}^s}{\partial y} = \frac{5}{6} I_0 (\ddot{w}_b + \dot{w}_s + \ddot{\varphi})
 \end{aligned} \tag{V.8}$$

L'objectif de ce travail est d'étudier la propagation des ondes des plaques anisotropes. En générale les relations contrainte- déformation peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (V.9)$$

Les constantes élastiques utilisées dans le présent travail du matériau triclinique et orthotrope sont choisis selon Batra et al. (2004)

$$Triclinic = \begin{bmatrix} 98.84 & 53.92 & 50.78 & 0 & 0 & 0.03 \\ 53.92 & 99.19 & 50.78 & 0 & 0 & 0.03 \\ 50.78 & 50.78 & 87.23 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 21.14 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.07 & 21.10 & 0 \\ 0.03 & 0.03 & 0.02 & 0 & 0 & 22.55 \end{bmatrix} GPa \quad (V.10)$$

$$Orthotropic = \begin{bmatrix} 98.84 & 53.92 & 50.78 & 0 & 0 & 0 \\ 53.92 & 99.19 & 50.78 & 0 & 0 & 0 \\ 50.78 & 50.78 & 87.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.14 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.07 & 21.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22.55 \end{bmatrix} GPa \quad (V.11)$$

Maintenant, suivant les équations (V.2) et (V.9) les contraintes en fonction du terme de déplacement sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = z & \left(-C_{14} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{34}\varphi}{h^2} - 2C_{46} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{24} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\ & + f(z) \left(-C_{24} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{14} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{46} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\ & + g(z) \left(C_{45} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{44} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (V.12d)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = z & \left(-C_{15} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{35}\varphi}{h^2} - 2C_{56} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{25} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\ & + f(z) \left(-C_{25} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{15} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{56} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\ & + g(z) \left(C_{55} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{45} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (V.12e)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} = & z \left(-C_{16} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{36}\varphi}{h^2} - 2C_{66} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{26} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + f(z) \left(-C_{26} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{16} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{66} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + g(z) \left(C_{56} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{56} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{46} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.12f}$$

Maintenant en intégrant les équations (V.7 à V.12) suivant la relation (V.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
 M_x^b = & A_1 \left(-C_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{13}\varphi}{h^2} - 2C_{16} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_2 \left(-C_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{16} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_3 \left(C_{15} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{14} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13a}$$

$$\begin{aligned}
 M_y^b = & A_1 \left(-C_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{23}\varphi}{h^2} - 2C_{26} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_2 \left(-C_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{26} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_3 \left(C_{25} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{25} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{24} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{24} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13b}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy}^b = & A_1 \left(-C_{16} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{36}\varphi}{h^2} - 2C_{66} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{26} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_2 \left(-C_{26} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{16} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{66} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_3 \left(C_{56} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{56} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{46} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13c}$$

$$\begin{aligned}
 M_x^s = & A_2 \left(-C_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{13}\varphi}{h^2} - 2C_{16} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_4 \left(-C_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{16} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_5 \left(C_{15} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{14} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13d}$$

$$\begin{aligned}
 M_y^s = & A_2 \left(-C_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{23}\varphi}{h^2} - 2C_{26} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_4 \left(-C_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{26} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_5 \left(C_{25} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{25} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{24} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{24} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13e}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy}^s = & A_2 \left(-C_{16} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{36}\varphi}{h^2} - 2C_{66} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{26} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_4 \left(-C_{26} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{16} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{66} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_5 \left(C_{56} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{56} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{46} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13f}$$

$$\begin{aligned}
 V_{yz}^s = & A_3 \left(-C_{14} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{34}\varphi}{h^2} - 2C_{46} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{24} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_5 \left(-C_{24} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{14} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{46} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_6 \left(C_{45} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{44} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13g}$$

$$\begin{aligned}
 V_{xz}^s = & A_3 \left(-C_{15} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{35}\varphi}{h^2} - 2C_{56} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{25} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_5 \left(-C_{25} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{15} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{56} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_6 \left(C_{55} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{45} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13h}$$

$$\begin{aligned}
 V_z^s = & A_1 \frac{10}{h^2} \left(-C_{13} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{33}\varphi}{h^2} - 2C_{36} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{23} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_2 \frac{10}{h^2} \left(-C_{23} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{13} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{36} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_3 \frac{10}{h^2} \left(C_{35} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{35} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{34} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{34} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{V.13i}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz, A_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z f(z) dz, A_3 = \int_{-h/2}^{h/2} z g(z) dz, A_4 = \int_{-h/2}^{h/2} [f(z)]^2 dz \\
 A_5 &= \int_{-h/2}^{h/2} f(z) g(z) dz, A_6 = \int_{-h/2}^{h/2} [g(z)]^2 dz
 \end{aligned} \tag{V.14}$$

Et :

$$f(z) = z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \quad g(z) = \left[\frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \tag{V.15}$$

$f(z)$ est la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque.

En considérant : les équations d'équilibre, les équations gouvernantes basées sur l'équation (V.13) pour étudier la propagation des ondes dans les plaques sont dérivées comme suit :

$$\begin{aligned}
& -A_1 \left(-C_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{10C_{13}}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2C_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - C_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& -A_2 \left(-C_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - C_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2C_{16} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} \right) \\
& -A_3 \left(C_{15} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + C_{15} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + C_{14} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + C_{14} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& -A_1 \left(-C_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{10C_{23}}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2C_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - C_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right) \\
& -A_2 \left(-C_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - C_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 2C_{26} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} \right) \\
& -A_3 \left(C_{25} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} + C_{25} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + C_{24} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} + C_{24} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \right) - \\
& 2A_1 \left(-C_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - \frac{10C_{36}}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2C_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - C_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} \right) \\
& -2A_2 \left(-C_{26} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - C_{16} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2C_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& -2A_3 \left(C_{56} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + C_{56} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + C_{46} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} + C_{46} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& = -I_2 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_0 \left(\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + \frac{5}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \\
& -A_2 \left(-C_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{10C_{13}}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2C_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - C_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& -A_4 \left(-C_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - C_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2C_{16} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} \right) \\
& -A_5 \left(C_{15} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + C_{15} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + C_{14} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + C_{14} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& -A_2 \left(-C_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{10C_{23}}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2C_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - C_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right) \\
& -A_4 \left(-C_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - C_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 2C_{26} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} \right) \\
& -A_5 \left(C_{25} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} + C_{25} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + C_{24} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} + C_{24} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \right)
\end{aligned} \tag{V.16a}$$

$$\begin{aligned}
& -A_3 \left(-C_{14} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - \frac{10C_{34}}{h^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2C_{46} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - C_{24} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \right) \\
& -A_5 \left(-C_{24} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - C_{14} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - 2C_{46} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& -A_6 \left(C_{45} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + C_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \\
& -A_3 \left(-C_{15} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - \frac{10C_{35}}{h^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2C_{56} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - C_{25} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^2 \partial x} \right) \\
& -A_5 \left(-C_{25} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2 \partial x} - C_{15} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - 2C_{56} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& -A_6 \left(C_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + C_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + C_{45} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + C_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \\
& -2A_2 \left(-C_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - \frac{10C_{36}}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2C_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - C_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} \right) \\
& -2A_4 \left(-C_{26} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^3 \partial x} - C_{16} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2C_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& -2A_5 \left(C_{56} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + C_{56} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + C_{46} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} + C_{46} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& = -\frac{I_2}{84} \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_0 \left(\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + \frac{5}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{V.16b}$$

$$\begin{aligned}
& -A_1 \frac{10}{h^2} \left(-C_{13} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{10C_{33}\varphi}{h^2} - 2C_{36} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - C_{23} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \\
& -A_2 \frac{10}{h^2} \left(-C_{23} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - C_{13} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2C_{36} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
& -A_3 \frac{10}{h^2} \left(C_{35} \frac{\partial w_s}{\partial x} + C_{35} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{34} \frac{\partial w_s}{\partial y} + C_{34} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
& -A_3 \left(-C_{14} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - \frac{10C_{34}}{h^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2C_{46} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - C_{24} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \right) \\
& -A_5 \left(-C_{24} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - C_{14} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - 2C_{46} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& -A_6 \left(C_{45} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + C_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \\
& -A_3 \left(-C_{15} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - \frac{10C_{35}}{h^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2C_{56} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - C_{25} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^2 \partial x} \right) \\
& -A_5 \left(-C_{25} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2 \partial x} - C_{15} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - 2C_{56} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& -A_6 \left(C_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + C_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + C_{45} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + C_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \\
& = \frac{5}{6} I_0 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{V.16c}$$

Maintenant pour étudier la propagation des ondes dans les plaques anisotropes, les hypothèses suivantes sont déduites suivant : Nami and Maziar (2014), Yahia *et al.* (2015), Karami *et al.* (2017), Karami *et al.* (2018d) and Karami *et al.* (2019bc).

$$\left\{ \begin{array}{l} w_b(x, y, t) \\ w_s(x, y, t) \\ \varphi(x, y, t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} W_b \exp[i(k_1 + k_2 - \omega t)] \\ W_s \exp[i(k_1 + k_2 - \omega t)] \\ \Phi \exp[i(k_1 + k_2 - \omega t)] \end{array} \right\} \tag{V.17}$$

Où K_1 et K_2 sont les nombres des ondes dans les directions x et y respectivement.

La substitution de l'équation (V.17) dans l'équation (V.16) conduit au problème suivant :

$$\left([K] - \omega^2 [M] \right) \{\Delta\} = \{0\} \tag{V.18}$$

Avec :

$$\{\Delta\} = \{w_b, w_s, \Phi\}^T, \quad (\text{V.19a})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{V.19b})$$

Où :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_1 \left(2C_{12}k_1^2 k_2^2 + 4C_{26}k_1 k_2^3 + C_{22}k_2^4 \right. \\ &\quad \left. + 4C_{16}k_1^3 k_2 + 4C_{66}k_1^2 k_2^2 + C_{11}k_1^4 \right) \\ a_{12} &= A_3 \left(IC_{12}k_1^3 + IC_{14}k_2 k_1^2 + 2IC_{56}k_1^2 k_2^4 \right. \\ &\quad \left. + 2IC_{46}k_1 k_2^2 + IC_{25}k_1 k_2^2 + IC_{24}k_2^3 \right) \\ &\quad + A_2 \left(2C_{12}k_1^2 k_2^2 + 4C_{26}k_1 k_2^3 + C_{22}k_2^4 + 4C_{16}k_1^3 k_2 + C_{11}k_1^4 \right) \\ a_{13} &= A_3 \left(IC_{15}k_1^3 + IC_{14}k_2 k_1^2 + 2IC_{56}k_1^2 k_2 \right. \\ &\quad \left. + 2IC_{46}k_1 k_2^2 + IC_{25}k_1 k_2^2 + IC_{24}k_2^3 \right) \\ &\quad + A_1 \left(-\frac{10C_{13}k_1^2}{h^2} - \frac{10C_{23}k_2^2}{h^2} - \frac{20C_{36}k_1 k_2}{h^2} \right) \\ a_{21} &= A_3 \left(-IC_{24}k_2^3 - IC_{14}k_2 k_1^2 - 2IC_{46}k_1 k_2^2 \right. \\ &\quad \left. - IC_{25}k_1 k_2^2 - IC_{15}k_1^3 - IC_{15}k_1^3 - 2IC_{56}k_1^2 k_2 \right) \\ &\quad + A_2 \left(2C_{12}k_1^2 k_2^2 + 4C_{26}k_1 k_2^3 + C_{22}k_2^4 \right. \\ &\quad \left. + 4C_{16}k_1^3 k_2 + 4C_{66}k_1^2 k_2^2 + C_{11}k_1^4 \right) \\ a_{22} &= A_4 \left(2C_{12}k_1^2 k_2^2 + 4C_{26}k_1 k_2^3 + C_{22}k_2^4 \right. \\ &\quad \left. + 4C_{16}k_1^3 k_2 + 4C_{66}k_1^2 k_2^2 + C_{11}k_1^4 \right) \\ &\quad + A_6 \left(2C_{45}k_1 k_2 + C_{44}k_2^2 + C_{55}k_1^2 \right) \\ a_{23} &= A_2 \left(-\frac{10C_{13}k_1^2}{h^2} - \frac{10C_{23}k_2^2}{h^2} - \frac{20C_{36}k_1 k_2}{h^2} \right) \\ &\quad + A_3 \left(\frac{10IC_{34}k_2}{h^2} + \frac{10IC_{35}k_1}{h^2} \right) \\ &\quad + A_5 \left(IC_{15}k_1^3 + IC_{14}k_2 k_1^2 + 2IC_{56}k_1^2 k_2 \right. \\ &\quad \left. + 2IC_{46}k_1 k_2^2 + IC_{25}k_1 k_2^2 + IC_{24}k_2^3 \right) \\ &\quad + A_6 \left(2C_{45}k_1 k_2 + C_{44}k_2^2 + C_{55}k_1^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

$$a_{31} = A_3 \begin{pmatrix} -IC_{24}k_2^3 - IC_{14}k_2 k_1^2 - 2IC_{46}k_2^2 k_1 \\ -IC_{25}k_1 k_2^2 - IC_{15} k_1^3 - 2IC_{56}k_1^2 k_2 \end{pmatrix} - 10A_4 \left(\frac{C_{13}k_1^2}{h^2} + \frac{2C_{36}k_1 k_2}{h^2} + \frac{C_{23}k_2^2}{h^2} \right)$$

$$a_{32} = -10A_2 \left(\frac{C_{13}k_1^2}{h^2} + \frac{2C_{36}k_1 k_2}{h^2} + \frac{C_{23}k_2^2}{h^2} \right) - 10A_3 \left(\frac{IC_{35}k_1}{h^2} + \frac{IC_{34}k_2}{h^2} \right) + A_5 \begin{pmatrix} -IC_{24}k_2^3 - IC_{14}k_2 k_1^2 - 2IC_{46}k_2^2 k_1 \\ -IC_{25}k_1 k_2^2 - IC_{15} k_1^3 - 2IC_{56}k_1^2 k_2 \end{pmatrix} + A_6 (2C_{45}k_1 k_2 + C_{44} k_2^2 + C_{55}k_1^2)$$

$$a_{33} = A_1 \frac{100C_{33}}{h^4} + A_3 \begin{pmatrix} \frac{10IC_{35}k_1}{h^2} + \frac{10IC_{34}k_2}{h^2} \\ -\frac{10(IC_{35}k_1 + IC_{34}k_2)}{h^2} \end{pmatrix} + A_6 (2C_{45}k_1 k_2 + C_{44} k_2^2 + C_{55}k_1^2)$$

$$m_{11} = -(I_0 + I_2 (k_1^2 + k_2^2))$$

$$m_{12} = -I_0 = m_{21}$$

$$m_{22} = -\left(I_0 + \frac{1}{84} I_2 (k_1^2 + k_2^2) \right)$$

$$m_{33} = -\frac{5}{6} I_0$$

V.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSION

Dans cette partie, et afin d'obtenir les résultats des fréquences et des vitesses, il faut passer par la résolution d'un système à trois équations pour le problème des valeurs propres; la plaque anisotrope est composée d'un matériau triclinique et orthotrope avec $\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$ et $\nu = 0,3$, les constantes élastiques sont données dans les Equations (V.10) et (V.11), selon la référence Batra et al (2004). L'épaisseur de la plaque anisotrope est prise en tant que $h = 0,01\text{m}$.

Divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle, pour étudier la propagation des ondes dans ce type de plaques.

Dans le tableau V.1, les fréquences circulaires basées sur notre méthodologie sont comparées aux résultats obtenus par Hooman et Maziar (2017), basés sur la théorie de cisaillement trigonométrique des plaques anisotropes.

Tableau V.1 : Comparaison des fréquences circulaires des matériaux tricliniques et orthotropes ($h = 0.01m$, $k_1 = k_2$)

		Aminipour et Janghorban (2017)				Présente théorie		
		ω_w	ω_Q	ω_ψ	ω_ξ	ω_{wb}	ω_{ws}	ω_ϕ
Triclinic	$k_1 = 9$	1399.54	518191.50	521359.40	1180042.90	1395.433185	521437.4910	2598788.023
	$k_1 = 18$	5544.14	519564.76	526888.43	1179167.44	5529.975058	526266.3894	2599023.272
Orthotropi	$k_1 = 9$	1399.16	519028.40	520523.85	1180043.14	1395.054179	520579.5699	2598787.284
	$k_1 = 18$	5542.51	520419.32	526034.88	1179168.44	5528.354161	525412.0634	2599022.309

Les résultats des fréquences de vibration due à la flexion et cisaillement pour les différents nombres d'ondes de propagation sont en bon accord avec ceux de Aminipour et Janghorban (2017). On note que dans le modèle actuel, le nombre d'inconnus dans le champ de déplacement s'élève à 3, et par conséquent il est impératif de résoudre un système d'équations de 3x3, alors que le nombre d'inconnus s'élevait à 4 dans le modèle de Aminipour et Janghorban (2017).

Il convient également de noter que cette théorie permet d'étudier les plaques épaisses, car le gauchissement a été pris en compte dans la fonction de déformation de cisaillement raffinée.

Le tableau V.2 montre également une comparaison entre les vitesses de phases pour les plaques orthotropes et tricliniques pour $k_1 \neq 0$ seulement $k_2 = 0$. Lorsque seulement le nombre d'ondes

est pris en compte, les résultats sont également en bon accord en ce qui concerne les vitesses de phase, de flexion et de cisaillement pour les différentes nombre d'ondes de propagation dans la direction « x ». Si toutefois, le nombre d'ondes selon la coordonnée « y » est négligé ; on constate que les différences entre les résultats pour les matériaux tricliniques et orthotropes s'avèrent négligeables.

Tableau V.2 : Comparaison des vitesses de phase des matériaux triclinique et orthotrope

		Aminipour and Janghorban (2017)				Présent		
		ϖ_w	ϖ_Q	ϖ_ψ	ϖ_ξ	ϖ_{wb}	ϖ_{ws}	ϖ_ϕ
Triclinic	$k_1 = 7$	60.5422748	74015.22	74260.88	168606.713874	60.35877991	74171.15697	371247.6023
	$k_1 = 22$	188.615437	23637.59	23822.70	53612.025283	188.1098465	23797.22404	118133.7222
Orthotr	$k_1 = 7$	60.5422753	74133.60	74142.71	168606.713870	60.35877991	74171.15697	371247.6023
	$k_1 = 22$	188.615451	23646.22	23814.12	53612.025269	188.1098465	23797.22404	118133.7222

$$(h = 0.01\text{m}, \varpi = \frac{\omega}{k} \text{ rad/s.m}), k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, k_2 = 0$$

Les graphes sur la figure (V.1) représentent les effets de nombre d'ondes et de l'épaisseur, sur les fréquences d'une plaque triclinique rectangulaire.

En observant la figure (V.1), il est clair qu'avec l'augmentation du nombre de modes, les fréquences augmentent. Cependant, on constate que l'évolution des fréquences selon le nombre d'onde, relative au mode de flexion (ω_b), est tout à fait significative, alors qu'elle est plus faible et négligeable pour le mode de cisaillement (ω_s) ; et ce au moins pour les valeurs de nombres d'ondes considérées ici. On peut aussi conclure à partir des mêmes graphes, que l'épaisseur de la plaque est un paramètre particulièrement important, et qui ne peut être ignoré dans l'étude du comportement de la propagation des ondes.

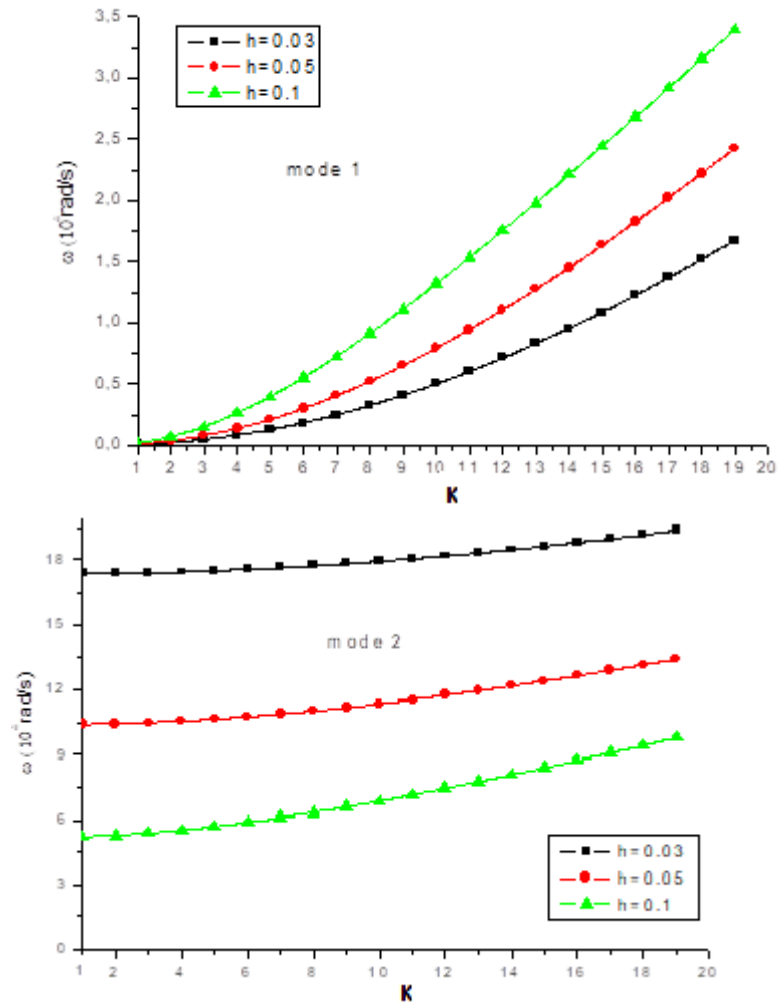


Figure V.1 : L'effet du nombre d'onde et de l'épaisseur sur les fréquences des plaques rectangulaires triclinique ($k_1 = k_2$)

Dans la figure V.2, les influences de l'épaisseur et du nombre d'ondes sur la vitesse de phase d'une plaque triclinique sont présentées. Il a été démontré que la vitesse de phase relative du mode de flexion (ω_b) augmente avec l'augmentation de nombre d'ondes ; d'autre part, pour le mode de cisaillement (ω_s), l'augmentation du nombre d'ondes entraîne une diminution de la vitesse de phase.

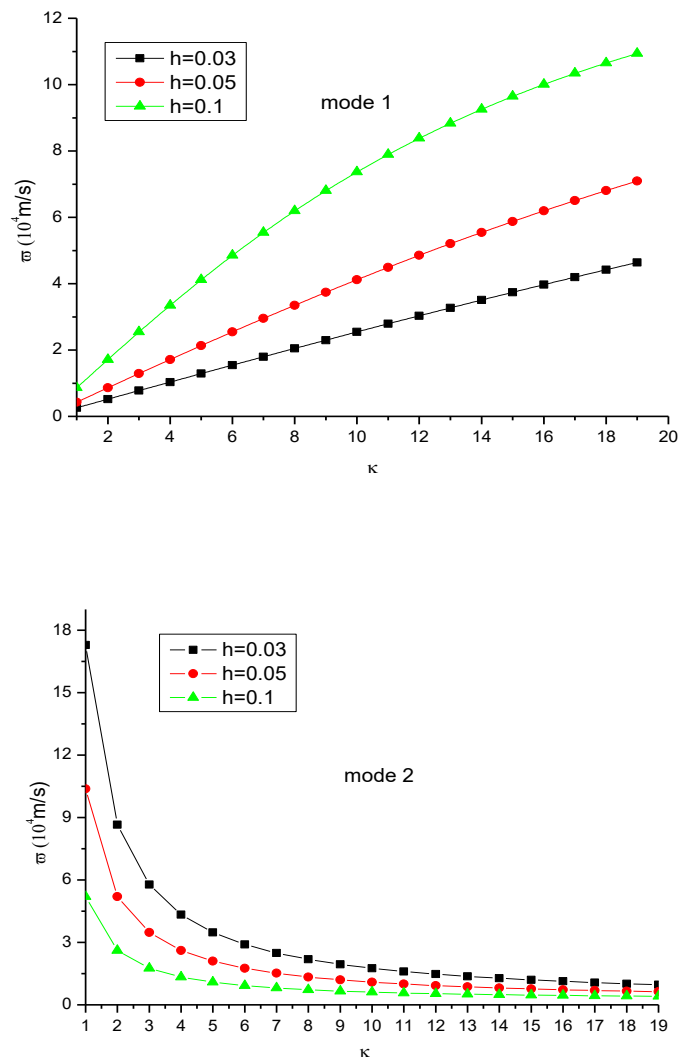


Figure V.2 : L'effet du nombre d'onde et l'épaisseur sur la vitesse de phases des plaques

rectangulaires tricliniques $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, k_2 = 0$

V.5. CONCLUSION

Dans ce travail, les fréquences naturelles et la propagation des ondes dans des plaques triclinique et orthotrope sont étudiées en utilisant une théorie de la déformation de cisaillement (quasi-3d HSDT). Le nombre de variables dans cette théorie est de 3 seulement, ce qui permet de réduire les équations de mouvements et simplifier le problème étudié. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution trigonométrique des contraintes de cisaillement, suivant l'épaisseur de la plaque tout en remplissant les conditions de nullité des contraintes sur les bords libres, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement.

Les équations de mouvement sont dérivées en utilisant le Principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les relations de la dispersion. Les fréquences fondamentales et la vitesse de phase sont trouvées en résolvant un problème aux valeurs propres,

Une étude comparative a été réalisée entre un matériau triclinique et un autre orthotrope. Il peut être particulièrement remarquable qu'il n'est pas nécessaire de considérer le concept triclinique au lieu du concept orthotrope pour le calcul des fréquences et les vitesses de phase, en particulier lorsque les ondes sont considérées dans une seule direction.

En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée, donne des solutions qui correspondent à celles obtenues avec d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

Conclusion Générale

Dans ce travail, l'étude de la flexion et du flambement des plaques fonctionnellement graduées, et de la vibration libre et de propagation des ondes des plaques tricliniques et orthotropes a été présentée en utilisant de nouvelles théories de déformation de cisaillement 2D, et quasi 3D avec un nombre réduit de variables inconnues. Les modèles développés ne nécessitent pas l'introduction des facteurs de correction de cisaillement, car les contraintes de cisaillement sont paraboliques à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces : inférieure et supérieure de la plaque.

Les équations de mouvement sont obtenues à partir des principes des travaux virtuels et d'Hamilton, et résolues par la méthode de Navier et des relations de dispersion. Des solutions analytiques des : déplacements, contraintes, charge critique du flambement et fréquences, sont déterminées pour des plaques anisotropes simplement appuyées.

Nous concluons que :

- Les fréquences augmentent avec l'augmentation du nombre d'ondes,
- L'épaisseur de la plaque est un paramètre important qui ne peut être ignoré dans l'étude du comportement de la propagation des ondes,
- La vitesse de phase relative du mode de flexion (ω_b), augmente avec l'augmentation du nombre d'ondes ; d'autre part, pour le mode de cisaillement (ω_s), l'augmentation du nombre d'ondes entraîne une diminution de la vitesse de phase,
- Le déplacement plan nul ($u = 0$) pour les valeurs dont l'indice matériel est petit, est situé près du plan médian de la plaque, mais à mesure que la valeur de l'indice matériel augmente, ce déplacement plan nul se déplace vers la surface supérieure de la plaque,
- La valeur du déplacement axial maximal non-dimensionnel diminue à mesure que l'indice matériel augmente,
- Les valeurs de la contrainte normale maximale non dimensionnelle et de la contrainte de cisaillement, augmentent à mesure que l'indice matériel augmente.
- La flèche adimensionnelle augmente avec l'augmentation des valeurs de l'indice matériel.
- Les charges critiques de flambement diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel.

CONCLUSION GENERALE

- La plaque sous l'action de la compression uniaxiale, présente une charge critique de flambement plus élevée, que quand elle est sous celle de la compression biaxiale.

Finalement, nous pouvons dire que les présentes théories 2D et quasi-3D, sont adéquates pour résoudre les problèmes de : la flexion, le flambement, la vibration libre et la propagation des ondes des plaques fonctionnellement graduées, tricliniques et orthotropes.

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse de doctorat peut être développé et enrichi. Nous envisageons par exemple, en perspective, d'appliquer le présent modèle pour différentes formes de structures épaisses, et modérément épaisses, avec plusieurs conditions aux limites, sous différents types de chargement (thermique et mécaniques).

Référence bibliographiques

Abdelaziz, H.H., Meziane, M.A.A, Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabri, A.S. (2017), “An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions”, *Steel Compos Struct.*, **25**(6), 693-704.

Abrate, S. (2008), “Functionally graded plates behave like homogeneous plates”, *Composites Part B: Engineering.*, **39**(1), 151-158.

Ait Atmane, H. (2011), “Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement», *thèse de doctorat, Université Djilali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.*

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, EA. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *Int J Mech Mater.*, **6**(2),113–121.

Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2016), “Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel Compos. Struct.*, **20**(5), 963-981.

Akavci, SS. (2010),“Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates”, *Mech Compos Mater.*,**46**(2),215–626.

Akavci SS, Tanrikulu AH. (2008), “Buckling and free vibration analyses of laminated composite plates by using two new hyperbolic shear-deformation theories”, *Mech Compos Mater*;44 (2):145–54.

Akbarzadeh, AH., Zad, SH., Eslami, MR., Sadighi, M. (2011), “Mechanical behaviour of functionally graded plates under static and dynamic loading”. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci.*,**225**(2), 326–333.

Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos. Struct.*,**125**, 621-630.

Alinia, MM., Ghannadpour, SAM. (2009), “Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates”, *Compos Struct.*, **88**(3),354–359.

Ambartsumyan, S.A. (1970), “Theory of anisotropic plates”, *Westport, Connecticut: Technomic Publishing Company.*

Aminipour, H., Janghorban, M. (2017), "Wave propagation in anisotropic plates using trigonometric shear deformation theory", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **24**(13), 1135-1144.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Arya H, Shimpi RP, Naik NK. (2002), "A zigzag model for laminated composite beams", *Compos Struct*;56(1):21–4 URL

Atarashiya K., Ishida Y., Nagai T., in: Holt J.B., Koizumi M., Hirai T., Munir Z.A. (1993) "Ceram. Trans.34, Functionally Gradient Materials", *American Ceramic Society, Westerville, OH.*, 1993, pp. 141–148.

Aydogdu M. (2009), "a new shear deformation theory for laminated composite plates", *Compos Struct*; 89(1):94-101.

Avcar, M. and Mohammed, W.K.M. (2018), "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation", *Arab. J. Geosci.*, **11**,232.

Bakora, A. and Tounsi, A, (2015)," Thermo-mechanical post-buckling behavior of thick functionally graded plates resting on elastic foundations", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **56**(1), 85-106.

Bao, G., Wang, L. (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J; Solids Structures*, **32** (19), 2853–2871.

Baron and Naili. (2008), "Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide", *Compte Rendue Mécanique.*, **336** (9), 722–730.

Batra, R. C., L. F. Qian, and L. M. Chen. (2004), "Natural frequencies of thick square plates made of orthotropic, trigonal, monoclinic, hexagonal and triclinic materials." *Journal of sound and vibration* 270, no. 4: 1074-1086.

Batoz , J.L. (1990),"Modélisation des structures par éléments finisPoutres et Plaques",*Presses de l'Université Laval.*, **2**.

Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Struct. Syst.Int. J.*, **18**(4). 755-786.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position", *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265–275.

Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2017), "An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities", *Earthquakes and Structures*, **13**(3), 255-265.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Benahmed, A., Houari, M.S.A, Benyoucef, S, Belakhdar, K, Tounsi, A. (2017), "A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation", *Geomechanics and Engineering*, **12**(1), 9-34.
- Benatta, M. A. (2011), "Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé", *thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie*.
- Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R. (2018), "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Struct. Eng. Mech.*, **65**(1), 19-31
- Benien, H., Meyer, M. & Suchentrunk, R. (1990), "Application of Functional Gradient Materials in the Aerospace Industry", in *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, p. 135-38.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2016), "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **23**(4), 423 – 431.
- Berthelot, J. M. (2010), "Mécanique des Matériaux et structures composites", *Institut supérieur des matériaux et mécaniques avancés, le Mans, France*.
- Berthelot, J. M. (1992), "Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures". *Paris, Masson*, 615 p, 1992.
- Bessaim, A., Hourri, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. (2013), "A new higher order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets", *J. Sandw. Struct. Mater.*, **15**, 671-703.
- Besseghier, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Mahmoud, S. R. (2017), "Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory", *Smart Structures and Systems.*, **19**(6), 601-614.
- Bishop A., Lin C.Y., Navaratnam M., Rawlings R.D., McShane H.B. (1993), "A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process", *Journal of Materials Science Letters*; **12** (19): 1516-18.
- Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M, (1986), "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, **69**(8), 191-192.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bodaghi, M., Saidi, A. (2010), "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Appl. Math. Model.*, **34**(11), 3659-3673.
- Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M. S. A., Benzair, A., Tounsi, A. (2017), "A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams", *Smart Structures and Systems.*, **19**(2), 115-126.
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, EA., Megueni, A. (2010), "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach". *Comput Mater Sci* , **49**(4), 865–870.
- Bouaziz, O. (2011). "Potentiel des matériaux à gradient de propriétés pour applications nucléaires", 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, France.
- Bouchafa, M. (2011), "L'apport et l'utilisation des matériaux (FGM) dans la construction pour l'optimisation des contraintes thermiques", *thèse de doctorat, Université Djilali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.*
- Bouhadra, A. (2015), " Etude du comportement mécanique des plaques FGM ayant des coefficients de dilatation thermique variables à travers l'épaisseur", *thèse de doctorat, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.*
- Boukhari, A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), "An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates", *Struct. Eng. Mech.*, **57**(5), 837-859.
- Boukhelif, Z., Bouremana, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Tounsi, A., Al-Osta, M.A. (2019), "A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, (Accepted).
- Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation", *Steel Compos. Struct.*, **20**(2), 227-249
- Bourada, F., Amara, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates", *Structural Engineering and Mechanics*, **68**(6), 661-675.
- Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Azzaz, A., Zinata, A. and Tounsi, A. (2019), "Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory", *Wind and Structures.*, **28**(1), 19-30.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 409–423.
- Carrera, E.(2004) , “On the use of Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and Shells”,*Computers and Structures.*, **82**, 541-554.
- Carrera, E., Brischetto, S., Robaldo, A. (2008): Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *AIAA J.* 46(1), 194–203.
- Chakraverty, S. and Pradhan, K.K. (2014), “Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **36**, 132-156.
- Chen S.H. (2001), Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.
- Chen, C. S. (2005) , “Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate”, *Compos Struct.*,**68**(3), 295–302.
- Chen , C.S., Hsu, C.Y., Tzou, G.J. (2009), “Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **28**(10), 1215–1234.
- Chigasaki, M., Kojima, Y., Nakashima, S. & Fukaya, Y. (1990), “Partially Stabilized ZrO₂ and Cu FGM Prepared by Dynamic Ion Mixing Process”, *in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-SendaiJapan*, p.269-72.
- Chikh, A., Bakora, A., Heireche, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2016), “Thermo-mechanical postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on Pasternak elastic foundations using hyperbolic shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(4), 617-639.
- Couillault.G (2010), “Les composites a matrice métallique dans l’aéronautique et l’aérospatiale”, *Etude bibliographique, Ecole des mines de DOUAI* ,16-17.
- Draiche, K. (2015), “Contribution à l’analyse de la vibration des plaques composites comportant des patches”, *thèse de doctorat, Université Djilali Liabes, Sidi Bel Abbès, Algérie*.
- Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non homogeneous panel. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Di Sciuva, M. (1987), “An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates”, *Journal of Applied Mechanics.*, **54**, 589-596.
- Draiche, K., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates”, *Geomech. Eng.*, **11**(5), 671-690.
- Draoui, A., Zidour, M., Tounsi, A., Adim, B. (2019), “Static and dynamic behavior of nanotubes-reinforced sandwich plates using (FSDT)”, *Journal of Nano Research*, **57**, 117-135.
- Du, C., Li, Y., Jin, X. (2014), “Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells”, *Thin-Walled Struct.* **78**, 26–36.
- Ebrahimi, M.J., Najafizadeh, M.M. (2014), “Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells”, *Appl Math Model.*, **38**(1), 308–324.
- El Meiche N, Tounsi A, Ziane N, Mechab I, Adda Bedia EA. (2011), “A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Int J Mech Sci*; **53**(4):237–47.
- Eltaher, M.A., Khater, M.E., Park, S., Abdel-Rahman, E. and Yavuz, M. (2016), “On the static stability of nonlocal nanobeams using higher-order beam theories”, *Adv. Nano Res., Int. J.*, **4**(1), 51-64.
- Edalati, K., Kermani, A., Seiedi, M., & Movafeghi, A. (2006), "Defect detection in thin plates by ultrasonic lamb wave techniques", *International Journal of Materials and Product Technology*, **27**(3-4), 156-172.
- Fourn, H., AitAtmane, H., Bourada, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates", *Steel and Composite Structures*, **27**(1), 109-122.
- Ganapathi, M., Prakash, T., Sundararajan, N. (2006), “Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads”, *J Eng Mech.*, **132**(8), 902–905.
- Glossaire (2006) Des Matériaux Composites - CARMA - Actualisation octobre 2006.
- Gornet, L. (2008), “Généralités sur les matériaux composites”, ECN « *Ecole Nationale Centrale de Nantes* » France.
- Grover N, Singh BN, Maiti DK. (2013), “New nonpolynomial shear-deformation theories for structural behavior of laminated-composite and sandwich plates”, *AIAA J*; **51**(8):1861–71.
- Grover N, Maiti D, Singh B. (2013), “A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates”, *Compos Struct*; **95**:667–75.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M.S.A., Bourada, A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2017), "A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, **25**(6), 717-726. Hadji, L., Atmane, H.A.

Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Ait Amar Meziane, M., Tlidji, Y. and Adda Bedia, E.A. (2016), "Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(2), 315-325.

Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 235 – 253.

He, L.H. (1994), "A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces", *Int J Solids Structures*, **31**(5), 613-627.

Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *ASCE J. Eng. Mech.*, **140**, 374-383.

Herrmann M, Sobek W (2017) —Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components. *Struct Concr*, 18(1), 54-66.

Hirai T. and Chen L. (1999), Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, *Materials Science Forum*, 308–311,509–514.

Hosseini-Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H., Omid, M.(2010), " Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory". *Appl Math Model.* **34**(5),1276–1291.

Hu, Y., Zhang ,X. (2011), "Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate". *Mech Based Des Struct Mach.*,**39**(3),367–377.

Icardi, U.(2001), "Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sub laminates approximations". *Composites: Part B.*, **32**, 343-354.

Javaheri, R., Eslami, M. (2002), "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading", *J. Appl. Math. Mech.*, **82**(4), 277-283.

Kant, T., Swaminathan, K. (2001), "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory", *Compos Struct.*, **53**(1), 73–85.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Kant, T., Swaminathan, K. (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", *Composite Structure.*, **56** (4), 329.
- Kaczkowski Z. (1968), "Plates-statistical calculations", *Warsaz: Arkady*.
- Karama, M., Afaq, KS., Mistou, S. (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures.*, **40** (6), 1525-1546.
- Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018b), "Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles", *Steel and Composite Structures*, **27**(2), 201-216.
- Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2018c), "Galerkin's approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions", *Engineering with Computers*, (In press).
- Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2018d), "Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory", *Thin-Walled Structures*, **129**, 251–264.
- Karami, B., Janghorban, M., Tounsi, A. (2017), "Effects of triaxial magnetic field on the anisotropic nanoplates", *Steel and Composite Structures*, **25**(3), 361-374
- Kiani, Y., Bagherizadeh, E., Eslami, MR. (2011), "Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions)", *ZAMM, J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech.*, **91**(7), 581–93.
- .Kim, KD., Lomboy, GR., Han, SC.(2008), "Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element", *J Compos Mater.*, **42**(5), 485–511.
- Kim, S.E., Thai, H.T., Lee, J. (2009), "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", *Thin-Walled Structures*, **47**, 455–462.
- Kirchhoff, G.R. (1850), "Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, **40**, 51-88.
- Koizumi, M. (1992), "Recent Progress of functionally graded materials in Japan", *Ceram. Eng. Sci. Pro.*, **13** (7-8), 333-347.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Kokini, K., Takeuchi, Y. (1990), “Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads”, *In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan.*, 31-36.
- Kulkarni, K., Singh, B.N., Maiti, D.K. (2015), “analytical solution for bending and buckling analysis of functionally graded plates using inverse trigonometric shear deformation theory”, *Composite Structures* 134 (2015) 147–157.
- Lanhe, W (2004), “Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM Plate”, *Compos Struct.*, **64**(2), 211–218.
- Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 425-442.
- Leushake U., Winter A.N., Rabin B.H., Corff B.A., in: Kaysser W.A. (1998), *Functionally Graded Materials Proceedings of the 5 Proceedings of the 5 International Symposiums on FGM*, Trans Tech Publications, Switzerland, p. 13–18.
- Levinson, M. (1981), “A new rectangular beam theory”, *J. Sound Vib.*, **74**, 81 –87.
- Levinson, M., (1980), “An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates”, *Mech Res Commun.*, **7**(6), 343–350.
- Levy, M. (1877), “Memoire sur la theorie des plaques elastiques planes”, *J Math Pures Appl.*, 219-306.
- Lo, KH., Christensen. R.M., Wu. E.M. (1977), “A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates”, *J Appl Mech.*, **44**(4), 663–668.
- Lostec L. (1997), “Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l’université de Limoges, France.
- Loy, CT., Lam, KY., Reddy, JN. (1999), “Vibration of functionally graded cylindrical shells”, *Int J Mech Sci*”, **41**(3), 309–324.
- Lucchini, E., Sbaizero, O. (1995), “Alumina/Zirconia Multilayer composites obtained by centrifugical Consolidation”, *J. European Ceram. Soc.*, Vol. 15, p. 97581.
- Mahdavian, M. (2009), “Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading”, *J Solid Mech.*, **1**(3), 213–225.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2489–2508.

Mahi, A., Bedia, EA., Tounsi, A. (2014), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded sandwich and laminated composite plates”, *Appl Math Model* ,[http:// dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045](http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045).

Mahi A, Adda EA, Bedia, Tounsi A. (2015) “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”. *Appl Math Model*; 39 (9):2489–508.

Mantari, JL., Bonilla, EM, Guedes Soares, C. (2014), “A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates”, *Compos B Eng.*,**60**,319–328.

Mantari, JL., Granados, EV. (2015), “A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates”, *Thin-Walled Structures*, **90**, 150–158.

Mantari JL, Granados E, Guedes Soares C. (20154), “Vibrational analysis of advanced composite plates resting on elastic foundation”, *Compos Part B: Eng* 2014;66:407–19.

Mantari, JL., Guedes Soares, C. (2012), “Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory”,*Compos Struct* .,**94**(6),1991–2000.

Mantari, JL5., Guedes Soares, C.(2012), “Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory”,*Compos Struct.*,**94**(8), 2640–2656.

Mantari, JL., Guedes Soares, C.(2013), “ Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates”,*Compos Struct.*,**96**,545–553.

Mantari, JL., Oktem, AS., Guedes Soares, C. (2011), “Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher order shear deformation theory”, *Compos Struct.*,**94**(1),37–49.

Mantari, JL., Oktem., AS., Guedes Soares, C (2012),“A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates”, *Int J Solids Struct.*, **49**(1),43–53.

Mantari J, Oktem A, Guedes Soares C. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Compos Part B: Eng* 2012;43(3):1489–99.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Mantari JL, Guedes Soares C. (2012) "Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates", *Compos Struct*;94:2561–75.
- Mantari JL, Oktem AS, Soares OG. (2012) "Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory", *Compos Struct*;94:714–23.
- Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. (2012) "Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory ». *Compos Struct*;94(6):1991–2000.
- Maio, L., Memmolo, V., Ricci, F., Boffa, N.D., Monaco, E., Pecora, R. (2015), "Ultrasonic wave propagation in composite laminates by numerical simulation", *Composite Structures*, **121**, 64-74.
- Maurice. H. (1998), "technologie des composites" *maurice reyne hermes*.
- Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), "A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations", *Structural Engineering and Mechanics*, **53(6)**, 1215-1240.
- Menail, Y. (2009), "Analyse de l'effet du vieillissement à l'air, dans l'eau douce et dans l'eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre", *thèse de doctorat, Université BADJI Mokhtar, Annaba, Algérie*.
- Memar Ardestani, M., Soltani, B., Shams, S. (2014), "Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method", *Compos Struct.*, **112**, 231–240.
- Merazi, M., Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation plate theory for static analysis of FGM plate based on neutral surface position", *Geomech. Eng., Int. J.*, **8(3)**, 305-321.
- Merdaci, S., Tounsi, A., Houari, MSA., Mechab, I., Hebali, H., Benyoucef, S. (2011), "Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates", *Arch Appl Mech.*, **81(11)**, 1507–1522.
- Meziane, M.A.A, Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.*, **16(3)**, 293-318.
- Mishnaevsky, L. Schmauder, S. (2001), "Continuum mesomechanical finite element modeling in materials development: A state-of-the-art review *Applied Mechanics Reviews*", 54, pp. 49-69.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Mistler R.E. (1973), High strength alumina substrates produced by a multiple-layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull.*; 52 (11) :850-854.
- Mokhtar, Y., Heireche, H., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel shear deformation theory for buckling analysis of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity theory", *Smart Structures Systems*, **21**(4), 397-405.
- Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind Struct., Int. J.*, **22**(4), 429-454.
- Mohammadi, M., Saidi, AR., Jomehzadeh, E. (2010), "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates", *Appl Compos Mater.*, **17**(2), 81-93.
- Moya J.S., Sanchez-Herencia A.J., Requena J., MORENO R., (1992), "Functionally gradient ceramics by sequential slip casting", *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35.
- Murakami, H. (1986), "Laminated composite plate theory with improved in-plane responses", *J Appl Mech.*, **53**(3), 661-666.
- Murthy. M.V.V. (1981), "Une théorie de déformation de cisaillement transversal amélioré pour plaque anisotrope laminé", *Rapport technique*, NASA.
- Nabil Ferguen, Emmanuel Bellenger, Mohamed Guessasma, Claudia Cogné Christine Pelegris, Christian Courtois, Olivier Rigo, (2011), "Matériaux composites alumine/aluminium à gradient de fonction : modélisation numérique pour le calcul de la conductivité thermique effective ", *20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon*.
- Naghdi , PM. (1957), "On the theory of thin elastic shells", *Quarterly Appl. Math.*, **14**, 369-380.
- Nami, M. R, and Maziar J. (2014), "Wave Propagation in Rectangular Nanoplates Based on Strain Gradient Theory with One Gradient Parameter with Considering Initial Stress." *Modern Physics Letters B* 28, no. 03: 1450021.
- Navid Saeedi (2012). "Une approche très efficace pour l'analyse du dé laminage des plaques stratifiées infiniment longues", *thèse de doctorat*, Université de Paris-Est, France.
- Nayfeh, A. H., and Chimenti, D E. (1989), "Free wave propagation in plates of general anisotropic media", *Journal of applied Mechanics*, **56**, 881-886.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Nguyen DD, Tran QQ(2013). Nonlinear dynamic analysis of imperfect functionally graded material double curved thin shallow shells with temperature dependent properties on elastic foundation. *J Vib Control*. <http://dx.doi.org/10.1177/1077546313494114>.
- Nguyen, K.T., Thai, T.H. and Vo, T.P. (2015), “A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials”, *Int J Mech Mater Des*, DOI 10.1007/s10999-014-9260-3.
- Nguyen, K.T., Thai, T.H. and Vo, T.P. (2015), “A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(1), 91-120.
- Nguyen-Xuan H, Thai CH, Nguyen-Thoi T. (2013) “Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory”, *Compos Part B: Eng*;55:558–74.
- Nguyen VH, Nguyen TK, Thai HT, Vo TP. (2014) “A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates”, *Compos Part B: Eng*; 66:233–46
- Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Kuroishi N. (1988), “Method of producing a functionally gradient material”. U.S. Patent 4571099.
- Okamura, H. (1991), “State of the art of material design projects for severe service applications”, *Mater. Sci. Eng :A.*, **143** (1-2), 3-9.
- Panc, V. (1975), “Theories of elastic plates”. *Springer*.
- Pradhan, N. R., Rhodes, D., Feng, S., Xin, Y., Memaran, S., Moon, B.-H., ... Balicas, L. (2014). Field-Effect Transistors Based on Few-Layered α -MoTe₂. *ACS Nano*, 8(6), 5911–5920. doi:10.1021/nn501013.
- Prakash, T., Singha, MK., Ganapathi, M. (2009), “Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates”, *Comput Mech.*, **43**(3), 341–350.
- Praveen, GN and Reddy, JN. (1998), “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates”, *Int J Solids Struct.*, **35**(33), 4457–4476.
- Quintanilla, F.H., Lowe, M. J. S., Craster, R.V. (2015), "Modeling guided elastic waves in generally anisotropic media using a spectral collocation method", *The Journal of the Acoustical Society of America*, **137**(3), 1180-1194.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Rauter, N., Lammering, R. (2015), "Numerical simulation of elastic wave propagation in isotropic media considering material and geometrical nonlinearities", *Smart Materials and Structures*, **24**(4), 045027.
- Reddy, JN. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J Appl Mech.*, **51**(4), 745–752.
- Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J Appl Mech-T ASME.*, **12**(2), 69–77.
- Reissner, E. (1975), "On Transverse Bending of Plates, Including the Effects of Transverse Shear Deformation", *International Journal of Solids and Structures.*, **11**, 569–573.
- Rovetta, D., Sarti, A., De Sanctis, G., & Fabiani, M. (2006), "Modelling elastic wave propagation in thin plates", In Signal Processing Conference, 2006 14th European (IEEE), 1-5.
- Ruan, M., Wang, ZM. (2014), "Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material", *J Vib Control*. <http://dx.doi.org/10.1177/1077546314563967>.
- Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, MSA., Adda Bedia, EA. (2014), "A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates", *Steel and Composite Structures.*, **17**(3), 321-338.
- Saidi, H., Tounsi, A., and Bousahla, A.A. (2016), "A simple hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations", *Geomechanics and Engineering.*, **11**(2), 289-307.
- Sekkal, M. (2018), "Développement d'un nouveau champ de déplacement pour l'analyse de la vibration et de la stabilité des plaques en matériau composite avancé», *thèse de doctorat, Université Djilali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.*
- Shimpi, RP. (2002), "Refined plate theory and its variants ", *AIAA Journal.*, **40**(1), 137–146.
- Sellai, B. (2011), "Etude et Analyse des Structures en FGM: Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM", *thèse de doctorat, Université Djilali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie.*
- Sobhy, M. (2013), "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions", *Compos Struct.*, **99**, 76–87.
- Soldatos, KP. (1992), "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", *Acta Mech.*, **94**(3), 195–220.
- Steffes, H.D., Dvorak, M., Wewel. (1990), plasma sprayed functionally graded materials-processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sedai.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

STEIN M. (1986), “Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing”, *AIAA J* 1986;24(9):1537–44.

Tafla, A. (2007), “Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches”, *Thèse de doctorat de l’université de Reims Champagne-Ardenne*.

Talidi, A. (2006) « Etude de l’élimination du Chrome et du bleu de méthylène en milieux aqueux par adsorption sur la pyrophyllite traitée et non traitée. », thèse de doctorat, Université de Rabat.

Tebboune, W., Benrahou, KH., Houari, MSA. and Tounsi, A. (2015), “Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **18**(2), 443-465.

Thai CH, Ferreira A, Bordas S, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H.(2014), “Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory”, *Eur J Mech A/Solids* 2014;43:89–108.

Thai, H.T., Choi, D.H. (2012): “An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates”, *Appl. Math. Model.* 36, 1008–1022.

Thai, HT., Choi, DH.(2014), “Improved refined plate theory accounting for effect of thickness stretching in functionally graded plates”, *Compos B Eng.*,**56**,705–716.

Thai, HT. et Kim, SE. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.

Thai HT, Kim SE. (2013) “A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos Struct*;96:165–73.

Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. (2014), “Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach”, *Comput Struct*; 141:94–112.

Thai, HT., Nguyen TK., Vo, T. (2014), “Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first- order shear deformation theory”, *European Journal of Mechanics - A/Solids.*, **45**, 211-225.

Thai, HT., Uy, B.(2013), “Levy solution for buckling analysis of functionally graded plates based on a refined plate theory”, *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci.*, **227**(12),2649–2664.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Thai, HT., Vo, TP.(2013), “A new sinusoidal shear deformation theory for bending buckling, and vibration of functionally graded plates”, *Appl Math Model* ., **37**(5),3269–3281.

Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger. (1959), “Theory of Plates and Shells”. *McGraw-Hill, New York*.

Timoshenko, S. (1921), "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", *Philosophical Magazine*, Vol. 41 (series46) p. 744–746.Reissner (1945).

Tounsi, A. (2006), “cours sur «théorie d'élasticité : Application aux matériaux anisotropes »”, *laboratoire des Matériaux et Hydrologie université de Sidi Bel Abbés*.

Tounsi, A, Heireche, H, Berrabah, HM, Benzair, A, Boumia, L. (2008), “Effect of small size on wave propagation in double-walled carbon nanotubes under temperature field”, *J Appl Phys*, 104, 104301.

Tounsi, A., Houari, MSA., Benyoucef, S. and Adda Bedia, EA. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**(1), 209-220.

Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. (2016), “ A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **60**(4), 547-565.

Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011),“Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory” *Applied Mathematics and Mechanics.*, **32**(7),925–942.

Touratier, M. (1991),“An efficient standard plate theory”. *Engng Sci.*,**29**(8),901-916.

Uemura S. (2003), The activities of FGM on new applications, *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10.

Valizadeh, N., Natarajan, S., Gonzalez-Estrada, OA., Rabczuk, T., Bui, TQ., Bordas, SPA.(2013), “NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: Static bending, vibration, buckling and flutter”, *Compos Struct.*,**99**,309–326.

Woo, J., Meguid, SA., Ong, LS. (2006), “Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates”,*J Sound Vib.*,289(3),595–611.

Wu, C.-P., Li, H.-Y.(2010): “An rmvt-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates”, *Compos. Struct.* 92(10), 2591–2605.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Wu, C.-P., Chiu, K.-H. (2011): “Rmvt-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates”, *Compos. Struct.* 93(5), 1433–1448.
- Xiang, S, Jin, Y.X, Bi, Z.Y, Jiang, S.X, Yang, M.S. (2011), “A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates”, *Compos Struct.*, **93**(11), 2826–2832.
- Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013), “Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions”, *J Therm Stresses.*, **36**(9), 869–894.
- Yahia, S.A., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech.*, **53**(6), 1143-1165.
- Yang, J., Liew, K.M. and Kitipornchai, S. (2005), “Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates”, *Compos. Sci. Tech.*, **65**, 1165-1175.
- Yazid, M., Heireche, H., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A. (2018), “A novel nonlocal refined plate theory for stability response of orthotropic single-layer graphene sheet resting on elastic medium”, *Smart Structures and Systems.*, **21**(1), 15-25.
- Yin, W.L. (1994). “Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model”. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549,1564.
- Zenkour AM. (2006), “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Appl Math Model*;30:67–84.
- Zenkour, AM.(2007), “Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate”, *Arch Appl Mech.*, **77**(4), 197–214.
- Zenkour AM. (2013), “A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Appl Math Model*; 37(20–21):9041–51.
- Zenkour AM. (2013), “Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory”, *J Sandwich Struct Mater* ; 15(6):629–56.
- Zenkour AM. (2015), “Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four unknown Shear and normal deformations theory”, *Compos Struct*; 122:260–70.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Zerwer, A., Polak, M.A., "Santamarina, J.C. (2000), "Wave propagation in thin Plexiglas plates: implications for Rayleigh waves", *NDT & E International*, **33**, 33-41.

Zhang, L.W., Zhu, P., Liew, K.M. (2014), "Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method", *Compos Struct.*, **108**, 472–492.

Zhong, Z. and Yu, T. (2007), "Analytical solution of a cantilever functionally graded beam", *Compos. Sci. Technol.*, **67**(3-4), 481-488.