

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES
SIDI BEL ABBES

Laboratoire des Matériaux & Hydrologie



FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Génie Civil
Option : Structures et Matériaux

Présentée par

MEKERBI Mohamed

Intitulé de la thèse

Développement d'une approche analytique et étude de l'impact des fondations élastiques Winkler/Pasternak/Kerr sur la réponse globale des structures en matériaux composites avancés

Soutenu le : 11 / 11 / 2020 Composition du jury :

Président	TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L SBA
Directeur de thèse	BENYOUCEF Samir	Pr	U.D.L SBA
Examineur	BOURADA Mohamed	MCA	U.D.L SBA
Examineur	AIT ATMANE Hassen	Pr	U-CHLEF
Examineur	BENNAI Riadh	MCA	U-CHLEF
Examineur	KACI Abdelhakim	Pr	U-SAIDA

Année universitaire 2020-2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je remercie en premier mon Dieu pour tout ce qu'il m'a donné.

Je remercie en second mes parents, qui ont sacrifiés leur vie pour notre bien.

Je remercie mon encadrant BENYOUCEF Samir, Professeur à l'Université de Djillali Lyebes- Sidi Belabbes. Il a fait preuve d'une grande disponibilité, m'a fourni un soutien constant et une aide précieuse. Il a toujours su me conseiller durant l'élaboration de ce travail de recherche, me faisant profiter ainsi de ses compétences théoriques et de son expérience.

Je remercie également Dr BACHIRI Attia et Dr MAHMOUDI Abdelkader pour ses collaborations, conseils et encouragements qu'ils m'ont apporté durant l'élaboration de ce travail.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres du LMH, permanents, doctorants, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie scientifique et professionnelle.

Je tiens à remercier très vivement et respectueusement le président du jury Professeur TOUNSI Abdelouahed et les membres : Dr. BOURADA Mohamed, Pr. AIT ATMANE Hassen, Dr. BENNAI Riadh, Pr. KACI Abdelhakim d'avoir accepté examiner mon travail.

A mes parents

*Et toute ma
famille.*

ملخص

المواد المتدرجة وظيفيا هي نوع جديد من المواد المركبة التي لها تغير تدريجي ومستمر لحجم كل مكون وفق اتجاه السمك، مما يؤدي إلى تغييرات في السلوك الاجمالي للعنصر الهيكلي الذي يتكون منها.

تمت دراسة السلوك الديناميكي الحراري لألواح متدرجة وظيفياً تركز على أسس وينكلر/باسترنك/كاروفك شروط حدية مختلفة باستخدام نظرية الألواح ثنائية الأبعاد. يحتوي مجال الانتقال للنظرية الحالية على أشكال تكاملية غير محددة ولا يتضمن سوى أربعة مجاهيل. تعتبر اللوحة خاضعة لمجال الحرارة الجيبي التوافقي عبر الزمن على امتداد سمكها.

استخدمنا نظرية أخرى لدراسة تأثير المسامية على الانبعاج الحراري لألواح على أساس مرن. تأخذ النظرية في الاعتبار تأثير تمدد السمك بسبب طبيعتها شبه ثلاثية الأبعاد. علاوة على ذلك، استوفى النموذج شروط اجهادات القص في الجزء العلوي والسفلي من اللوحة. تحتوي النظرية شبه ثلاثية الأبعاد المقترحة على أربعة مجاهيل فقط. تم اعتبار توزيعات المسامية المختلفة وتم افتراض أن تكون الأحمال الحرارية منتظمة، مرتفعة خطياً وغير خطياً وفق اتجاه السمك.

للتحقق من صحة النظريات الحالية، تمت مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع البيانات المتاحة في الأبحاث السابقة. قمنا بإجراء دراسة وسيطية لإظهار تأثير الوسائط المختلفة مثل معاملات الوقت، معاملات الأساس، توزيعات المسامية على استجابة اللوحة من خلال العديد من المنحنيات التوضيحية.

الكلمات الرئيسية: المواد المتدرجة وظيفياً، الديناميك الحراري، الانبعاج الحراري، نظرية شبه ثلاثية الأبعاد، أساس مرن.

Abstract

Functionally graded materials (FGM) are a new kind of composite materials which have a gradual and continuous variation of the volume fraction of each component through the thickness direction, leading to changes of global behavior of the structural element they represent.

The thermodynamic behavior of functionally graded (FG) sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundations and with various boundary conditions is studied in this work by using a refined 2D plate theory. The displacement field of the present theory contains undetermined integral forms and involves only four unknowns. The plate is considered to be subject to a time harmonic sinusoidal temperature field across its.

Another theory is used to study the effect of porosity on the thermal buckling of FG plates on elastic foundation. The theory takes into account the stretching effect due to its quasi three-dimensional nature. Moreover, the model satisfied exactly stress boundary conditions on the top and the bottom of the plate. The proposed quasi 3D theory contains only four unknowns. Different porosity distributions are considered. The thermal loads are assumed to be uniform, linear and non-linear temperature rises through the thickness direction.

To check the validity of the present theories, the obtained results are compared with the available data in the literature. Parametric study is performed to show the influences of different parameters like time parameter, foundation parameters, porosity distributions on the response of FG plate through several illustrations.

Keywords: *FGM; thermodynamic; thermal buckling; quasi 3D theory ; elastic foundation.*

Résumé

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont un nouveau type de matériaux composites qui représentent une variation graduelle et continue de la fraction volumique de chaque composant dans le sens de l'épaisseur, entraînant des changements du comportement global de l'élément structurel qu'ils représentent.

Le comportement thermodynamique des plaques sandwich FG reposant sur des fondations Winkler / Pasternak / Kerr et avec diverses conditions aux limites est étudié dans ce travail en utilisant une théorie raffinée des plaques 2D. Le champ de déplacement de la présente théorie contient des formes intégrales indéterminées et n'implique que quatre inconnues. La plaque est considérée comme soumise à un champ de température sinusoïdal harmonique dans le temps sur son épaisseur.

Une autre théorie est utilisée pour étudier l'effet de la porosité sur le flambement thermique des plaques FG sur les fondations élastiques. La théorie prend en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur dû à sa nature quasi tridimensionnelle. De plus, le modèle satisfaisait exactement aux conditions aux limites de contraintes en haut et en bas de la plaque. La théorie quasi 3D proposée ne contient que quatre inconnues. Différentes distributions de porosité sont considérées. Les charges thermiques sont supposées uniformes, la température linéaire et non linéaire augmente dans la direction de l'épaisseur.

Pour vérifier la validité des théories utilisées, les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature. Une étude paramétrique est réalisée pour montrer les influences de différents paramètres comme le paramètre de temps, les paramètres de fondation, les distributions de porosité sur la réponse des plaques FG à travers plusieurs illustrations.

Mots-clés: *matériau fonctionnellement gradué; thermodynamique; flambage thermique; théorie quasi 3D; fondation élastique.*

Listes des figures

Figure I.1 : Matériau composite ordinaire.....	4
Figure I.2 : Variation des déformations et contraintes suivant l'épaisseur dans un matériau stratifié (Elishakoff, 2016)	4
Figure I.3 : Matériaux FGM, a- vue microscopique b- Microstructure (Elishakoff, 2016)	5
Figure I.4 : Structures et propriétés des matériaux composites ordinaires et FGM (Shinohara, 2013).....	6
Figure I.5 : Variation du module d'Young suivant la loi exponentielle	7
Figure I.6 : Variation de la fraction volumique suivant la loi de puissance.....	8
Figure I.7 : Variation de la fraction volumique suivant la loi sigmoïde	8
Figure I.8 : Variation du module de Young avec différents modèles micromécaniques. (Mahmoudi 2018).....	10
Figure I.9 : Modèles de distribution de la porosité dans une poutre FG (Chen et al. 2015)	12
Figure I.10 : Modèle de porosité d'une plaque poreuse FG (Shahsavari et al. 2018).....	12
Figure I.11 : Variation du module d'élasticité avec les distributions de la porosité	14
Figure I.12 : Variation du coefficient de la dilatation thermique avec les distributions de la porosité.....	14
Figure II.1: Partie d'une plaque (Clive et al. 2013)	16
Figure II.2: Déformée de la ligne normale (Clive et al., 2013).....	17
Figure II.3: hypothèses de la section transversale de la théorie de Mindlin-Reissner (Reddy 2007)	19
Figure II.4: Déformation de la ligne normale transversale selon les théories CPT, FSDT et TSDT (Reddy, 2007).....	21
Figure II.5: Déformation tangentielle (Jawad 1994).....	28
Figure II.6: Déformations non linéaires : a- axial, b- tangentielle (Timoshenko et Gere, 1963)..	28
Figure II.7: État de contrainte dans un solide.....	31
Figure III.1: Travail virtuel de la contrainte normale σ_x et de cisaillement τ_{yx}	34
Figure III.2: Modèle de Winkler	40
Figure III.3: Déplacement de la surface de la fondation	40
Figure III.4: Modèle de Pasternak.....	41
Figure III.5: Équilibre de la couche de cisaillement	41
Figure III.6: Modèle de Kerr	42
Figure IV.1: Géométrie de la plaque sandwich FG reposant sur une fondation élastique.....	45
Figure V.1: Système de coordonnées et géométrie des plaques poreuses rectangulaires FG sur fondation élastique	58
Figure VI.1: Variation de la déflection en fonction du rapport a/h d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) avec différentes conditions aux limites (sans fondation).....	68
Figure VI.2: Variation de la flèche en fonction du rapport a/h d'une plaque sandwich carrée FGM (2-1-2) reposant sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS.	68
Figure VI.3: Variation de la déflection en fonction du rapport a/h d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS pour différentes valeurs du paramètre de température.	70
Figure VI.4: Variation de la déflection en fonction du paramètre de fréquence d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur la fondation Pasternak	70
Figure VI.5: Variation de la déflection en fonction du paramètre de fréquence de la plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur la fondation Kerr.	71

Figure VI.6: Variation de la contrainte axiale en fonction du rapport a/h de la plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) avec différentes conditions aux limites (sans fondation). ($t=2$).	72
Figure VI.7: Variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrée FGM (2-1-2) reposant sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS pour différentes valeurs du paramètre de température ($p=3, \eta=1, t=4, a/h=5$)	72
Figure V.8: Variation des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carrée FGM (2-1-2) reposant sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS pour différentes valeurs du paramètre de température \bar{t} ($p=3, \eta=1, t=4, a/h=5$)	73
Figure VI.9: Modes propres pour la fréquence naturelle ($\omega=2$) d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur deux types de fondation avec condition aux limites SSSS ($a/h=10$).	74
Figure VI.10: Modes propres pour la fréquence naturelle ($\omega=2$) d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur deux types de fondation avec une condition aux limites CCSS ($a/h=10$).	74
Figure VI.11: Modes propres pour la fréquence naturelle ($\omega=2$) d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur deux types de fondation avec une condition aux limites CSSS ($a/h=10$).	75
Figure VI.12: Modes propres pour la fréquence naturelle ($\omega=2$) d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur deux types de fondation avec une condition aux limites FFSS ($a/h=10$). a) Fondation Pasternak. (b) Fondation Kerr.	75
Figure VI.13: Température critique de flambement T_{cr} en fonction du rapport d'épaisseur a/h ..	79
Figure VI.14 : Température critique de flambement T_{cr} par rapport au rapport b/a	81
Figure VI.15 : Température critique de flambement T_{cr} en fonction de l'indice de loi de puissance p	82

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Coefficients dépendants de la température pour la céramique et le métal (Sobhy, 2015).....	11
Tableau II.1: Fonctions de forme de déformation de cisaillement.....	24
Tableau IV.1: Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_m(x)$ (Ait Amar et al. 2014)	53
Tableau VI.1: Déflexion centrale d'une plaque sandwich FG avec et sans fondation ($a/h=10$, $a=b=0.5$, $p=0$).....	66
Tableau VI.2 : Contrainte axiale et contrainte tangentiel transversale d'une plaque sandwich FG avec et sans fondation ($a/h=10$, $a=b=0.5$, $p=0$)	66
Tableau VI.3: déflexion centrale d'une plaque sandwich FG avec et sans fondation pour différentes conditions aux limites ($a/h=10$, $a=b=0.5$, $p=0$)	67
Tableau VI.4: température critique de flambement d'une plaque FG carrée sans fondation élastique ($a/h = 10$) sous différentes charges thermiques ($\eta = 3$).....	76
Tableau VI.5: Température critique de flambement d'une plaque FG carrée ($a/h = 10$) sur une fondation élastique sous différentes charges thermiques	77
Tableau VI.6: Température critique de flambement T_{cr} sous l'augmentation de température non linéaire ($a/h = 10$).	78

Liste des notations

h	Epaisseur de la plaque
h_0, h_1, h_2, h_3	Epaisseurs de la plaque sandwich
a	La largeur de la plaque
b	La longueur de la plaque
p	Paramètre du matériau
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de l'épaisseur d'une plaque
$V_1(z), V_2(z), V_3(z)$	Fraction volumique en fonction de l'épaisseur d'une plaque sandwich
α	la fraction volumique de porosité
q	Le transfert de contrainte/déformation
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$G(z)$	Module de Cisaillement en fonction de l'épaisseur
$\rho(z)$	La densité
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de l'épaisseur
$\alpha(z)$	Coefficient de délatation thermique en fonction de l'épaisseur
K	La conductivité thermique
P_m	Proprièetès matérielles de Métal
P_c	Proprièetès matérielles de céramique
u	Déplacement suivant x
v	Déplacement suivant y
w	Déplacement suivant z
w_0	Déplacement transversal dû au flexion
w_b	Déplacement transversal dû au flexion
w_s	Déplacement transversal dû au cisaillement
θ	Déplacement transversal dû au cisaillement
(u_0, v_0, w_0)	Les déplacements au niveau du plan moyen ($z=0$)
u_0^0, v_0^0, w_b^0 et w_s^0	Déplacements à l'état d'équilibre
u_0^1, v_0^1, w_b^1 et w_s^1	Déplacements voisins à l'état d'équilibre
φ_x, φ_y	Les rotations autour des axes x et y , respectivement.
$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$	Les composants des contraintes
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$	Les composants des déformations
Q_{ij}	Les coefficients d'élasticité
i, j	Nombres naturelles
$f(z)$	La fonction de forme
$g(z)$	fonction de cisaillement
K_s	Coefficient de correction de cisaillement
\int	Intégrale indéterminée

k_1, k_2	Des coefficients dépendent de la géométrie
A', B'	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)
λ	Nombre d'onde selon x
μ	Nombre d'onde selon y
δ	Variation
δU	L'énergie de déformation de la plaque
δK	L'énergie cinétique de la plaque
δU_F	La variation de l'énergie de déformation de la fondation
f_e	Densité de la force de réaction de la fondation
k_w	Paramètre de Winkler
k_p	Paramètre de Pasternak
k_l, k_u, k_s	Paramètres de Kerr
$\partial/\partial x$	Dérivée partielle par rapport à x
$\partial/\partial y$	Dérivée partielle par rapport à y
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction $g(z)$
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
A	La surface supérieure de la plaque
$T(z)$	Variation du chargement thermique suivant l'épaisseur
T_1, T_2 et T_3	Les charges thermiques
t_1, t_2 et t_3	Constantes thermiques
T_t, T_b	Température des face supérieure et inférieure
T_c, T_m	Température de la céramique et le métal
T_f, T_i	Températures finale et initiale
η	L'exposant de température
P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3	Les coefficients de propriétés des matériaux dépendant de la température.
T_{cr}	Le chargement thermique du flambement
$(\dot{\quad})$	La dérivée première par rapport au temps
$(\ddot{\quad})$	La dérivée seconde par rapport au temps
∇	Opérateur Laplacien
N	Effort normal résultant
N^1	Effort normal résultant voisin à l'équilibre stable
M, M^b	Moment de flexion résultant
M^s, S^s	Efforts d'ordre élevé
M^1	Moment de flexion résultant voisin à l'équilibre stable
M^s, S^s	Efforts d'ordre élevé

$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$	Composantes de moment d'inertie
$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s)$	Composantes de rigidité
A_{ij}^s	Composantes de rigidité du au cisaillement
(N^T, M^{bT}, M^{sT})	Les forces et moments résultantes dû à la charge thermique
$(A^T, B^T, C^T, A_a^T, B_a^T, C_a^T, E_a^T, F_a^T)$	Coefficients de la force généralisée thermique
\bar{t}	paramètre arbitraire de température
η	l'exposant de température
T^+, T^-	Température des surfaces supérieure et inférieure de la plaque FGM respectivement.
\sum	La somme
m	Nombre de mode selon x
n	Nombre de mode selon y
$(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn})$	Paramètres arbitraires
K_w, K_p	Paramètre de la fondation sous forme adimensionnelle
D	Rigidité flexionnelle de la plaque
ω	Fréquence naturelle
\bar{w}, \hat{w}	Déplacement transversal adimensionnelle
$\bar{\sigma}_x$	Contrainte axiale adimensionnelle
$\bar{\tau}_{xz}$	Contrainte de cisaillement adimensionnelle
$\{\Delta\}$	Vecteur des Paramètres arbitraires
$[K]$	La matrice de rigidité
a_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité
$[M]$	La matrice masse
$\{F\}$	Composantes du vecteur de force
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Tableau des matières

ملخص.....	1
Abstract	2
Résumé.....	3
Listes des figures.....	4
Liste des tableaux	6
Liste des Notations	7
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUÉS.....	4
I.1. Matériaux composites ordinaires	4
I.2. Matériaux composites avancés fonctionnellement gradués FGM.....	5
I.3.Evaluation des propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués.....	6
I.3.1.Distribution des fractions volumiques	6
I.3.1.1. Loi exponentielle E-FGMs.....	7
I.3.1.2. Loi de puissance P-FGMs	7
I.3.1.3. Loi sigmoïde S-FGM	8
I.3.2. Modèles micromécaniques des FGM.....	9
I.3.3. Propriétés dépendantes de la température	10
I.3.4. Propriétés des FGM avec porosité	11
CHAPITRE II: ETAT DE CONTRAINTES ET DÉFORMATIONSDES PLAQUES EN FGM.....	15
II.1. Généralités.....	15
II.2. Champ des déplacements dans une plaque	15
II.2.1. Théorie classique des plaques (CPT).....	15
II.2.1. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	18
II.2.3. Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT).....	20
II.2.4. Théorie des plaques d'ordre supérieur avec l'effet d'étirement	25
II.3. Déformations dans une plaque FG	27
II.3.1. Déformations linéaires.....	27
II.3.2. Déformations non-linéaires.....	28

II.4. Contraintes dans une plaque FG	31
II.5. Relation entre les contraintes et les déformations.....	31
II.5.1. Modèle bi-dimensionnelle (2D).....	31
II.5.2. Modèle tridimensionnelle (3D).....	32
CHAPITRE III: COMPORTEMENT DES PLAQUES FG SUR FONDATIONS ÉLASTIQUES	33
III.1. Introduction	33
III.2. Principe des travaux virtuels	33
III.3. Comportement statique et dynamique des plaques	35
III.4. Comportement des plaques sous chargement thermique.....	36
III.4.1. Dilatation thermique.....	36
III.4.2. Chargement thermo mécanique.....	37
III.4.3. Chargement thermodynamique	38
III.4.4. Température critique de flambement.....	39
III.5. Réponses des plaques sur fondations élastiques.....	39
III.5.1. Model de Winkler.....	40
III.5.2. Model de Pasternak	40
III.5.3. Modèle de Kerr.....	42
III.5.4. Fondations variables.....	43
CHAPITRE IV: COMPORTEMENT THERMODYNAMIQUE DES PLAQUES SANDWICH FG	45
SUR FONDATION WINKLER/PASTERNAK/KERR	45
IV.1. Introduction	44
IV.2. Description de la plaque sandwich :	45
IV.3. Cinématique	46
IV.4. Relations constitutives	48
IV.5. Équations de mouvement	48
CHAPITRE V: FLAMBEMENT THERMIQUEDES PLAQUES POREUSES FG	57
V.1. Introduction	56
V.2. Propriétés effectives des matériaux de la plaque poreuse FG	56
V.3. Cinématique.....	58
V.4. Equations constitutives.....	59

V.5. Équations de mouvement	60
V.6. Solution du problème	62
V.7. Solution de flambage thermique.....	63
V.7.1. Flambement des plaques FG sous élévation de température uniforme	63
V.7.2. Flambement des plaques FG soumises à un changement de température graduel sur toute l'épaisseur	64
CHAPITRE VI: RÉSULTATS ET DISCUSSIONS.....	66
VI.1. Introduction	65
VI.2. Comportement thermodynamique des plaques sandwich FG	65
VI.3. Flambement thermique des plaques poreuses FG	76
VI.4. Conclusion	83
CONCLUSION GÉNÉRALE	84
LISTE DES RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

INTRODUCTION GENERALE

Les structures et les matériaux intelligents ont retenu récemment l'attention des chercheurs en raison de leurs énormes potentiels d'application. Les matériaux fonctionnellement gradués (ou à gradient de propriétés FGM) font partie de ces matériaux. Les matériaux FG ont été largement utilisés dans plusieurs domaines, avec un accent sur les applications d'ingénierie thermique telles que les structures de barrière thermique soumises à de forts gradients thermiques.

En outre, les structures sandwich ont fait l'objet d'une plus grande attention et sont aujourd'hui largement utilisées dans divers types d'ingénierie critique tels que l'aérospatiale, le génie civil, la mécanique et la marine. Cela est dû à ses excellents avantages par rapport à la structure solide monolithique. Généralement, les structures sandwich traditionnelles sont composées de trois couches avec deux feuilles de face collées à l'âme. L'exposition de ces structures à un champ à haute température provoque une délamination et des contraintes résiduelles. L'apparition des matériaux FGM, qui sont des matériaux présentant une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre, a permis de surmonter ces inconvénients.

L'étude des plaques fonctionnellement graduées a commencé par l'analyse des plaques minces à l'aide de la théorie des plaques classiques (CPT). En utilisant cette théorie, Zenkour(2005) et Zenkour et Alghamdi(2010) ont analysé le comportement de flexion des plaques sandwich FG. La CPT peut être appliquée avec succès pour analyser les problèmes de plaques minces, mais dans le cas où l'effet de la déformation par cisaillement ne peut être négligé, différentes stratégies sont nécessaires pour analyser des configurations de plaques plus générales (Vescovini et al. 2010).

Zhao et al. (2009) ont étudié le comportement au flambement des plaques FG sous charges mécanique et thermique en utilisant une formulation basée sur la théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT). Comme la FSDT viole les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser l'erreur due à une hypothèse de déformation de cisaillement constante dans l'épaisseur (Huu-Tai et Dong-Ho 2011). Par conséquent, la FSDT est limitée par le facteur de correction de cisaillement qui est difficile à estimer pour les matériaux composites. Pour surmonter cet handicap, différentes théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été développées et proposées par les chercheurs.

La théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT) ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et satisfait à des contraintes de cisaillement transversales nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque a suscité un intérêt de

recherche considérable (Baferani et al. 2011, Akbarzadeh et al. 2011, Shariat et Eslami 2007, Bodaghi et Saidi 2010, Thai HT et Kim 2013).

En utilisant la théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième ordre TSDPT, Cong et al. (2017) ont étudié la réponse dynamique non linéaire des plaques FG rigidifiées dans un milieu thermique soumises à des charges mécaniques et thermiques en tenant compte des propriétés des matériaux dépendantes de la température. De plus, Duc et al. (2016) ont étudié la stabilité thermique des plaques FG rigidifiées de manière excentrique en utilisant la même théorie. Bachir Bouiadjra et al. (2013) ont étudié le comportement non linéaire des plaques FG sous des charges thermiques en utilisant une théorie efficace de déformation par cisaillement sinusoïdal. Abazid et al. (2018) ont présenté une théorie prenant en compte à la fois les effets de cisaillement et de déformation normale pour étudier la flexion statique de différents types de plaques sandwich FG reposant sur des fondations Pasternak en milieu hygrothermique. Bousahla et al. (2016) ont utilisé une théorie des plaques raffinée à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques FG soumises à différentes variations de température dans la direction de l'épaisseur.

Les porosités survenant à l'intérieur de la structure du matériau au cours de la production ont un effet important sur les comportements mécaniques des structures non homogènes. Ait Atmane et al. (2017) ont utilisé une théorie des poutres quasi 3D pour analyser les caractéristiques de flexion, de flambement et de vibration libre des poutres FG poreuses sur des fondations élastiques. En utilisant le HSDT, Cong et al. (2018) ont présenté une étude sur le comportement au flambement et au post-flambement des plaques FG avec des porosités reposant sur des fondations élastiques et soumises à des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques. Gupta et Talha (2018) ont étudié la réponse en flexion et aux vibrations des plaques FG poreuses avec une théorie de déformation normale et de cisaillement d'ordre supérieur non polynomial.

Les travaux de recherche mentionnés portent sur le comportement à la flexion, aux vibrations et au flambage d'une plaque soumise à une charge thermique et/ou mécanique. Selon la littérature et à notre connaissance, les études réalisées sur la plaque sandwich FG sur fondation élastique soumise à des sollicitations thermodynamiques sont très limitées. Nous ne trouvons que les travaux de Sobhy et Zenkour (2015) qui traitent ce problème mais en utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé à cinq variables, où la plaque sandwich était considérée comme simplement supportée et reposant sur la fondation élastique Pasternak.

En outre, on trouve peu de travaux qui traitent la température critique de flambement thermique des plaques FG poreuses avec les théories d'ordre supérieure en prenant compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur.

A cet effet, nous nous intéressons dans ce travail à l'étude de comportement thermodynamique des plaques sandwich reposant sur des fondations élastiques de types Winkler/Pasternak/Kerr sous diverses conditions d'appuis. De plus, nous allons étudier le flambement thermique des plaques avec différents modèles de porosités en utilisant une théorie raffinée d'ordre supérieure en tenant compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur avec seulement quatre variables.

Afin de bien structurer le présent travail, la présente thèse a été organisée comme suit :

Tout d'abord on présente dans le premier chapitre un aperçu général sur les matériaux fonctionnellement gradués en représentant leurs avantages par rapport les matériaux composites classiques. L'évaluation des propriétés matérielles suivant les différentes lois de mélange, les modèles micromécaniques, l'effet de la température et la présence de la porosité ont été également discutés.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des différents champs agissant sur les plaques d'une manière générale. Les champs des déplacements ont été présentés suivant les théories des plaques et leurs évolutions dans l'analyse des plaques en matériaux fonctionnellement gradués. Les différentes formes de déformations et de contraintes avec les relations qu'elles liées sont aussi présentés suivants les travaux de la littérature.

Le troisième chapitre représente les comportements statique, dynamique, thermique et thermodynamique des plaques FG. Les différentes fondations élastiques de types Winkler/Pasternak/Kerr ont été aussi décrits.

Le quatrième chapitre consiste en l'étude de la réponse thermodynamique des plaques sandwich FG reposant sur des fondations élastiques de types Winkler / Pasternak / Kerr sous diverses conditions aux limites.

Dans le cinquième chapitre, nous avons étudié l'effet de la porosité sur le flambement thermique des plaques FG sur des fondations élastiques. La théorie prend en compte l'effet d'étirement dû à sa nature quasi tridimensionnelle. Les charges thermiques sont supposées uniformes, linéaire et non linéaire dans la direction de l'épaisseur.

Pour vérifier la validité des théories utilisées dans l'analyse thermodynamique des plaques sandwich FG et le flambement thermiques quasi-3D des plaques poreuses FG, le sixième chapitre représente des comparaisons des résultats obtenus aux données disponibles dans la littérature. Des études paramétriques sont réalisées pour montrer les effets des différents facteurs sur les comportements étudiés.

On achève ce travail par une conclusion générale qui résume les résultats obtenus lors la préparation de cette thèse. Des perspectives et recommandations pour des travaux futurs ont été présentées.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUÉS

I.1. Matériaux composites ordinaires

Un matériau composite peut se définir comme étant l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

Dans un matériau composite ordinaire, il existe une interface distincte entre les matériaux ce qui résulte un changement soudain de propriétés à l'interface (figure I.1). La constitution anisotrope des structures composites stratifiées est souvent entraînée des concentrations de contraintes entre les matériaux et les discontinuités géométriques ce qui conduit à des dommages, de fissurations et de séparation des liaisons adhésives (figure I.2). La présence de l'interface entre deux matériaux implique la variation de la distribution de propriétés telles que le coefficient de dilatation thermique, la conductivité thermique et la résistance thermique (figure I.4). La différence entre les coefficients de dilatation thermique à l'interface provoque une contrainte thermique interne à des températures élevées, conduisant parfois à la destruction des interfaces.

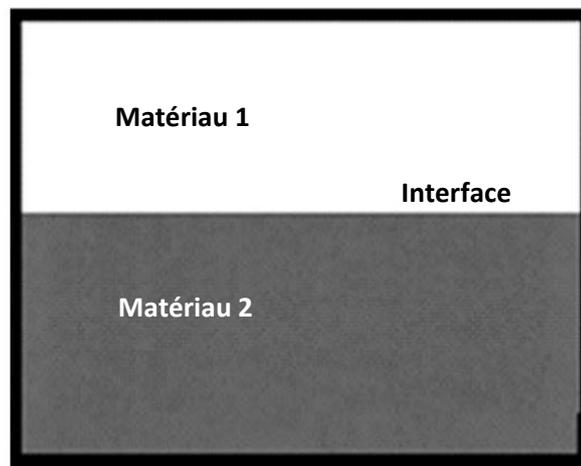


Figure I.1 : Matériau composite ordinaire

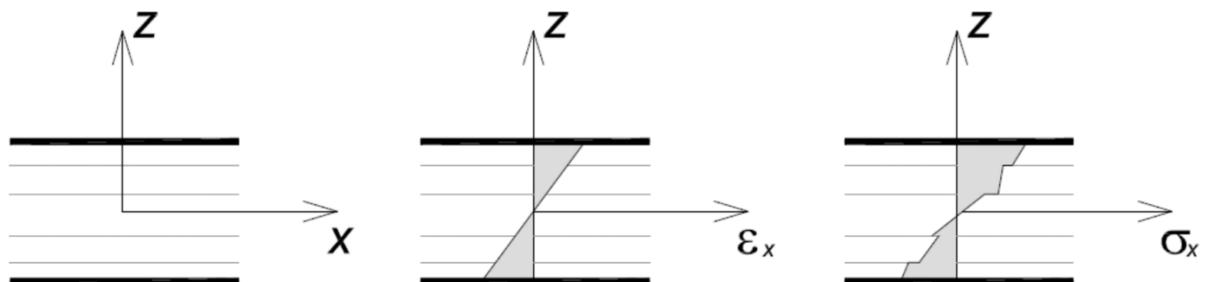
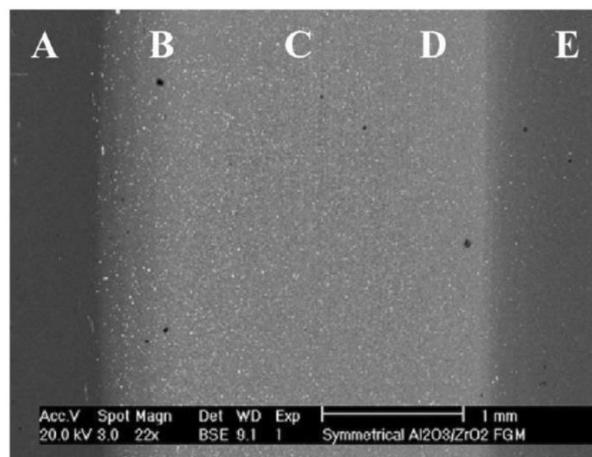


Figure I.2 : Variation des déformations et contraintes suivant l'épaisseur dans un matériau stratifié (Elishakoff, 2016)

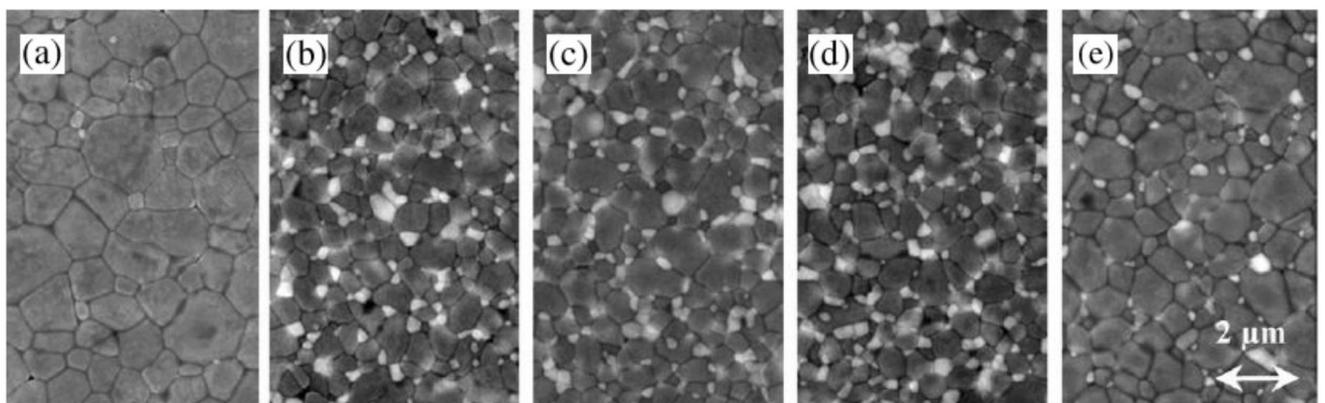
I.2. Matériaux composites avancés fonctionnellement gradués FGM

Un matériau avancé peut être défini comme tout nouveau matériau ou matériau significativement amélioré qui permet d'obtenir un avantage marqué du point de vue de la performance physique ou fonctionnelle, comparativement aux matériaux conventionnels couramment utilisés et auxquels ils se substituent.

Le matériau fonctionnellement gradué (FGM) est un matériau composite avancé avec l'interface, qui existe dans les matériaux composites traditionnellement, remplacé par un changement progressif de la propriété (figure I.3). L'idée des matériaux fonctionnellement gradués (appelés aussi matériaux à gradient de propriété) a été lancée au début des années 80 au Japon, où ce concept matériel a été proposé pour la première fois. Le concept de ce type de matériau composite a été proposé, afin de réduire les contraintes thermiques dans les matériaux composites stratifiés conventionnels développés pour les moteurs-fusées réutilisables (Mahmood et Akinlabi, 2017). Comme le montre la figure I.4, un FGM réduit la contrainte thermique de près de 30% et peut empêcher la destruction de l'interface (Shinohara, 2013).



(a)



(b)

Figure I.3 : Matériaux FGM, a- vue microscopique b- Microstructure (Elishakoff, 2016)

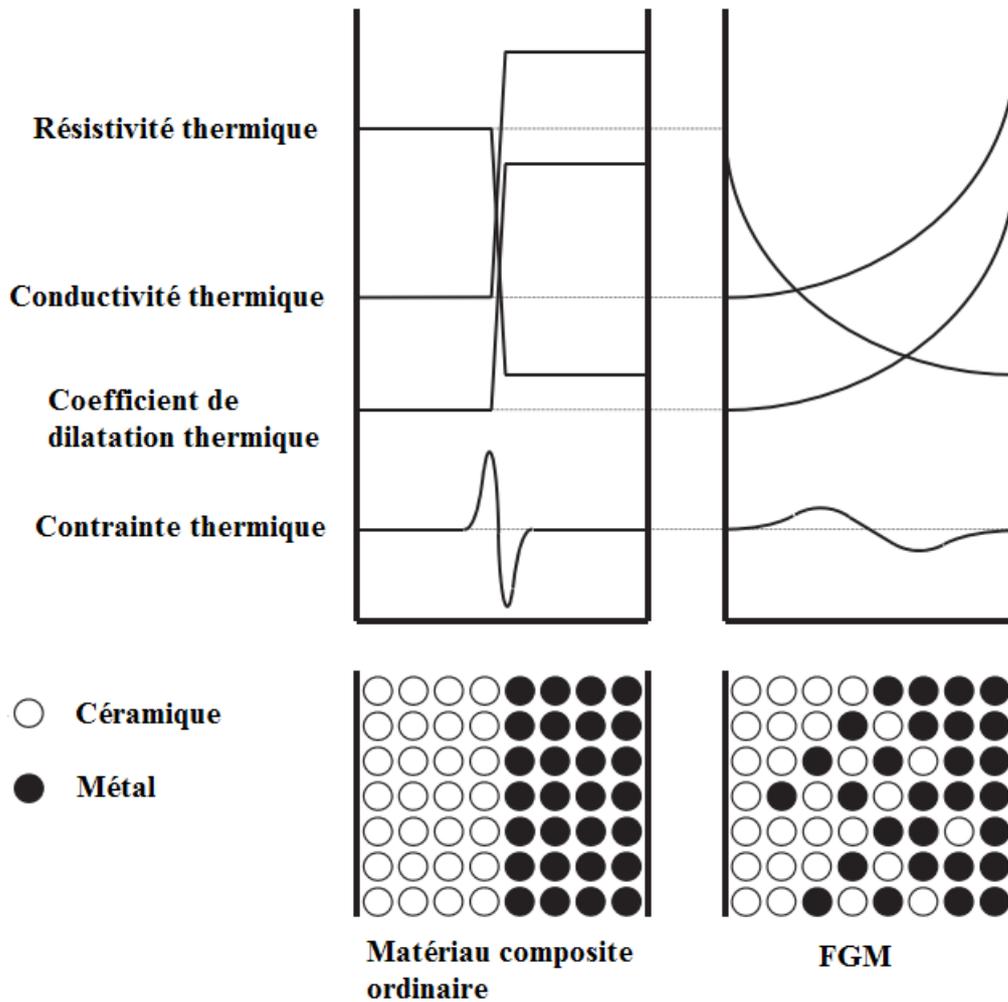


Figure I.4 : Structures et propriétés des matériaux composites ordinaires et FGM (Shinohara, 2013).

I.3. Evaluation des propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués

I.3.1. Distribution des fractions volumiques

Généralement, les matériaux FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux aux propriétés différentes (le plus souvent le métal et la céramique). On peut déterminer les propriétés matérielles sur la base de la distribution des fractions volumiques de différents matériaux. Étant donné que la fraction volumique de chaque phase varie progressivement dans le sens de la gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Dans la littérature, il y a trois fonctions courantes pour décrire les fractions de volume (loi de puissance, loi exponentielle et loi sigmoïde).

I.3.1.1. Loi exponentielle E-FGMs

Selon la loi exponentielle, les paramètres matériels de FGM peuvent être donnés à travers l'épaisseur comme suite (Chi et Chung 2006) :

$$P(z) = A e^{B(z+h/2)} \quad (I.1)$$

Avec

$$A = P_1 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (I.2)$$

P_1 et P_2 sont les propriétés des surfaces inférieure et supérieure respectivement.

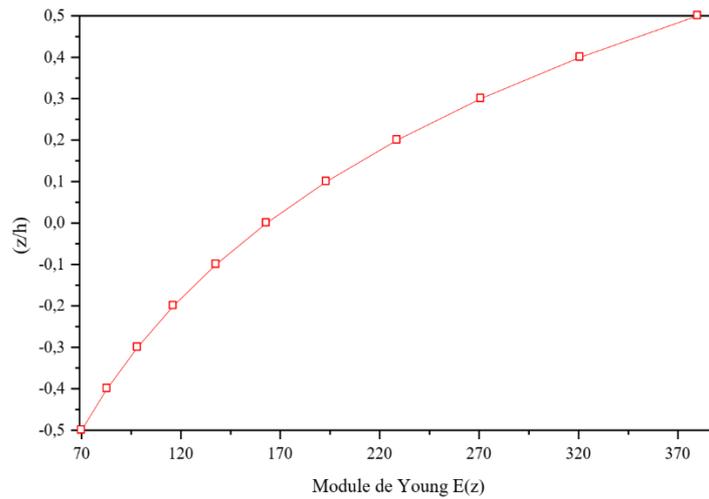


Figure I.5 : Variation du module d'Young suivant la loi exponentielle

I.3.1.2. Loi de puissance P-FGMs

La fraction volumique du P-FGM obéit à une fonction de loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.3)$$

Où p est le paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ définie, les propriétés matérielles d'un P-FGM peuvent être déterminées par la règle du mélange (Bao et Wang 1995, Chi et Chung 2006) :

$$P(z) = P_1 + V(z)(P_2 - P_1) \quad (I.4)$$

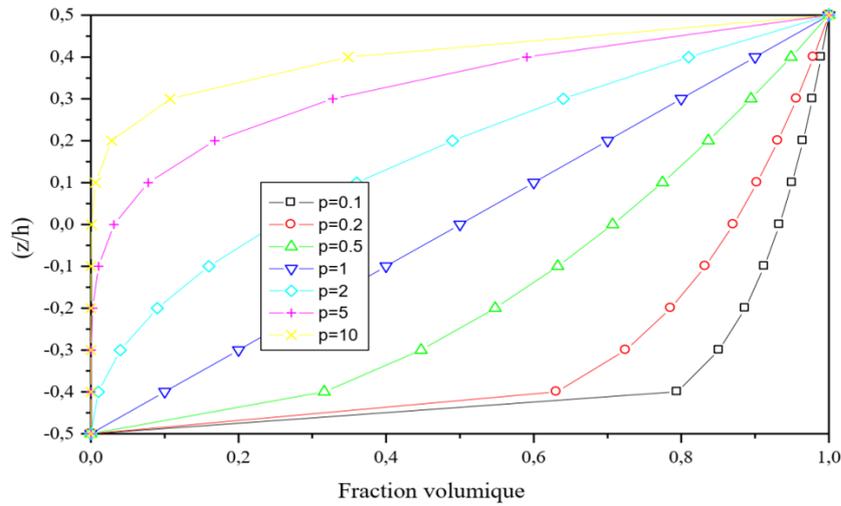


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique suivant la loi de puissance

I.3.1.3. Loi sigmoïde S-FGM

Afin de réduire l'effet de la concentration des contraintes, Chung et Chi(2001) ont introduit un nouveau type de loi appelé loi sigmoïde. La loi sigmoïde est utilisée la combinaison de deux fonctions de loi de puissance différentes pour décrire la fraction volumique des matériaux constitutifs. Ces deux fonctions de loi de puissance sont les suivantes (Chi et Chung, 2006) :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.5)$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

En utilisant la règle de mélange, le module de Young du S-FGM peut être calculé par :

$$P(z) = V_1(z)(P_2 - P_1) + P_1 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.6)$$

$$P(z) = V_2(z)(P_2 - P_1) + P_1 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

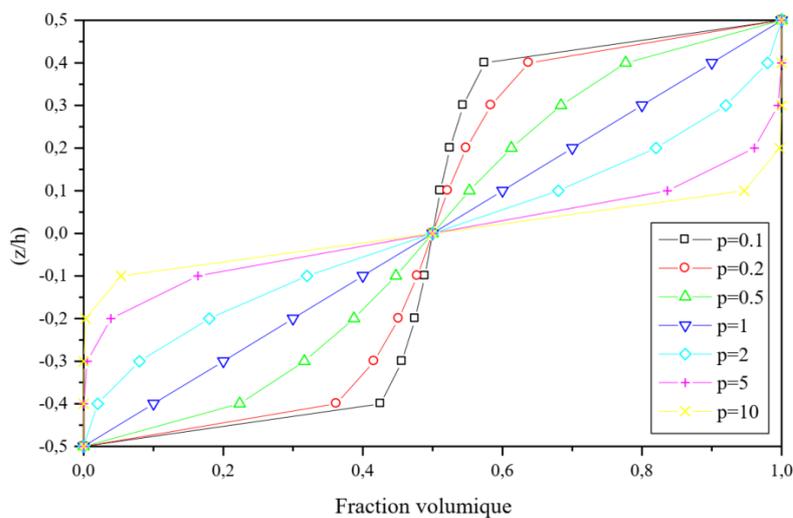


Figure I.7 : Variation de la fraction volumique suivant la loi sigmoïde

I.3.2. Modèles micromécaniques des FGM

Plusieurs modèles micromécaniques des FGM ont été rapportés par Gasik(1994,1998), Zuiker(1995), Reiter et Dvorak (1997, 1998), Yin et al. (2004), Bachir Bouiadjra et al. (2018), Mahmoudi et al. (2018). Ces modèles micromécaniques sont examinés pour obtenir les propriétés matérielles effectives des FGM avec les différentes distributions de la fraction volumique dans l'épaisseur de la plaque. Bachir Bouiadjra et al. (2018), Mahmoudi et al. (2018) ont étudié la réponse des plaques FG en utilisant cinq modèles micromécaniques (Voigt, Reuss, LRVE, Tamura et Mori-Tanaka). Les expressions mathématiques des modèles micromécaniques sont comme suite :

- **Modèle de Voigt**

$$E(z) = E_c V(z) + E_m (1 - V(z)) \quad (\text{I.7})$$

- **Modèle de Reuss**

$$E(z) = \frac{E_c E_m}{E_m V(z) + E_c (1 - V(z))} \quad (\text{I.8})$$

- **Modèle de Tamura**

$$E(z) = \frac{(1 - V(z))(q - E_c) E_m + V(z)(q - E_m) E_c}{(1 - V(z))(q - E_c) + V(z)(q - E_m) E_c} \quad (\text{I.9})$$

Le paramètre q représente le transfert de contrainte/déformation suivant l'expression suivante

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (\text{I.10})$$

Si les éléments constitutifs se déforment de manière identique dans la direction de chargement, le paramètre q tend vers l'infini (q=∞). Dans ce cas, le modèle de Tamura se réduit à l'estimation de Voigt. Tandis que, si les éléments constitutifs subissent le même niveau de contrainte (q= 0), on aura le modèle de Reuss.

- **Modèle par représentation local des éléments de volume (LRVE)**

$$E(z) = E_m \left(1 + \frac{V(z)}{FE - \sqrt[3]{V(z)}} \right); \quad FE = \frac{1}{1 - E_m/E_c} \quad (\text{I.11})$$

- **Modèle de Mori-Tanaka**

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{V(z)}{1 + (1 - V(z))(E_c/E_m - 1)(1 + \nu)/(3 - 3\nu)} \right) \quad (\text{I.12})$$

Bachir Bouiadjra et al. (2018), Mahmoudi et al. (2018) ont noté que quel que soit le modèle micromécanique utilisé la densité de masse effective ρ est obtenue par la règle de mélange suivante :

$$(\text{I.13})$$

$$\rho(z) = \rho_c V(z) + \rho_m (1 - V(z))$$

Les estimations du module de Young d'un matériau fonctionnellement gradué, en utilisant les différents modèles micromécaniques sont représentées en fonction de la fraction volumique des constituants sur la Figure I.8. On peut remarquer que les approximations de Voigt et de Reuss représentent les bornes supérieure et inférieure pour l'estimation du module de Young.

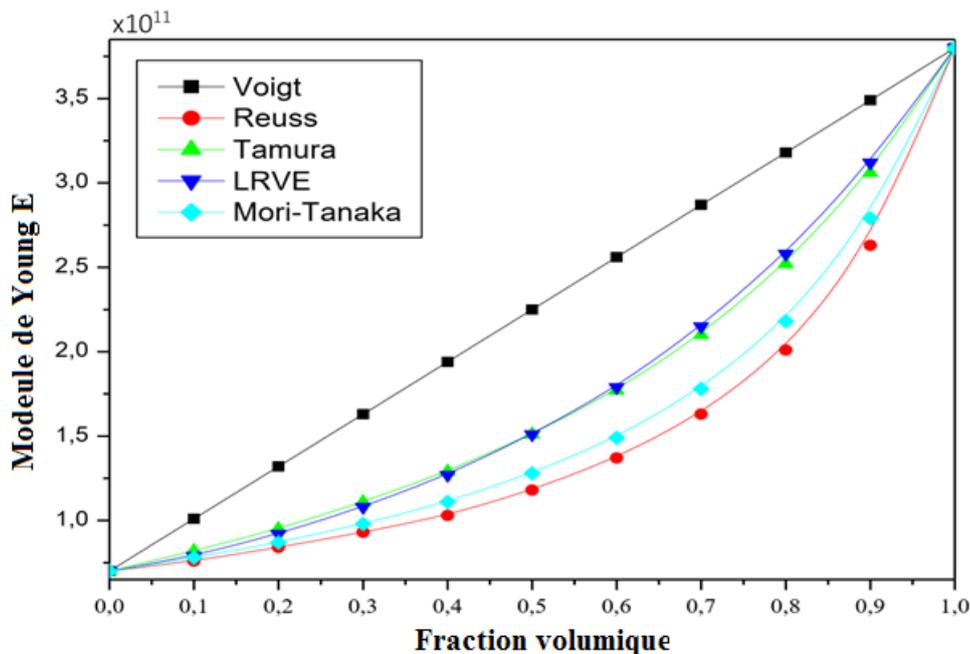


Figure I.8 : Variation du module de Young avec différents modèles micromécaniques. (Mahmoudi 2018)

I.3.3. Propriétés dépendantes de la température

Les structures en FGM sont les plus couramment utilisées dans un environnement à haute température. Celle-ci provoque des changements importants dans les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs. Il est essentiel de prendre en compte cette dépendance à la température pour une prédiction précise de la réponse mécanique. Les différentes propriétés matérielles tels que le module de Young, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilatation thermique sont supposés dépendre de la température et peuvent être exprimés en fonction non linéaire de la température. Wang et Shen (2013), Sobhy (2015), Attia et al. (2018) ont utilisé la fonction suivante :

$$P = P_0 \left(\frac{P_{-1}}{T} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (I.14)$$

Où

T : champ de la température

P_0, P_{-1}, P_1, P_2 et P_3 : les coefficients de propriétés des matériaux dépendant de la température.

Reddy et Chen (1998) ont représenté plusieurs matériaux dont leurs propriétés varient en fonction de la valeur de la température. On représente les propriétés des deux matériaux largement utilisés dans les FGM (céramique et métal) suivant la température. Les coefficients dépendant de la température du module de Young E , de la dilatation thermique α et de la conductivité thermique K sont rapportés par Sobhy (2015) comme le montre le tableau I.1. Selon Wang et Shen (2013), la densité est peu affectée par le changement de la température et est supposée être fonction de z uniquement.

Tableau I.1 : Coefficients dépendants de la température pour la céramique et le métal (Sobhy, 2015)

Matériau	P	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Céramique	E (Gpa)	244.27	0	-1.371×10^{-12}	1.214×10^{-15}	-3.681×10^{-19}
	α ($10^{-6}/K$)	12.766	0	-1.491×10^3	10.06	-6.778×10^{-5}
	K (W/mK)	1.7	0	0	0	0
Métal	E (Gpa)	122.56	0	-4.586×10^{-13}	0	0
	α ($10^{-6}/K$)	7.5788	0	-6.638×10^2	-3.147	0
	K (W/mK)	1	0	0	0	0

I.3.4. Propriétés des FGM avec porosité

En raison de la production des porosités dans la microstructure FGM pendant la fabrication, il est nécessaire de prendre en compte l'effet de cette imperfection matérielle sur le comportement des structures. A cet effet, la présence des pores fait l'objet de plusieurs développements récents pour répondre aux performances structurelles souhaitées en adaptant la densité locale de la structure.

Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) ont analysé la vibration linéaires et non linéaires des poutres élastiques poreuses FG. Chen et al. (2015) ont analysé le flambement élastique et la flexion statique des poutres poreuses FG selon la théorie de Timoshenko. Le module d'élasticité et la densité des composites poreux sont supposés être gradués suivant l'épaisseur selon deux modèles différents de distribution (figure I.9). Il a été conclu que l'augmentation du coefficient de porosité conduit à la diminution des charges critiques de flambement, l'augmentation de la déflexion maximale, la réduction de la fréquence et la distribution de contrainte normale à travers l'épaisseur sera non linéaire.

Gupta et Talha (2017) ont traité la réponse en flexion et aux vibrations des plaques poreuses FG avec théorie de cisaillement d'ordre supérieur non polynomial. Les propriétés effectives des matériaux en chaque point sont déterminées par deux modèles micromécaniques (Voigt et Mori-Tanaka). Ils ont conclu que la présence de la porosité dans une plaque FG conduit à augmenter la déflexion dans toutes les conditions aux limites considérées. En outre, la fréquence augmente à mesure que la fraction volumique de porosité augmente.

Shahsavari et al. (2018) ont présenté une théorie hyperbolique quasi-3D dans l'analyse des vibrations libres de plaques poreuses FG reposant sur des fondations élastiques en considérant trois modèles différents de distributions de porosité (figure I.10). D'après cette étude, les porosités avec leurs modèles de distributions dans le matériau FG ont un effet de rigidité / ramollissement de la fréquence de vibration des plaques FG. La fraction volumique des porosités joue un rôle dominant sur la fréquence de vibration des plaques FG. Dans le cas d'une fondation élastique à faible rigidité, la plaque poreuse FG avec le modèle régulier de distribution présente des faibles fréquences naturelles. Par contre, la fréquence sera forte dans le cas d'une fondation élastiques à forte rigidité.

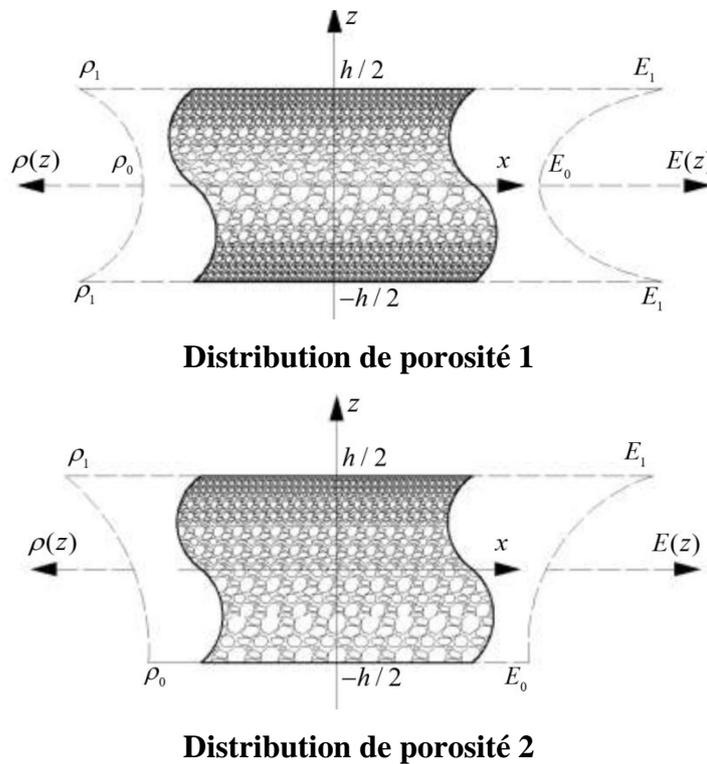


Figure I.9 : Modèles de distribution de la porosité dans une poutre FG (Chen et al. 2015)

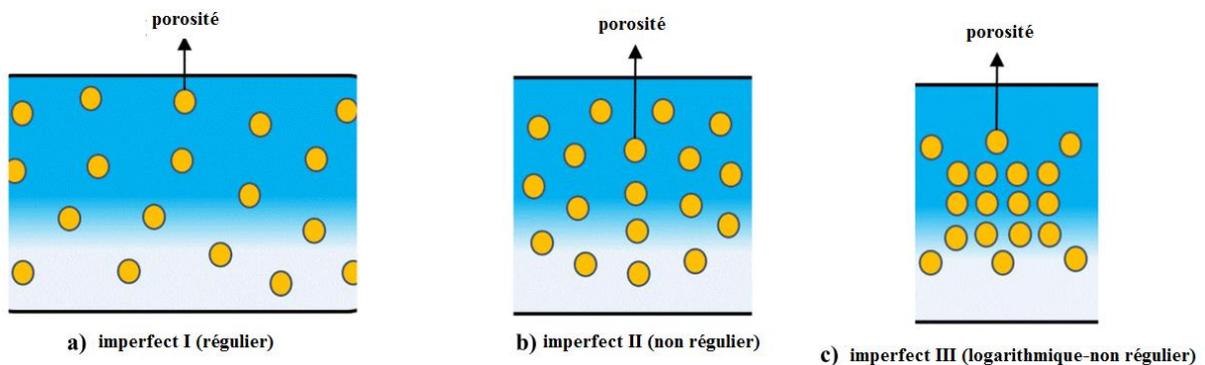


Figure I.10 : Modèle de porosité d'une plaque poreuse FG (Shahsavari et al. 2018)

Il est bien clair que la porosité à l'intérieur des matériaux FG a un effet important et parfois inverse selon le modèle de distribution des pores et la rigidité de la fondation élastique. Le module d'élasticité d'un matériau poreux FG peut s'évaluer par les expressions suivantes :

- Distribution régulière et linéaire de porosité (Mouaici et al. (2016), Wattanasakulpong and Chaikittiratana (2015), Shahsavari et al. (2018))

$$E(z) = (E_c - E_m) V(z) + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \quad (\text{I.15})$$

Distribution non régulière de porosité (Wattanasakulpong and Chaikittiratana (2015), Shahsavari et al. (2018))=

$$E(z) = (E_c - E_m) V(z) + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{I.16})$$

Distribution logarithmique-non-régulier de porosité (Gupta and Talha (2018), Shahsavari et al. (2018))

$$E(z) = (E_c - E_m) V(z) - \log\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)(E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) + E_m \quad (\text{I.17})$$

Où : α Représente la fraction volumique de porosité.

On peut schématiser graphiquement les différents modèles de la porosité. Les figures I.11 et I.12 montrent la variation du module de l'élasticité et le coefficient de la dilatation thermique suivant l'épaisseur avec les différentes distributions de la porosité. Celles-ci ont été utilisées dans l'analyse du flambement thermique des plaque FG reposant sur la fondation élastique Winkler/Pasternak avec une théorie de déformation quasi-3D (Mekerbi et al. 2019). Les résultats sont détaillés dans le chapitre V.

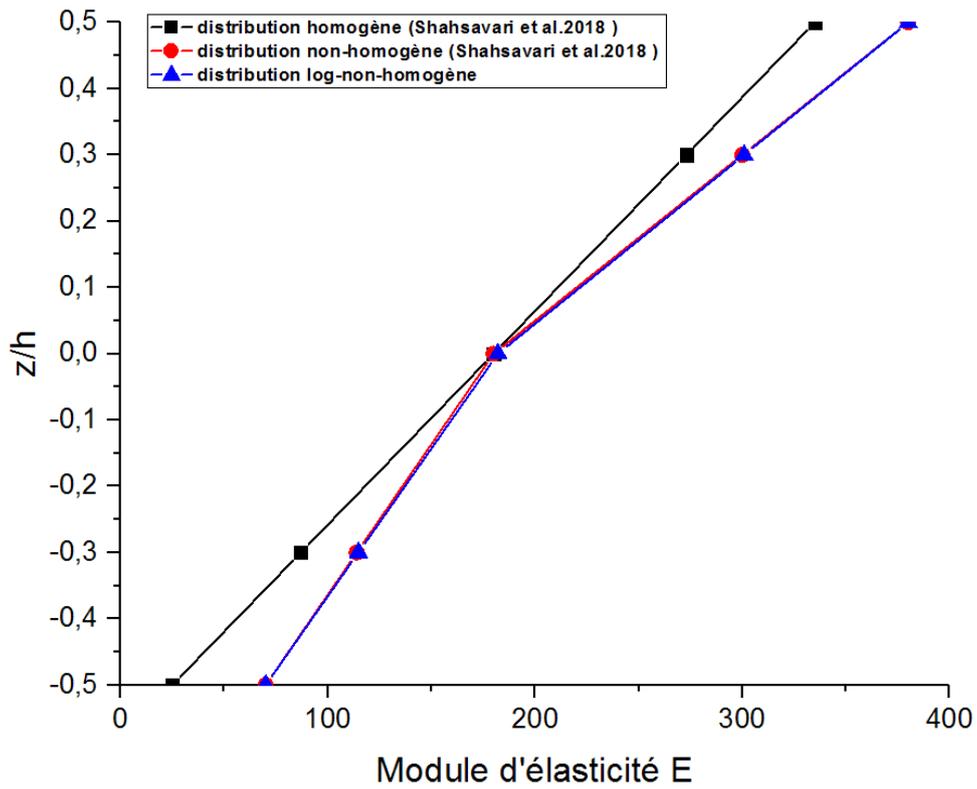


Figure I.11 : Variation du module d'élasticité avec les distributions de la porosité ($p=1$)

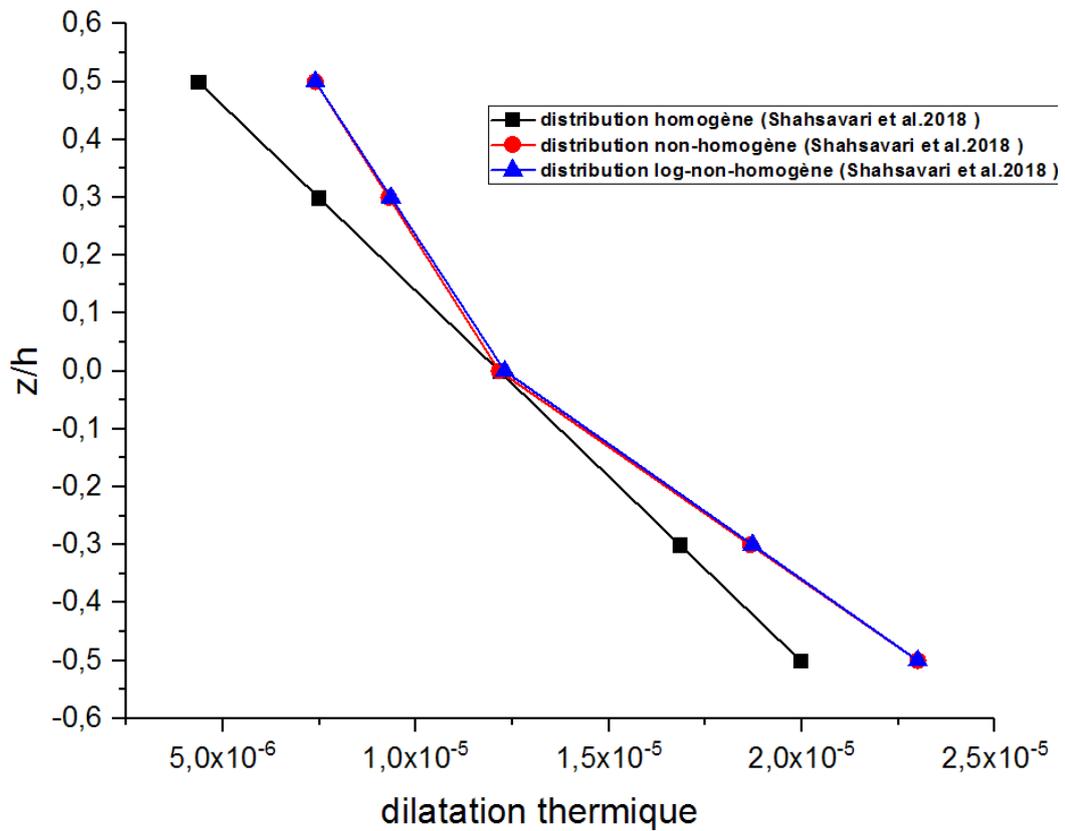


Figure I.12 : Variation du coefficient de la dilatation thermique avec les distributions de la porosité ($p=1$)

CHAPITRE II

ETAT DE CONTRAINTES ET

DÉFORMATIONS

DES PLAQUES EN FGM

II.1. Généralités

Selon Ventsel (2013), Les plaques minces sont initialement des éléments structurels plats délimités par deux plans parallèles, appelés faces, et une surface cylindrique, appelée bord ou limite. Les générateurs de la surface cylindrique sont perpendiculaires aux faces planes. La distance entre les faces planes s'appelle l'épaisseur h de la plaque. L'épaisseur de la plaque est faible par rapport aux autres dimensions caractérisant les faces (longueur, largeur, diamètre, etc.). Géométriquement, les plaques sont délimitées par des limites droites ou courbes. Les charges statiques ou dynamiques portées par les plaques sont principalement perpendiculaires aux faces des plaques. On peut aussi citer la définition simple de Reddy (2007) qui a considéré une plaque comme un élément structurel avec des dimensions de forme plane qui sont grandes par rapport à son épaisseur. La plaque est soumise à des charges qui provoquent une déformation en flexion en plus de l'étirement.

La réponse des plaques sous différentes sollicitations permet de définir trois champs : déplacements, déformations et contraintes. Les différentes théories des plaques proposent des champs des déplacements selon des hypothèses adoptées. On peut définir les déformations à partir des déplacements qui sont liés entre eux par des formes linéaires et non linéaires. Les contraintes peuvent être aussi déterminées à partir des déformations suivant des lois de comportement se basant sur des modèles bidimensionnelle et tridimensionnelle. Dans ce qui suit, nous allons présenter les champs des déplacements proposés par les différentes théories des plaques. Les dérivations des déformations linéaires et non linéaires sont aussi rapportées. De plus, les champs des contraintes et leurs relations avec les déformations sont discutés.

II.2. Champ des déplacements dans une plaque

II.2.1. Théorie classique des plaques (CPT)

Selon Reddy (2007), la théorie des plaques de Kirchhoff ou théorie des plaques classique (CPT) est une extension de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses fondamentales de la théorie linéaire, élastique et à faible déflexion pour la flexion des plaques minces sont énoncées par Ventsel et al (2001) comme suit :

1. Le matériau de la plaque est élastique, homogène et isotrope.
2. La plaque est initialement plate.
3. La déflexion du plan médian est petite par rapport à l'épaisseur de la plaque. La pente de la surface déviée est donc très faible et le carré de la pente est une quantité négligeable par rapport à l'unité.

4. Les sections droites, normales au plan médian avant la flexion, restent droites et normales à la surface médiane pendant la déformation, et la longueur de ces éléments n'est pas modifiée. En conséquence, on peut négliger le cisaillement.
5. La contrainte normale σ_z au plan médian est faible par rapport aux autres composantes de la contrainte et peut être négligée dans les relations contrainte-déformation.
6. Étant donné que les déplacements d'une plaque sont faibles, on suppose que la surface médiane reste non sollicitée après la flexion.

Beaucoup de ces hypothèses, connues sous le nom d'hypothèses de Kirchhoff, sont analogues à celles associées à la simple théorie de la flexion des poutres. Ces hypothèses entraînent la réduction d'un problème de plaque de trois dimensions à un problème de deux dimensions.

Pour formuler le problème de la flexion d'une plaque mince (figure II.1), on considère une partie d'une plaque d'épaisseur h dans laquelle le plan de coordonnées (x, y) , correspond au plan médian ou à la surface médiane, est non déformé. La face supérieure de la plaque est soumise à une distribution de charge normale $q(x, y)$ tandis qu'au bord, une distribution de force de cisaillement Q et une distribution de moment de flexion M .

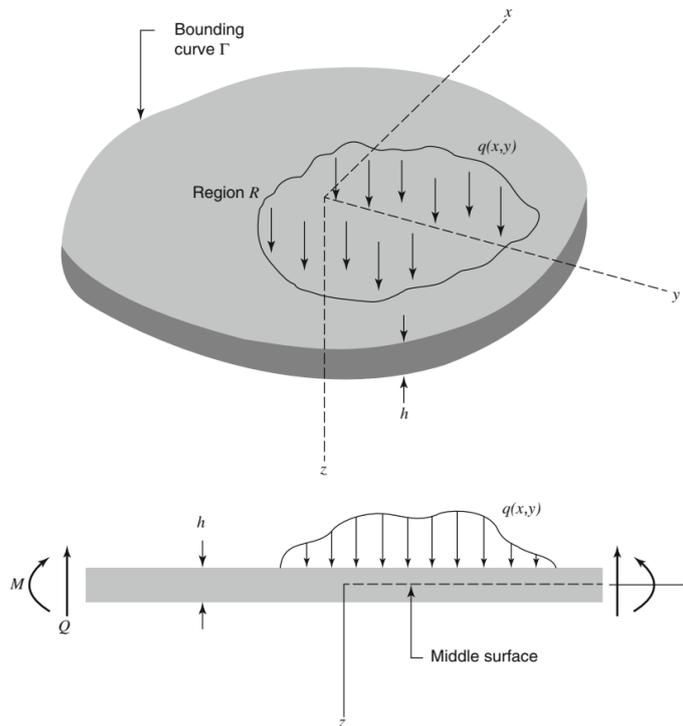


Figure II.1: Partie d'une plaque (Clive et al. 2013)

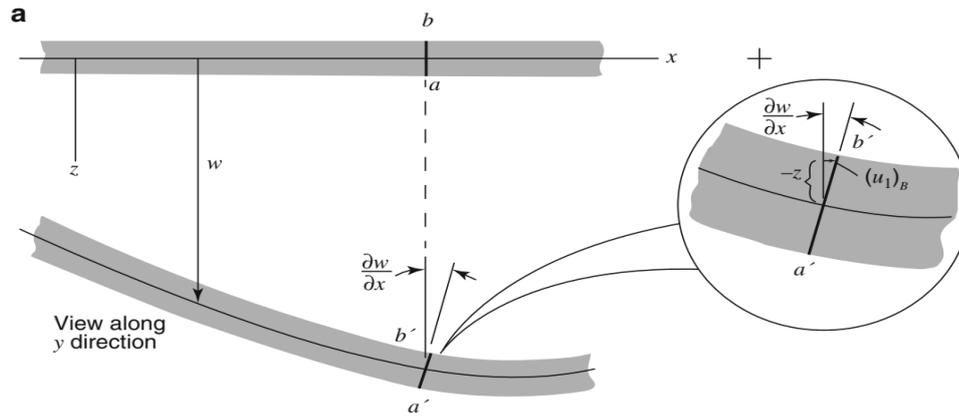


Figure II.2: Déformée de la ligne normale (Clive et al., 2013)

D'après Clive et al. (2013) et vue à la faible épaisseur de plaque, On peut supposer que le déplacement vertical u_3 d'un point quelconque de coordonnées (x_1, x_2, x_3) est identique à celui situé au plan moyen de la plaque.

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x, y) \quad (\text{II.1})$$

Où w est le déplacement vertical de la surface médiane.

Le déplacement vertical parallèle du plan moyen se produit sous l'effet de l'étirement (Stretching effect) et de la flexion (Bending) dues aux chargements sur les bords de la plaque. Les déplacements en plan correspondent au l'effet d'étirement notés par $(u_1)_s$ et $(u_2)_s$ donnés comme ce suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}_s &= [u(x, y)]_s \\ &= [v(x, y)]_s \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Sous l'effet de la flexion, la section plane perpendiculaire au plan moyen de la plaque (la ligne ab dans la figure II.2) se déplace verticalement et se tourne comme un élément rigide pour prendre la forme $(a'b')$. Les déplacements en plan correspondent au l'effet de la flexion notés par $(u_1)_b$ et $(u_2)_b$ donnés comme ce suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}_b &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

En conclusion, le champ de déplacement qui représente les déplacements d'un point peut s'écrire comme suit (Clive, 2013 et Reddy, 2007) :

$$\begin{aligned}u_1 &= u_s(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\u_2 &= v_s(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\u_3 &= w(x, y)\end{aligned}\tag{II.4}$$

On peut constater que cette théorie est très simple et contient seulement trois inconnus. Cela facilite et accélère le processus de calcul. Cependant, l'effet de la déformation en cisaillement transverse est négligé. A cet effet, les résultats obtenus par cette théorie ne représentent pas le comportement réel des plaques notamment celles épaisses. En revanche, dû à la simplicité et la rapidité de la théorie classique des plaques on peut l'utiliser dans l'analyse des problèmes complexes qui nécessitent un calcul lourd. A titre d'exemple, on cite le travail de Thang et al. (2016). Ces derniers, ont analysé l'effet de l'épaisseur variable sur le flambement et post-flambement des plaques imparfaite. Dans ce cas, la théorie classique rend le problème plus ou moins simple en comparaisant avec d'autres théories avancées. En outre, Thai et Kim (2015) ont cité que la CPT est largement utilisé pour prédire les réponses non linéaires et post-flambement des plaques minces FG. Amiri Rad et al. (2014) ont étudié par les éléments finis le flambement de plaques FG sous des charges de tension uni-axiales et bi-axiales et contenant une fissure en utilisant la théorie classique des plaques (CPT). En utilisant la même théorie, Ma et Wang (2003) ont étudié le comportement de flexion non linéaire axisymétrique et de post-flambage thermique d'une plaque circulaire à gradation fonctionnelle avec des conditions aux limites simples et encastées. La plaque a été soumise à des charges mécaniques, thermiques et combinés thermo-mécanique.

Tous les effets de la température, des imperfections géométriques initiales et de la non-linéarité géométrique peuvent être facilement inclus dans le modèle CPT car il est le plus simple parmi les modèles connus. Bien que la CPT ignore les effets de cisaillement et de déformation normale, elle peut fournir des prédictions pour les plaques minces où les effets du cisaillement et des déformations normales sont insignifiants.

II.2.1. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Nous avons discuté dans la section précédente la théorie classique des plaques. Celle-ci est élaborée premièrement pour analyser les plaques minces où les déformations transversales sont négligées. Le domaine de la construction impose dans plusieurs cas l'utilisation des plaques plus ou moins épaisses. L'analyse des plaques épaisses conduit à mettre des règles basées sur des hypothèses non compatibles avec ceux de la théorie classique.

Selon Reissner (1945), deux hypothèses ont été émises pour la théorie des plaques épaisses. Il a adopté que la variation de déplacement le long de l'épaisseur de la plaque est linéaire. En outre, il a supposé que la ligne verticale à l'axe neutre de la plaque changerait pendant la flexion de la plaque (Shwetha et al. 2018).

Huang (1989) a noté que Reissner a proposé que les rotations des lignes perpendiculaires à la surface moyenne de la plaque dans les plans xz et yz peuvent être introduites comme variables indépendantes dans la théorie de la plaque. Mindlin (1951) a simplifié l'hypothèse de Reissner selon laquelle les normales à la surface médiane de la plaque avant déformation restent droites mais pas nécessairement normales à la plaque après la déformation (figure II.3).

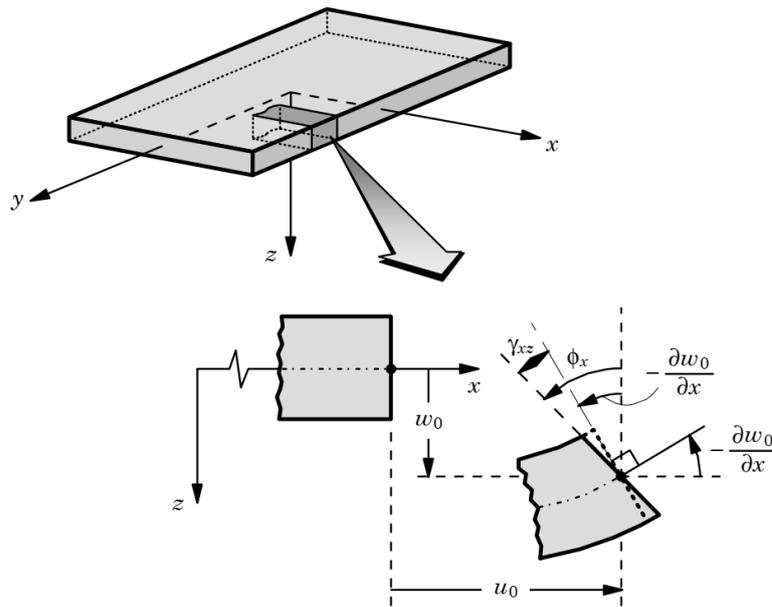


Figure II.3: hypothèses de la section transversale de la théorie de Mindlin-Reissner (Reddy 2007)

Selon les hypothèses de Mindlin-Reissner, Huang (1989), Reddy(2007), Wang et al. (2000) ont écrit le champ de déplacement comme ce suit :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\
 u_2 &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\
 u_3 &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

Comme dans CPT, (u_0, v_0, w_0) désignent les déplacements d'un point sur le plan $z = 0$ et ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale transversale autour des axes y et x , respectivement

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \phi_y = \frac{\partial v}{\partial z}
 \tag{II.6}$$

Il faut noter que les déformations de cisaillement transversales sont représentées comme constantes suivant l'épaisseur et, par conséquence, les contraintes de cisaillement transversales seront aussi constantes. Cela contredit le fait bien connu que les contraintes de cisaillement transversales sont paraboliques à travers l'épaisseur de la plaque (Wang et al. 2000). L'écart entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant prédit par la théorie du premier ordre est souvent corrigé dans le calcul des résultantes de la force de cisaillement transverse (Q_x, Q_y) en multipliant avec un paramètre K_s , appelé *coefficient de correction de cisaillement* (Reddy, 2007, Huu-Tai et Dong-Ho, 2011):

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.7})$$

La théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) a été largement utilisée dans l'analyse des plaques fonctionnellement graduées. En utilisant une formulation basée sur cette théorie, Zhao et al. (2009) ont étudié le comportement au flambement des plaques FG sous charges mécanique et thermique. Aussi, sur la base du FSDT, Saidi et Hasani Baferani (2010) ont présenté une solution analytique pour le flambement thermique des plaques annulaires FG avec des bords radiaux simplement supportés. En utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis, Abolghasemi et al. (2014) ont étudié le flambement des plaques FG avec une découpe elliptique sous des charges combinées thermiques et mécaniques.

Rappelons que la FSDT n'assure pas les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour corriger l'erreur due à une hypothèse de déformation de cisaillement constante dans l'épaisseur. Ce facteur de correction de cisaillement est difficile à estimer pour les matériaux composites. A cet effet, diverses théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été développées et proposées par les chercheurs.

II.2.3. Théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT)

Comme il est noté par Ghugal et Shimpi (2002), les limites des théories CPT et FSDT ont forcé le développement de théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et équivalentes pour éviter l'utilisation de facteurs de correction et pour obtenir la variation réaliste des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque.

D'après Thai et Kim (2015), la TSDT (Third Shear Deformation Theory) développée par Reddy (1984) pour les plaques composites laminées tient compte de l'effet de déformation de cisaillement transverse et satisfait les conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure d'une plaque. Dans ce cas, le facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

La théorie des plaques du troisième ordre est également basée sur les mêmes hypothèses des théories des plaques classiques et du premier ordre, sauf que l'hypothèse sur la rectitude et la normalité de la ligne normale transversale après déformation. Cette ligne est variée avec l'augmentation des déplacements (u, v, w) comme fonction cubique suivant la coordonnée de l'épaisseur (Reddy, 2007). La figure II.4 montre la cinématique de déformation de la normale transversale sur le bord $y = 0$ dans les théories des plaques classiques, de premier ordre et de troisième ordre.

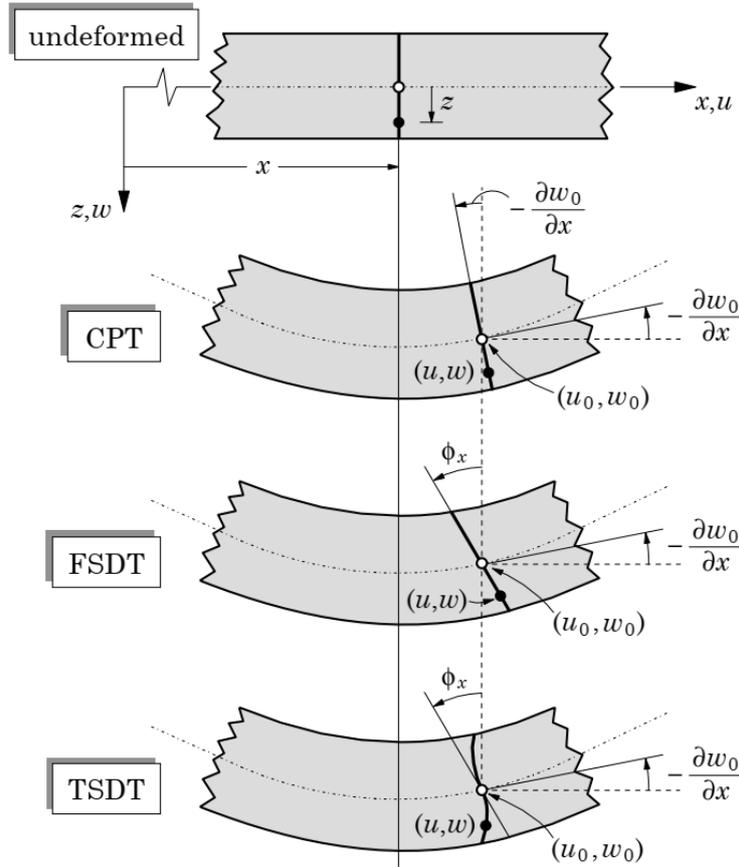


Figure II.4: Déformation de la ligne normale transversale selon les théories CPT, FSDT et TSDT (Reddy, 2007)

Le champ du déplacement selon les hypothèses de la TSDT peut s'écrire comme ce suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.8}$$

ϕ_x et ϕ_y représente la pente de la normale transversale à $z=0$.

$$\phi_x = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \phi_y = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0}
 \tag{II.9}$$

Il est évident que le champ de déplacement dans l'équation (II.8) montre que la ligne droite perpendiculaire au plan médian avant la déformation devienne une courbe cubique après la déformation de la plaque (figure II.5). En outre, ce champ de déplacement satisfait les conditions aux limites des contraintes nulles aux faces inférieure et supérieure de la plaque.

Les avantages de cette théorie (pas de facteur de correction de cisaillement et les conditions aux faces sup et inf sont satisfaites) ont suscité un intérêt de recherche considérable (Baferani et al. 2011, Akbarzadeh et al. 2011, Shariat et Eslami 2007, Bodaghi et Saidi 2010, Thai HT et Kim 2013). En utilisant la théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième ordre de Reddy, Cong et al. (2017) ont étudié la réponse dynamique non linéaire des plaques FGM dans un milieu thermique soumises à des charges mécaniques et thermiques en tenant compte des propriétés des matériaux dépendant de la température. De plus, Duc et al. (2016) ont étudié la stabilité thermique des plaques FGM de rigidité excentrique en utilisant la même théorie.

Pour le but de simplifier la théorie TSDT de Reddy et réduire le nombre des inconnus, Senthilnathan et al. (1987) ont mis les hypothèses suivantes :

- 1- $w = w_b + w_s$, où w est le déplacement transversal du plan médian de la plaque, w_b et w_s sont leur composant dû à la flexion et le cisaillement, respectivement.
- 2- $\phi_x = -\frac{\partial w_b}{\partial x}$ et $\phi_y = -\frac{\partial w_b}{\partial y}$, ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale transversale autour des axes y et x , respectivement

En appliquant ces hypothèses sur le champ de déplacement de Reddy (équation II.8), le nombre des inconnus sera réduit et le nouveau champ s'écrit :

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w &= w_b + w_s \end{aligned} \tag{II.10}$$

On peut écrire ce champ de déplacement sous une forme générale suivante :

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w &= w_b + w_s \end{aligned} \tag{II.11}$$

Où : $f(z)$ représente la distribution des déformations de cisaillement suivant l'épaisseur. Dans la littérature, plusieurs formes ont été attribuées pour cette fonction (tableau II.1).

Ce champ de déplacement est largement utilisé dans l'analyse des plaques FG. Le comportement statique, dynamique et thermique ont été analysé sous diverses conditions avec et sans fondations élastiques. On cite à titre d'exemple les travaux de Benachour et al. (2010), Abdelaziz et al. (2011), Ameer et al. (2011), Douadji et al. (2012), Ait Atmane et al. (2013), Meziane et al. (2014), Zidi et al. (2014), Bouhadra et al. (2015).

En outre, autres hypothèses simplificatrices sont faites à l'HSST conventionnelle de sorte que le nombre d'inconnues est réduit. Un champ de déplacement conventionnel du HSST satisfaisant les conditions de contraintes de cisaillement transversales (et donc de déformations) nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

u_0, v_0, w_0 et ϕ_x sont les cinq déplacements inconnus dans le plan médian de la plaque.

En considérant que $\phi_x = k_1 \int \theta(x, y) dx$ et $\phi_y = k_2 \int \theta(x, y) dy$, Le champ de déplacements mentionnés ci-dessus peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Où u_0, v_0, w_0 et θ sont les quatre déplacements inconnus dans le plan médian de la plaque. Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. Les intégrales utilisées sont indéterminées et doivent être résolues par le type de solution adoptée, et peuvent être exprimées comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Et $k_1 = \lambda^2$, $k_2 = \mu^2$, $A' = -\frac{1}{\lambda^2}$, $B' = -\frac{1}{\mu^2}$,

Où : $\lambda = \frac{m\pi}{a}$, $\mu = \frac{n\pi}{b}$,

En utilisant ce nouveau champ de déplacement contenant des termes d'intégrale indéterminé, Chikh et al. (2017) ont étudié le flambement thermique des plaques stratifiées à couches croisées. Menasria et al. (2017) ont analysé la réponse de flambement thermique d'une plaque sandwich à gradation fonctionnelle (FG). Sekkal et al. (2017) ont utilisé la même théorie pour étudier le flambement et vibration libre de la plaque sandwich FG. Mahmoudi et al. (2018) ont étudié l'influence des modèles micromécaniques sur la vibration libre d'une plaque FG simplement supportée reposant sur une fondation élastique. Bachiri et al. (2018) ont utilisé ce champ de déplacement pour analyser la réponse thermodynamique des plaques FG reposées sur des fondations élastiques.

Tableau II.1: Fonctions de forme de déformation de cisaillement. (Cukanovi'c et al., 2018)

<i>Théorie</i>	<i>Fonction de cisaillement f(z)</i>
<i>CPT(Kirchhoff 1850)</i>	0
<i>FSDT(Mindlin ,1951)</i>	z
<i>Ambartsumian (1958)</i>	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
<i>Reissner(1961)</i>	$\frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
<i>Stein(1986)</i>	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$
<i>Shimpi (2002)</i>	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$
<i>Karama et al. (2003)</i>	$z e^{-2(z/h)^2}$
<i>Akavci (2010)</i>	$z \sec h(z^2 / h^2) - z \sec h(\pi / 4) [1 - (\pi / 2) \tanh(\pi / 4)]$
<i>Akavci (2010)</i>	$(3\pi / 2)h \tanh(z / h) - (3\pi / 2)z \sec h^2(1 / 2)$
<i>Mechab et al. (2014)</i>	$\frac{z \cos(1 / 2)}{-1 + \cos(1 / 2)} - \frac{h \sin(z / h)}{-1 + \cos(1 / 2)}$
<i>Cukanovi'c et al. (2018)</i>	$z \left(\cosh \left(\frac{z}{h} \right) - 1.388 \right)$

II.2.4. Théorie des plaques d'ordre supérieur avec l'effet d'étirement

Afin d'approximer le problème d'élasticité tridimensionnelle à un problème de plaque bidimensionnel, Kant et Manjunath (1988) ont proposé que les composantes de déplacement $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ et $w(x, y, z)$ en tout point dans l'espace de la plaque sont étendus dans une série de Taylor en termes de coordonnées d'épaisseur. La solution d'élasticité indique que la contrainte de cisaillement transverse varie paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque. Cela nécessite l'utilisation d'un champ de déplacement dans lequel les déplacements dans le plan sont étendus en tant que fonctions cubiques de la coordonnée d'épaisseur. De plus, la déformation normale transversale peut varier de façon non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque. Le champ de déplacement qui satisfait aux critères ci-dessus peut être supposé sous la forme:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2u_0^*(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2v_0^*(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\theta_z(x, y) + z^2w_0^*(x, y) + z^3\theta_z^*(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Le champ du déplacement proposé par Kant et Manjunath (1988) contient douze variables. L'analyse de tel problème avec ce nombre énorme d'inconnus est longue et complexe.

Bachir Bouiadjra et al. (2018) ont rapporté que l'une des hypothèses clés du FSDT et du HSDT est que le déplacement transversal à travers l'épaisseur de la plaque est constant. Cela conduit à négliger l'étirement de l'épaisseur. Cependant, cette hypothèse est inadéquate pour les plaques FGM épaisses. Pour remédier à ce problème et afin de prendre en compte les effets des déformations dues à l'étirement, des théories appelées quasi-3D sont apparues. Ces théories sont des HSDT dans lesquelles le déplacement transversal est exprimé comme une variation d'ordre élevé à travers l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, l'effet d'étirement de l'épaisseur est capturé (Huu-Tai et al. 2014).

Sur la base de la formulation généralisée de Mantari et Soares (2012), un champ de déplacement avec variation hyperbolique de toutes les composantes de déplacements a été présenté par Huu-Tai et al. (2013). Le champ de déplacement avec six inconnus s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + f'(z)\phi_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

En divisant le déplacement transversal w en deux composantes de flexion et cisaillement (c'est-à-dire $w = w_b + w_s$) et en faisant d'autres hypothèses données par $\phi_x = \partial w_s / \partial x$ et $\phi_y = \partial w_s / \partial y$, le

champ de déplacement de l'équation (II.16) peut être réécrit sous une forme plus simple avec cinq inconnus :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z) \phi_z(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.17}$$

Où : $g(z)=1-f'(z)$

Belabed et al. (2014) et Hebali et al. (2014) ont utilisé ce champ de déplacement pour analyser la flexion et la vibration libre des plaques FG. Les travaux effectués montrent que ce champ de déplacement est efficace et donne des résultats précis en comparaison d'autres théories de mêmes sens.

Pour l'objectif de simplifier la formulation et réduire le nombre d'inconnus, plusieurs propositions ont été introduites sur ce champ de déplacement. Zenkour (2013) et Mantari et Soares (2014) ont utilisé des champs de déplacement avec seulement quatre inconnus. Bachir Bouiudjra (2018) a utilisé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement quasi-3D avec seulement quatre inconnues avec la prise en compte de l'effet d'étirement d'épaisseur. Le nombre d'inconnues de la théorie n'est que de quatre, ce qui est inférieur aux autres théories du cisaillement et de la déformation normale où nous trouvons cinq, six ou plusieurs variables. Le champ peut écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + g(z) w_s(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{II.18}$$

Il est évident que cette théorie tient compte à la fois la déformation par cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur. En outre, les conditions aux limites des contraintes tangentielles nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sont assurées sans utiliser un facteur de correction. Les résultats obtenus montrent que ce champ déplacement est efficace et précis en comparaison avec les travaux de la littérature.

II.3. Déformations dans une plaque FG

La déformation est la variation des dimensions d'un corps sous l'action d'un chargement externe ou d'une variation de température. On fait souvent l'hypothèse des petites perturbations pour laquelle le solide s'écarte peu de sa configuration de référence. Dans ce cas, Les déplacements et les déformations restent petits et liées entre eux linéairement. En revanche, le cas dans lequel on considère des grandes perturbations, les déformations et les déplacements seront non-linéaires.

II.3.1. Déformations linéaires

On distingue deux types de déformations :

Déformation normale $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et ε_z : représente la variation des longueurs (élongation)

Déformation de cisaillement γ_{xy}, γ_{xz} et γ_{yz} (où $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$): variation des angles (distorsion).

Les déformations normales données par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{II.19}$$

Où : u, v et w sont les déplacements suivant les axes x, y et z, respectivement.

La relation de déformation par cisaillement et les déformations axiales peut être obtenue à partir de la figure (II.5). Si un élément infinitésimal de longueur dx et de largeur dy subit des déformations de cisaillement dues aux contraintes de cisaillement dans le plan et aux moments de torsion, alors d'après la figure (II.5)

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy}\tag{II.20}$$

Où, pour des petits angles de cisaillement,

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y}\tag{II.21}$$

De même principe

$$\sin \beta \approx \beta \approx \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} \approx \frac{\partial v}{\partial x}\tag{II.22}$$

Alors, la déformation tangentielle est la somme des deux angles de cisaillement ($\alpha + \beta$). De même analogie par rapport les autres axes on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \tag{II.23}$$

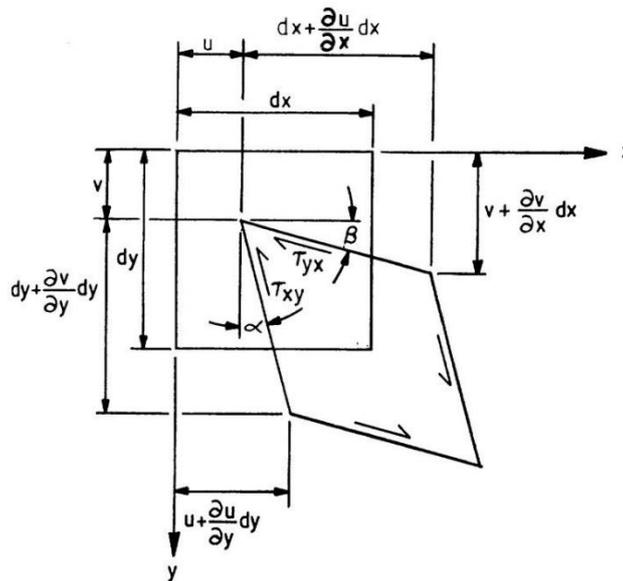


Figure II.5: Déformation tangentielle (Jawad 1994)

II.3.2. Déformations non-linéaires

Les déformations axiales sont déterminées en se basant sur la formulation représentée par Timoshenko et Gere (1963) et Cazenave (2010). Ils ont considéré un tronçon AB de longueur dx infiniment petit et déformable dans le plan (figure II.6-a). Les variations suivant x et z sont :

$\frac{\partial u}{\partial x} dx$, le rapport $\frac{\partial u}{\partial x}$ est assimilable dans ce cas à un taux de variation.

$\frac{\partial w}{\partial x} dx$, le rapport $\frac{\partial w}{\partial x}$ est correspond à la tangente d'un angle.

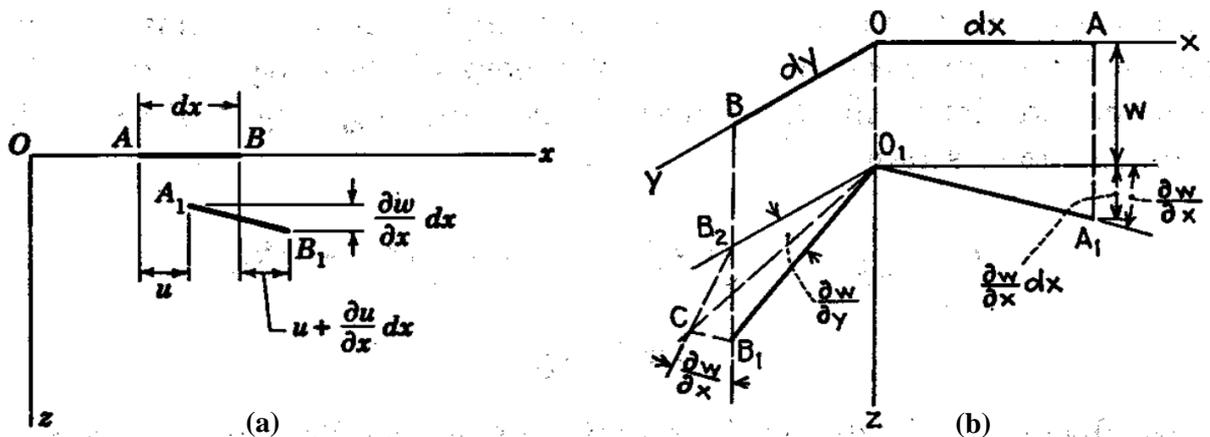


Figure II.6: Déformations non linéaires : a- axial, b- tangentielle (Timoshenko et Gere, 1963)

La longueur finale du tronçon A_1B_1 obtenu après déformation sera donc égale à :

$$\begin{aligned}
 A_1B_1 &= \sqrt{\left(dx - u + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2} \\
 &= \sqrt{dx^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx^2} \\
 &= dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \\
 &\approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right) \\
 &\approx dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) dx
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

Donc, les déformations par rapport à x et y peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2
 \end{aligned} \tag{II.25}$$

Pour déterminer les déformations tangentielles dues au déplacement w , on présente la démarche de Timoshenko et Gere (1963). Ceux derniers ont considéré deux éléments linéaires et infiniment petits OA et OB suivant les directions x et y, respectivement (figure II.6-b). Sous l'effet du déplacement w , les éléments OA et OB prennent les positions O_1A_1 et O_1B_1 . Dans ce cas, la déformation tangentielle se définit comme étant la différence entre l'angle $A_1O_1B_1$ et l'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour déterminer cette différence, l'angle droit $B_2O_1A_1$ a été considéré. La rotation de cet angle, après fixation O_1A_1 , avec petit angle $\partial w/\partial y$ jusqu'à que les plans $B_2O_1A_1$ et $B_1O_1A_1$ seront coïncidés et le point B_2 prend la position C. le déplacement B_2C est égale $(\partial w/\partial y)dy$, il est incliné par rapport le vertical B_2B_1 avec petit angle $\partial w/\partial x$. A partir le plan B_2CB_1 , on peut voir que CB_1 est égale à $(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y)dy$. La déformation tangentielle correspond au déplacement w est représentée par l'angle CO_1B_1 qui est égale à $(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y)$. Celle-ci est ajoutée aux déformations tangentielles due aux déplacement u et v pour obtenir :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \tag{II.26}$$

La forme non linéaire des déformations mentionnée dans les équations (II.25) et (II.26) a été utilisée dans le cadre de l'analyse du flambement mécanique et thermique des plaques FG. Bachir Boudjra et al. (2012), Tebboun et al. (2015) et Li et al. (2018) ont utilisé le champ de

déplacement de quatre variables avec la décomposition de la déflexion en deux composantes ($W = W_b + W_s$). Ils ont utilisé les déformations non linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{II.27}$$

Neves et al. (2013) ont utilisé le champ de déplacement d'ordre supérieur quasi 3D. Le champ des déplacements et les déformations $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z u_1(x, y) + z^2 u_2(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z v_1(x, y) + z^2 v_2(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z w_1(x, y) + z^2 w_2(x, y)\end{aligned}\tag{II.28}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\tag{II.29}$$

Van do et Lee (2018) ont étudié le flambement thermique des plaques FG avec un champ de déplacement quasi 3D à quatre variables

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + (f(z) - z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + (f(z) - z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + (g(z) + 1) w_s(x, y, t)\end{aligned}\tag{II.30}$$

Les déformations non linéaires sont données par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b + \partial w_s}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b + \partial w_s}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b + \partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b + \partial w_s}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{II.31}$$

II.4. Contraintes dans une plaque FG

On considère un cube infinitésimal à partir du corps rigide soumis à des sollicitations externes (figure II.7). Il y a deux types de contraintes agissant sur ce cube sont :

- Contraintes normales : σ_x , σ_y et σ_z
- Contraintes de cisaillement : τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} (où $\tau_{ij} = \tau_{ji}$)

Les indices servent à définir une contrainte : le premier indique l'axe qui est perpendiculaire à la contrainte et le second, l'axe qui est parallèle à la contrainte. Par exemple : τ_{xy} veut dire que la contrainte est perpendiculaire à l'axe x et parallèle à l'axe y.

Dans le cas des plaques FG, la majorité des études antérieures considèrent l'hypothèse de l'état de contraintes planes (Benachour et al. 2010, Abdelaziz et al. 2011, Ameer et al. 2011, Douadji et al. 2012, Ait Atmane et al. 2013, Meziane et al. 2014, Zidi et al. 2014, Bouhadra et al. 2015, Mahmoudi et al. 2017, Bachiri et al. 2018...etc). Par conséquent, la contrainte suivant l'épaisseur σ_z n'est pas considérée. En revanche, la considération de l'effet d'étirement de l'épaisseur a imposé l'hypothèse de la déformation suivant l'épaisseur non nulle $\varepsilon_z \neq 0$. Dans ce cas, la contrainte suivant l'épaisseur σ_z est considérée non nulle $\sigma_z \neq 0$ (Mantari et Soares, 2012, Zenkour, 2013, Mantari et Soares, 2014, Belabed et al. 2014, Hebali et al. 2014, Bachir Bouiadjra et al. 2018).

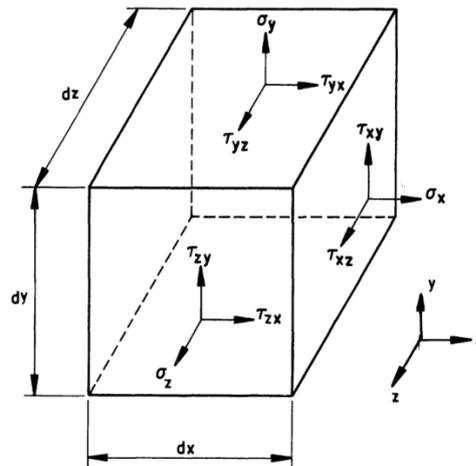


Figure II.7: État de contrainte dans un solide

II.5. Relation entre les contraintes et les déformations

II.5.1. Modèle bi-dimensionnelle (2D)

L'hypothèse des contraintes planes est utilisée pour modéliser des corps élastiques plans et minces (plaques) chargés dans leur plan. Dans ce cas, les déformations suivant z est non considérée ($\varepsilon_z = 0$).

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Les coefficients d'élasticité Q_{ij} sont définis comme

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \\ Q_{12} &= \nu(z)Q_{11}, \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

II.5.2. Modèle tridimensionnelle (3D)

Les relations élastiques contrainte-déformation dépendent de l'hypothèse de déformation suivant l'épaisseur que nous considérons. Si $\varepsilon_z \neq 0$, c'est-à-dire que l'étirement de l'épaisseur est considéré, le modèle 3D est utilisé (Neves et al. 2013, Reddy et al. 2014, Belabed et al. 2014, Hebali et al. 2014, Akavci et al. 2015, Bachir Boudjra et al. 2018). Dans le cas des matériaux à gradation fonctionnelle, les équations constitutives peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Où Q_{ij} sont les coefficients d'élasticité donnés par :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} &= \frac{(1-\nu)E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} &= \frac{\nu E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

CHAPITRE III

COMPORTEMENT DES PLAQUES FG SUR FONDATIONS ÉLASTIQUES

III.1. Introduction

L'analyse du comportement des plaques vise à déterminer les déplacements, les déformations et les contraintes sous diverses sollicitations. On peut étudier la réponse des plaques dans plusieurs situations telles que la flexion, vibration libre et la dynamique. Ceux-ci peuvent se combiner avec des charges mécaniques, thermiques et humides ce qui résulte des réponses thermomécaniques, hygro-thermomécaniques si la charge appliquée est statique. Dans le cas d'une charge dynamique, on peut également voir des réponses thermodynamiques ou thermo-hygro-dynamiques. En outre, les efforts de compression posent le problème du flambement. A cet effet, les chercheurs ont analysé le flambement mécanique ou thermique des plaques. La présence des fondations élastiques sous les plaques a été aussi représentée dans ce domaine. On peut modéliser n'importe quel problème mathématiquement c-à-d représenter le problème à étudier par des équations mathématiques. Dans ce chapitre, on présente la formulation théorique du comportement des plaques FG sur des fondations élastiques.

III.2. Principe des travaux virtuels

Lorsqu'une force agit sur un point matériel et se déplace à travers un déplacement, le travail effectué par la force est défini par la projection de la force dans la direction du déplacement multipliée par l'amplitude du déplacement.

Dans le cas d'un déplacement virtuel δu , le travail effectué par une force F sur un corps Ω se déplaçant suivant δu est appelé travail virtuel et donné par :

$$\delta W = \int_{\Omega} F \cdot \delta u \, dv \quad (\text{III.1})$$

Lorsqu'un corps déformable en état d'équilibre est soumis à des déplacements virtuels, le travail est effectué par des forces appliquées de l'extérieur et des forces développées de l'intérieur. Le travail virtuel effectué par des forces extérieures qui produisent des déplacements virtuels respectifs est appelé travail virtuel externe noté δW_E . Le travail virtuel effectué par les forces internes qui produisent des déplacements virtuels est appelé travail virtuel interne noté δW_I .

Le travail virtuel externe effectué suivant des déplacements virtuels δu dans un corps solide Ω soumis aux forces volumique F par unité de volume dv et aux forces de surface T par unité de surface ds est donné par :

$$\delta W_E = - \left(\int_{\Omega} F_i \cdot \delta u_i \, dV + \int_S T_i \cdot \delta u_i \, dS \right) \quad (\text{III.2})$$

Le travail virtuel interne dû au déplacement virtuel δu peut se calculer pour un élément matériel infinitésimal de volume dv du corps subit de petites déformations virtuelles axiales et tangentielles. Celles-ci peuvent s'écrire en fonction des déplacements virtuels comme se suit :

$$\delta\gamma_{ij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x} \quad (\text{III.3})$$

On représente les travaux virtuels de la contrainte axiale σ_x et tangentielle τ_{yx} (figure III.1)

$$\begin{aligned} (\sigma_x dydz)(\delta\varepsilon_x dx) &= \sigma_x \delta\varepsilon_x dx dy dz \\ (\tau_{xy} dx dz)(\delta\gamma_{xy} dy) &= \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

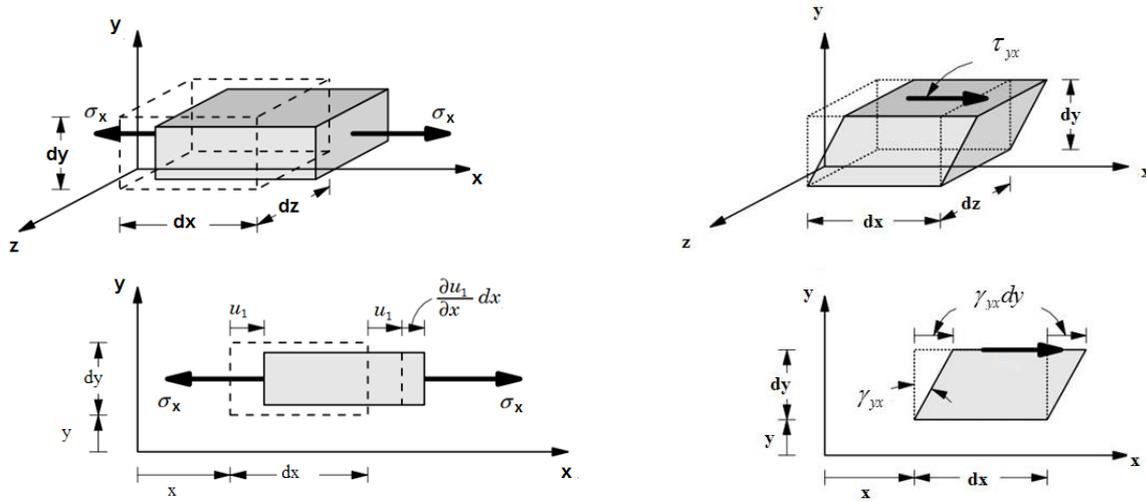


Figure III.1: Travail virtuel de la contrainte normale σ_x et de cisaillement τ_{yx} .

Par généralisation sur les autres travaux virtuels pour toutes les composantes de contraintes et déplacements associés, on peut écrire le travail virtuel total interne appelé aussi énergie de déformation virtuelle δU par l'intégration suivant le volume comme suit :

$$\delta W_l = \delta U = \int_{\Omega} (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz}) dx dy dz \quad (\text{III.5})$$

Pour le cas d'équilibre, la somme des travaux virtuels internes et externes est nulle. La somme des équations (III.2) et (III.5) égale à zéro nous donne :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz}) dx dy dz \\ &- \left(\int_{\Omega} F_i \delta u_i dV + \int_S T_i \delta u_i dS \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

La deuxième partie du travail virtuel des efforts extérieurs, relative aux efforts volumiques à distance, est généralement négligée. Ceux-ci restent généralement très faibles devant les forces surfaciques (Notta-Cuvier, 2011). Alors, l'équation (III.6) peut se simplifier comme suit :

$$\int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz - \int_S T_i \cdot \delta u_i dS = 0 \quad (\text{III.7})$$

On note que l'équation (III.7) est valable dans l'analyse statique des structures comme les plaques et les poutres FG. Dans l'analyse dynamique, le principe de Hamilton est considéré comme une généralisation du principe des travaux virtuels. Le principe de Hamilton, est basé sur l'hypothèse qu'un système dynamique est caractérisé par deux fonctions énergétiques : une énergie cinétique K et une énergie potentielle W . Le principe de Hamilton peut être exprimé comme

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta U_F - \delta K) dt \quad (\text{III.8})$$

Où :

δU est la variation de l'énergie de déformation ; δU_F est la variation de l'énergie potentielle des forces surfaciques ; δK est la variation de l'énergie cinétique.

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz \\ \delta U_F &= - \int_S T_i \cdot \delta u_i dS \\ \delta K &= \int_V \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

III.3. Comportement statique et dynamique des plaques

L'étude sur les plaques fonctionnellement graduées a commencé par l'analyse des plaques minces à l'aide de la théorie des plaques classiques (CPT). En utilisant cette théorie, Zenkour (2005) a analysé le comportement de flexion des plaques sandwich FG. La CPT peut être appliquée avec succès pour analyser les problèmes des plaques minces. Dans le cas où l'effet de la déformation par cisaillement ne peut être négligé, différentes stratégies sont nécessaires pour analyser des configurations plus générales des plaques. Plusieurs travaux ont été effectués pour analyser les comportements statique et dynamique des plaques en utilisant des théories d'ordre supérieurs (Benachour et al. 2011, Talha et Singh 2010, Daouadji 2012, Hebali et al. 2014,

Meziane et al. 2014, Mahi et al.2015...etc). Dans l'analyse dynamique, le principe de Hamilton est utilisé pour dériver des équations de mouvement données sous la forme matricielle suivante :

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{F\} \quad \text{(III.10)}$$

Où : K : la matrice de rigidité, M : la matrice de masse, Δ : vecteur de déplacements, F : vecteur de charges, ω : la fréquence.

La taille et les éléments des matrice K et M sont dépendants du champ de déplacement et le nombre d'inconnus qu'il comporte. On peut faire l'analyse statique seulement en posant $\omega = 0$.

III.4. Comportement des plaques sous chargement thermique

Durant leurs durées de vie, les structures peuvent soumises à des variations de température. Celles-ci peuvent engendrées des modifications sur la rigidité et les caractéristiques à la rupture du matériau. En outre, la variation de la température produit une dilatation thermique (extension ou contraction) du matériau.

III.4.1. Dilatation thermique

Les phénomènes de dilatation thermique peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point (x, y, z) et à l'instant t sous la forme suivante (Berthelot ,2013) :

$$\varepsilon_i^t = \alpha_i \Delta T(x, y, z, t) \quad \text{(III.11)}$$

Où α_i sont les coefficients de dilatation thermique et ΔT est la variation de température à partir d'une température de référence pour laquelle les déformations thermiques sont considérées comme étant égales à zéro.

Dans le cas des plaques FG, la relation contrainte/déformation en tenant compte les déformations engendrées par la variation de la température a été décrite comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_z - \alpha \Delta T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{(III.12)}$$

Saidi et al. (2013), Mahmoudi et al. (2017) et Van Do et Lee (2018) ont utilisée des champs de déplacement quasi 3D en prennent l'effet de l'étirement de l'épaisseur en considération pour analyser le comportement thermo mécanique et le flambement thermique des plaques. Les relations contraintes/déformations ont été prises comme il est mentionné dans l'équation (III.12) qui représente le modèle 3D. En revanche, ils ont utilisé les coefficients d'élasticités réduits du modèle 2D (équation II.33). Ça peut s'expliquer par l'effet significatif de la température sur les matériaux dans le plan contrairement suivant l'épaisseur.

III.4.2. Chargement thermo mécanique

Dans le cadre de l'étude de comportement thermo mécaniques des plaques FG, Tounsi et al. (2013), Houari et al. (2013) et Mahmoudi et al. (2017) ont énoncé la variation du champ de température à travers l'épaisseur comme suit

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h}T_2(x, y) + \frac{f(z)}{h}T_3(x, y) \quad \text{(III.13)}$$

Où T_1 , T_2 et T_3 sont des charges thermiques. Dans la résolution des problèmes thermomécaniques, les charges thermiques peuvent s'écrire sous la forme d'une série trigonométrique suivante :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad \text{(III.14)}$$

Où t_1 , t_2 et t_3 sont des constantes.

A partir le champ de température définit par l'équation (III.13), deux types de température à travers l'épaisseur peuvent être considérés.

Distribution linéaire ($T_3=0$) : $T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h}T_2(x, y)$

Distribution Non linéaire ($T_3 \neq 0$) : $T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h}T_2(x, y) + \frac{f(z)}{h}T_3(x, y)$

Wang et Shen (2013), Sobhy (2015), Attia et al. (2018) et Daikh (2019) ont étudié des plaques FG avec propriétés dépendantes de la température. L'analyse thermique est effectuée en résolvant une simple équation de transfert de chaleur en régime permanent à travers l'épaisseur de la plaque. L'équation de la température à travers l'épaisseur est la suivante :

$$-\frac{d}{dz} \left(K(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad \text{(III.15)}$$

La solution de l'équation de la distribution thermique ci-dessus, au moyen de séries polynomiales, est

$$T(z) = T_b + (T_i - T_b) \frac{\Theta(z)}{\Lambda} \quad \text{(III.16)}$$

Où :

$$\begin{aligned} \Theta(z) = & \left[\left(\frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{(K_c - K_m)}{(p+1)K_m} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{p+1} + \frac{(K_c - K_m)^2}{(2p+1)K_m^2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{2p+1} \right. \\ & - \frac{(K_c - K_m)^3}{(3p+1)K_m^3} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{3p+1} + \frac{(K_c - K_m)^4}{(4p+1)K_m^4} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{4p+1} \\ & \left. - \frac{(K_c - K_m)^5}{(5p+1)K_m^5} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{5p+1} \right] \end{aligned} \quad \text{(III.17)}$$

$$\Lambda = 1 - \frac{(K_c - K_m)}{(p+1)K_m} + \frac{(K_c - K_m)^2}{(2p+1)K_m^2} - \frac{(K_c - K_m)^3}{(3p+1)K_m^3} + \frac{(K_c - K_m)^4}{(4p+1)K_m^4} - \frac{(K_c - K_m)^5}{(5p+1)K_m^5} \quad (\text{III.18})$$

Pour une plaque à matériau isotrope (p=0), l'équation peut se simplifier comme suit :

$$T(z) = T_m + \Delta T \left(\frac{2z+h}{2h} \right) \quad (\text{III.19})$$

III.4.3. Chargement thermodynamique

La majorité des travaux de recherche portent sur le comportement à la flexion, aux vibrations et au flambage d'une plaque soumise à une charge thermique et / ou mécanique. Les études réalisées sur la plaque FG soumise à des sollicitations thermodynamiques sont très limitées. Néanmoins, on trouve les travaux de Zenkour et Sobhy (2013) qui ont utilisé une théorie d'ordre supérieure à cinq variables pour étudier le comportement des plaques FG reposées sur des fondations élastiques et soumises aux sollicitations thermodynamique. Dans la même ligne, et pour le but de réduire le nombre des variables, Bachiri et al. (2018) ont utilisé le champ de déplacement contenant des termes d'intégrale indéterminé avec seulement quatre variables. Sobhy et Zenkour(2015) ont traité le comportement thermodynamique des plaques sandwich FG en utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé à cinq variables, où la plaque sandwich était considérée comme supportée et reposant sur la fondation élastique Pasternak. Mekerbi et al. (2019) ont étudié le comportement thermodynamique des plaques sandwich FG avec une théorie d'ordre supérieure de quatre variables sous diverses conditions aux limites. Dans cette analyse, les modèles de fondations élastiques Winkler/Pasternak/Kerr ont été utilisés.

Dans les travaux mentionnés ci-dessus, la variation de température est supposée se produire dans la direction de l'épaisseur selon une forme de loi exponentielle. La variation du champ de température à travers l'épaisseur est supposée comme suit :

$$T(x, y, z, t) = \hat{t}(z)\hat{T}(x, y, t), \quad (\text{III.20})$$

Sachant que :

$$\hat{t}(z) = T^- e^{\gamma \left(\frac{z+1}{h} + \frac{1}{2} \right)^\eta}, \quad \gamma = \ln \left(\frac{T^+}{T^-} \right) = \ln(T_r), \quad 0 \leq \eta \leq \infty \quad (\text{III.21})$$

$$\hat{T}(x, y, t) = \bar{t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \quad (\text{III.22})$$

Avec :

\bar{t} : est un paramètre arbitraire de température.

T^+ : Température de la surface supérieure de la plaque FGM.

T^- : Température de la surface inférieure de la plaque FGM.

η : Exposant de la température, ($\eta = 0$ présente la température de la surface supérieure, $\eta = \infty$ la température de la surface inférieure)

III.4.4. Température critique de flambement

Pour examiner le comportement de flambement thermique des plaques FG, des variations de température uniformes, linéaires et non linéaires à travers l'épaisseur sont considérées par Zenkour (2010), Tebboune et al. (2015) et Van do (2018).

Pour la variation uniforme, la température est uniformément élevée de la température initiale T_i à la valeur finale T_f dans laquelle la plaque se déforme. Dans ce cas la température critique de flambement se définit comme suit :

$$\Delta T = T_f - T_i. \quad \text{(III.23)}$$

Dans le cas de changement de température linéaires et non linéaires, la variation de température à travers l'épaisseur est donnée par :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\eta + T_m \quad \text{(III.24)}$$

Dans de chapitre V, nous allons présenter le développement théorique du flambement thermique des plaques FG avec une théorie raffinée en tenant compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur. Différentes distributions de la porosité et variations de températures suivant l'épaisseur ont été considérées (Mekerbi et al. 2019).

III.5. Réponses des plaques sur fondations élastiques

De nombreux problèmes d'une importance pratique considérable peuvent être liés à la solution des plaques reposant sur une fondation élastique. On note par exemple, les chaussées en béton armé des autoroutes et des pistes d'aéroport, les dalles de fondation des bâtiments. La réponse des plaques FG reposant sur des fondations élastiques a été aussi adressée par nombreux chercheurs. La principale difficulté de ce type de problème réside dans la bonne description de la fondation élastique. De ce fait, il existe de nombreuses hypothèses et des modèles pour simuler les fondations élastiques.

III.5.1. Model de Winkler

La représentation la plus simple d'une fondation élastique continue a été fournie par Winkler (1876). Le sol support a été modelé comme de ressorts linéaires indépendants et étroitement espacés. Sous un chargement uniformément répartie, le déplacement est supposé constant sous la partie chargée et nul hors cette zone (figure III.2).

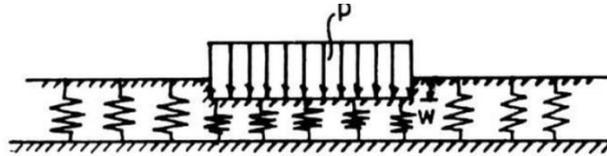


Figure III.2: Modèle de Winkler

La réaction de la fondation f_e et la déflexion de la surface de fondation sont parallèles à l'axe z et liées entre elles par la relation suivante :

$$f_e = k.w \quad \text{(III.25)}$$

Où k est le module de la fondation.

Contrairement à l'hypothèse des déplacements nuls hors la surface chargée, il a été observé que, pour la plupart des matériaux, les déplacements de la surface de la fondation sont indiqués sur la figure III.3 (Kerr 1964). Ceci, montre la limitation du modèle de Winkler pour simuler la réaction de la fondation sur la structure qu'elle supporte.

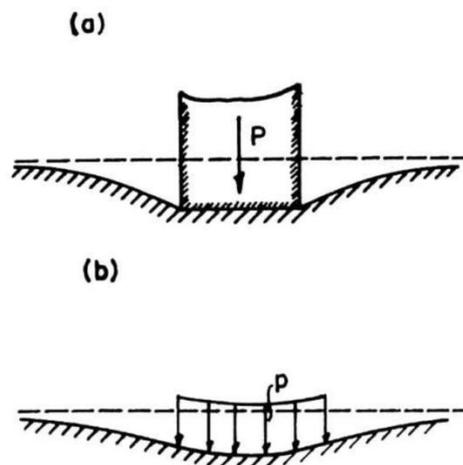


Figure III.3: Déplacement de la surface de la fondation

III.5.2. Model de Pasternak

Pour simuler l'observation de la forme parabolique des déplacements, Pasternak suppose l'existence d'une liaison de cisaillement entre les éléments de ressort. Cela peut être accompli en connectant les extrémités des ressorts à une poutre ou une plaque constituée d'éléments horizontaux incompressibles, comme le montre la figure III.4, qui se déforme uniquement par cisaillement transversal.

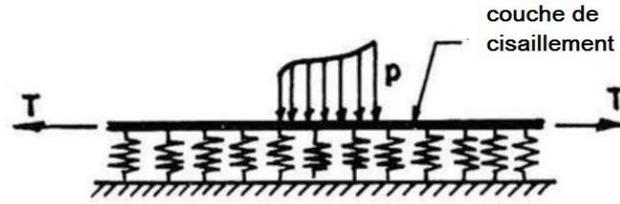


Figure III.4: Modèle de Pasternak

Kerr (1964) a expliqué la dérivation de la relation entre le chargement et la déflexion suivant l'hypothèse de Pasternak. Il a été supposé l'équilibre vertical d'un élément de "couche de cisaillement" limitée par les surfaces x , $x + dx$, y et $y + dy$, comme le montre la figure III.5-a. En supposant ce matériau de fondation est homogène et isotrope dans le plan x,y , donc $G_x = G_y = G$.

$$\tau_{xz} = G_x \gamma_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x} \quad (III.26)$$

$$\tau_{yz} = G_y \gamma_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y}$$

Les forces de cisaillement par unité de longueur sont données par

$$N_x = \int_0^1 \tau_{xz} dz = G \frac{\partial w}{\partial x} \quad (III.27)$$

$$N_y = \int_0^1 \tau_{yz} dz = G \frac{\partial w}{\partial y}$$

L'équation d'équilibre du cube représenté dans la figure III.5-b donné par :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p - q_s = 0 \quad (III.28)$$

En substituant l'équation (III.27) dans l'équation (III.28) et en tenant compte que $q_s = kw$, on obtient :

$$f_e = kw - G \nabla^2 w \quad (III.29)$$

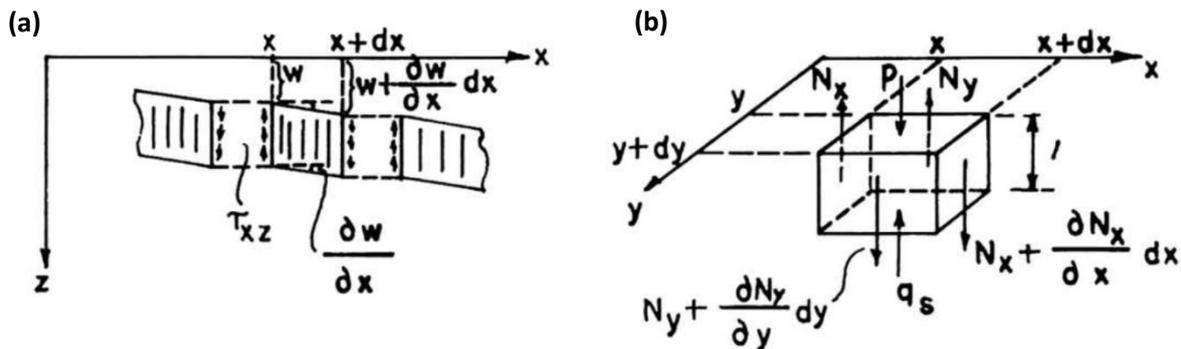


Figure III.5: Équilibre de la couche de cisaillement

III.5.3. Modèle de Kerr

Le modèle de la fondation Kerr est un modèle élastique à trois paramètres qui se compose d'une couche de cisaillement indépendante des couches supérieure et inférieure modélisées par des ressorts distribués (figure III.6). Pour la dérivation de la relation entre la déflexion et la réaction de la fondation, Kerr (1964,1965,1967) a considéré la déflexion de la plaque w composée de deux parties

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad (III.30)$$

Où : w_1 est la déflexion due à la contraction ou à l'extension de la couche supérieure du ressort et w_2 est la déflexion due au reste de la fondation. Selon la figure III.6 et les équations (III.25) et (III.29)

$$p(x, y) = k_u w_1 \quad (III.31)$$

Et

$$p(x, y) = k_l w_2 - k_p \nabla^2 w_2 \quad (III.32)$$

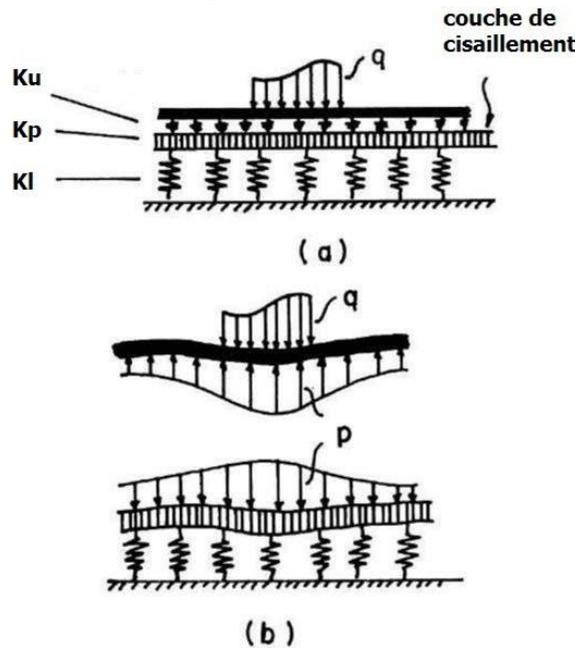


Figure III.6: Modèle de Kerr

Où k_u est la constante de ressort de la couche de ressort supérieure, k_l est la constante de ressort de la couche de ressort inférieure et k_p est la constante de la couche de cisaillement. On note que les paramètres k_u , k_l et k_p sont déterminés à partir des propriétés de sol de fondation.

En introduisant le rapport $\left(\frac{k_l}{k_u} - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2 \right)$ dans l'équation (III.31) puis en ajoutant le résultat à l'équation (III.32). En considérant l'équation (III.30), on obtient la relation entre la réaction et la déflexion de la fondation comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_l}{k_u}\right) p - \frac{k_p}{k_u} \nabla^2 p = k_l w - k_p \nabla^2 w \quad (\text{III.33})$$

Cette équation différentielle a été résolue et interprétée par Kerr (1965, 1967) et Kneifati (1985). Dans le cadre de l'étude des plaque FG, Shahsavari et al. (2017) et Daikh et al. (2018) ont utilisé une formule simple de la réaction de la fondation élastique avec trois paramètres comme suit :

$$f_c = \left(\frac{k_l k_u}{k_l + k_u}\right) w - \left(\frac{k_s k_u}{k_l + k_u}\right) \nabla^2 w \quad (\text{III.34})$$

III.5.4. Fondations variables

Les modèles discutés précédemment considèrent les fondations élastiques à modules constants. Cependant, quelques études sur les structures reposant sur des fondations élastiques variables ont été effectuées. Zhou (1993) a étudié la vibration des poutres sur la fondation de Winkler à module variable. Pradhan et Murmu (2009) ont analysé le comportement thermomécanique et la vibration des poutres FG et des poutres sandwich FG. Les poutres FG sont considérées comme reposant sur la fondation variable de Winkler et la fondation élastique à deux paramètres. Sobhy (2013) et Attia et al. (2018) ont étudié la réponse thermoélastique de plaques FG avec propriétés dépendant de la température et reposées sur des fondations élastiques variables. Le paramètres de Winkler prend des distributions linéaire, parabolique et sinusoïdale sous formes adimensionnelles comme ce suit :

$$K_w(x) = \frac{k_w h^3}{a^4} \begin{cases} 1 + \zeta \frac{x}{a} & \text{lineaire} \\ 1 + \zeta \left(\frac{x}{a}\right)^2 & \text{Parabolique} \\ 1 + \zeta \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) & \text{sin usoidal} \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

ζ : est un paramètre varié

CHAPITRE IV

COMPORTEMENT THERMODYNAMIQUE

DES PLAQUES SANDWICH FG

SUR FONDATION

WINKLER/PASTERNAK/KERR

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étendre la théorie présentée par Meksi et al. (2018) basée sur un champ de déplacement contenant des termes d'intégrales indéterminés avec seulement quatre variables. Cette cinématique a été utilisée dans l'analyse de la flexion et le flambement des plaques sandwich FG (Meksi et al. 2018), le flambement des plaques isotrope et orthotrope (Bourada et al.2016), l'analyse de comportement mécanique et flambement thermique des plaques FG sur des fondations élastiques, la vibration libre et le flambement des plaques sandwich FG (Sekkat et al. 2017), l'influence des modèles micromécaniques sur la vibration libre des plaques FG simplement appuyées (Mahmoudi et al. 2018). Bachiri et al. (2018) ont utilisé cette théorie dans l'analyse thermodynamique des plaques FG fondées sur des fondations élastiques Winkler/Pasternak.

Les travaux de recherche mentionnés ci-dessus portent sur le comportement à la flexion, aux vibrations et au flambage des plaques sandwich soumises à une charge thermique et/ou mécanique. En outre, les plaques étudiées sont simplement appuyées et reposant sur des fondations élastiques de type Winkler/Pasternak. Selon la littérature et à notre connaissance, les études réalisées sur la plaque sandwich FG sur fondation élastique soumise à des sollicitations thermodynamiques sont très limitées. On ne trouve que les travaux de Sobhy et Zenkour (2015) qui traitent ce problème mais en utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé à cinq variables, où la plaque sandwich était considérée comme simplement supportée et reposant sur une fondation élastique Pasternak.

L'objectif de ce chapitre est étudié la réponse thermodynamique d'une plaque sandwich FG reposant sur une fondation élastique Winkler / Pasternak / Kerr. A cet effet, une plaque sandwich FG reposant sur différentes fondations élastiques et soumise à un champ de température sinusoïdale harmonique dépendant du temps sera analysée. Différents types des plaques sandwich FG sont considérées avec différentes conditions aux limites. Les caractéristiques mécaniques de la plaque sandwich sont supposées varier dans l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance.

Sur la base de cette théorie, les équations du mouvement seront dérivées selon le principe de Hamilton. La précision de la présente étude est vérifiée en comparant les résultats actuels avec ceux disponibles dans la littérature.

IV.2. Description de la plaque sandwich :

La géométrie et les dimensions d'une plaque sandwich rectangulaire reposant sur des fondations élastiques composée de trois couches microscopiquement hétérogènes sont représentées sur la figure IV.1.

Les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) sont utilisées pour décrire les déformations infinitésimales de la plaque FG occupant la région $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$ dans la configuration de référence non sollicitée.

Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à $z = \pm h/2$ et les bords de la plaque sandwich sont parallèles aux axes x et y .

Les ordonnées verticales de la base, des deux interfaces et du haut sont désignées $h_0 = -h/2, h_1, h_2, h_3 = h/2$ respectivement.

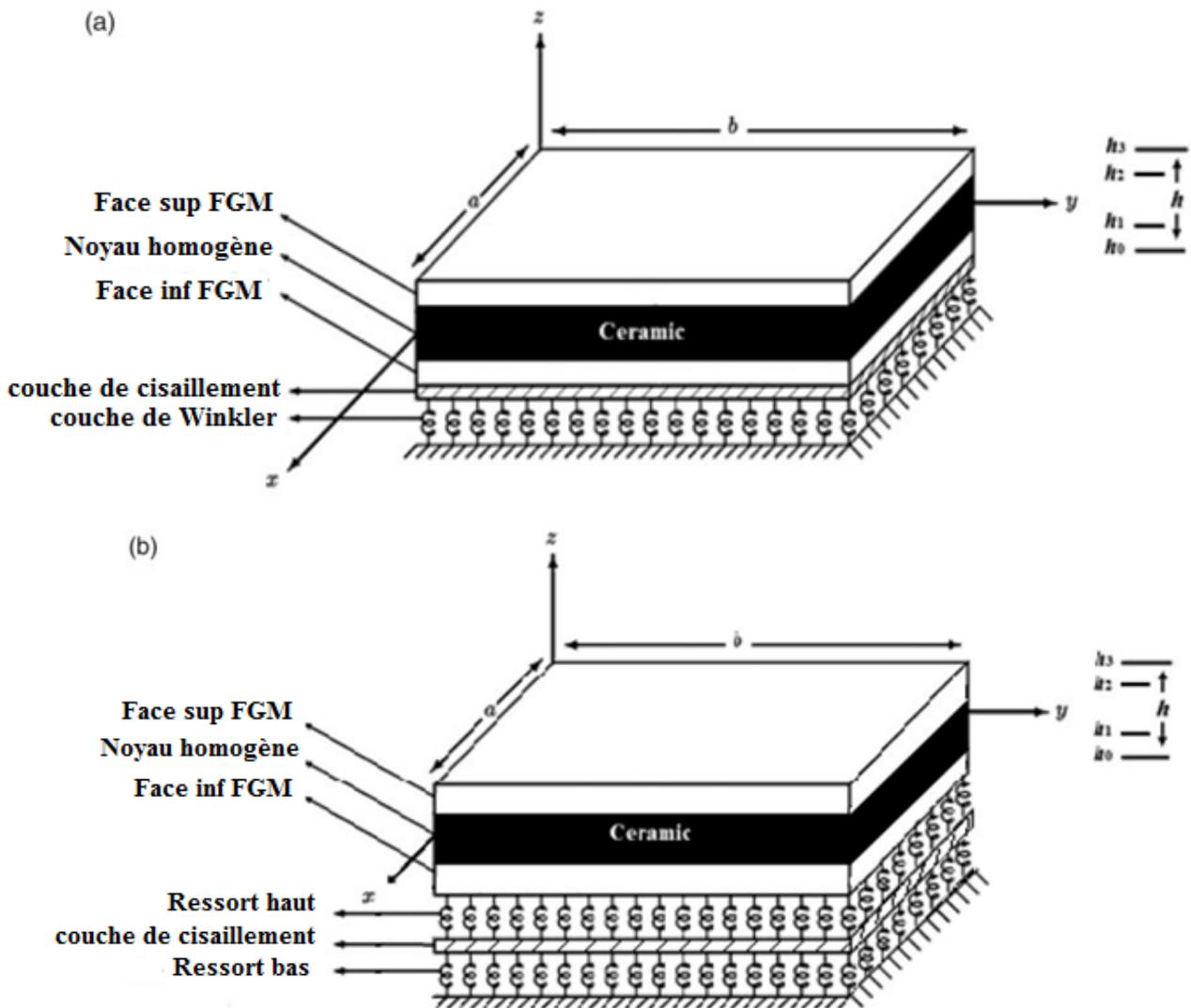


Figure IV.1: Géométrie de la plaque sandwich FG reposant sur une fondation élastique.

Le volume et la surface supérieure, sont indiqués respectivement par V et A , soumissent à une charge transversale $q(x,y)$.

Pour la simplicité, le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas en haut est indiqué par la combinaison de trois nombres, c'est-à-dire (1-0-1), (2-1-2) et ainsi de suite. Les propriétés effectives des matériaux, comme le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et le coefficient de dilatation thermique α peuvent être exprimées par la règle du mélange suivante :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (\text{IV.1})$$

Les indices m et c se réfèrent au métal et à la céramique.

Où : $V^{(n)}$, ($n = 1 ; 2 ; 3$) désigne la fonction de fraction volumique de la couche n ; p est l'indice de fraction volumique ($0 \leq p \leq +\infty$), qui indique le profil de la variation du matériau à travers l'épaisseur. Cependant que la couche centrale est supposée entièrement en céramique (hardcore).

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{1+2z}{1+2h_1} \right)^p, & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V_2 &= 1, & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V_3 &= \left(\frac{1-2z}{1-2h_2} \right)^p, & h_2 \leq z \leq h_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

IV.3. Cinématique

Le champ de déplacement conventionnel du HSDT satisfaisant aux conditions de contraintes de cisaillement transversales (et donc de déformations) nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

u_0, v_0, w_0 et ϕ_x sont les cinq déplacements inconnus dans le plan médian de la plaque.

En considérant que $\phi_x = k_1 \int \theta(x, y) dx$ et $\phi_y = k_2 \int \theta(x, y) dy$, Le champ de déplacements mentionnés ci-dessus peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Où u_0, v_0, w_0 et θ sont les quatre déplacements inconnus dans le plan médian de la plaque. Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie. Les intégrales utilisées sont indéterminées et doivent être résolues par le type de solution adoptée, et peuvent être exprimées comme suit

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Et $k_1 = \lambda^2$, $k_2 = \mu^2$, $A' = -\frac{1}{\lambda^2}$, $B' = -\frac{1}{\mu^2}$,

Où : $\lambda = \frac{m\pi}{a}$, $\mu = \frac{n\pi}{b}$,

La fonction de forme $f(z)$ est donnée comme suit :

$$f(z) = \frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{IV.6})$$

Les expressions de déformation linéaire dérivées à partir le modèle de déplacement peuvent être obtenues comme suit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (\text{IV.8})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.9})$$

IV.4. Relations constitutives

Les relations constitutives linéaires sont

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \alpha(z)^{(n)}T \\ \varepsilon_y - \alpha(z)^{(n)}T \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. $\alpha(z)$ est le coefficient de dilatation thermique, et T est la distribution de la charge de la température. Les constantes élastiques Q_{ij} sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(n)} &= Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1 - \left(\nu^{(n)}(z)\right)^2}, \\ Q_{12}^{(n)} &= \nu^{(n)}(z)Q_{11}^{(n)}, \\ Q_{44}^{(n)} &= Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1 + \nu^{(n)}(z))}, \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

IV.5. Équations de mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique suivante :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta U_F - \delta K) dt \quad (\text{IV.12})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δK est la variation de l'énergie cinétique ; et δU_F est la variation de l'énergie de déformation de la fondation.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est indiquée comme :

$$\delta U = \int_A \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \quad (\text{IV.13})$$

En remplaçant les équations (IV.7) et (IV.11) dans l'équation (IV.13) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV.13) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right. \\ + k_2 B' M_y^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \\ \left. + (k_1 A' + k_2 B') M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_1 A' S_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B' S_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Les résultantes des contraintes N, M et S sont définies par

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.15})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz$$

En utilisant l'équation (IV.10) dans l'équation (IV.15), les résultantes des contraintes de la plaque FG peuvent être reliées aux déformations totales par

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \quad (\text{IV.16})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{IV.17-a})$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, \quad M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, \quad M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17-b})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & \\ & A_{55}^s \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & B_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu^{(n)}(z) \\ \frac{1-\nu^{(n)}(z)}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.17-c})$$

$$\text{Et : } (A_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu^{(n)}(z))} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV.17-d})$$

Les résultantes de contrainte et de moment, $N_x^T = N_y^T, M_x^{bT} = M_y^{bT}, M_x^{sT} = M_y^{sT}$ dues à la charge thermique sont définies par

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_y^{bT} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{\nu^{(n)}(z)-1} \alpha^{(n)}(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.18})$$

La variation du champ de température à travers l'épaisseur est donnée par :

$$T(x, y, z, t) = \hat{t}(z) \hat{T}(x, y, t) \quad (\text{IV.19})$$

Où : $\hat{t}(z) = T^- e^{\gamma \left(\frac{z+1}{h+2} \right)^\eta}$, $\gamma = \ln \left(\frac{T^+}{T^-} \right) = \ln(T_r)$, $0 \leq \eta \leq \infty$

$$\hat{T}(x, y, t) = \bar{t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \quad (\text{IV.20})$$

Où \bar{t} est un paramètre arbitraire et T^+ et T^- sont les températures supérieure et inférieure, et η est l'exposant de la température. Notez que $\eta = 0$ représente la température de la surface supérieure de la plaque tandis que $\eta = \infty$ représente la température de la surface inférieure.

La variation de l'énergie cinétique est exprimée par :

$$\delta K = \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \rho(z) dA dz \quad (\text{IV.21})$$

$$\delta K = \int_A \left\{ \begin{aligned} & I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\ & + J_1 \left[k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\ & + I_2 \left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right] + K_2 \left[(k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right] \\ & - J_2 \left[k_1 A' \dot{w}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \dot{w}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{w}_0 + k_2 B' \dot{w}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \dot{w}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{w}_0 \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.22})$$

La convention point-exposant indique la différenciation par rapport le temps t ; $\rho(z)$ est la densité de masse ; et $(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$ sont des inerties de masse définies par :

$$(I_0, I_1, J_1, J_2, K_2) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \rho^{(n)}(z) (1, z, f(z), z^2, z f(z), f(z)^2) dz \quad (\text{IV.23})$$

La variation de l'énergie de déformation de la fondation est exprimée par :

$$\delta U_F = \int_A f_e \delta w dA \quad (IV.24)$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation Pasternak

$$f_e^{Pasternak} = k_w w - k_p \nabla^2 w \quad (IV.25)$$

Si la fondation est modélisée selon le model linéaire de Winkler, le coefficient k_p dans l'équation (IV.25) est nul.

La fondation du modèle Kerr est un modèle élastique à trois paramètres composés d'une couche de cisaillement (avec rigidité) indépendante des couches supérieure (avec rigidité) et inférieure (avec rigidité) (modélisée par des ressorts distribués). La réaction distribuée du modèle de fondation Kerr est définie comme suit (Shahsavari et al. 2018):

$$f_e^{Kerr} = \left(\frac{k_l k_u}{k_l + k_u} \right) w - \left(\frac{k_s k_u}{k_l + k_u} \right) \nabla^2 w \quad (IV.26)$$

$$\text{Où : } \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$$

Par substitution des expressions δU , δU_F et δK des équations (IV.14), (IV.22) et (IV.24) dans l'équation (IV.12) et intégrant par parties et collectant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw et $\delta \theta$, les équations de mouvement de la plaque sont obtenues comme suite :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \left(k_w + \frac{k_l k_u}{k_l + k_u} \right) w_0 - \left(k_p + \frac{k_s k_u}{k_l + k_u} \right) \nabla^2 w_0 \\ & = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\ \delta \theta : \quad & -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} \\ & = -J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (IV.27)$$

En remplaçant l'équation (IV.17) dans l'équation (IV.27), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, v_0, w, θ) comme suit :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & + k_1 A' B_{11}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + k_2 B' B_{12}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial N_x^T}{\partial x} \\
 & = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 & A_{22} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + k_1 A' B_{12}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_2 B' B_{22}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial N_x^T}{\partial y} \\
 & = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
 & + k_1 A' D_{11}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' D_{22}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 M_x^{b^T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x^{b^T}}{\partial y^2} \\
 & + \left(k_w + \frac{k_l k_u}{k_l + k_u} \right) w_0 - \left(k_p + \frac{k_s k_u}{k_l + k_u} \right) \nabla^2 w_0 \\
 & = I_0 \ddot{w}_0 - I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \tag{IV.28} \\
 & - k_1 A' B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - (k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & - (k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - k_2 B' B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & + k_1 A' D_{11}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + k_2 B' D_{22}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^{s^T}}{\partial x^2} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_x^{s^T}}{\partial y^2} \\
 & - (k_1 A')^2 H_{11}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \left[2k_1 A' k_2 B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \right] \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - (k_2 B')^2 H_{22}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} + (k_1 A')^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
 & = -J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + J_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - K_2 \left[(k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right]
 \end{aligned}$$

La solution exacte de l'équation (IV.28) pour la plaque sandwich FGM dans diverses conditions aux limites peut être construite. Pour résoudre les équations gouvernantes basées sur la théorie proposée, une solution générale pour différentes conditions aux limites est utilisée. Le champ de déplacement peut être supposé :

$$\begin{cases} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \\ \theta(x, y) \end{cases} = \begin{cases} U_{mn} \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} e^{i\omega t} \\ W_{mn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ \phi_{mn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \end{cases} \quad \text{(IV.29)}$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} et ϕ_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence naturelle et $i = \sqrt{-1}$. Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ sont suggérées ici pour satisfaire les conditions aux limites géométriques et représenter des formes approximatives de la surface déviée de la plaque. Ces fonctions, pour les différents cas de conditions aux limites, sont répertoriées dans le tableau IV.1 en notant que $\lambda = \frac{m\pi}{a}$ et $\mu = \frac{n\pi}{b}$.

Tableau IV.1: Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ (Ait Amar et al. 2014)

	Conditions aux limites		Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$	
	à $x=0,a$	à $y=0,b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CSSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$	$\sin(\mu y)$
CSCS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$	$\sin(\mu y)[\cos(\mu y) - 1]$
CCSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CCCC	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
FFCC	$X_m''(0) = X_m'''(0) = 0$ $X_m''(b) = X_m'''(b) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$	$\cos^2(\lambda x)[\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin^2(\mu y)$
FFSS	$X_m''(0) = X_m'''(0) = 0$ $X_m''(b) = X_m'''(b) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\cos^2(\lambda x)[\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin(\mu y)$

Remarque : ()' Indique la dérivée par rapport aux coordonnées correspondantes.

Dans la quelle :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{11}\alpha_{12} + A_{66}\alpha_8 I_0 \alpha_6 \\
 a_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_8 \\
 a_{13} &= -B_{11}\alpha_{12} - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_8 - \omega^2 I_1 \alpha_6 \\
 a_{14} &= k_1 A' B_{11}^s \alpha_{12} + [k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s] \alpha_8 + \omega^2 k_1 A' J_1 \alpha_6 \\
 a_{21} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_{10} \\
 a_{22} &= A_{22}\alpha_4 + A_{66}\alpha_{10} + \omega^2 I_0 \alpha_2 \\
 a_{23} &= -B_{22}\alpha_4 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{10} - \omega^2 I_1 \alpha_2 \\
 a_{24} &= [k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s] \alpha_{10} + k_2 B' B_{22}^s \alpha_4 + \omega^2 k_2 B' J_1 \alpha_2 \\
 a_{31} &= B_{11}\alpha_{13} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} + \omega^2 I_1 \alpha_9 \\
 a_{32} &= B_{22}\alpha_5 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} + \omega^2 I_1 \alpha_3 \\
 a_{33} &= -D_{11}\alpha_{13} - D_{22}\alpha_5 - 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_{11} - \left(k_w + \frac{k_l k_u}{k_l + k_u} \right) \alpha_1 \\
 &\quad + \left(k_p + \frac{k_s k_u}{k_l + k_u} \right) (\alpha_9 + \alpha_3) + \omega^2 [I_0 \alpha_1 - I_2 (\alpha_9 + \alpha_3)] \\
 a_{34} &= k_1 A' D_{11}^s \alpha_{13} + k_2 B' D_{22}^s \alpha_5 + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \alpha_{11} + \omega^2 J_2 (k_1 A' \alpha_9 + k_2 B' \alpha_3) \\
 a_{41} &= -k_1 A' B_{11}^s \alpha_{13} - [k_2 B' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s] \alpha_{11} + \omega^2 k_1 A' J_1 \alpha_9 \\
 a_{42} &= -[k_1 A' B_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s] \alpha_{11} - k_2 B' B_{22}^s \alpha_5 + \omega^2 k_2 B' J_1 \alpha_3 \\
 a_{43} &= k_1 A' D_{11}^s \alpha_{13} + k_2 B' D_{22}^s \alpha_5 + (k_1 A' + k_2 B') (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \alpha_{11} + \omega^2 J_2 (k_1 A' \alpha_9 + k_2 B' \alpha_3) \\
 a_{44} &= -(k_1 A')^2 H_{11}^s \alpha_{13} - (k_2 B')^2 H_{22}^s \alpha_5 - [2k_1 A' k_2 B' H_{12}^s + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s] \alpha_{11} \\
 &\quad + (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha_9 + (k_2 B')^2 A_{55}^s \alpha_3 - \omega^2 K_2 [(k_1 A')^2 \alpha_9 + (k_2 B')^2 \alpha_3]
 \end{aligned} \tag{IV.31}$$

Les composantes du vecteur de force généralisé $\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}'$ sont données par :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -A^T \bar{t} \alpha_6 \\
 F_2 &= -A^T \bar{t} \alpha_2 \\
 F_3 &= -B^T \bar{t} (\alpha_9 + \alpha_3) \\
 F_4 &= -C^T \bar{t} (\alpha_9 + \alpha_3)
 \end{aligned} \tag{IV.32}$$

$$\text{Où : } \{A^T, B^T, C^T\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E^{(n)}(z)}{\nu^{(n)}(z) - 1} \alpha^{(n)}(z) T^{-1} e^{\gamma \left(\frac{z+1}{h} \right)^\eta} \{1, z, f(z)\} dz$$

Avec

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) &= \int_0^a \int_0^b \left(X_m Y_n, X_m Y_n'', X_m Y_n'''' \right) X_m Y_n dx dy \\
 (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{10}) &= \int_0^a \int_0^b \left(X_m Y_n', X_m Y_n''', X_m'' Y_n' \right) X_m Y_n' dx dy \\
 (\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{12}) &= \int_0^a \int_0^b \left(X_m' Y_n, X_m' Y_n'', X_m''' Y_n \right) X_m' Y_n dx dy \\
 (\alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}) &= \int_0^a \int_0^b \left(X_m' Y_n', X_m'' Y_n, X_m'' Y_n'', X_m''' Y_n \right) X_m' Y_n dx dy
 \end{aligned}$$

Les paramètres non dimensionnels utilisés sont

$$\bar{w} = \left. \begin{aligned}
 &\left[\frac{10D}{a^4} \text{Re} \left[w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t \right) \right] \right] \text{ pour les plaques : } SSSS, CCCC \text{ et } CCSS \\
 &\left[\frac{10D}{a^4} \text{Re} \left[w \left(\frac{3a}{4}, \frac{b}{2}, t \right) \right] \right] \text{ pour les plaques : } CSSS \\
 &\left[\frac{10D}{a^4} \text{Re} \left[w \left(\frac{3a}{4}, \frac{3b}{4}, t \right) \right] \right] \text{ pour les plaques : } CSCS \\
 &\left[\frac{10D}{a^4} \text{Re} \left[w \left(a, \frac{b}{2}, t \right) \right] \right] \text{ pour les plaques : } FFCC \text{ et } FFSS
 \end{aligned} \right\} \quad \text{(IV.33)}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_x &= \frac{10^{-3} h^2}{a^2} \text{Re} \left[\sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z, t \right) \right], \\
 \bar{\tau}_{xy} &= \frac{10^{-3} h^2}{a^2} \text{Re} \left[\tau_{xy} (0, 0, z, t) \right], \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{10^{-3} h}{a} \text{Re} \left[\tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, z, t \right) \right], \\
 k_w &= \frac{K_w a^4}{D}, \quad k_p = \frac{K_p a^2}{D}, \quad k_u = \frac{K_u a^4}{D}, \quad k_s = \frac{K_s a^2}{D}, \quad k_l = \frac{K_l a^4}{D}, \\
 D &= \frac{h^3 E_c}{12(1 - \nu_c^2)}
 \end{aligned} \quad \text{(IV.34)}$$

CHAPITRE V

FLAMBEMENT THERMIQUE DES PLAQUES POREUSES FG

V.1. Introduction

Dans ce chapitre, notre objectif est d'étendre le travail de Bachir Bouiadjra et al. (2018) pour étudier l'effet de la porosité sur la stabilité thermique des plaques FG sur des fondations élastiques. A cet effet, le champ de déplacement est exprimé dans la même manière décrite par Bachir Bouiadjra et al. (2018). La présente théorie prend en compte l'effet d'étirement dû à sa nature quasi tridimensionnelle. De plus, le modèle satisfaisait exactement aux conditions aux limites de contraintes en haut et en bas de la plaque. La solution quasi 3D proposée ne contient que quatre inconnues. Différentes distributions de porosité sont considérées. Les charges thermiques sont supposées être sous forme de variation de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur. Pour vérifier la validité de la théorie quasi 3D actuelle, les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature. Une étude paramétrique est réalisée pour montrer l'influence des distributions de porosité et des charges thermiques sur le flambement de la plaque FG.

V.2. Propriétés effectives des matériaux de la plaque poreuse FG

Considérons une plaque poreuse rectangulaire FG d'épaisseur uniforme h , longueur a et largeur b comme indiqué sur la figure V.1. La plaque repose sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Les caractéristiques mécaniques de la plaque poreuse sont supposées varier selon une loi bien définie en fonction de la répartition de la porosité. Dans ce qui suit, cinq distributions de la porosité dans le sens de l'épaisseur sont considérées.

- Distribution de porosité **1** (Mouaici et al. 2016, Wattanasakulpong and Chaikittiratana (2015))

$$E(z) = (E_c - E_m) V(z) + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \quad (\text{V.1})$$

- Distribution de porosité **2** (Wattanasakulpong and Chaikittiratana 2015)

$$E(z) = (E_c - E_m) V(z) + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{V.2})$$

- Distribution de porosité **3** (Gupta and Talha (2018))

$$E(z) = (E_c - E_m) V(z) - \log\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) + E_m \quad (\text{V.3})$$

α Représente la fraction volumique de porosité ($\alpha < 1$). $\alpha = 0$ Indique la plaque FG parfaite.

- Distribution de porosité **4** (Chen et al. (2015))

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \\ G(z) &= G_1 [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \\ \rho(z) &= \rho_1 [1 - e_m \cos(\pi \zeta)] \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

- Distribution de porosité 5 (Chen et al. (2015))

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ G(z) &= G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ \rho(z) &= \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

Où $\zeta = z / h$, le coefficient de porosité $e_0 = 1 - E_0 / E_1 = 1 - G_0 / G_1$ ($0 < e_0 < 1$),

Les valeurs minimale et maximale du module de Young E_0 et E_1 sont liées aux valeurs minimale et maximale du module de cisaillement G_0 et G_1 par :

$$G_i = E_i / [2(1 + \nu)] \quad (i = 0,1) \quad (\text{V.6})$$

Le coefficient de porosité pour la densité est défini par :

$$e_m = 1 - \rho_0 / \rho_1, \quad (0 < e_m < 1) \quad (\text{V.7})$$

ρ_0 et ρ_1 sont respectivement les valeurs minimal et le maximal de la densité.

La relation entre la densité et le module de Young pour une forme de métal à cellules ouvertes est donnée par Gibson et Ashby (1982) et Choi et Lakes (1995) comme suit

$$\frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \quad (\text{V.8})$$

Cette dernière équation peut être utilisée pour trouver la relation entre e_0 et e_m comme se suit :

$$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (\text{V.9})$$

$V(z)$ est la fraction volumique et on suppose qu'elle suite une loi de puissance simple comme mentionnée par Bourada et al. (2018), Attia et al. (2018), Bousahla et al. (2016), Achouri et al. (2019)

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{V.10})$$

Où p est l'indice de la loi de puissance. On note que, lorsque $p = 0$, on obtient une plaque entièrement homogène en céramique. Alors que, si $p = \infty$, on obtient une plaque entièrement métallique. E_m et E_c sont le module d'Young du métal et de la céramique, respectivement.

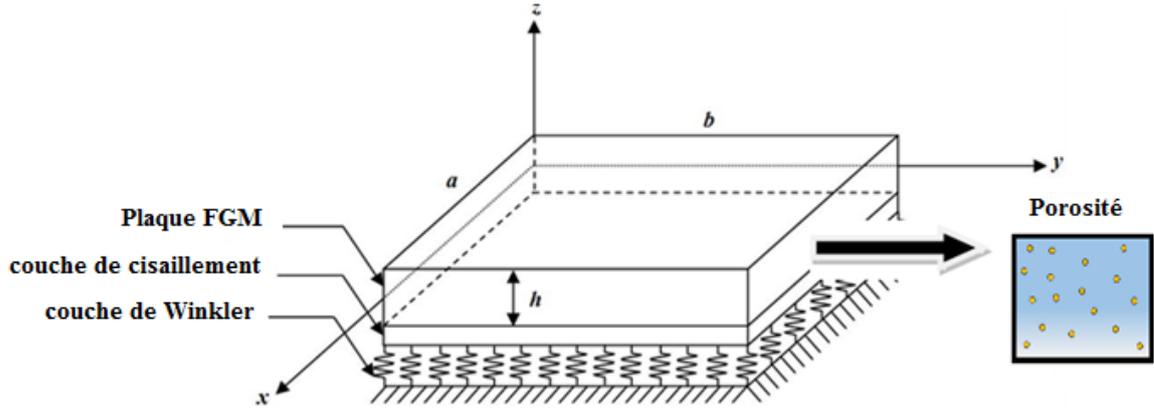


Figure V.2: Système de coordonnées et géométrie des plaques poreuses rectangulaires FG sur fondation élastique

V.3. Cinématique

Le champ de déplacement satisfaisant aux conditions de contraintes de cisaillement transversales (et donc de déformations) disparaissant à $(x, y, \pm h / 2)$ sur les surfaces externe (supérieure) et interne (inférieure) de la plaque, est donné comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b + g(z) w_s \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Avec

$$f(z) = -z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right), \quad g(z) = \frac{1}{5} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{V.12})$$

Où $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_b(x, y)$, et $w_s(x, y)$ sont les quatre fonctions de déplacements inconnus du plan moyen de la plaque.

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} \\ \varepsilon_z &= g'(z) \varepsilon_z^0 \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.14})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = w_s$$

V.4. Equations constitutives

Les relations constitutives linéaires sont

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_t T \\ \varepsilon_y - \alpha_t T \\ \varepsilon_z - \alpha_t T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{V.15})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. α_t est le coefficient de dilatation thermique, et T est la distribution de la charge de température. En utilisant les propriétés du matériau définies ci-dessus, les coefficients de rigidité, Q_{ij} peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \\ Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

V.5. Équations de mouvement

Considérant le principe de travaux virtuels, les expressions suivantes peuvent être obtenues

$$\int_{\Omega} \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) d\Omega dz + \int_{\Omega} f_e \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{V.17})$$

Où Ω est la surface supérieure.

Et f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation Pasternak, elle peut être énoncée comme suit :

$$f_e = k_w (w_b + g(z)w_s) - k_p \nabla^2 (w_b + g(z)w_s) \quad (\text{V.18})$$

Où

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$$

En Substituant les équations (V.13) et (V.18) dans (V.17) et intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, on peut obtenir

$$\int_{\Omega} \left\{ N_1 \delta \varepsilon_x^0 + M_1 \delta k_x + P_1 \delta \eta_x + N_2 \delta \varepsilon_y^0 + M_2 \delta k_y + P_2 \delta \eta_y + R_3 \delta \varepsilon_z^0 + Q_4 \delta \gamma_{yz}^0 + K_4 \delta \gamma_{yz}^0 + Q_5 \delta \gamma_{xz}^0 + K_5 \delta \gamma_{xz}^0 + N_6 \delta \gamma_{xy}^0 + M_6 \delta k_{xy} + P_6 \delta \eta_{xy} + \left[k_w (w_b + g(z)w_s) - k_p \nabla^2 (w_b + g(z)w_s) \right] \delta w \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{V.19})$$

Les résultantes des contraintes N, M, P, Q et R sont définies par

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, P_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, f(z)) dz, \quad (i = 1, 2, 6) \\ (K_i, Q_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(f'(z), g(z)) dz, \quad (i = 4, 5) \\ R_i &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i g'(z) dz, \quad (i = 3) \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

Les équations d'équilibre gouvernantes peuvent être dérivées à partir l'équation. (V.19) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en mettant les termes multipliés par les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_b , δw_s à zéro. On peut ainsi obtenir les équations d'équilibre associées à la théorie actuelle de la déformation par cisaillement

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \bar{N} - f_e &= 0 \\
 - \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 P_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_4}{\partial y} + \frac{\partial K_4}{\partial y} + \frac{\partial Q_5}{\partial x} + \frac{\partial K_5}{\partial x} - R_3 + g(z)\bar{N} - g(z)f_e &= 0
 \end{aligned} \tag{V.21}$$

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x \frac{\partial^2 (w_b + g(z)w_s)}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + g(z)w_s)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 (w_b + g(z)w_s)}{\partial y^2} \right] \tag{V.22}$$

Les équations de stabilité pour les plaques FG peuvent être obtenues au moyen du critère d'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque sous charges thermiques est défini en termes de composants de déplacement u_0^0, v_0^0, w_b^0 et w_s^0 . Les composants de déplacement d'un état voisin à l'équilibre stable se diffèrent par u_0^1, v_0^1, w_b^1 et w_s^1 par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, les déplacements totaux d'un état voisin sont

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_b = w_b^0 + w_b^1, \quad w_s = w_s^0 + w_s^1 \tag{V.23}$$

En conséquence, les résultantes des contraintes sont divisées en deux termes représentant l'équilibre stable et l'état voisin. Les résultantes de contrainte d'exposant 1 sont des fonctions linéaires avec les déplacements d'exposant 1. Compte tenu de tous ceux mentionnés ci-dessus et en utilisant des équations (V.21) et (V.23), les équations de stabilité deviennent

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1^1}{\partial x} + \frac{\partial N_6^1}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial N_6^1}{\partial x} + \frac{\partial N_2^1}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_1^1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2^1}{\partial y^2} + \bar{N}^1 - f_e^1 &= 0 \\
 - \frac{\partial^2 P_1^1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P_2^1}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 P_6^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_4^1}{\partial y} + \frac{\partial K_4^1}{\partial y} + \frac{\partial Q_5^1}{\partial x} + \frac{\partial K_5^1}{\partial x} - R_3^1 + g(z)\bar{N}^1 - g(z)f_e^1 &= 0
 \end{aligned} \tag{V.24}$$

Avec

$$\bar{N}^1 = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + g(z)w_s^1)}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + g(z)w_s^1)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + g(z)w_s^1)}{\partial y^2} \right] \tag{V.25}$$

Les termes N_x^0, N_y^0 et N_{xy}^0 sont les résultantes de la force de pré-flambement obtenus par :

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha_t(z)E(z)T}{1-\nu} dz, \quad N_{xy}^0 = 0 \tag{V.26}$$

En utilisant l'équation (V.15) dans (V.20), les contraintes résultantes de la plaque peuvent être liées aux déformations totales par :

$$\begin{aligned}
 N_i^1 &= A_{ij}\varepsilon_j^0 + B_{ij}k_j + C_{ij}\eta_j + F_{ij}\varepsilon_z^0 - N_i^T, & (i = 1, 2, 6) \\
 M_i^1 &= B_{ij}\varepsilon_j^0 + G_{ij}k_j + H_{ij}\eta_j + K_{ij}'\varepsilon_z^0 - M_i^T, & (i = 1, 2, 6) \\
 P_i^1 &= C_{ij}\varepsilon_j^0 + H_{ij}k_j + L_{ij}\eta_j + O_{ij}\varepsilon_z^0, -P_i^T & (i = 1, 2, 6) \\
 Q_i^1 &= Q_{ij}'\gamma_j^0 + P_{ij}'\gamma_j^0, & (i = 4, 5) \\
 K_i^1 &= Q_{ij}'\gamma_j^0 + S_{ij}\gamma_j^0, & (i = 4, 5) \\
 R_i^1 &= F_{ij}\varepsilon_j^0 + K_{ij}'k_j + O_{ij}\eta_j + U_{ij}\varepsilon_z^0 - R_i^T, & (i = 3)
 \end{aligned} \tag{V.27}$$

Où

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, f(z), g(z), f'(z), g'(z))dz \\
 (G_{ij}, H_{ij}, K_{ij}', L_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z^2, zf(z), zg'(z), f^2(z))dz \\
 (O_{ij}, P_{ij}', Q_{ij}', S_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(f(z)g'(z), g^2(z), g(z)f'(z), f'^2(z))dz \\
 U_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(g'^2(z))dz
 \end{aligned} \tag{V.28}$$

Les contraintes et moments résultants, $N_1^T = N_2^T$, $M_1^T = M_2^T$, $P_1^T = P_2^T$ et R_3^T dus à la charge thermique, sont définis par

$$\begin{Bmatrix} N_1^T \\ M_1^T \\ P_1^T \\ R_3^T \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1+2\nu)\alpha_t(z)T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \end{Bmatrix} dz, \tag{V.29}$$

V.6. Solution du problème

Pour la solution analytique des équations. (V.24), la méthode Navier est utilisée dans des conditions aux limites spécifiées. Les fonctions de déplacement sont sélectionnées par la série de Fourier suivante

$$\begin{Bmatrix} u_0^1(x, y) \\ v_0^1(x, y) \\ w_b^1(x, y) \\ w_s^1(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U^1 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V^1 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_b^1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_s^1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \tag{V.30}$$

Où U^1, V^1, W_b^1 et W_s^1 sont des paramètres arbitraires à déterminer et $\alpha=m\pi/a, \beta=n\pi/b$.

En remplaçant l'équation (V.30) dans (V.24), on obtient :

$$[K]\{\Delta\} = 0, \quad (\text{V.31})$$

Où $\{\Delta\} = \{U^1, V^1, W_b^1, W_s^1\}^t$ et $[K]$ est la matrice de rigidité symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{V.32})$$

Avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66} \\ a_{12} &= \alpha\beta (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -1(\alpha^3 B_{11} + \alpha\beta^2 (B_{12} + 2B_{66})) \\ a_{14} &= \alpha^3 C_{11} + \alpha\beta^2 (C_{12} + 2C_{66}) - \alpha F_{13} \\ a_{22} &= \beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66} \\ a_{23} &= -(\beta^3 B_{22} + \alpha^2 \beta (B_{12} + 2B_{66})) \\ a_{24} &= +\beta^3 C_{22} + \alpha^2 \beta (C_{12} + 2C_{66}) - \beta F_{23} \\ a_{33} &= +\alpha^4 G_{11} + \beta^4 G_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (G_{12} + 2G_{66}) + k_w + k_p (\alpha^2 + \beta^2) + N_x^0 \alpha^2 + N_y^0 \beta^2 \\ a_{34} &= -\alpha^4 H_{11} - \beta^4 H_{22} - 2\alpha^2 \beta^2 (H_{12} + 2H_{66}) + \alpha^2 K'_{13} + \beta^2 K'_{23} + k_w g(-h/2) \\ &\quad + k_p g(-h/2)(\alpha^2 + \beta^2) + (N_x^0 \alpha^2 + N_y^0 \beta^2) \\ a_{44} &= +\alpha^4 L_{11} + \beta^4 L_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (L_{12} + 2L_{66}) + \beta^2 (Q'_{44} + P'_{44}) + \alpha^2 (Q'_{55} + P'_{55}) + \beta^2 (S_{44} + Q_{44}) \\ &\quad + \alpha^2 (S_{55} + Q_{55}) - 2\alpha^2 O_{13} - 2\beta^2 O_{23} + U_{33} + k_w g(-h/2)^2 + k_p g(-h/2)^2 (\alpha^2 + \beta^2) + (N_x^0 \alpha^2 + N_y^0 \beta^2) \end{aligned} \quad (\text{V.33})$$

V.7. Solution de flambage thermique

Dans ce qui suit, la solution de l'équation $|K| = 0$ pour différents types de conditions de charge thermique est présentée. Le changement de température ne varie que suivant l'épaisseur.

V.7.1. Flambement des plaques FG sous élévation de température uniforme

La température initiale de la plaque est supposée T_i . La température est uniformément élevée jusqu'à la valeur finale T_f dans laquelle la plaque flambe. Le changement de température est :

$$\Delta T = T_f - T_i. \quad (\text{V.34})$$

V.7.2. Flambement des plaques FG soumises à un changement de température graduel sur toute l'épaisseur

Pour les plaques FG, le changement de température n'est pas uniforme dans ce cas. La température est supposée varier en fonction d'une loi de puissance à travers l'épaisseur comme suit

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\eta + T_m \quad (\text{V.35})$$

Où la différence de température de flambement est $\Delta T = T_c - T_m$. T_c et T_m sont la température de la surface supérieure, qui est riche en céramique, et de la surface inférieure, qui est riche en métal, respectivement. η est l'exposant de température ($0 < \eta < \infty$).

Notez que la valeur de η égale à l'unité représente un changement de température linéaire à travers l'épaisseur. Alors que la valeur de η différent à l'unité représente un changement de température non linéaire à travers l'épaisseur.

Les expressions adimensionnelles des paramètres des fondations élastiques de Winkler et Pasternak, ainsi que la différence critique de température de flambement utilisé dans la présente analyse sont :

$$k_w = \frac{a^4}{D} K_w, \quad k_p = \frac{a^2}{D} K_p, \quad T_{cr} = 10^{-3} \Delta T_{cr} \quad (\text{V.36})$$

Avec $D = E_c h^3 / [12(1 - \nu^2)]$

CHAPITRE VI

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

VI.1. Introduction

Dans cette section nous allons présenter les résultats numériques des deux solutions présentées aux chapitres IV et V ainsi que leurs interprétations. Pour cela, la première partie de ce chapitre sera dédiée aux résultats de la plaque sandwich FG sous sollicitations thermodynamiques. La deuxième partie est consacrée aux résultats obtenus à partir de l'étude de flambement thermique des plaques poreuses FG. Pour chaque analyse, nous allons représenter des études paramétriques pour voir l'effet de quelques paramètres intervenant dans le calcul.

VI.2. Comportement thermodynamique des plaques sandwich FG

L'objectif de cette partie est de vérifier la précision de la formulation représentée dans le chapitre IV puis de voir les effets des fondations élastiques, la charge thermodynamique et les conditions aux limites sur le comportement mécanique des différents types de plaques sandwich FG. Pour ce faire, certains exemples numériques sont résolus avec la présente formulation. Les résultats obtenus sont comparés avec les données disponibles dans la littérature.

La plaque sandwich FG est composée soit par un mélange d'alliage d'aluminium (Al) et carbure de silicium (SiC) ou alliage d'aluminium (Al) et le dioxyde de zirconium ZrO_2 dont les propriétés des matériaux sont données par :

Metal (Aluminum, Al) :

$$E_m = 70 \times 10^9 \text{ N} / \text{m}^2; \quad \nu = 0.3; \quad \rho_m = 2707 \text{ kg} / \text{m}^3; \quad \alpha_m = 23.4 \times 10^6 / \text{C}$$

Céramique (Zirconia, ZrO_2)

$$E_c = 151 \times 10^9 \text{ N} / \text{m}^2; \quad \nu = 0.3; \quad \rho_c = 3000 \text{ kg} / \text{m}^3; \quad \alpha_c = 10 \times 10^6 / \text{C}$$

Céramique (Silicon carbide, SiC)

$$E_c = 427 \times 10^9 \text{ N} / \text{m}^2; \quad \nu = 0.17; \quad \rho_c = 3100 \text{ kg} / \text{m}^3; \quad \alpha_c = 4.3 \times 10^6 / \text{C}$$

Plusieurs types de plaques sandwich sont présentées en fonction de l'épaisseur de la couche centrale.

- La plaque sandwich FGM (1-0-1) : La plaque est symétrique et constituée de deux couches FGM d'épaisseur égale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale, $h_1 = h_2 = 0$.
- La plaque sandwich FGM (1-1-1) : la plaque est symétrique et constituée de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons $h_1 = -h / 6$, $h_2 = h / 6$
- La plaque sandwich FGM (2-1-2) : La plaque est symétrique où $h_1 = -h / 10$, $h_2 = h / 10$
- La plaque sandwich FGM (2-2-1) : La plaque est non symétrique où $h_1 = -h / 10$, $h_2 = h / 4$
- La plaque sandwich FGM (1-2-1) : La plaque est symétrique où $h_1 = -h / 4$, $h_2 = h / 4$

Dans cette section, les données suivantes sont utilisées (sauf en cas d'indication contraire)

$$p = 2, \eta = 2, \omega = 2, t = 3, \bar{t} = 2, T^- = 20, Tr = 2$$

Dans le premier exemple, la précision de la théorie utilisée est testée pour une plaque sandwich FG simplement supportée de type Al-SiC / SiC / Al-SiC avec ou sans fondation élastique. Les résultats sont comparés avec ceux obtenu par Sobhy et Zenkour (2015). Dans le tableau VI.1, la déflexion centrale du sandwich FG de type (1-1-1) est comparée avec différentes théories bidimensionnelles. Nos résultats sont en excellent accord avec toutes les théories sauf la CPT où il y a une légère différence. Cela revient au fait que cette dernière donne des résultats inexacts pour les plaques épaisses.

Tableau VI.1: Déflexion centrale d'une plaque sandwich FG avec et sans fondation ($a/h=10, a=b=0.5, p=0$)

Théorie	$k_w=k_p=0$	$k_w=300, k_p=0$	$k_w=300, k_p=200$
CPT (Sobhy et Zenkour 2015)	1.57776	1.63760	3.26941
FDPT (Sobhy et Zenkour 2015)	1.52956	1.58751	3.16646
HDPT (Sobhy et Zenkour 2015)	1.52983	1.58780	3.16701
SDPT (Sobhy et Zenkour 2015)	1.52993	1.58791	3.16723
Présente (Mekerbi et al.2019)	1.52988	1.58786	3.16714

Une deuxième comparaison est présentée dans le tableau VI.2 sous forme de contraintes axiales et de contraintes de cisaillement transversales d'une plaque sandwich FG avec ou sans fondation élastique. Comme le montre ce tableau, il existe un excellent accord entre les résultats prédits par le présent modèle et ceux déterminés par Sobhy et Zenkour (2015).

A partir des deux comparaisons, il est clair que cette théorie est très précise pour la détermination de la réponse mécanique des plaques sandwich FG.

Tableau VI.2 : Contrainte axiale et contrainte tangentiel transversale d'une plaque sandwich FG avec et sans fondation ($a/h=10, a=b=0.5, p=0$)

Théorie	$-\sigma_x$			$-\tau_{xz}$		
	$K_w=K_p=0$	$K_w=300, K_p=0$	$K_w=300, K_p=200$	$K_w=K_p=0$	$K_w=300, K_p=0$	$K_w=300, K_p=200$
CPT (Sobhy et Zenkour 2015)	0.71414	0.71455	0.72585	-	-	-
FDPT (Sobhy et Zenkour 2015)	0.70286	0.70325	0.71387	0.24715	0.24741	0.25472
HDPT (Sobhy et Zenkour 2015)	0.70474	0.70512	0.71580	0.30717	0.30750	0.31666
SDPT (Sobhy et Zenkour 2015)	0.70487	0.70526	0.71594	0.31681	0.31718	0.32663
Présente (Mekerbi et al.2019)	0.70484	0.70523	0.71590	0.31414	0.31448	0.32385

Dans le tableau VI.3, les déplacements centraux non dimensionnels de la plaque sandwich FG reposant sur différentes fondations élastiques sous charge thermodynamique avec diverses conditions aux limites sont indiqués.

Tableau VI.3: déflexion centrale d'une plaque sandwich FG avec et sans fondation pour différentes conditions aux limites ($a/h=10$, $a=b=0.5$, $p=0$)

Conditions aux limites	Pasternak			Kerr ($k_f=100$)				
	$K_w=K_p=0$	$K_w=300$ $K_p=0$	$K_w=300$ $K_p=200$	$K_u=100$ $K_s=0$	$K_u=100$ $K_s=100$	$K_u=200$ $K_s=100$	$K_u=200$ $K_s=200$	$K_u=300$ $K_s=300$
SSSS	1.52988	1.58786	3.16714	1.53925	1.75083	1.83938	2.27800	2.42631
CCCC	2.11071	2.20015	8.58069	2.12510	2.59019	2.80239	4.09534	4.64079
FFCC	1.99730	2.08379	7.44468	2.01121	2.43416	2.62558	3.76397	4.23187
CSCS	3.73693	3.89299	32.26249	3.76206	4.77686	5.26528	8.72361	10.47001
CCSS	1.80473	1.87696	4.86867	1.81638	2.13356	2.27152	3.02017	3.29779
CSSS	-2.44024	-2.53687	-7.86416	-2.45583	-2.93739	-3.15142	-4.38004	-4.86327

A partir ce tableau, on peut voir que :

- Les valeurs les plus faibles du déplacement sont obtenues pour une plaque sandwich sans fondation élastique et ce quel que soit le type des conditions aux limites utilisées.
- Généralement, la présence de la fondation Kerr génère des résultats nettement supérieurs à ceux d'une fondation Winkler ou Pasternak
- L'augmentation des paramètres de la fondation Pasternak augmente considérablement les valeurs du déplacement par rapport à la fondation Kerr où l'augmentation de ses paramètres n'affecte que très peu les déplacements.
- Pour tous les types de fondation et quelles que soient les valeurs de leurs paramètres, la condition aux limites CSCS génère les résultats les plus élevés en termes de déplacement.

La figure VI.1 illustre la variation de la flèche \bar{w} en fonction du rapport a/h pour une plaque sandwich FG (1-1-1) sans fondation élastique. Les déflexions sont données pour cinq conditions aux limites différentes. On remarque que la déflexion non dimensionnelle de la plaque sandwich diminue avec l'augmentation du rapport a/h pour toutes les conditions aux limites. De plus, les valeurs de déflexion minimales sont obtenues pour une plaque sandwich SSSS et les valeurs maximales pour CSCS.

Pour examiner l'influence de la rigidité des fondations sur la déflexion centrale des plaques sandwich SSSS, la variation de la déflexion centrale des plaques sandwich FG type 2-1-2 est illustrée dans la figure VI.2 par rapport à la rigidité des fondations élastiques.

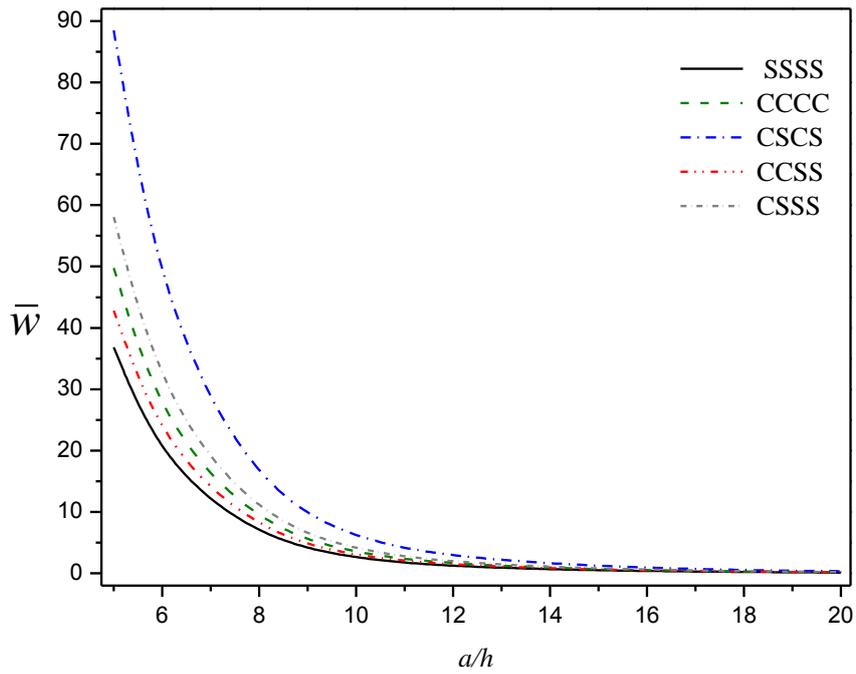


Figure VI.1: Variation de la déflexion en fonction du rapport a/h d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) avec différentes conditions aux limites (sans fondation)

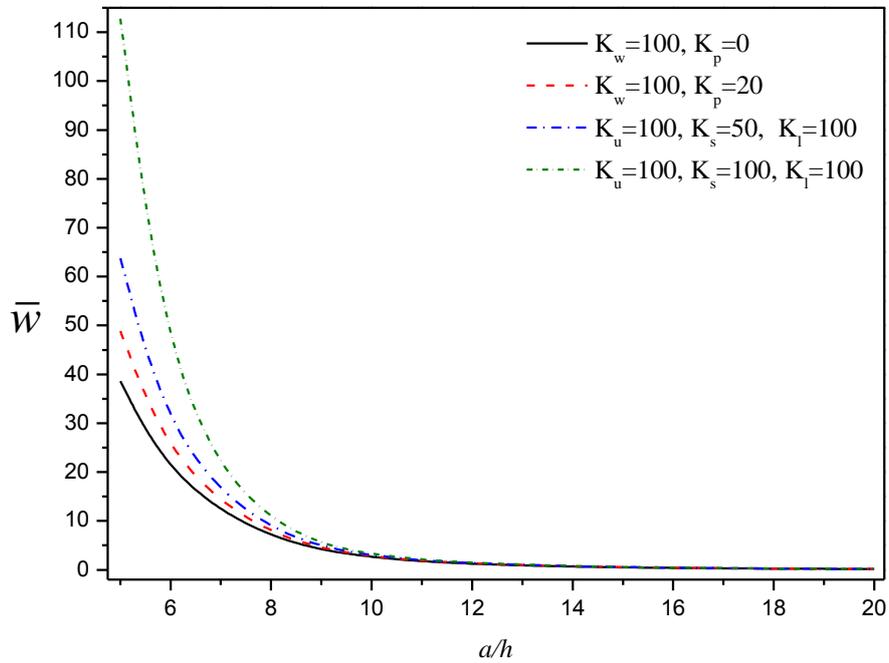


Figure VI.2: Variation de la flèche en fonction du rapport a/h d'une plaque sandwich carrée FGM (2-1-2) reposant sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS.

La principale conclusion de cette figure est que l'augmentation des paramètres de rigidité de la fondation augmente la flèche centrale. On constate que la plaque sur la fondation Winkler donne la valeur de déflexion la plus faible. Les valeurs les plus élevées sont obtenues pour une plaque sur fondation Kerr. Il est également noté que plus que les paramètres de la fondation Kerr augmentent, les valeurs de déflexion augmentent en conséquence. De plus, on remarque que la déflexion centrale de la plaque sandwich diminue avec l'augmentation du rapport a/h pour tous les types de fondation élastique.

Dans la figure VI.3, une plaque sandwich de type 1-1-1 reposant sur une fondation élastique est analysée pour différentes valeurs du paramètre de température \bar{t} et sous condition d'appuis simples SSSS.

La principale remarque de cette figure est que la déflexion centrale de la plaque sandwich diminue à mesure que le rapport a/h augmente pour les deux types de fondation élastique. De plus, on remarque que l'augmentation du paramètre de température \bar{t} augmente le déplacement et la fondation Kerr génère les résultats les plus élevés par rapport à ceux de Pasternak.

Les figures VI.4 et VI.5 montrent la variation de la déflexion \bar{w} avec le paramètre de fréquence ω pour une plaque sandwich FG reposant sur les fondations Pasternak et Kerr, respectivement. Différentes conditions aux limites sont utilisées. A partir de ces figures, on peut remarquer qu'il y a une forte réduction des valeurs de déflexion pour une petite augmentation des valeurs du paramètre de fréquence ω . Ensuite, à partir d'une valeur du paramètre de fréquence ω égale à 3, l'amplitude de la déflexion diminue de manière moins rapide et s'approche de zéro. En outre, comme indiqué ci-dessus, la condition aux limites CSCS donne les valeurs de déplacement les plus élevées identiques à celles de la fondation Kerr comparativement au modèle Pasternak.

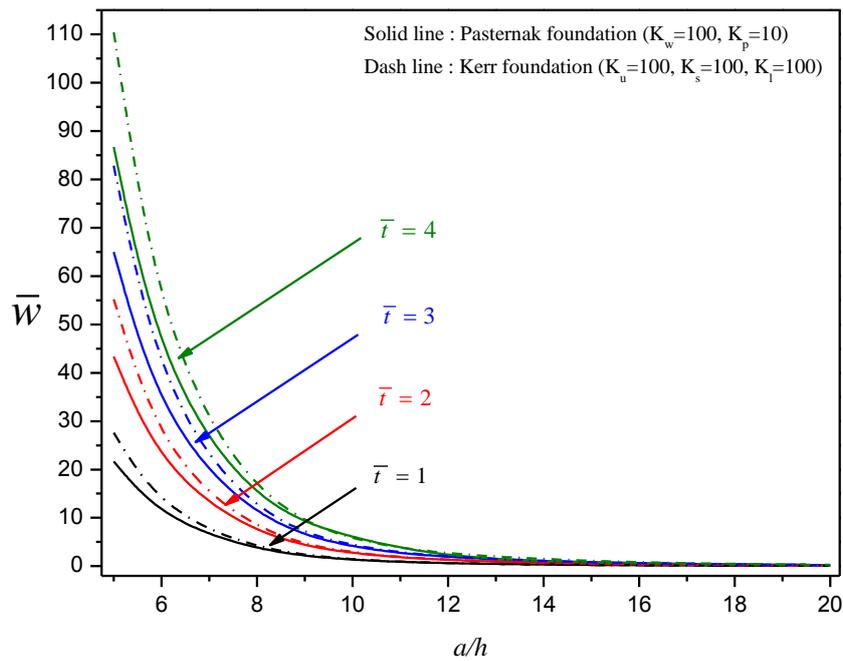


Figure VI.3: Variation de la déflexion en fonction du rapport a/h d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS pour différentes valeurs du paramètre de température.

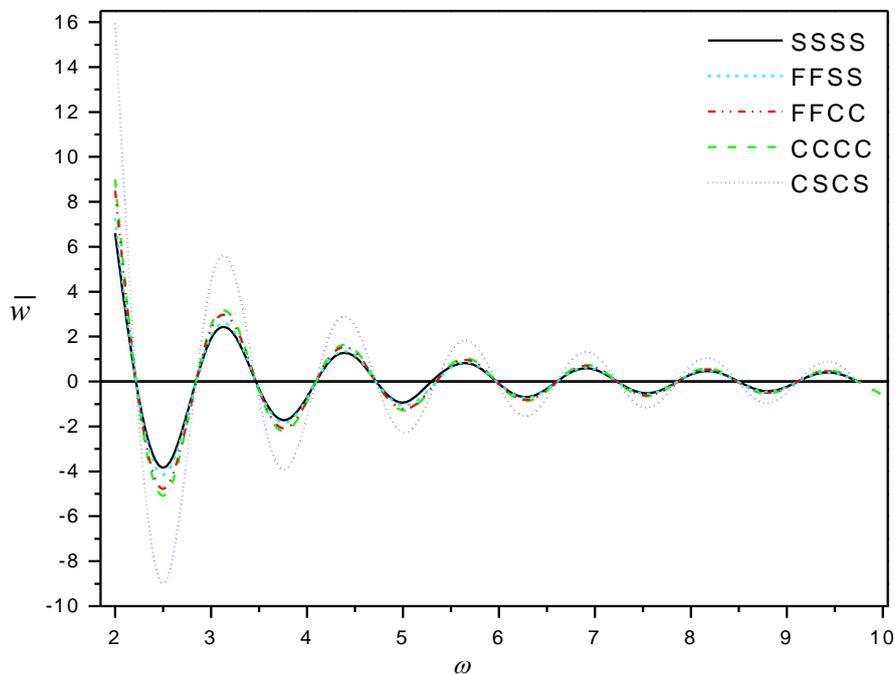


Figure VI.4: Variation de la déflexion en fonction du paramètre de fréquence ω d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur la fondation Pasternak ($p=1, \eta=2, t=5, \bar{t}=2, Tr=4, a/h=10, K_w=100, K_p=10$).

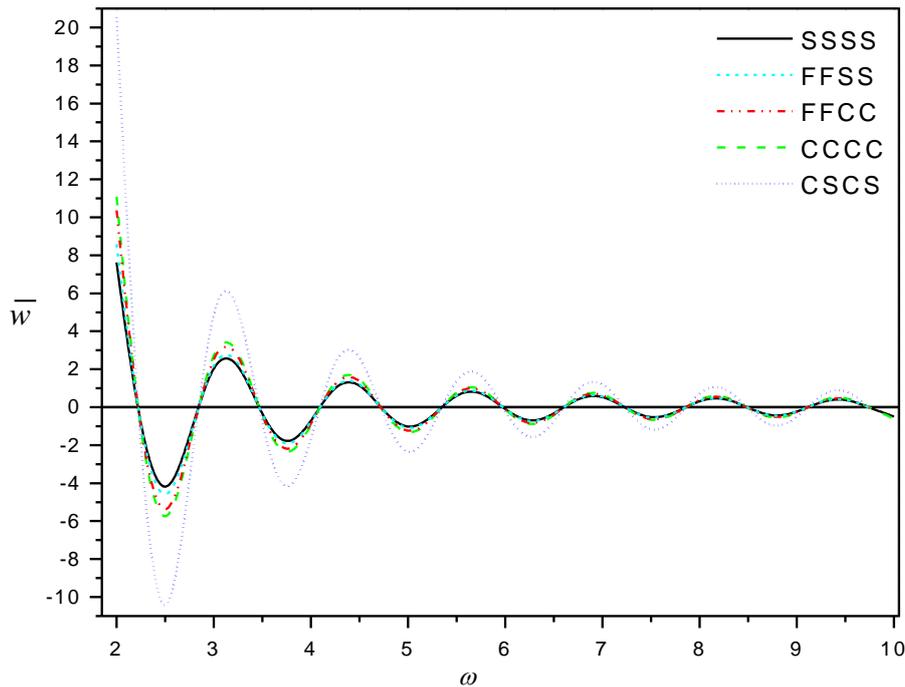


Figure VI.5: Variation de la déflexion w en fonction du paramètre de fréquence ω de la plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur la fondation Kerr. ($p=1$, $\eta=2$, $t=5$, $\bar{t}=2$, $Tr=4$, $a/h=10$, $K_u=K_l=K_s=100$).

La figure VI.6 présente la variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ en fonction du rapport a/h d'une plaque sandwich FG de type (1-1-1) avec différentes conditions aux limites et sans fondation élastique.

On peut remarquer que la contrainte axiale de la plaque sandwich diminue à mesure que le rapport a/h augmente pour toutes les conditions aux limites. De plus, les valeurs de contrainte minimales sont obtenues pour une plaque sandwich SSSS et maximales pour CSCS.

Dans la figure VI.7, nous présentons la variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrée FGM (2-1-2) reposant sur les fondations Pasternak et Kerr pour différentes valeurs du paramètre de température \bar{t} . La condition à la limite SSSS est considérée. La remarque la plus intéressante est que le type de fondation affecte légèrement les contraintes axiales. L'augmentation du paramètre de température \bar{t} augmente considérablement les contraintes axiales dans la couche centrale de la plaque qui est une couche isotrope (céramique) tandis que les couches supérieure et inférieure qui sont en FGM sont légèrement affectées.

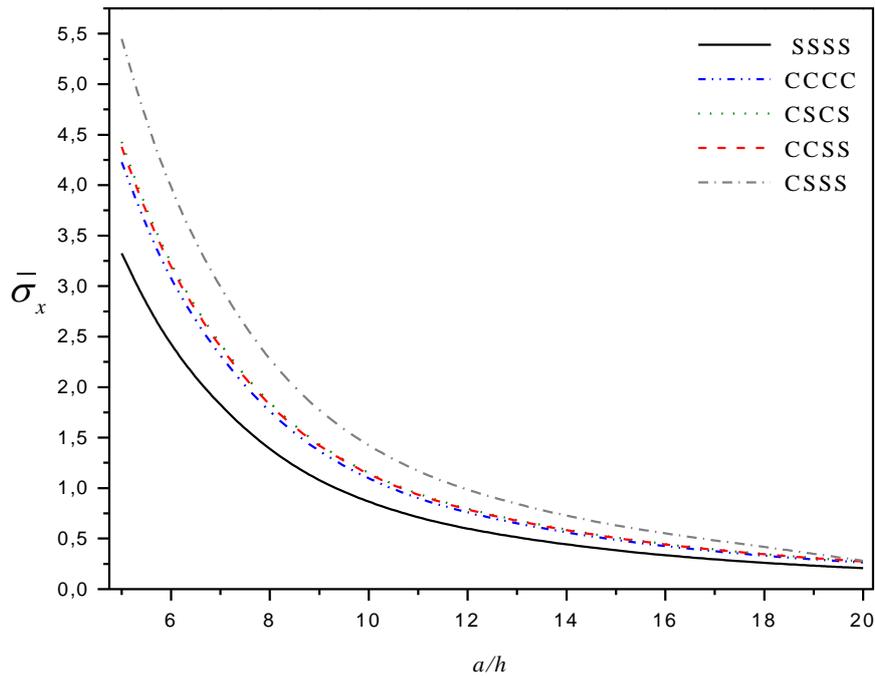


Figure VI.6: Variation de la contrainte axiale en fonction du rapport a/h de la plaque sandwich carrée FGM (1-1) avec différentes conditions aux limites (sans fondation). ($t=2$).

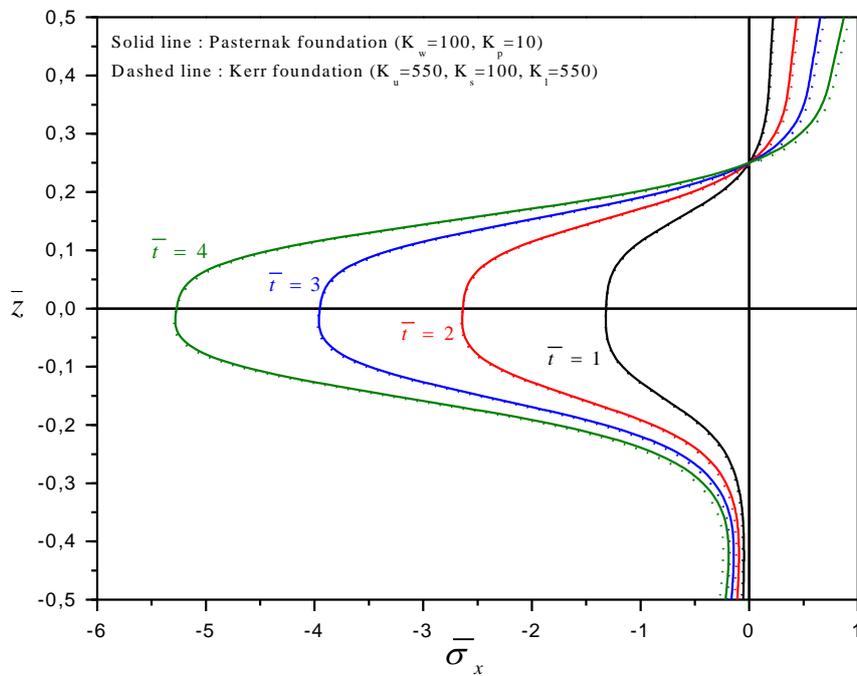


Figure VI.7: Variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrée FGM (2-1-2) reposant sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS pour différentes valeurs du paramètre de température ($p=3$, $\eta=1$, $t=4$, $a/h=5$)

La figure VI.8 illustre la variation de la contrainte de cisaillement transverse τ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque sandwich carrée FGM (2-1-2) reposant sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS pour différentes valeurs du paramètre de température \bar{t} . L'augmentation du paramètre de température augmente considérablement la contrainte de cisaillement transversale dans la couche centrale de la plaque. De plus, la valeur maximale se produit à un point sur le plan médian de la plaque sandwich. Les figures VI.9 à VI.10 présentent les modes propres d'une plaque sandwich carrée FG pour différentes conditions aux limites. À partir de ces figures, on peut voir que la fondation élastique Kerr donne les amplitudes les plus élevées par rapport à celles de Pasternak.

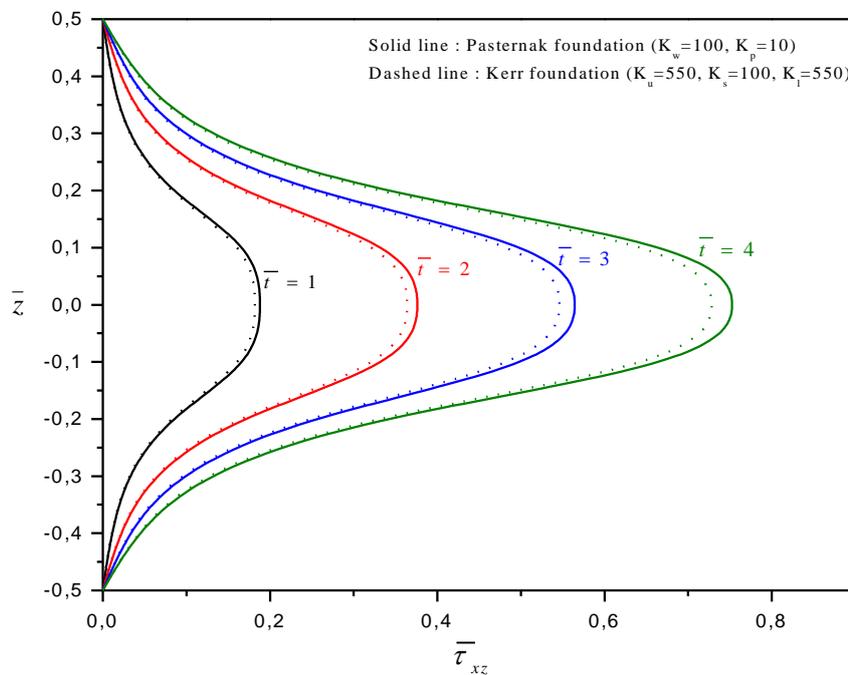


Figure V.8: Variation des contraintes transversales de cisaillement à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich carrée FGM (2-1-2) reposant sur les fondations Pasternak et Kerr avec condition aux limites SSSS pour différentes valeurs du paramètre de température \bar{t} ($p=3$, $\eta=1$, $t=4$, $a/h=5$)

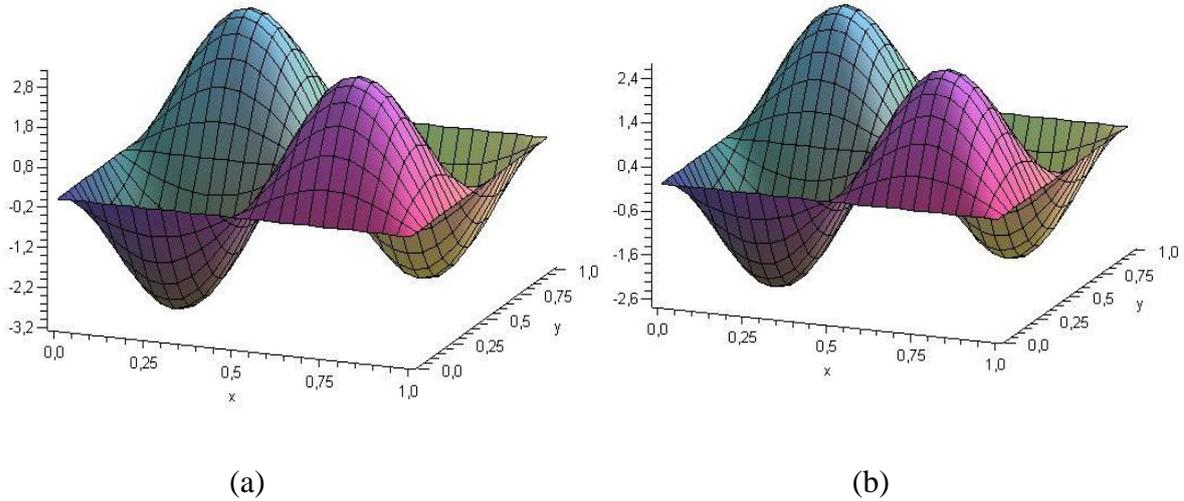


Figure VI.9: Modes propres pour la fréquence naturelle ($\omega = 2$) d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur deux types de fondation avec condition aux limites SSSS ($a/h = 10$).
 a) Fondation Pasternak. (b) Fondation Kerr.

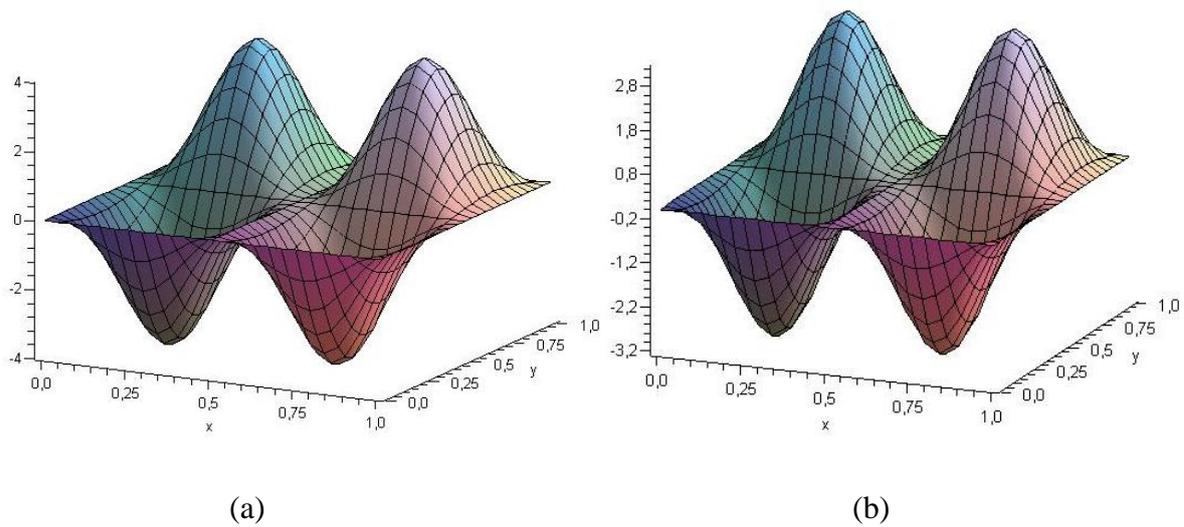


Figure VI.10: Modes propres pour la fréquence naturelle ($\omega = 2$) d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur deux types de fondation avec une condition aux limites CCSS ($a/h = 10$).
 a) Fondation Pasternak. (b) Fondation Kerr.

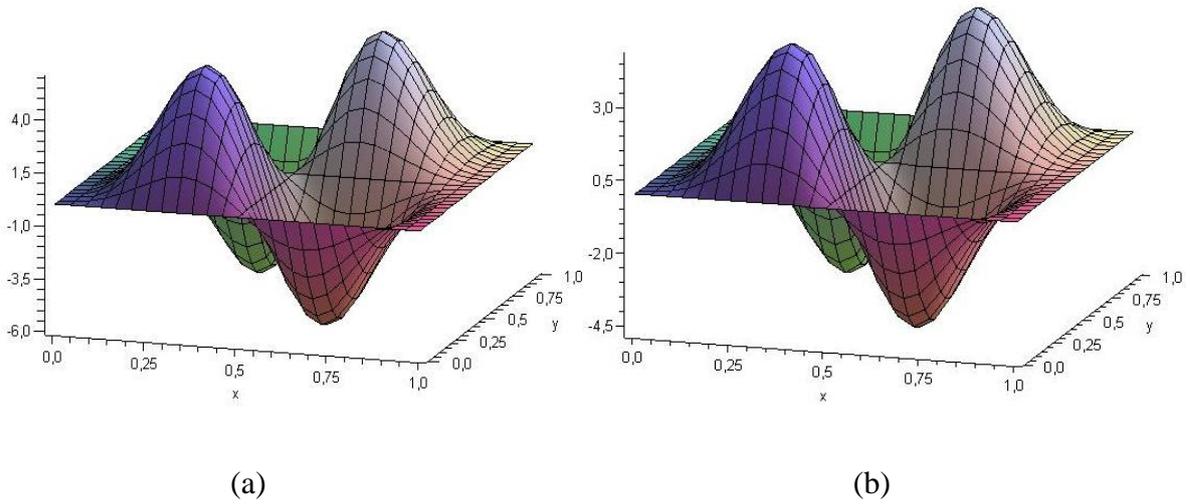


Figure VI.11: Modes propres pour la fréquence naturelle ($\omega = 2$) d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur deux types de fondation avec une condition aux limites CSSS ($a/h = 10$).
 a) Fondation Pasternak. (b) Fondation Kerr

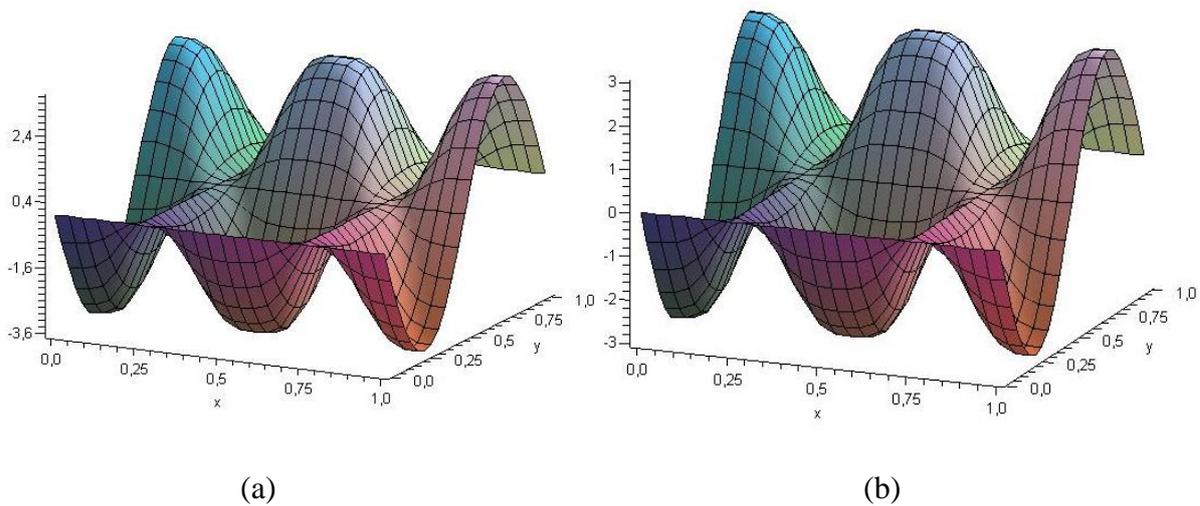


Figure VI.12: Modes propres pour la fréquence naturelle ($\omega = 2$) d'une plaque sandwich carrée FGM (1-1-1) reposant sur deux types de fondation avec une condition aux limites FFSS ($a/h = 10$). a) Fondation Pasternak. (b) Fondation Kerr.

VI.3. Flambement thermique des plaques poreuses FG

Dans cette section, le flambement thermique d'une plaque FG poreuse reposant sur une fondation élastique est étudié avec une solution quasi 3D.

La plaque FGM utilisée est un mélange d'aluminium et alumine avec les propriétés suivantes :

- Metal (Aluminium): $E_M = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0.3$; $\alpha_M = 23,40 \cdot 10^{-6} / K$

- Ceramic (Alumina): $E_C = 380 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0.3$; $\alpha_C = 7,410 \cdot 10^{-6} / K$

Premièrement, des tests numériques sont effectués pour confirmer la précision du modèle proposé. Pour cela, les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la solution 2D de Tebboun et al. (2015) et le modèle 3D de Van do et Chin-Hyung (2018).

Les tableaux VI.4-7 présentent une comparaison de la température critique de flambement pour différentes charges de température et différents cas de fondation élastique.

Dans le tableau VI.4, une étude comparative est réalisée entre les résultats obtenus par la présente solution quasi 3D et ceux rapportés par Tebboun et al. (2015) et Van do et Chin-Hyung (2018). Les résultats sont présentés pour une plaque FG carrée parfaite (sans porosité) sous trois cas d'augmentation de température à travers l'épaisseur.

Les résultats de la présente théorie montrent un très bon accord avec les deux solutions mentionnées pour la charge de température uniforme et linéaire. Dans le cas de la charge de température non linéaire, il y a une légère différence. Ceci est dû au fait que la solution de Tebboun et al. (2015) basée sur un modèle 2D qui néglige l'effet d'étirement. Ce dernier a un effet significatif dans le cas de plaques épaisses.

Tableau VI.4: température critique de flambement d'une plaque FG carrée sans fondation élastique ($a/h = 10$) sous différentes charges thermiques ($\eta = 3$)

p	theory	Uniform	Linear	Non linear
0	Tebboun et al. (2015) 2D	1,6188	3,2276	6,4553
	Van do and Chin-Hyung (2018) 3D	1,6091	3,2082	/
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	1,6049	3,1999	6,3997
1	Tebboun et al. (2015) 2D	0,7585	1,4131	2,8270
	Van do and Chin-Hyung (2018) 3D	0,7548	1,4062	/
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	0,7529	1,4027	2,8062
5	Tebboun et al. (2015) 2D	0,6790	1,1601	2,0152
	Van do and Chin-Hyung (2018) 3D	0,6743	1,1520	/
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	0,6885	1,1765	2,0438
10	Tebboun et al. (2015) 2D	0,6925	1,2184	2,0972
	Van do and Chin-Hyung (2018) 3D	0,6871	1,2088	/
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	0,7039	1,2385	2,1319

Une autre comparaison entre les résultats de la présente méthode et ceux de Tebboun et al. (2015) est présentée dans le tableau VI.5. Les résultats sont présentés pour les deux cas des fondations élastiques Winkler et Pasternak.

On constate que les résultats sont en très bon accord pour les deux cas de charges thermiques uniformes et linéaires. La différence entre les résultats augmente légèrement pour le cas de charges non linéaires notamment avec la présence de fondation Pasternak. Cela est dû à la solution quasi-3D élaborée dans la présente étude, contrairement à Tebboun et al. (2015) où l'effet d'éirement de l'épaisseur est négligé.

Tableau VI.5: Température critique de flambement d'une plaque FG carrée ($a/h = 10$) sur une fondation élastique sous différentes charges thermiques

p	Theory	$k_w=10 \quad k_p=0$			$k_w=10 \quad k_p=0$		
		Uniform	Linear	Non linear	Uniform	Linear	Non linear
0	Tebboun et al. (2015) 2D	1,6627	3,3154	6,6308	2,5290	5,0479	10,0958
	Présente 3D (Mekerbi et al.2019)	1,6512	3,2925	6,6585	2,5596	5,1091	10,2183
1	Tebboun et al. (2015) 2D	0,7994	1,4898	2,9804	1,6067	3,0040	6,0098
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	0,7957	1,4830	2,9668	1,6315	3,0505	6,1027
5	Tebboun et al. (2015) 2D	0,7356	1,2577	2,1847	1,8547	3,1839	5,5309
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	0,7479	1,2787	2,2213	1,8997	3,2613	5,6653
10	Tebboun et al. (2015) 2D	0,7565	1,3318	2,2924	2,0196	3,5699	6,1449
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	0,7712	1,3578	2,3372	2,0723	3,6635	6,3059

Pour illustrer la précision de la théorie proposée pour le cas de la charge thermique non linéaire, la température critique de flambement de la plaque FG parfaite sur une fondation élastique avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance est présentée dans le tableau VI.6. La comparaison est faite avec les résultats de Van do et Chin-Hyung (2018). On peut voir que les résultats sont presque identiques.

Comme on peut le voir, nos résultats sont en bon accord avec ceux publiés, et on peut conclure que la présente théorie est efficace pour la prédiction des charges critiques de flambement thermique.

Tableau VI.6: Température critique de flambement T_{cr} sous l'augmentation de température non linéaire ($a/h = 10$).

p	theory	$\eta=2$	$\eta=5$	$\eta=10$
0	Van do and Chin-Hyung (2018) 3D	4,812	9,625	17,645
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	4,800	9,600	17,599
1	Van do and Chin-Hyung (2018) 3D	2,096	4,297	8,151
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	2,091	4,287	8,130
5	Van do and Chin-Hyung (2018) 3D	1,584	2,829	4,964
	Present 3D	1,618	2,889	5,070
10	Van do and Chin-Hyung (2018) 3D	1,663	2,862	4,734
	Present 3D (Mekerbi et al.2019)	1,704	2,932	4,851

La figure VI.13 montre les effets du rapport a/h sur la température critique de flambement T_{cr} d'une plaque FG poreuse sous une charge de température uniforme, linéaire et non linéaire. Cinq cas différents de distribution de porosité sont étudiés.

On observe qu'avec l'augmentation du rapport de plaque a/h , la température critique de flambement diminue quelle que soit la répartition de la porosité et de la charge thermique. A partir ces figures, on constate que la température critique de flambement maximale sont obtenus avec la distribution 1 ($\alpha = 0,2$) et ceux minimales avec la distribution 5. En outre, nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de grande différence entre les valeurs des charges critiques obtenus par les différentes distributions et pour les différents modes de chargement (uniforme-linéaire-non linéaire). L'exception est faite pour les distributions 1 ($\alpha = 0,2$) et 5 où le la différence augmente avec la variation de la charge thermique.

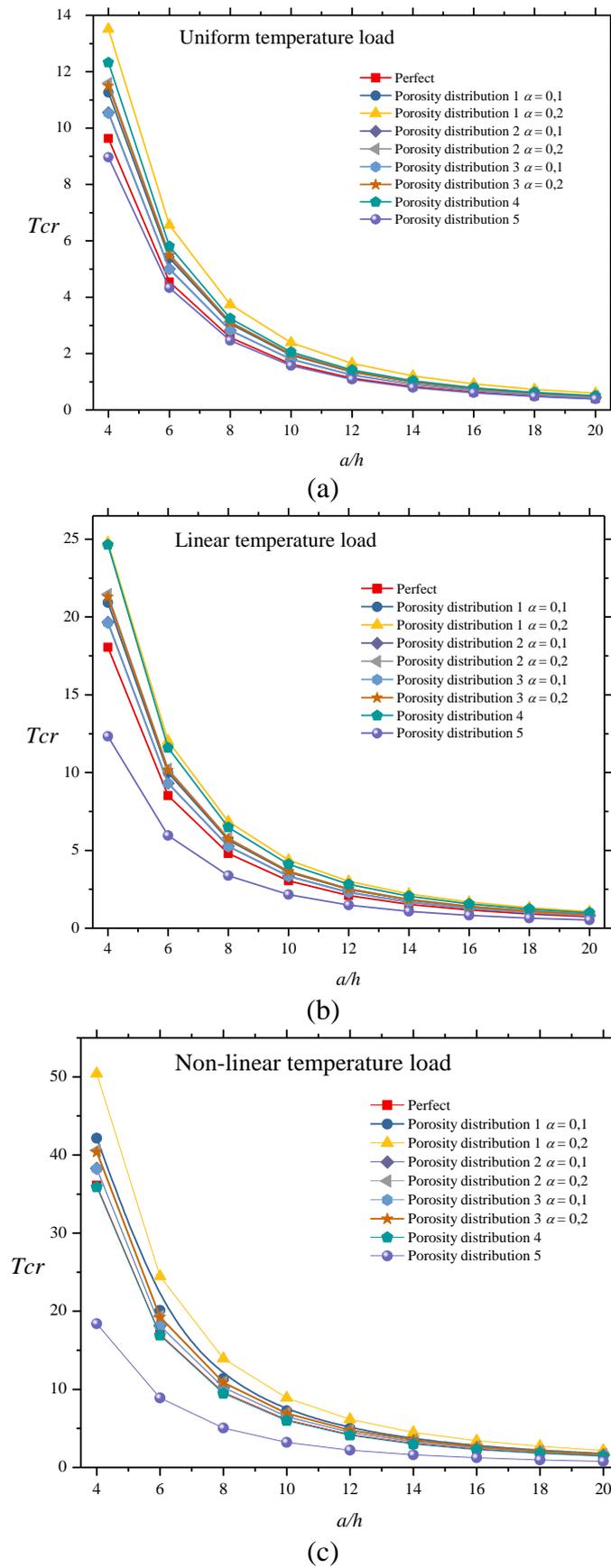


Figure VI.13: Température critique de flambement T_{cr} en fonction du rapport d'épaisseur a/h
 (a) température uniforme (b) température linéaire (c) température non-linéaire
 ($p = 1, a = b, k_w = k_p = 10$)

Dans la figure VI.14, l'influence du rapport (b/a) sur la température critique de flambage d'une plaque FGM poreuse est représentée pour différentes distributions de porosité. La plaque est soumise trois charges thermiques à travers l'épaisseur, uniforme, linéaire et non linéaire. On observe à partir de cette figure que la température critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport (b/a) et ce quelle que soit la charge thermique et la distribution de porosité. La même constatation notée ci-dessus reste valable. À savoir que toutes les distributions donnent des valeurs plus ou moins proches à l'exception de la distribution 1 ($\alpha = 0,2$) et 5 où une différence conséquente est observée.

La figure VI.15 représente l'effet de la distribution de la porosité sur la température critique de flambement par rapport à l'indice de la loi de puissance pour une plaque FG poreuse reposant sur la fondation Pasternak. On observe que la température critique de flambement augmente à mesure que l'indice de loi de puissance augmente pour toutes les distributions de porosité considérée ici.

Pour les trois figures VI.15, on peut dire que la présence d'une fondation élastique dont celle de Pasternak a modifié le comportement global de la plaque. Si la plaque n'était pas supportée par une fondation ou même supportée par une fondation élastique mais de type Winkler, les résultats auraient été inversés. C'est-à-dire, la plaque parfaite donne les valeurs élevées. En effet, lorsque la plaque repose sur une fondation Pasternak, la rigidité du système augmente du fait de l'incorporation d'une couche de cisaillement conduisant à une augmentation de rigidité en flexion. Ce même cas a été observé dans les travaux de Shahsavari et al. (2018) en particulier dans le tableau 5 où la fréquence fondamentale des plaques imparfaites est supérieure à celle des plaques parfaites pour le cas de la fondation Pasternak. En ce qui concerne la différence entre les valeurs de la température critique entre les plaques imparfaites, cela peut être lié à la façon de la concentration des micro-vides dans la plaque FG.

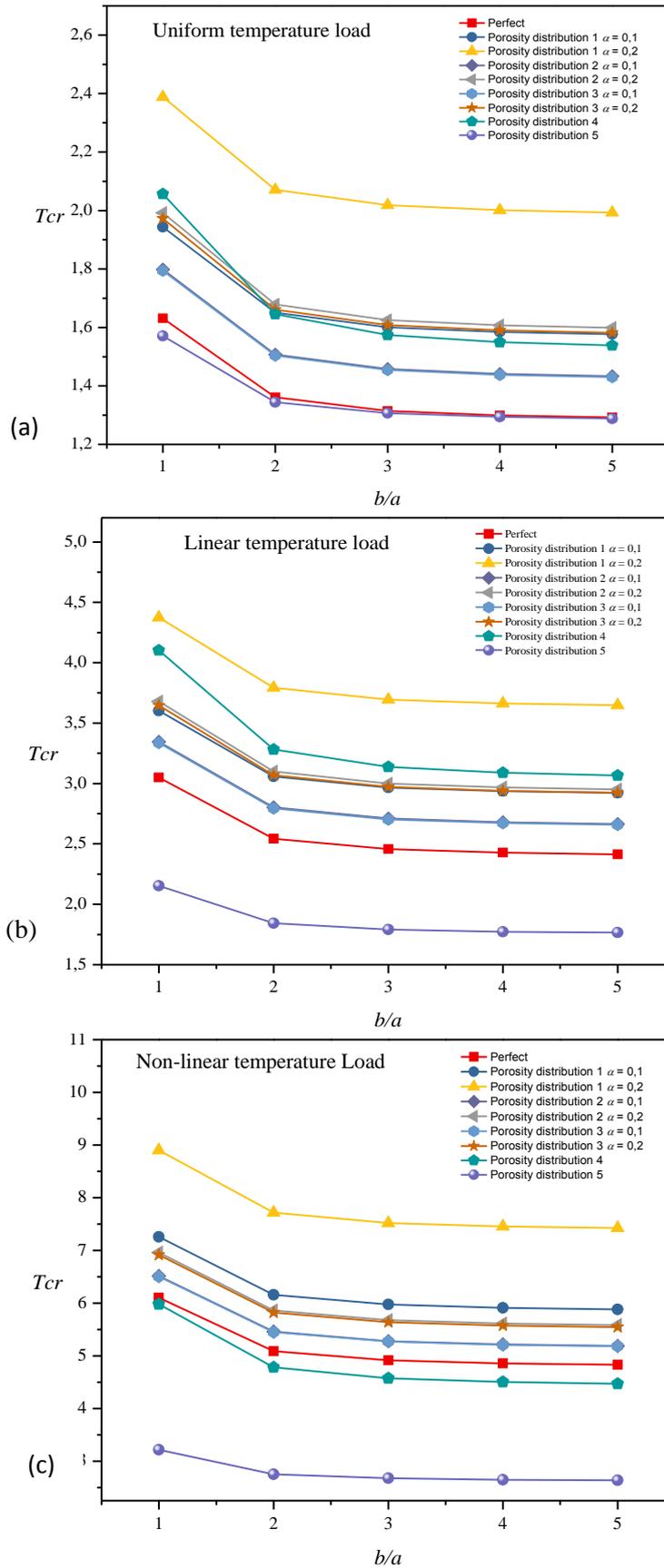


Figure VI.14 : Température critique de flambement T_{cr} par rapport au rapport b/a
 (a) température uniforme (b) température linéaire (c) température non-linéaire
 ($p = 1, a = b, k_w = k_p = 10$)

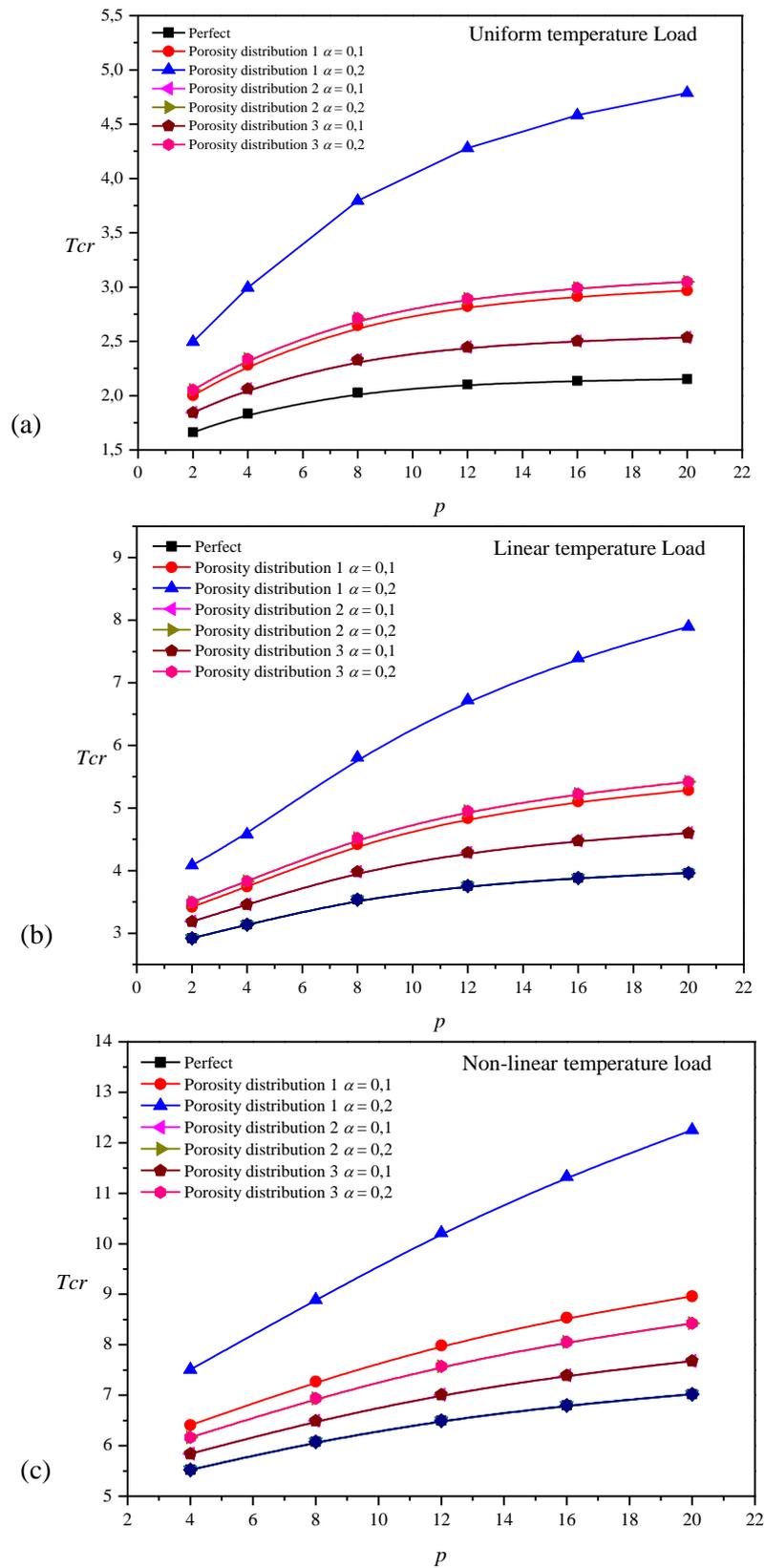


Figure VI.15 : Température critique de flambement T_{cr} en fonction de l'indice de loi de puissance p
 (a) température uniforme (b) température linéaire (c) température non-linéaire
 ($a/h = 10, a = b, k_w = k_p = 10$)

VI.4. Conclusion

Dans le présent travail, l'analyse thermodynamique des plaques sandwich FG reposant sur des fondations élastiques a été étudiée. La présente méthode est basée sur une théorie de déformation de cisaillement 2D des plaques qui contient des formes intégrales indéterminées et seulement quatre inconnues à dériver. Différents types des fondations et conditions aux limites ont été utilisés. Les équations gouvernantes sont obtenues par le principe des travaux virtuelles et elles sont résolues par la méthode de Navier. La précision de la présente méthode est vérifiée en comparaison à divers résultats disponibles dans la littérature. On peut conclure que la présente théorie est exacte et efficace pour prédire la réponse thermodynamique des plaques sandwich FG reposant sur des fondations Winkler / Pasternak / Kerr. Une étude paramétrique complète est réalisée pour évaluer les effets du rapport a/h , des conditions aux limites, des paramètres de fondation élastique et des modes sur la réponse des plaques sandwich FG soumises à une charge thermodynamique.

En outre, nous avons développé une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement quasi-tridimensionnelle (3D) pour les solutions de flexion statique de la plaque FG. Le flambement thermique de plaques poreuses FG simplement supportées sous différents types de charges thermiques (distribution uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur) et reposant sur des fondations élastiques a été analysé en utilisant une théorie de déformation par cisaillement quasi 3D. Toutes les études de comparaison montrent que la température critique de flambement obtenue par la solution quasi 3D proposée avec quatre inconnues est en accord parfait avec d'autres théories de déformation par cisaillement. À partir des résultats et des comparaisons entre différentes distributions de porosité, il a été constaté que les différentes distributions donnent des valeurs plus ou moins proches à l'exception du mode 1 ($\alpha = 0,2$) et 5 où une différence est trouvée

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les matériaux à gradation fonctionnelle FGM sont une classe de matériaux composites avec une variation progressive et continue des fractions volumiques de chaque constituant. Ce concept permet d'éliminer les discontinuités aux interfaces et les caractéristiques des matériaux constitutifs sont préservées. Ce concept permet la production de matériaux légers, solides et durables. Les poutres et les plaques avec des matériaux fonctionnellement gradués sont largement utilisées dans de nombreuses industries d'ingénierie. Par conséquent, plusieurs techniques de modélisation et méthodes de solution ont été proposées par de nombreux chercheurs dans l'analyse précise des structures FG.

Le comportement thermodynamique des plaques sandwich FG reposant sur des fondations Winkler / Pasternak / Kerr et avec diverses conditions aux limites a été étudié en utilisant une théorie raffinée des plaques 2D. Le champ de déplacement de la présente théorie contient des formes intégrales indéterminées et n'implique que quatre inconnues. La plaque est considérée comme soumise à un champ de température sinusoïdal harmonique temporel sur toute son épaisseur. Trois types de fondations décrites par des modèles mathématiques sont étudiés. Différentes conditions aux limites sont utilisées pour étudier le comportement thermodynamique des plaques sandwich sur fondations élastiques.

D'autre part, le flambement thermique des plaques FG avec porosité et reposant sur des fondations élastiques a été étudié. La formulation est basée sur la théorie quasi 3D. La présente théorie ne contient que quatre inconnues et prend également en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur. Différents modèles de distribution de porosité sont considérés. Les charges thermiques sont supposées uniformes, linéaires et non linéaires dans la direction de l'épaisseur. La plaque est supposée simplement supportée sur tous les bords.

A l'issue de cette étude on peut tirer les conclusions suivantes :

- Les théories utilisées sont efficaces et en accord avec la littérature. Dû aux nombres réduits des inconnus, l'analyse du comportement thermodynamique et le flambement thermique sera facile même en considérant de divers systèmes d'appuis, différents types de fondations, plusieurs formes de variations du champ de température, différents modèles de porosité ...etc.
- Les paramètres intervenants dans les calculs tels que le rapport a/h , le types et la rigidité des fondations élastiques, la fréquence, les conditions aux limites et la variation du champ de la température suivant l'épaisseur ont des effets remarquables sur le comportement thermodynamique des plaques sandwich FG.

- Le modèle de la distribution de la porosité a des effets compliqués sur la température critique de flambement notamment avec les différents types des fondations élastiques et leurs rigidités.

Rappelons que ce travail de recherches est entré dans le cadre de la contribution du laboratoire des matériaux et hydraulique (LMH, de l'université DjilalliLyabes Sidi Belabbes) dans le domaine des structures en matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Sur la même ligne et dans le cadre du sujet abordé, de nombreuses perspectives d'approfondissement peuvent être envisagées :

- La variété de l'utilisation des FGM en plusieurs domaines et sous diverses sollicitations et conditions nous permet d'étendre la recherche vers autres formes géométriques, types de chargement électrique et hygrothermique. Les logiciels basant sur les méthodes numériques peuvent faciliter des analyses avancées et compliqués.
- Vue le coût important de la production des matériaux FG sur la base du métal et la céramique, il est probablement mieux d'appliquer la technologie des FGM avec des matériaux couramment utilisés dans le domaine de génie civil. Le béton à dosages varie progressivement et la construction des couches des chaussées ou des remblais avec des matériaux de propriétés continus sans avoir les interfaces classiques peuvent être un domaine de recherche très pratique.

LISTE DES RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

Abazid, M. A., Alotebi, M. S., & Sobhy, M. (2018), "A novel shear and normal deformation theory for hygrothermal bending response of FGM sandwich plates on Pasternak elastic foundation", *ChinStructural Engineering and Mechanics*, **67**(3), 219-232.

Abdelaziz HH, Ait Atmane H, Mechab I, Boumia L, Tounsi A, Adda Bedia EA., (2011), "Static analysis of functionally graded sandwich plates using an efficient and simple refined theory". *Chin. J. Aeronaut*; 24: 434-448.

Abolghasemi, S., Shaterzadeh, A. R., Rezaei, R., (2014), "Thermo-mechanical buckling analysis of functionally graded plates with an elliptic cutout", *Aerospace Science and Technology*, Volume 39, December 2014, Pages 250-259

Achouri, F., Benyoucef, S., Bourada, F, Bachir Bouiadjra, R., Tounsi, A., (2019), "Robust quasi 3D computational model for mechanical response of FG thick sandwich plate", *Struct. Eng. Mech.*, **70**(5), 571-589.

Ait Amar, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions". *J. Sandw. Struct. Mater*; 16(3): 293-318.

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *Int. J. Mech. Mater.Des.*, **13**, 71-84.

Ait Sidhoum, I., Boutchicha, D., Benyoucef, S., Tounsi, A. (2017), "An original HSDT for free vibration analysis of functionally graded plates". *Steel Compos.Struct.*, *Int. J*; 25(6): 735-745.

Akavci S.S., Tanrikulu A.H., (2015), " Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories", *Composites Part B* 83 pp 203-215.

Akbarzadeh, A.H., Zad, S.H., Eslami, M.R., Sadighi, M., (2011), "Mechanical behaviour of functionally graded plates under static and dynamic loading", *Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Sci.*, **225**(2), 326-333.

Ameur M, Tounsi A, Mechab I, El Bedia A. (2011), "A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations". *KSCE Journal of Civil Engineering*; 15(8):1405-1414.

Amiri Rad, A., Panahandeh-Shahraki, D. (2014), "Buckling of cracked functionally graded plates under tension", *Thin-Walled Struct.*, **84**, 26-33.

Arani, A.G., Pourjamshidian, M., Arefi, M., Arani, M.R.G., (2019), "Thermal, electrical and mechanical buckling loads of sandwich nano-beams made of FG-CNTRC resting on Pasternak's foundation based on higher order shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, **46**, 439-445.

Attia, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S. (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations", *Struct. Eng. Mech.*, **65**(4), 453-464.

- Attia, A., Bousahla, A. A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Alwabli, A.S., (2018), "A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations" *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 65, No. 4 (2018) 453-464.
- Avcar, M., & Mohammed, W.K.M., (2018), "Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation", *Arab. J. Geosci.*, **11**(10), 232.
- Avcar, M., (2016 a), "Effects of material non-homogeneity and two parameter elastic foundation on fundamental frequency parameters of Timoshenko beams". *Acta Physica Polonica A.*, **130**(1), 423-431.
- Avcar, M. (2016b), "Free Vibration of Non-Homogeneous Beam Subjected to Axial Force Resting on Pasternak Foundation". *Journal of Polytechnic.*, **19**(4), 507–512.
- Avcar, M., (2015), "Effects of rotary inertia shear deformation and non-homogeneity on frequencies of beam". *Structural Engineering and Mechanics.*, **55**(4), 871–884.
- Bachiri, A., Bourada, M., Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., (2018), "Thermodynamic effect on the bending response of elastic foundation FG plate by using a novel four variable refined plate theory", *Journal of Thermal Stresses*, VOL. 41, NO. 8, 1042–1062.
- Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., (2012), "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates According to a Four-Variable Refined Plate Theory", *Journal of Thermal Stresses*, Volume 35, 2012 - Issue 8.
- Bachir Bouiadjra, R., Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bernard, F., (2018), "Analytical investigation of bending response of FGM plate using a new quasi 3D shear deformation theory: Effect of the micromechanical models" *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66, No. 3 (2018) 317-328
- Bachir Bouiadjra, R., Adda-Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013), "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory". *Structural Engineering and Mechanics, An Int. Journal.*, **48**(4), 547–567.
- Baferani AH, Saidi AR, Ehteshami H., (2011), "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Compos. Struct.*, 93(7), 1842–53.
- Bakhadda B. Bachir Bouiadjra, M. Bourada F. Bousahla AA. Tounsi A., Mahmoud SR. (2018), "Dynamic and bending analysis of carbon nanotube-reinforced composite plates with elastic foundation". *Wind and Structures*; 27(5): 311-324.
- Bao G., L. Wang (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J. Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- Barati, M., R., (2017), "Investigating dynamic characteristics of porous double-layered FG nanoplates in elastic medium via generalized nonlocal strain gradient elasticity", *Eur. Phys. J. Plus.*, 132:378.
- Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory". *Smart Structures and Systems.*, **18**(4), 755–786.

- Belabed, Z., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., (2018), "A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate. Earthquakes and Structures", 14(2): 103-115.
- Belabed Z, Houari M.S.A., Tounsi A., Mahmoud S.R., Anwar Bég O., (2014). "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded" Composites Part B: Engineering Volume 60, Pages 274-283.
- Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. Meftah, S.A., (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", Compos. Part B Eng., 42, 1386-1394
- Bodaghi, M., Saidi, A.R., (2010), "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory". Appl. Math. Model., 34(11), 3659 – 3673.
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, E.A., Megueni, A., (2010), "Thermoelastic Stability Analysis of Functionally Graded Plates: An Analytical Approach", Comput. Mater. Sci., 49, 865-70.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations". Steel Compos. Struct; 14(1): 85–104.
- Bouiadjra, R.B., Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Bernard, F., (2018), "Analytical investigation of bending response of FGM plate using a new quasi 3D shear deformation theory: Effect of the micromechanical models", Structural Engineering and Mechanics., 66(3), 317-328.
- Bourada, F., Amara, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2018), "A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates", Structural Engineering and Mechanics., 68(6), 661-675.
- Bourada F., Amara K., Tounsi, A., (2016), "Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using a novel four variable refined plate theory". Steel Compos. Struct., Int. J; 21(6): 1287-1306.
- Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A., (2012), "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates". J. Sandw. Struct. Mat; 14: 5–33.
- Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Mahmoud, S.R. (2018), "Improved HSDT accounting for effect of thickness stretching in advanced composite plates". Struct. Eng. Mech; 66(1): 61-73.
- Bouhadra, A. Benyoucef, S., Tounsi, A.R., Bouiadjra, B., Houari, M. S. A., (2015) "Thermal buckling response of functionally graded plates with clamped boundary conditions," J. Therm. Stresses, vol. 38, pp. 630–650.
- Bourada, F., Amara, K., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., (2015), "A novel refined plate theory for stability analysis of hybrid and symmetric S-FGM plates", Structural Engineering and Mechanics, 2018; 68(6): 661-675.
- Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., (2016), "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion", Structural Engineering and Mechanics., 60(2), 313-335.

Bousahla Bodaghi M., Saidi AR., (2010), "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Applied Mathematical Modelling*; 34(11):3659-3673.

Brischetto, S., (2009), "Classical and mixed advanced models for sandwich plates embedding functionally graded cores", *J. Mech. Mat. Struct*; 4(1): 13-33.

Cazenave, M., (2010), "Méthode des éléments finis Approche pratique en mécanique des structures", Dunod, Paris, 2010 ISBN 978-2-10-055065-4

Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S., (2015), "Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam". *Compo. Struct* **133**, 54-61.

Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S. R., (2017), "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Inart Structures and Systems, Int. J.*, **19**(3), 289–297.

Choi, J., Lakes, R., (1995), "Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio", *Int. J. Mech. Sci.*, **37**(1), 51–9.

Chung, Y.L., Chi, S.H., (2001). "The residual stress of functionally graded materials". *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering* 13, 1–9.

Clive L.D., Irving H.S., (2013), "Solid Mechanics A Variational Approach, Augmented Edition" ISBN 978-1-4614-6034-3 (eBook) DOI 10.1007/978-1-4614-6034-3

Cong, P.H., Anh, V.M., Duc, N.D., (2017), "Nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened FGM plate using Reddy's TSDT in thermal environment". *J. Therm. Stresses*, **40**(6), 704-732.

Cong, P.H., Chien, T.M., Khoa, N.D., Duc., N.D., (2018), "Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT", *Aerospace Science and Technology*, **77**, 419–428.

Cukanovi'c, D., Radakovi'c, A., Bogdanovi'c, G., Milanovi'c, M., Redžovi'c, H., Dragovi'c, D., (2018), « New Shape Function for the Bending Analysis of Functionally Graded Plate», *Materials*, 11, 2381; doi:10.3390/ma11122381

Daikh, A.A., (2019), "Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation", *Mater. Res. Express* 6, 065702

Duc, N. D., Cong, P. H. and Quang, V. D., (2016), "Thermal Stability of Eccentrically Stiffened FGM Plate on Elastic Foundation based on Reddy's Third-order Shear Deformation Plate Theory". *J. Thermal Stresses.*, **39**(7), 772–94.

Duc, N. D., Quan, T. Q., (2013), "Nonlinear Postbuckling of Imperfect Eccentrically Stiffened P-FGM Double Curved Thin Shallow Shells on Elastic Foundations in Thermal Environments", *Compos. Struct.*, **106**, 590-600.

Duc, N. D., Tung, H. V., (2011), "Mechanical and Thermal Postbuckling of Higher Order Shear Deformable Functionally Graded Plates on Elastic Foundations". *Compos. Struct.*, **93**, 2874–2881.

Elishakoff, I., Pentaras, D., Gentilini, C., (2016), "Mechanics of Functionally Graded Material Structures", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., ISBN: 978-981-4656-59-7

- El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud SR. (2017), "A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates". *Struct. Eng. Mech*; 63(5): 585-595.
- El-Hassar, S.M., Benyoucef, S., Heireche, H., Tounsi, A., (2016), "Thermal stability analysis of solar functionally graded plates on elastic foundation using an efficient hyperbolic shear deformation theory". *Geomechanics and Engineering, Int. J.* **10**(3), 357–386.
- Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R., (2017), "A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Geo. and Eng., Int. J* ; 13(3): 385-410.
- Fourn, H., Ait Atmane, H., Bourada, M., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud SR., (2018), "A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates", *Steel and Composite Structures*; 27(1): 109-122.
- Frikha, A., Zghal, S., Dammak, F., (2018a), "Finite rotation three and four nodes shell elements for functionally graded carbon nanotubes-reinforced thin composite shells analysis", **39**, 289–311.
- Frikha, A., Zghal, S., Dammak, F., (2018b), "Dynamic analysis of functionally graded carbon nanotubes-reinforced plate and shell structures using a double directors finite shell element", *Aerospace Science and Technology.*, **34**, 315–334.
- Gasik M. , K. Lilius, (1994), "Evaluation of properties of W-Cu functional gradient materials by micromechanical model", *Comput. Mater. Sci.* 3 41-49.
- Gasik, M.M. (1998), "Micromechanical modeling of functionally graded materials". *Comput. Mater. Sci.*, 13, 42–55.
- Ghiasian, S.E., Kiani, Y., Sadighi, M., Eslami, M.R., (2014), "Thermal buckling of shear deformable temperature dependent circular annular FGM plates". *Int. J. Mech. Sci.* **81**, 137–148.
- Ghugal, Y. M., Shimpi (2002). "A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates". *J. Reinf. Plast. Compos.* 21 775-813
- Gibson, L.J., Ashby, M., (1982), "The mechanics of three-dimensional cellular materials". *Proce. R. Soc., London A: Math Phys. Eng. Sci.*, **382**(1782),43–59.
- Gupta, A. and Talha, M., (2018), "Influence of porosity on the flexural and vibration response of gradient plate using nonpolynomial higher-order shear and normal deformation theory", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **14**(2),277-296.
- Gupta, A., Talha, M., (2017), "Influence of porosity on the flexural and vibration response of gradient plate using nonpolynomial higher-order shear and normal deformation theory". *Int J Mech Mater Des*, DOI 10.1007/s10999-017-9369-2
- Houari, M.S.A, Tounsi, A., Bég, OA. (2013), "Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory". *Int. J. Mech. Sci*; 76(6): 102-111.

- Houari, M.S.A, Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Adda Bedia, EA. (2011), “Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates”. *J. Therm. Stresses*; 34: 315–334.
- Hadji, L., Ait Atmane, H.A, Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, EA. (2011), “Free vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory”. *Appl. Math. Mech*; 32: 925–942.
- Huang, H. C., (1988), “Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells”, Pineridge Press, Swansea, U.K.
- Hebali H, Tounsi A, Houari M.S.A, Bessaim A, Adda B A. (2014) —New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*; 140(2): 374–383.
- Hebali H, Tounsi A, Houari M, Bessaim A, Bedia E. (2014), “New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”. *Journal of Engineering Mechanics*;140(2):374-383.
- Jawad M. H., (1994), “Theory and design of plate and shell structures, ISBN 978-1-4613-6141-1
- Kim, J., Reddy, J.N., (2013), “Analytical solutions for bending, vibration, and buckling of FGM plates using a couple stress-based third-order theory”. *Compos. Struct*; 103: 86-98.
- Kneifati, M.C., (1985) “Analysis of plates on a Kerr foundation model”, *J. Eng. Mech.* 111, 1325–1342.
- Lezgy-Nazargah, M., &Meshkani, Z. (2018), “An efficient partial mixed finite element model for static and free vibration analyses of FGM plates rested on two-parameter elastic foundations”, *Structural Engineering and Mechanics.*, **66**(5),665–676.
- Ma, L.S., Wang, T.J. (2003), “Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings”, *Int. J. Solids Struct.*, **40**,3311-3330.
- Mahapatra, T.R., Kar, V.R. and Panda, S.K., (2015 a), “Nonlinear free vibration analysis of laminated composite doubly curved shell panel in hygrothermal environment”. *J. Sandwich Struct. Mater.*,**17**(5), 511-545.
- Mahapatra, T.R. and Panda, S.K., (2015 b), “Effects of hygrothermal conditions on free vibration behaviour of laminated composite structures”. *IOP. Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* **75**, 012016.
- Mahapatra, T.R., Panda, S.K. and Dash, S., (2016 a), “Effect of hygrothermal environment on the nonlinear free vibration responses of laminated composite plates: A nonlinear finite element micromechanical approach”. *IOP. Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* **149**, 012151.
- Mahapatra, T.R. and Panda, S.K., (2016 b), “Nonlinear free vibration analysis of laminated composite spherical shell panel under elevated hygrothermal environment: A micromechanical approach”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **49**, 276–288.
- Mahapatra, T.R., Kar, V.R. and Panda, S.K., (2016 c), “Large amplitude vibration analysis of laminated composite spherical panels under hygrothermal environment”, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*,**16**, 1450105.

- Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A., (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates" Appl. Math. Modelling, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045>
- Mahmood, R.M., et Akinlabi, E.T., (2017), "Functionally Graded Materials", Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering, ISSN 2364-3307
- Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., E.A Adda Bedia., (2018), "On the effect of the micromechanical models on the free vibration of rectangular FGM plate resting on elastic foundation", Earthquakes and Structures., **14**(2), 117-128.
- Mahmoudi, A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Benachour, A., Adda Bedia, E.A and Mahmoud, S.R. (2017), "A refined quasi-3D shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations". J. Sandw. Struct.Mater; In Press.
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes, S.C. (2011), "Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher- order shear deformation theory". Compos. Struct; 94: 37-49.
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes, S.C. (2012a), " A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates". Int. J. Solids. Struct; 49: 43-53.
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes, S.C. (2012b), "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates".Compos. B; 43(3): 1489-99.
- Mantari JL, Guedes Soares C., (2012), "Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory". Composite Structures;94(6):1991-2000.
- Mekerbi, M., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R., (2019), "Thermodynamic behavior of functionally graded sandwich plates resting on different elastic foundation and with various boundary conditions", urnal of Sandwich Structures & Materials, 0(0) 1–30.
- Mekerbi, M., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Bourada, F., Tounsi, A., (2019), "Investigation on thermal buckling of porous FG plate resting on elastic foundation via quasi 3D solution", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 72, No. 4, 513-524
- Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A, and Tounsi, A., (2015), " A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations". Struct. Eng. Mech; 53(6): 1215-1240.
- Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A and Mahmoud, S.R. (2017), "An Analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates". J. Sandw. Struct.Mater; In Press.
- Menasria, A., Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R., (2017), "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates".Steel and Compos.Struct., 25(2), 157-175.
- Merdaci, S., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Mechab, I., Hebali, H., Benyoucef, S. (2011), "Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates". Arch. Appl. Mech; 81: 1507–1522.

Meziane, A.A., M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014) "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293–318.

Mindlin, R.D., (1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic", elastic plates. *J. Appl. Mech*; 18: 31-38.

Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H., Tounsi, A., (2016) "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind and Structures* Volume 22, Number 4, pages 429-454 DOI: <https://doi.org/10.12989/was.2016.22.4.429>

Natarajan, S., (2012), "Manickam, G. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory". *Finite Elem. Anal. Des*; 57: 32-42.

Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN., (2013), "Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique", *Composites Part B: Engineering*;44(1):657-674.

Nguyen D.D., Quang V.D., Nguyen, P.D., Chien, T.M., (2018), "Nonlinear Dynamic Response of Functionally Graded Porous Plates on Elastic Foundation Subjected to Thermal and Mechanical Loads", *J. Appl. Comput. Mech.*, 4(4), 245-259.

Nguyen, V.H., Nguyen, T.K., Thai, H.T., Vo, TP., (2014), "A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates". *Compo. B*; 66: 233-246.

Notta-Cuvier, D., (2011), "Méthode des Champs Virtuels pour la caractérisation de comportements viscoplastiques et d'endommagement, à partir de mesures de champs mécaniques hétérogènes " Thèse de doctorat en Génie mécanique, Ecole doctorale sciences pour l'ingénieur, Université Lille-Nord-de-France, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Pradhan, S.C., Murmu, T., (2009), "Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method", *J. Sound Vibr.*, **321**, 342-362.

Kant T, Manjunatha BS., (1988), "An unsymmetric FRC laminate C° finite element model with 12 degrees of freedom per node". *Engineering Computations*, 5(4):300-308

Kerr, A. D., (1984), "Solutions for Plates Continuously Supported on a Pasternak Base," U.S. Army Waterways Experiment Station, Soil-Structural International Project Report,.

Kerr, A. D., (1964), "Elastic and Viscoelastic Foundation Models," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 31, pp. 491-498.

Kerr, A. D., (1965), "A Study of a New Foundation Model," *Acta Mechanica*, Vol. 1, pp. 135-147.

Reddy, B.S., Kumar J.S., Reddy C.E., Reddy, K.V.K., (2014), "Free Vibration Behaviour of Functionally Graded Plate Using Higher-Order Shear Deformation Theory", *Journal of Applied Science and Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 231-241.

Reddy, J. N., (2007) "Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells: Second Edition"; Taylor & Francis Group, LLC, ISBN-13: 978-0-8493-8415-8.

- Reddy, J.N., Chin, C.D., (1998). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *J. Therm. Stresses* 21, 593–629.
- Reddy, J.N. (1984), “Energy principles and variational methods in applied mechanics”, New York: John Wiley.
- Reissner, E., (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”. *J. Appl. Mech*; 12: 69-77.
- Reiter T., Dvorak G.J. (1998), “Micromechanical Modeling of Functionally Graded Materials”, In: Bahei-El-Din Y.A., Dvorak G.J. (eds) *IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials. Solid Mechanics and its Applications*, vol 60. Springer, Dordrecht
- Reiter, T., and Dvorak, G.J. (1997), “Micromechanical Models for Graded Composite Materials”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 46, 1655-1673.
- Saidi, A.R., Hasani Baferani, A. (2010), “Thermal buckling analysis of moderately thick functionally graded annular sector plates”. *Compos. Struct.*, 92, 1744–1752.
- Saidi H., Houari M.S.A., Tounsi, A., (2013), “Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”. *Steel Compos Struct*; 15: 221–245.
- Samsam Shariat, B.A., Eslami, M.R., (2007), “Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, *Compos. Struct.* 78(3), 433-439.
- Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R., (2017), “A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate”. *Compos. Struct.*, 25(4), 389-401.
- Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B., (2018), “A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation”. *Aerospace Science and Technology*, 72, 134–149.
- Shariat S.B.A., Eslami MR. (2007), “Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads”, *Composite Structures*; 78(3):433-439
- Shimpi RP. (2002), “Refined plate theory and its variants”, *A.I.A.A. Journal*; 40(1): 137-146.
- Shinohara, Y., (2013), “Handbook of Advanced Ceramics (Second Edition)” Materials, Applications, Processing, and Properties, Pages 1179-1187, <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-385469-8.00061-7>
- Shojaeefard, M.H., Gooarchin, H.S., Ghadiri, M., Mahinzare, M., (2017), “Micro temperature-dependent FG porous plate: Free vibration and thermal buckling analysis using modified couple stress theory with CPT and FSDT”, *Appl. Math. Model.*, 50, 633-655.
- Shwetha, K., Subrahmanya, V., Bhat, P., (2018), “Comparison Between Thin Plate And Thick Plate From Navier Solution Using Matlab Software” *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, Volume: 05 Issue: 06 | June, e-ISSN: 2395-0056, pages 2675- 2680.
- Shyang-Ho Chi, Yen-Ling Chung, (2006), "Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates Under Transverse Load-Part I: Analysis", *Inter. J. of Solids and Structures*; 43: 3657-3674

Sobhy, M., (2017), “Hygro-thermo-mechanical vibration and buckling of exponentially graded nano plates resting on elastic foundations via nonlocal elasticity theory”. *Structural Engineering and Mechanics.*, 63(3), 401-415.

Sobhy, M. (2015), “Thermoelastic response of FGM plates with temperature-dependent properties resting on variable elastic foundations”, *J. Appl. Mech.*, 7(6), 1550082.

Sobhy M and Zenkour AM., (2015), “Thermodynamical Bending of FGM Sandwich Plates Resting on Pasternak’s Elastic Foundations”, *Adv. Appl. Math. Mech*; 7(1): 116-134.

Sobhy, M. (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos.Struct.* 99 76–87

Sofiyev, A. H., &Avcar, M., (2010), “The stability of cylindrical shells containing an FGM layer subjected to axial load on the Pasternak foundation”. *Engineering.* 2(4), 228-236.

Senthilnathan NR, Chow ST, Lee KH, Lim SP. (1987), “Buckling of shear-deformable plates”.*AIAA Journal*;25(9):1268-1271.

Sekkal, M., Fahsi, B., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2017). “A novel and simple higher order shear deformation theory for stability and vibration of functionally graded sandwich plate”. *steel and composite structures*, 25(4), 389-401.

Taibi, F.Z, Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, SR. (2015), “A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations”. *J. Sandw. Struct. Mater*; 17(2): 99–129.

Talha M, Singh BN., (2010), “Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*”,34(12):3991-4011.

Tebboune, W., Benrahou, K.H., Houari M.S.A. and Tounsi, A., (2015), “Thermal buckling analysis of FG plates resting on elastic foundation based on an efficient and simple trigonometric shear deformation theory”, *Steel and Composite Structures.*, 18(2), 443-465.

Thai, H.T., Choi, D.H., (2011),” A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation”, *Composites Science and Technology.*, 71, 1850–1858.

Thai, H.T., Choi, D.H., (2013), “A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct*; 101: 332-340.

Thai, H.T., Kim, S.E., (2013), “Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation”, *Int. J. Mech. Sci.*, 75, 34-44.

Thai, H.T., Nguyen, T.K., Vo, T.P., Lee, J., (2014), “Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first order shear deformation theory”. *Eur. J. Mech. A/Solids*; 45: 211-225.

Thai, H.T., Thuc, P.V., Tinh, Q.B. and Nguyen, T.K. (2014), “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates”, *Acta Mech.*, 225(3), 951-964.

Thai, H.T., Kim, S-E., (2015), “A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells”, *Composite Structures*.doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>

Thang, P.T., Nguyen-Thoi, T., Lee, J., (2016), "Closed-form expression for nonlinear analysis of imperfect sigmoid-FGM plates with variable thickness resting on elastic medium", *Composite Structures*, Volume 143, Pages 143-150

Timoshenko, S., Gere, J., (1963), "Theory of Elastic Stability". 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.

Tounsi, A., Houari, M.S.A, Benyoucef, S. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates". *Aerosp. Sci. Technol*; 24(1): 209-220.

Trabelsi, S., Frikha, A., Zghal, S., Dammak, F. (2018), "Thermal post-buckling analysis of functionally graded material structure using a modified FSDT", *International Journal of Mechanical Sciences.*, 144, 74-89.

Trabelsi, S., Frikha, A., Zghal, S., Dammak, F., (2019), "A modified FSDT-based four nodes finite shell element for thermal buckling analysis of functionally graded plates and cylindrical shells". *Engineering Structures.*, 178, 444-459.

Tran, L.V., Thai, C.H., Nguyen-Xuan, H., (2013), "An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates". *Finite Elem. Anal.Des.*, 73, 65–76.

Van Do, V.N., Lee, C.H., (2018), "Quasi-3D higher-order shear deformation theory for thermal buckling analysis of FGM plates based on a meshless method". *Aerospace Science and Technology.*, 82-83, 450-465.

Ventsel, E., Krauthammer, T., (2001), "Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications"; Marcel Dekker, Inc., ISBN: 0-8247-0575-0

Vescovini, R., D'Ottavio, M., Dozio L., Polit, O., (2017), "Thermal buckling response of laminated and sandwich plates using refined 2D models". *Compos. Struct*, 176, 313-328.

Wattanasakulpong, N., Ungbhakorn, V., (2014), "Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities", *Aerospace Science and Technology*, Volume 32, Issue 1, Pages 111-120.

Wattanasakulpong, N., Chaikittiratana, A., (2015), "Flexural vibration of imperfect functionally graded beams on timoshenko beam theory", *Chebyshev collocation method*, *Meccanica.*, 50, 1331-1342.

Wang, C.M., Reddy, J.N., ee, K.H., (2000), "Shear Deformable Beams and Plates. Relationships with Classical Solutions", Elsevier, Oxford, UK.

Wang, Z.X., Shen, H.S., (2013), "Nonlinear dynamic response of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations in thermal environments", *Ocean Engineering*, 57, 99–110.

Yin, H.M., Sun L.Z., Paulino, G.H., (2004), "Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions", *Acta Materialia*, 52, 3535–3543

Xiang, S, Jin, Y.X, Bi, Z.Y., Jiang, S.X., Yang, MS., (2011), "A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates". *Compos. Struct*; 93: 2826-32.

Zghal, S., Frikha, A., Dammak, F., (2017), "Static analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced plate and shell structures". *Comp. Struc.*, 176, 1107-1123.

- Zghal, S., Frikha, A., Dammak, F., (2018a), "Free vibration analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded composite shell structures". *Applied Mathematical Modelling.*, 53, 132-155.
- Zghal, S., Frikha, A., Dammak, F., (2018b), "Non-linear bending analysis of nanocomposites reinforced by grapheme nanotubes with finite shell element and membrane enhancement". *Eng. Struct.*, 158, 95-109.
- Zghal, S., Frikha, A., Dammak, F., (2018c), "Mechanical buckling analysis of functionally graded power-based and carbon nanotubes-reinforced composite plates and curved panels". *Composites Part B: Engineering.*, 150, 165-183.
- Zenkour, A.M., (2013), "A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates", *Appl. Math. Modell.*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.022>
- Zenkour, A.M., Alghamdi, NA., (2010), "Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads". *Mec.Ad.Mater.Struct.*, 17, 419–432.
- Zenkour, AM. A (2005), "comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflection and stresses". *Inter. J. of Sol. and Struct.*, 42, 5224-5242.
- Zenkour, A.M., (2005), "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1— Deflection and stresses, Part 2—Buckling and free vibration". *Int. J. Solids Struct.* 42, 5224–5258
- Zhang, D.G., (2017), "Thermal post-buckling analysis of functionally graded material elliptical plates based on high-order shear deformation theory". *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 24, 142–148.
- Zhang, L.W., Zhu, P., Liew, K.M., (2014), "Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method". *Compos.Struct.*, 108, 472–492.
- Zhao, X., Lee, Y.Y. and Liew, K.M. (2009), "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates". *Compos.Struct.*, 90, 161-171.
- Zhao X, Lee YY, Liew K.M., (2009), "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*", 319(3-5):918-939.
- Zhou, D. (1993), "A general solution to vibrations of beams on variable Winkler elastic foundation", *Comput. Struct.*, 47(1), 83- 90.
- Zine, A., Tounsi, A., Draiche, K., Sekkal M., and Mahmoud, SR, (2018). "A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells", *Steel Compos. Struct., Int. J;* 26(2): 125-137.
- Zuiker, J.R. (1995), "Functionally Graded Materials - Choice of Micromechanics Model and Limitations in Property Variation", *Compos. Eng.*, 5(7), 807-819.