

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabes de Sidi Belabbes

Faculté des sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Civil



## THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat

Spécialité Génie Civil

Option Structures & Matériaux

Par : HADJI LAZREG

Intitulée

# CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA VIBRATION DES PLAQUES SANDWICHES EN FGM

Soutenue publiquement le **19 Décembre 2012** devant le jury composé de :

|                                 |            |                              |                           |
|---------------------------------|------------|------------------------------|---------------------------|
| <b>Abdelouahed. TOUNSI</b>      | <b>Pr</b>  | <b>U.D.L – SBA</b>           | <b>Président du jury</b>  |
| <b>El abbas. ADDA BEDIA</b>     | <b>Pr</b>  | <b>U.D.L – SBA</b>           | <b>Directeur de thèse</b> |
| <b>Tahar. HASSAINE DAOUADJI</b> | <b>MCA</b> | <b>U.I.K – Tiaret</b>        | <b>Examineur</b>          |
| <b>Khaled. AMARA</b>            | <b>MCA</b> | <b>C .U – Ain Temouchent</b> | <b>Examineur</b>          |
| <b>Abdelkader. BENACHOUR</b>    | <b>MCA</b> | <b>U.D.L – SBA</b>           | <b>Examineur</b>          |
| <b>Khalil. BELAKHDAR</b>        | <b>MCA</b> | <b>U.M.T – SAIDA</b>         | <b>Examineur</b>          |

Année universitaire 2012/2013

# REMERCIEMENTS

---

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH) à l'université de Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés.

Je remercie profondément monsieur le professeur A.ADDA Bedia qui a su me diriger tout au long de cette thèse avec patience, rigueur, enthousiasme et bonne humeur. Sans lui, la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été réalisée. Sa patience et ses approches toujours à la fois scientifique et pratique ainsi que ses qualités humaines m'ont énormément appris.

Je remercie monsieur le professeur A. Tounsi pour ces conseils qui m'ont permis d'aplanir bien des difficultés et j'exprime également toute ma reconnaissance au soutien scientifique important qui m'a apporté à mon travail de recherche. Je tiens à lui rendre hommage à ses qualités humaines et pédagogiques et accepte de présider mon jury de thèse.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs : maîtres de conférences Tahar HASSAINE DAOUADJI de l'université IBN KHALDOUN de TIARET, Mohamed. AMEUR de l'université ENSET d'ORAN, ABDELKADER. BENACHOUR de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés et KHALIL. BELAKHDAR de l'université de MOULAY TAHAR de SAIDA qui ont voulu examiner ce travail.

Je voudrais remercier tous les membres du Laboratoire matériaux et hydrologie (LMH) de l'université Djilali Liabess de Sidi Belabess avec qui j'ai passé d'agréables moments.

A toute ma famille et à tous mes collègues du département de Génie Civil de l'Université de Tiaret, je dirai merci pour les encouragements et le soutien dont ils n'ont cessé de me donner.

## Résumé

L'objectif de ce travail est d'effectuer une analyse dynamique du comportement mécanique des structures fonctionnellement graduées (plaques sandwiches), tout en assumant que les propriétés matérielles varient selon une loi de puissance suivant la direction transversale de la structure.

Nous utilisons une théorie simple et raffinée de déformation de cisaillement transverse d'ordre élevé pour la réponse dynamique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées. Le nombre de variables dans cette théorie est inférieur à celles des théories de déformation de cisaillement des plaques du premier et d'ordre élevé. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sandwich FGM sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Deux types de plaques sandwiches fonctionnellement graduées ont été étudiées, à savoir, le sandwich avec peaux en FGM et cœur homogène ainsi le sandwich avec peaux homogènes et cœur en FGM. Les équations de mouvement pour les plaques sandwiches en FGM sont obtenus en utilisant le principe d'Hamilton's. La solution analytique est obtenue en utilisant la méthode de Navier. Les fréquences fondamentales sont trouvées par la résolution du problème aux valeurs propres. La validité de la théorie actuelle est étudiée en comparant certains résultats obtenus avec ceux donnés par la théorie classique, du premier ordre et d'ordre élevé ainsi que la théorie d'élasticité linéaire en 3D. On peut dire que toutes les études comparative sont démontré que la présente théorie proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwiches rectangulaire en FGM.

**Mots clés :** Fonctionnellement gradué; Plaque sandwich; Théorie raffinée des plaques ; Solution de Navier ; Vibration libre.

## **Abstract**

The objective of this work is to perform a dynamic analyze of the mechanical behavior of functionally graded structures (sandwich plates), while assuming that the material properties vary with a power law in the transverse direction of the structure. We use a simple and elegant theory of transverse shear deformation of high order for the dynamic response of functionally graded sandwich plates. The number of variables in this theory is less than those of theories shear deformation of the plates of the first and higher order. The theory takes into account the effects of transverse shear and parabolic distribution of shear stresses along the thickness of the plate and satisfy free surface conditions for the shear stress of the FGM sandwich plate without the using the shear correction factor. Two common types of FGM sandwich plates are considered, namely, the sandwich with the FGM facesheet and the homogeneous core and the sandwich with the homogeneous facesheet and the FGM core. The equation of motion for the FGM sandwich plates is obtained based on Hamilton's principle. The closed form solutions are obtained by using the Navier technique. The fundamental frequencies are found by solving the eigenvalue problems. The validity of the theory is shown by comparing the present results with those of the classical, the first-order, and the other higher-order theories. We can say that all comparative studies have shown that this theory proposed is not only accurate but also efficacy for analyzing the free vibration of rectangular sandwich plates with FGM.

**Keywords:** Functionally graded; Sandwich plate; refined plate theory (RPT); Navier solution; Free vibration.

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو إجراء دراسة تحليلية للسلوك الميكانيكي للهياكل المتدرجة وظيفيا ( صفائح السندويتش) ، ونفرض أن خصائص المواد تتغير حسب قانون أسي في الاتجاه العرضي للهيكل نستعمل نظرية مبسطة ودقيقة ذات تشوه القص وبدرجة عليا من اجل الاستجابة الديناميكية لصفائح السندويتش المتدرجة وظيفيا .

عدد المتغيرات في هذه النظرية هو اقل من عدد المتغيرات في النظريات الأخرى ذات تشوه القص العرضي من الدرجة الأولى و الدرجات العليا

هذه النظرية تأخذ بعين الاعتبار تأثيرات القص العرضي و التوزيع المقعر للإجهادات في اتجاه ارتفاع الصفيحة وتحقيق شروط انعدام الاجهادات ذات القص على مستوى الجهة العليا والسفلى لصفحة السندويتش المتدرج وظيفيا بدون استعمال عوامل التصحيح القص. نوعين من صفائح السندويتش المتدرج وظيفيا مأخوذة بعين الاعتبار : النوع الاول : سندويتش ذو طبقتين متدرجتين وظيفيا ولب متجانس والنوع الثاني سندويتش ذو وطبقتين متجانستين ولب متدرج وظيفيا.

معادلات الحركة لصفائح السندويتش المتدرجة وظيفيا تتحصل عليها باستعمال مبدأ هاميلتون. الحل التحليلي المتحصل عليه باستعمال طريقة نافي. الترددات الأساسية تتحصل عليها باستعمال حل مسألة ذات قيم ذاتية. التحقق من النظرية الحالية بدراسة مقارنة لبعض نتائج المتحصل عليها من طرف النظرية الكلاسيكية ذات درجة أولى ، ودرجات عليا و النظرية ثلاثية الأبعاد .

نستطيع القول بأن كل المقارنات المدروسة أثبتت أن النظرية الحالية المطروحة ليست دقيقة بل أيضا فعالة من اجل تحليل الاهتزاز الحر لصفائح السندويتش المتدرجة وظيفيا ذات شكل مستطيل **الكلمات المفتاحية** : متدرج وظيفيا صفيحة سندويتش ، نظرية الصفائح الدقيقة ، حل نافي ، الاهتزاز الحر.

## Sommaire

|  |     |
|--|-----|
| Résumé.....  | i   |
| Abstract .....   | ii  |
| ملخص.....  | iii |
| Liste des figures .....  | vii |
| Liste des tableaux .....   | x   |
| Introduction générale.....                                       | 1   |
| I.1. Introduction.....   | 7   |
| I.2. Qu'est ce qu'un matériau sandwich ? .....                   | 7   |
| I.3. Les éléments constituant les matériaux sandwiches.....      | 9   |
| I.3.1. Les peaux .....   | 9   |
| I.3.2 L'âme .....  | 9   |
| I.3.3 L'interface.....   | 11  |
| I.4. Conception des structures sandwiches.....                   | 11  |
| I.4.1. Sélection des matériaux-âme.....                          | 11  |
| I.4.1.1. Résistance en flexion .....                             | 12  |
| I.4.1.2. Résistance aux chocs.....                               | 12  |
| I.4.1.3. Résistance à la compression.....                        | 12  |
| I.4.1.4. Résistance au décollement (pelage) .....                | 12  |
| I.4.1.5. L'isolation .....                                       | 13  |
| I.4.1.6. Absorption d'eau.....                                   | 13  |
| I.5. Sollicitations et Modes de dégradations des sandwiches..... | 13  |
| I.5.1. Flambement généralisé des peaux .....                     | 14  |
| I.5.2. Rupture des peaux en traction ou en compression.....      | 15  |
| I.5.3. Modes locaux de rupture.....                              | 15  |
| I.5.4. Rupture de l'âme en cisaillement.....                     | 15  |
| I.5.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping » .....      | 16  |
| I.5.6. Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling » .....  | 16  |
| I.5.7 Dégradation de l'adhésive .....                            | 17  |
| I.6. Théorie des plaques sandwiches .....                        | 18  |
| I.6.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwiches .....    | 18  |
| I.7. Techniques d'assemblages des matériaux sandwiches .....     | 19  |
| I.7.1. Le collage de peau sur l'âme : .....                      | 19  |
| I.7.2. Technique de pliage : .....                               | 19  |
| I.8. Intérêt des structures sandwiches .....                     | 21  |
| I.9. Domaines d'application des matériaux sandwiches .....       | 21  |
| I.9.1 Construction aérospatiale.....                             | 21  |
| I.10. Conclusion .....   | 22  |

|   |    |
|---|----|
| II.1. Introduction .....  | 24 |
| II.2-La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés.....  | 24 |
| II.3. Histoire du développement architectural du concept FGM.....   | 27 |
| II.3.1. pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté) .                                   | 28 |
| II.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :.....              | 31 |
| II.3.2.1. La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC .....   | 32 |
| II.4. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM .....  | 38 |
| II.4.1. Processus de formation et de consolidation des FGM.....   | 39 |
| II.4.2. Densification des poudres compactes pour FGM.....   | 43 |
| II.5 L'intérêt d'utilisation des FGM .....  | 45 |
| II.6 Méthodes d'élaboration des FGM .....   | 45 |
| II.6.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) .....  | 46 |
| II.6.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) .....   | 47 |
| II.6.3 Compaction Sèche des Poudres .....   | 48 |
| II.6.4 Dépôt par Electrophorèse .....   | 48 |
| II.6.5 Projection Plasma .....  | 48 |
| II.6.6 C. V. D. et P. V. D.....   | 49 |
| II.6.7 Frittage et Infiltration.....  | 49 |
| II.6.8 Frittage Laser Différentiel .....  | 49 |
| II.6.9 Implantation Ionique (Sputtering) .....  | 50 |
| II.6.10 Dépôt par Centrifugation .....  | 50 |
| II.7 Propriétés physiques et mécaniques des FGM .....   | 51 |
| II.7.1 Propriétés physiques de l'aluminium.....   | 51 |
| II.7.2 Propriétés physiques de la céramique.....  | 52 |
| II.8 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM.....   | 53 |
| II.9. revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM ..... | 54 |
| II.9.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....   | 54 |
| II.9.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....   | 56 |
| II.9.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....   | 57 |
| II.10. Conclusion .....   | 58 |
| III.1. Introduction .....   | 60 |
| III.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles .   | 60 |
| III.2.1.Approche monocouche équivalente .....   | 60 |
| III.2.1.1.Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT).....                                  | 61 |
| III.2.1.2.Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT) .....                           | 62 |
| III.2.1.3.Les modèles d'ordre supérieur.....  | 63 |

|  |     |
|--|-----|
| III.2.2. Approche par couche.....  | 66  |
| III.2.2.1. Les modèles zig-zag.....  | 67  |
| III.2.2.2. Les modèles couches discrètes.....  | 69  |
| III.3. Conclusion.....   | 70  |
| IV.1. introduction.....  | 72  |
| IV.2 Théorie raffinée des plaques sandwiches FGM.....  | 75  |
| IV.2.1 Configuration géométrique.....  | 75  |
| IV. 2.2. Propriétés matérielles.....   | 76  |
| IV.2.3. Hypothèses de base.....  | 77  |
| IV.2.4. Cinématique équations et constitutive.....   | 78  |
| IV.2.5. Equations gouvernantes.....  | 80  |
| IV.2.6. Les solutions de Navier pour les plaques sandwiches FGM.....   | 84  |
| IV.2.6.1 Une analyse aux valeurs propres pour les problèmes de vibration.....  | 85  |
| IV.2.7 Solution Ritz pour le Problème de Vibration des Plaques Sandwiches rectangulaire<br>avec Diverses Conditions aux Limites..... | 86  |
| IV.3. Conclusion.....  | 88  |
| V.1. introduction.....   | 90  |
| V.2. Validation des résultats des vibrations libres.....   | 91  |
| V.3. Conclusion.....   | 99  |
| Conclusion générale et perspectives.....   | 101 |
| Références bibliographiques.....   | 105 |



## Liste des figures

|   |    |
|---|----|
| Figure I.1 : Schéma d'un sandwich [5].  | 8  |
| Figure I.2 : Matériaux sandwichés à âmes pleines  | 10 |
| Figure I.3 : Matériaux sandwichés à âmes creuses : (a) nid d'abeilles; (b) âme ondulée  | 10 |
| Figure I.4 : différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.   | 14 |
| Figure I.5: Flambement généralisé des peaux du sandwich [14].   | 14 |
| Figure I.6 : Rupture des peaux en traction ou en compression [14].  | 15 |
| Figure I.7: Modes locaux de rupture par indentation [14].   | 15 |
| Figure I.8: Rupture de l'âme en cisaillement [15].  | 16 |
| Figure I.9 : Flambement généralisé de l'âme du sandwich [15].   | 16 |
| Figure I.10: Flambement localisé « wrinkling » [15].  | 17 |
| Figure I.11: Flambement localisé «damppling» [15].  | 17 |
| Figure I.12: Type de dégradation de l'adhésif.  | 18 |
| Figure I.13: panneaux réalisés par collage à partir de profils divers   | 20 |
| Figure I.14 : Pliage de panneaux sandwichés.  | 20 |
| Figure II.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal   | 25 |
| Figure. II.2 :Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. [19].   | 26 |
| Figure. II.3 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite). [25]   | 27 |
| Figure. II.4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [34]   | 28 |
| Figure. II.5 : résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » | 30 |
| Figure. II.6 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie [38].   | 32 |

|  |    |
|--|----|
| Figure. II.7 :(a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C [38]. .....  | 33 |
| Figure. II.8 : changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re [38]. ....   | 34 |
| Figure. II.9 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couches [38]. .....   | 35 |
| Figure. II.10: Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi <sub>2</sub> /Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /Ni/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /MoSi <sub>2</sub> fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe [38]. ..... | 36 |
| Figure. II.11 : schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W [38] .....  | 37 |
| Figure II.12: La relation entre la conduction thermique et l'émissivité [38]. .....  | 38 |
| Figure. II.13 : Processus de traitement des Poudre pour les FGM [40]. .....  | 39 |
| Figure. II.14 : Procédé électro phorétique de dépôt pour des matériaux de FGM [39]. .....  | 41 |
| Figure.II.15 : Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /ZrO <sub>2</sub> ) [39] .....  | 42 |
| Figure.II.15 : Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. [39]. .....   | 42 |
| Figure.II.16: (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> / ZrO <sub>2</sub> [39]. ....  | 43 |
| Figure. II.17 : Principe de la méthode coulage en bande .....  | 47 |
| Figure II.18 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.....   | 50 |
| Figure II.19 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [36]. .....  | 51 |
| Figure.II.20 : Modèles analytiques pour une couche en FGM. ....  | 53 |
| Figure II.21 : Les dimensions de la plaque FGM.....  | 55 |
| Figure II.22 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....  | 55 |
| Figure III. 23 : La variation du module de Young dans une plaque S-FGM. ....   | 57 |
| Figure II. 24 : La variation du module de Young de la plaque E-FGM.....  | 58 |
| Figure. III. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.....  | 61 |
| Figure. III.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin. ....  | 62 |

|  |    |
|--|----|
| Figure. III.3: Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.....  | 63 |
| Figure .III.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur. ....  | 64 |
| Figure. III.5 : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [20] .....   | 67 |
| Figure. III.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [20] ...   | 67 |
| Figure. III.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [20].....   | 68 |
| Figure. III.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [20].....  | 68 |
| Figure IV.1 : Géométrie d'une plaque sandwich rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes. ....  | 75 |
| Figure IV.2 : variation matérielle suivant l'épaisseur de la plaque sandwich : (a) peaux en FGM et cœur homogène. (b) peaux homogènes et cœur en FGM. ....                         | 76 |
| Figure.V.1 : Fréquences fondamentales $\bar{\omega}$ des plaques sandwiches P-FGM avec un cœur rigide homogène : (a) plaque sandwich FGM 1-0-1, (b) plaque sandwich FGM 1-8-1..... | 94 |
| Figure.V.2 : Fréquences fondamentales $\bar{\omega}$ des plaques sandwiches P-FGM avec un cœur souple homogène : (a) plaque sandwich FGM 1-0-1,(b) plaque sandwich FGM 1-8-1.....  | 95 |

## Liste des tableaux

|   |    |
|---|----|
| Tableau V.1 : Hypothèses cinématiques pour différentes théories de plaques .....  | 92 |
| Tableau V.2 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale naturels $\bar{\omega}$ des plaques sandwiches P-FGM carrées simplement appuyées du type A avec d'autres théories ( $h / b = 0,1$ )..... | 96 |
| Tableau V.3 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ des plaques sandwiches P-FGM carrées simplement appuyée avec cœur rigide et homogène.....                                 | 97 |
| Tableau V.4 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ des plaques sandwiches P-FGM carrées simplement appuyée avec cœur souple et homogène. ....                                | 98 |
| Tableau V.5 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ des plaques sandwiches P-FGM carrées simplement appuyée avec un cœur FGM.....   | 99 |

# INTRODUCTION GENERALE

---

## Introduction générale

Le défi de concevoir une structure aussi légère que possible sans sacrifier la résistance est fondamental dans beaucoup d'applications d'ingénierie et principalement dans le génie civil. Inévitablement, cette exigence impose la nécessité de stabiliser et de renforcer les surfaces minces pour leur permettre d'endosser des efforts souvent complexes et combinés. La conception traditionnelle des structures a continué d'inventer de nouvelles solutions pour résoudre cette difficulté en utilisant, par exemple, des raidisseurs longitudinaux et des anneaux de stabilisation. Mais, les solutions proposées ont souvent manqué d'élégance dans leurs conceptions, surtout que le simple fait d'utiliser des paires de peaux fines avec un milieu stabilisateur entre les deux faces est, dans plusieurs situations, plus efficace que de stabiliser une surface en créant une résistance aux forces déformantes.

Pour évaluer une nouvelle structure, le concepteur doit prendre en compte un certain nombre de considérations importantes. La nouvelle structure doit être économique à construire, et de pouvoir fonctionner, fiable et confortable. Il existe évidemment plusieurs façons de satisfaire ces exigences et le matériau de construction joue là un rôle prépondérant.

Les plaques ou poutres stratifiées sont utilisées dans beaucoup de domaines, le génie civil. Le principal objectif est d'augmenter le rapport rigidité/poids en remplissant le "cœur" de la structure avec des matériaux plus légers, comme les 'nids d'abeilles' (NIDA).

Traditionnellement en aéronautique, les NIDAS sont associés à des alliages d'aluminium, mais on utilise aussi des composites à fibres de carbone ou des polymères selon les besoins.

Typiquement, on trouve ce type de structure mince dans les planchers d'avions, mais aussi dans des structures 'plus nobles' comme les pales d'hélicoptère. Mais l'industrie sidérurgique étudie aussi de telles tôles acier/polymère pour diminuer les rapports poids/rigidité ou poids/tenue au crash, dans le cadre de la concurrence entre acier et aluminium ou acier et polymère.

La raison la plus répandue pour l'utilisation des matériaux sandwichs est le gain de poids.

Cependant, il existe d'autres raisons : coût, stabilité, sûreté, résistance au choc, durée de vie, propriétés à la fatigue, dégradation à l'environnement, bruit, isolation thermique, plus grande capacité de charge, maintenance réduite et facilité de réparation, utilisation maximale

du volume intérieur et parois intérieures "propres", un fini attractif et plus de capacités d'atténuation des vibrations.

Le prix du matériau sandwich en lui-même est un peu plus élevé que l'acier, mais sur certains types et exigences de structures, le prix de la construction peut être très compétitif surtout si l'on considère les économies engendrées à long terme.

La construction sandwich composite donne un grand potentiel pour les grands projets d'infrastructures civiles telles que les bâtiments industriels et ponts routiers. Les structures sandwich représentent une forme spéciale d'une structure en couches qui se composent de deux couches minces et rigide (peau) et une couche relativement épaisse de matériau souple s'appelle le noyau.

Dans les structures sandwich modernes les peaux sont généralement composées de métal ou de matériaux composites laminés, et un noyau composé d'un matériau de faible résistance ou de mousse polymère. Les peaux et le noyau sont joints par collage, pour assurer le transfert des forces entre les parties constituantes du sandwich.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

D'autre part, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), une nouvelle génération des matériaux composites homogènes avancés d'abord proposés pour les barrières thermiques, ont été de plus appliqués pour les structures de l'ingénierie moderne dans un environnement à température élevée.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion.

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon. Dans le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM pendant le 21ème siècle. Le programme Japonais a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM.

Cependant, la continuité et la communication entre les chercheurs et la recherche en groupe s'avère d'une grande importance pour développer l'architecture des FGM. Une nouvelle technologie des matériaux gradués non homogènes est née comme conséquence du développement des applications pratiques et des recherches pendant le 21ème siècle.

Les axes de recherches qui ont conduit à l'établissement de l'architecture des FGM sont les suivants :

1. Établissement des définitions et des théories mathématiques pour les structures FGM.
2. Développement de systèmes de conception.
3. Développement de processus rentables.
4. Évaluation des propriétés graduelles.
5. Établissement d'une base de données pour l'architecture de FGM.

Le but de ce travail est d'analyser la vibration libre des plaques sandwiches en FGM. Cependant, les recherches sur la vibration libre des plaques sandwiches FGM sont tout à fait limitées, il n'y a aucune enquête sur les vibrations libres des plaques sandwiches FGM en utilisant la théorie des plaques raffinée à quatre variables (RPT). Cette théorie a été développée par Shimpi [1] pour les plaques isotropes, et a été prolongé par Shimpi et Patel [2-3] pour les plaques orthotropes. Cette théorie est une théorie d'ordre élevé.

Pour cela nous nous sommes intéressés aux matériaux à gradient évalués ou nous étions amenés à analyser par des formulations analytiques et étudier le phénomène de la



vibration libre des plaques sandwiches en FGM en utilisant cette nouvelle théorie raffinée de cisaillement déformable des plaques.

Le présent travail de thèse s'articule autour deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects :

- Théorique
- Analytique

**L'aspect théorique** comprend trois chapitres :

Dans le premier chapitre : des généralités sur les matériaux sandwiches ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des matériaux à gradients de propriétés tout en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Dans le troisième chapitre, les différentes théories applicables aux structures FGM ont été étudiées et analysées.

**L'aspect Analytique** en son rôle est scindé en deux chapitres :

Au quatrième chapitre, une analyse de la vibration libre des plaques sandwiches fonctionnellement graduées simplement appuyées a été présentée en détail par une théorie des plaques déformables raffinée (RPT) avec une nouvelle fonction de forme. Cette fonction satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces (supérieure et inférieure) de la plaque. Deux types communs des plaques sandwiches en FGM sont considérés, c'est-à-dire un sandwich avec deux peaux FGM et cœur homogène et un autre sandwich avec deux peaux homogènes et cœur FGM. On suppose que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque sandwich seulement selon une distribution de puissance (P-FGM).

Quant au cinquième chapitre : une procédure de résolution exacte pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwiches fonctionnellement graduées (FGM) est développée pour les deux types des plaques sandwiches en FGM, une à deux peaux FGM et cœur homogène, et l'autre avec deux peaux homogènes et cœur FGM.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette nouvelle théorie dans la résolution du comportement de vibration libre des plaques sandwiches en FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.

# CHAPITRE I

---

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MATERIAUX SANDWICHES

## **I.1. Introduction**

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique. De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc.).

Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwichs. Les structures sandwichs occupent un large créneau dans la construction des pièces composites.

Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes.

L'objectif de ce premier chapitre est de positionner la problématique des matériaux sandwichs. Tout nous attachant à mettre en évidence toutes leurs particularités propres.

## **I.2. Qu'est ce qu'un matériau sandwich ?**

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Fig. I.1) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble.

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

De part la constitution des matériaux sandwiches, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur  $t_f$ . Le rapport  $t_f/t_c$  ( $t_c$  étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01. D'après Allen [4], on peut classer les sandwiches en trois catégories selon la valeur du rapport  $d/t_f$  ( $d$  étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur)  $d = t_c + t_f$ .

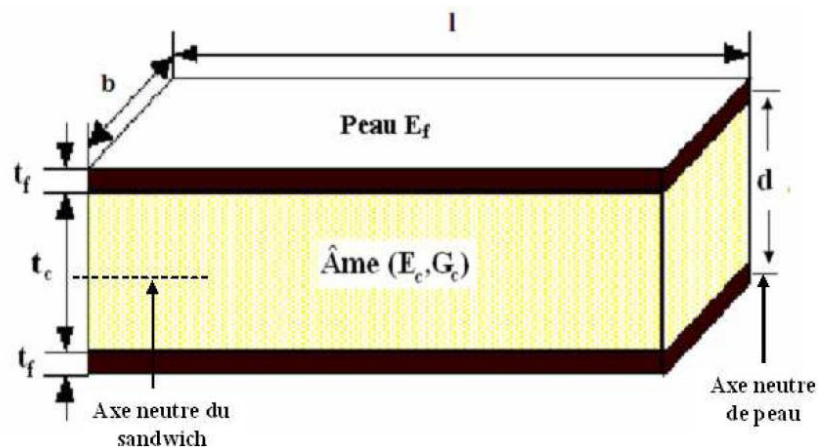


Figure I.1 : Schéma d'un sandwich[5].

En fonction des valeurs du rapport  $d/t_f$ , on peut classer les sandwiches de la manière suivante :

- Si le rapport  $d/t_f$  est supérieur à 100, on parle de sandwiches à peaux très fines ;
- Pour un rapport  $d/t_f$  compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où  $d/t_f$  est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

En plus de leur bonne rigidité en flexion, de leur bonne résistance au flambement et de leur légèreté, les matériaux sandwiches possèdent également de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique. Ceci explique leur emploi de plus en plus fréquent comme cloison. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans l'aéronautique ou l'industrie du transport en

tant que structures primaires ou secondaires, comme par exemple les coques de bateaux rapides, les planchers d'avions et autres...

### I.3. Les éléments constituant les matériaux sandwichs

#### I.3.1. Les peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des contraintes normales (traction ou compression).

#### I.3.2 L'âme

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- **Mousses** : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques.
- **Balsa** : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.
- **Nid d'abeille** : Cette structure est réalisée généralement à partir d'un matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nid d'abeille par expansion.

Il existe deux types d'âmes :

- **Les âmes pleines** [6] parmi laquelle on retrouve :
  - Le Balsa ou bois cellulaires (Figure I.2 a)
  - Diverses mousses cellulaires (Figure I.2 b)
  - Des résines chargées de microsphères creuses de verre appelées mousses syntactiques

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions : 2 constantes indépendantes suffisent alors pour définir la loi de comportement du matériau).

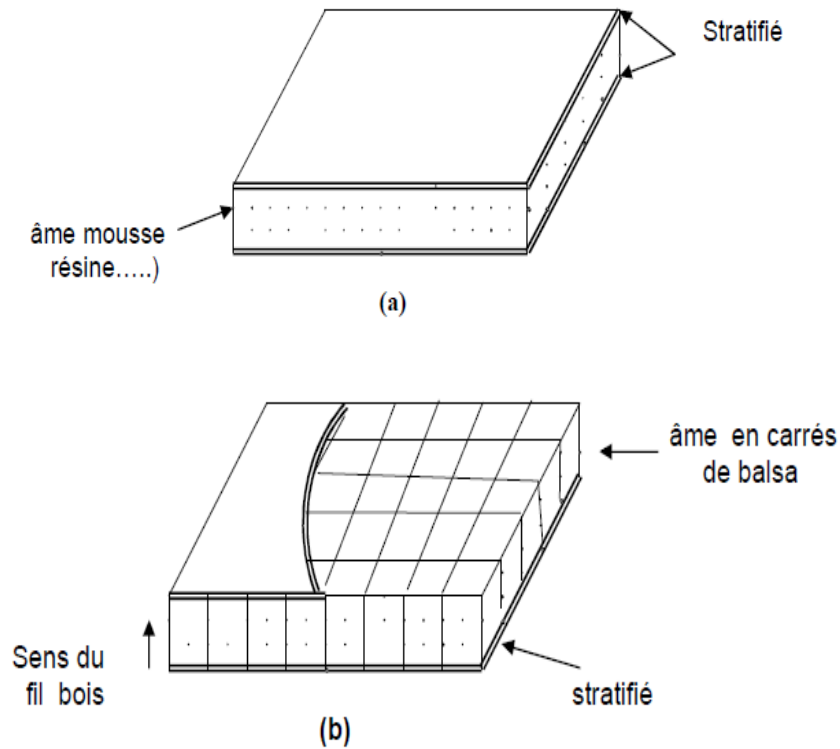


Figure I.2 : Matériaux sandwichs à âmes pleines.

- **Les âmes creuses** [6], essentiellement de type nid d'abeilles (Fig I.3) elles sont :
  - Des alliages métalliques légers
  - Des papiers kraft
  - Du papier polyamide, type papier Nomex.

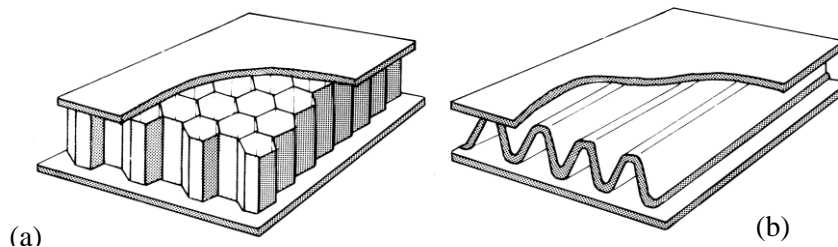


Figure I.3 : Matériaux sandwichs à âmes creuses : (a) nid d'abeilles; (b) âme ondulée.

### I.3.3 L'interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

Les matériaux sandwiches sont caractérisés par :

- Une grande légèreté à titre de comparaison la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint – Pierre (45 mètres de portée) et de  $2600\text{kg}/\text{m}^2$  (construction en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/ mousse de polyuréthane est de  $33\text{kg}/\text{m}^2$  [7].
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des peaux.
- Excellentes caractéristiques d'isolation thermiques. En revanche, les matériaux sandwiches n'amortissent pas et leur tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques.

### I.4. Conception des structures sandwiches

Bien que généralement conçues pour être soumises à des efforts en flexion, les structures sandwiches le sont aussi pour répondre à d'autres exigences, comme l'isolation thermique, acoustique, etc.

Le choix du type de sandwich dépend surtout de son application. Les principaux objectifs du concepteur d'un « sandwich » sont de choisir les matériaux appropriés constituant la structure ainsi que de déterminer les épaisseurs respectives des peaux et de l'âme de façon à résister aux moments fléchisseurs, au cisaillement et aux contraintes axiales induites par les forces appliquées sur elles.

Généralement, la conception est basée sur la théorie des sandwiches (théorème des poutres homogènes) et la sélection de matériaux ayant les propriétés appropriées.

#### I.4.1. Sélection des matériaux – âme

D'un point de vue mécanique, le critère de sélection du matériau de l'âme est une résistance élevée au cisaillement. Son faible coût de production, sa fiabilité dans le temps, sa faible absorption d'eau ou humidité, son comportement face au feu et à la chaleur, ses capacités d'isolation acoustique et thermique peuvent aussi être des critères décisifs dans le choix du matériau.



#### **I.4.1.1. Résistance en flexion**

Généralement, les structures sandwiches sont plus rigides que les poutres conventionnelles. Cela étant dû à la distribution géométrique efficace et au support des efforts par les peaux qui permettent l'obtention d'un facteur de rigidité  $\langle EI \rangle$  plus élevé.

Les peaux doivent adhérer le mieux possible à l'âme puisque le comportement mécanique final de la structure sandwich est directement lié à cette adhérence.

#### **I.4.1.2. Résistance aux chocs**

La résistance à l'impact d'une structure sandwich composite est largement influencée par la capacité d'absorption de l'énergie par l'âme.

Cette capacité d'absorption peut être améliorée en augmentant la densité du matériau qui compose l'âme. Soumis à un impact, on observe un comportement tout à fait différent s'il s'agit d'une âme en mousse ou d'une âme en nid d'abeilles.

L'âme en mousse diffusera l'énergie de l'impact à l'intérieur même du sandwich en l'absorbant dans sa structure cellulaire. C'est pourquoi les mousses PVC d'origine thermoplastique ainsi que les mousses thermodurcissables flexibles ont une bonne capacité d'absorption des chocs.

Dans le cas d'une âme en nid d'abeilles, les parois transfèrent l'énergie perpendiculairement d'une peau à l'autre, ce qui peut donc occasionner la déchirure de la peau opposée.

#### **I.4.1.3. Résistance à la compression**

Les charges de compression sont totalement transférées à l'âme du sandwich. Les structures en nid d'abeilles permettent de supporter des contraintes de compression, normales aux panneaux, élevées. Par contre leur anisotropie favorise leur rupture lorsqu'elles sont chargées dans plusieurs directions comme dans le cas des pièces soumises à des charges hydrostatiques. On préconise alors comme solution une combinaison nid d'abeilles et mousse.

#### **I.4.1.4. Résistance au décollement (pelage)**

Une résistance insuffisante au décollement peut conduire au délaminage des peaux et être la cause de ruptures catastrophiques. En général, dans les sandwichs à âme en mousse, la résistance du joint de colle entre les peaux et l'âme doit être supérieure à la résistance au

cisaillement de l'âme. Les mousses de PVC donnent des forces d'adhésion supérieures à celles obtenues avec le balsa ou le polyméthacrylimide (PMI). Les mousses de polyuréthane (PU), elles, sont fragiles, ce qui rend leur collage difficile. Quant aux âmes en nid d'abeilles, leur surface de contact réduite explique qu'il est difficile d'obtenir une résistance élevée au pelage.

#### **I.4.1.5.L'isolation**

La diminution de poids, l'isolation acoustique et thermique ainsi que l'amortissement des vibrations sont nécessaires dans plusieurs applications.

Grâce à leur structure cellulaire, beaucoup de mousses obtiennent de très bons résultats en ce qui a trait à l'isolation thermique et acoustique alors que les structures en nid d'abeilles offrent des performances moins probantes, plus limitées.

Par conséquent, lorsqu'il est nécessaire d'avoir de bonnes propriétés en termes d'isolation thermique et acoustique, les structures sandwiches avec âme en mousse sont des choix judicieux. Lorsque la diminution de poids est le seul objectif, les structures sandwiches avec âme en nid d'abeilles devraient être envisagées.

#### **I.4.1.6. Absorption d'eau**

L'absorption d'humidité et d'eau par l'âme des structures sandwiches peut causer une diminution importante et significative de ses propriétés mécaniques. Dans le cas où les peaux des sandwiches seraient abîmées, l'utilisation d'âmes sensibles à l'eau ou à l'humidité augmente encore plus le risque de délaminage. Même en service normal, l'évaporation interne d'eau absorbée peut causer un délaminage des peaux. Pour solutionner ce problème, un traitement thermique additionnel de l'âme est parfois nécessaire avant la mise en œuvre du sandwich.

### **I.5.Sollicitations et Modes de dégradations des sandwiches**

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- Moment de flexion,
- Moment de torsion,
- Effort normal,

- Effort tranchant.

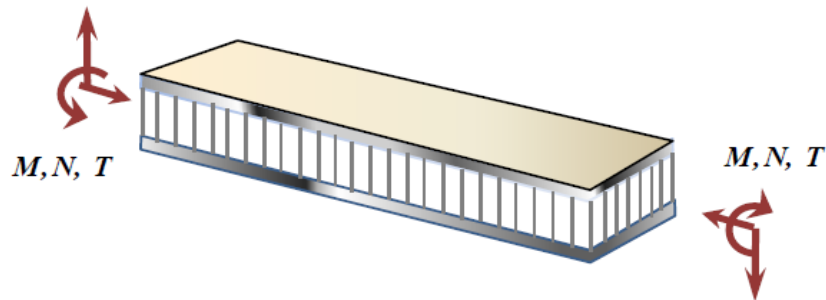


Figure I.4 : différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwiche.

Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwiches soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécanique de ces structures [8], [9], [10], [11], [12], [13].

### I.5.1. Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Fig. I.5). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.

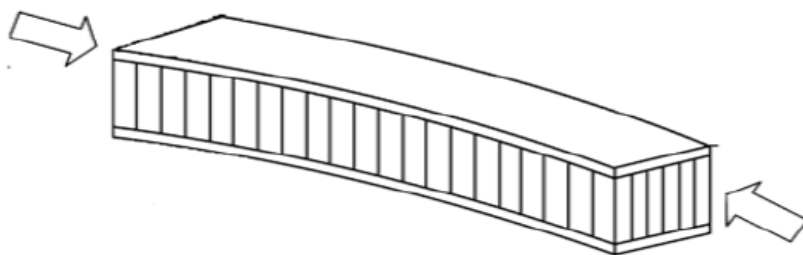


Figure I.5: Flambement généralisé des peaux du sandwich[14].

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, augmenter l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériau avec un module de cisaillement plus élevé.

### I.5.2. Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux (Fig.I.6). Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, en augmentant l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), ou en augmentant l'épaisseur de l'âme (ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux). La manière la plus adéquate de résoudre le problème est d'augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, une âme de plus forte densité (plus rigide) n'affecte pas les contraintes dans la peau.

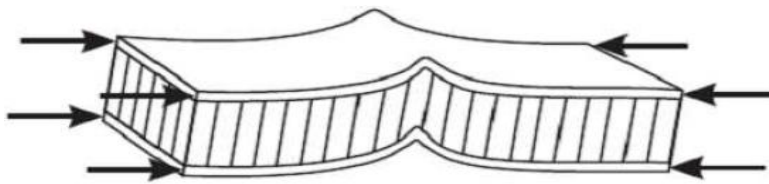


Figure I.6 : Rupture des peaux en traction ou en compression [14].

### I.5.3. Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Fig. I.7).

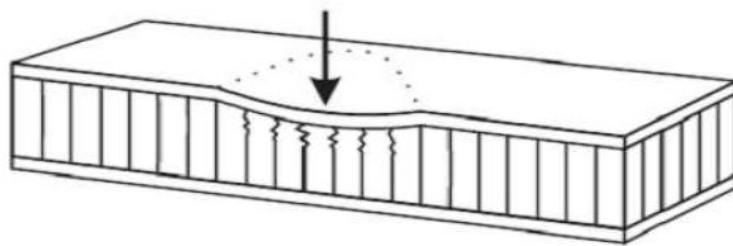


Figure I.7: Modes locaux de rupture par indentation [14].

### I.5.4. Rupture de l'âme en cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (Fig. I.8). Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus

élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet.

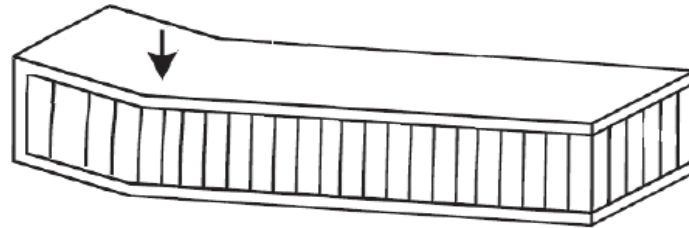


Figure I.8: Rupture de l'âme en cisaillement [15].

### I.5.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme. Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé.

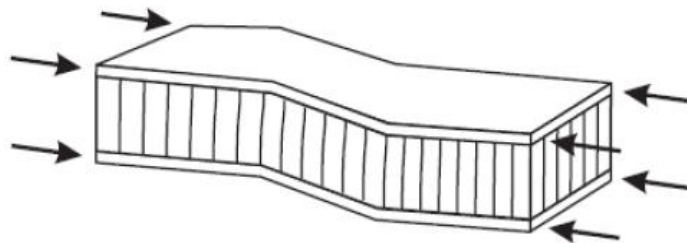


Figure I.9 : Flambement généralisé de l'âme du sandwich [15].

### I.5.6. Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement.

Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » (Fig. I.10), se produit.

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux, un matériau avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme, un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelé « dampling » (Fig. I.11).

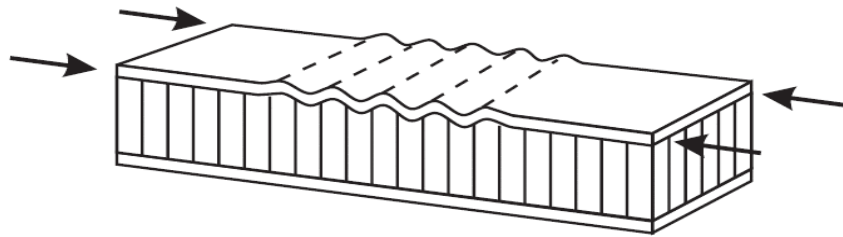


Figure I.10: Flambement localisé « wrinkling » [15].

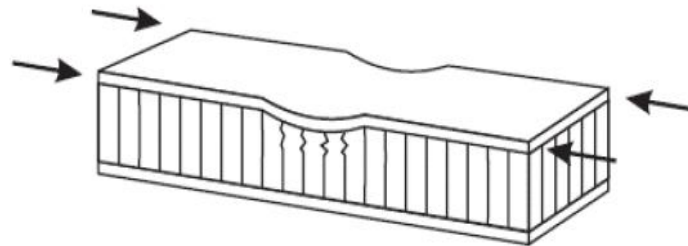


Figure I.11: Flambement localisé «dampling» [15].

### 1.5.7 Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types :

- Dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Fig. I.12 illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

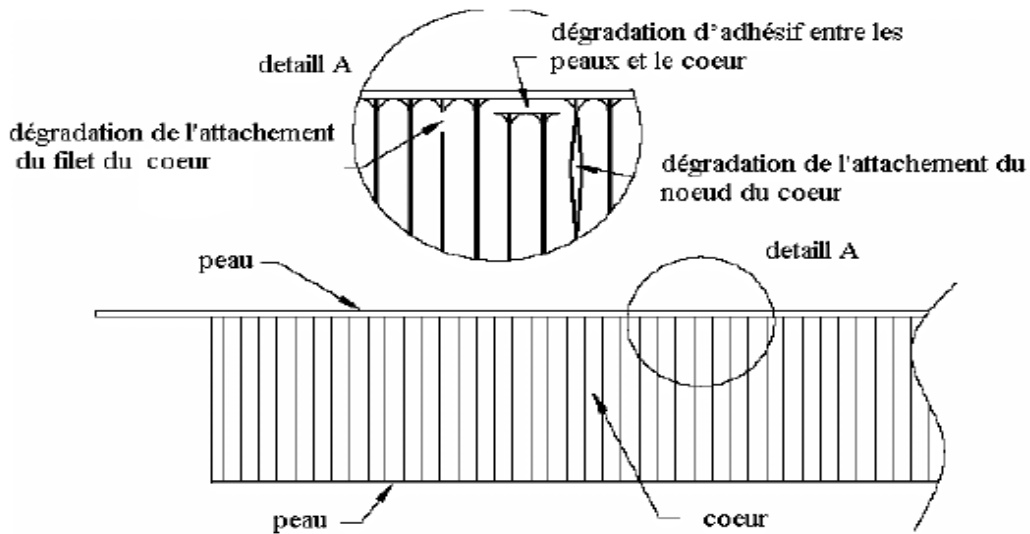


Figure I.12: Type de dégradation de l'adhésif.

## I.6. Théorie des plaques sandwiches

Un matériau sandwich est constitué (figure I.11) d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur  $h_1$  (peau inférieure) et d'épaisseur  $h_2$  (peau supérieure).

L'épaisseur de l'âme sera notée  $h_c$  et l'épaisseur totale du sandwich  $H$  ( $H = h_1 + h_c + h_2$ ). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan  $(x, y)$  soit le plan moyen.

### I.6.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwiches

La théorie des matériaux sandwiches est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ( $h_c \gg h_1, h_2$ ).
- Les déplacements du cœur  $u_c$  et  $v_c$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ .
- Les déplacements  $u$  et  $v$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.

- Le déplacement transverse  $w$  est indépendant de la variable  $z$  : la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  : les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont négligées dans les peaux.
- Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations.

## **I.7. Techniques d'assemblages des matériaux sandwiches**

### **I.7.1. Le collage de peau sur l'âme :**

Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

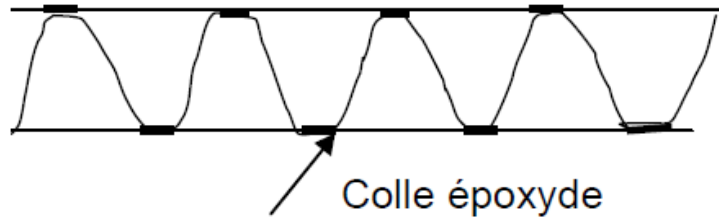
L'assemblage est réalisé selon la (Figure I.13) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

### **I.7.2. Technique de pliage :**

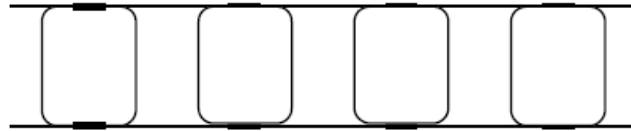
Après mise en œuvre les panneaux sandwiches peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure I.14).

On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.

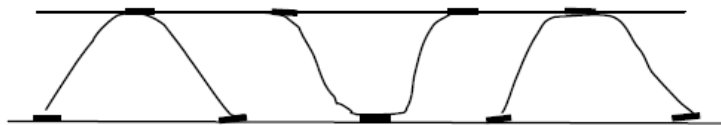




(a) : collage de tôle ondulée ou raidisseurs  $\omega$  sur tôle



(b) : panneaux avec tubes carrés



(c) : panneaux avec  $\omega$  inversés

Figure I.13: panneaux réalisés par collage à partir de profils divers.

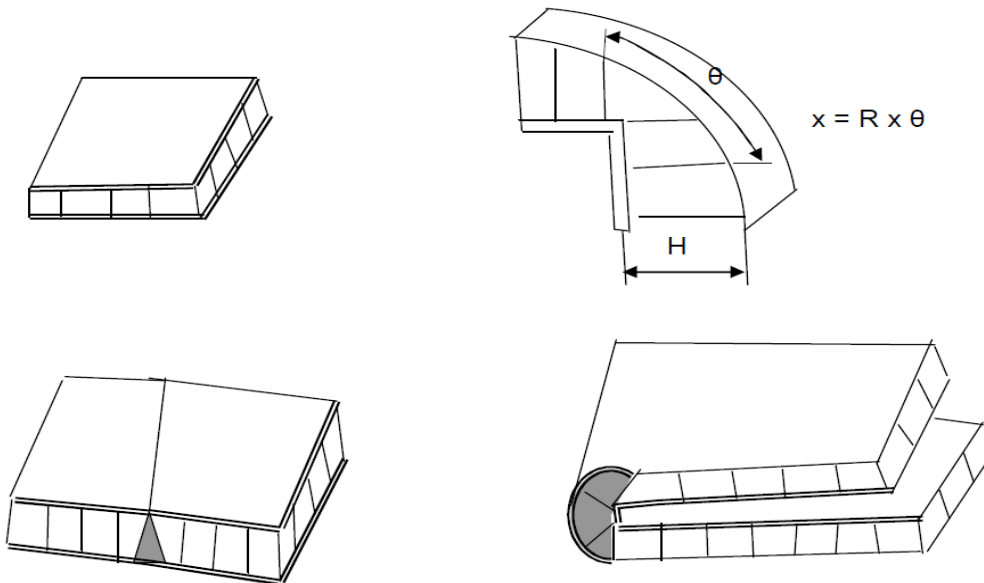


Figure I.14 : Pliage de panneaux sandwiches.

## **1.8. Intérêt des structures sandwiches**

L'intérêt principal des structures sandwiches, par opposition aux composites traditionnels dits monolithique, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de  $100 \text{ kg m}^{-3}$ . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

Les matériaux composites sandwiches disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

## **1.9. Domaines d'application des matériaux sandwiches**

Les panneaux sandwiches sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire et le domaine du génie civil.

### **1.9.1 Construction aérospatiale**

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwiches et par cuisson de stratifiés composites (carbone/ époxyde, kevlar/époxyde) sur nida nomex ou aluminium collés avec des adhésifs époxydes en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwiches constitués de peaux en carbone / époxyde collés sur des âmes en nida aluminium [13].

Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxydes phénoliques ou polyamides.

Les panneaux acoustiques sont des structures sandwiches dont la peau intérieure, coté moteur est constituée d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwichs avec peaux en composites collées sur nida [15].

Dans les domaines astronautique et d'armement, on à besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/epoxyde et l'âme en nida nomex.

### **I.10. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau sandwich. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures sandwiches, ainsi que les différents modes d'endommagements. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés «FGM» tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui gouvernent ce matériau.

# CHAPITRE II

---

GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENTS DE PROPRIETES

## **II.1. Introduction**

Les matériaux à des gradients évalués FGM représentent un des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux a été défini au 21ème siècle. Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à chercher au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace par exemple pose alors le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut collé à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une fortes concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration.

Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer Un Matériau à Gradient Evalué (de l'anglicisme FUNCTIONALY GRADED MATERIALS (FGM)).

Ces dernières années, les matériaux à gradient évalués ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux températures des plus chaudes.

Au début les FGM ont été conçus en tant que matériaux de barrière dans les applications et les réacteurs, c'est par suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, automobile, biomédicale l'industrie des semi-conducteurs et toutes utilisations dans un environnement à haute température.

## **II 2-La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés**

Un matériau a gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatif a des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGMs sont généralement fait à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure II.1) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement placé dans les régions ou les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, le céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grands gradient de la température.

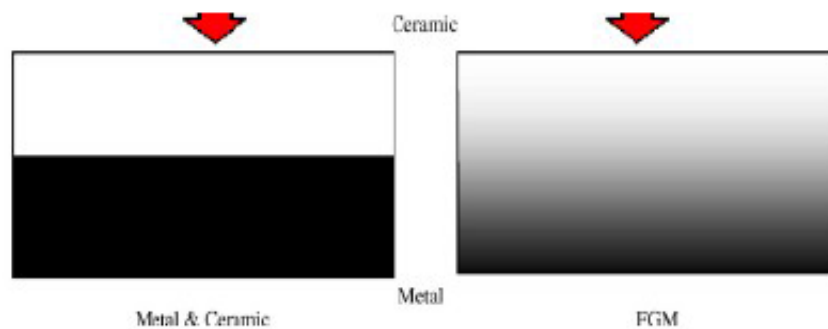


Figure II.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [16-17-18]. Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure II.2 [19] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que le les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionally graded material) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, en vue d'atténuer les singularités prédites ci-dessous.

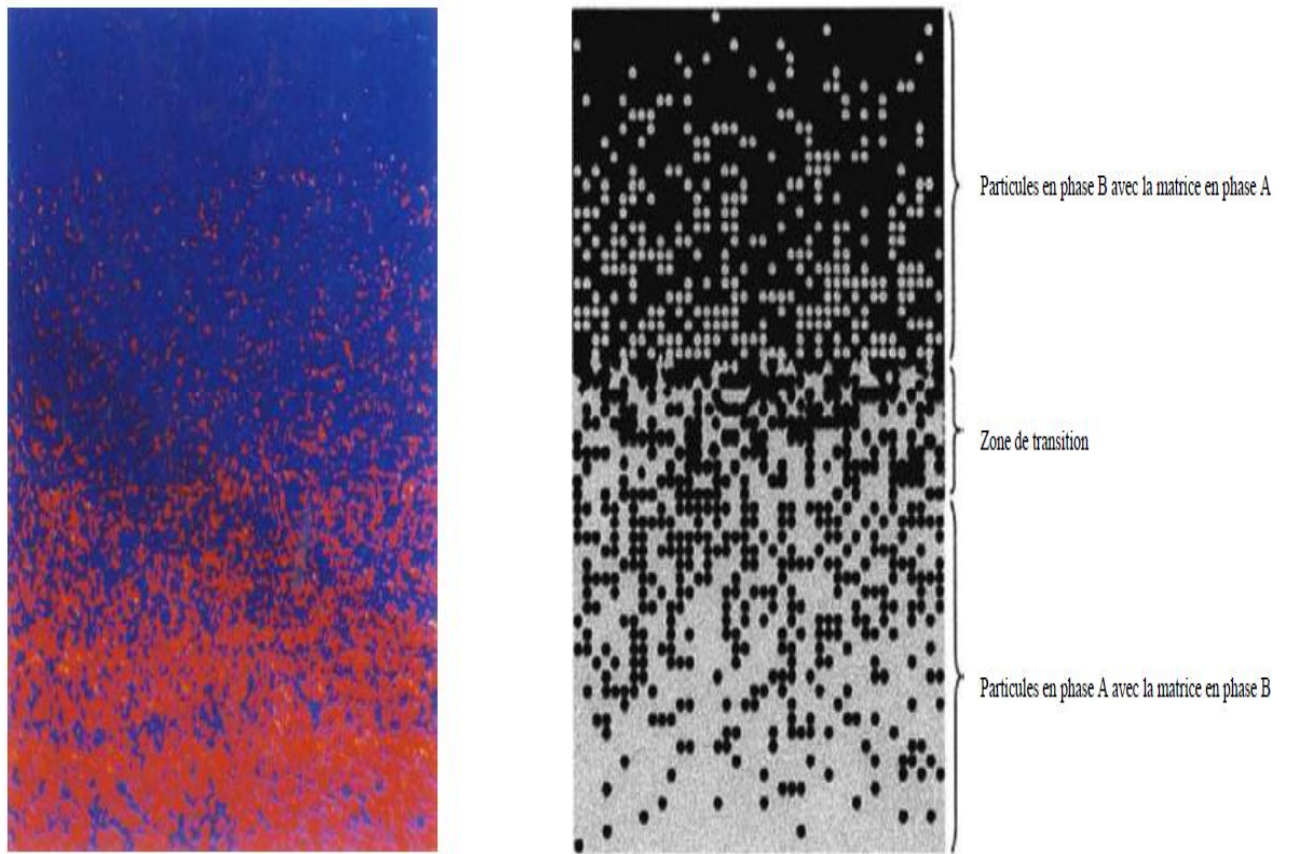


Figure. II.2 :Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. [19].

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques, etc... [20]. D'autres Applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses. Elles ont été, récemment, rapporté dans la littérature ouverte ; par exemple, des sondes [21], des déclencheurs [22], des armures métal/céramique [23], des détecteurs photoélectriques [24] et des implants dentaires [25]. Un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été édités pendant les deux dernières décennies [26-27-28-29-30]. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques [31].



Figure. II.3 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite). [25]

Un aperçu complet sur l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration des plaques et des structures en coques faites en FGM a été présenté par Shen [32].

Récemment, Birman et Byrd [33] ont présentés une étude sur les principaux développements dans ces matériaux en traitant plusieurs problèmes à savoir : le transfert de chaleur, la distribution des contraintes, la stabilité, l'analyse dynamique, les essais, la fabrication et la conception, la rupture et les différentes applications du matériau à gradient de propriétés.

### II.3. Histoire du développement architectural du concept FGM

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme c'est illustré dans la Figure. II.4[34]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [35].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces



matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

|                   |  |            |                |
|-------------------|--|------------|----------------|
| <b>Propriétés</b> | <p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>  |            |                |
| <b>Structure</b>  | <p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇*</p> |            |                |
| <b>Matériaux</b>  | <b>exemple</b>   | <b>FGM</b> | <b>NON-FGM</b> |

Figure. II.4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [34]

### II.3.1. pour des utilisations structurales (intégration du caractère réfractaire et de la dureté)

La véritable lancée de ce matériau a commencé en 1987. À cette époque là, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques des matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées » pour un budget total de 1.215 millions de Yens sous l'auspice de l'agence des sciences et technologie. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux travaillent à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trente organisations de recherches entre instituts, universités et compagnies nationales ont participé au programme en tant que membres des

trois importants ateliers « conception, traitement et évaluation ». Le souci été de développer l'architecture fondamentale des FGM ainsi que leurs applications.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

1. Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
2. Ténacité du matériau côté basse température;
3. Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau [36].

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (coté hautes températures) et des métaux (côté basse température) (Figure. II.4).

La figure. II.5 montre les principaux résultats du programme de recherche [37], [38]. Par exemple, du coté de la conception et de la modélisation, ils ont développés un système de DAO utilisant un modèle de conception inverse qui peut donner une architecture de conception globale en choisissant des compositions et des microstructures tout en optimisant sur l'arrangement gradué. En vue d'une meilleure optimisation ils ont utilisés Des paramètres thermo-physiques mesurés ou calculés pour réduire au minimum la contrainte thermique sous les conditions des différents processus de fabrication ou de service. Une fonction aléatoire a été utilisée pour combiner différentes microstructures et propriétés. Ils ont établis une approche micromécanique pour corrélér les microstructures graduées et leurs propriétés. Des théories fractales et de percolation ont été présentées pour l'analyse quantitative de la variation spatiale des microstructures graduées; la méthode FEM a été employée pour modéliser la distribution des efforts internes.

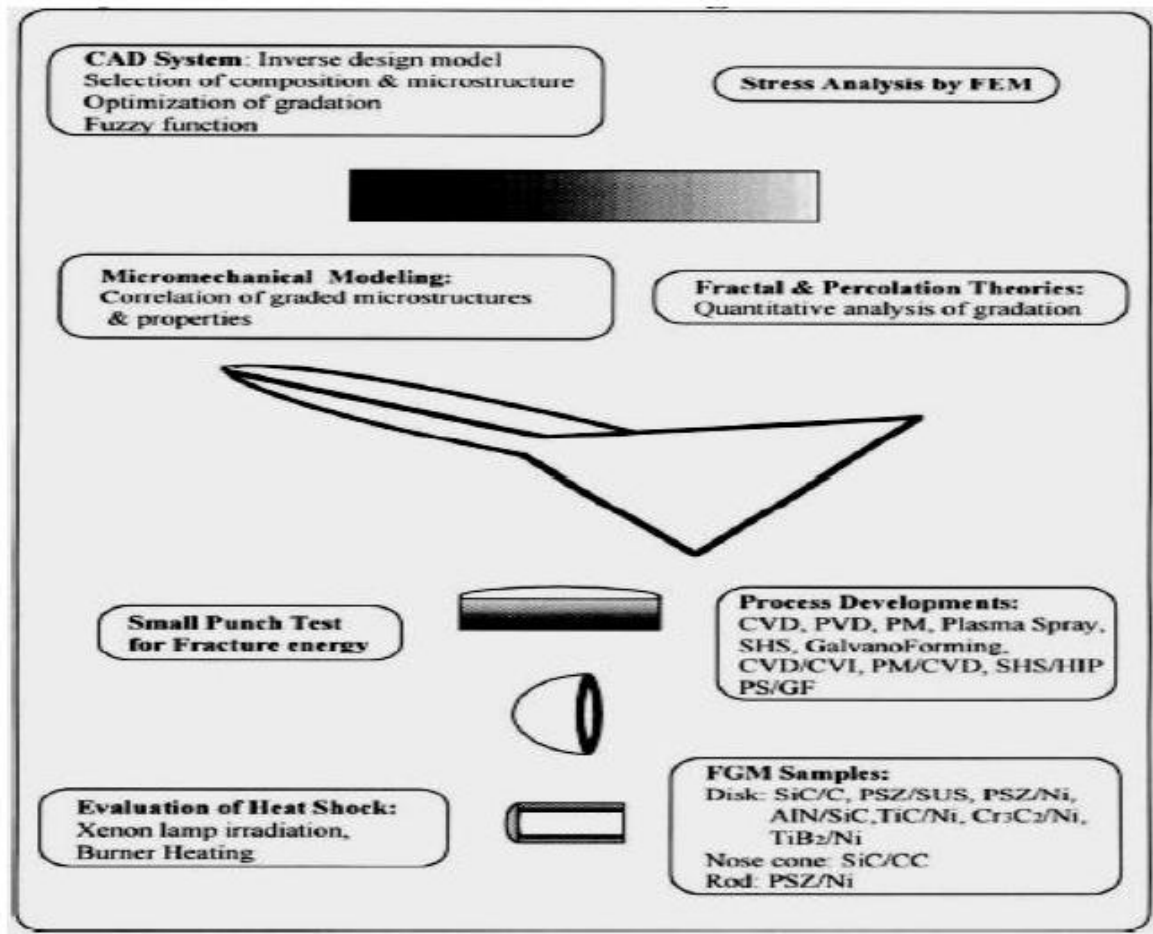


Figure. II.5 : résultats importants du programme de recherche de 1987-1991 sur « étude fondamentale de la relaxation des contraintes thermiques pour les matériaux à hautes températures en utilisant des structures graduées ».

Cette première étape dure de 1987 à 1992 ; Plusieurs techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure en site CVD, PVD, jet de plasma, poudre métallurgique, SHS et galvano formation. Les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000°K (température de surface) et à un gradient de température de 1000°K. Divers échantillons en FGM ont été fabriqués comme des disques en SiC/C, AlN/sic, PSZ /acier, PSZ/Ni, TiC/Ni, Cr<sub>3</sub>C<sub>2</sub>/Ni, TiB<sub>2</sub>/Cu ; des ogives en SiC/CC et des tiges de PSZ/Ni.

Un petit essai de poinçonnement a été conçu pour évaluer l'énergie à la rupture d'un disque mince en FGM. Deux méthodes ont été développées pour l'évaluation de la résistance au choc thermique jusqu'à 2000°K ; L'irradiation par une forte lampe en xénon et une méthode basée sur le chauffage en utilisant un mélange de gaz d'oxygène/hydrogène comme flamme de brûleur. Les petites chambres de combustion pour des moteurs-fusées faites de

formations SiC/CC par CVD/CVI et de ZrO<sub>2</sub>/Ni par jet de plasma/galvano ont subis des essais de combustion au laboratoire aérospatial national.

Bien que ce programme ne soit pas prolongé au delà de la recherche fondamentale, il a établi l'orientation future pour continuer la recherche en FGM dans le monde entier. Plus tard le concept FGM a été appliqué dans plusieurs industries et même dans les productions en série. A nos jours, des outils de coupe de haute performance en TiCN/WC/Co, Ni et des lames de rasage faites de composés intermétalliques Al-Fe/ acier inoxydable ont été commercialisés [38]. Cependant, d'autres applications commerciales sont encore limitées.

### **II.3.2. Pour des utilisations fonctionnelles (la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique) :**

Puisqu'on s'est attendu à ce que le concept FGM s'applique aux matériaux aussi bien pour des usages fonctionnels que pour des applications structurales, un nouveau projet de cinq ans a été lancé en 1993 dans le but d'appliquer le concept FGM au développement de l'énergie de conversion des matériaux thermoïoniques et thermoélectriques. Les convertisseurs TIC (en conversion ionique) et TEC (en conversion électrique) peuvent produire de l'énergie électrique directement à partir de l'énergie thermique par l'écoulement d'électron produit dans l'espace ou dans un solide sous un différentiel à hautes températures. La figure. II.6 montre ce programme continu; Dans ce système hybride de conversion directe d'énergie, un TIC et un TEC sont combinés, et l'énergie solaire est utilisée comme source de chaleur pour créer un gradient de température de ~2000°K à ~300°K. La conception et l'optimisation des champs gradués sous un potentiel électronique et élastique devraient mener à une efficace conversion avec la relaxation de la contrainte thermique. Ainsi le développement de l'architecture du FGM qui combinerait les propriétés structurales et fonctionnelles est un autre but de ce programme.

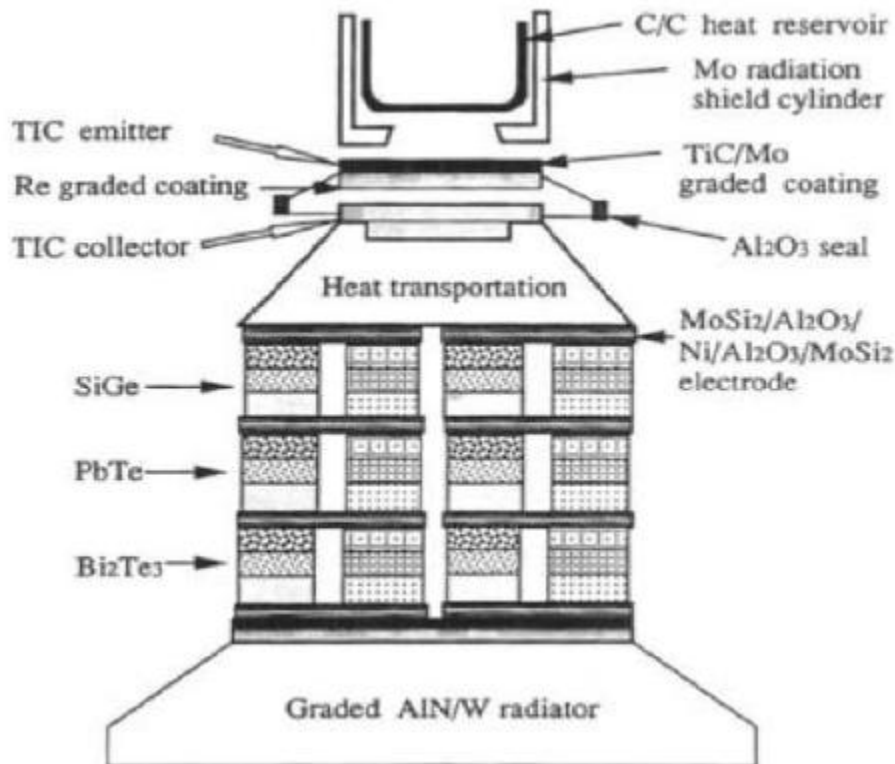


Figure. II.6 : Un schéma illustrant le système de conversion direct hybride d'énergie [38].

### II.3.2.1. La conception et le traitement de composants gradués par TIC et TEC

Afin de développer des TIC et TEC efficaces et durables, ou une combinaison de ces deux dispositifs, un système optimisé, avec une faible perte de température et moins de dégradation, doit être assemblé utilisant les matériaux et dispositifs à haute performance par TIC et TEC. Ceci exige de résoudre divers problèmes d'interface concernant le transfert de chaleur, jonction des matériaux, contrainte thermique, contact électrique, et isolation sous des conditions thermiques extrêmes.

#### a/ un réservoir de chaleur gradué(C/C) :

Afin de réaliser une accumulation de chaleur et un transfert efficace à partir des rayons solaires, un FGM composé d'un alignement gradué des fibres de carbone en 3D et une technique d'infiltration de lancement a été développée par Nippon Oil Company Ltd. [38]. Les fibres de carbone sont fortement anisotropes concernant la conduction thermique suivant et perpendiculairement à leur longueur. Par conséquent, l'alignement gradué des fibres est conçu pour avoir une densité plus élevée des fibres le long du flux thermique dans les couches internes.

Une pièce tissée de fibres de carbone avec une texture graduée a été infiltrée par un lancement sous pression isostatique chaude (HIP) pour graphiter le lancement et pour densifier la structure. La figure II.7 (a) montre l'alignement gradué des fibres de carbone, tandis que la figure II.7 (b) est une photo d'un réservoir de chaleur gradué et dense en C/C selon la technique (HIP). Des rayons solaires sont concentrés dans ce réservoir par un grand miroir parabolique, et les parois latérales et celles du fond sont uniformément chauffées à 1380°C et à 1680°C respectivement.

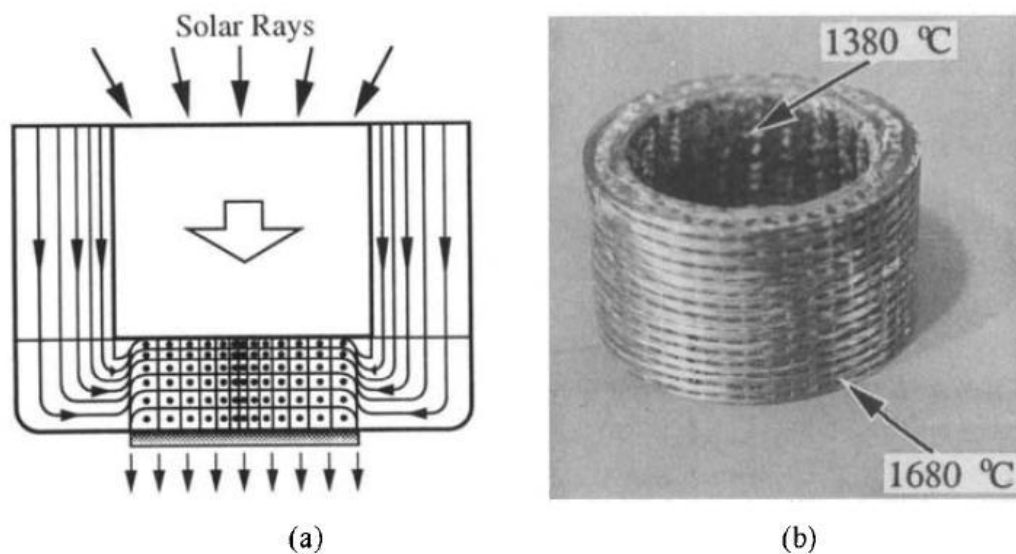


Figure. II.7 : (a) Un schéma de l'alignement gradué des fibres de carbone dans un réservoir à chaleur, (b) un réservoir à chaleur graduée de C/C [38].

Le réservoir à chaleur est couvert d'un bouclier de radiations fait d'un cylindre fortement poli en monocristal  $M_0$  (Figure. II.7). Un flux thermique élevé de 1450°C peut être transporté du fond du réservoir jusqu'à la surface arrière de l'électrode d'émission du TIC par les rayons de chaleur.

- **un émetteur gradué TIC (TIC/MO/W/Re) :**

Le carbure titanique est un matériau prometteur pour la réception de la chaleur de l'émetteur TIC en raison de son point de fusion élevée (3000° C) et son émissivité élevée (0,9), qui permet l'absorption efficace de la chaleur d'une bande du spectre solaire à températures élevées. Un enduit gradué de TIC/Mo avec une contrainte thermique basse a été développé en utilisant une technique de jet de plasma en double-pistolet développée à l'institut de recherche national sur les métaux au Japon [38]. Il n'a été observé aucune fissure dans cet enduit gradué après chauffage à 1800°C.

L'enduit a été formé par le côté arrière de l'électrode d'émission Mo/W/Re [38]. W et Re ont été déposés sur un substrat Mo par CVD. La couche graduée est formée à travers l'inter-diffusion de ces éléments à 2300°C par traitement thermique. W peut agir en tant que barrière de diffusion pour Re par la création d'une graduation compositionnelle stable au-delà de 2000°C.

La figure. III.7 montre la section transversale graduée de cet émetteur en FGM développé par la firme Tokyo Tungstène Co. Ltd. le changement linéaire du coefficient de dilatation thermique pour Re-W et le petit changement pour W-Mo relaxent efficacement la contrainte thermique.

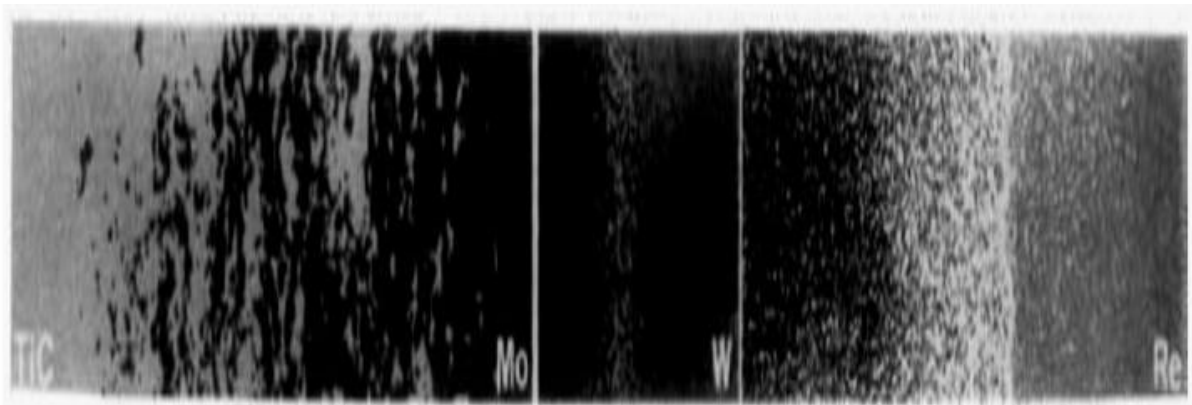


Figure. II.8 : changements microstructuraux de l'émetteur gradué en TiC/Mo W/Re [38].

L'électrode du collecteur a été façonnée au laboratoire électrotechnique en pulvérisant l'oxyde de niobium selon une basse fonction de voltage de 1,38 eV sur l'électrode Mo. Le dispositif TIC avec un maximum de puissance de sortie de 8 W/cm<sup>2</sup> obtenue à un différentiel de température d'émetteur-collecteur de 1600°C-760°C et une température du réservoir de 330°C est assemblée à Mitui Engineering & Ship Building Co.Ltd. [38].

#### - Matériel thermoélectrique gradué en PbTe

Pour les dispositifs TEC tels que Bi<sub>3</sub>Te<sub>2</sub>, PbTe, et SiGe, exposés dans le proceding d'ichiro [38], les calculs théoriques suggèrent qu'il soit possible d'améliorer l'efficacité de conversion d'un pourcentage considérable par la graduation des compositions. La figure II.9 compare le maximum de puissance de sortie d'un PbTe gradué ayant trois différentes concentrations (A-couche 3.51x10<sup>25</sup>/m<sup>3</sup>, b-couche 2.6x10<sup>25</sup>/m<sup>3</sup>, c-couche 2.26x10<sup>25</sup>/m<sup>3</sup>), fabriqué à l'institut national de recherche sur les métaux au japon, à celui des compositions homogènes de chaque couche (théorique). Le PbTe avec une graduation du dopant PbI<sub>2</sub> a été

préparé en stratifiant des poudres avec trois compositions différentes du dopant, suivies du pressage à chaud. La puissance de sortie a été mesurée en tenant l'électrode de basse température à la température ambiante. Il a été montré que l'échantillon de FGM possède une puissance maximum de 253 W/m pour  $\Delta T=486^\circ\text{K}$ , 11% plus grande que la puissance la plus élevée des échantillons non-gradués en stratifiée.

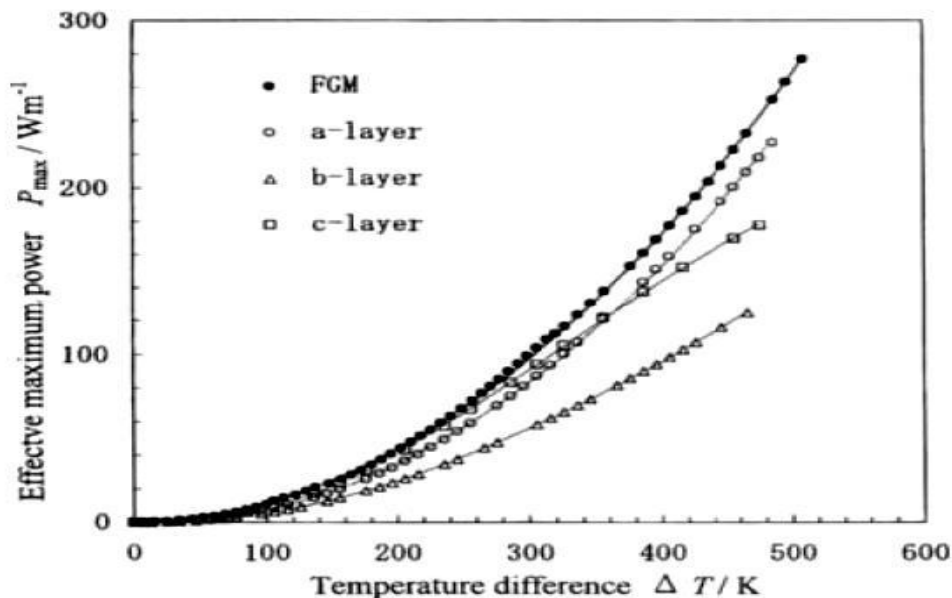


Figure. II.9 : Puissance maximum efficace en fonction de la différence de la température pour un FGM trois-couches [38].

- **Une électrode symétriquement graduée  $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{MoSi}_2$  pour un TEC SiGe**

Dans le cas du dispositif TEC,  $\text{MoSi}_2$  est prometteur comme électrode à hautes températures pour les matériaux thermoélectriques tels que SiGe parce qu'il a un point de fusion élevée ( $2030^\circ\text{C}$ ), avec une résistivité appropriée de  $(1.7 \cdot 10^{-4} \Omega\text{-cm}$  à  $1000^\circ\text{C}$ ), et une excellente résistance à l'oxydation. Cependant, sa dureté mécanique ( $3\text{-}4 \text{ MPA}\cdot\text{m}^{1/2}$ ) est faible. Pour façonner des électrodes dures, une électrode symétriquement graduée de  $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ni}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{MoSi}_2$  (représenté sur la figure II.10) a été fabriquée à l'université d'Osaka à l'aide d'une combinaison d'auto propagation d'une synthèse à hautes températures et de HIP (SHS/HIP).

Cette structure symétriquement graduée produit une contrainte résiduelle compressive de 100 MPA à la couche externe de  $\text{MoSi}_2$  due à une dilatation thermique inadéquate entre les couches externes et internes, ayant pour résultat le renforcement du  $\text{MoSi}_2$  jusqu'à  $5,8 \text{ MPA}\cdot\text{m}^{1/2}$ .  $\text{Al}_2\text{O}_3$  agit en tant que barrière de diffusion contre le Ni à environ  $800^\circ\text{C}$ . Un



aperçu des expériences avec la diffusion de Ni dans une structure de FGM à températures élevées suggère qu'à 800°C il y aura peu de formation de couches réactives pendant au moins 10 années. Cette électrode symétrique en FGM a été jointe à SiGe par la firme (Mitsubishi Heavy Industries Ltd) en utilisant des inters couches en poudres Ge et W et des feuilles Zr-Ni à 1000°C[38].

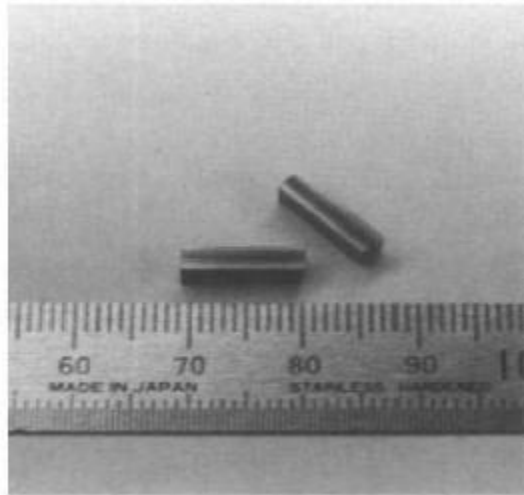


Figure. II.10: Photo des électrodes symétriques graduées de MoSi<sub>2</sub>/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Ni/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MoSi<sub>2</sub> fabriquées à l'université d'Osaka pour un dispositif de SiGe [38].

- **matériau radiatif gradué AlN/W**

Pour l'utilisation des dispositifs TIC et TEC ou leur combinaison dans l'espace, le refroidissement par rayonnement est exigé. Au Sumitomo Electric Industries, Ltd. Au Japon, un matériau radiatif unique fait d'un composé d'une matrice en céramique AlN contenant une dispersion graduée des particules fines de W, fabriqué par frittage à 1800°C. L'AlN dense possède une conductivité thermique élevée (200 W/mK), il est transparent aux longueurs d'ondes du visible à l'infrarouge. D'autre part, W a une émissivité élevée (0,9) pour les ondes infrarouges. Une partie de la chaleur écoulee, conduite à partir du TEC vers AlN, peut être reflétée par les particules W, comme illustré sur la figure. II.11. Une émissivité élevée de 0,97 a été calculée et mesurée quand une forte concentration de particules de W ont été dispersées près de l'interface avec TEC, et la concentration a été graduellement diminuée vers l'autre extrémité.

Suivant les indications de la figure. II.12, la structure graduée AlN/W, qui peut satisfaire à la fois une conduction thermique élevée et une émissivité élevée, possède différentes caractéristiques comparées aux matériaux conventionnels [38].

Dans ce programme, la nouvelle enquête a été effectuée principalement sur les sujets suivants :

1. Modélisation et évaluation des matériaux thermoélectriques gradués ;
2. Synthèse des graduations p et n type ( $\text{Bi}_3\text{Te}_2$ ,  $\text{PbTe}$ , et  $\text{SiGe}$ ) avec une efficacité de conversion plus élevée ;
3. La fabrication des segments et des cascades de TEC avec des pertes d'énergie faibles au niveau des interfaces ;
4. fabrication des TIC avec les électrodes graduées qui ont une efficacité de conversion au-dessus de 15%.
5. Stabilité des structures graduelles de propriétés aux températures élevées.

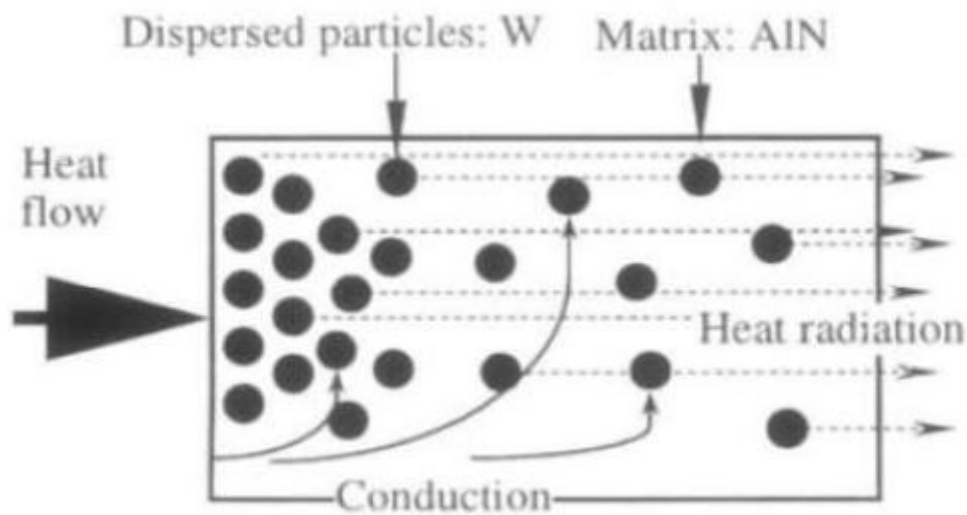


Figure. II.11 : schématisation d'un matériau très radiatif composé d'une matrice AlN contenant une dispersion graduelle des particules fines W [38]

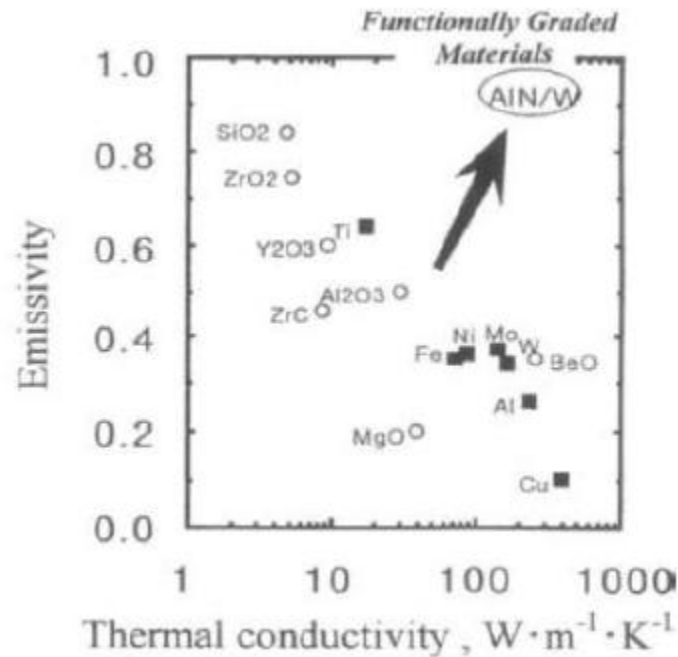


Figure II.12: La relation entre la conduction thermique et l'émissivité [38].

#### II.4. Nouveaux procédés pour le traitement des FGM

S'il y'a Une caractéristique concernant la fabrication des FGM c'est certainement la très grande variété des méthodes de traitement disponibles [39]. Les matériaux fonctionnellement gradués incluent des matériaux avec un gradient dans la composition, La taille de grain et/ou la porosité. Le but général du traitement des FGM est de réaliser une distribution spatiale en microstructure et/ou en composition dans le produit final. Quand en choisit la méthode de traitement, les différences existantes entre les propriétés des deux phases constitutives du FGM sont d'extrême importance. Dans la composition d'un FGM, par exemple, la différence dans la résistance thermique entre les deux phases est un facteur clé. Si les deux phases ont des points de fusion sensiblement différents, comme dans le cas des FGM en céramique/métal, le gradient de composition peut être formé en produisant un gradient de porosité performant de la phase réfractaire infiltré, par la suite, par la deuxième phase fondue pour obtenir un produit final dense. Si les deux phases ont un point de fusion semblable, l'infiltration ne peut pas être utilisée, car le squelette ne peut pas tenir leur puissance durant l'infiltration. Les dimensions et la géométrie du FGM doivent être aussi bien considérées. Il est faisable de produire des FGM dans plusieurs systèmes avec des technologies de couches thermiques, mais leur basse efficacité les rend inutiles pour la production en grandes masses des FGM tridimensionnels.

### II.4.1. Processus de formation et de consolidation des FGM

Pour la fabrication de FGM en bloc, le traitement métallurgique en poudre est le plus économique et approprié à la production en série. Afin de produire un FGM par traitement conventionnel à la poudre, un corps vert avec un gradient de fraction volumique désirée est d'abord fabriqué. Après la formation et la consolidation, ce corps doit être densifié par frittage. Les méthodes de graduation peuvent être divisées en deux groupes : le processus sec et l'autre humide (figure II.13) [40]. Les processus secs sont rapides, mais, généralement, ils permettent seulement la génération des profils gradués par étape. Dans le processus humide, une étape de séchage est exigée pour l'élimination du liquide mais la continuité du mélange est facilitée et il peut y avoir une production des gradients continus et lisses. En outre, des procédés de transport apparaissent dans les suspensions, par exemple sédimentation et électrophorèse, peuvent être employés pour produire des gradients à bas prix.

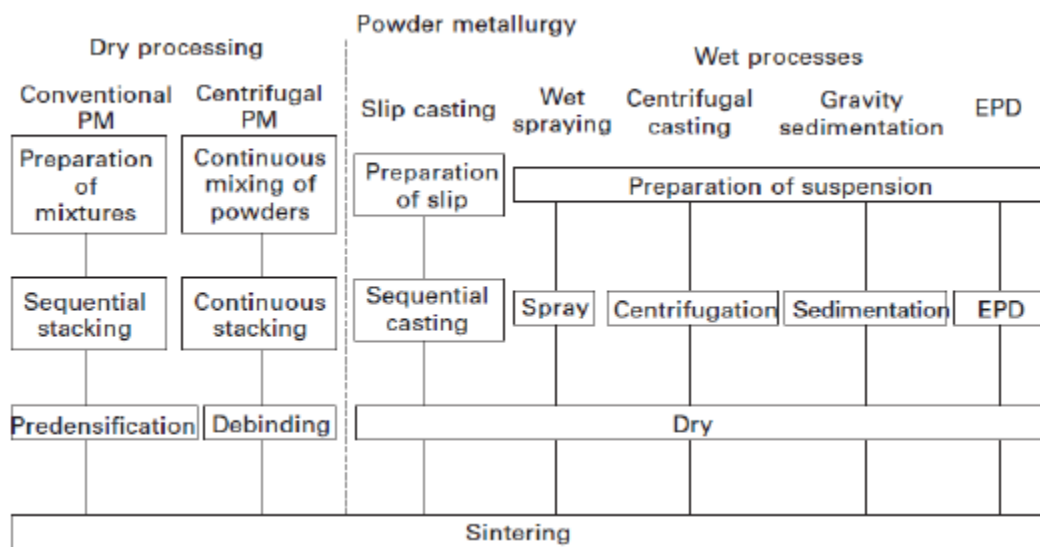


Figure. II.13 : Processus de traitement des Poudre pour les FGM [40].

Le défi principal lié au traitement aux poudres est fréquemment lié à la densification du compact de poudre gradué. Les taux de frittage diffèrent avec la position et le rétrécissement inégal peut conduire à la déformation et à la fissuration, à moins que des techniques sophistiquées de frittage soient utilisées.

Une technique largement utilisée pour les matériaux gradués en céramique/céramique elle consiste à la coulée en barbotine séquentielle où de glissades de différentes compositions moulées l'une au-dessus de l'autre [41]. En utilisant un système pré mélange, la composition en jet peut être faite sans interruption [42].

Dans un processus appelé la pulvérisation humide [43], des suspensions en deux poudres sont créées, mélangées et pulvérisées sous control informatique sur un substrat chauffé. Après la formation, le corps vert est enlevé du substrat, pour les feuilles en FGM.

Un excellent gradient de composition suivant l'épaisseur peut être créée en contrôlant la proportion de deux poudres dans la suspension mélangée. La Coulée par centrifugation [44] est une autre méthode de consolidation du FGM en utilisant le mélange de suspensions pour réaliser le gradient. Quand les suspensions des deux poudres de densités différentes ou de grosseurs de grains différents sont mélangées et injectées dans la cavité cylindrique, qui tourne à la grande vitesse, les forces centrifuges causent un gradient compositionnel ou de porosité dans le compact de poudre croissant dans la direction radiale. Avant d'arrêter la rotation, la cire est injectée dans le système pour lier les poudres afin d'augmenter la force verte pour le façonnage du corps. Les FGM poreux avec une distribution graduelle de la porosité peuvent être utilisés comme préforme pour des filtres, ou pour les membranes en céramique. Un processus similaire à la coulée par centrifugation est la sédimentation gravitationnelle [45]. La coulée par centrifugation, peut seulement être utilisée pour les pièces de forme cylindrique, tandis que la sédimentation gravitationnelle convient aux plaques en FGM.

Parmi les différentes techniques de traitement colloïdales, la méthode électrophorétique de dépôt (EPD) est une méthode très prometteuse [46] parce que c'est un processus assez rapide qui ne coûte pas cher pour la fabrication des couches en céramique, des monolithes, des composites et des matériaux fonctionnellement gradués variant selon l'épaisseur de quelques nanomètres à quelques centimètres. Le dépôt électrophorétique est un processus en deux étapes (figure. III.13). Dans la première étape, des particules ayant acquis une charge électrique dans le liquide dans lequel elles sont suspendues sont forcées de se déplacer vers l'une des électrodes par l'application de champ électrique à la suspension (électrophorèse). Dans la deuxième étape (dépôt), les particules se rassemblent à l'une des électrodes et forment un dépôt cohérent. Le dépôt prend la forme imposée par cette électrode. Après séchage et enlèvement de la matière de l'électrode, une forme de corps en céramique vert est obtenue. La cuisson de ce corps vert donne un composé en céramique. Des matériaux graduels peuvent être obtenus puisque la composition de la prochaine couche de poudre déposée est déterminée par la composition de la suspension en ce moment (fig. II.14).

L'adaptation Judicieuse de la concentration de la poudre dans la suspension permet de générer un profil gradué bien contrôlé dans une étape de mise en forme continue.

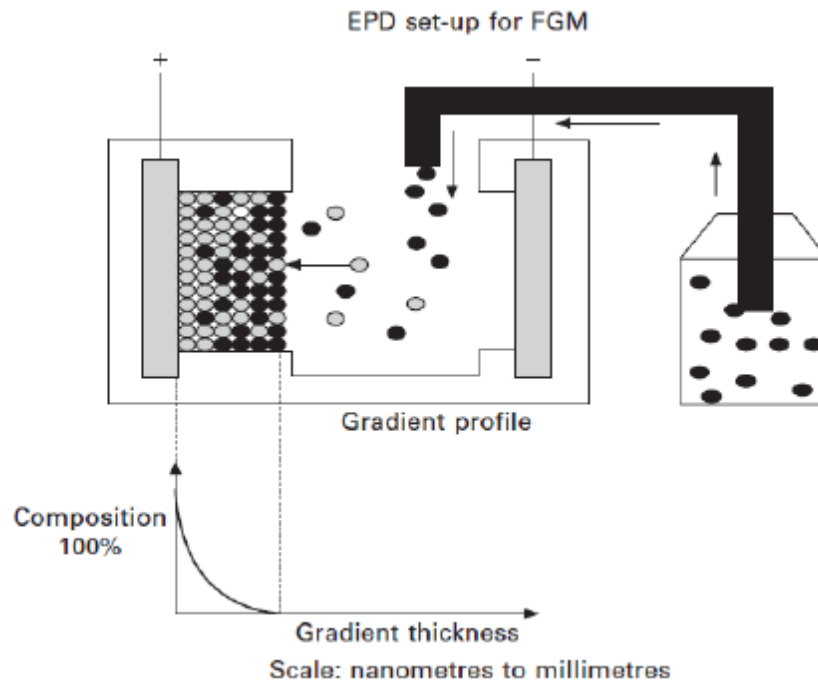


Figure. II.14 : Procédé électrophorétique de dépôt pour des matériaux de FGM [39].

Le processus n'est pas spécifiquement matériel, puisqu'une large variété de matériaux a été déjà déposée, comme les poudres en métal, en céramique, en verres, et en polymères [47]. Généralement la seule limitation de forme est la faisabilité d'enlever le dépôt de l'électrode après la déposition. Les matériaux gradués dans le système  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ ,  $\text{ZrO}_2/\text{WC}$ , et  $\text{WC}/\text{Co}$  ont déjà été explorés au moyen du processus EPD [39]. requise une pré réquisition d'une production réussie des matériaux en FGM au moyen d'EPD s'avère le meilleur moyen de contrôle de la cinétique du processus. Des modèles cinétiques ont été donc développés pour traiter les FGM dans un système à plusieurs éléments au moyen d'EPD [48]. Comme exemple, en présente une composition d'un profil (figure. II.15) et sa microstructure (figure. II.16) ; c'est un disque en FGM  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$  [49] avec un noyau homogène (75% volume d' $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), une couche  $\text{Al}_2\text{O}_3$  extérieure pure d'un côté et un composé homogène (90% volume d' $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) sur l'autre face, et des couches symétriquement graduées à profilées intermédiaire.

Comme montré dans le graphe, un profil convexe gradué en alumine est suggéré pour donner un effort de compression plus élevé aux couches externes d'alumine et les plus basses contraintes de traction au noyau du disque. Les phases  $\text{ZrO}_2$  (blanc) et  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (grises) peuvent être clairement différenciées dans la microstructure. La phase  $\text{ZrO}_2$  est bien dispersée dans la matrice  $\text{Al}_2\text{O}_3$  dans les parties graduées et dans le noyau du FGM.

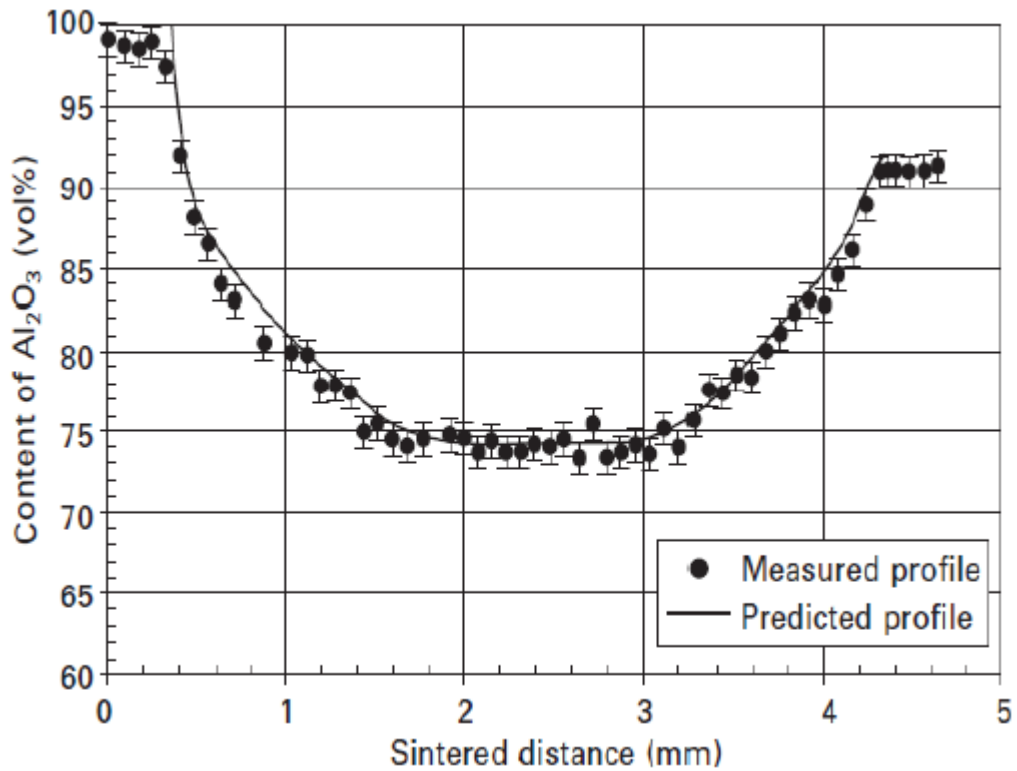


Figure.II.15 : Profil en FGM mesuré et prévu d'un disque ( $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ ) [39]

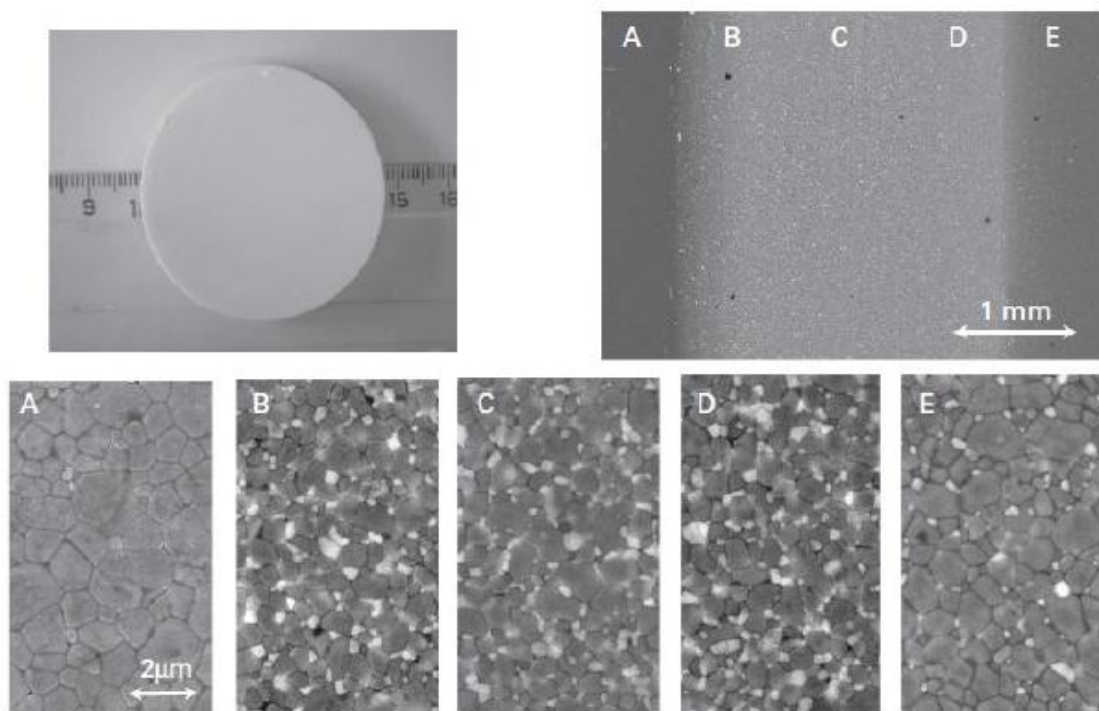


Figure.II.15 : Panorama général et quelques micrographes détaillés des endroits spécifiques dans un disque en FGM. [39].

#### II.4.2. Densification des poudres compactes pour FGM

Le défi le plus important est la densification des poudres compactes graduées. Le traitement des matériaux en FGM par des méthodes métallurgiques des poudres induit des flèches de déformation excessives et indésirables du composant après frittage. A cause de ces contraintes thermiques résiduelles excessives, des fissures et d'autres défauts peuvent souvent

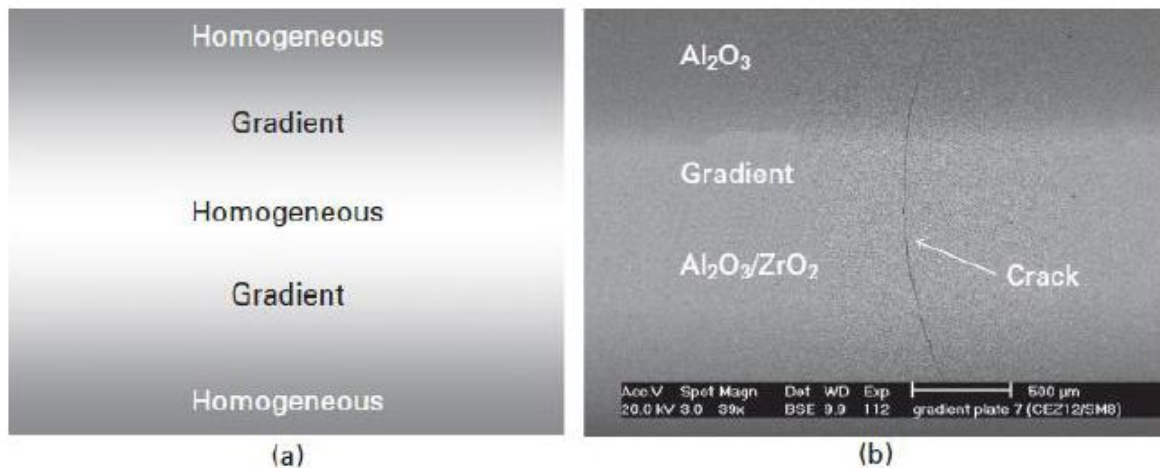


Figure.II.16: (a) schémas du FGM ; (b) fissure typique observée dans Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ ZrO<sub>2</sub> [39].

La figure. II.16 montre des fissures typiques observées dans les disques symétriquement gradués en Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub>, formés par les dépôts électrophorétiques et densifiés par frittage à basse pression. A partir de la figure, il est à voir que des fissures transversales apparaissent dans le noyau riche en ZrO<sub>2</sub> d'un disque symétrique fritté en TZP/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Cependant, La propagation des fissures s'est arrêtée dans la couche externe Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, indiquant que la contrainte de traction plane est située au centre des disques, qui devraient être abaissés. Hillman [50] a observé des défauts similaires dans des stratifiés symétriques avec des couches Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> sur les surfaces et une couche médiane en ZrO<sub>2</sub>. Ces défauts sont les plus susceptibles aux contraintes résiduelles de traction pendant le refroidissement du noyau, dû au coefficient de dilatation thermique élevé de zircone. Ces régions de plus faible densité (pores) doivent être formées comme conséquence de la contrainte de traction qui se développe pendant le rétrécissement différentiel durant la densification entre les couches Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> et Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub>. Les pores agissent alors en tant que pailles préexistantes pour la génération de la dilatation thermique inadéquate des fissures pendant le refroidissement par l'intermédiaire du lien des pores et des défauts cavitationnels.

L'élimination des fissures transversales peut être accomplie en diminuant le retrait de tous les composés. Ceci se fait seulement en diminuant le grand écart compositionnel entre les



différentes couches [51-52] ou en ajustant la densité verte des différentes couches [53]. Une autre possibilité est de diminuer le taux de chauffage et de refroidissement Pendant le frittage [52]. Les forces résiduelles pendant Le cycle de chauffage sont diminuées par nature visqueuse du FGM à la Température de frittage. La force de frittage résiduelle est proportionnelle au taux de frittage résiduel. La rupture est réduite sous un refroidissement lent ; ceci est probablement du à La relaxation des tensions résiduelles pendant la période initiale de refroidissement.

Presque tous les volumes FGM en matériaux céramique/céramique sont frittés par un frittage conventionnel à basse pression ou par un pressage à chaud, selon les propriétés de frittage des deux composants [39]. Dans un FGM métal/ céramique avec une phase continue en métal et une phase en céramique discontinue, les taux de frittage sont contrôlés par la densification de la phase métallique et un tel FGM peut être densifié par des méthodes de frittage conventionnelles [40]. Cependant, dans la plupart des FGM où une phase céramique élevée est envisagée quelques approches spéciales doivent être considérées pour la densification entière.

En plus du frittage conventionnel, le traitement réactif en poudre, également appelé synthèse de combustion ou la synthèse à hautes températures (SHS), peut être utilisée si les composés voulus sont synthétisés d'un premier mélange de poudre. Ce processus comporte une réaction chimique rapide et exothermique pour synthétiser simultanément quelques ou toutes les phases des constituants dans le FGM et puis densifier le composant.

Une technique plus avancée, telle que le frittage de plasma en étincelle (SPS) ou le frittage par courant électrique pulsé, est également utilisé pour la fabrication de FGM [39]. C'est une méthode de frittage à pression assistée dans laquelle un haut courant est pulsé à travers une installation matrice/poinçon/échantillon, qui peut être comparée à ceux du cas de pressage conventionnel à chaud. Les grandes impulsions de courant produisent des plasmas d'étincelle, une pression d'impact d'étincelle et une énergie de chauffage en Joule.

Le mécanisme de frittage et les propriétés mécaniques des compacts frittés montrent des caractéristiques différentes des processus de frittage conventionnels aux pressions assistés. Cette technique offre des avantages significatifs pour différentes sortes de nouveaux matériaux et produit toujours un compact dense dans un petit temps de frittage et avec une dimension du grain plus fins que des méthodes conventionnelles. Le frittage de plasma en étincelle des FGM utilise un gradient de température dans le système, qui permet une densification homogène des FGM en Correspondant le gradient de température au gradient de

taux de retrait du compact. Avec un système de plasma d'étincelle, une grande masse FGM (céramique/métal) (~100 millimètres de section) peut être homogènement densifié en peu de temps avec des temps de chauffage et d'entreposage à moins d'une heure. Parmi les systèmes de frittage de plasma en étincelle rapportés on cite des matériaux à base de WC (WC/Co, WC/Co/steel, WC/Mo), des composés à base de  $ZrO_2$  ( $ZrO_2$ /acier,  $ZrO_2$ /TiAl,  $ZrO_2$ /Ni),  $Al_2O_3$ /TiAl, ...etc. [39].

Le frittage à la micro-onde est une autre technique prometteuse pour les FGM en céramique/métal pour remédier à la difficulté de l'inégalité du taux de rétrécissement. Comme une nouvelle technique de frittage, le frittage aux micro-ondes utilise des micro-ondes et des radiations pour chauffer la céramique ou un compacte composite à base de céramique [54]. Le mécanisme de chauffage par micro-ondes est basé sur la perte diélectrique des phases céramiques injectées, ayant obtenu par une technique volumétrique de chauffage dans laquelle la chaleur est produite par le compacte lui-même.

## **II.5 L'intérêt d'utilisation des FGM**

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

## **II.6 Méthodes d'élaboration des FGM**

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus

élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

### **II.6.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)**

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. II.17). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 $\mu$ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa

viscosité .Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

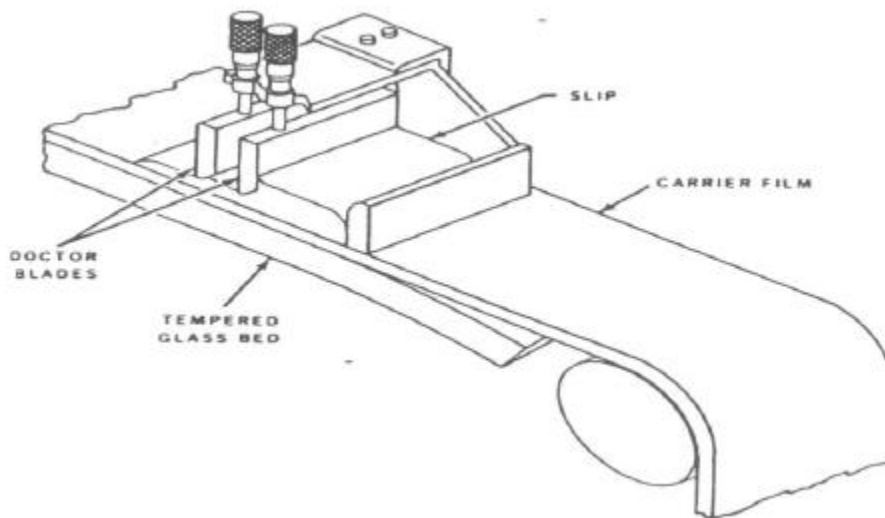


Figure. II.17 : Principe de la méthode coulage en bande.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés [35]. Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type  $Al_2O_3$  et surtout pour les condensateurs à base de  $BaTiO_3$ . On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ( $BaTiO_3$  principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par MISTLER [55].
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [35].

### II.6.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule .Après séchage, on obtient le corps en cru .Donc le coulage se effectué en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### **II.6.3 Compaction Sèche des Poudres**

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [56]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

### **II.6.4 Dépôt par Electrophorèse**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [36].

### **II.6.5 Projection Plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des

particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [57].

#### **II.6.6 C. V. D. et P. V. D.**

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

#### **II.6.7 Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

#### **II.6.8 Frittage Laser Différentiel**

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure II.18 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

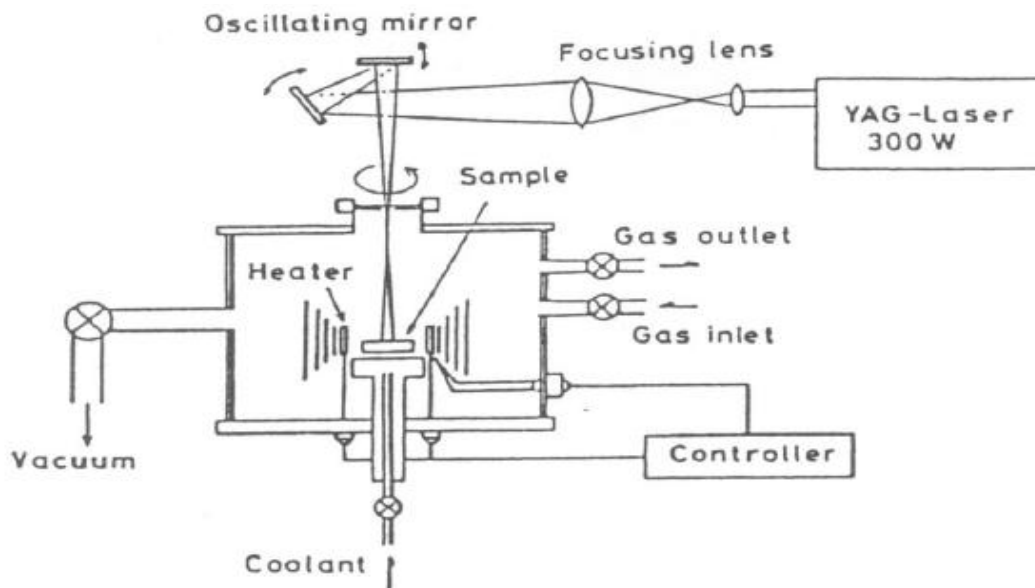


Figure II.18 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

### II.6.9 Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [36].

### II.6.10 Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure. II.19) [36].

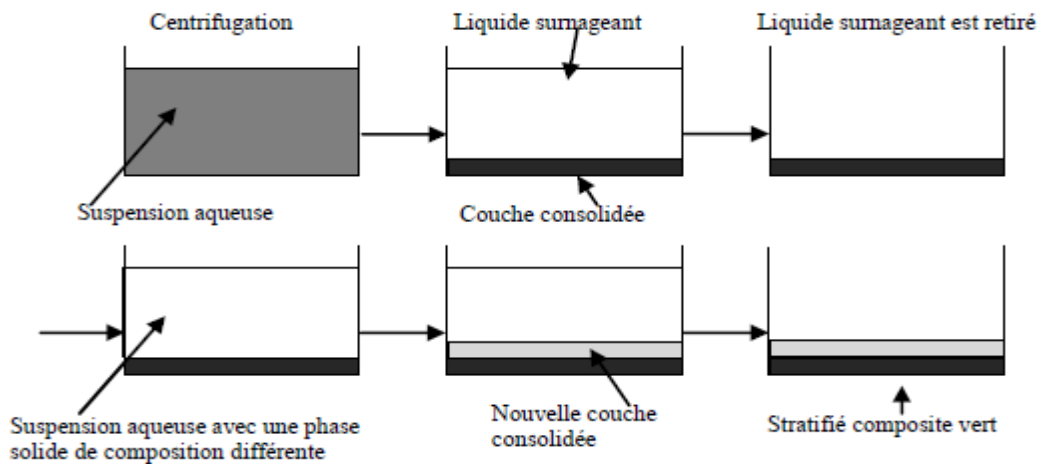


Figure II.19 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [36].

## II.7 Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

### II.7.1 Propriétés physiques de l'aluminium

**Définition :** L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant. **Propriétés physiques :** L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ  $660^{\circ}$ . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de  $2700 \text{ kg/m}^3$ . L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

**Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

**Propriétés des alliages d'aluminium :** L'Aluminium a pour propriétés une :



- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

**Résistance à la corrosion :** Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

### II.7.2 Propriétés physiques de la céramique

**Définition :** La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

**Propriétés physiques :** La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de  $3800 \text{ kg/m}^3$ . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

**Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

**Propriétés des céramiques :** Les propriétés de la céramique sont :

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

## II.8 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. II.20a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. II.20b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

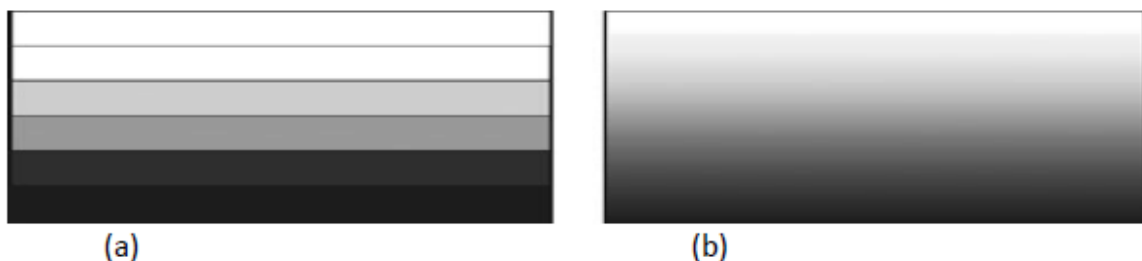


Figure.II.20 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

## II.9. revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

Considérant une plaque élastique rectangulaire (figure II.21). Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés matérielles, module de Young, densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieure et inférieure sont différent mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Cependant, le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe  $z$ ),  $E = E(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ . Delale et Erdogan [58] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Donc, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque F.G.M est constant dans tout point de la plaque; d'ailleurs cette propriété est sensiblement la même pour les matériaux avec lesquels on va travailler. Alors, le module de Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou une fonction sigmoïde (S-FGM).

Notant que  $S$  représente la propriété mécanique qui varie selon l'épaisseur ; donc elle peut être le module de Young  $E(z)$  ou la densité  $\rho = \rho(z)$ .

### II.9.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme:

$$g(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{II.1})$$

Où  $p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local  $g(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$S(z) = g(z) \cdot S_1 + [1 - g(z)] \cdot S_2 \quad (\text{II.2})$$

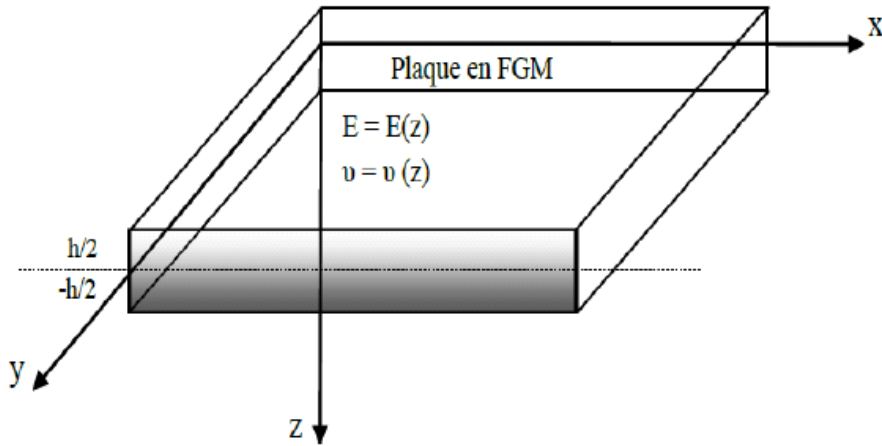


Figure II.21 : Les dimensions de la plaque FGM.

Où  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ( $z = h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure II.22, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p < 1$ .

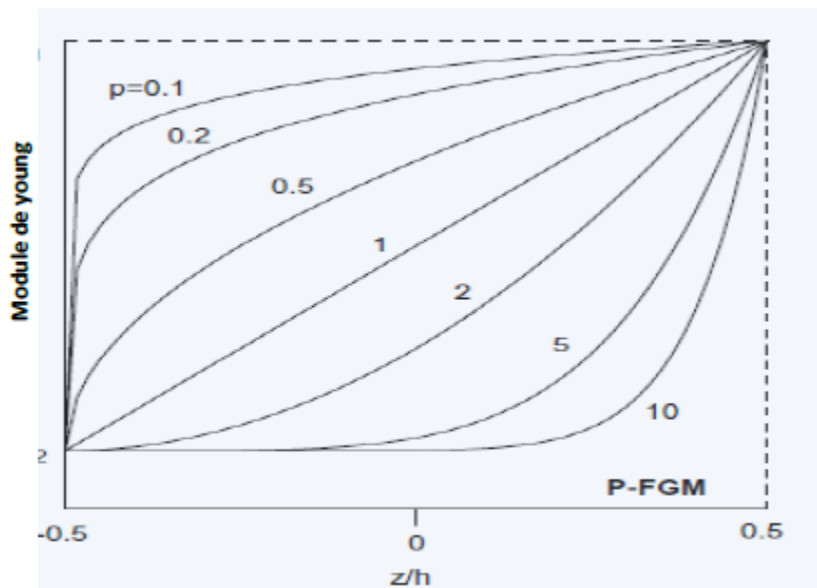


Figure II.22 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

Comme il est présenté sur la figure II.22, le changement de la valeur de P produit un nombre infini de distributions de composition. Afin de modéliser exactement les propriétés matérielles de FGM, les propriétés doivent avoir une dépendance entre la température et la position. Ceci est réalisé par une loi simple de mélange des matériaux composites (modèle de Voigt). Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young E, et la densité  $\rho$  et le coefficient de poisson  $\nu$  peut alors être exprimé comme suit :

$$S = \sum_{j=1} S_j \cdot g_j \quad (\text{II.3})$$

Là où  $S_j$  et  $g_j$  sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj(Figure.II.20.a),et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1} g_j = 1 \quad (\text{II.4})$$

### II.9.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Si l'on rajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.5.a})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.5.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$S(z) = g_1(z) \cdot S_1 + [1 - g_1(z)] \cdot S_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.6.a})$$

$$S(z) = g_2(z) \cdot S_1 + [1 - g_2(z)] \cdot S_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.6.b})$$

La figure II.23 montre que la variation du module de Young selon les équations (II.6.a) et (II.6.b) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM).

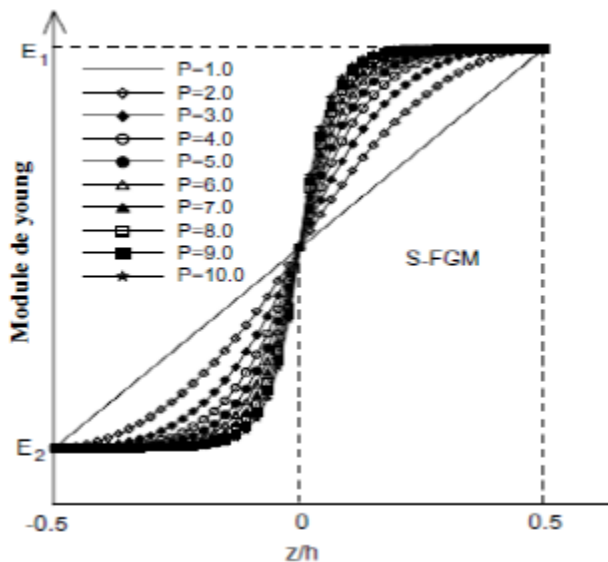


Figure III. 23 : La variation du module de Young dans une plaque S-FGM.

### II.9.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par [58] :

$$S(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \tag{II.7.a}$$

Avec

$$A = S_2 \text{ Et } B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \tag{II.7.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.24.

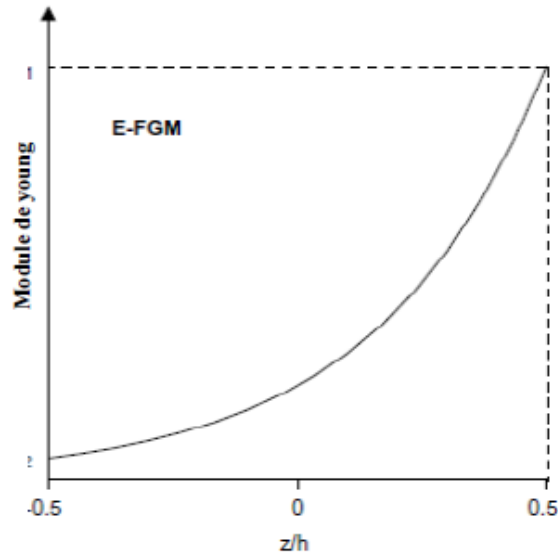


Figure II. 24 : La variation du module de Young de la plaque E-FGM.

## II.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique de la fabrication des FGM dont les premiers pas de la naissance du FGM. Et puis en est passé à décrire les différentes méthodes modernes d'usinage à savoir la méthode d'injection des poudres. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM, et à la fin nous avons terminés par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde. Le chapitre suivant va porter sur la conception des plaques FGM tous en définissant les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles.

# CHAPITRE III

---

LES THEORIES DES STRUCTURES FGM



### **III.1. Introduction**

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans [59-60-61-62] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque. L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [63], [64], [65], [66]. La encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couche.
- Approche développement asymptotique.

### **III.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles**

#### **III.2.1. Approche monocouche équivalente**

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

### III.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT)

En commence par le modèle le plus simple est le plus général appelé modèle de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [67]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [68] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. III.1).

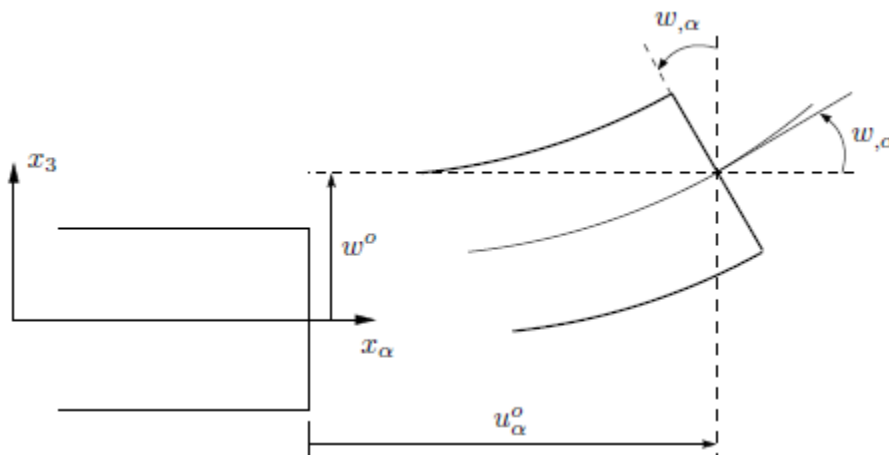


Figure. III. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{III.1})$$

Avec,

$u_\alpha^0$  : Le déplacement de membrane dans la direction  $\alpha$ ,

$w$  : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$  : La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

### III.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.III.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Avec,

$\phi_\alpha$  : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes  $x_\alpha$ ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$  : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

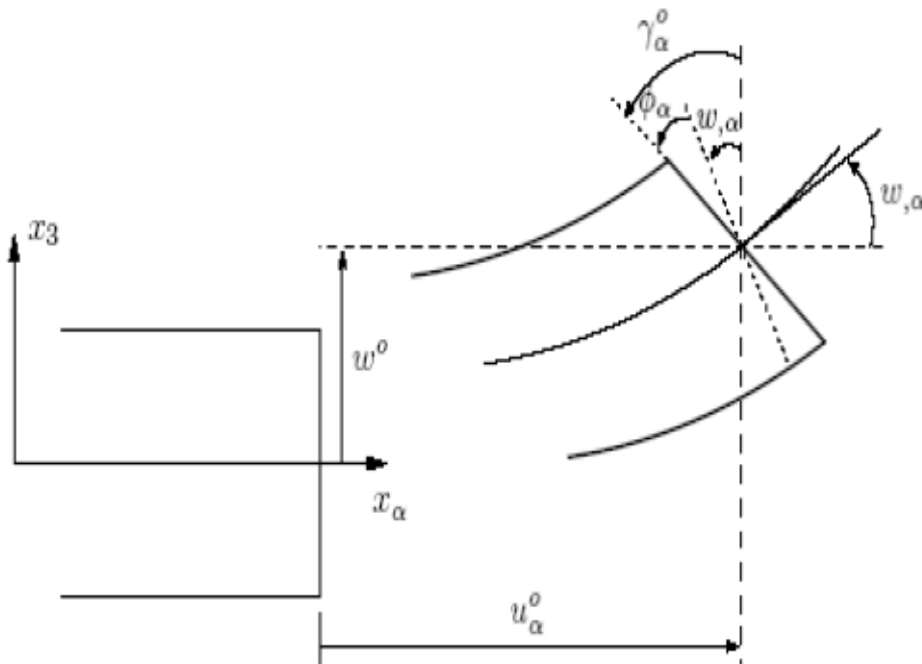


Figure. III.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_\alpha^0$  sont constantes en  $z$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte,

dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [69]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. III.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

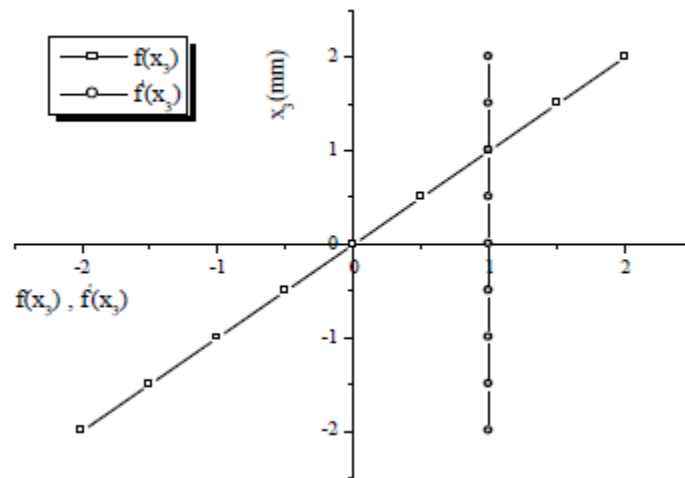


Figure. III.3: Variation de la fonction de gauchissement  $f(x_3) = x_3$  et  $f'(x_3)$  suivant l'épaisseur.

### III.2.1.3. Les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. III.4) [70-69-71-20]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un

développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de  $\phi_j^{0(i)}$  détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_i^{0(j)} = 0$  pour  $j = 2,3,4$  et  $\phi_3^{0(1)} = 0$ .

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec  $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0$ ,  $\phi_i^{o(3)}$ ,  $\alpha = \{1,2\}$ . Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

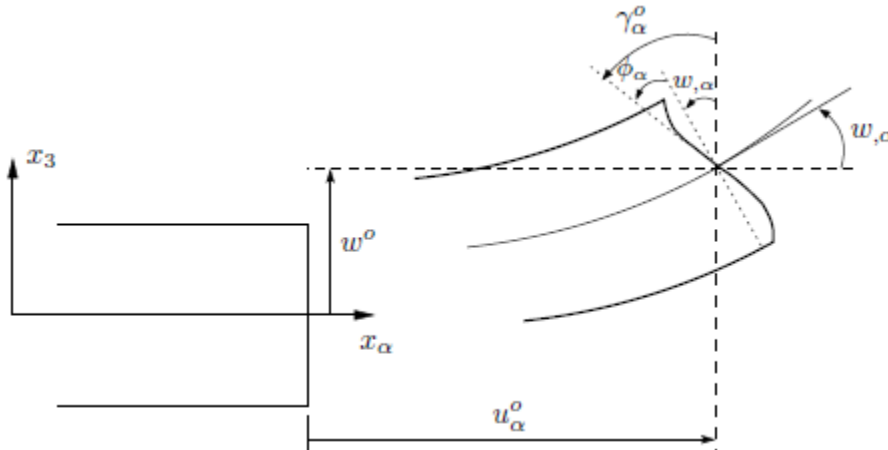


Figure .III.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

- L'approche d'Ambartsumyan [72] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{III.5})$$

➤ L'approche de Reissner [73]:

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.6})$$

➤ L'approche de Reddy [74] avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.7})$$

Dans le modèle de [74], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

➤ L'approche de Touratier [71] avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{III.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de

cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [75].

Récemment, Afaq et al. [76] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$  alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

➤ L'approche de Aydogdu [77] avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{III.11})$$

$h$  : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

### III.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La Figure. II.20.a et les Equations (II.3) et (II.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [78-62-76-75 -79]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle

d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. III.5 et III.6).

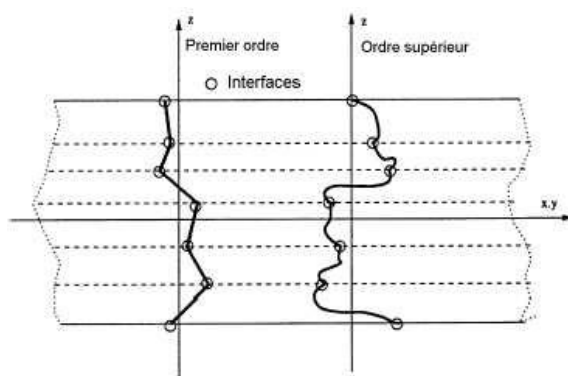


Figure. III.5 : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [20]

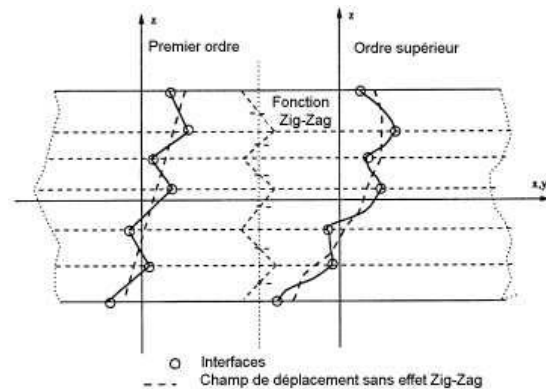


Figure. III.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [20]

### III.2.2.1. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [79]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. III.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.



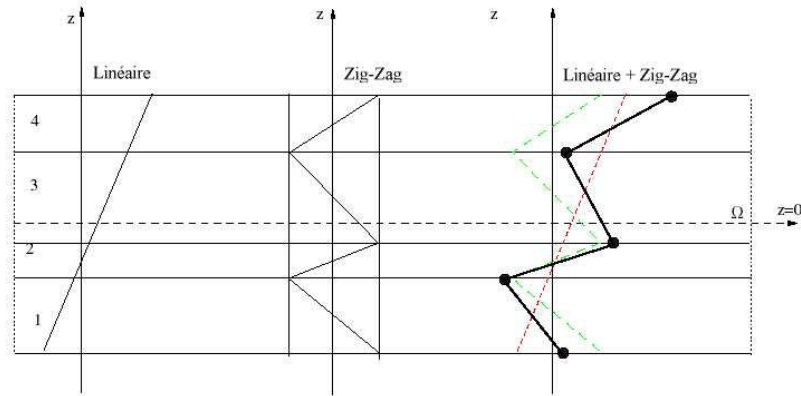


Figure. III.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [20].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de [80], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [20]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.III.8). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

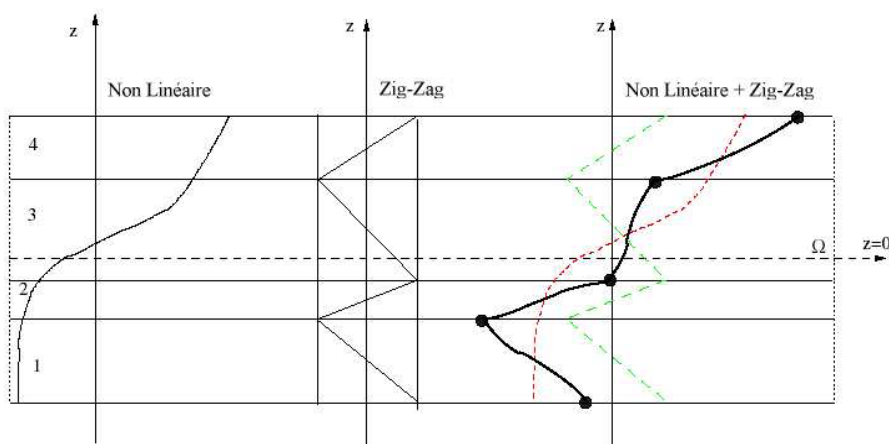


Figure. III.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [20].

Dans les travaux de [81-82], la fonction sinus de [71] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al. [76] combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [83]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type  $C^1$  demandée qui complique leur implémentation numérique.

### III.2.2.2. Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. III.5). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [66-74-84], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [85-86-87] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [85] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans [86], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [87], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [88]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à  $7n$  champs en  $(x; y)$ ,  $n$  étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [20].

### III.3. Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

# CHAPITRE IV

---

ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES  
SANDWICHES EN FGM

## IV.1. introduction

La construction sandwich a été développée et utilisée depuis 50 ans à cause de sa grande rigidité en flexion, de poids spécifique faible et des qualités d'isolation importante, des bonnes caractéristiques en vibration, et excellentes propriétés contre la fatigue. La construction sandwich composite donne un grand potentiel pour les grands projets d'infrastructures civiles telles que les bâtiments industriels et les ponts routiers. Les structures sandwich représentent une forme spéciale d'une structure en couches qui se composent de deux couches minces séparées (les peaux) à rigidité et résistance élevées et un cœur relativement épaisse de faible masse volumique et de matériau souple. Dans les structures sandwich modernes les peaux sont généralement composées de métal ou de matériaux composites laminés, et un cœur compressible est composé d'un matériau de faible résistance ou de mousse polymère. Les peaux et le cœur sont joignais par collage, pour assurer le transfert des forces entre les parties constituantes le sandwich.

Au milieu des années 60, la construction sandwich subit plusieurs recherches. Pour une revue approfondie de la littérature pour l'analyse des structures sandwiches le chercheur doit consulter les articles [89], [90], [91], [92], [93]. Les méthodes d'analyse des structures sandwiches et les solutions numériques pour les problèmes standards sont bien regroupées dans les livres de Plantema [89] et Allen [90]. L'analyse structurale des structures sandwich composite avec épaisseur constant sont discuté dans les livres de Whitney [91] et Vinson [93], où ils ont montrés l'importance de l'introduction de la flexibilité de cisaillement du cœur.

Pagano [64] et Pagano et Hatfield [94] ont présenté les solutions d'élasticité exactes de 3D pour l'analyse des contraintes des composites stratifiés et les plaques sandwiches qui servent comme les solutions de benchmark pour comparaison par plusieurs chercheurs.

De plus les matériaux fonctionnellement gradués(FGM) [95], [96], une nouvelle génération avancés des matériaux composites homogènes premièrement proposé pour les barrières thermiques[97],ont été de plus appliquée pour les structures de l'ingénierie moderne dans un environnement à haute température.

Plusieurs recherches ont été menées sur le comportement mécanique et thermique des FGM [28], [98]. Le plus simple FGM, deux matériaux différents changent graduellement de l'un à l'autre.

Un changement discontinu Comme une gradation progressive des matériaux peut être considérée comme un FGM. La plus part des familles du FGM sont composées graduellement

de céramique réfractaire un métal. Typiquement, les FGM sont construite à partir d'un mélange de céramique et de métal ou une combinaison de différents matériaux. La céramique dans une FGM offre une barrière des effets thermiques et protège le métal contre la corrosion et l'oxydation, et le FGM est dure et renforcé parla composition métallique. Actuellement les FGM sont développés pour une utilisation générale comme des éléments structurels dans les environnements à température extrêmement élevée et des applications différentes.

En raison de la large application du FGM, plusieurs études ont été effectuées pour analyser les comportements et comprendre les mécaniques et les mécanismes des structures FGM. Des études approfondies théorique et expérimentale ont été réalisées et publiés, sur la mécanique de rupture[99], [100],la répartition des contraintes thermiques[101], [102], le traitement [103], [104], etc....Parmi ces structures FGM, les plaques et les coques sont reste toujours les intérêts des chercheurs en raison de leurs applications. Des approches telles que l'utilisation de la théorie de cisaillement de déformation des plaques, la méthode d'énergie, et la méthode des éléments finis, ont été effectuées. Reddy [105] à présenté les solutions de comportement statique pour les plaques rectangulaires FGM basée sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement des plaques. Cheng et Batra [106]présente les résultats de flambement et les vibrations d'une plaque FGM simplement appuyée polygonale basée sur la théorie des plaques de Reddy. Loy et al [107] présente les solutions de Rayleigh-Ritz pour la vibration libre des coques cylindriques simplement appuyée composé d'un FGM en acier inoxydable et de nickel en utilisant la théorie des coques de Love. Praveen et Reddy [23] ont étudié la réponse statique et dynamique non linéaire des plaques fonctionnellement gradué en céramique – métal en utilisant une plaque en élément fini qui tient en compte les déformations de cisaillement transverse, l'inertie de rotation et des rotations assez grandes dans le sens de von Karman.

Le sandwich FGM peut atténuer une grande concentration des contraintes de cisaillement entre les faces en raison de la variation graduelle des propriétés des matériaux à l'interface peaux -cœur. Les effets du noyau FGM ont été étudiés par Venkataraman et Sankar [108] et Anderson [109] sur les contraintes de cisaillement à l'interface peaux –cœur d'une poutre sandwich en FGM. Pan et Han [110] ont analysé la réponse statique de la plaque rectangulaire faite de plusieurs couches fonctionnellement graduées, anisotropes, et magnéto-électro-élastiques linéaires. Das et al. [111] ont étudié un sandwich composé d'un noyau simple FGM avec peaux raides relativement orthotropes en utilisant un élément de plaque triangulaire. Shen [112] a étudié deux types deux types des plaques hybrides laminées FGM,

une avec noyau FGM et peaux piézoélectriques en céramique, et l'autre est avec des peaux FGM et noyau piézoélectriques en céramique.

La construction en sandwich FGM existe généralement en deux types : peaux FGM – noyau homogène et peaux homogènes – noyau FGM. Pour le cas du noyau homogène, le cœur souple est couramment utilisé en raison de la légèreté et haute rigidité à la flexion dans la conception structurelle. Le cœur rigide homogène est également employé dans d'autres domaines tels que le contrôle ou dans des environnements thermiques. Les actionneurs et les capteurs qui sont couramment piézo-électriques en céramique sont toujours dans les couches milieu de la construction en sandwich comme dans le papier de Shen [112]. Par ailleurs, dans les environnements thermiques, les peaux riches en métaux peuvent réduire la contrainte de traction importante sur la surface à un stade précoce de refroidissement[113].

En général, les plaques constituées du FGM ne sont pas symétriques matériellement au plan médian car la distribution des propriétés matérielles est spéciale. Leur allongement et mode de déformation de flexions ont couplés. Récemment, Li et al. [114] à présenté une solution tridimensionnel pour la vibration libre des plaques sandwichs de système symétrique multi couche FGM et asymétriques FGM en utilisant la méthode de Ritz.

Comme il est connu, il n'y a aucune discussion sur la vibration libre des plaques sandwichs FGM en utilisant la théorie des plaques raffinée à quatre variables (RPT). Cette théorie a été développée par Shimpi [1] pour les plaques isotropes, et a été étendu par Shimpi et Patel [2-3] pour les plaques orthotropes. Cette théorie qui ressemble à la théorie d'ordre élevé utilise seulement deux fonctions inconnues afin de dériver deux équations gouvernante pour les plaques orthotropes. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle n'intervient pas le facteur de correction de cisaillement, et a de fortes similitudes avec la théorie classique (CPT) dans certains aspects tels que l'équation régissant, les conditions aux limites, et les expressions de moments. Lee et al. [115] a proposé une théorie d'ordre supérieur de déformation de cisaillement utilisant une approche similaire qui représente le déplacement transversal en utilisant deux composants. Récemment, Mechab et al [116] a développé la théorie des plaques RPT de deux variables pour les plaques FGM. La précision de cette théorie a été montrée par la flexion statique des plaques FGM par Mechab et al. [116], par conséquent, il semble important prolonger cette théorie aux comportements de vibration libre des plaques sandwichs FGM.

L'objectif visé dans ce chapitre est d'étendre la RPT développée par Shimpi et Patel [2-3] aux comportements de vibration libre des plaques sandwichs FGM. Deux types courants des plaques sandwichs FGM, nommé, sandwich avec peaux FGM –noyau homogène et sandwich avec peaux homogènes – noyau FGM sont considérées. La théorie actuelle satisfait les conditions d'équilibre sur les faces supérieures et inférieures de la plaque sandwich sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. La solution de Navier est utilisée pour obtenir la forme de solution rapprochée pour les plaques sandwichs FGM simplement appuyée. Pour montrer la précision et l'efficacité de la théorie actuelle, les résultats obtenus sont comparés avec des solutions d'élasticité en trois dimensions et les résultats du premier ordre, et d'autres théories d'ordre supérieur.

## IV.2 Théorie raffinée des plaques sandwichs FGM

### IV.2.1 Configuration géométrique

Considérons le cas d'une plaque sandwich rectangulaire en FGM, d'épaisseur uniforme composée de trois couches hétérogènes rapportée à un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  comme montré en figure IV.1. Les faces supérieure et inférieure se situent à  $z = \pm h/2$ , et les cotés de la plaque sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

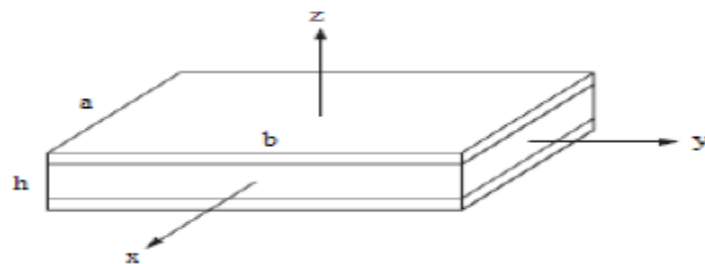


Figure IV.1 : Géométrie d'une plaque sandwich rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes.

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, nommées, Couche 1, Couche 2, et Couche 3 de la face inférieure à celle supérieure de la plaque. Les coordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et la face supérieure sont dénotées par  $h_1 = -h/2$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , et  $h_4 = h/2$ , respectivement. Le rapport d'épaisseur dans chaque couche du bas en haut est dénoté brièvement par les combinaisons de trois chiffres "1-0-1",



“2-1-2” comme il est montré en figure. IV.2, deux types (a) et (b) sont considérés dans cette présente étude :

- Type (a) : faces externes (peaux) en FGM et cœur homogène.
- Type (b) : faces externes (peaux) homogènes et cœur en FGM.

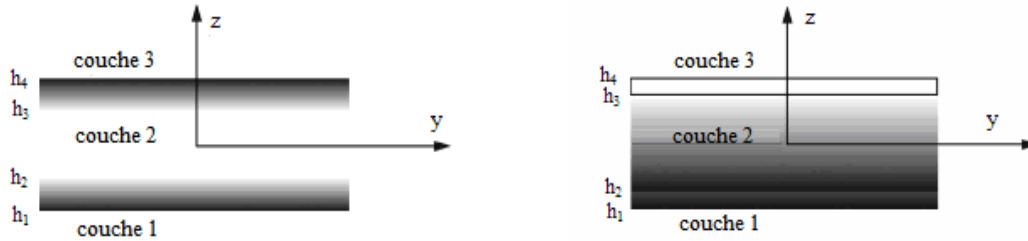


Figure IV.2 : variation matérielle suivant l'épaisseur de la plaque sandwich : (a) peaux en FGM et cœur homogène. (b) peaux homogènes et cœur en FGM.

#### IV. 2.2. Propriétés matérielles

Les propriétés du FGM varient continuellement en changeant la fraction volumique des matériaux suivant la direction de l'épaisseur. Une fonction de loi de puissance est utilisée couramment pour décrire cette variation de propriétés matérielle. Les structures sandwichs FGMs sont composées de deux types de lois de puissance mentionnés précédemment et qui sont discutés comme suit.

IV.2.2.1. Type (a) : plaque sandwich à peaux P- FGM et à cœur homogène :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.1a})$$

$$V^{(2)} = 1 \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.1b})$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k \quad z \in [h_3, h_4] \quad (\text{IV.1c})$$

IV.2.2.2. Type (b) : plaque sandwich à cœur P- FGM et à peaux homogènes

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$V^{(1)} = 0 \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.2a})$$

$$V^{(2)} = \left( \frac{z - h_2}{h_3 - h_2} \right)^k \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.2b})$$

$$V^{(3)} = 1 \quad z \in [h_3, h_4] \quad (\text{IV.2c})$$

Où  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ) dénote la fonction de la fraction volumique de la couche  $n$ ;  $k$  est l'indice de la fraction volumique ( $0 \leq k \leq +\infty$ ), qui indique la variation matérielle à travers l'épaisseur.

Les propriétés matérielles effectives, tel que le module de Young  $E$ , et le coefficient de Poisson  $\nu$  et la densité de masse  $\rho$ , peuvent être exprimés par la loi des mélanges [100] comme :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad (\text{IV.3})$$

Où  $P^{(n)}$  est la propriété matérielle effective du FGM de la couche  $n$ . Pour le type (a),  $P_1$  et  $P_2$  sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 dépendant de la fraction volumique  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ). Pour type (b),  $P_1$  et  $P_2$  sont les propriétés des couches 3 et 1, respectivement.

Ces deux types de plaques sandwichs FGM seront discutés ci après dans les sections suivantes.

Dans cette étude, on suppose que le coefficient de poisson est constant [58].

### IV.2.3. Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.

- Le déplacement transverse  $w$  contient deux composantes de flexion  $w_b$  et de cisaillement  $w_s$ . Ces composantes sont en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  et du temps  $t$ .
- $W(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)$  (IV.4)
- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable devant les autres contraintes planes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- Les déplacements  $U$  dans la direction  $x$  et  $V$  dans la direction  $y$  sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u + u_b + u_s, V = v + v_b + v_s \quad (IV.5)$$

Les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées les mêmes déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour  $u_b$  et  $v_b$  peuvent être données comme

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (IV.6.a)$$

À partir de l'état de déplacement de composantes  $u_s$  et  $v_s$  se dérivent les composantes de déformation  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  qui varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour  $u_s$  et  $v_s$  peuvent être données

Comme :

$$u_s = \left[ \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = \left[ \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (IV.6b)$$

#### IV.2.4. Cinématique et équations constitutive

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu utilisant Eqs. (IV.4) – (IV.6) comme

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 W(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{IV.7}$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'Eq. (IV.7) soit

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f k_x^s \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f k_y^s \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f k_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= g \gamma_{yz}^s \\
 \gamma_{xz} &= g \gamma_{xz}^s \\
 \varepsilon_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.8}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 f &= -\frac{1}{4} z + \frac{5}{3} z \left( \frac{z}{h} \right)^2, \quad g = \frac{5}{4} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{IV.9}$$

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

$$\text{et } \begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{cases}$$

ou  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. Utilisant les propriétés matérielles définies en Eq. (IV.3), les

Coefficients de rigidité  $Q_{ij}$ , peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.11a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.11b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.11c})$$

#### IV.2.5. Équations gouvernantes

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}] dV \quad (\text{IV.12})$$

En remplaçant les équations(IV.8) et(IV.10) dans l'équation(IV.12) et en intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + S_{yz}^s \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \gamma_{xz}^s] dx dy \quad (\text{IV.13})$$

Où les forces et moments résultants sont donnés comme

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\
 (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\
 (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz \\
 (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g dz
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Substituant l'équation(IV.10) dans l'équation(IV.14)et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \tag{IV.15}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \tag{IV.16a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \tag{IV.16b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{IV.16c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{IV.16d}$$

Ou Les composantes de rigidité  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc , sont définis comme :

$$\begin{aligned}
 \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \{1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\} Q_{ij} dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 B_{ij}^s &= -\frac{1}{4} B_{ij} + \frac{5}{3h^2} E_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 D_{ij}^s &= -\frac{1}{4} D_{ij} + \frac{5}{3h^2} F_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 H_{ij}^s &= \frac{1}{16} D_{ij} - \frac{5}{6h^2} F_{ij} + \frac{25}{9h^4} H_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 \{A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \{1, z^2, z^4\} Q_{ij} dz, \quad (i, j = 4, 5) \\
 A_{ij}^s &= \frac{25}{16} A_{ij} - \frac{25}{6h^2} D_{ij} + \frac{25}{h^4} F_{ij}, \quad (i, j = 4, 5)
 \end{aligned} \tag{IV.17}$$

L'énergie cinétique de la plaque peut être écrite comme :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_V \rho [\ddot{U}^2 + \ddot{V}^2 + \ddot{W}^2] dV = \frac{1}{2} \int_A I_0 [\ddot{u}^2 + \ddot{v}^2 + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)^2] dx dy \\
 &+ \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_2 \left[ \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{I_2}{84} \left[ \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Où  $\rho$  est densité de masse de la de la plaque de FGM et  $I_i$  ( $i = 0, 2$ ) sont les inerties défini par :

$$(I_0, I_2) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (1, z^2) \rho dz \tag{IV.19}$$

Les équations de mouvement de la plaque FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton [58]. Le principe sous la forme analytique suivante :

$$0 = \int_0^t \delta (U_e - T) dt \tag{IV.20}$$

Où  $\delta$  indique la variation suivant  $x$  et  $y$ .

En remplaçant l'équation (IV.13) et (IV.18) dans l'équation (IV.20) et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ , les équations du mouvement pour la plaque sandwich FGM résultantes sont :

$$\begin{aligned}
 \delta u : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} \\
 \delta v : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v} \\
 \delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) \\
 \delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.21}$$

Équations (IV.21) peuvent être exprimées en termes des déplacements  $(u, v, w_b, w_s)$  en remplaçant les forces résultantes de l'équation(IV.15). Pour la plaque de FGM, les équations d'équilibre(IV.21) prennent la forme :

$$\begin{aligned}
 A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\
 - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}
 \end{aligned} \tag{IV.22a}$$

$$\begin{aligned}
 (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \\
 - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}
 \end{aligned} \tag{IV.22b}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b
 \end{aligned} \tag{IV.22c}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = \\
 I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_b
 \end{aligned} \tag{IV.22d}$$



#### IV.2.6. Les solutions de Navier pour les plaques sandwichs FGM

Pour une solution analytique des équations (IV.22), la méthode de Navier est utilisée pour une plaque sandwich rectangulaire en FGM avec des conditions de frontière spécifiques (appuyée - appuyée). Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords de la plaque.

$$\begin{aligned} v(-a/2, y) &= w_b(-a/2, y) = w_s(-a/2, y) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial y}(-a/2, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(-a/2, y) = 0 \end{aligned} \quad (IV.23a)$$

$$\begin{aligned} v(a/2, y) &= w_b(a/2, y) = w_s(a/2, y) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial y}(a/2, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a/2, y) = 0 \end{aligned} \quad (IV.23b)$$

$$\begin{aligned} N_x(-a/2, y) &= M_x^b(-a/2, y) = M_x^s(-a/2, y) = N_x(a/2, y) = M_x^b(a/2, y) \\ &= M_x^s(a/2, y) = 0 \end{aligned} \quad (IV.23c)$$

$$\begin{aligned} u(x, -b/2) &= w_b(x, -b/2) = w_s(x, -b/2) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, -b/2) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, -b/2) = 0 \end{aligned} \quad (IV.23d)$$

$$u(x, b/2) = w_b(x, b/2) = w_s(x, b/2) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b/2) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b/2) = 0 \quad (IV.23e)$$

$$\begin{aligned} N_y(x, -b/2) &= M_y^b(x, -b/2) = M_y^s(x, -b/2) \\ &= N_y(x, b/2) = M_y^b(x, b/2) = M_y^s(x, b/2) = 0 \end{aligned} \quad (IV.23f)$$

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites (IV.23) sont développées en séries de Fourier comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (IV.24)$$

Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  sont des paramètres à déterminer, et  $\omega$  est la fréquence propre associée au  $(m, n)$  ième mode propre, et  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$ .

### IV.2.6.1 Une analyse aux valeurs propres pour les problèmes de vibration

Substituant les équations (IV.17), (IV.19) et (IV.24) dans les équations de mouvement (IV.22) nous obtenons les équations, ci-dessous, des valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de  $m$  et  $n$ , pour le problème de vibration libre :

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (IV.25)$$

Où  $\{\Delta\}$  représente le vecteur de colonne des inconnus.

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}, \quad (IV.26)$$

Et

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (IV.27)$$

Pour lesquels :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ a_{12} &= \lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ a_{23} &= -\mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2] \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 \mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ a_{34} &= D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4 \\ a_{44} &= H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2 \\ m_{11} &= m_{22} = m_{34} = I_0 \\ m_{33} &= I_0 + I_2 (\lambda^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad (IV.28)$$

$$m_{44} = I_0 + \frac{I_2}{84} (\lambda^2 + \mu^2)$$

#### IV.2.7 Solution Ritz pour le Problème de Vibration des Plaques Sandwiches rectangulaire avec Diverses Conditions aux Limites

La méthode de Ritz est une approche variationnelle qui demande l'élargissement des composantes des fonctions des déplacements inconnues sous forme des séries infinies. En prenant un nombre suffisant des termes dans ces séries, il est possible d'approcher la solution exacte du problème considéré.

Cependant, les fonctions de déplacement devraient être intégrées dans l'espace des fonctions et des choix inappropriés des fonctions inconnues peuvent causer un retard dans la convergence et des instabilités numériques. Parmi les fonctions choisies par les chercheurs sont les fonctions trigonométriques [117], les polynômes algébriques [118], [119] et les polynômes orthogonaux [120], [121] utilisés sur la base de différentes théories des plaques.

Après la définition des coordonnées adimensionnelle comme  $\xi = 2x/a$  et  $\eta = 2y/b$  on choisit l'origine des coordonnées comme  $-1 \leq \xi \leq 1$  et  $-1 \leq \eta \leq 1$ , nous avons supposé que les composantes des déplacements comme des polynômes algébriques simples qui sont des fonctions de puissance de coordonnées des paramètres dans l'expansion en double série infinie :

$$u(\xi, \eta, t) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} A_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \sin \omega t, \quad (\text{IV.29a})$$

$$v(\xi, \eta, t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} B_{kl} X_k(\xi) Y_l(\eta) \sin \omega t, \quad (\text{IV.29b})$$

$$w_b(\xi, \eta, t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} C_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \sin \omega t, \quad (\text{IV.29c})$$

$$w_s(\xi, \eta, t) = \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} D_{pq} X_p(\xi) Y_q(\eta) \sin \omega t, \quad (\text{IV.29d})$$

Où les polynômes sont définis comme :

$$X_f(\xi) = \xi^f (\xi + 1)^{B_1} (\xi - 1)^{B_3}, \quad f = i, k, m, p \quad (\text{IV.30a})$$

$$Y_g(\eta) = \eta^g (\eta + 1)^{B_2} (\eta - 1)^{B_4}, \quad g = j, l, n, q, \quad (\text{IV.30b})$$

et  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{mn}$  et  $D_{pq}$  sont des coefficients constants inconnus. Ici,  $B_i$  peut prendre les valeurs qui sont choisis en fonction du type des conditions aux limites imposées sur les bords de la plaque comme le sous indices  $i$  de  $B_i$  désigne le nombre des bords suivant de la plaque dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le bord numéroté comme 1 est celui en  $\xi = -1$ . Les valeurs de  $B_i$  qui sont 0, 1 et 2 correspondent aux bords : libre, simplement appuyée et encadrée, respectivement [122]. En gardant à l'esprit que la méthode de Ritz satisfait uniquement les conditions aux limites géométriques, il est possible de satisfaire toutes les conditions aux limites géométriques imposées aux bords. Pour la méthode de Ritz, les conditions aux limites naturelles pour les plaques encadrées sont exigées.

Les conditions aux limites d'une plaque (de longueur  $a$  et largeur  $b$ ) sont donnés comme suit :

1. bord encadré - encadré :

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial \eta} = \frac{\partial w_s}{\partial \eta} = 0, \text{ à } \xi = \pm 1 \quad (\text{IV.31a})$$

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial \xi} = \frac{\partial w_s}{\partial \xi} = 0, \text{ à } \eta = \pm 1 \quad (\text{IV.31b})$$

2. bord libre - libre : (aucune contrainte)

$$u \neq 0, v \neq 0, w_b \neq 0, w_s \neq 0, \frac{\partial w_b}{\partial \eta} \neq 0, \frac{\partial w_s}{\partial \eta} \neq 0, \text{ à } \xi = \pm 1 \quad (\text{IV.31c})$$

$$u \neq 0, v \neq 0, w_b \neq 0, w_s \neq 0, \frac{\partial w_b}{\partial \xi} \neq 0, \frac{\partial w_s}{\partial \xi} \neq 0, \text{ à } \eta = \pm 1 \quad (\text{IV.31d})$$

Substituant les formes des déplacements de l'équation IV.29 dans l'équation de l'énergie cinétique et de déformation (équation (IV.12 et IV.18)) et en minimisant lagrangien du système par rapport aux coefficients des fonctions de déplacement pour le problème de vibration ce qui donne un système algébriques d'équations de même nombre des coefficients inconnus donnée dans l'équation. (IV.29). Le nombre de ces équations devient  $5M^2$ , si le même nombre des termes indique  $M$ , est utilisée dans toutes les séries pour plus de commodité. Les équations algébriques obtenues seront données sous forme du problème aux valeurs propres généralisées (équation. (IV.25)). Pour une solution non triviale, les valeurs

propres ( $w$ ) sont obtenus ont mettre le déterminant égal à zéro, ce qui donne les fréquences de vibration libre.

### **IV.3. Conclusion**

Dans ce chapitre, L'analyse des vibrations libres des plaques FGM fonctionnellement graduées simplement appuyées sont examinées par une théorie raffinée à quatre variables. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieur et inférieur de la plaque. Deux types courantes des plaques sandwichs en FGM sont considérés, c'est-à-dire sandwich avec deux peaux FGM et cœur homogène et sandwich avec deux peaux homogènes et cœur FGM.

On assume que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque sandwich seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). L'équation du mouvement pour la plaque sandwich en FGM est obtenue par le principe de Hamilton.

Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres.

# CHAPITRE V

---

VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS

## V.1. introduction

Dans cette étude, l'analyse des vibrations libres des plaques sandwiches en FGM par la théorie raffinée des plaques est effectuée pour discussion. Des solutions de Navier pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwiches en FGM sont présentées en résolvant les équations aux valeurs propres (IV.25).

Nous considérons les différentes formes de fonction de gauchissement  $f(z)$  qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution suivant l'épaisseur.

Pour la plaque sandwich en FGM Les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

- Céramique ( $P_1$ , alumine,  $Al_2O_3$ )  $E_c = 380GPa$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_c = 3800kg/m^3$ .
- Métal ( $P_2$ , Aluminium,  $Al$ )  $E_m = 380GPa$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_c = 2707kg/m^3$ .

Les résultats numériques sont présentés en termes de fréquences non dimensionnelles. Le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnel est définie comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \quad (V.1)$$

Où  $\rho_0 = 1kg/m^3$ , et  $E_0 = 1GPa$ .

Plusieurs exemples numériques sont décrites et discutées pour vérifier la validité de la théorie actuelle (RPT) dans la prévision des comportements des vibrations libres des plaques sandwiches FGM simplement appuyée.

Afin de prouver la validité de la théorie actuelle, les résultats ont été obtenus pour les plaques sandwiches FGM et comparés avec ceux déjà existants dans la littérature tels que la théorie classique des plaques(CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT), la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre des plaques (TSDPT) et la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal des plaques (SSDPT) comme indiqué dans le tableau V.1.Généralement on utilise un facteur de correction de cisaillement  $K = 5/6$  dans la théorie FSDPT.

Deux types courants des plaques sandwiches en FGM sont considérés :

- Type A : sandwiches avec deux peaux FGM et cœur homogène.
- Type B : sandwiches avec deux peaux homogènes et cœur FGM.

## V.2. Validation des résultats des vibrations libres

Le tableau V.2 présente une comparaison des résultats des plaques sandwiches  $P-FGM$  du type A avec six distributions matérielles utilisant les théories CPT, FSDPT, TSDPT, SSDPT, et la théorie tridimensionnelle linéaire d'élasticité de Li et al [114]. Le Module de Young  $E$  et la densité de masse  $\rho$  suivent une distribution en loi de puissance Eq (IV.3). Le tableau V.2 montre un bon accord par des comparaisons des plaques FGM de cinq différents indices de fraction volumique  $k = 0, 0.5, 1, 5, 10$  avec d'autres théories. En général, les fréquences de vibration obtenue par la théorie classique CPT sont très supérieures que ceux calculés à partir des théories de déformation de cisaillement. Cela implique que les résultats estimés par la théorie CPT donnent une grande erreur pour une plaque épaisse.

Des comparaisons sont données dans les tableaux V.3 et V.4 en utilisant des types de cœur rigide et homogène et un cœur souple et homogène des plaques sandwiches FGM (Type A). Le tableau V.3 considère le cas du cœur rigide et homogène dans lequel le module de Young et la densité de masse de la couche 1 sont  $E_c = 380GPa$  et  $\rho_c = 3800kg/m^3$  ( $P_1$ , Alumine) dans la face supérieure et  $E_m = 70GPa$  et  $\rho_m = 2707kg/m^3$  ( $P_2$ , Aluminium) dans la face inférieure. Le tableau V.4 considère le cas du cœur souple et homogène dans lequel le module de Young et la densité de masse de la couche 1 sont  $E_m = 70GPa$  et  $\rho_m = 2707kg/m^3$  ( $P_1$ , Aluminium) dans la face supérieure et  $E_c = 380GPa$  et  $\rho_c = 3800kg/m^3$  ( $P_2$ , Alumine) dans la face inférieure. Trois rapports d'épaisseur sur

Côté  $h/b$  (0,01, 0,1 et 0,2) et cinq indices de fraction volumique (0, 0,5, 1, 5 et 10) sont considérées.



Tableau V.1 : Hypothèses cinématiques pour différentes théories de plaques

| Théories     | Hypothèses de déplacements tri dimensionnels  |
|--------------|---|
| <i>CPT</i>   | $U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x},$ $V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y},$ $W(x, y, z) = w(x, y).$   |
| <i>FSDPT</i> | $U(x, y, z) = u(x, y) + z\phi_x(x, y),$ $V(x, y, z) = v(x, y) + z\phi_y(x, y),$ $W(x, y, z) = w(x, y).$   |
| <i>TSDPT</i> | $U(x, y, z) = u(x, y) + z\phi_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$ $V(x, y, z) = v(x, y) + z\phi_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$ $W(x, y, z) = w(x, y).$             |
| <i>SSDPT</i> | $U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_x(x, y),$ $V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_y(x, y),$ $W(x, y, z) = w(x, y).$ |

À partir des résultats présentés dans les tableaux V.3 et V.4, on peut constater que les fréquences fondamentales de cette étude montrent un bon accord avec ceux obtenus par Li et

al. [114]. Le tableau V.5 donne les résultats de type de plaque sandwich 1-8-1 en  $P - FGM$  du type  $B$ .  $P_1$  désigne la propriété de l'aluminium et  $P_2$  désigne la propriété de l'alumine. Dans ce cas, le noyau FGM est riche en métal dans la face supérieure et riche en céramique dans la face inférieure. Trois rapports d'épaisseur sur côté  $h/b$  (0,01, 0,1 et 0,2) et cinq indices de fraction volumique (0,5, 1, 2, 5 et 10) sont considérées. Le tableau V.5 montre que les résultats de Li et al. [114] pour les plaques sandwiches FGM avec un cœur FGM donne des résultats proches de la présente théorie RPT.

À partir des résultats présentés dans les tableaux V.3– V.5, on remarque que les fréquences fondamentales naturelles diminués avec la diminution de la rigidité du matériau, qui est due à l'augmentation de l'indice de puissance  $k$  du type  $A$  ou de la diminution de  $k$  pour le type  $B$  et de la variation du rapport d'épaisseur de la couche. De plus, les plaques minces sont faiblement sensibles que les plaques épaisses de point de vue rigidité du matériau, c'est-à-dire l'indice  $k$ .

La figure V.1 montre les paramètres de fréquences fondamentaux en fonction du rapport épaisseur - côté des plaques sandwiches  $P - FGM$  simplement appuyées avec des cœurs rigides et homogènes. La figure V.2 représente les courbes des plaques sandwiches  $P - FGM$  avec des cœurs souples et homogène. À partir de ces figures on remarque que Les fréquences sont maximales pour les plaques en céramiques et minimales pour les plaques en métal. On constate que les résultats augmentent lentement lorsque la quantité de céramique augmente dans la plaque sandwich. Il est montré que l'effet l'indice  $k$  sur la plaque sandwich 1-0-1 sans la couche de cœur homogène, est plus grande que celle de la plaque sandwich 1-8-1 avec un cœur rigide et homogène, et l'effet de  $k$  sur le sandwich avec cœur rigide et homogène est plus grande que celui de cœur souple et homogène.

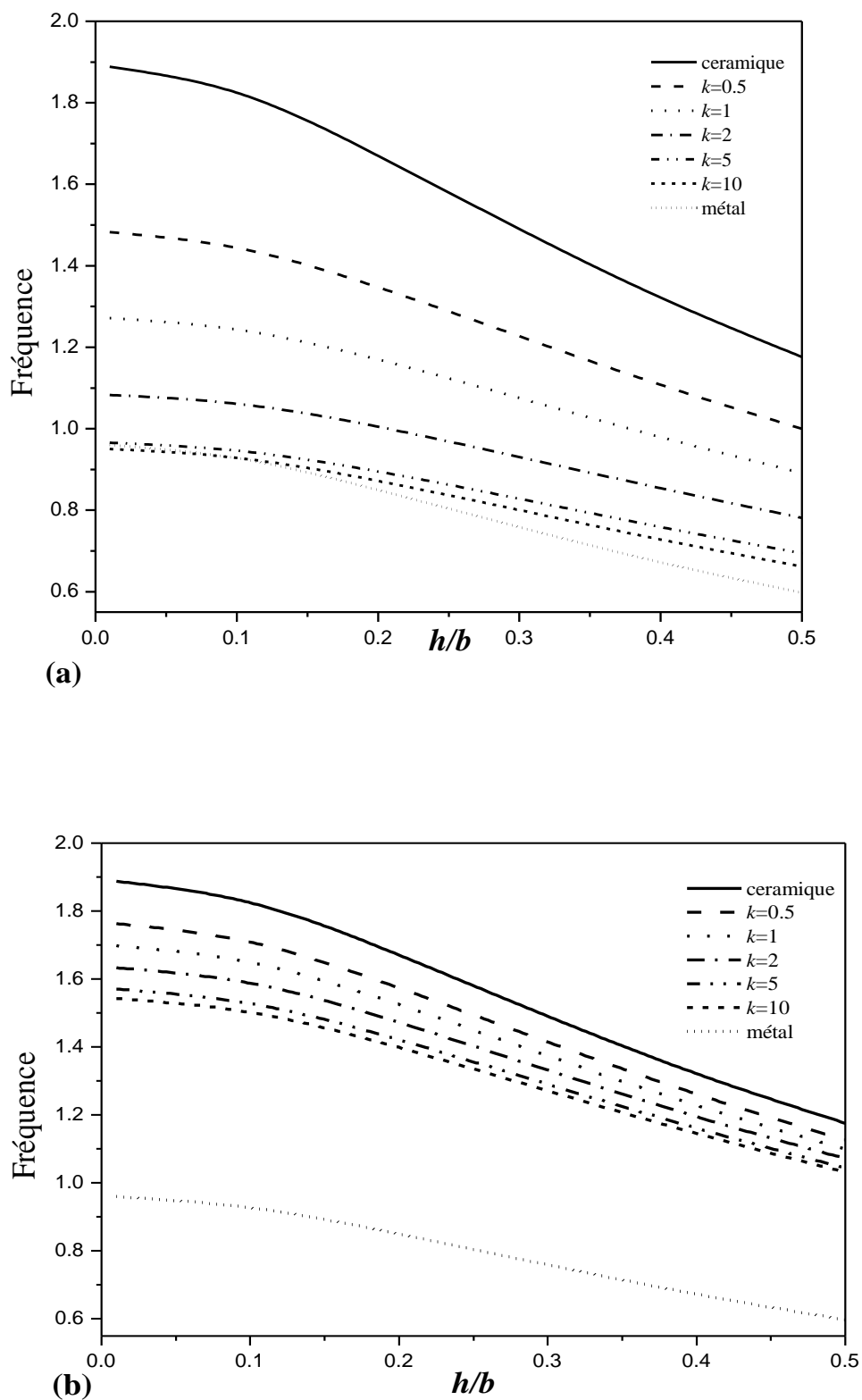


Figure.V.1 : Fréquences fondamentales  $\bar{\omega}$  des plaques sandwiches P-FGM avec un cœur rigide et homogène : (a) plaque sandwich FGM 1-0-1, (b) plaque sandwich FGM 1-8-1.

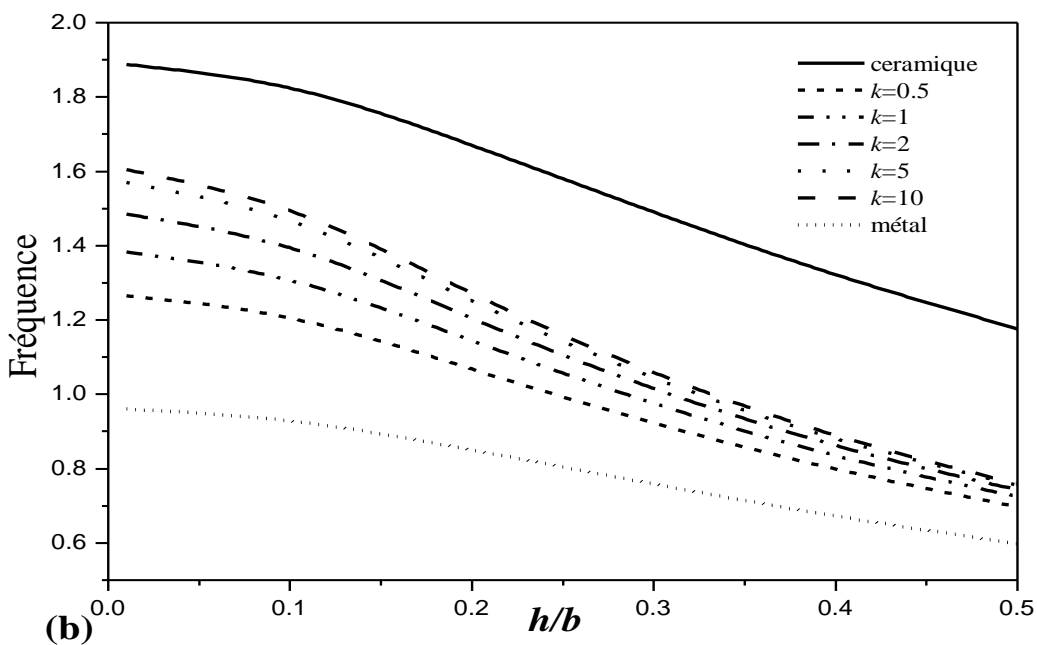
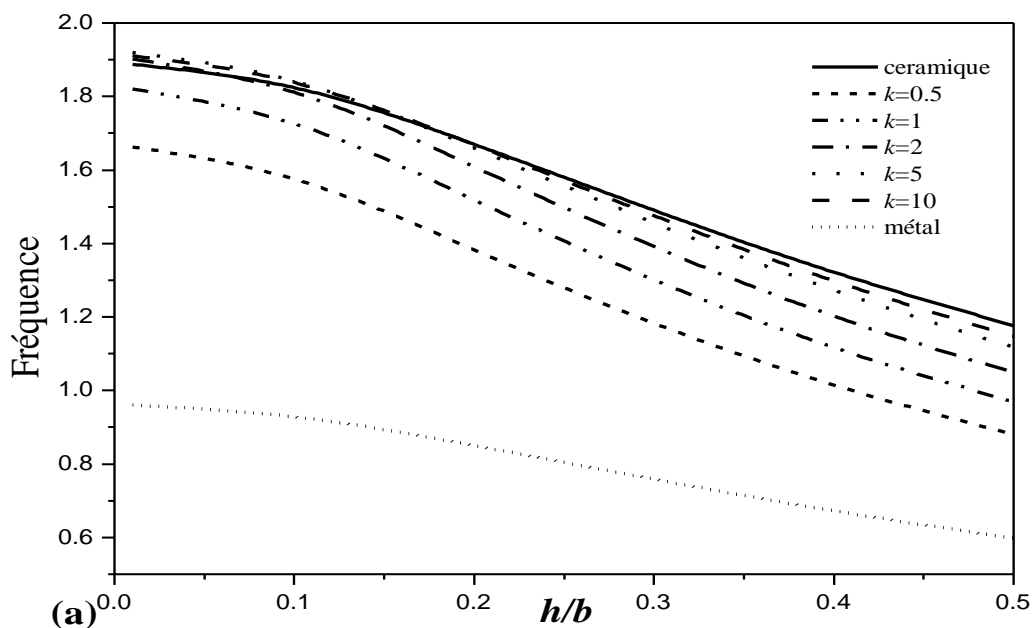


Figure.V.2 :Fréquences fondamentales  $\bar{\omega}$  des plaques sandwiches P-FGM avec un cœur souple et homogène :(a) plaque sandwich FGM 1-0-1,(b) plaque sandwich FGM 1-8-1.

Tableau V.2 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale naturels  $\bar{\omega}$  des plaques sandwichs P-FGM carrées simplement appuyées du type A avec d'autres théories ( $h / b = 0,1$ ).

| $k$ | Théories       | $\bar{\omega}$ |         |         |         |         |         |
|-----|----------------|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|     |                | 1-0-1          | 2-1-2   | 2-1-1   | 1-1-1   | 2-2-1   | 1-2-1   |
| 0   | CPT            | 1.87359        | 1.87359 | 1.87359 | 1.87359 | 1.87359 | 1.87359 |
|     | FSDPT          | 1.82442        | 1.82442 | 1.82442 | 1.82442 | 1.82442 | 1.82442 |
|     | TSDPT          | 1.82445        | 1.82445 | 1.82445 | 1.82445 | 1.82445 | 1.82445 |
|     | SSDPT          | 1.82452        | 1.82452 | 1.82452 | 1.82452 | 1.82452 | 1.82452 |
|     | Élasticité     | -----          | -----   | -----   | -----   | -----   | -----   |
|     | Présente [123] | 1.82445        | 1.82445 | 1.82445 | 1.82445 | 1.82445 | 1.82445 |
| 0.5 | CPT            | 1.47157        | 1.51242 | 1.54264 | 1.54903 | 1.58374 | 1.60722 |
|     | FSDPT          | 1.44168        | 1.48159 | 1.51035 | 1.51695 | 1.55001 | 1.57274 |
|     | TSDPT          | 1.44424        | 1.48408 | 1.51253 | 1.51922 | 1.55199 | 1.57451 |
|     | SSDPT          | 1.44436        | 1.48418 | 1.51258 | 1.51927 | 1.55202 | 1.57450 |
|     | Élasticité     | 1.44614        | 1.48608 | 1.50841 | 1.52131 | 1.54926 | 1.57668 |
|     | Présente [123] | 1.44424        | 1.48408 | 1.50635 | 1.51921 | 1.54710 | 1.57451 |
| 1   | CPT            | 1.26238        | 1.32023 | 1.37150 | 1.37521 | 1.43247 | 1.46497 |
|     | FSDPT          | 1.24031        | 1.29729 | 1.34637 | 1.35072 | 1.40555 | 1.43722 |
|     | TSDPT          | 1.24320        | 1.30011 | 1.34888 | 1.35333 | 1.40789 | 1.43934 |
|     | SSDPT          | 1.24335        | 1.30023 | 1.34894 | 1.35339 | 1.40792 | 1.43931 |
|     | Élasticité     | 1.24470        | 1.30181 | 1.33511 | 1.35523 | 1.39763 | 1.44137 |
|     | Présente [123] | 1.24320        | 1.30011 | 1.33329 | 1.35332 | 1.39557 | 1.43933 |
| 5   | CPT            | 0.95844        | 0.99190 | 1.08797 | 1.05565 | 1.16195 | 1.18867 |
|     | FSDPT          | 0.94256        | 0.97870 | 1.07156 | 1.04183 | 1.14467 | 1.17159 |
|     | TSDPT          | 0.94598        | 0.98184 | 1.07432 | 1.04466 | 1.14731 | 1.17397 |
|     | SSDPT          | 0.94630        | 0.98207 | 1.07445 | 1.04481 | 1.14741 | 1.17399 |
|     | Élasticité     | 0.94476        | 0.98103 | 1.02942 | 1.04532 | 1.10983 | 1.17567 |
|     | Présente [123] | 0.94598        | 0.98184 | 1.03043 | 1.04466 | 1.10881 | 1.17397 |
| 10  | CPT            | 0.94321        | 0.95244 | 1.05185 | 1.00524 | 1.11883 | 1.13614 |
|     | FSDPT          | 0.92508        | 0.93962 | 1.03580 | 0.99256 | 1.10261 | 1.12067 |
|     | TSDPT          | 0.92839        | 0.94297 | 1.03862 | 0.99551 | 1.10533 | 1.12314 |
|     | SSDPT          | 0.92875        | 0.94332 | 1.04558 | 0.99519 | 1.04154 | 1.13460 |
|     | Élasticité     | 0.92727        | 0.94078 | 0.98929 | 0.99523 | 1.06104 | 1.12466 |
|     | Présente [123] | 0.92839        | 0.94297 | 0.99195 | 0.99550 | 1.06090 | 1.12314 |

Tableau V.3 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale  $\bar{\omega}$  des plaques sandwiches P-FGM carrés simplement appuyée avec cœur rigide et homogène.

| $h/b$ | $k$ | Théories       | $\bar{\omega}$ |          |          |         |         |         |         |
|-------|-----|----------------|----------------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|
|       |     |                | 1-0-1          | 2-1-2    | 1-1-1    | 2-2-1   | 1-2-1   | 1-8-1   |         |
| 0.01  | 0   | Li 2008        | 1.88829        | 1.88829  | 1.88829  | 1.88829 | 1.88829 | 1.88829 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.88825        | 1.88825  | 1.88825  | 1.88825 | 1.88825 | 1.88825 |         |
|       | 0.5 | Li 2008        | 1.48244        | 1.52355  | 1.56046  | 1.59031 | 1.61915 | 1.76357 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.48241        | 1.52353  | 1.56042  | 1.59030 | 1.61912 | 1.76354 |         |
|       | 1   | Li 2008        | 1.27158        | 1.32974  | 1.38511  | 1.42992 | 1.47558 | 1.69906 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.27156        | 1.32972  | 1.38508  | 1.42990 | 1.47554 | 1.69904 |         |
|       | 5   | Li 2008        | 0.96563        | 0.99903  | 1.06309  | 1.13020 | 1.19699 | 1.56988 |         |
|       |     | Présente [123] | 0.96564        | 0.99903  | 1.06309  | 1.13019 | 1.19697 | 1.56985 |         |
|       | 10  | Li 2008        | 0.95042        | 0.95934  | 1.01237  | 1.08065 | 1.14408 | 1.54164 |         |
|       |     | Présente [123] | 0.95044        | 0.95937  | 1.01236  | 1.08065 | 1.14406 | 1.54162 |         |
|       | 0.1 | 0              | Li 2008        | 1.82682  | 1.82682  | 1.82682 | 1.82682 | 1.82682 | 1.82682 |
|       |     |                | Présente [123] | 1.82445  | 1.82445  | 1.82445 | 1.82445 | 1.82445 | 1.82445 |
| 0.5   |     | Li 2008        | 1.44614        | 1.48608  | 1.52131  | 1.54926 | 1.57668 | 1.71130 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.44423        | 1.48408  | 1.51921  | 1.54710 | 1.57450 | 1.70901 |         |
| 1     |     | Li 2008        | 1.24470        | 1.30181  | 1.35523  | 1.39763 | 1.44137 | 1.65113 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.24319        | 1.30010  | 1.35332  | 1.39556 | 1.43932 | 1.64892 |         |
| 5     |     | Li 2008        | 0.94476        | 0.98103  | 1.04532  | 1.10983 | 1.17567 | 1.52993 |         |
|       |     | Présente [123] | 0.94598        | 0.98184  | 1.04465  | 1.10881 | 1.17396 | 1.52792 |         |
| 10    |     | Li 2008        | 0.92727        | 0.94078  | 0.99523  | 1.06104 | 1.12466 | 1.50333 |         |
|       |     | Présente [123] | 0.92838        | 0.94296  | 0.99550  | 1.06090 | 1.12313 | 1.50138 |         |
| 0.2   |     | 0              | Li 2008        | 1.67711  | 1.67711  | 1.67711 | 1.67711 | 1.67711 | 1.67711 |
|       |     |                | Présente [123] | 1.67010  | 1.67010  | 1.67010 | 1.67010 | 1.67010 | 1.67010 |
|       | 0.5 | Li 2008        | 1.35358        | 1.39053  | 1.42178  | 1.44535 | 1.46940 | 1.58186 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.34743        | 1.38410  | 1.41508  | 1.43843 | 1.46251 | 1.57476 |         |
|       | 1   | Li 2008        | 1.17485        | 1.22915  | 1.27770  | 1.31434 | 1.35341 | 1.53142 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.16976        | 1.22340  | 1.27134  | 1.30753 | 1.34671 | 1.52445 |         |
|       | 5   | Li 2008        | 0.89086        | 0.93362  | 0.99798  | 1.05607 | 1.11900 | 1.42845 |         |
|       |     | Présente [123] | 0.89462        | 0.935942 | 0.99545  | 1.05228 | 1.11318 | 1.42197 |         |
|       | 10  | Li 2008        | 0.86833        | 0.89228  | 0.94984  | 1.00949 | 1.07290 | 1.40568 |         |
|       |     | Présente [123] | 0.87178        | 0.89918  | 0.950331 | 1.00848 | 1.06754 | 1.39932 |         |

Tableau V.4 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale  $\bar{\omega}$  des plaques sandwichs P-FGM carrés simplement appuyée avec cœur souple et homogène.

| $h/b$ | $k$ | Théories       | $\bar{\omega}$ |         |         |         |         |         |         |
|-------|-----|----------------|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|       |     |                | 1-0-1          | 2-1-2   | 1-1-1   | 2-2-1   | 1-2-1   | 1-8-1   |         |
| 0.01  | 0   | Li 2008        | 0.96022        | 0.96022 | 0.96022 | 0.96022 | 0.96022 | 0.96022 |         |
|       |     | Présente [123] | 0.96020        | 0.96020 | 0.96020 | 0.96020 | 0.96020 | 0.96020 |         |
|       | 0.5 | Li 2008        | 1.66281        | 1.62291 | 1.58171 | 1.52277 | 1.50658 | 1.26557 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.66283        | 1.62294 | 1.58173 | 1.52279 | 1.50657 | 1.26555 |         |
|       | 1   | Li 2008        | 1.82031        | 1.79163 | 1.75379 | 1.68184 | 1.67490 | 1.38331 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.82034        | 1.79174 | 1.75391 | 1.68194 | 1.67494 | 1.38330 |         |
|       | 5   | Li 2008        | 1.92090        | 1.94313 | 1.93623 | 1.86207 | 1.88530 | 1.57035 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.92089        | 1.94332 | 1.93658 | 1.86239 | 1.88558 | 1.57034 |         |
|       | 10  | Li 2008        | 1.91064        | 1.94687 | 1.95044 | 1.88042 | 1.91162 | 1.60457 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.91061        | 1.94701 | 1.95080 | 1.88076 | 1.91198 | 1.60456 |         |
|       | 0.1 | 0              | Li 2008        | 0.92897 | 0.92897 | 0.92897 | 0.92897 | 0.92897 | 0.92897 |
|       |     |                | Présente [123] | 0.92776 | 0.92776 | 0.92776 | 0.92776 | 0.92776 | 0.92776 |
| 0.5   |     | Li 2008        | 1.57352        | 1.52588 | 1.48459 | 1.43419 | 1.41662 | 1.20553 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.57497        | 1.52895 | 1.48666 | 1.43615 | 1.41626 | 1.20477 |         |
| 1     |     | Li 2008        | 1.72227        | 1.67437 | 1.63053 | 1.57037 | 1.55788 | 1.30825 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.72568        | 1.68379 | 1.63966 | 1.57874 | 1.56102 | 1.30766 |         |
| 5     |     | Li 2008        | 1.84198        | 1.82611 | 1.78956 | 1.72726 | 1.72670 | 1.46647 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.84199        | 1.84161 | 1.81730 | 1.75320 | 1.74864 | 1.46600 |         |
| 10    |     | Li 2008        | 1.84020        | 1.83987 | 1.80813 | 1.74779 | 1.74811 | 1.49481 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.83857        | 1.85196 | 1.83665 | 1.77527 | 1.77584 | 1.49439 |         |
| 0.2   |     | 0              | Li 2008        | 0.85286 | 0.85286 | 0.85286 | 0.85286 | 0.85286 | 0.85286 |
|       |     |                | Présente [123] | 0.84927 | 0.84927 | 0.84927 | 0.84927 | 0.84927 | 0.84927 |
|       | 0.5 | Li 2008        | 1.37894        | 1.32061 | 1.28053 | 1.24533 | 1.22580 | 1.07016 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.38225        | 1.32772 | 1.28521 | 1.24999 | 1.22481 | 1.06852 |         |
|       | 1   | Li 2008        | 1.50896        | 1.43325 | 1.38242 | 1.34203 | 1.32129 | 1.14451 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.51715        | 1.45515 | 1.40311 | 1.36164 | 1.32828 | 1.14353 |         |
|       | 5   | Li 2008        | 1.65868        | 1.58011 | 1.50284 | 1.46009 | 1.42665 | 1.25210 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.65829        | 1.61777 | 1.56607 | 1.52042 | 1.47440 | 1.25156 |         |
|       | 10  | Li 2008        | 1.67278        | 1.60909 | 1.52671 | 1.48306 | 1.44101 | 1.27065 |         |
|       |     | Présente [123] | 1.66789        | 1.63913 | 1.59271 | 1.54763 | 1.50143 | 1.27017 |         |

Tableau V.5 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale  $\bar{\omega}$  des plaques sandwichs P-FGM carrés simplement appuyée avec un cœur FGM.

| $h/b$ | Théories       | $k$     |         |         |         |         |
|-------|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|       |                | 0.5     | 1       | 2       | 5       | 10      |
| 0.01  | Li 2008        | 1.33931 | 1.38669 | 1.44491 | 1.53143 | 1.59105 |
|       | Présente [123] | 1.33927 | 1.38665 | 1.44487 | 1.53139 | 1.59103 |
| 0.1   | Li 2008        | 1.29751 | 1.34847 | 1.40828 | 1.49309 | 1.54980 |
|       | Présente [123] | 1.29459 | 1.34533 | 1.40514 | 1.49044 | 1.54754 |
| 0.2   | Li 2008        | 1.19580 | 1.25338 | 1.31569 | 1.39567 | 1.44540 |
|       | Présente [123] | 1.18682 | 1.24352 | 1.30576 | 1.38736 | 1.43837 |

### V.3. Conclusion

La théorie raffinée à quatre variables (RPT) est développée pour l'analyse des vibrations des plaques sandwichs rectangulaires en FGM. Le nombre de variables dans cette théorie est inférieur à celles des théories de déformation de cisaillement des plaques du premier et d'ordre élevé. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de traction sur les bords, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Ainsi, contrairement à toute autre théorie, la théorie présentée donne lieu à seulement quatre équations régissant résultant de l'effort de calcul nettement inférieur par rapport aux autres théories d'ordre élevé rapportées dans la littérature ayant plus de nombre d'équations gouvernantes. La précision et l'efficacité de la présente théorie ont été démontrées pour les comportements de vibration de plaques sandwichs FGM simplement appuyées. Les plaques sandwichs P – FGM avec des peaux FGM et cœur homogène et les plaques sandwichs avec des peaux homogènes et cœur FGM sont considérées comme fondamentales. Les équations gouvernantes ont une forte similarité avec la théorie des plaques classiques CPT en plusieurs aspects. En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour l'analyse de la vibration des plaques sandwichs rectangulaire en FGM.



## CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

---

## Conclusion générale et perspectives

Au terme du travail effectué au sein du laboratoire des matériaux et hydrologie portant sur la détermination des caractéristiques vibratoires des structures composites en matériaux à gradient évalué (FGM), nous avons développé une méthode analytique directe qui détermine les fréquences de vibrations en utilisant deux types des plaques sandwiches : sandwich avec deux peaux FGM et cœur homogène et sandwich avec deux peaux homogènes et cœur FGM.

Les solutions exactes pour les problèmes des plaques qui dépendent de la fonction de gauchissement sont très limitées ; ceci nous a conduit à évaluer un nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existants basés sur des approximations du champ de déplacements. Cette procédure de résolution exacte est basée sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement. La nouvelle fonction raffinée a été comparée aux modèles analytiques existants basés sur des approximations du champ de déplacements exemples celles de (Reissner, Mindlin, Reddy et Touratier).

Des solutions de forme close pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwiches fonctionnellement graduées sont développées sur la prétention que les déplacements transversaux de cisaillement varient comme fonction parabolique suivant l'épaisseur de la plaque. Pour les plaques rectangulaires en P-FGM, les équations du mouvement et les conditions de frontières associées sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour trouver les solutions analytiques de la plaque sandwich en FGM avec des conditions aux frontières sous forme d'appuis simples sur tous les côtés. La comparaison des résultats de cette nouvelle théorie raffinée soit avec des solutions de la théorie tridimensionnelle linéaire d'élasticité de Li et al, la théorie classique CPT , la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT), la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre des plaques (TSDPT) et la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal des plaques (SSDPT), a permis de dégager plusieurs points :

- les fréquences de vibration obtenue par la théorie classique CPT sont très supérieures que ceux calculés à partir des théories de déformation de cisaillement, Cela implique que les résultats estimés par la théorie CPT donne une grande erreur pour une plaque épaisse.
- Les comparaisons des résultats des fréquences en utilisant deux types de cœur rigide homogène et un cœur souple homogène des plaques sandwiches FGM (Type A) montrent que les fréquences

fondamentales de cette nouvelle théorie raffinée avec les résultats obtenus par Li et al sont presque identiques.

- Il est montré que les fréquences fondamentales naturelles diminuées avec la diminution de la rigidité du matériau, qui est due à l'augmentation de l'indice de puissance  $k$  du type  $A$  ou de la diminution de  $k$  pour le type  $B$  et de la variation du rapport d'épaisseur de la couche.
- Il est montré que l'effet l'indice  $k$  sur la plaque sandwich 1-0-1 sans la couche de cœur homogène, est plus grand que celle de la plaque sandwich 1-8-1 avec un cœur rigide homogène, et l'effet de  $k$  sur le sandwich avec cœur rigide homogène est plus grande que celui de cœur souple homogène.
- On peut aussi conclure que l'approche monocouche équivalente s'avère bien adaptée aux matériaux FGM contrairement aux composites conventionnels qui présentent un inconvénient de discontinuité de contraintes à l'interface, entre les différentes couches.

En conclusion, on peut dire que la théorie des plaques raffinées (RPT) à quatre variables proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement des vibrations libres des plaques sandwiches en FGM. Cependant, il est à noter que l'amélioration de la théorie actuelle est nécessaire, surtout lorsqu'il est appliquée à une structure stratifiée pour satisfaire la continuité des contraintes de cisaillement transversale entre les couches. Le développement de la théorie actuelle est également considéré pour des conditions aux limites générales.

En perspective à ce travail, nous envisagerons d'étudier le problème de gauchissement, et d'utiliser de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la vibration ;
- Prise en compte de la distribution graduelle arbitraire du matériau FGM ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour résoudre les problèmes de flambement ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis ;
- Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués. La méthode

des éléments permettra de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

Finalement, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution de notre laboratoire dans le domaine de recherches des matériaux composites en matériaux à gradient évalué (FGM), précisément leurs comportements vis à vis des conditions de chargements statiques et vibratoires.

RÉFÉRENCES  
BIBLIOGRAPHIQUES

---

## Références bibliographiques

- [1] Shimpi, R. P. Refined plate theory and its variants. *AIAA Journal*, 40(1), 137–146 (2002).
- [2] Shimpi, R. P. and Patel, H. G. A two-variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43(22), 6783–6799 (2006).
- [3] Shimpi, R. P. and Patel, H. G. Free vibrations of plate using two-variable refined plate theory. *Journal of Sound and Vibration*, 296(4-5), 979–999 (2006).
- [4] Allen H. G., "Analysis and design of structural sandwich panels," Pergamon Press, London, U.K. 1961.
- [5] Sudharsan M., "Structural Design and Analysis of a Lightweight Composite Sandwich space Radiator Panel", Phd thesis, Bharathiar University, Coimbatore, India. 2003.
- [6] Berthelot J. M., "Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures", 4<sup>ème</sup> édition, 1996.
- [7] M. Chatin, "Matériaux composites – présentation générale", *Technique de l'ingénieur BT4*, 2000.
- [8] Triantafillou T. C, Gibson L. J., *Materials Science and Engng*, 95:37-53, 1987.
- [9] Jin Dai, Hahn H., *composite structure*, 61: 247-253, 2003.
- [10] Avila A. F., *composite structures*, 81: 323-330, 2007.
- [11] Yoshi A., *Advanced Composite Materials*, 2(4): 289-305, 1992.
- [12] Thomesen O. T., *Composite structures*, 30: 85-101, 1995.
- [13] Belouettar S, Abbadi A, Azari Z, Belouettar R, Freres P., *Composites structures*, 87: 265-273, 2009.
- [14] Gognard, " collage des métaux généralités et caractéristiques ", *Techniques de l'ingénieur BT4* , 2000.
- [15] Hexcel Composite. HexWeb tm honeycomb sandwich design technology. [http/ /:www.hexcel.composite.com](http://www.hexcel.composite.com), 2004.
- [16] Hirai T. and Chen L. (1999), Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514.
- [17] Chan S.H. (2001), Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.
- [18] Uemura S. (2003), The activities of FGM on new applications, *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10.

- [19] Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543.
- [20] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [21] Müller E., Drašar C., Schilz J., and Kaysser W.A. (2003), Functionally graded materials for sensor and energy applications, *Materials Science and Engineering*, A362, 17–39
- [22] Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., and Du H. (2003), Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators, *Smart Materials and Structures*, 12, 115–121.
- [23] Liu L.-S., Zhang Q.-J., and Zhai P.-C. (2003), The optimization design of metal=ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method, *Materials Science Forum*, 423–425, 791–796.
- [24] Paszkiewicz B., Paszkiewicz R., Wosko M., Radziejewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., and Tlaczala M. (2008), Functionally graded semiconductor layers for devices application, *Vacuum*, 82, 389–394.
- [25] Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., and Kawasaki T. (2004), Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, *Composites Science and Technology*, 64, 893–908.
- [26] Fuchiyama T. and Noda N. (1995), Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, *JSAE Review*, 16, 263–268.
- [27] Markworth A.J., Ramesh K.S., and Parks W.P. (1995), Review: modeling studies applied to functionally graded materials, *Journal of Material Sciences*, 30, 2183–2193, 1995.
- [28] Tanigawa Y. (1995), Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials, *Applied Mechanics Reviews*, 48, 287–300.
- [29] Noda N. (1999), Thermal stresses in functionally graded material, *Journal of Thermal Stresses*, 22, 477–512.
- [30] Paulino G.H., Jin Z.H., and Dodds Jr. R.H. (2003), Failure of functionally graded Materials, in *Comprehensive Structural Integrity*, Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), Elsevier Science, New York, pp. 607–644.
- [31] Hui- shen shen functionally graded materials nonlinear analysis of plates and shells 2009 CRC Press is an imprint of the Taylor & Francis Group.
- [32] Shen H.-S. (2004), Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells (in Chinese), *Advances in Mechanics*, 34, 53–60,2004.

- [33] Birman V. and Byrd L.W. (2007), Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Applied Mechanics Reviews*, 60, 195–216, 2007.
- [34] Koizumi. M, FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan, 1996.
- [35] Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa casting of  $Al_2O_3/ZrO_2$  laminated composites, 1986.
- [36] Abdizadeh H, élaboration et caractérisation de composites « composites laminaires tri-couches à base d'alumine » thèse de doctorat INSA de Lyon 1997 212 p
- [37] T.Hirai, Chapter 20, "Functional Gradient Materials", *Mater. Sci. and Tech.* vol.17B, R.W.Chan, P.Hassen and E.J.Kramer(eds.), VCH, Weinheim, Germany 293, 1996.
- [38] Ichiro chiota ; yoshinari miyamoto functionally graded materials 1996 elsevier.
- [39] Anné G, J Vleugels et O Van der biest, Katholieke University Leuven, Belgium *Functionally graded ceramics* Woodhead Publishing Limited, 2006.
- [40] Neubrand, A., Rödel, J., (1997), Gradient materials: an overview of a novel concept, *Z. Metallk*, 88(5), 358–371.
- [41] Requenna, J., Moya, J.S., Pena, P., (1993), „ $Al_2TiO_3-Al_2O_3$  functionally gradient materials obtained by sequential slip casting”, in Holt, J.B., Koizumi, M., Hirai, T., Munir, Z.A., *Functionally Gradient Materials*, American Ceramic Society, Westerville, O.H., 203–210.
- [42] Chu, J., Ishibashi, H., Hayashi, K., Takebe, H., Morinaga, K., (1993), „Slip casting of continuous functionally gradient material”, *J. Ceram. Soc. Japan*, 101, 818–820.
- [43] Schindler, J., Meyer-Olbersleben, F., Kirbach, B., (1998), „Fabrication of FGM-foils for joining application by wet powder spraying”, presented at 5th International Symposium on Functionally Graded Materials, Dresden, October 1998.
- [44] Watanabe, Y., Yamanaka, N., Fukui, Y., (1998), „Control of composition gradient in a metal-ceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method”, *Composites Part A*, 29A, 595–601.
- [45] Bernhardt, R., Meyer-Olbersleben, F., Kieback, B., (1999), „The influence of hydrodynamic effects on the adjustment of gradient patterns through gravity sedimentation of polydisperse particle systems in newtonian and viscoelastic fluid”, *Mat. Sci. Forum*, 308–311: 31–35.
- [46] Anné, G., Vanmeensel, K., Vleugels, J., (2004), *Electrophoretic deposition as a near net shaping technique for functionally graded biomaterials*”, *Mat. Sci. Forum*, 492–493, 213–218.
- [47] Van der Biest, O., Vandeperre, L., (1999), *Electrophoretic deposition of materials*”, *Ann. Rev. Mat. Sci.*, 29, 327–352.



- [48] Put, S., Vleugels, J., Van der Biest, O., (2003), „Gradient profile prediction in functionally graded materials processed by electrophoretic deposition”, *Acta. Mater.*, 51(20), 6303– 6317.
- [49] Vleugels, J., Anné, G., Put, S., Van der Biest, O., (2003), „Thick plate-shaped Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> composites with a continuous gradient processed by electrophoretic deposition”, *Mat. Sci. Forum.*, 423–425, 171–176.
- [50] Hillman, C., Suo, Z.G., Lange, F.F., (1996), Cracking of laminates subjected to biaxial tensile stresses”, *J. Am. Ceram. Soc.*, 79(8), 2127–2133.
- [51] Cai, P.Z., Green, D.J., Messing, G.L., (1997a), Constrained densification of alumina/zirconia hybrid laminates. 1. Experimental observations of processing defects”, *J. Am. Ceram Soc.*, 80(8), 1929–1939.
- [52] Cai, P.Z., Green, D.J., Messing, G.L., (1997b), Constrained densification of alumina/zirconia hybrid laminates. 2. Viscoelastic stress computation”, *J. Am. Ceram. Soc.*, 80(8), 1940–1948.
- [53] S., Beraniè, S., (2005), „Densification of step graded Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>–ZrO<sub>2</sub> composites”, *Mat. Sci. Forum.*, 492–493, 207–212.
- [54] Zhao, C., Vleugels, J., Vandeperre, L., Van Der Biest, O., (2000), Cylindrical Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/TZP functionally graded materials by EPD, *Brit. Cer. Trans.*, 99(6), 284–287.
- [55] Mistler, R, E. high strength substrates produced by multiple layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull.* 1973 Vol .52 N° 11 p850-54.
- [56] Bishop, a, Lin, C.Y. NAVARATNAM, M. Rawlings.R.D MC. Chane a functionally graded material produced by a powder metallurgical process, *journal of materials science letters* 1993.
- [57] Steffes.H.D. DvorakM.Wewel. Plasma sprayed functionally graded materials- processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sedai Japan 1990.
- [58] F. Delale, F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609 –614, 1983.
- [59] A. K. Noor & W. S. Burton. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1,12, 1989.
- [60] R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear e\_effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.
- [61] T. Kant & K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65,75, 2000.

- [62] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [63] N.J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398-411, 1969.
- [64] N.J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.*, vol. 4, pages 20-35, 1970.
- [65] S. Srinivas & A. K. Rao. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Structures*, vol. 6, pages 1463-1481, 1970.
- [66] S. Srinivas & A.K. Rao. Flexure of thick plates. *ASME*, pages 298-299, 1973.
- [67] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous anisotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [68] G. Kirchhoff. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [69] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J. Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [70] L. Liberscu. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [71-] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.
- [72] S.A. Ambartsumyan. *Theory of anisotropic plate*. Technomic Publishing Co,1969.
- [73] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69, 77, 1945.
- [74] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- [75] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [76] K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13<sup>èmes</sup> Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [77] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 1740–1755.

- [78] A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [79] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596, 1987).
- [80] M. Di Sciuva. A re\_fined transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279{295, 1984.
- [81] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [82] C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95, 2001.
- [83] U. Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites : Part B*, vol. 32, pages 343-354, 2001.
- [84] M. Tahani & A. Nosier. Edge e\_ect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- [85] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.
- [86] C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress \_eld in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [87] W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a subla- minate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.
- [88] N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, page 385, 1978.
- [89] Plantema, F. J. *Sandwich Construction: The Bending and Buckling of Sandwich Beam, Plates and Shells*, John Wiley and Sons, New York (1966).
- [90] Allen, H. G. *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Pergamon Press, Oxford (1969).
- [91] Whitney, J. M. *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic, Lancaster (1987).
- [92] Zenkert, D. *An Introduction to Sandwich Construction*, Chameleon Press, London (1995).

- [93] Vinson, J. R. *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*, Technomic, Lancaster (1999).
- [94] Pagano, N. J. and Hatfield, S. J. Elastic behaviour of multilayered bidirectional composite. *AIAA Journal*, 10(12), 931–933 (1972).
- [95] Koizumi, M. The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, 34(1), 3–10 (1993).
- [96] Suresh, S. and Mortensen, A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials*, IOM Communications, London (1995).
- [97] Koizumi, M. FGM activities in Japan. *Composite Part B: Engineering*, 28(1-2), 1–4 (1997).
- [98] Suresh, S. and Mortensen, A. Functionally graded metals and metal ceramic composites 2: thermomechanical behaviour. *International Materials Reviews.*, 42(3), 85–116 (1997).
- [99] Bao, G. and Wang, L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), 2853–2871 (1995).
- [100] Marur, P. R. *Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials*, Ph. D. dissertation, Auburn University, Alabama (1999).
- [101] Williamson, R. L., Rabin, B. H., and Drake, J. T. Finite element analyses of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces—part I: model description and geometrical effects. *Journal of Applied Physics*, 74(2), 1310–1320 (1995).
- [102] Naotake, N. Thermal stresses in functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*, 22(4-5), 477–512 (1999).
- [103] Kesler, O., Finot, M., and Sampath, S. Determination of processing-induced stresses and properties of layered and graded coatings: experimental method and results for plasma-sprayed Ni-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. *Acta Materialia*, 45(8), 3123–3134 (1997).
- [104] Kwon, P. and Crimp, M. Automating the design process and powder processing of functionally gradient materials. *Composites and Functionally Graded Materials*, 80, 73–88 (1997).
- [105] Reddy, J. N. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3), 663–684 (2000).
- [106] Cheng, Z. Q. and Batra, R. C. Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4), 879–895 (2000).
- [107] Loy, C. T., Lam, K. Y., and Reddy, J. N. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(31), 309–324 (1999).

- [108] Venkataraman, S. and Sankar, B. V. Analysis of sandwich beams with functionally graded core. Proceedings of the 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Seattle, AIAA-2001-1281, 16–19 (2001).
- [109] Anderson, T. A. A 3-D elasticity solution for a sandwich composite with functionally graded core subjected to transverse loading by a rigid sphere. *Composite Structures*, 60(3), 265–274 (2003).
- [110] Pan, E. and Han, F. Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates. *International Journal of Engineering Science*, 43(3-4), 321–339 (2005).
- [111] Das, M., Barut, A., Madenci, E., and Ambur, D. R. A triangular plate element for thermo-elastic analysis of sandwich panels with a functionally graded core. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 68(9), 940–966 (2006).
- [112] Shen, H. S. Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electromechanical loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 42(23), 6101–6121 (2005).
- [113] Noda, N. Thermal stress in functionally graded materials. Third International Congress on Thermal Stresses. Thermal Stresses' 99, Cracow, Poland, 13–17 June (1999).
- [114] Li, Q., Iu, V. P., and Kou, K. P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 311(112), 498–515 (2008).
- [115] Lee, K. H., Senthilnathan, N. R., Lim, S. P., and Chow, S. T. A simple higher-order non-linear shear deformation plate theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 24(2), 127–137 (1989).
- [116] Mechab, I., Ait, A., H., Tounsi, A., Belhadj, H. A., and Adda Bedia, E. A. A two-variable refined plate theory for bending of functionally graded plates. *Acta Mechanica Sinica*, 26(6), 941–949 (2010).
- [117] Leissa, A. W. and Narita, Y. Vibration studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates. *Composite Structures*, 12(2), 113–132 (1989).
- [118] Baharlou, B. and Leissa, A. W. Vibration and buckling of generally laminated composite plates with arbitrary boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 29(8), 545–555 (1987).
- [119] Qatu, M. S. Free vibration of laminated composite rectangular plates. *International Journal of Solids and Structures*, 28, 941–954 (1991).
- [120] Bhat, R. B. Natural frequencies of rectangular plates using characteristics orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 102(4), 493–499 (1985).

- [121] Dickinson, S. M. and Blasio, X. On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 108(1), 51–62 (1986).
- [122] Narita, Y. Combinations for the free-vibration behaviors of anisotropic rectangular plates under general edge boundary conditions. *Journal of Applied Mechanics*, 67(3), 568–573 (2000).
- [123] L. HADJI , Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory, *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 32(7), 925–942, 2011.