Université Djillali Liabes de Sidi Bel-abbes

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT DES SCIENCES

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : ANALYSE FONCTIONNELLE

Présentée par

BENAISSA BOUHARKET

Inégalités intégrales et opérateurs de type Hardy et autres.

MEMBRES DU JURY :

Pr.	*Abbes Benaissa*	*Univ. Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes*	*President,*
Pr.	*Soufiane Mokeddem*	*Univ. Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes*	*Examinateur,*
Pr.	*Ali Moussaoui*	*Univ. de Tlemcen*	*Examinateur,*
MCA.	*Mohamed Ziane*	*Univ. de Tiaret*	*Examinateur,*
Pr.	*Ali Hakem*	*Univ. Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes*	*Co − encadreur,*
Pr.	*Abdelkader Senouci*	*Univ. de Tiaret*	*Encadreur.*

Date de soutenance le 25/11/2020.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier ALLAH qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, Pr : **Abdelkader Senouci** professeur à l'université Ibn-Khaldoun de Tiaret pour l'aide compétente qu'il m'a apportée, pour sa patience et son encouragement à finir ce travail. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités scientifiques et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je remercie Pr : **Ali Hakem** Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes de nous avoir supporté malgré sa surcharge pédagogique et scientifique.

Je remercie Pr : **Abbes Benaissa** Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, pour l'immense honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Pr. **Soufiane Mokeddem** Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes. C'est un grand honneur pour qu'il ait acceptée d'être membre du jury de cette thèse.

Je remercie Pr. **Ali Moussaoui** Professeur à l'université de Tlemcen, pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant d'être membre du jury de cette thèse.

Je remercie M.C.A. **Mohamed Ziane** Maitre de conférence "A" à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de lire cette thèse et d'être membre du jury .

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Introduction

En 1920 G. H. Hardy a établi et prouvé une inégalité portant son nom. Cette inégalité est appliquée dans différents domaines de mathématiques telles que les équations aux dérivées partielles, les espaces fonctionnels et autres. Elle a connu plusieurs gènèralisations et elle continue d'attirer l'attention des mathématiciens dans la recherche des inégalités et leurs applications.

Dans cette thèse on commence par établir et prouver quelques inégalités intégrales : inégalités inverses de Minkowski et celles du type de Hardy. Ensuite on aborde quelques opérateurs de type Hardy et autres où sont obtenus plusieurs resultats.

La thése comprend quatre chapitres, une conclusion et une bibliographie.

Dans le premier chapitre, on donne un aperçu sur les inégalités classiques de Young, Hölder, Minkowski et celles de Hardy.

Au deuxième chapitre on étudie les inégalités inverses de Minkowski et celles de Hardy relatives aux fonctions monotones. La première partie de ce chapitre, a fait l'objet d'une publication internationle [3]. Ensuite les résultats de cette première partie sont généralisés et font l'objet d'un travail déja soumis (voir [5]).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des opérateurs de type de Hardy, où on considére quelques nouveaux types d'inégalités intégrales classiques de Hardy en incluant plusieurs paramètres et en utilisant de nouveaux opérateurs pondérés S_1 et S_2.(Publication parue voir [4]).

Dans le quatriéme chapitre est considéré un certain opérateur (gènèral) où sont établies et prouvées des inégalités intégrales pondérées pour des fonctions monotones non-négatives avec les paramètres p et q [24]. Ces inégalités intégrales sont étendues aux différents cas de figures des paramètres p et q et en particulier le cas des paramétres négatifs. Ce capitre a fait l'objet d'un travail soumis (voir [6]).

A la fin de manuscrit on trouve une conclusion et une bibliographie assez détaillée.

Chapitre 1

Généralités et inégalités classiques.

1.1 Généralités

Notations :.
1)e est le sous ensemble de Ω de mesure nulle.
2)p.p veut dire presque partout.
3) $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.
4) On définit le support d'une fonction continue f par

$$suppf = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \neq 0\}}.$$

5)$C(\mathbb{R}^n)$ est L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$.
6) On dit que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ si f est continue sur $\mathbb{R}^n$, et à support compact.

Lemme 1.1.1. ***(Lemme de Fatou)*** *Soient $\forall k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k non-négatives et mesurables sur un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et presque partout sur Ω existe la limite finie ou infinie $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. Alors*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx, \tag{1.1}$$

et

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_k(x)dx. \tag{1.2}$$

Preuve Voir [25], [12].

Remarque 1.1.1. *Si $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = +\infty$ sur Ω, $|\Omega| > 0$, on pose $\int_\Omega f(x)dx = +\infty$.*

Théorème 1.1.1. *(**Convergence monotone**) Soient $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k des fonctions non-négatives et mesurables sur un ensemble Ω mesurable, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, de plus $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ p.p. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k(x)dx = \int_{\Omega} \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx. \tag{1.3}$$

Preuve Voir [25], [12].

Théorème 1.1.2. *(**Convergence dominée**) Soient $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k des fonctions mesurables sur un ensemble Ω mesurable, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et p.p. existe sur Ω la limite finie $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. S'il existe une fonction $G(x)$ intégrable et non-négative, telle que p.p. sur Ω*

$$\left| f_k(x) \right| \leq G(x), \tag{1.4}$$

alors $\forall k \in \mathbb{N}$ les fonctions f_k et la fonction $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ sont intégrables sur Ω et

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx. \tag{1.5}$$

Preuve Voir [25], [12].

Remarque 1.1.2. *La plus petite possible fonction dans (1.4) est la fonction G définie comme suit :*

$$G(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|, \quad \forall x \in E.$$

Théorème 1.1.3. *(**Théorème de Fubuni**)*
Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ ($E \subset \mathbb{R}^n$) et $F \subset \mathbb{R}^m$ (un ensemble mesurable) et la fonction $f(x,y)$ intégrable sur $E \times F$. Alors pour presque tous les $x \in E$ $f(x,y)$ est intégrable sur F, pour presque tous les $y \in F$ $f(x,y)$ est intégrable sur E et :

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E \Big(\int_F f(x,y)dy \Big) dx = \int_F \Big(\int_E f(x,y)dx \Big) dy. \tag{1.6}$$

Preuve Voir [25], [12].

Conséquence 1.1. *Si $f(x,y)$ est mesurable sur $E \times F$ et est finie l'une des intégrales :*

$$\int_E \Big(\int_F \big|f(x,y)\big| dy \Big) dx\ , \quad \int_F \Big(\int_E \big|f(x,y)\big| dx \Big) dy\ ,$$

alors toutes les intégrales de (1.6) existent et de plus cette dernière est vérifiée.

Remarque 1.1.3. *Si f n'est pas intégrable sur $E \times F$, alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différentes.*

Dans ce qui suit on définit l'espace de Lebesgue (espace de fonctions).

Définition 1.1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si*

(1) f *est mesurable sur* Ω.

(2) $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int |f|^p dx\right)^{1/p} < \infty$.

Définition 1.1.2. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $f : \Omega \to \mathbb{C}$*

$$\sup_{x\in\Omega} vrai f(x) = \inf_{e\subset\Omega} \sup_{x\in\Omega/e} f(x); \tag{1.7}$$

$$\inf_{x\in\Omega} vrai f(x) = \sup_{e\subset\Omega} \inf_{x\in\Omega/e} f(x). \tag{1.8}$$

Définition 1.1.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mesurable et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $|\Omega| > 0$. On dit que $f \in L^\infty(\Omega)$ si f est mesurable et*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} vrai |f(x)| < \infty. \tag{1.9}$$

Remarque 1.1.4. *On pose $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ pour $|\Omega| = 0$.*

Théorème 1.1.4. ***(Théorème de Riesz)*** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable et f une fonction mesurable sur Ω, alors*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.10}$$

Preuve Voir [1], [11].

1.2 Les inégalités classiques

Dans cette section, on considére les Inégalités classiques de Young, Hölder et celle de Minkowski.

1.2.1 Les inégalités de Young

pour tout $a,b>0$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, on a

$$pour \quad p\geq 1: \quad ab\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'} \tag{1.11}$$

$$pour \quad 0<p<1: \quad ab\geq \frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'} \tag{1.12}$$

$$pour \quad p<0: \quad ab\geq \frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'} \tag{1.13}$$

Preuve
Dans ce qui suit, on prouve (1.13). [7]
Les trois inégalités précédentes sont ramenées à

$$\frac{a^{p-1}}{bp}+\frac{b^{p'-1}}{ap'}\geq 1 \quad ou \quad \frac{a^{p-1}}{bp}+\frac{b^{p'-1}}{ap'}\leq 1,$$

et par le changement de variable $t=\dfrac{a^{p-1}}{b}$, on a $b=\dfrac{a^{p-1}}{t}$,

$$\frac{b^{p'-1}}{a.p'}=\frac{a^{(p-1)(p'-1)}}{t^{(p'-1)}.a.p'}=\frac{1}{t^{(p'-1)}.p'}=\frac{t^{-(p'-1)}}{p'}.$$

On obtient

$$f(t)=\frac{a^{p-1}}{bp}+\frac{b^{p'-1}}{ap'}=\frac{t}{p}+\frac{t^{-(p'-1)}}{p'}, \qquad t>0,$$

Alors pour tout $t>0$, on a

$$f'(t)=\frac{1}{p}-\frac{p'-1}{p'}t^{-p'}=\frac{1}{p}(1-t^{-p'}).$$

Pour $p<0$ et $0<p'<1$, on a

$$f'(t)>0 \Longleftrightarrow t^{-p'}>1 \Longleftrightarrow t<1. \qquad (f \nearrow sur\,(0,1])$$
$$f'(t)<0 \Longleftrightarrow 0<t<1. \qquad (f \searrow sur\,[1,\infty)),$$

d'où

$$\forall t \in (0,\infty): \quad f(t) \leq 1,$$

donc

$$pour \quad p<0: \quad \frac{a^{p-1}}{bp} + \frac{b^{p'-1}}{ap'} \leq 1 \Longleftrightarrow a.b \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \qquad \square$$

1.2.2 Les inégalités de Hölder.

Les inégalités suivantes dits de Hölder sont bien connues.
Soient E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, $f \in L_p(E)$, $g \in L_{p'}(E)$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, alors

$$pour \quad p>1: \quad \int_E |f(t).g(t)|dt \leq \left(\int_E f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^{p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.14}$$

$$pour \quad 0<p<1: \quad \int_E |f(t).g(t)|dt \geq \left(\int_E f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^{p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.15}$$

$$pour \quad p<0: \quad \int_E |f(t).g(t)|dt \geq \left(\int_E f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^{p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.16}$$

1.2.3 Inégalités de Minkowski.

Théorème 1.2.1. *Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $1 \leq p \leq \infty$ et $f,g \in L_p(\Omega)$, alors*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.17}$$

Démonstration. Voir [11].

Corollaire 1.2.1. *Soient $m \in \mathbb{N}$, et $f_k \in L_p(\Omega)$ pour tout $k \in \{1,2,...,m\}$, $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\|\sum_{k=1}^{m} f_k\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Corollaire 1.2.2. *Soient $f_k \in L_p(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} < \infty$ et $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.19}$$

Les inégalités integrales de Minkowski.

Soit f une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur $(a,b)\times(c,d)\longrightarrow\mathbb{R}$.
Si $1\leq p\leq\infty$

$$\|\int_c^d f(x,y)dy\|_{L_{p,x}(a,b)}\leq\int_c^d\|f(x,y)\|_{L_{p,x}(a,b)}dy. \tag{1.20}$$

Si $0<p<1$

$$\|\int_c^d f(x,y)dy\|_{L_{p,x}(a,b)}\geq\int_c^d\|f(x,y)\|_{L_{p,x}(a,b)}dy. \tag{1.21}$$

Dans [39], on a établi et prouvé l'inégalité intégrale de Minkowski pour $p<0$.

Théorème 1.2.2. *Soient $p<0$, $-\infty<a<b<+\infty$ et$-\infty<c<d<+\infty$. Supposons que f soit mesurable et de signe constant sur $(a,b)\times(c,d)$ et $f(x,y)\in L_p((a,b))$ pour presque tout $y\in(c,d)$. Alors*

$$\|\int_c^d f(x,y)dy\|_{L_{p,x}(a,b)}\geq\int_c^d\|f(x,y)\|_{L_{p,x}(a,b)}dy. \tag{1.22}$$

si le membre gauche est fini.

Preuve : on a

$$\left|\int_c^d f(x,y)dy\right|\leq\int_c^d|f(x,y)|\,dy$$

donc on obtient :

$$\left|\int_c^d f(x,y)dy\right|^p\geq\left(\int_c^d|f(x,y)|\,dy\right)^p \quad ,pour\ p<0.$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b\left|\int_c^d f(x,y)dy\right|^p dx &\geq \int_a^b\left(\int_c^d|f(x,y)|\,dy\right)^p dx\\
&= \int_a^b\left[\left(\int_c^d|f(x,t)|\,dt\right)^{p-1}.\left(\int_c^d|f(x,y)|\,dy\right)\right]dx\\
&= \int_a^b\left[\int_c^d\left(\int_c^d|f(x,t)|\,dt\right)^{p-1}|f(x,y)|\,dy\right]dx\\
&= \int_c^d\underbrace{\left\{\int_a^b\left(\int_c^d|f(x,t)|\,dt\right)^{p-1}|f(x,y)|\,dx\right\}}_{R_1}dy,
\end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité de Hölder sur R_1 on obtient :

$$\begin{aligned}
R_1 &= \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,t)|\,dt\right)^{p-1} |f(x,y)|\,dx \\
&\geq \left(\int_a^b \left|\int_c^d |f(x,t)|\,dt\right|^{p'(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_a^b \left|\int_c^d |f(x,t)|\,dt\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = R_2,
\end{aligned}$$

donc

$$\int_c^d R_1 dy \geq \int_c^d R_2 dy$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|\int_c^d f(x,y)dy\right|^p dx &\geq \int_c^d R_1 dy \\
&\geq \int_c^d R_2 dy \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \left|\int_c^d |f(x,t)|\,dt\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \left(\int_a^b \left|\int_c^d |f(x,t)|\,dt\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy,
\end{aligned}$$

alors

$$\left(\int_a^b \left|\int_c^d f(x,y)dy\right|^p dx\right) \left(\int_a^b \left|\int_c^d |f(x,t)|\,dt\right|^{p} dx\right)^{-\frac{1}{p'}} \geq \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

on a pour toute fonction f mesurable :

$$\left|\int_c^d f(x,y)dy\right| = \left|\int_c^d |f(x,y)|\,dy\right|.$$

par conséquent

$$\left[\int_a^b \left|\int_c^d f(x,y)dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \geq \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

$$\| \int_c^d f(x,y)dy\|_{L_{p,x}(a,b)} \geq \int_c^d \|f(x,y)\|_{L_{p,x}(a,b)} dy. \quad \diamond$$

1.3 Notions sur les inégalités de Hardy

Dans cette section, nous présentons quelques inégalités classiques de Hardy.

1.3.1 Inégalités classiques de Hardy

En 1920 G.H.Hardy énonça et prouva l'inégalité intégrale suivante

Théorème 1.3.1. *Soient $p > 1$, f une fonction non négative et mesurable sur l'intervalle $(0,\infty)$, F une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x > 0,$$

alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p\,dx, \tag{1.23}$$

avec $f \neq 0$. La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale (la plus petite possible).

Théorème 1.3.2. *Soient $p > 1$, f une fonction non négative et mesurable sur l'intervalle $(0,\infty)$, F une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt, \quad x > 0,$$

alors

$$\int_0^\infty F^p(x)\,dx < p^p \int_0^\infty (xf(x))^p\,dx, \tag{1.24}$$

avec $f \neq 0$. La constante p^p est optimale.

Le théorème suivant généralise l'inégalité intégrale de Hardy classique en introduisant des pondérations de puissance x^α.

Théorème 1.3.3. *Soient f une fonction positive, $p > 1$ et $\alpha < p-1$, alors*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha\,dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p x^\alpha\,dx. \tag{1.25}$$

Actuellement les developpements de (1.23) et (1.25) ont abouti à des inégalités dites inégalités de type de Hardy.

Théorème 1.3.4. *Soient* $p > 1$, $\alpha \neq 1$, $0 < \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p\,dt < \infty$ *et* F *une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad (\alpha > 1); \qquad F(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt, \quad (\alpha < 1),$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)\,dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha - 1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p\,dt. \tag{1.26}$$

L'inégalité classique de Hardy pour les quasi-normes est exprimée à l'aide du théorème suivant .

Théorème 1.3.5. *Soient* $0 < p < 1$, $\alpha \neq 1$, $0 < \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p\,dt < \infty$ *et* F *une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad (\alpha > 1); \qquad F(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt, \quad (\alpha < 1),$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)\,dx > \left(\frac{p}{|\alpha - 1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p\,dt. \tag{1.27}$$

Soit f une fonction à une seule variable définie sur $(0,\infty)$.
Considérons les deux opérateurs H_1 et H_2 définis de la manière suivante :

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy \qquad \forall x > 0,$$

(la valeur moyenne de f sur l'intervalle $(0,x)$)

et

$$(H_2 f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy \qquad \forall x > 0.$$

Théorème 1.3.6. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, α *un nombre réel ,*

f une fonction non négative et mesurable sur l'intervale $(0,\infty)$.
Si $\alpha < \frac{1}{p'}$ *, alors*

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}, \tag{1.28}$$

et si $\alpha > \frac{1}{p'}$ *, alors*

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}. \tag{1.29}$$

Remarque 1.3.1. $\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1}$ *et* $\left(\alpha-\frac{1}{p'}\right)^{-1}$ *sont les constantes optimales dans (1.28) et (1.29).*

Cas particulier : si $\alpha = 0$ dans (1.28), on aura

$$\|(H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \le p' \|f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}, \tag{1.30}$$

on retrouve (1.23) où l'inégalité est stricte.

Remarque 1.3.2. *Soient X et Y deux espaces semi-normés, l'opérateur A est défini de X vers Y, On rappelle qu'un opérateur A est dit borné s'il éxiste un nombre réel $M > 0$ tel que ,*

$$\forall f \in X: \ \|Af\|_Y \le M \|f\|_X, \tag{1.31}$$

(en particulier si $\|f\|_X = 0$, alors $\|Af\|_Y = 0$).

On désigne par

$$M^\star = \inf_{M \in \mu} \mu$$

(μ l'ensemble de tous les nombres M pour lesquels (1.31) est vérifiée).
De (1.31) on obtient

$$\forall f \in X: \ \|Af\|_Y \le M^\star \|f\|_X, \tag{1.32}$$

le nombre $M^\star$ est appelé semi-norme de l'opérateur A . On note

$$\|A\|_{X \to Y} = M^\star.$$

(si Y est un espace normé, alors $M^\star$ est une norme).
On conclut que la semi-norme (norme) de l'opérateur A est la constante optimale (la plus petite possible) dans (1.31).
Si l'opérateur A satisfait à la condition suivante :
pour $f \in X$ telle que $\|f\|_X \ne 0$ et $\|Af\|_Y \ne 0$, alors linégalité (1.31) est équivalente à

$$\forall f \in X: \|f\|_X \ne 0, \ \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X} \le M^\star \tag{1.33}$$

c'est à dire $M^\star$ est la borne supériere de l'ensemble

$$\left\{ \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X} : f \in X, \|f\|_X \ne 0 \right\}.$$

Donc, en vertu de la définition de la borne supériere (sup *) on aura

$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{f\in X, \|f\|_X \neq 0} \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X}. \tag{1.34}$$

Considérons pour $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ l'espace $L_{p,\alpha(0,\infty)}$ est l'éspace de toutes les fonctions mesurables sur $(0,\infty)$ pour lesquelles, $x^{\alpha} f(x) \in L_{p(0;\infty)}$ et

$$\|f\|_{L_{p,\alpha(0,\infty)}} = \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} < \infty. \tag{1.35}$$

Alors conpte tenu de ceci, on peut reformuler la première partie du théorème (1.3.6) comme suit :
si $\alpha < \frac{1}{p'}$, alors

$$\|H_1\|\|_{L_{p,\alpha(0,\infty)} \to L_{p,\alpha(0,\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1}, \tag{1.36}$$

du fait que la constante est optimale , on peut écrire

$$\|H_1\|_{L_{p,\alpha(0,\infty)} \to L_{p,\alpha(0,\infty)}} = \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1}, \tag{1.37}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
De même pour la deuxième partie du théorème (1.3.6) par rapport à l'opérateur H_2, on a
Si $\alpha > \frac{1}{p'}$

$$\|H_2\|_{L_{p,\alpha(0,\infty)} \to L_{p,\alpha(0,\infty)}} = \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1}, \tag{1.38}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.3.7. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, α un nombre réel, f une fonction non négative et mesurable sur l'intervalle $(0,\infty)$, il n'existe pas de $A > 0$ telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :*
si $\alpha \geq \frac{1}{p'}$

$$\|x^{\alpha}(H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \tag{1.39}$$

et si $\alpha \leq \frac{1}{p'}$

$$\|x^{\alpha}(H_2 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}. \tag{1.40}$$

$*$. Si A est un opérateur linéaire, alors

$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{f\in X, \|f\|_X \neq 0} \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{f\in X, \|f\|_X = 1} \|Af\|_Y.$$

Définition 1.3.1. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *l'espace* $L_{P,\alpha(0,\infty)}$ *est l'espace de toutes les fonctions mesurables sur* $(0,\infty)$ *telles que :*

$$\|f\|_{L_{P,\alpha(0,\infty)}} < \infty.$$

Soit $0 < a < b < \infty$, on pose

$$(H_3 f)(x) = \frac{1}{x}\int_{ax}^{bx} f(y)dy, \forall x > 0.$$

Théorème 1.3.8. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $0 < a < b < \infty$, f *une fonction non négative et mesurable sur l'intervalle* $(0;\infty)$. *Alors l'opérateur* H_3 *en tant qu'opérateur agissant de* $L_{p,\alpha(0,\infty)}$ *dans* $L_{p,\alpha(0,\infty)}$, *est borné.*

Preuve : On pose

$$J = \|x^{\alpha}(H_3 f)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} = \|\int_{ax}^{bx} x^{\alpha-1} f(y)\,dy\|_{L_{p(0,\infty)}}.$$

On fait un changement de variable $z = y/x$ pour pouvoir appliquer l'inégalité intégrale de Minkowski, d'où

$$J = \|\int_{a}^{b} x^{\alpha} f(xz)\,dz\|_{L_{p(0,\infty)}}.$$

La fonction $x^{\alpha} f(xz)$ est mesurable sur $(0,\infty)\times(a,b)$, alors en vertu de l'inégalité intégrale de Minkowski on obtient

$$J \leq \int_{a}^{b} \|x^{\alpha} f(xz)\|_{L_{p(0,\infty)}}\,dz = \int_{a}^{b} \|t^{\alpha} f(t)\|_{L_{p(0,\infty)}}.z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\,dz,$$

aprés avoir effectue le changement de variable $t = xz$. Alors

$$\int_{a}^{b} \|t^{\alpha} f(t)\|_{L_{p(0,\infty)}}.z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\,dz = C_{(\alpha,p)}\|t^{\alpha} f(t)\|_{L_{p(0,\infty)}},$$

où

$$C_{(\alpha,p)} = \int_{a}^{b} z^{-\alpha-\frac{1}{p}}dz = \frac{1}{\frac{1}{p'}-\alpha}\left(b^{\frac{1}{p'}-\alpha} - a^{\frac{1}{p'}-\alpha}\right) \; si\ \alpha \neq \frac{1}{p'}$$

et

$$C_{(\alpha,p)} = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \; si\ \alpha = \frac{1}{p'},$$

avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
En conclusion

$$\|x^{\alpha}(H_3 f)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} \leq C_{(\alpha,p)}\|x^{\alpha} f(x)\|_{L_{p(0,\infty)}}. \tag{1.41}$$

Analogues discrets

Définition 1.3.2. *Soient* $0 < p < \infty$, $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, a_k \in \mathbb{C}$.
On dit que $a \in \ell_p$ *si*

$$\|a\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

et pour $p = \infty$, *si*

$$\|a\|_{\ell_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| < \infty.$$

(c'est à dire a est une suite bornée.)

Lemme 1.3.1. *Pour tout nombre réel* α, *il éxiste des constantes* C_1, C_2 *telles que ; pour toute fonction* f *non négative et monotone définie sur* $(0,\infty)$, *l'inégalité suivante est vérifiée*

$$C_1 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k) \leq \int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx \leq C_2 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k).$$

Preuve :
1 : Si f décroissante.
a) $\alpha \geq 0$.
On a :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} x^\alpha f(x)\,dx \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} 2^{(k+1)\alpha} f(2^k)\,dx.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} 2^{(k+1)\alpha} f(2^k)\,dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{(k+1)\alpha} 2^k f(2^k) \\ &= 2^\alpha \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k).\end{aligned}$$

D'autre part comme f est décroissante , alors

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx \geq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k\alpha+k} f(2^{k+1}).$$

On fait le changement de variable $m = k+1$, alors on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k\alpha+k} f(2^{k+1}) = 2^{-\alpha-1} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k)$$

et on déduit que $C_1 = 2^{-\alpha-1}$ et $C_2 = 2^{\alpha}$.
b) $\alpha < 0$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\,dx = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} x^{\alpha} f(x)\,dx &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} x^{\alpha} f(2^k)\,dx \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\,dx \geq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} x^{\alpha} f(2^{k+1})\,dx \geq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{(k+1)\alpha+k} f(2^{k+1}),$$

en faisant le même changement de variable, $m = k+1$, on obtient

$$2^{-1} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k) \leq \int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\,dx \leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k),$$

où $C_1 = 2^{-1}$ et $C_2 = 1$.
2 : Si f croissante.
D'une manière analogue à **1** on prouve l'inégalité en question où $C_1 = 2^{\alpha}$ et $C_2 = 2^{-\alpha-1}$.

Les inégalités de Hardy dans les cas discrets

Les analogues discrets de (1.28) et (1.29).
Pour $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$, $a_k \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\|a\|_{\ell_p} = \|\{a_k\}\|_{\ell_p} := \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} ; 1 \leq p \leq \infty$$

et on démontre qu'il existe $c = c_{(p,\beta)} > 0$, $d = d_{(p,\beta)} > 0$, telles que :

$$\|\{2^{k\beta} \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=k} b_{\ell}\}\|_{\ell_p} \leq c \|\{2^{k\beta} b_{\ell}\}\|_{\ell_p}, \beta < 0, \tag{1.42}$$

$$\|\{2^{k\beta}\sum_{\ell=k}^{\ell=\infty} b_\ell\}\|_{\ell_p} \leq d\|\{2^{k\beta} b_\ell\}\|_{\ell_p}, \beta > 0. \tag{1.43}$$

On montre que les inégalités (1.42) et (1.43) découlent de (1.28) et (1.29) et donc sont leurs analogues discrets.
Supposons que $\forall \ell \in \mathbb{Z}\ b_\ell \geq 0$, si (1.42) et (1.43) sont valables pour $|b_\ell|$ alors elles le sont pour b_ℓ quel que soit son signe car $|\sum_\ell b_\ell| \leq \sum_\ell |b_\ell|$.
Pour obtenir l'inégalité (1.42) on pose

$$\alpha := \beta + \frac{1}{p'},\ f(x) := \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} b_k 2^{-k} \chi_{(2^{k-1},2^k)}(x),$$

où $\chi_{(2^{k-1},2^k)}(x)$ est la fonction caracréristique. Alors

$$\begin{aligned} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} b_k^p 2^{-kp} \int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{\alpha p}\, dx\right)^{1/p} \\ &= c_1 \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} b_k^p 2^{\beta p k}\right)^{1/p} = c_1 \| \left(2^{\beta k}.b_k\right) \|_{\ell_p}, \end{aligned}$$

où c_1 dépend seulement de β et p.
Ensuite $(H_1 f)(x) = x^{-1} F(x)$, où $F(x) := \int_0^x f(y)\, dy \geq 0$, fonction non décroissante. Par conséquent en vertu du lemme précédent, on a :

$$\|\{2^{\beta k} F(2^k)\}\|_{\ell_p} \leq c_2 \left(\int_0^\infty x^{\beta p - p} F(x)^p\, dx\right)^{1/p} = c_2 \|x^\beta (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}},$$

où c_2 dépend seulement de β et p.
Comme

$$F(2^k) = \int_0^{2^k} f(y)\, dy = \sum_{\ell=-\infty}^{k} b_\ell 2^{-\ell} \int_{2^{\ell-1}}^{2^\ell} dy = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{k} b_\ell$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \|\{2^{k\beta} \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=k} b_\ell\}\|_{\ell_p} &= 2\|\{2^{k\beta} F(2^k)\}\|_{\ell_p} \\ &\leq 2c_2 \|x^\beta (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}}. \end{aligned}$$

Donc (1.42) est déduite de (1.28).
D'une manière analogue on peut déduire (1.43) de (1.29).

1.3.2 Inégalité intégrale de Hardy pour $(0 < p < 1)$.

Pour les quasi-normes dans L_p $(0 < p < 1)$ les inégalités (1.28) et (1.29) ne sont plus valables pour les fonctions non négatives seulement mesurables. Pour obtenir l'analogue de (1.28) et (1.29) on peut considérer la classe des fonctions monotones. C'est ce qui est exprimé dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.9. *Soit* $0 < p < 1$*,*
1. Si $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$*, alors pout toute fonctions* f *non-négative non-croissante sur* $(0,\infty)$*, on a*

$$\|x^{\alpha}(H_1 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq \left(1 - \frac{1}{p} - \alpha\right)^{-\frac{1}{p}} \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_p(0,\infty)}. \tag{1.44}$$

2. Si $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$*, alors pout toute fonctions* f *non-négative non-croissante sur* $(0,\infty)$*, on a*

$$\|x^{\alpha}(H_2 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq \Big(pB(p, \alpha p + 1 - p)\Big)^{\frac{1}{p}} \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_p(0,\infty)}, \tag{1.45}$$

où $B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx$ *est la fonction Beta.*

1.3.3 Inégalité intégrale de Hardy $(p < 0)$.

Les enoncés des théorèmes suivants et leurs preuves ont fait l'objet de la publication de Bicheng Yang [43], [9]. Si $p > 1$ et $0 < \int_0^{\infty} t^{-r}(tf(t))^p\, dt < \infty$
on a l'inégalité suivante

$$\int_0^{\infty} x^{-r} F^p(x)\, dx < \left(\frac{p}{|r-1}\right)^p \int_0^{\infty} t^{-r}(tf(t))^p\, dt, \tag{1.46}$$

où la constante $\left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p$ est optimale.
Dans ce qui suit, on considère une nouvelle inégalité intégrale du type de Hardy pour $p < 0$ avec une constante optimale.

Théorème 1.3.10. *Si* $p < 0$*,* $r \neq 1$*,* $f(t) \geq 0$ *et* $0 < \int_0^{\infty} t^{-r}(tf(t))^p\, dt < \infty$ *,* F *une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \quad (r < 1); \qquad F(x) = \int_x^{\infty} f(t)\, dt, \quad (r > 1),$$

alors, on a

$$\int_0^{\infty} x^{-r} F^p(x)\, dx < \left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p \int_0^{\infty} t^{-r}(tf(t))^p\, dt; \tag{1.47}$$

où le facteur $\left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p$ *est la constante optimale.*

Dans ce qui suit on démontre (1.47) pour l'opérateur $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $(r < 1)$. On aura besoin de l'inégalité suivante où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

$$\left(\int_E u(t)v(t)\,dt \right)^p \leq \left(\int_E u^p(t)\,dt \right) \left(\int_E v^q(t)\,dt \right)^{p-1}, \tag{1.48}$$

qui découle directement de l'inégalités de Hölder (1.16).
L'égalité est valable si et seulement s'il existe des constantes c et d non négatives, telles qu'elles ne sont pas toutes nulles à la fois $(c + d \neq 0)$ et

$$c\,u^p(t) = d\,v^q(t), \quad p.p, sur E. \qquad (\star)$$

Ensuite on applique les lemmes suivants.

Lemme 1.3.2. *Si $p < 0$, $r < 1$, $f(t) \geq 0$ et $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p\,dt < \infty$, alors*

$$\int_0^\infty x^{-r} \left(\int_0^x f(t)\,dt \right)^p dx < \left(\frac{p}{r-1} \right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p\,dt, \tag{1.49}$$

où le facteur $\left(\frac{p}{r-1} \right)^p$ est la constante optimale. En particulier,
***(i)** pour $r = 0$, on a*

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)\,dt \right)^p dx < (-p)^p \int_0^\infty (tf(t))^p\,dt; \tag{1.50}$$

***(ii)** pour $r = p$, on a*

$$\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} \right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(t)\,dt; \tag{1.51}$$

***(iii)** pour $r = 1 + p$, on a*

$$\int_0^\infty x^{-1} \left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} \right)^p dx < \int_0^\infty t^{-1} f^p(t)\,dt \tag{1.52}$$

où les constantes dans les inégalités (1.50), (1.51) et (1.52) sont optimales.

Preuve du lemme : En vertu de (1.48), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p &= \left(\int_0^x \left(t^{\frac{1+p-r}{pq}} f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pq}}\right) dt\right)^p \\
&\leq \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt \left(\int_0^x t^{-\frac{1+p-r}{p}}\,dt\right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt,
\end{aligned}$$

alors

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt. \tag{1.53}$$

Si l'inégalité (1.53) n'est pas stricte, dans ce cas on suppose qu'il y'a égalité et d'après ($\star$) pour

$$u(t) = t^{\frac{1+p-r}{pq}} f(t) \text{ et } v(t) = t^{-\frac{1+p-r}{pq}},$$

on a

$$c\,t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t) = d\,t^{-\frac{1+p-r}{p}}, \quad p.p, sur(0,\infty).$$

Par conséquent pour $c \neq 0$, on a

$$t^{-r}\,(t f(t))^p = \frac{d}{c} t^{-1}, \quad p.p, sur(0,\infty),$$

d'où $\int_0^\infty t^{-r}\,(t f(t))^p\,dt$, est divergente ce qui contredit le fait que

$0 < \int_0^\infty t^{-r}\,(t f(t))^p\,dt < \infty$. Ainsi d'aprés (1.53), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-r} \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx &< \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt\,dx \\
&= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty \int_0^x x^{\frac{1-r}{p}-1} t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt\,dx \\
&= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty \left(\int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}\,dx\right) t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt \\
&= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty \left(\frac{p}{r-1} t^{\frac{1-r}{p}}\right) t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt \\
&= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p} \int_0^\infty t^{-r}\,(t f(t))^p\,dt.
\end{aligned}$$

Pour $0<\varepsilon<1-r$, $f_\varepsilon(t)$ est définie par :

$$f_\varepsilon(t)=t^{\frac{r-1+\varepsilon}{p}-1},\ pour\ t\in(0,1]\ ;\ f_\varepsilon(t)=0,\quad pour\ t\in(1,\infty),$$

d'où

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{r-1+\varepsilon}\right)^p,$$

et

$$\int_0^\infty t^{-r}\left(tf_\varepsilon(t)\right)^p dt=\frac{1}{\varepsilon}.$$

S'il existe $r<1$, telle que la constante $\left(\frac{p}{r-1}\right)^p$ dans (1.49) n'est pas optimale, alors, il existe une constante K, avec $K<\left(\frac{p}{r-1}\right)^p$ telle que (1.49) reste valable si l'on remplace $\left(\frac{p}{r-1}\right)^p$ par K.
En particulier, on a

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx<K\int_0^\infty t^{-r}\left(tf_\varepsilon(t)\right)^p dt,$$

et puis

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{r-1+\varepsilon}\right)^p<K\frac{1}{\varepsilon},$$

il s'ensuit que $\left(\frac{p}{r-1}\right)^p\leq K$, quand $\varepsilon\longrightarrow 0$. A partir de cette contradiction on déduit que $\left(\frac{p}{r-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (1.49).
Ici on prouve (1.47) pour l'operateur $F(x)=\int_x^\infty f(t)\,dt,\quad (r>1)$.

Lemme 1.3.3. *Si $p<0$, $r>1$, $f(t)\geq 0$ et $0<\int_0^\infty t^{-r}\left(tf(t)\right)^p dt<\infty$, alors*

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx<\left(\frac{p}{1-r}\right)^p\int_0^\infty t^{-r}\left(tf(t)\right)^p dt, \tag{1.54}$$

où la constante $\left(\frac{p}{1-r}\right)^p$ est optimale. En particulier ,
***(i)** pour $r=2$, on a*

$$\int_0^\infty x^{-2}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx<(-p)^p\int_0^\infty t^{p-2}f^p(t)\,dt, \tag{1.55}$$

(ii) *pour* $r=1-p$ *, on a*

$$\int_0^\infty x^{p-1}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx < \int_0^\infty t^{2p-1} f^p(t)\,dt, \tag{1.56}$$

où les constantes dans les inégalités (1.55) et (1.56) sont optimales.

Preuve du lemme : En vertu de (1.48), on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p &= \left(\int_x^\infty \left(t^{\frac{1+p-r}{pq}} f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pq}}\right) dt\right)^p \\ &\leq \int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt \left(\int_x^\infty t^{-\frac{1+p-r}{p}}\,dt\right)^{p-1} \\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1}\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt.\end{aligned}$$

$$\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p \leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1}\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt. \tag{1.57}$$

D'une maniére analogue au Lemme précedent on montre que l'inégalité est stricte.
Puisque $0<\int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt<\infty$, ainsi d'aprés (1.57), on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx &< \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}\int_0^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt\,dx \\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}\int_0^\infty \left(\int_0^t x^{\frac{1-r}{p}-1}\,dx\right) t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt \\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p}\int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt,\end{aligned}$$

on obtient (1.54).
Pour $0<\varepsilon<r-1$, $f_\varepsilon(t)$ définie par

$$f_\varepsilon(t)=t^{\frac{r-1-\varepsilon}{p}-1},\ \textit{pour}\ t\in[1,\infty)\ ;\ f_\varepsilon(t)=0,\ \textit{pour}\ t\in(0,1),$$

on trouve que

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{1-r+\varepsilon}\right)^p,$$

et

$$\int_0^\infty t^{-r}\,(tf_\varepsilon(t))^p\,dt=\frac{1}{\varepsilon}.$$

S'il existe $r > 1$, telle que la constante $\left(\frac{p}{1-r}\right)^p$ dans (1.54) n'est pas optimale, alors, il existe une constante K, avec $K < \left(\frac{p}{1-r}\right)^p$ pour que (1.54) reste valable si l'on remplace $\left(\frac{p}{1-r}\right)^p$ par K.
En particulier , on a

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx < K\int_0^\infty t^{-r}\,(t f_\varepsilon(t))^p\,dt,$$

et puis

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{1-r+\varepsilon}\right)^p < K\frac{1}{\varepsilon}$$

il s'ensuit que $\left(\frac{p}{1-r}\right)^p \leq K$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, donc on déduit que $\left(\frac{p}{1-r}\right)^p$ est la constante optimale dans (1.54).

Preuve du theoreme 1.3.10
D'aprés les inégalités (1.49) et (1.54) on déduit (1.47).

Remarque 1.3.3. *Si on remplace $f^p(t)$ par $f(t)$ et p par $\frac{1}{r}$ dans (1.51), on aura*

$$\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^x f^r(t)\,dt}{x}\right)^{\frac{1}{r}} dx < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{r}} \int_0^\infty f(t)\,dt. \tag{1.58}$$

On considére les opérateurs H_1 et H_2 définis par :

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad et \quad (H_2 f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)\,dt.$$

Dans ce qui suit on étudie l'analogue de (1.49) et (1.54), en opérant le changement du paramètre r par $\alpha + p$.

Théorème 1.3.11. *Soient $p < 0$, $\alpha \neq 1-p$, $f(t) \geq 0$ et $0 < \int_0^\infty t^{-\alpha}\,(f(t))^p\,dt < \infty$, alors*
(i) si $\alpha < 1-p$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}(H_1 f)^p(x)\,dx < \left(\frac{p}{\alpha+p-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}\,(f(t))^p\,dt, \tag{1.59}$$

où $\left(\dfrac{p}{\alpha+p-1}\right)^p$ *est optimale.*

(ii) Si $\alpha > 1-p$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}(H_2 f)^p(x)\,dx < \left(\frac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha}\,(f(t))^p\,dt; \tag{1.60}$$

où $\left(\dfrac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p$ *est optimale.*

Preuve

Pour montrer que $\left(\dfrac{p}{\alpha+p-1}\right)^p$ est optimale dans (1.59), on suppose qu'il éxiste une constante $A>0$ tell que

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx < A\int_0^\infty t^{-\alpha}\,(f(t))^p\,dt,$$

i.e

$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx}{\displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha}\,(f(t))^p\,dt} < A, \tag{1.61}$$

pour cela, on considère la fonction f_ξ, $0<\xi<-\alpha-p+1$ définie par

$$\begin{cases} f_\xi(t) = t^{(\alpha+p-1+\xi)/p-1}, & \text{si } t\in(0,1] \\ f_\xi(t) = 0, & \text{si } t\in(1,\infty), \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-\alpha-p}\left(\int_0^x f_\xi(t)\,dt\right)^p dx &= \int_0^1 x^{-\alpha-p}\left[\frac{x^{(\alpha+p-1+\xi)/p}}{(\alpha+p-1+\xi)/p}\right]^p dx \\
&= \left(\frac{p}{\alpha+p-1+\xi}\right)^p \int_0^1 x^{-\alpha-p+\alpha+p-1+\xi}\,dx \\
&= \left(\frac{p}{\alpha+p-1+\xi}\right)^p \frac{1}{\xi},
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty x^{-\alpha-p}\left(\int_0^x f_\xi(t)\,dt\right)^p dx = \left(\frac{p}{\alpha+p-1+\xi}\right)^p \frac{1}{\xi}. \tag{1.62}$$

D’autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f_\xi(t)\right)^p dt &= \int_0^1 t^{-\alpha}\left[t^{(\alpha+p-1+\xi)/p-1}\right]^p dt\\ &= \int_0^1 t^{-\alpha-p+\alpha+p-1+\xi}\, dt\\ &= \frac{1}{\xi},\end{aligned}$$

alors

$$\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f_\xi(t)\right)^p dt = \frac{1}{\xi}. \tag{1.63}$$

De (1.61), (1.62) et (1.63), on obtient $\left(\frac{p}{\alpha+p-1+\xi}\right)^p < A$, quand $\xi \longrightarrow 0$ on déduit $\left(\frac{p}{\alpha+p-1}\right)^p < A$, d’où $\left(\frac{p}{\alpha+p-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (1.59).

Dans l’inégalité (1.60), si $\left(\frac{p}{\alpha+p-1}\right)^p$ n’est pas optimale, alors il éxiste une constante $B > 0$ telle que

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx < B\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f(t)\right)^p dt,$$

i.e

$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx}{\displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f(t)\right)^p dt} < B. \tag{1.64}$$

Pour $0 < \xi < \alpha+p-1$, on définit la fonction f_ξ par :

$$\begin{cases} f_\xi(t) = t^{(\alpha+p-1-\xi)/p-1}, & \text{si } t \in [1,\infty)\\ f_\xi(t) = 0, & \text{si } t \in (0,1),\end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-\alpha-p}\left(\int_x^\infty f_\xi(t)\,dt\right)^p dx &= \int_1^\infty x^{-\alpha-p}\left[\frac{x^{(\alpha+p-1-\xi)/p}}{-(\alpha+p-1-\xi)/p}\right]^p dx\\ &= \left(\frac{-p}{\alpha+p-1-\xi}\right)^p \int_1^\infty x^{-\alpha-p+\alpha+p-1-\xi}\, dx\\ &= \left(\frac{-p}{\alpha+p-1-\xi}\right)^p \frac{1}{\xi},\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty x^{-\alpha-p}\left(\int_x^\infty f_\xi(t)\,dt\right)^p dx = \left(\frac{-p}{\alpha+p-1-\xi}\right)^p \frac{1}{\xi}, \tag{1.65}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f_\xi(t)\right)^p dt &= \int_1^\infty t^{-\alpha}\left[t^{(\alpha+p-1-\xi)/p-1}\right]^p dt\\ &= \int_1^\infty t^{-\alpha-p+\alpha+p-1-\xi}\,dt\\ &= \frac{1}{\xi},\end{aligned}$$

et

$$\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f_\xi(t)\right)^p dt = \frac{1}{\xi}, \tag{1.66}$$

alors de (1.64), (1.65) et (1.66) on a $\left(\frac{-p}{\alpha+p-1-\xi}\right)^p < B$, quand $\xi \longrightarrow 0$, on obtient $\left(\frac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p < B$.

On conclut que $\left(\frac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (1.60).

Chapitre 2

Inégalités inverses de Minkowski et inégalités integrales de Hardy.

Le présent chapitre concerne les inégalités inverses de Minkowski et celles de Hardy (dans le cas où les fonctions sont monotones). Ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationle parue [3] et une autre soumise [5].

2.1 Sur les inégalités inverses de Minkowski et les inégalités intégrales de Hardy.

En 2012, Sulaiman [40] a prouvé des inégalités intégrales dites inégalités inverses de Minkowski et celles de Hardy. En 2013, Banyat Sroysang obtient une généralisation de l'inégalité inverse de Minkowski [42] et des inégalités intégrales de Hardy [41]. Dans cette partie deux résultats sont obtenus, le premier est une amélioration de l'inégalité inverse de Minkowski et le second est une généralisation de l'inégalité intégrale de Hardy.

2.1.1 Introduction

L'inégalité de Minkowski :
soit $p \geq 1$, si

$$0 < \int_a^b f^p(x)dx < \infty \quad et \quad 0 < \int_a^b g^p(x)dx < \infty,$$

alors

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En 2012, Sulaiman a presenté :

(i) L'inégalité de Minkowski [40](theoreme 1.5)
Soient les fonctions $f,g>0$, si $p\geq 1$ et

$$1<m\leq \frac{f(x)}{g(x)}\leq M \quad pour\ tout\ x\in[a,b],$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{M+1}{M-1}\left(\int_a^b (f(x)-g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{m+1}{m-1}\left(\int_a^b (f(x)-g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

(ii) Inégalité intégrale de Hardy [40](theoreme 3.1)
Soit la fonction f non-négative mesurable sur $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$, $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Alors si
1)- $p\geq 1$,

$$p\int_a^b\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\leq (b-a)^p\int_a^b\left(\frac{f(x)}{x}\right)^p dx-\int_a^b(1-\frac{a}{x})^p f^p(x)dx. \tag{2.2}$$

2)- $0<p<1$,

$$p\int_a^b\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\geq (1-\frac{a}{b})^p\int_a^b f(x)^p dx-\frac{1}{b^p}\int_a^b (x-a)^p f^p(x). \tag{2.3}$$

En 2013, Banyat Sroysang a établi et prouvé les inégalités suivantes :

(i)Inégalité de Minkowski [42](theoreme 2.2)
Soient $f,g>0$, si $p\geq 1$ et

$$0<c<m\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq M, \quad pour\ tout\ x\in[a,b],$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{M+1}{M-c}\left(\int_a^b (f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{m+1}{m-c}\left(\int_a^b (f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

(ii) Inégalité intégrale de Hardy [41](theoreme 2.1 et theoreme 2.2)
Soit f non-négative mesurable sur $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $q > 0$. Alors si
1)- $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{F(x)^p}{x^q}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f(x)^p}{x^q}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{x^q} f^p(x)dx. \tag{2.5}$$

2)- $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \frac{F(x)^p}{x^q}dx \geq \frac{(b-a)^p}{b^q}\int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^q}\int_a^b (x-a)^p f^p(x). \tag{2.6}$$

2.1.2 Résultats principaux

Tout au long de ce travail(article[5]) , les fonctions f, g sont non-négatives mesurables sur l'intervalle (a, b) et $g^{-1}(x) = \frac{1}{g(x)}$.

Inégalité de Minkowski

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty, p \geq 1$,

$$0 < \int_a^b f^p(x)dx < \infty \quad et \quad 0 < \int_a^b g^p(x)dx < \infty.$$

Proposition 2.1.1. *Soient* $0 < c < m \leq M$ *et* $\alpha > 0$, *alors*

$$\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)} \leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}.$$

Preuve Comme on a

$$(c+\alpha)m \leq (c+\alpha)M,$$

alors

$$\alpha m - cM \leq \alpha M - cm$$

$$(M+\alpha)(m-c) \leq (m+\alpha)(M-c),$$

et on obtient

$$\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)} \leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}. \quad \square$$

Théorème 2.1.1. *Soient* $f, g > 0,\ p \geq 1,\ \alpha > 0$ *et*

$$0 < c < m \leq \frac{\alpha f(x)}{g(x)} \leq M, \quad pour\, tout\, x \in [a,b], \tag{2.7}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)}\left(\int_a^b(\alpha f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}\left(\int_a^b(\alpha f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Preuve D'après l'hypothèse (2.7), on a

$$0<\frac{1}{c}-\frac{1}{m}\leq\frac{1}{c}-\frac{g(x)}{\alpha f(x)}\leq\frac{1}{c}-\frac{1}{M},$$

$$\frac{cM}{M-c}\leq\frac{c\alpha f(x)}{\alpha f(x)-cg(x)}\leq\frac{cm}{m-c},$$

d'où

$$\frac{M}{\alpha(M-c)}(\alpha f(x)-cg(x))\leq f(x)\leq\frac{m}{\alpha(m-c)}(\alpha f(x)-cg(x)).$$

Par intégration, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{M}{\alpha(M-c)}\left(\int_a^b(\alpha f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{m}{\alpha(m-c)}\left(\int_a^b(\alpha f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

D'autre part, en prenant compte de l'hypothése (2.7)on a

$$0<m-c\leq\frac{\alpha f(x)-cg(x)}{g(x)}\leq M-c,$$

d'où

$$\frac{\alpha f(x)-cg(x)}{M-c}\leq g(x)\leq\frac{\alpha f(x)-cg(x)}{m-c},$$

et en intégrant, on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{M-c}\left(\int_a^b(\alpha f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{1}{m-c}\left(\int_a^b(\alpha f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Les inégalités (2.9) et (2.10), nous conduisent à l'inégalité (2.8). $\square$

Remarque 2.1.1. *Si on prend $\alpha=1$ dans l'inégualité (2.8), on obtient l'inégualité (2.4).*

L'inégalité de Hardy

Soit $0 < a < b < +\infty$.

Théorème 2.1.2. *Soient f, g deux fonctions non-négatives et mesurables sur $[a,b]$, avec*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Si g est non-décroissante, alors
(i) pour $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{F(x)^p}{g(x)}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f(x)^p}{g(x)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{g(x)} f^p(x)dx, \tag{2.11}$$

(ii) pour $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \frac{F(x)^p}{g(x)}dx \geq \frac{(b-a)^p}{g(b)} \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{g(b)} \int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx. \tag{2.12}$$

Preuve (i) $p \geq 1$.
En appliquant l'inégalité de Hölder pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^x f(t)dt &\leq \left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} (x-a)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F(x)^p}{g(x)}dx &= \int_a^b g^{-1}(x) \left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx \\
&\leq \int_a^b g^{-1}(x)\,(x-a)^{p-1} \left(\int_a^x f^p(t)dt\right) dx \\
&= \int_a^b \int_a^x g^{-1}(x)(x-a)^{p-1} f^p(t)dtdx \\
&= \int_a^b \int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1} f^p(t)dxdt \\
&= \int_a^b f^p(t) \left(\int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1}dx\right) dt.
\end{aligned}$$

En vertu de la non-décroissance de g sur $[t,b]$, on a

$$\forall x \in [t,b] : g^{-1}(x) \leq g^{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1}dx \\ &\leq \int_t^b g^{-1}(t)(x-a)^{p-1}dx \\ &= \tfrac{1}{p}.g^{-1}(t)\left[(b-a)^p-(t-a)^p\right]. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\int_a^b \frac{F(x)^p}{g(x)}dx \leq \frac{1}{p}\left[(b-a)^p \int_a^b \frac{f(x)^p}{g(x)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{g(x)} f^p(x)dx\right].$$

(ii) $0 < p < 1$.

En appliquant l'inégalité de Hölder pour $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, on a

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)dt &\geq \left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} (x-a)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{F(x)^p}{g(x)}dx &= \int_a^b g^{-1}(x)\left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx \\ &\geq \int_a^b g^{-1}(x)\,(x-a)^{p-1}\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)dx \\ &= \int_a^b f^p(t)\left(\int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1}dx\right)dt, \end{aligned}$$

en vertu de la non-décroissance de g sur $[t,b]$, on obtient

$$\forall x \in [t,b] : g^{-1}(b) \leq g^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned} R_2(t) &= \int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1}dx \\ &\geq \int_t^b g^{-1}(b)(x-a)^{p-1}dx \\ &= \tfrac{1}{p}.g^{-1}(b)\left[(b-a)^p-(t-a)^p\right]. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\int_a^b \frac{F(x)^p}{g(x)}dx \geq \frac{1}{p}\left[(\frac{(b-a)^p}{g(b)}\int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{g(b)}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx\right]. \quad \square$$

Remarque 2.1.2. *Si on remplace $g(x)$ par x^p dans le théorème (2.1.2), on obtient (2.2) et (2.3).*
Si on remplace $g(x)$ par x^q dans le théorème (2.1.2), on obtient (2.5) et (2.6).

2.2 les inégalités pondérées inverses de Minkowski et les inégalités intégrales de type Hardy.

Dans cette partie, les inégalités pondérées inverses de Minkowski et des inégalités intégrales de type Hardy sont établies et prouvées (travail soumis voir[5]).
Dans ce qui suit on considére que f et g sont des fonctions non-négatives mesurables.

2.2.1 Introduction

Dans [17] Hardy a prouvé l'inégalité suivante

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx, \tag{2.13}$$

où $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, pour toute fonction f non-négative mesurable sur $(0,\infty)$, $p>1$.
$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (2.13) (la plus petite possible).
En outre, en 1928 Hardy [18] a prouvé une forme généralisée de (2.13).
Si $f \geq 0$, $p>1$, et

$$\begin{cases} F(x)=\int_0^x f(t)dt, & m>1, \\ F(x)=\int_x^\infty f(t)dt, & m<1, \end{cases}$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-m}F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{|m-1|}\right)^p \int_0^\infty x^{-m}(xf(x))^p dx. \tag{2.14}$$

La constante dans (2.14) est optimale.

En 2012, Sulaiman a établi et prouvé les inégalités suivantes :

(i) L'inégalité de Minkowski [40, théorème 1.1]
Soient $f,g>0$, si $p\geq 1$ et

$$1<m\leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M \quad \textit{pour tout } x\in[a,b],$$

alors

$$\frac{M+1}{M-1}\left(\int_a^b (f(x)-g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{m+1}{m-1}\left(\int_a^b (f(x)-g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.15}$$

(ii) Inégalité intégrale de Hardy [40, théorème 3.1].
Soit f non-négative mesurable sur $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors si
1)- $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{x}\right)^p dx - \int_a^b (1-\frac{a}{x})^p f^p(x)dx. \tag{2.16}$$

2)- $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \geq (1-\frac{a}{b})^p \int_a^b f(x)^p dx - \frac{1}{b^p}\int_a^b (x-a)^p f^p(x). \tag{2.17}$$

En 2013, Banyat Sroysang a prouvé :

(i)Inégalité de Minkowski [42, théorème 2.2].
Soient $f,g > 0$, si $p \geq 1$ et

$$0 < c < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M, \quad pour\ tout\ x \in [a,b],$$

alors

$$\frac{M+1}{M-c}\left(\int_a^b (f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{m+1}{m-c}\left(\int_a^b (f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.18}$$

(ii) Inégalité intégrale de Hardy [41, théorème 2.1 et théorème 2.2].
Soit f non-négative mesurable sur $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $q > 0$. Alors si
1)- $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{F(x)^p}{x^q} dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f(x)^p}{x^q} dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{x^q} f^p(x)dx. \tag{2.19}$$

2)- $0 < p < 1$,

$$p \int_a^b \frac{F(x)^p}{x^q} dx \geq \frac{(b-a)^p}{b^q} \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^q} \int_a^b (x-a)^p f^p(x). \tag{2.20}$$

Shanhe Wu et les autres ont généralisés (2.19), (2.20).

Inégalité intégrale de Hardy[46, théorème 3.5]

Soient f, g non-négative mesurable sur $[a,b]$ et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si g est non-décroissante, alors si

(i) $p \geq 1$,

$$p \int_a^b \frac{F(x)^p}{g^q(x)} dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f(x)^p}{g^q(x)} dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{g^q(x)} f^p(x)dx, \tag{2.21}$$

(ii) $0 < p < 1$,

$$p \int_a^b \frac{F(x)^p}{g^q(x)} dx \geq \frac{(b-a)^p}{g^q(b)} \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{g^q(b)} \int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx. \tag{2.22}$$

B.Benaissa a etabli et prouvé : **(i) Inégalité de Minkowski**[3, théorème 2.1]

Supposons $f, g > 0$, $\alpha > 0$, si $p \geq 1$ et

$$0 < c < m \leq \frac{\alpha f(x)}{g(x)} \leq M \quad pour\ tout\ x \in [a,b],$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)} \left(\int_a^b (\alpha f(x) - cg(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)} \left(\int_a^b (\alpha f(x) - cg(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

L'objectif de ce travail est de généraliser les inégalités (2.21), (2.22) et (2.23). La généralisation de (2.23) était obtenue en utilisant la forme discrete et par l'introduction d'une fonction de poids. Concernant les inégalitées integrales (2.21), (2.22), elles sont établies et prouvées pour l'opérateur pondéré de Hardy et son dual.

2.2.2 Résultats principaux

Les fonctions f, g et w sont measurables non-négatives sur $[a, b]$.

Inégalité pondérée de Minkowski

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $p > 0$,

$$0 < \int_a^b f^p(x)w(x)dx < \infty \quad et \quad 0 < \int_a^b g^p(x)w(x)dx < \infty.$$

On désigne par $L_{p,w}(a,b)$ l'espace pondéré de Lebesgue constitué de toutes (les classes d'equivalence) les fonctions f définies sur (a,b) et $0 < p < \infty$ avec des quasi-norms finies.

$$\|f\|_{L_{p,w}(a,b)} = \left(\int_a^b f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Si $p = \infty$,

$$\|f\|_{L_{\infty,w}(a,b)} = sup ess_{x\in(a,b)} |f(x)w(x)|.$$

Théorème 2.2.1. *Soient $f, g > 0$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$, w et*

$$0 < c < m \leq \frac{\alpha f(x)}{g(x)} \leq M \quad pour\ tout\ x \in [a,b], \tag{2.24}$$

alors si
(I) w est non-décroissante sur (a,b),

$$\begin{aligned} &\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)} w^{\frac{1}{p}}(a) \left(\int_a^b (\alpha f(x) - cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^b f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)} w^{\frac{1}{p}}(b) \left(\int_a^b (\alpha f(x) - cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

(II) w est non-croissante sur (a,b),

$$\begin{aligned} &\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)} w^{\frac{1}{p}}(b) \left(\int_a^b (\alpha f(x) - cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^b f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)} w^{\frac{1}{p}}(a) \left(\int_a^b (\alpha f(x) - cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Preuve A partir de (2.24), on obtient

$$0 < \frac{1}{c} - \frac{1}{m} \le \frac{1}{c} - \frac{g(x)}{\alpha f(x)} \le \frac{1}{c} - \frac{1}{M},$$

par conséquent

$$\frac{cM}{M-c} \le \frac{c\alpha f(x)}{\alpha f(x) - c\,g(x)} \le \frac{cm}{m-c},$$

donc

$$\left[\frac{M}{\alpha(M-c)}(\alpha f(x) - c\,g(x))\right]^p w(x) \le f^p(x)w(x) \le \left[\frac{m}{\alpha(m-c)}(\alpha f(x) - c\,g(x))\right]^p w(x).$$

En intégrant sur $[a,b]$, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{M}{\alpha(M-c)}\left(\int_a^b (\alpha f(x) - c\,g(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\int_a^b f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ \le \frac{m}{\alpha(m-c)}\left(\int_a^b (\alpha f(x) - c\,g(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

(2.24) implique

$$0 < m - c \le \frac{\alpha f(x) - c\,g(x)}{g(x)} \le M - c,$$

et

$$\left[\frac{\alpha f(x) - c\,g(x)}{M-c}\right]^p w(x) \le g^p(x)w(x) \le \left[\frac{\alpha f(x) - c\,g(x)}{m-c}\right]^p w(x).$$

Par intégration, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{M-c}\left(\int_a^b (\alpha f(x) - c\,g(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\int_a^b g^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ \le \frac{1}{m-c}\left(\int_a^b (\alpha f(x) - c\,g(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

En appliquant les inégalités (2.27) et (2.28), on conclut que

$$\begin{aligned} &\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)}\left(\int_a^b (\alpha f(x) - cg(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_a^b f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}\left(\int_a^b (\alpha f(x) - cg(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Puisque la fonction de poids w est non-décroissante (respectivement non-croissante) sur $[a,b]$, on déduit que

$$\textit{pour tout } x\in[a,b]: w^{\frac{1}{p}}(a)\leq w^{\frac{1}{p}}(x)\leq w^{\frac{1}{p}}(b),$$

$$\left(\textit{respectivement pour tout } x\in[a,b]: w^{\frac{1}{p}}(b)\leq w^{\frac{1}{p}}(x)\leq w^{\frac{1}{p}}(a)\right),$$

ce qui implique l'inégalité (2.25) (respectivement (2.26)). $\square$

Remarque 2.2.1. *Pour $p=\infty$, les inégalités (2.25) et (2.26) prennent la forme suivante.*

$$\begin{aligned}\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)}\left\|(\alpha f(x)-cg(x))\right\|_{L_{\infty,w}(a,b)} &\leq \|f\|_{L_{\infty,w}(a,b)}+\|g\|_{L_{\infty,w}(a,b)}\\ &\leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}\left\|(\alpha f(x)-cg(x))\right\|_{L_{\infty,w}(a,b)}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Cette inégalité est valable presque partout.

Remarque 2.2.2. *Si on prend $w(x)\equiv 1$ et $p\geq 1$ dans le théorème (2.2.1), on obtient (2.23).*

Corollaire 2.2.1. *Soient $f,g>0,\ p>0,\ \alpha>0$. Si la condition (2.24) est satisfaite, alors*

$$\begin{aligned}&\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)}\left\|\int_a^b(\alpha f(x)-c\,g(x))dx\right\|_{L_{p,w}(a,b)}\\ &\leq \left\|\int_a^b f(x)dx\right\|_{L_{p,w}(a,b)}+\left\|\int_a^b g(x)dx\right\|_{L_{p,w}(a,b)}\\ &\leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}\left\|\int_a^b(\alpha f(x)-c\,g(x))dx\right\|_{L_{p,w}(a,b)}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Preuve En utilisant l'inégalité (2.24), on obtient

$$\frac{M}{\alpha(M-c)}(\alpha f(x)-c\,g(x))\leq f(x)\leq\frac{m}{\alpha(m-c)}(\alpha f(x)-c\,g(x)),$$

donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{M}{\alpha(M-c)}\int_a^b(\alpha f(t)-c\,g(t))dt\right)^p &\leq \left(\int_a^b f(t)dt\right)^p\\ &\leq \left(\frac{m}{\alpha(m-c)}\int_a^b(\alpha f(t)-c\,g(t))dt\right)^p.\end{aligned}$$

En intégrant sur $[a,b]$, on a

$$\frac{M}{\alpha(M-c)}\left[\int_a^b\left(\int_a^b(\alpha f(t)-c\,g(t))dt\right)^p w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b\left(\int_a^b f(t)dt\right)^p w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{m}{\alpha(m-c)}\left[\int_a^b\left(\int_a^b(\alpha f(t)-c\,g(t))dt\right)^p w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.32}$$

De l'hypothèse (2.24), on conclut que

$$\frac{\alpha f(x)-c\,g(x)}{M-c} \leq g(x) \leq \frac{\alpha f(x)-c\,g(x)}{m-c}),$$

par conséquent

$$\left(\frac{1}{M-c}\int_a^b(\alpha f(t)-c\,g(t))dt\right)^p \leq \left(\int_a^b g(t)dt\right)^p \leq \left(\frac{1}{m-c}\int_a^b(\alpha f(t)-c\,g(t))dt\right)^p.$$

Par intégration, on obtient

$$\frac{1}{M-c}\left[\int_a^b\left(\int_a^b(\alpha f(t)-c\,g(t))dt\right)^p w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b\left(\int_a^b g(t)dt\right)^p w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{1}{m-c}\left[\int_a^b\left(\int_a^b(\alpha f(t)-c\,g(t))dt\right)^p w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.33}$$

Les inégalités (2.32) et (2.33) impliquent (2.31). □

l'inégalité inverse de Minkowski sur les sommes

Soit la suite $A=\{a_k\}$ où $a_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2.1. *Soit $o < p < \infty$. On dit que $A \in l_p(\mathbb{C})$ si*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^p < \infty.$$

Corollaire 2.2.2. *Soient $A,B \in l_p(\mathbb{R}^+)$, $\alpha > 0$ et $p > 0$. Si*

$$0 < c < m \leq \frac{\alpha\, a_k}{b_k} \leq M \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

alors

$$\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\, a_k - c\, b_k)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|A\|_{l_p}+\|B\|_{l_p} \leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha\, a_k - c\, b_k)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.34}$$

où
$$\|A\|_{l_p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \|B\|_{l_p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Preuve Si $a = 0,\ b = \infty$ et $w(x) = 1$ dans le théorème (2.2.1), on obtient
$$\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)}\left(\int_0^{\infty}(\alpha f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^{\infty} f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{\infty} g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}\left(\int_0^{\infty}(\alpha f(x)-cg(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Soit $f(x) = a_k$ et $g(x) = b_k$ pour tout $x \in [k, k+1)$, alors
$$\int_0^{\infty} f^p(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} a_k^p dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^p,$$
$$\int_0^{\infty} g^p(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} b_k^p dx = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^p,$$
et l'inégalité (2.34) est prouvée. □

Inégalité intégrale du type Hardy pondérée

Soit $0 < a < b < +\infty$. En utilisant l'opérateur pondéré de Hardy
$$F_w(x) = \int_a^x f(t)w(t)dt, \quad x \in [a,b],$$
on établit et on prouve les théorèmes suivants.

Théorème 2.2.2. *Soient $q > 0$ et f, g des fonctions positives définies sur $[a,b]$.*
Si g est non-décroissante et w est non-croissante, alors
(i) $p \geq 1$,
$$p\int_a^b \frac{(F_w)^p(x)}{g^q(x)}dx \leq w^p(a)\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f(x)^p}{g^q(x)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{g^q(x)} f^p(x)dx\right], \tag{2.35}$$
(ii) $0 < p < 1$,
$$p\int_a^b \frac{(F_w)^p(x)}{g^q(x)}dx \geq w^p(b)\left[\frac{(b-a)^p}{g^q(b)}\int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{g^q(b)}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx\right]. \tag{2.36}$$

Preuve (i) Soit $p \geq 1$.
Si w est non croissante sur $[a,b]$, en utilisant l'inégalité de Hölder , on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_a^x f(t)w(t)dt &= \int_a^x f(t)w^{\frac{1}{p}}(x)w^{\frac{1}{p'}}(x)dt \\
&\leq \left(\int_a^x f^p(t)w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x w(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq w^{\frac{1}{p}}(a)\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} w^{\frac{1}{p'}}(a)\left(\int_a^x dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= w(a)\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} (x-a)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F_w^p(x)}{g^q(x)}dx &= \int_a^b g^{-q}(x)\left(\int_a^x f(t)w(t)dt\right)^p dx \\
&\leq \int_a^b g^{-q}(x)w^p(a)\,(x-a)^{p-1}\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)dx \\
&= w^p(a)\int_a^b \int_a^x g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}f^p(t)dtdx \\
&= w^p(a)\int_a^b f^p(t)\left(\int_t^b g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}dx\right)dt,
\end{aligned}$$

puisque g est non-décroissante sur $[t,b]$, on déduit

$$pour\ tout\ x \in [t,b] : g^{-q}(x) \leq g^{-q}(t),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_t^b g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}dx &\leq \int_t^b g^{-q}(t)(x-a)^{p-1}dx \\
&= \tfrac{1}{p}.g^{-q}(t)\left[(b-a)^p-(t-a)^p\right],
\end{aligned}$$

finalement, on déduit que

$$\int_a^b \frac{F_w^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{w^p(a)}{p}\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b (x-a)^p\frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx\right].$$

(ii) pour $0 < p < 1$. Si w est non-croissante sur $[a,b]$, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^x f(t)w(t)dt &\geq \left(\int_a^x w(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x w(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\geq w^{\frac{1}{p}}(x)\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} w^{\frac{1}{p'}}(x)\left(\int_a^x dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= w(x)\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F_w^p(x)}{g^q(x)}dx &= \int_a^b g^{-q}(x)\left(\int_a^x f(t)w(t)dt\right)^p dx \\
&\geq \int_a^b g^{-q}(x)w^p(x)(x-a)^{p-1}\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)dx \\
&\geq w^p(b)\int_a^b f^p(t)\left(\int_t^b g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}dx\right)dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse que la fonction g est non-décroissante sur $[t,b]$, on obtient

$$\textit{pour tout } x\in[t,b] : g^{-q}(b)\leq g^{-q}(x),$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_t^b g^{-q}(x)(x-a)^{p-1}dx &\geq \int_t^b g^{-q}(b)(x-a)^{p-1}dx \\
&= \tfrac{1}{p}.g^{-q}(b)\left[(b-a)^p-(t-a)^p\right],
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_a^b \frac{F_w^p(x)}{g^q(x)}dx \geq \frac{w^p(b)}{p}\left[(\frac{(b-a)^p}{g^q(b)}\int_a^b f^p(x)dx-\frac{1}{g^q(b)}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx\right].$$

Les preuves des théorèmes suivants sont similaires à celles du théorème (2.2.2).

Théorème 2.2.3. *Soient $q>0$ et f, g des fonctions positives définies sur $[a,b]$.*
Si g et w sont non-croissantes, alors
(i) $p\geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{F_w(x)^p}{g^q(x)}dx \leq \frac{w^p(a)}{g^q(b)}\left[(b-a)^p\int_a^b f^p(x)dx-\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx\right], \tag{2.37}$$

(ii) $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \frac{F_w(x)^p}{g^q(x)}dx \geq w^p(b)\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b (x-a)^p\frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx\right]. \tag{2.38}$$

Théorème 2.2.4. *Soient $q > 0$ et f, g des fonctions positives définies sur $[a,b]$. Si g et w sont non-décroissantes, alors*
(i) $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{F_w(x)^p}{g^q(x)}dx \leq w^p(b)\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f(x)^p}{g^q(x)}dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{g^q(x)}f^p(x)dx\right], \tag{2.39}$$

(ii) $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \frac{F_w(x)^p}{g^q(x)}dx \geq \frac{w^p(a)}{g^q(b)}\left[(b-a)^p\int_a^b f^p(x)dx - \int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx\right]. \tag{2.40}$$

Théorème 2.2.5. *Soient $q > 0$ et f, g des fonctions positives définies sur $[a,b]$. Si g est non-croissante et que w est non-décroissante, alors*
(i) $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{F_w(x)^p}{g^q(x)}dx \leq \frac{w^p(b)}{g^q(b)}\left[(b-a)^p\int_a^b f^p(x)dx - \int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx\right], \tag{2.41}$$

(ii) $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \frac{F_w(x)^p}{g^q(x)}dx \geq w^p(a)\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b (x-a)^p\frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx\right]. \tag{2.42}$$

Remarque 2.2.3. *Si on pose $w(x) \equiv 1$ dans les théorèmes (2.2.2) et (2.2.4), on obtient ([Théorème 3.5] [46]).*

Si on pose $w(x) \equiv 1$ dans les théorèmes (2.2.3) et (2.2.5), on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.3. *Soient $q > 0$ et $f, g > 0$ on $[a,b] \subseteq (0,\infty)$, telle que g est non-croissante ; si*
(i) $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{1}{g^q(b)}\left[(b-a)^p\int_a^b f^p(x)dx - \int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx\right], \tag{2.43}$$

(ii) $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \geq (b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b (x-a)^p\frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx. \tag{2.44}$$

Remarque 2.2.4. *L'inégalité (2.43) (respectivement (2.44)) est l'inverse de (3.6) (respectivement (3.5)) voir [théorème 3.5] [46].*

En utilisant l'opérateur dual de Hardy pondéré

$$\widetilde{F}_w(x) = \int_x^b f(t)w(t)dt, \quad x \in [a,b],$$

on prouve les théorèmes suivants.

Théorème 2.2.6. *Soient $q > 0$, f, g des fonctions positives définies sur $[a,b]$.*
Si g est non-décroissante et w est non-croissante, alors
(i) $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{w^p(a)}{g^q(a)}\left[(b-a)^p\int_a^b f^p(x)dx - \int_a^b (b-x)^p f^p(x)dx\right], \tag{2.45}$$

(ii) $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \geq w^p(b)\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f(x)^p}{g^q(x)}dx - \int_a^b \frac{(b-x)^p}{g^q(x)} f^p(x)dx\right]. \tag{2.46}$$

Preuve (i) Soit $p \geq 1$. A l'aide de l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_x^b f(t)w(t)dt &\leq \left(\int_x^b f^p(t)w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq w^{\frac{1}{p}}(x)\left(\int_x^b f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} w^{\frac{1}{p'}}(x)\left(\int_x^b dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= w(x)\left(\int_x^b f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}(b-x)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

puisque la fonction g est non décroissante sur $[a,t]$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx &\leq w^p(a)\int_a^b\int_x^b g^{-q}(x)(b-x)^{p-1}f^p(t)dtdx \\
&= w^p(a)\int_a^b f^p(t)\left(\int_a^t g^{-q}(x)(b-x)^{p-1}dx\right)dt \\
&\leq w^p(a)\int_a^b f^p(t)g^{-q}(a)\left(\int_a^t (b-x)^{p-1}dx\right)dt,
\end{aligned}$$

par conséquent on obtient

$$\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \le \frac{w^p(a)}{p}\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(a)}dx - \int_a^b (b-x)^p\frac{f^p(x)}{g^q(a)}dx\right].$$

(ii) Soit $0<p<1$. L'inégalité inverse de Hölder implique

$$\int_x^b f(t)w(t)dt \ge \left(\int_x^b w(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

d'où

$$\int_x^b f(t)w(t)dt \ge w(b)\left(\int_x^b f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}(b-x)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Le reste est similaire à celui de la preuve (i). □

Les preuves des théorèmes suivants sont similaires à celles du théorème (2.2.6).

Théorème 2.2.7. *Soient $q>0$, f, g des fonctions positives définies sur $[a,b]$. Si g et w sont non-croissantes, alors*
(i) $p\ge 1$,

$$p\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \le \frac{w^p(a)}{g^q(b)}\left[(b-a)^p\int_a^b f^p(x)dx - \int_a^b (b-x)^p f^p(x)dx\right], \tag{2.47}$$

(ii) $0<p<1$,

$$p\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \ge w^p(b)\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b (x-a)^p\frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx\right]. \tag{2.48}$$

Théorème 2.2.8. *Soient $q>0$, f, g des fonctions positives définies sur $[a,b]$. Si g et w sont non-décroissantes, alors*
(i) $p\ge 1$,

$$p\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \le \frac{w^p(b)}{g^q(a)}\left[(b-a)^p\int_a^b f^p(x)dx - \int_a^b (b-x)^p f^p(x)dx\right], \tag{2.49}$$

(ii) $0<p<1$,

$$p\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \ge w^p(a)\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f(x)^p}{g^q(x)}dx - \int_a^b \frac{(b-x)^p}{g^q(x)}f^p(x)dx\right]. \tag{2.50}$$

Théorème 2.2.9. *Soient* $q > 0,\ f, g$ *des fonctions positives définies sur* $[a, b]$.
Si g *est non-croissante et* w *est non-décroissante, alors*
(i) $p \geq 1$,

$$p\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{w^p(b)}{g^q(b)}\left[(b-a)^p\int_a^b f^p(x)dx - \int_a^b (b-x)^p f^p(x)dx\right], \tag{2.51}$$

(ii) $0 < p < 1$,

$$p\int_a^b \frac{\widetilde{F}_w^p(x)}{g^q(x)}dx \geq w^p(a)\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx - \int_a^b (x-a)^p\frac{f^p(x)}{g^q(x)}dx\right]. \tag{2.52}$$

Chapitre 3

Sur quelques inégalités pondérées du type de Hardy.

Dans ce chapitre, on établit quelques nouveaux types de l'inégalité intégrale classique de Hardy (3.1) en incluant plusieurs paramètres et en utilisant des opérateurs pondérés(Ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationle parue [4]).
$S_1 := (S_1)_g^w$ et $S_2 := (S_2)_g^w$ definis par

$$S_1(x) = \frac{1}{W(x)} \int_a^x w(t)g(f(t))dt, \quad S_2(x) = \int_a^x \frac{w(t)}{W(t)} g(f(t))dt,$$

avec

$$W(x) = \int_0^x w(t)dt, \quad pour\ x \in (0, +\infty),$$

où w est une fonction de poids et g est une fonction réelle continue sur $(0, +\infty)$.

3.1 Introduction

En 1928, Hardy a prouvé les inégalités suivantes [16].
Soit f une fonction non-négative mesurable sur $(0, \infty)$,
Inégalité de Hardy classique

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)dt & si \quad m > 1, \\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)dt & si \quad m < 1, \end{cases}$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-m} F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{|m-1|} \right)^p \int_0^\infty x^{-m} (xf(x))^p dx, \quad si\ p > 1. \tag{3.1}$$

L'inégalité (3.1) peut être réécrite sous la forme suivante

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)dt \quad si \quad \alpha < p-1, \\ \\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)dt \quad si \quad \alpha > p-1, \end{cases}$$

alors

$$\int_0^\infty x^{\alpha-p} F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{|p-1-\alpha|}\right)^p \int_0^\infty x^\alpha f^p(x)dx, \quad si\ p > 1. \tag{3.2}$$

Les inégalités de type de Hardy ont été étudiées par un grand nombre d'auteurs au cours du XXe siècle. Pendant les vingt dernières années, un grand nombre d'articles a été publié . Diverses généralisations et analogues discrets de l'inégalité de Hardy et de ses généralisations sont connues. (Voir : [13]-[17], [19], [20], [22], [23], [26]-[31], [38], [44], [45]). L'objectif de ce travail est d'obtenir de nouveaux types de l'inégalité intégrale classique de Hardy qui sera utile dans plusieurs applications et en particulier en analyse avec l'utilisation des opérateurs S_1, S_2.

Nous adoptons la convention et les notations suivantes :

(i) On pose $\dfrac{0}{0} = 0$.

(ii) On note par $\widetilde{S_1}$ et $\widetilde{S_2}$ le dual de S_1 et S_2 respectivement.

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous énonçons les lemmes suivants qui seront utiles dans les démonstrations des théorèmes principaux. Le lemme suivant a étè prouvé dans [14].

Lemme 3.2.1. *Soient $0 < p \leq q < \infty$ et f, w des fonctions non-négatives mesurables sur (a,b) telles que $\int_a^b f^q(x)w(x)dx < \infty$, alors*

$$\int_a^b f^p(x)w(x)dx \leq \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_a^b f^q(x)w(x)dx\right)^{\frac{p}{q}}. \tag{3.3}$$

Preuve En utilisant l'inégalité intégrale de Hölder et en utilisant le paramètre $\dfrac{q}{p} \geq 1$

avec son conjugué $\dfrac{q}{q-p}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f^p(x)w(x)dx &= \int_a^b \left(w^{\frac{q-p}{q}}(x)\right)\left(f^p(x)w^{\frac{p}{q}}(x)\right)dx \\ &\leq \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{\frac{q-p}{q}}\left(\int_a^b f^q(x)w(x)dx\right)^{\frac{p}{q}}. \qquad \square\end{aligned}$$

Lemme 3.2.2. *soient* $1 < p \leq q < \infty$ *et* f, g, w *des fonctions non-négatives mesurables sur* (a,b) *telle que* $W(x) = \int_0^x w(t)dt$. *Si* $m \neq 1$, *alors*

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)}g^p(f(x))dx \leq \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{\frac{mq}{p}}(x)}g^q(f(x))dx\right)^{\frac{p}{q}}. \tag{3.4}$$

Preuve En utilisant le lemme 3.2.1, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)}g^p(f(x))dx &= \int_a^b \left(\frac{g(f(x))}{W^{\frac{m}{p}}(x)}\right)^p w(x)dx \\ &\leq \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_a^b \left(\frac{g(f(x))}{W^{\frac{m}{p}}(x)}\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{\frac{mq}{p}}(x)}g^q(f(x))dx\right)^{\frac{p}{q}}. \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque 3.2.1. *En posant* $m = p - \alpha$ *dans l'inégalité (3.4), il vient*

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}g^p(f(x))dx \leq \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{q-\frac{\alpha q}{p}}(x)}g^q(f(x))dx\right)^{\frac{p}{q}}. \tag{3.5}$$

3.3 Résultats principaux

Soit $0 < a < b < +\infty$. Tout au long de ce travail, on supposera que les fonctions sont non-négatives mesurables et que les intégrales sont finies où $w \in L_p(0,\infty)$ est une fonction de poids et

$$W(x) = \int_0^x w(t)dt.$$

Théorème 3.3.1. *Soient f, g, w des fonctions non-négatives mesurables sur* $(0,+\infty)$*,* $1 < p \leq q < \infty$ *et* $m > 1$*. Si*

$$S_1(x) = \frac{1}{W(x)} \int_a^x w(t)g(f(t))dt \quad \text{et} \quad \lambda \geq \frac{m-1}{p+m-1},$$

alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx \leq \; & \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}} \\ & \times \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{\frac{mq}{p}}(x)} g^q(f(x))dx\right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Preuve On a

$$(S_1)'(x) = \frac{w(x)g(f(x))}{W(x)} - \frac{w(x)}{W(x)} S_1(x),$$

en intégrant par parties le membre gauche de (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx = \; & \left[\frac{-S_1^p(x)}{(m-1)W^{m-1}(x)}\right]_a^b - \frac{p}{m-1} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx \\ & + \frac{p}{m-1} \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))S_1^{p-1}(x)}{W^m(x)} dx. \end{aligned}$$

Puisque $m > 1$ et $S_1(b) \geq 0$, il découle

$$\frac{p+m-1}{m-1} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx \leq \frac{p}{m-1} \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))S_1^{p-1}(x)}{W^m(x)} dx.$$

En utilisant l'hypothèse sur λ, il s'ensuit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx \; & \leq \frac{p+m-1}{m-1} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx \\ & \leq \frac{p}{m-1} \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))S_1^{p-1}(x)}{W^m(x)} dx, \end{aligned}$$

l'application de l'inégalité intégrale de Hölder pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ nous donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx \leq \; & \frac{\lambda p}{m-1} \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ & \times \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} g^p(f(x))dx\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et par simplification, on obtient

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} S_1^p(x)dx \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} g^p(f(x))dx.$$

On termine la preuve en appliquant l'inégalité (3.4) au membre droit de la dernière inégalité. □

Théorème 3.3.2. *Soient* f, g, w *des fonctions non-négatives mesurables sur* $(0,+\infty)$, $1 < p \leq q < \infty$ *et* $m < 1$. *Si*

$$\widetilde{S_1}(x) = \frac{1}{W(x)} \int_x^b w(t)g(f(t))dt \quad et \quad \lambda \geq \frac{1-m}{1-m-p} > 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} \widetilde{S_1}^p(x)dx \ &\leq \left(\frac{\lambda p}{1-m}\right)^p \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}} \\ &\times \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{\frac{mq}{p}}(x)} g^q(f(x))dx\right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Preuve En dérivant $\widetilde{S_1}(x)$, on a

$$(\widetilde{S_1})'(x) = -\frac{w(x)g(f(x))}{W(x)} - \frac{w(x)}{W(x)} \widetilde{S_1}(x).$$

En effectuant une intégration par parties au membre gauche de (3.7), il vient

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} \widetilde{S_1}^p(x)dx = \ & \left[\frac{-\widetilde{S_1}^p(x)}{(m-1)W^{m-1}(x)}\right]_a^b + \frac{p}{1-m} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} \widetilde{S_1}^p(x)dx \\ & + \frac{p}{1-m} \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))\widetilde{S_1}^{p-1}(x)}{W^m(x)} dx, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{1-m-p}{1-m} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} \widetilde{S_1}^p(x)dx = \frac{p}{1-m} \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))\widetilde{S_1}^{p-1}(x)}{W^m(x)} dx,$$

en utilisant l'hypothèse sur λ, on déduit que

$$\frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)} \widetilde{S_1}^p(x)dx \leq \frac{p}{1-m} \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))\widetilde{S_1}^{p-1}(x)}{W^m(x)} dx,$$

et par l'inégalité intégrale de Hölder, on a

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)}\widetilde{S_1}^p(x)dx \leq \frac{\lambda p}{1-m}\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)}\widetilde{S_1}^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \times \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)}g^p(f(x))dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)}\widetilde{S_1}^p(x)dx \leq \left(\frac{\lambda p}{1-m}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^m(x)}g^p(f(x))dx.$$

En utilisant l'inégalité (3.4), on aboutit au résultat. $\square$

Théorème 3.3.3. *Soient f, g, w des fonctions non-négatives mesurables sur $(0,+\infty)$, $p>1$ et $m>1$. Si*

$$S_3(x) = \frac{1}{W(x)}\int_{\frac{x}{2}}^x w(t)g(f(t))dt \quad et \quad \lambda \geq \frac{m-1}{p+m-1},$$

alors

$$\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}|G_1(x)|^p dx, \tag{3.8}$$

où

$$G_1(x) = g(f(x)) - \frac{w(\frac{x}{2})g(f(\frac{x}{2}))}{2w(x)}.$$

Preuve Par dérivation on obtient

$$(S_3)'(x) = \frac{w(x)G_1(x)}{W(x)} - \frac{w(x)}{W(x)}S_3(x).$$

A l'aide d'une intégration par parties du membre gauche de (3.8), on déduit

$$\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx = \left[\frac{-S_3^p(x)}{(m-1)W^{m-1}(x)}\right]_0^b - \frac{p}{m-1}\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx + \frac{p}{m-1}\int_0^b \frac{w(x)G_1(x)S_3^{p-1}(x)}{W^m(x)}dx.$$

Puisque $m>1$ et $S_3(b)\geq 0$, on a

$$\frac{p+m-1}{m-1}\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx \leq \frac{p}{m-1}\int_0^b \frac{w(x)|G_1(x)|S_3^{p-1}(x)}{W^m(x)}dx.$$

et en utilisant l'hypothèse sur λ, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx &\leq \frac{p+m-1}{m-1}\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx\\ &\leq \frac{p}{m-1}\int_0^b \frac{w(x)|G_1(x)|S_3^{p-1}(x)}{W^m(x)}dx,\end{aligned}$$

avec l'inégalité intégrale de Hölder ,on aboutit à

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx \leq & \frac{\lambda p}{m-1}\left(\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\times\left(\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}|G_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

alors

$$\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_3^p(x)dx \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}|G_1(x)|^p dx. \qquad \square$$

Si on pose $g(x)=x$, $w(x)=1$ et $q=p$ dans les théorèmes 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3, on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 3.3.1. *Soient $p>1, m>1$, f une fonction non-négative mesurable sur $(0,+\infty)$. Si*

$$F_1(x)=\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt \quad et \quad \lambda \geq \frac{m-1}{p+m-1},$$

alors

$$\int_a^b x^{-m}F_1^p(x)dx \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_a^b x^{-m}f^p(x)dx. \tag{3.9}$$

Corollaire 3.3.2. *Soient $p>1, m<1$, f une fonction non-négative mesurable sur $(0,+\infty)$. Si*

$$F_2(x)=\frac{1}{x}\int_x^b f(t)dt \quad et \quad \lambda \geq \frac{1-m}{1-m-p}>0,$$

alors

$$\int_a^b x^{-m}F_2^p(x)dx \leq \left(\frac{\lambda p}{1-m}\right)^p \int_a^b x^{-m}f^p(x)dx. \tag{3.10}$$

Corollaire 3.3.3. *Soient $p>1, m>1$, f une fonction non-négative mesurable sur $(0,+\infty)$. Si*

$$F_3(x)=\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt \quad et \quad \lambda \geq \frac{m-1}{p+m-1},$$

alors

$$\int_0^b x^{-m}F_3^p(x)dx \leq \left(\frac{\lambda p}{m-1}\right)^p \int_0^b x^{-m}|f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})|^p dx. \tag{3.11}$$

Théorème 3.3.4. *Soient f, g, w des fonctions non-négatives mesurables sur $(0,+\infty)$ et $\alpha < p-1$, $1 < p \le q < \infty$. Si*

$$S_2(x) = \int_a^x \frac{w(t)}{W(t)} g(f(t))dt,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} S_2^p(x)dx &\le \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}} \\ &\times \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{q-\frac{\alpha q}{p}}(x)} g^q(f(x))dx\right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve On a

$$(S_2)'(x) = \frac{w(x)g(f(x))}{W(x)},$$

en intégrant par parties le membre gauche de (3.12), on déduit

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} S_2^p(x)dx &= \left[\frac{-S_2^p(x)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(x)}\right]_a^b + \frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))S_2^{p-1}(x)}{W^{p-\alpha}(x)}dx \\ &= \frac{-S_2^p(b)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(b)} + \frac{p}{p-\alpha-1} \\ &\times \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))S_2^{p-1}(x)}{W^{p-\alpha}(x)}dx. \end{aligned}$$

Vu que $p-\alpha-1 > 0$ et $S_2(b) \ge 0$, on a

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} S_2^p(x)dx \le \frac{p}{p-\alpha-1} \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))S_2^{p-1}(x)}{W^{p-\alpha}(x)}dx,$$

ensuite l'inégalité intégrale de Hölder nous donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} S_2^p(x)dx \le & \quad \frac{p}{p-\alpha-1} \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} S_2^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ & \times \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x))dx\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et par simplification, on obtient

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} S_2^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x))dx.$$

En appliquant l'inégalité (3.5) au membre droit de la dernière inégalité, on arrive à l'inégalité (3.12). □

Théorème 3.3.5. *Soient f, g, w des fonctions non-négatives mesurables sur $(0,+\infty)$ et $\alpha > p-1$, $1 < p \leq q < \infty$. Si*

$$\widetilde{S_2}(x) = \int_x^b \frac{w(t)}{W(t)} g(f(t))dt,$$

alors

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \widetilde{S_2}^p(x)dx &\leq \left(\frac{p}{\alpha-p+1}\right)^p \left(\int_a^b w(x)dx\right)^{1-\frac{p}{q}} \\ &\times \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{q-\frac{\alpha q}{p}}(x)} g^q(f(x))dx\right)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Preuve En dérivant $\widetilde{S_2}(x)$, on obtient

$$(\widetilde{S_2})'(x) = -\frac{w(x)g(f(x))}{W(x)}.$$

En utilisant une intégration par parties du membre gauche de (3.13), on déduit

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \widetilde{S_2}^p(x)dx &= \left[\frac{\widetilde{S_2}^p(x)}{(\alpha-p+1)W^{p-\alpha-1}(x)}\right]_a^b + \frac{p}{\alpha-p+1} \\ &\times \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))\widetilde{S_2}^{p-1}(x)}{W^{p-\alpha}(x)}dx \\ &\leq \frac{p}{\alpha-p+1} \int_a^b \frac{w(x)g(f(x))\widetilde{S_2}^{p-1}(x)}{W^{p-\alpha}(x)}dx.\end{aligned}$$

L'inégalité intégrale de Hölder implique

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \widetilde{S_2}^p(x)dx \leq &\frac{p}{\alpha-p+1} \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} \widetilde{S_2}^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\times \left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)} g^p(f(x))dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

en simplifiant, on obtient

$$\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}\widetilde{S_2}^p(x)dx \le \left(\frac{p}{\alpha-p+1}\right)^p \int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}g^p(f(x))dx,$$

et l'inégalité (3.13) découle de (3.5). $\square$

Théorème 3.3.6. *Soient f, g, w des fonctions non-négatives mesurables sur $(0,+\infty)$ et $p>1$, $\alpha<p-1$. Si*

$$S_4(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{w(t)}{W(t)}g(f(t))dt,$$

alors

$$\int_0^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}S_4^p(x)dx \le \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_2(x)|^p dx, \tag{3.14}$$

où

$$G_2(x) = g(f(x)) - \frac{w(\frac{x}{2})W(x)}{2w(x)W(\frac{x}{2})}g(f(\frac{x}{2})).$$

Preuve En dérivant $S_4(x)$, on a

$$(S_4)'(x) = \frac{w(x)G_2(x)}{W(x)},$$

et en intégrant le membre gauche de (3.14), on déduit

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_4^p(x)dx &= \left[\frac{-S_4^p(x)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(x)}\right]_0^b + \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^b \frac{w(x)G_2(x)S_4^{p-1}(x)}{W^{p-\alpha}(x)}dx \\ &= \left[\frac{-S_4^p(b)}{(p-\alpha-1)W^{p-\alpha-1}(b)}\right] + \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^b \frac{w(x)G_2(x)S_4^{p-1}(x)}{W^{p-\alpha}(x)}dx.\end{aligned}$$

Puisque $p-\alpha>1$ et $S_4(b)\ge 0$, on a

$$\int_0^b \frac{w(x)}{W^m(x)}S_4^p(x)dx \le \frac{p}{p-\alpha-1}\int_0^b \frac{w(x)|G_2(x)|S_4^{p-1}(x)}{W^{p-\alpha}(x)}dx.$$

En apliquant l'inégalité intégrale de Hölder ,on aboutit à

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}S_4^p(x)dx \le\ & \frac{p}{\alpha-p+1}\left(\int_0^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}S_4^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ & \times\left(\int_a^b \frac{w(x)}{W^{p-\alpha}(x)}|G_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

et par simplification, on obtient le résultat. $\square$

Remarque 3.3.1. *Si on pose $g(f(x)) = xf(x)$, $w(x) = 1$ et $q = p$ dans le théorème 3.3.4, on obtient l'inegalité (3.2) pour $\alpha < p-1$ où $F_4(x) = \int_a^x f(t)dt$.*

Remarque 3.3.2. *Si on pose $g(f(x)) = xf(x)$, $w(x) = 1$ et $q = p$ dans le théorème 3.3.5, on obtient l'inegalité (3.2) pour $\alpha > p-1$ où $F_5(x) = \int_x^b f(t)dt$.*

Si on pose $g(f(x)) = xf(x)$ et $w(x) = 1$ dans le théorème 3.3.6, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.4. *Soient $p > 1$, $\alpha < p-1$, f une fonction non-négative mesurable sur $(0,+\infty)$. Si*

$$F_6(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt,$$

alors

$$\int_0^b x^{\alpha-p} F_6^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1}\right)^p \int_0^b x^\alpha |f(x) - \frac{1}{2} f(\frac{x}{2})|^p dx. \tag{3.15}$$

Chapitre 4

Inégalités integrales pondérées pour un opérateur integral avec des fonctions monotones.

Ce chapitre a fait l'objet d'un travail soumis [6]. Des inégalités intégrales pondérées pour un opérateur integral sur l'ensemble des fonctions monotones non-négatives avec les paramètres *p et q* sont établies dans [24]. Le but de ce travail est d'étendre les résultats aux différents cas concernant ces paramètres, en particulier pour p et q négatifs.

4.1 Introduction

En 1993, Shanzhong Lai [24] considérait les inégalités pondérées des normes pour des opérateurs généraux de la forme.

$$S_\phi f(x) = \int_0^\infty \phi(x,y) f(y)dy, \quad \phi(x,.) \geq 0, \quad \phi(x,.) \in L_1(0,\infty)$$

sur des fonctions monotones $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$.
L'opérateur de Hardy

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,$$

la transformation de Laplace

$$Lf(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt$$

et l'opérateur

$$Sf(x) = \int_0^\infty \phi(t) f(tx)dt$$

sont des cas spéciaux de $S_\phi f$.

Nous adoptons les conventions suivantes.
(i) on met $0\times\infty=0$, $\dfrac{\infty}{\infty}=0$ et $\dfrac{0}{0}=0$.

(ii) h est une fonction localement absolument continue sur $(0,\infty)$ (h est absolument continue sur tout intervalle fini $(a,b)\subset(0,\infty)$), brièvement $h\in AC$.

(iii) nous utilisons la notation $f\uparrow$ ($f\downarrow$) pour indiquer que f est non-négative et strictement décroissante (strictement croissante) sur $(0,\infty)$.

Dans [24] est donnée une caractérisation des fonctions de poids w,v (mesurables non négatives) pour lesquelles est vérifiée l'inégalité suivante

$$\|S_\phi f\|_{p,w}\le C\|f\|_{q,v}$$

pour les fonctions monotones f, où $C>0$ est une constante indépendante de f.

Les théorèmes suivants ont été prouvés dans [24].
Soient

$$\Phi(x,r)=\int_0^r\phi(x,y)dy,\quad \Phi_1(x,r)=\int_r^\infty\phi(x,y)dy, \tag{4.1}$$

où $\phi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$.

Théorème 4.1.1. *Soit $1\le q\le p<\infty$ et $C>0$, alors l'inégalité*

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\le C\left[\int_0^\infty(S_\phi f(x))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.2}$$

est vérifiée pour tout $f\downarrow$, si et seulement si

$$\left(\int_0^r w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\le C\left[\int_0^\infty\Phi(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}},\quad\forall r>0. \tag{4.3}$$

L'inégalité (4.2) est vérifiée pour tout $f\uparrow$, si et seulement si

$$\left[\int_r^\infty w(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\le C\left(\int_0^\infty\Phi_1(x,r)^q v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}},\quad\forall r>0. \tag{4.4}$$

Théorème 4.1.2. *Si $0<q\le p\le 1$ et $C>0$, alors l'inégalité*

$$\left(\int_0^\infty(S_\phi f(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\le C\left[\int_0^\infty f^q(x)v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.5}$$

est vérifiée pour tout $f\downarrow$, si et seulement si

$$\left(\int_0^\infty \Phi(x,r)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left[\int_0^r v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r>0. \tag{4.6}$$

L'inégalité (4.5) est vérifiée pour tout $f\uparrow$, si et seulement si

$$\left(\int_0^\infty \Phi_1(x,r)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left[\int_r^\infty v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r>0. \tag{4.7}$$

Lemme 4.1.1. *(i) Pour $0<p\leq 1$, l'inégalité*

$$\int_0^\infty f^p(x)x^{p-1}dx \geq \frac{1}{p}\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^p, \quad \forall f\downarrow, \tag{4.8}$$

est vérifiée.

(ii) Pour $p\geq 1$, l'inégalité

$$\int_0^\infty f^p(x)x^{p-1}dx \leq \frac{1}{p}\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^p, \quad \forall f\downarrow, \tag{4.9}$$

est vérifiée.

Lemme 4.1.2. *1. soient $C_1>0$, $g,f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}_+$, h est AC et $h'\leq 0$ presque partout sur $(0,\infty)$, $h(+\infty)=0$, alors*

(i) Pour $p\geq 1$, l'inégalité

$$\int_0^\infty f^p(x)g(x)dx \leq C_1\left[-\int_0^\infty f(x)h'(x)dx\right]^p, \qquad \forall f\uparrow, \tag{4.10}$$

est vérifiée si et seulement si

$$\int_r^\infty g(x)dx \leq C_1 h(r)^p, \qquad \forall r>0. \tag{4.11}$$

(ii) Pour $0<p\leq 1$, l'inégalité

$$\int_0^\infty f^p(x)g(x)dx \geq C_1\left[-\int_0^\infty f(x)h'(x)dx\right]^p, \qquad \forall f\uparrow, \tag{4.12}$$

est vérifiée si et seulement si

$$\int_r^\infty g(x)dx \geq C_1 h(r)^p, \qquad \forall r>0. \tag{4.13}$$

2. Soient $C_2 > 0$, $g, f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}_+$, h est AC et $h' \geq 0$ presque partout sur $(0,\infty)$, $h(0^+) = 0$, alors

(iii) Pour $p \geq 1$, l'inégalité

$$\int_0^\infty f^p(x)g(x)dx \leq C_2 \left[\int_0^\infty f(x)h'(x)dx\right]^p, \qquad \forall f \downarrow, \tag{4.14}$$

est vérifiée si et seulement si

$$\int_0^r g(x)dx \leq C_2 h(r)^p, \qquad \forall r > 0. \tag{4.15}$$

(iv) Pour $0 < p \leq 1$, l'inégalité

$$\int_0^\infty f^p(x)g(x)dx \geq C_2 \left[\int_0^\infty f(x)h'(x)dx\right]^p, \qquad \forall f \downarrow, \tag{4.16}$$

est vérifiée si et seulement si

$$\int_0^r g(x)dx \geq C_2 h(r)^p, \qquad \forall r > 0. \tag{4.17}$$

Dans [39], le théorème suivant a été prouvé.

Théorème 4.1.3. *(i) Soient $0 < p < 1$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $-\infty \leq c < d \leq +\infty$. On suppose que f est mesurable non négative (non positive) sur $(a,b) \times (c,d)$ et $f(.,y) \in L_p(a,b)$ pour presque tout $y \in (c,d)$, alors*

$$\| \int_c^d f(x,y)dy \|_{L_p(a,b)} \geq \int_c^d \|f(x,y)\|_{L_p(a,b)} dy, x \in (a,b), \tag{4.18}$$

si le membre gauche est fini.

(ii) Soient $p < 0$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ et $-\infty \leq c < d \leq \infty$. On suppose que f est mesurable non négative (non positive) sur $(a,b) \times (c,d)$ et $f(.,y) \in L_p(a,b)$ pour presque tout $y \in (c,d)$, alors

$$\| \int_c^d f(x,y)dy \|_{L_p(a,b)} \geq \int_c^d \|f(x,y)\|_{L_p(a,b)} dy, x \in (a,b), \tag{4.19}$$

si le membre gauche est fini.

4.2 Préliminaires

Dans cette section, on prouve quelques lemmes qui seront utilisés dans la preuve des résultats principaux.

Lemme 4.2.1. *(i) Si* $0 < p \leq 1$*, alors*

$$p\int_0^\infty f^p(x)x^{-p-1}dx \geq \left(\int_0^\infty \frac{1}{x^2}f(x)dx\right)^p, \quad \forall f\uparrow. \tag{4.20}$$

(ii) Si $p \geq 1$*, alors*

$$\int_0^\infty f^p(x)x^{-p-1}dx \leq \frac{1}{p}\left(\int_0^\infty \frac{1}{x^2}f(x)dx\right)^p, \quad \forall f\uparrow. \tag{4.21}$$

preuve C'est un cas particulier du Lemme 4.1.2, avec

$$g(x) = x^{-1-p}, \quad h(r) = \frac{1}{r}, \quad C_1 = \frac{1}{p}. \qquad \square$$

Remarque 4.2.1. *Si on prend* $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0,x) \\ 1, & t \in (x,\infty) \end{cases}$ *, on obtient l'égalité dans (4.20) et (4.21). Par conséquent, p et* $\frac{1}{p}$ *sont des constantes optimales dans (4.20), (4.21) respectivement.*

Lemme 4.2.2. *Soit* $p < 0$*. Si f est non négative et décroissante sur* $(0,+\infty)$*, alors*

$$\int_0^\infty f^p(x)x^{p-1}dx \geq 2^{-p}(\frac{p}{p-1})^{p-1}\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^p. \tag{4.22}$$

Si f est non-négative et croissante sur $(0,+\infty)$*, alors*

$$\int_0^\infty f^p(x)x^{-p-1}dx \geq 2^{-p}(\frac{p}{p-1})^{p-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{x^2}f(x)dx\right)^p. \tag{4.23}$$

Preuve 1) Soit f décroissante.
Du Lemme 4.1.1(i), pour $0 < q' \leq 1$, on déduit

$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^{q'} \leq q'\int_0^\infty f^{q'}(x)x^{q'-1}dx.$$

Soit $p' = q' - 1$, alors pour $-1 < p' < 0$, on trouve

$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^{\frac{p'+1}{p'}} \geq (p'+1)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^\infty f^{p'+1}(x)x^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Si on pose $\frac{p'+1}{p'} = p = 1 + \frac{1}{p'}$, alors

$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^p \geq (\frac{p}{p-1})^{p-1}\left(\int_0^\infty f^{\frac{p}{p-1}}(x)x^{\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}.$$

Soit
$$R=\int_0^\infty f^{\frac{p}{p-1}}(x)x^{\frac{1}{p-1}}dx,$$
et en appliquant l'inégalité integrale de Hölder pour $r=\frac{p-1}{p}>1$ et $r'=1-p$, on obtient
$$\begin{aligned}R &= \int_0^\infty (xf^{\frac{p}{p-1}}(x))^{-1}(xf^2(x))^{\frac{p}{p-1}}dx\\ &\leq \left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)dx\right)^{\frac{-1}{p-1}}\left(\int_0^\infty xf^2(x)dx\right)^{\frac{p}{p-1}},\end{aligned}$$
par conséquent
$$R^{p-1}\geq\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)dx\right)^{-1}\left(\int_0^\infty xf^2(x)dx\right)^p,$$
donc
$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^{-p}\leq(\frac{p}{p-1})^{1-p}\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)dx\right)\left(\int_0^\infty xf^2(x)dx\right)^{-p}. \tag{4.24}$$
En utilisant le Lemme 4.1.1 (ii), pour $p=2$
$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^2\geq 2\int_0^\infty xf^2(x)dx,$$
alors
$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)\geq 2\left(\int_0^\infty xf^2(x)dx\right)\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^{-1},$$
pour $p<0$
$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^p\leq 2^p\left(\int_0^\infty xf^2(x)dx\right)^p\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^{-p}, \tag{4.25}$$
et en appliquant (4.24) et (4.25) on obtient (4.22).

2) Soit f croissante, d'une maniére analogue à la preuve de (4.22), on établit (4.23) à l'aide du Lemme 4.2.1 pour $p=2$. $\square$

Lemme 4.2.3. *Soient $w\in L_1(0,\infty)$ une fonction de poids et $\varphi:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ une fonction strictement croissante telle que $\varphi(0,\infty)=(0,\infty)$, $\varphi\in\mathscr{C}^1(0,+\infty)$, alors pour tout $p<0$ et $y\in(0,+\infty)$*
$$\int_0^\infty\int_{\varphi(y)}^\infty w(x)dxdy=\int_0^\infty\varphi^{-1}(x)w(x)dx. \tag{4.26}$$

$$\int_0^\infty\Phi(x,\varphi(y))y^{\frac{1}{p}-1}dy=-p\int_0^\infty(\varphi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt. \tag{4.27}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\int_0^{\varphi(y)} w(x)dxdy = \int_0^\infty (\varphi^{-1}(x))^{-1}w(x)dx. \tag{4.28}$$

$$\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))y^{-\frac{1}{p}-1}dy = -p\int_0^\infty (\varphi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt. \tag{4.29}$$

Preuve.
A partir de (4.1), on déduit que pour presque tout $r>0$, $\Phi'_r = \phi(x,r)$ et $(\Phi_1)'_r = -\phi(x,r)$.
Du $W(t) = \int_0^t w(x)dx, W_1(t) = \int_t^\infty w(x)dx$, on a $W'(t) = w(t)$ et $(W_1)'(t) = -w(t)$.
Si on pose $\varphi(y) = t$ et en intégrant par parties, on déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{\varphi(y)}^\infty w(x)dxdy &= \int_0^\infty \int_t^\infty w(x)dxd\varphi^{-1}(t)\\
&= \int_0^\infty W_1(t)d\varphi^{-1}(t)\\
&= \lim_{\tau\to+\infty,s\to0^+}\int_s^\tau W_1(t)d\varphi^{-1}(t)\\
&= \lim_{\tau\to\infty,s\to0^+}\left(\left[W_1(t)\varphi^{-1}(t)\right]_s^\tau + \int_s^\tau \varphi^{-1}(t)w(t)dt\right)\\
&= \int_0^\infty \varphi^{-1}(t)w(t)dt,
\end{aligned}$$

d'où l'égalité (4.26).
La preuve de l'égalité (4.27) est similaire :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Phi(x,\varphi(y))y^{\frac{1}{p}-1}dy &= \int_0^\infty \Phi(x,t)(\varphi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}-1}d\varphi^{-1}(t)\\
&= \lim_{\tau\to\infty,s\to0^+}\left[\Phi(x,t)p(\varphi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}\right]_s^\tau - p\int_0^\infty (\varphi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\\
&= -p\int_0^\infty (\varphi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt.
\end{aligned}$$

Ensuite on montre l'égalité (4.28) :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\int_0^{\varphi(y)} w(x)dxdy &= \int_0^\infty \frac{1}{(\varphi^{-1}(t))^2}\left(\int_0^t w(x)dx\right)d\varphi^{-1}(t)\\
&= -\int_0^\infty W(t)d(\frac{1}{\varphi^{-1}(t)})\\
&= \lim_{\tau\to\infty, s\to 0^+} -\left[W(t)\frac{1}{\varphi^{-1}(t)}\right]_s^\tau + \int_0^\infty \frac{1}{\varphi^{-1}(t)}w(t)dt\\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\varphi^{-1}(t)}w(t)dt.
\end{aligned}$$

La preuve de l'égalité (4.29) est similaire à celle de (4.27). □

Lemme 4.2.4. *soient $w \in L_1(0,\infty)$ une fonction de poids et $\psi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction strictement décroissante telle que $\psi(0,\infty) = (0,\infty)$, $\psi \in \mathscr{C}^1(0,+\infty)$, alors pour tout $p > 0$ et $y \in (0,+\infty)$,*

$$\int_0^\infty \int_0^{\psi(y)} w(x)dxdy = \int_0^\infty \psi^{-1}(x)w(x)dx. \tag{4.30}$$

$$\int_0^\infty \Phi(x,\psi(y))y^{\frac{1}{p}-1}dy = p\int_0^\infty (\psi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt. \tag{4.31}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\int_{\psi(y)}^\infty w(x)dxdy = \int_0^\infty (\psi^{-1}(x))^{-1}w(x)dx. \tag{4.32}$$

$$\int_0^\infty \Phi_1(x,\psi(y))y^{-\frac{1}{p}-1}dy = p\int_0^\infty (\psi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt. \tag{4.33}$$

Preuve on pose $\psi(y) = t$ et en intégrant par parties le membre gauche de (4.30), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^{\psi(y)} w(x)dxdy &= -\int_0^\infty \int_0^t w(x)dxd\psi^{-1}(t)\\
&= -\int_0^\infty W(t)d\psi^{-1}(t)\\
&= \int_0^\infty \psi^{-1}(t)w(t)dt.
\end{aligned}$$

Pour l'égalité (4.31) on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Phi(x,\psi(y))y^{\frac{1}{p}-1}dy &= -\int_0^\infty \Phi(x,t)(\psi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}-1}d\psi^{-1}(t) \\
&= -\left[\Phi(x,t)p(\psi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty (\psi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt \\
&= p\int_0^\infty (\psi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties le membre gauche de l'égalité (4.32), on déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\int_{\psi(y)}^\infty w(x)dxdy &= -\int_0^\infty \frac{1}{(\psi^{-1}(t))^2}\left(\int_t^\infty w(x)dx\right)d\psi^{-1}(t) \\
&= \int_0^\infty W_1(t)d(\frac{1}{\psi^{-1}(t)}) \\
&= \lim_{\tau\to\infty,s\to 0^+}\left[W_1(t)\frac{1}{\psi^{-1}(t)}\right]_s^\tau + \int_0^\infty \frac{1}{\psi^{-1}(t)}w(t)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\psi^{-1}(t)}w(t)dt.
\end{aligned}$$

La preuve de l'égalité (4.33) est similaire à celle de (4.31). $\square$

4.3 Résultats principaux

Dans cette section, on prouve des théorèmes similaires aux théorèmes 4.1.1 et 4.1.2, mais pour d'autres cas concernant les paramètres p et q.

Théorème 4.3.1. *Soient $1 \le p$, $0 < q < 1$ et $C_3 > 0$, alors l'inégalité*

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_3\left[\int_0^\infty (S_\phi f(x))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.34}$$

est vérifiée pour toute fonction $f\downarrow$ si et seulement si

$$\left(\int_0^r w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_3\left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0. \tag{4.35}$$

L'inégalité (4.34) est vérifiée pour toute fonction $f\uparrow$ si et seulement si

$$\left(\int_r^\infty w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_3\left[\int_0^\infty \Phi_1(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0. \tag{4.36}$$

Preuve 1- La première équivalence entre (4.34) et (4.35).

(4.34) $\longrightarrow$ (4.35). Il suffit de prendre $f = \mathbf{1}_{(0,r)}$.
(4.35) $\longrightarrow$ (4.34).
Soient $f \in \mathscr{C}^1(0,\infty)$ une fonction positive et strictement décroissante sur $(0,\infty)$, ψ satisfait les hypothèses du lemme 4.2.4.
On pose $r = \psi(y)$ dans l'inégalité (4.35), alors

$$\int_0^\infty \left(\int_0^{\psi(y)} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{p}-1}dy \leq C_3 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi(x,\psi(y))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} y^{\frac{1}{p}-1}dy. \qquad (4.37)$$

Soit $g(y) = \displaystyle\int_0^{\psi(y)} w(x)dx$, $g \downarrow$, $0 < \dfrac{1}{p} \leq 1$, en appliquant l'inégalité (4.8), on déduit

$$\int_0^\infty g^{\frac{1}{p}}(y)y^{\frac{1}{p}-1}dy \geq p\left(\int_0^\infty g(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si on désigne par LHS et RHS respectivement le côté gauche et le côté droit de l'inégalité (4.37), on obtient

$$\begin{aligned} LHS &\geq p\left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\psi(y)} w(x)dx\right)dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= p\left(\int_0^\infty \psi^{-1}(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{en vertu de}\,(4.30), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} RHS &= C_3 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi(x,\psi(y))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} y^{\frac{1}{p}-1}dy \\ &= C_3 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi(x,\psi(y))^q y^{q(\frac{1}{p}-1)} v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} dy \\ &= C_3 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\Phi(x,\psi(y))y^{\frac{1}{p}-1}v^{\frac{1}{q}}(x)\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} dy \\ &= C_3 \int_0^\infty \parallel \Phi(x,\psi(y))y^{\frac{1}{p}-1}v^{\frac{1}{q}}(x) \parallel_{L_{q,x}} dy, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité intégrale inverse de Minkowski et l'égualité (4.31), on a

$$\begin{aligned} RHS &\leq C_3 \parallel \int_0^\infty \Phi(x,\psi(y)) y^{\frac{1}{p}-1} v^{\frac{1}{q}}(x) dy \parallel_{L_{q,x}} \\ &= C_3 \left[\int_0^\infty v(x) \left(\int_0^\infty \Phi(x,\psi(y)) y^{\frac{1}{p}-1} dy \right)^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= C_3 \left[\int_0^\infty v(x) \left(p \int_0^\infty (\psi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}} \phi(x,t) dt \right)^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= C_3 p \left[\int_0^\infty v(x) \left(\int_0^\infty (\psi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}} \phi(x,t) dt \right)^q dx \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Si on pose $f(t) = (\psi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}$, on déduit l'inégalité (4.34).

Soit $f \downarrow$, on considére une suite $\{f_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ de fonctions positives $f_n \in \mathscr{C}^1(0,\infty)$ strictement décroissante sur $(0,\infty)$ telle que

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in (0,\infty)$$

et

$$lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in (0,\infty), \tag{4.38}$$

alors

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty f_n^p(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C_3 \left(\int_0^\infty (S_\phi f_n)^q(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_3 \left(\int_0^\infty (S_\phi f)^q(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

En appliquant le théorème de la convergence monotone, on déduit

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty f^p(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} &= lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^\infty f_n^p(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_3 \left(\int_0^\infty (S_\phi f)^q(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

2- Deuxieme équivalence entre (4.34) et (4.36).

(4.34) $\longrightarrow$ (4.36), il suffit de prendre $f = 1_{(r,\infty)}$.
(4.36) $\longrightarrow$ (4.34).
Soit $r = \psi(y)$ et en intégrant (4.36), on conclut que

$$\int_0^\infty \left(\int_{\psi(y)}^\infty w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} y^{-\frac{1}{p}-1}dy \leq C_3 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi_1(x,\psi(y))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{1}{p}-1}dy, \qquad (4.41)$$

soit $g(y) = \int_{\psi(y)}^\infty w(x)dx$, $g\uparrow$, $0 < \dfrac{1}{p} \leq 1$, et par l'inégalité (4.20), on obtient

$$\int_0^\infty g^{\frac{1}{p}}(y)y^{-\frac{1}{p}-1}dy \geq p\left(\int_0^\infty \frac{1}{y^2}g(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit LHS le membre gauche de l'inégalité (4.41), en appliquant l'inégalité (4.32), on a

$$\begin{aligned} LHS &\geq p\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2}\int_{\psi(y)}^\infty w(x)dx\right)dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= p\left(\int_0^\infty (\psi^{-1}(x))^{-1}w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} RHS &= C_3\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi_1(x,\psi(y))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{1}{p}-1}dy \\ &= C_3\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\Phi_1(x,\psi(y))y^{-\frac{1}{p}-1}v^{\frac{1}{q}}(x)\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} dy \\ &= C_3\int_0^\infty \parallel \Phi_1(x,\psi(y))y^{-\frac{1}{p}-1}v^{\frac{1}{q}}(x) \parallel_{L_{q,x}} dy, \end{aligned}$$

à l'aide de l'inégalité intégrale inverse de Minkowski et l'égalité (4.33), on obtient

$$\begin{aligned} RHS &\leq C_3 \parallel \int_0^\infty \Phi_1(x,\psi(y))y^{-\frac{1}{p}-1}v^{\frac{1}{q}}(x)dy \parallel_{L_{q,x}} \\ &= C_3\left[\int_0^\infty v(x)\left(\int_0^\infty \Phi_1(x,\psi(y))y^{-\frac{1}{p}-1}dy\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= C_3\left[\int_0^\infty v(x)\left(p\int_0^\infty (\psi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= C_3\, p\left[\int_0^\infty v(x)\left(\int_0^\infty (\psi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right)^q dx\right]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

en posant $f(t) = (\psi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}}$, on déduit (4.34).

Soit $f \uparrow$, on considére maintenant une suite $\{f_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ de fonctions positives $f_n \in \mathscr{C}^1(0,\infty)$ strictement croissante sur $(0,\infty)$ telle que

$$f_1(x) \geq ... \geq f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq f(x), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in (0,\infty),$$

où f_1 est une fonction intégrable sur $(0,\infty)$ et

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in (0,\infty),$$

alors

$$\left(\int_0^\infty f_n^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_3 \left(\int_0^\infty (S_\phi f_n)^q(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.42}$$

On suppose que

$$g_n(x) = f_1(x) - f_n(x),$$

donc $\{g_n\}$ est une suite croissante, on peut alors appliquer le théorème de la convergence monotone.

$$\begin{aligned} lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g_n(x)dx &= \int_0^\infty lim_{n\to+\infty}(f_1(x) - f_n(x))dx \\ &= \int_0^\infty f_1(x)dx - \int_0^\infty lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx, \end{aligned} \tag{4.43}$$

et

$$\begin{aligned} lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g_n(x)dx &= lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\infty f_1(x)dx - \int_0^\infty f_n(x)dx\right) \\ &= \int_0^\infty f_1(x)dx - \int_0^\infty lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx. \end{aligned} \tag{4.44}$$

En appliquant (4.43) et (4.44), on déduit

$$lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx. \tag{4.45}$$

Puisque $|f_n(x)| \leq f_1(x)$, en appliquant le théorème de Lebesgue, on obtient

$$lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^\infty (S_\phi f_n)^q(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty (S_\phi f)^q(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.46}$$

A l'aide (4.42), (4.45) et (4.46), on obtient

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_3 \left(\int_0^\infty (S_\phi f)^q(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \square$$

Théorème 4.3.2. *Soient* $1 \leq p,\ q < 0$ *et* $C_4 > 0$*, alors l'inégalité*

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_4\left[\int_0^\infty (S_\phi f(x))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.47}$$

est vérifiée pour toute fonction $f\downarrow$ *si et seulement si*

$$\left(\int_0^r w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_4\left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0. \tag{4.48}$$

L'inégalité (4.47) est vérifiée pour toute fonction $f\uparrow$ *si et seulement si*

$$\left(\int_r^\infty w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_4\left[\int_0^\infty \Phi_1(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0. \tag{4.49}$$

Preuve Puisque l'inégalité intégrale inverse de Minkowski pour $q < 0$ est identique au cas $0 < q < 1$, la preuve du théorème 4.3.2 est similaire à la preuve du théorème 4.3.1. □

Théorème 4.3.3. *Soient* $0 < p < 1$ *,* $1 \leq q$ *et* $C_5 > 0$*, alors l'inégalité*

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_5\left[\int_0^\infty (S_\phi f(x))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.50}$$

est vérifiée pour toute fonction $f\downarrow$ *si et seulement si*

$$\left(\int_0^r w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_5\left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0. \tag{4.51}$$

L'inégalité (4.50) est vérifiée pour toute fonction $f\uparrow$ *si et seulement si*

$$\left(\int_r^\infty w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_5\left[\int_0^\infty \Phi_1(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0. \tag{4.52}$$

Preuve La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.3.1. □

Théorème 4.3.4. *Soient* $p < 0$ *,* $q < 0$ *et* $C_6 > 0$*. Si*

$$\left(\int_0^r w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_6\left[\int_0^\infty \Phi_1(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0, \tag{4.53}$$

alors

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_7\left[\int_0^\infty (S_\phi f(x))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.54}$$

est vérifiée pour toute fonction $f \uparrow$.
Si

$$\left(\int_r^\infty w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_6 \left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0, \tag{4.55}$$

alors (4.54) est vérifiée pour toute fonction $f \downarrow$,
où $C_7 = (1-p)^{\frac{1}{p}}(\dfrac{p}{p-1})C_6$.

Preuve (4.53) $\longrightarrow$ (4.54)
On pose $r = \varphi(y) \uparrow$ dans l'inégalité (4.53), alors

$$\int_0^\infty \left(\int_0^{\varphi(y)} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} y^{-\frac{1}{p}-1}dy \leq C_6 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{1}{p}-1}dy \tag{4.56}$$

Soient $g(y) = \displaystyle\int_0^{\varphi(y)} w(x)dx, \quad g \uparrow, \ \frac{1}{p} < 0$, en appliquant l'inéqalité (4.23), on obtient

$$\int_0^\infty g^{\frac{1}{p}}(y) y^{-\frac{1}{p}-1}dy \geq (\frac{1}{1-p})^{\frac{1}{p}-1} \left(\int_0^\infty \frac{1}{y^2} g(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soient *LHS* et *RHS* respectivement le côté gauche et le côté droit de l'inégalité (4.56), en utilisant l'égalité (4.28), on a

$$\begin{aligned} LHS &\geq (\tfrac{1}{1-p})^{\frac{1}{p}-1} \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2}\int_0^{\varphi(y)} w(x)dx\right)dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\frac{1}{1-p})^{\frac{1}{p}-1} \left(\int_0^\infty (\varphi^{-1}(x))^{-1} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} RHS &= C_6 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{1}{p}-1}dy \\ &= C_6 \int_0^\infty \left[y^{q(-\frac{1}{p}-1)} \int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} dy \\ &= C_6 \int_0^\infty \| \Phi_1(x,\varphi(y)) y^{-\frac{1}{p}-1} v^{\frac{1}{q}}(x) \|_{L_{q,x}} dy. \end{aligned}$$

De l'inégalité intégrale inverse de Minkowski et l'égalité (4.29), il vient

$$\begin{aligned}
RHS &\leq C_6 \left\| \int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y)) y^{-\frac{1}{p}-1} v^{\frac{1}{q}}(x) dy \right\|_{L_{q,x}} \\
&= C_6 \left\{ \int_0^\infty v(x) \left(\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y)) y^{-\frac{1}{p}-1} dy \right)^q d(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= C_6 \left\{ \int_0^\infty v(x) \left(-p \int_0^\infty (\varphi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}} \phi(x,t) dt \right)^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= C_6(-p) \left\{ \int_0^\infty v(x) \left(\int_0^\infty (\varphi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}} \phi(x,t) dt \right)^q d(x) \right\}^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

finalement en prenant $f(t) = (\varphi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}}$ et $C_7 = (1-p)^{\frac{1}{p}} (\frac{p}{p-1}) C_6$, on déduit (4.54).
La preuve de la deuxième implication est similaire à celle de la deuxième partie du théorème 4.3.1. □

Théorème 4.3.5. *Soient $p < 0$, $0 < q < 1$ et $C_8 > 0$. Si*

$$\left(\int_r^\infty w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_8 \left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x) dx \right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0, \tag{4.57}$$

alors

$$\left(\int_0^\infty f^p(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_9 \left[\int_0^\infty (S_\phi f(x))^q v(x) dx \right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.58}$$

est vérifiée pour toute fonction $f \downarrow$.
Si

$$\left(\int_0^r w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_8 \left[\int_0^\infty \Phi_1(x,r)^q v(x) dx \right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0, \tag{4.59}$$

alors (4.58) est vérifiée pour toute fonction $f \uparrow$,
où $C_9 = (1-p)^{\frac{1}{p}} (\frac{p}{p-1}) C_8$.

Preuve La preuve du théorème 4.3.5 est similaire à celle du théorème 4.3.4. □

Théorème 4.3.6. *Soient $p < 0$, $q \geq 1$ et $C_{10} > 0$. Si*

$$\left(\int_r^\infty w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{10} \left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x) dx \right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r > 0, \tag{4.60}$$

alors

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{11}\left[\int_0^\infty (S_\phi f(x))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.61}$$

est vérifiée pour toute fonction $f\downarrow$.
Si

$$\left(\int_0^r w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{10}\left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r>0 \tag{4.62}$$

alors (4.61) est vérifiée pour toute fonction $f\uparrow$,
où $C_{11} \geq (1-\frac{p}{q})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(-\frac{p}{q})^{\frac{1}{q}}C_{10}$.

Preuve (4.60) $\longrightarrow$ (4.61)
On pose $r=\varphi(y)\uparrow$ dans l'inégalité (4.60), alors

$$\int_0^\infty \left(\int_{\varphi(y)}^\infty w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} y^{\frac{q}{p}-1}dy \leq C_{10}^q \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Phi(x,\varphi(y))^q v(x)dx\right) y^{\frac{q}{p}-1}dy, \tag{4.63}$$

soit $g(y)=\displaystyle\int_{\varphi(y)}^\infty w(x)dx,\ g\downarrow$ et $\frac{q}{p}<0$, d'aprés l'inégalité (4.22) on obtient

$$\int_0^\infty g^{\frac{q}{p}}(y)y^{\frac{q}{p}-1}dy \geq (\frac{q}{q-p})^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^\infty g(y)dy\right)^{\frac{q}{p}},$$

d'où

$$\int_0^\infty \left(\int_{\varphi(y)}^\infty w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} y^{\frac{q}{p}-1}dy \geq (\frac{q}{q-p})^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^\infty \left(\int_{\varphi(y)}^\infty w(x)dx\right)dy\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Soient *LHS* et *RHS* respectivement le côté gauche et le côté droit de l'inégalité (4.64), en vertu de l'égalité (4.26) on déduit

$$LHS \geq (\frac{q}{q-p})^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}}.$$

D'autre part en appliquant le théorème de Fubini, nous aurons

$$\begin{aligned}
RHS &= C_{10}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Phi^q(x,\varphi(y))v(x)dx\right) y^{\frac{q}{p}-1}dy \\
&= C_{10}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Phi^q(x,\varphi(y))v(x)y^{\frac{q}{p}-1}dx\right) dy \\
&= C_{10}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Phi^q(x,\varphi(y))y^{\frac{q}{p}-1}v(x)dy\right) dx \\
&= C_{10}\int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x,\varphi(y))^q y^{\frac{q}{p}-1}dyv(x)dx \\
&= C_{10}\int_0^\infty I(x)v(x)dx,
\end{aligned}$$

où

$$I(x) \equiv \int_0^\infty \Phi(x,\varphi(y))^q y^{\frac{q}{p}-1}dy.$$

Si on fixe $x > 0$ avec $t = \varphi(y)$ dans I(x) et en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_0^\infty \Phi(x,\varphi(y))^q y^{\frac{q}{p}-1}dy \\
&= \int_0^\infty \Phi(x,t)^q \varphi^{-1}(t)^{\frac{q}{p}-1}d\varphi^{-1}(t) \\
&= -p\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{\frac{q}{p}}\Phi(x,t)^{q-1}\phi(x,t)dt.
\end{aligned}$$

Dans la suite on applique le lemme 4.1.2 (iii).

Soit

$$g(t) = \Phi(x,t)^{q-1}\phi(x,t), \qquad h(t) = \Phi(x,t),$$
$$f(t) = \varphi^{-1}(t)^{\frac{1}{p}},\downarrow \qquad C_2 = \frac{1}{q}$$

$$\int_0^r g(t)dt = \int_0^r \Phi(x,t)^{q-1}\phi(x,t)dt = \frac{1}{q}\Phi(x,r)^q \le C_2 h(r)^q,$$

ainsi

$$\int_0^\infty f^q(t)g(t)dt \le C_2\left[\int_0^\infty f(t)h'(t)dt\right]^q,$$

et on déduit

$$\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{\frac{q}{p}}\Phi(x,t)^{q-1}\phi(x,t)dt \le \frac{1}{q}\left[\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q,$$

il vient

$$I(x) \leq -\frac{p}{q}\left[\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q,$$

alors

$$RHS \leq C_{10}^q - \frac{p}{q}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q v(x)dx,$$

par conséquent

$$\frac{q}{q-p}^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} \leq C_{10}^q\left(-\frac{p}{q}\right)\left[\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q v(x)dx,$$

d'où

$$\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{q-p}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}C_{10}\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q v(x)dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Il suffit de prendre $f = (\varphi^{-1}(t))^{\frac{1}{p}}$, donc

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{10}\left(1-\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty (S_\phi f)^q(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve (4.62) $\longrightarrow$ (4.61)
On pose $r = \varphi(y)\uparrow$ dans l'inégalité (4.62), alors

$$\int_0^\infty\left(\int_0^{\varphi(y)} w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} y^{-\frac{q}{p}-1}dy \leq C_{10}^q\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q v(x)dx\right)y^{-\frac{q}{p}-1}dy, \tag{4.64}$$

soit $g(y) = \int_0^{\varphi(y)} w(x)dx,\ g\uparrow$ et $\frac{q}{p} < 0$, d'aprés l'inégalité (4.22) on obtient

$$\int_0^\infty g^{\frac{q}{p}}(y)y^{-\frac{q}{p}-1}dy \geq \left(\frac{q}{q-p}\right)^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{y^2}g(y)dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

d'où

$$\int_0^\infty\left(\int_0^{\varphi(y)} w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} y^{-\frac{q}{p}-1}dy \geq \left(\frac{q}{q-p}\right)^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\left(\int_0^{\varphi(y)} w(x)dx\right)dy\right)^{\frac{q}{p}}$$

Soient LHS et RHS respectivement le côté gauche et le côté droit de l'inégalité (4.64), en vertu de l'égalité (4.28), on déduit

$$LHS \geq \left(\frac{q}{q-p}\right)^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^\infty (\varphi^{-1}(x))^{-1}w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}}.$$

D'autre part en appliquant le théorème de Fubini, nous aurons

$$\begin{aligned}
RHS &= C_{10}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q v(x)dx\right) y^{-\frac{q}{p}-1}dy \\
&= C_{10}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q v(x) y^{-\frac{q}{p}-1}dx\right) dy \\
&= C_{10}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q y^{-\frac{q}{p}-1} v(x)dy\right) dx \\
&= C_{10}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q y^{-\frac{q}{p}-1}dy\right) v(x)dx \\
&= C_{10}\int_0^\infty I'(x)v(x)dx,
\end{aligned}$$

où

$$I'(x) \equiv \int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q y^{-\frac{q}{p}-1}dy.$$

Si on fixe $x > 0$ avec $t = \varphi(y)$ dans I'(x) et en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
I'(x) &= \int_0^\infty \Phi_1(x,\varphi(y))^q y^{-\frac{q}{p}-1}dy \\
&= \int_0^\infty \Phi_1(x,t)^q \varphi^{-1}(t)^{-\frac{q}{p}-1} d\varphi^{-1}(t) \\
&= -p\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{-\frac{q}{p}} \Phi_1(x,t)^{q-1}\phi(x,t)dt.
\end{aligned}$$

Dans la suite on applique le lemme 4.1.2 (ii).

Soit

$$g(t) = \Phi_1(x,t)^{q-1}\phi(x,t), \qquad h(t) = \Phi_1(x,t),$$

$$f(t) = \varphi^{-1}(t)^{-\frac{1}{p}} \uparrow, \qquad C_\circ = \frac{1}{q}$$

$$\int_r^\infty g(t)dt = \int_r^\infty \Phi_1(x,t)^{q-1}\phi(x,t)dt = \frac{1}{q}\Phi_1(x,r)^q \leq C_\circ h(r)^q$$

ainsi

$$\int_0^\infty f^q(t)g(t)dt \leq C_\circ \left[-\int_0^\infty f(t)h'(t)dt\right]^q$$

et on déduit

$$\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{-\frac{q}{p}}\Phi_1(x,t)^{q-1}\phi(x,t)dt \leq C_\circ\left[-\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{-\frac{1}{p}}(-\phi(x,t))dt\right]^q$$

il vient

$$I'(x) \leq -\frac{p}{q}\left[\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{-\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q$$

alors

$$RHS \leq -\frac{p}{q}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{-\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q v(x)dx,$$

par conséquent

$$(\frac{q}{q-p})^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{\varphi^{-1}}(x)w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} \leq C_{10}^q(-\frac{p}{q})\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{-\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q v(x)dx$$

d'où

$$\left(\int_0^\infty \frac{1}{\varphi^{-1}}(x)w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} \leq (\frac{q}{q-p})^{1-\frac{q}{p}}C_{10}^q(-\frac{p}{q})\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \varphi^{-1}(t)^{-\frac{1}{p}}\phi(x,t)dt\right]^q v(x)dx$$

Il suffit de prendre $f=(\varphi^{-1}(t))^{-\frac{1}{p}}\uparrow$, donc

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{10}\left(1-\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty (S_\phi f)^q(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}. \quad \square$$

Théorème 4.3.7. *Soient* $0<p<1$, $q<0$ *et* $C_{12}>0$. *Si*

$$\left(\int_r^\infty w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_{12}\left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r>0, \tag{4.65}$$

alors

$$\left(\int_0^\infty f^p(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_{13}\left[\int_0^\infty (S_\phi f(x))^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.66}$$

est vérifiée pour toute fonction $f\downarrow$.
Si

$$\left(\int_0^r w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_{12}\left[\int_0^\infty \Phi(x,r)^q v(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}, \quad \forall r>0 \tag{4.67}$$

alors (4.66) est vérifiée pour toute fonction $f\uparrow$,
où $C_{13}\leq(1-\frac{p}{q})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(-\frac{p}{q})^{\frac{1}{q}}C_{12}$.

Preuve La preuve du théorème 4.3.7 est similaire à celle du théorème 4.3.6. $\square$

Conclusion

Des inégalités intégrales telles que les inégalités de Minkowski, de Hardy ou de type de Hardy ont été généralisées et ceci en prenant compte de la monotonie des fonctions, les fonctions de poids et l'introduction de plusieurs paramètres tels que ceux d'intégrabilité.
A l'issue de ces travaux et en vue de cette petite contribution dans les inégalités intégrales, se présente la perspective d'étendre ces résultats à $\mathbb{R}^n$ ou bien à des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Ainsi on espère que ces nouvelles inégalités trouveront des applications.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces,* Academic Press, Inc., Boston, (1978).

[2] M. Arino and B. Muckenhoupt, *Maximal function on classical Lorenz spaces and Hardy's inequality with weights for non-increasing functions,* Trans.Amer.Math.Soc, **320**, 727-735, (1990).

[3] **B. Benaissa**, *More on reverses of Minkowski's inequalities and Hardy's integral inequalities,* Asian-Eur. J. Math. Vol. 13, No. 03, 2050064, (2020).
https ://doi.org/10.1142/S1793557120500643

[4] **B. Benaissa, M.Z. Sarikaya and A. senouci**, *On Some New Hardy-Type Inequalities,* Math. Meth. Appl. Sci, 43 No. 15, 8488-8495, (2020).
https ://doi.org/10.1002/mma.6503

[5] **B. Benaissa and A. Senouci**, *Reverses Weighted Minkowski's Inequalities and Hardy type Integral Inequalities,* Asian-Eur. J. Math.(soumise)

[6] **B. Benaissa and A. Senouci**, *Weighted Integral Inequalities For General Integral Operators on Monotone functions,* Annals of Functional Analysis. (soumise)

[7] **B. Benaissa**, *On the reverse Minkowski's integral inequality,* Kragujevac J. Math., Vol. 46(3) , 407-416, (2022).

[8] **B. Benaissa, H. Budak**, *More on reverse Holder's integral inequality,* Korean J. Math. 28 , No. 1, 9-15, (2020). https ://dx.doi.org/10.11568/kjm.2020.28.1.9

[9] **B. Benaissa, M.Z. Sarikaya**, *Generalization some Hardy-type integral inequality with negative parameter,* Bull. Transilv. Univ. Brasov Ser. III. Vol 13(62), No. 1, 69-76, (2020).
https ://doi.org/10.31926/but.mif.2020.13.62.1.6

[10] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators,* Math.129. Academic Press, (1988).

[11] V.I. Burenkov, *Main inequalities in L_p,* Moscow-university (1989).

[12] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle Théorie et applocation,* Masson, Paris (1983).

[13] W.S. Cheung, Z. Hanjs and J. Pecaric, *Some Hardy-type inequalities,* J. Math. Anal. Appl, 250(2), 621-634, (2000).

[14] B. Halim and A. Senouci, *Some generalizations involving open problems of F. Qi,* Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 12, No. 1, (2019).

[15] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities,* Cambridge University Press, (1952).

[16] G.H. Hardy, *Notes on some points in the integral calculus,* Messenger Math 57, 12-16, (1928).

[17] G.H. Hardy, *Notes on a theorem of Hilbert,* Math.Z, 6, 314-317 (1920).

[18] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Polya, *"Minkowski's Inequality" and "Minkowski's Inequality for integrals".* 2nd ed. Cambridge, England : Cambidge University Press, pp. 30-32, 123, and 146-150, (1988).

[19] Z. Hanjes, C.E. Pearce and J. Pecaric, *Multivariate Hardy-Type Inequalities,* Tamkang J. Math, 31(2), (2000).

[20] M. Izumi, S. Izumi and G. Peterson, *On Hardy's Inequality and its Generalization,* Tohoku Math. J, 21, 601-613, (1999).

[21] A. Kolmongorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle,* Edition MIR, Moscou, 2^{eme} edition, (1973).

[22] A. Kufner, L. Maligranda and L.E. Persson, *The Hardy Inequality- About its History and Some Related Results,* Vydavatelsky Servis Publishing House, Pilsen, (2007).

[23] A. Kufner and L.E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type,* World Scientific Publishing Co, Singapore, https ://doi.org/10.1142/5129 — April (2003).

[24] Shanzhong. Lai, *Weighted Norm inequalities For General Operators On Monotone Functions,* AMS, V340, N°2, 811-836, (Dec 1993).

[25] E. Lieb, M. Loss, *Analysis.,* Amer. Math. Soc, v 14, Primary 28-01, 42-01, 46-01, 49-01, (2000).

[26] A. Moazzena, R. Lashkaripour, *Some new extensions of Hardy's inequality,* Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 5, No. 1, 98-109, (2014).

[27] J. A. Oguntuase, *Remark on an Integral Inequality of the Hardy type,* Kragujevac J. Math. 32, 133-138, (2009).

[28] J. A. Oguntuase, *On Hardy's integral inequality,* Proc. Jangjeon Math. Soc., Vol. 3, 37-44, (2001).

[29] B.G. Pachpatte, *On a new class of Hardy type inequalities,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 105A, 265-274 (1987).

[30] J. E. Peicaric and E.R. Love, *Still more generalizations of Hardy inequality,* J. Aust. Math. Soc. Serie. A, 58, 1-11, (1995).

[31] K. Rauf, S. Ponnusamy and J.O. Omolehin, *On generalization of Hardy-type integral inequalities,* J. Math. Anal. Appl, 9(1), 1-21, (2012).

[32] S.G. Samko, *Convolution and potential type operations in $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$,* Integral Transforms Spec. Funct, v. 7, no 3-4, 261-284, (1998).

[33] S. G. Samko, *Convolution type operation in $L^{p(x)}$,* Integral Transforms Spec. Funct, v7, no 1-2, 123-144, (1998).

[34] S. Samko, *Denseness of $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ in the generalized Sobolev spaces $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^n)$,* in Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics, Volume 5, 333-342, (2000).

[35] S.G. Samko, *Diferentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$,* Contemp. Math, Vol. 212, (1998).

[36] S.G. Samko, *Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces,* Fract. Calc. and Appl. Anal, vol. 6, no 4, 355-362, (2003).

[37] S.G. Samko, *Hardy-Littlewood-Stein-Weiss inequality in the Lebesgue space with variable exponent,* Fract. Calc. Appl. Anal, vol. 6, No 4, 421-440, (2003).

[38] M.Z. Sarikaya and H. Yildirim, *Some Hardy-Type Integral Inequalities,* J. Ineq. Pure .Appl. Math, 7(5), Art 178, (2006).

[39] **A. Senouci , B. Benaissa and M. sofrani**, *The reverse Minkowski integral inequality with parameters* $0 < p < 1$ *and* $p < 0$, Models of Optimisation and Mathematical Analysis Journal, Vol. 05, N 1, 27-30, (2017).

[40] W.T. Sulaiman, *Reverses of Minkowski's, H¨older's, and Hardy's integral inequalities,* Int. J. Mod. Math. Sci, 1(1), 14-24, (2012).

[41] Banyat. Sroysang, *A Generalization of Some Integral Inequalities Similar to Hardy's Inequality,* Mathematica Aeterna,Vol. 3, no.**7**, 593-596, (2013).

[42] Banyat. Sroysang, *More on Reverses of Minkowski's Integral Inequality,* Mathematica Aeterna,Vol. 3, no.**7**, 597-600, (2013).

[43] Bicheng Yang, *On a New Hardy-Type Integral Inequality1,* Int. Math. Forum, 67(2), 3317-3322, (2007).

[44] B. Yang, Z. Zeng and L. Debnath, *On New Generalizations of Hardy Integral Inequality,* J. Math. Anal. Appl, 217(1), 321-327, (1998).

[45] A. Wadestig, *Weighted Inequalities of Hardy-type and their limiting Inequalities,* Lulea.univ. Technology, 2003 :17, (2003).

[46] Shanhe. Wu, Banyat. Sroysang and Shuguang. Li, *A Further generalization of certain integral inequalities Similar to Weighted Hardy's inequality,* J. Nonlinear Sci. Appl, 9, 1093-1102, (2016).