Ministère de l'Enseignement Supérieur et la Recherche Scientifique

Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès

Faculté des Sciences Exactes

Département de Probabilités-Statistique

THÈSE DE DOCTORAT
DE 3$^{\text{ème}}$CYCLE

Domaine : Mathématiques Informatique
Filière : Mathématiques
Intitulé de la Formation : SMAEF

Présentée par

MASSIM IBRAHIM

ANALYSE DE RISQUE PAR LA MÉTHODE LOCALE LINÉAIRE

Soutenue le ...., devant le jury composé de

M.	LAKSACI. A.	Professeur	Université de S.B.A	Président
M.	GHERIBALLAH. A.	Professeur	Université de S.B.A	Examinateur
M.	KANDOUCI. A.	Professeur	Université de Saida	Examinateur
M.	MECHAB. B.	Maître de conférence A	Université de S.B.A	Examinateur
M.	BENAISSA. S.	Professeur	Université de S.B.A	Encadreur

Remerciements

Il est naturel de remercier à la fin d'un tel travail tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible.

Un remerciement très particulier va à Monsieur le Professeur **BENAISSA Samir** pour l'attention qu'il a porté à mon travail.Ses conseils et idées ont été précieux et ont guidé ma recherche au cours de ma thèse. Je souhaite tout d'abord lui exprimer ma profonde gratitude.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'y participer.

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur **LAKSACI Ali** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury. Il m'a toujours encouragé et précieusement conseillé.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur **GHERIBALLAH Abdelkader** pour la confiance dont il me fait preuve en faisant parties de ce jury.

Je voudrais aussi remercier Monsieur **MECHAB Boubaker** pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mes travaux en acceptant de participer au jury.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur le Professeur **KANDOUCI Abdeldjebbar** pour sa participation à mon jury. Je suis très honoré de sa présence.

Je tiens à exprimer aussi ma reconnaissance à tous mes enseignants.

Je remercie les membres du Laboratoire de Statistique et Processus Stochastiques de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès. J'ai toujours trouvé soutien et encouragement.

Je remercie très amicalement tous mes amis et d'ailleurs de leurs sympathie et leurs aides de près ou de loin.

Enfin, j'adresse mes remerciements à l'ensembles des personnes présentes à cette soutenance.

Dédicaces

À Mon très cher père,

Aucun mot ne saurait exprimer tout mon amour et toute ma gratitude. Merci pour tes sacrifices le long de ces années. Merci pour ta présence rassurante. En témoignage des profonds liens qui nous unissent, veuillez cher père trouvé à travers ce travail l'expression de mon grand amour, mon attachement et ma profonde reconnaissance.

À Ma très chère mère,

À la plus douce et la plus merveilleuse de toutes les mamans, je ne trouverai jamais de mots pour t'exprimer mon profond attachement et ma reconnaissance pour l'amour, la tendresse et surtout pour ta présence dans mes moments les plus difficiles, et si j'en suis arrivé là ce n'est que grâce a toi ma maman adorée. Puisse ce jour être la récompense de tous les efforts et l'exaucement de tes prières tant formulées.

À Mes frères **Youcef**, **Ilies**.
À Mes soeurs **Fairouz**, **Imene** et son mari **Boubaker**,

Je vous dédie ce travail en témoignage de mon amour, de mon attachement et de mes sentiments les plus sincères. Puisse Dieu vous protéger et vous prête une belle vie pleine de bonheur, santé et de prospérité.

À Mes nièces **Assia** et **Belkis**,

Je vous dédie ce travail en témoignage de ma grande Affection et amour. Votre joie et votre gaieté me comble de bonheur Puisse dieu vous garder et vous protéger.

Je tiens finalement à dédier ce travail à toute ma famille et mes amis en témoignage de ma grande affection et amour et pour tous les beaux moments qu'on a partagé.

Table des matières

Résumé

Dans cette thèse, nous intéressons essentiellement à l'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode locale linéaire pour une variable explicative fonctionnelle conditionnée à une variable réponse réelle en présence de la dépendance spatiale.

Dans un premiers temps, on considère le cas fonctionnel non spatial, nous construisons un estimateur par la méthode locale linéaire pour notre modèle conditionnel et nous établissons sous des hypothèses générales ses propriétés asymptotiques, telles que la vitesse de convergence presque complète et l'erreur quadratique.

Dans un second temps, Nous généralisons les résultats obtenus précédemment dans un contexte spatial. Soit $(Z_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in \mathbb{N}^N, N \geq 1)$ un champ aléatoire fonctionnel stationnaire, nous construisons de nouveau un estimateur par la méthode locale linéaire de notre fonction de hasard conditionnelle et nous établissons la convergence presque complète sous des conditions de dépendance spatiale. Ainsi, une application à l'estimation du point à haut risque est également considérée. Finalement, pour valider notre résultat, une étude sur des données simulées sera donnée.

Summary

In this thesis, we are mainly interested in the nonparametric estimation of the conditional hazard function by the local linear method for a variable explanatory functionally conditioned to an actual response variable in the presence of the spatial dependence.
Initially, we consider the functional case no-spatial, we construct an estimator by the local linear method for our conditional model and we establish under a general assumptions its asymptotic properties, such as the almost complete convergence and quadratic error.

In a second step, we generalize the results previously obtained in a spatial context. Let $(Z\mathbf{i}, \mathbf{i} \in \mathbb{N}^N, N \geq 1)$ be a field random functional stationary, we build again an estimator by the linear local method of our conditional hazard function and we establish the almost complete convergence under some conditions of spatial dependence. Moreover, application to the high-risk point estimation is also considered. Finally, in order to validate our results, a study on simulated data will be given.

Chapitre 1

Présentation

1.1 Introduction

1.1.1 Estimation Non-Paramétrique

Dans ces dernières décennies, une immense innovation sur les appareils de mesure est apparue permettant d'observer plusieurs données de plus en plus complexes d'une façon continue, tels les indices boursiers, la météorologie, les images satellitaires, la chimie quantitative, la biométrie, l'imagerie médicale...., en raison de la précision des appareils de mesures modernes et de l'importante capacité de stockage qu'offrent les systèmes informatiques actuels, c'est possible à présent d'obtenir une discrétisation très précise de ces objets mathématiques (courbes, images,...) pendant toutes leurs trajectoires et qui prennent des valeurs dans des espaces de dimension infinie.
Une modélisation statistique est importante pour mieux comprendre le fonctionnement du problème modélisé. En statistiques non paramétriques la performance des outils statistiques se réduit considérablement lorsque la dimension des observations augmente. Ce grand développement technologique a imposé la modernisation des méthodes statistiques comme outils d'analyse et de contrôle. Ainsi, une nouvelle branche de la statistique, dénommée statistique fonctionnelle s'est développée pour traiter des observations comme éléments aléatoires fonctionnels.
Les premiers ouvrages de référence en la matière sur le sujet ont été consacrées à l'étude des modèles paramétriques, les monographies de Ramsay et Silverman (1997) pour le cas i.i.d où pour le cas dépendant Bosq (2000) pour les aspects théoriques. Cependant, la base d'analyse statistique via les modèles

linéaires est la préliminaire connaissance de la nature de la co-variabilité entre les observations, ce qui est très compliqué à vérffier en statistiques fonctionnelles, par contre dans la statistique classique on dispose d'outils graphiques, on prend comme exemple le scatter plot qui donne un aperçu sur le rapport entre les observations. Ceci justiffie l'intérêt de la modélisation des données fonctionnelles par des méthodes non paramétriques, on peut citer les contributions de Bosq (2000) pour les aspects théoriques, Ferraty et Vieu (2006) pour une étude non paramétrique et Ferraty et Romain (2011) pour des développements récents. Dans le même contexte, nous renvoyons à Ferraty (2010). L'objectif de ce paragraphe est de faire une étude bibliographique sur les modèles non paramétriques conditionnels considérés dans cette thèse.
Le traitement non paramétrique des données fonctionnelles est beaucoup plus récent que l'analyse paramétrique. En effet, les premiers résultats ont été obtenus par Gasser *et al.*(1998). Ils se sont intéressés à l'estimation non paramétrique du mode de la distribution d'une variable fonctionnelle vérifiant un condition fractale. En considérant la même condition fractale Ferraty et Vieu (2000) ont étudié la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de la fonction de régression, lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Dabo-Niang (2002) a obtenu, la convergence presque sûre et la normalité asymptotique d'un estimateur de type histogramme de la densité d'une variable aléatoire dans un espace de dimension infinie. En utilisant la propriété de concentration de la mesure de probabilité de la variable explicative fonctionnelle, Dabo-Niang et Rhomari (2004) ont étudié la convergence en norme L^p de l'estimateur à noyau de la régression non paramétrique. La convergence presque complète pour le cas fortement mélangeant a été étudié par Ferraty et al. (2004). Masry (2005) a montré la normalité asymptotique dans le cas d'observations fonctionnelles α-mélangeantes.
Les premiers résultats sur les modèles conditionnels ont été obtenus par Ferraty *et al.*(2006). Ils ont précisé la vitesse de convergence presque complète des estimateurs à noyau pour la fonction de répartition conditionnelle, la densité conditionnelle et ses dérivées, le mode conditionnel et les quantiles conditionnels. Nous renvoyons à Ferraty et Vieu (2006) pour un large éventail d'applications de ces modèles en statistique fonctionnelle. Dabo-Niang et Laksaci (2007) ont ajouté des résultats sur la convergence en norme Lp de l'estimateur à noyau du mode conditionnel dans le cas i.i.d. La détermination des termes dominants de l'erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle a été obtenue par Laksaci (2007). Ferraty *et al.*(2008) ont abordé l'estimation de la fonction du hasard conditionnelle et ont établi

la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de ce modèle non paramétrique.

1.1.2 Statistique des données fonctionnelles

L'analyse des données fonctionnelle est une branche des statistiques vers laquelle l'intérêt de la communauté scientifique se développe de plus en plus, aussi en relation avec le nombre croissant de situations dans lesquelles les scientifiques théoriques et appliqués doivent faire face à des données ayant une nature continue. Le domaine a été popularisé en particulier au moyen des livres de Ramsay-Silverman (2002) et (2005) et, au cours des vingt dernières années, Les contributions ont été publiées (voir par exemple Bosq (2000), Ferraty et Vieu (2006) et aussi Hsing et Eubank (2015) pour les monographies générales, Cuevas (2014), Horváth et Rice (2015) et Müller (2005) Pour les études méthodologiques, Bongiorno *et al.*(2014) pour un ensemble sélectionné d'événements récents). Parallèlement, des méthodologies étendues et variées pour traiter des problèmes ayant une dimension très élevée ont été développés.
Variables et données fonctionnelles : La statistique pour données fonctionnelles ou analyse des donnéees fonctionnelles étudie des observations qui ne sont pas des variables réelles ou vectorielles mais des courbes aléatoires.
En général on veut indiquer que le nombre de variables observées est grand et même parfois beaucoup plus élevé que le nombre des unités statistiques. Dans ce cas également, l'un des principaux intérêts pour les statistiques haute dimension est le nombre croissant de situations impliquant chaque jour un grand nombre Des variables observées.
La définition d'une variable aléatoire fonctionnelle comme elle est définie dans les livres de statistique, par exemple, Ferraty et vieu (2006), Bosq et Lecoutre (1987), est une variable aléatoire observée dans plusieurs points d'un intervalle et qui prend des valeurs dans un espace infini, par exemple la variable fonctionnelle $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}(t); t \in T\}$ avec $T \subset \mathbb{R}$ représente une courbe observée sur l'intervalle T de $\mathbb{R}$. D'autre part si $T \subset \mathbb{R}^2$ notre variable fonctionelle représente une image. Pour fixer les idées on présente ces définitions.
Définition : Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ est appelée variable fonctionnelle si, elle prend des valeurs dans un espace à dimension infinie. L'observation X de $\mathcal{X}$ est appelée une donnée fonctionnelle.
Définition : L'ensemble de données fonctionnelles $X_1, \ldots, X_n$ est l'observation de n variables fonctionnelles $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ identiquement distribuées

comme $\mathcal{X}$.
Nous exposons ci-dessous quelques exemples de Ferraty et Vieu (2002, 2003) sur l'applications statistiques aux problèmes soulevés par l'analyse des données fonctionnelles. Dans un contexte général on parle de deux cas, le cas où les variables foncionnelles sont indépendantes et dépendantes.
Cas des variables fonctionnelles indépendantes : Dans ce cas ils se sont intéressés d'un problème de contrôle de la qualité dans l'industrie alimentaire, on peut trouver ces données sur le site web
http ://lib.stat.cmu.edu/datasets/tecator. Cet ensemble de données concerne un échantillon de viande finement hachée. L'objectif est d'étudier et mesurer par le spectromètre la contenance en graisse dans les morceaux de viande (figure.1.1).

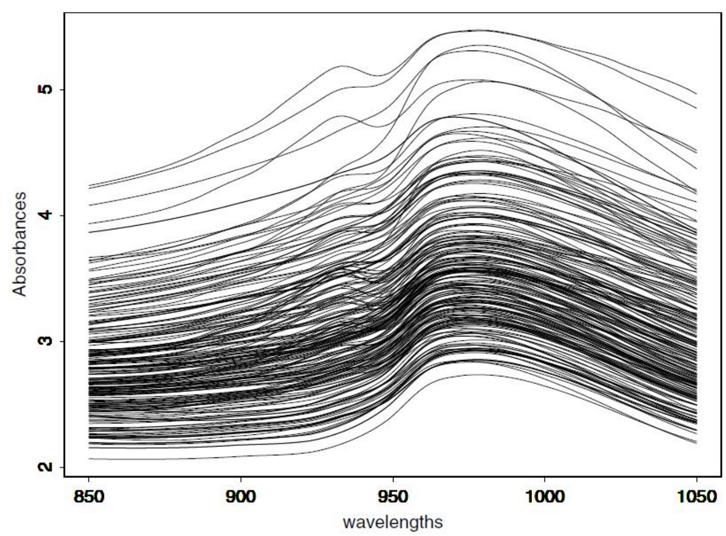

Fig.1.1 Les courbes spectrométriques

Cas des variables fonctionnelles dépendantes : Dans ce cas on prend l'exemple de consommation annuelle d'électricité, aux USA qui donne une série chronologique économique. Les données d'électricité mensuelle consommée par les secteurs résidentiel et commercial à partir de janvier 1973 à février 2001 (338 mois) sont disponibles sur le site web *http ://www.economagic.com*, aprés ils ont décidé de choisir les années passées comme période explicative. Cela signifie que l'ensemble des variables explicatives à inclure dans notre méthode statistique est composé de 28 courbes données qui sont les 28 séries chronologiques annuelles continues. Ces données fonctionnelles dépendantes sont présentées à la Figure.1.2.

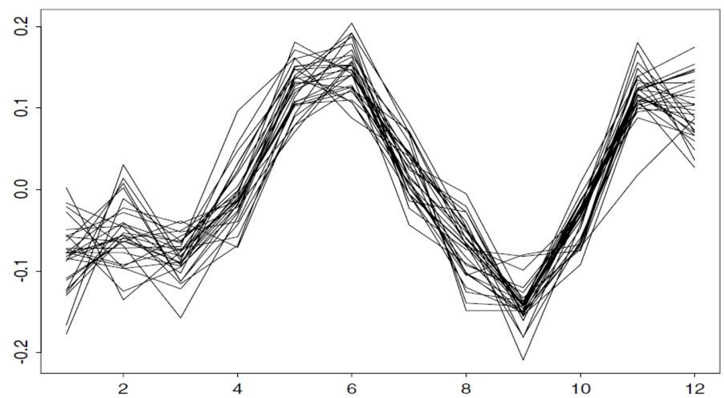

Fig.1.2 Courbes annuelles de consommation d'électricité aux USA

La classification des courbes est un domaine qui a reçu une grande attention ces dernières années, le document de Cholaquidis *et al.*(2015) propose un algorithme d'agrégation de classification adapté aux données fonctionnelles. Le modèle linéaire fonctionnel a été largement étudié dans la littérature pour les problèmes de régression dont le prédicteur est de dimension infinie. Dans ce problème, deux contributions traitent ce type de modèle dans le contexte plus général où on a observé plus d'une variable fonctionnelle.
La modélisation semiparamétrique des données fonctionnelles est un domaine actuellement actif dont les principaux objectifs le compromis entre la grande sensibilité à la dimension des modèles non paramétriques et la flexibilité linéaires (voir Goia et Vieu (2014) pour une courte enquête). Fondamentalement, dans la littérature on peut trouver différents modèles de différents types d'additifs (Voir par exemple Aneiros-Pérez et Vieu (2008), Ferraty et Vieu (2009)) ou des modèles basés sur les projections (voir par exemple Chen *et al.*(2011), Ferraty *et al.*(2013)) et la contribution de Ahmedou *et al.*(2015) complète cette littérature en proposant une combinaison de ces idées à travers un modèle de régression linéaire fonctionnelle généralisé capable d'intégrer de manière semi-paramétrique additive les informations issues d'un prédicteur fonctionnel et à partir de ses dérivés.
Pour la modélisation fonctionnelle de séries temporelles autorégressives, l'extension des processus autorégressifs habituels dans le cadre fonctionnel a été popularisé au cours des dernières années, principalement grâce aux diverses contributions de Bosq (voir par Monographies Bosq (2000), Bosq et Blanke (2007)).

1.1.3 La fonction de hasard

La fonction de hasard, appelée parfois fonction de risque est très fréquemment utilisée pour l'étude de la fiabilité en statistique. Elle s'est développée très rapidement, motivée par ses applications dans des domaines exigeants. Elle mesure la probabilité instantanée qu'un évènement ait lieu à une date donnée, sachant qu'il n'a pas encore eu lieu juste avant cette date. Notons que l'usage de ce modèle s'est popularisé en économétrie, particulièrement pour l'analyse des transitions (trajectoires individuelles sur le marché du travail). Ainsi, on peut chercher à mesurer, pour un chômeur, l'évolution au fil du temps de sa propension à retrouver un emploi. Voir par exemple Florens *et al.*(1994), Lancaster (1990), entre autres. Les actuaires s'intéressent également à ces quantités, avec le souci de repérer les clients à risques, c'est-à-dire susceptibles d'induire des pertes pour la compagnie (non remboursement d'emprunts, risque de défaillance...).
La fonction de hasard se retrouve aussi bien sous forme continue que sous forme discrétisée. Dans le premier cas, l'estimation fonctionnelle non paramétrique s'impose d'elle même lorsqu'on n'a aucune idée sur la forme à priori de la fonction de hasard (ou lorsqu'on se refuse à émettre des hypothèses sur l'appartenance à une famille de lois particulières). Dans le second cas, on estime les taux de hasard (décès, panne) comme étant des paramètres. Les précurseurs de l'analyse non paramétrique furent Watson et Leadbetter (1964a, 1964b) ont proposé un estimateur pour lequel ils établissent la propriété de convergence asymptotiquement sans biais. L'estimation non paramétrique de la fonction de hasard a été abordée par de nombreux
La littérature sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle est relativement restreinte en statistique fonctionnelle. L'article de Ferraty *et al.*(2008) est un travail précurseur sur le sujet. Dans cette publication les auteurs ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de la fonction de hasard conditionnelle, lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Dans le même contexte, Quintela-del Rio (2008) a établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur proposé par Ferraty *et al.*(2008) sur la fonction de hasard conditionnelle. L'auteur a illustré ces résultats asymptotiques par une application sur des données sismiques. On pourra regarder également le récent article de Laksaci et Mechab (2010) sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle pour des données fonctionnelles spatialement dépendantes.

1.2 Estimation par la méthode locale linéaire

L'estimation de la fontion de hasard conditionnelle est une technique statistique qui permet une meilleure compréhension de la relation entre une variable de réponse et un ensemble de co-variables, en comparaison avec les méthodes habituelles de régression. Cette technique revêt donc une grande importance chez les scientifiques oú la connaissance des moyens conditionnels obtenue par des méthodes de régression ne suffit pas à tirer de précieuses conclusions sur le problème à étudier. En outre, les fonctions de hasard apparaissent dans une variété de domaines. L'une des applications les plus utiles l'étude de la fiabilité et l'analyse des durées de vie. Cependant, la densité de probabilité, et son interprétation résultante, est conditionnelle sur l'hypothèse que le modèle utilisé pour produire les prévisions est correctement spécifié.
La méthode de noyau, la fonction du noyau K (u), est supposée satisfaire certaines conditions spécifiques. Les choix de K (u) sont définies en termes de fonctions de densité de probabilité univariées et unimodales. De plus, Youndjé (1993 et 1996) et d'autres donnent le biais, la variance, L'erreur quadratique moyenne (MSE) et les propriétés de convergence, aussi la proposition également d'un estimateur de noyau alternatif avec une (MSE) plus petite que l'estimateur standard dans certains situations courantes. D'autre part, nous ne pouvons pas continuer notre introduction sans mentionner l'oeuvre de Fan *et al.*(1996), qui propose un autre estimateur densité conditionnelle en généralisant l'estimateur de Rosenblatt en utilisant des techniques polynomiales locales.
Les premiers résultats ont été obtenus par Ferraty et Vieu (2005) et Ferraty et al. (2006). Ils ont établi la convergence presque complète, Dans les deux cas les données i.i.d. et fortement mélangeant, des estimateurs du noyau du distribution conditionnel et de la densité de probabilité conditionnelle. En outre, ils ont présenté certaines applications de leurs résultats à la fois sur le mode conditionnel et sur les quantiles conditionnels. Parmi les nombreux articles qui concernent la modélisation non paramétrique à la distribution conditionnelle d'une variable réelle donnée une variable aléatoire , nous nous référons seulement à Dabo-Niang et Laksaci (2007) pour les mode d'estimation, et à Laksaci (2007) pour l'expression asymptotique des principaux termes dans l'erreur quadratique des estimateurs de noyaux de densité conditionnelle.

D'autre part, la méthode locale linéaire plus récente présente des avantages par rapport à l'estimation par la méthode du noyau. Il est bien connu que les estimateurs avec la méthode locale linéaire ont des belles propriétés asymptotiques lorsque la malédiction de la dimensionnalité est contrôlée au moyen de considérations appropriées sur les probabilités des petites boules de la variable fonctionnelle (voir Ferraty et Vieu 2006 et Références). Cependant, il est également bien connu que, comme dans le cadre standard dimensionnel fini, le paramètre de lissage doit être choisi de manière appropriée pour assurer une bonne modélisations (Voir Laksaci, 2007). Remarquons que certains articles (voir par exemple Youndjé *et al.* 1993), ont traité le problème de la sélection des paramètres de lissage dans les paramètres non paramétriques pour l'estimation de la densité conditionnelle. De plus, la sélection du paramètre de lissage dans le réglage dimensionnel infini est beaucoup plus compliqué. En particulier, Scatterplot qui est un outil graphique permettant d'explorer la relation entre les variables et la réponse scalaire n'est pas disponible, et il devient donc très difficile d'avoir quelques informations sur la forme de la relation entre la variable fonctionnelle et la réponse scalaire. Par conséquent, différentes zones présentant des concentrations faibles ou élevées peuvent apparaître dans une telle relation, même si elle ne figure pas dans l'échantillon de données fonctionnelles.
En outre, certains auteurs ont fait une comparaison entre la méthode locale constante (la méthode de base) et l'ajustement par la méthode locale linéaire, on peut cité parmis eux le travail de Fan (1992). En 2001, Irizarry (2001) a étudié la régression linéaire dans Un cadre de paramétrage linéaire assez général. Le livre de Loader (2004) est un document pédagogique important pour l'estimation de la méthode linéaire locale. Deux ans plus tard, le gallois et Yee ont abordé le cas où la variable de réponse est multidimensionnelle. Ils ont évalué le bias et la variance asymptotique de l'estimateur local linéaire de la fonction de régression et la densité. La contribution de Hafen (2010) à l'ajustement local linéaire fait un grand dévlopement dans les domaines pratique et théorique.

Tous les résultats que nous avons cités précédemment ont été obtenus pour une variable explicative de vecteur, d'autre part, Le cas d'une variable explicative fonctionnelle a été abordé très récemment. À ce stade, la littérature est très limitée. L'article de Baìllo et Grané (2009) est le premier dans ce domaine. Ils ont établi la convergence en norme L2 d'une méthode locale linéaire lorsque la variable explicative est à valeurs dans un espace de Hilbert.

Une généralisation au cas d'une variable de banach aléatoire a été développé par Barrientos-Marin et al. (2010). Dans cet article, ces auteurs nous proposent une version fonctionnelle de la méthode locale très linéaire et les utilisations dans le domaine pratique. Nous nous référons aussi à Demongeot et al. (2010) qui ont abordés l'estimation de la densité conditionnelle dans un cas où les observations sont indépendantes équidistribuées. de plus ils ont établi la convergence ponctuel et uniforme presque complet pour l'estimateur construit. Deux ans plus tard l'éstimation de la fonction de la densité et ses applications a été récemment traitée par Demongeot *et al.* (2012). Afin de terminer notre propre littérature sur la méthode locale linéaire, nous mentionnons l'oeuvre de Laksasi *el al.* (2013) dans le but de l'estimation de la fonction de déstribution pour le cas spatiale.

1.3 Modéles fonctionnels spatiales

Les données spatiales et spatio-temporelles sont partout. Outre ceux que nous collectons, ils nous confrontent à la télévision, dans les journaux, des planificateurs d'itinéraires, sur des écrans d'ordinateur, sur des appareils mobiles et sur du papier ordinaire cartes. Faire une carte adaptée à son but et ne déformant pas Les données sous-jacentes initialement n'est cependant pas facile. Au-delà de la création, l'analyse des données spatiales porte sur des questions qui ne sont pas directement répondu en examinant les données elles-mêmes. Ces questions se rapportent à des hypothèses Processus qui génèrent les données observées. Inférence statistique pour processus spatiaux est souvent difficile.
Mentionnons également que en statistique spatiale, on distingue deux types d'asymptotiques (voir Cressie,1991). L'asymptotique extensive et l'asymptotique intensive. La première traite le cas où la taille des observations croit avec celle du domaine d'observation. En pratique, cette asymptotique est utilisée lorsque les observations sont collectées par des stations de mesure séparées. On trouvera des exemples des données fonctionnelles, adaptées a cette asymptotique, en économie (les courbes de consommation d'un produit quelconque dans différents canton), environnement (les courbes de concentration d'un gaz polluant dans différentes régions) ou en agronomie (les courbes de pluviométrie dans différentes localités). L'asymptotique intensive examine la situation d'observations qui se densifient dans un domaine borné fixé. Cela est le cas, par exemple, en prospection minière ou en analyse radiographique.

Par ailleurs, on considère une généralisation naturelle des observations α-mélangeantes au cas spatial. Nous supposons que les sites sont dans l'ensemble $\mathbb{N}^N, N \geq 1$. i.e. $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^N$. On définit le coefficient de mélange du champ $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$ par :

$$\alpha\left(\mathcal{B}(E),\, \mathcal{B}(E^{'})\right) = \sup_{B\in\mathcal{B}(E),\, C\in\mathcal{B}(E^{'})} \left|\mathbb{P}\left(B \cap C\right) - \mathbb{P}\left(B\right)\mathbb{P}\left(C\right)\right|$$

où $\mathcal{B}(E)$ (*resp.* $\mathcal{B}(E^{'})$) désigne la σ-algèbre engendrée par $(Z_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} \in E)$ (*resp.* $\left(Z_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} \in E^{'}\right)$), on considère que les cardinaux de $E, E^{'}$ notés par $Card(E)$, $Card(E^{'})$ respectivement sont finis, il existe une fonction $\varphi(t)$ décroissante tendant vers 0 lorsque t tend vers l'infini, et une fonction ψ symétrique, positive et croissante vérifie pour certaines constantes $\widetilde{\beta} \geq 1, C > 0$ la condition que $\psi\left(n, m\right) \leq C\left(n + m + 1\right)^{\widetilde{\beta}}, \ \forall n, m \in \mathbb{N}$. On peut majorer notre coefficient de mélange par :

$$\alpha\left(\mathcal{B}(E),\, \mathcal{B}(E^{'})\right) \leq \psi\left(\mathrm{Card}\left(E\right), \mathrm{Card}(E^{'})\right)\varphi\left(\mathrm{dist}\left(E, E^{'}\right)\right), \tag{1.1}$$

où $dist\left(E, E^{'}\right)$ représente la distance euclidienne entre E et $E^{'}$.

1.4 Définitions et outils

Dans cette section nous présentons quelques définition utiles, ainsi les techniques et les outils dont on s'est servi pour démonter nos résultats.

Nous voulons rappeler quelques lemmes utiles que nous les utilisons dans les preuves de nos résultats.

Lemme 1.1 *(Volkonskii et Rozanov (1959)) Soit $V_1, ..., V_L$ des variables aléatoires mesurables par rapport aux tribus respectives $\mathcal{F}_{i_1}^{j_1}, ..., \mathcal{F}_{i_L}^{j_L}$ avec $1 \leq i_1 < j_1 < i_2 < ... < j_L \leq T$, $i_{l+1} - j_l \geq w \geq 1$ et $|V_j| \leq 1$ pour $j = 1, ..., L$ alors*

$$\left|\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{L} V_j\right] - \prod_{j=1}^{L} \mathbb{E}[V_j]\right| \leq 8(L-1)\alpha(w).$$

Lemme 1.2 *(Carbon et al. (1997)) On suppose que $E_1, ..., E_r$ des ensembles contenant m sites avec $dist(E_i, E_j) \geq \delta$ pour tout $i \neq j$ où $1 \leq i, j \leq r$. On suppose $Z_1, Z_2, ..., Z_r$ est une suite de valeurs réelles mesurable respectivement des σ-algèbres*
$\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2), ..., \mathcal{B}(E_r)$, et Z_i prend ses valeurs dans $[a, b]$. Alors, il existe une suite de valeurs réelles $Z_1^*, Z_2^*, ..., Z_r^*$ indépendantes de $Z_1, Z_2, ..., Z_r$ telle que Z_i^* a la même distribution que Z_i vérifiant

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}\left|Z_i - Z_i^*\right| \leq 2r(b-a)\psi((r-1)m, m)\varphi(\delta).$$

Lemme 1.3 *(Ibragimov et Linnik (1971) ou Deo (1973)) (i) On suppose que (1.1) est vérifiée. On note par $\mathcal{L}_r(\mathcal{F})$ une classe d'une suite réelle X $\mathcal{F}$-mesurable vérifiant $||X||_r = (E|X|^r)^{1/r} < \infty$. Soient $X \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(E))$ et $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(E^{'}))$. On suppose que $1 \leq r, s, t \leq \infty$ et $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$. Alors*

$$|\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y| \leq C||X||_r||Y||_s\{\psi\left(Card\,(E)\,, Card(E^{'})\right)\varphi\left(dist\left(E, E^{'}\right)\right)\}^{1/t} \tag{1.2}$$

(ii) Pour des variables aléatoires bornées avec la probabilité 1, le côté droit de (1.2) peut être remplacé par $\psi\left(Card\,(E)\,, Card(E^{'})\right)\varphi\left(dist\left(E, E^{'}\right)\right)$.

Lemme 1.4 *(Nakhapetyan (1987)) Soit $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ un vecteur aléatoire tel que*
$|\mathbb{E}\prod_{s=i}^{n} Z_s| < \infty, i = 1, ..., n-1, |Z_i| \leq C, i = 1, ..., n$. Alors

$$\left|\mathbb{E}\prod_{s=1}^{n} Z_s - \prod_{s=1}^{n}\mathbb{E}Z_s\right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left|\mathbb{E}(Z_i-1)(Z_j-1)\prod_{s=j+1}^{n} Z_s - \mathbb{E}(Z_i-1)\mathbb{E}(Z_j-1)\prod_{s=j+1}^{n} Z_s\right|.$$

1.5 Contribution de la thèse

Il est naturel de trouver à la fin d'une réalisation de thèse de doctorat des nouveaux résultats qui représentent la contribution de la thèse. Dans notre travail de thèse, nous avons apporté une contribution au thème de l'estimation non paramétrique fonctionnelle et à la statistique des données spatiales. Le cadre général présenté dans cette thèse est celui de l'estimation fonctionnelle de la fonction de risque conditionnelle dans le cas des données fonctionnelles et une généralisation au cas des données fonctionnelles sous une dépendance spatiale. Ce domaine est d'actualité et d'un intérêt scientifique important selon les différents résultats obtenus et publiés dans des revues bien établies. Les utilisateurs ont désormais fréquemment recours à des méthodes non paramétriques, rendues accessibles par ces travaux scientifiques et par leur intégration dans les logiciels de statistique. La méthode d'estimation fonctionnelle considérée est la méthode locale linéaire. Comme dans la littérature, peu de résultats asymptotiques existent dans le cadre de l'estimation par la méthode locale linéaire de la fonction de hasard conditionnelle, nous nous sommes intéressés à enrichir ce cadre d'estimation par quelques travaux de recherche.
Notre but dans cette thèse est d'étudier les propriétés asymptotiques de la fonction de hasard conditionnelle dans le cadre de la méthode locale linéaire. On donne une brève présentation des résultats obtenus dans la thèse, et on laisse les détails pour les chapitres réalisés.

Résultat : Vitesse de convergence de l'estimateur de la fonction de hasard conditionnelle

Théorème 1.1 *Sous la condition de mélange et les hypothèses de concentration de la loi conjointe de variable fonctionnelle, on a*

$$|\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| = O\left(h_K^{b_1}\right) + O\left(h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad p.co.$$

Résultats : Convergence en moyenne quadratique
Sous des conditions imposées, nous étudierons l'erreur quadratique de notre estimateur de la fonction de hasard conditionnelle.

Théorème 1.2 *Sous certaines conditions, nous aurons*

$$\mathbb{E}\left[\widehat{h^x}(y) - h^x(y)\right]^2 = B_n^2(x,y) + \frac{V_{HK}(x,y)}{nh_H\phi_x(h_K)} + o(h_H^4) + o(h_K^4) + o\left(\frac{1}{nh_H\phi_x(h_K)}\right)$$

où

$$B_n(x,y) = \frac{(B_H^f - h^x(y)B_H^F)h_H^2 + (B_K^f - h^x(y)B_K^F)h_K^2}{1 - F^x(y)}$$

avec

$$\begin{aligned}
B_H^f(x,y) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f^x(y)}{\partial y^2}\int t^2 H(t)dt, \\
B_K^f(x,y) &= \tfrac{1}{2}\Psi_{0,1}^{(2)}(0)\left[\frac{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}K'(u)\chi_x(u)du\right)}\right] \\
B_H^F(x,y) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 F^x(y)}{\partial y^2}\int t^2 H'(t)dt, \\
B_K^F(x,y) &= \tfrac{1}{2}\Psi_{0,0}^{(2)}(0)\left[\frac{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}K'(u)\chi_x(u)du\right)}\right] + o(h_K^2)
\end{aligned}$$

et

$$V_{HK}(x,y) = \frac{h^x(y)}{(1-F^x(y))}\left[\frac{\left(K^2(1)-\int_{-1}^{1}(K^2(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(K(u))'\chi_x(u)du\right)^2}\right]$$

Résultats : Convergence presque complète : cas spatial

Théorème 1.3 *Sous certaines conditions, nous aurons*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| = O\left(h_K^{\beta_1} + h_H^{\beta_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\, h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad p.co.$$

où
$\mathbf{n} = (n_1, ..., n_N) \in \mathbb{N}^N$ *et* $\quad \widehat{\mathbf{n}} = n_1...n_N$.

Corollaire 1.1 *Sous des conditions de régularité, on obtient*

$$\widehat{\theta}(x) - \theta(x) = O\left(h_K^{b_1/2}\right) + O\left(h_H^{b_2/2}\right) + O\left(\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\, h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{4}}\right), \quad p.co.$$

1.6 Plan de la thèse

Notre principale étude est celle de l'estimation nonparamétrique fonctionnelle de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode locale linéaire lorsqu'on dispose d'une variable réponse réelle conditionnée à une variable explicative fonctionnelle dans le but par la suite est d'étudier les propriétés

asymptotiques de notre estimateur, les propriétés asymptotiques sont énoncées en termes de convergence presque complète qui est connue pour impliquer à la fois la convergence presque sûre et la convergence en probabilité.
Nous avons scindé notre travail en cinq chapitres. Le premier chapitre est un chapitre introductif consacré à la présentation des différents thèmes abordés dans notre axe de recherche. Nous commençons par un bref historique sur l'estimation nonparamétrique fonctionnelle et un contexte bibliographique sur la fonction de hasard conditionnelle, ainsi nous avons choisi, de donner une courte introduction sur la méthode locale linéaire et un dernier paragraphe sur la statistique des données spatiales pour finaliser notre chapitre.
Dans le deuxième chapitre, nous considérons l'estimation locale linéaire de la fonction de hasard conditionnel pour une variable de réponse réelle et une variable exogène fonctionnelle. Ce travail à fait l'objet d'une publication acceptée dans le journal International Journal of Statistics and Economics.
L'organisation de ce chapitre est comme suit. Nous construisons un estimateur avec la méthode locale linéaire de la fonction de hasard conditionnelle à partir des estimateurs de la fonction de répartition conditionnelle et la densité conditionnelle. Ainsi, nous établissons la convergence presque complète de notre estimateur sous des conditions de régularités et sous l'hypothèse de concentration. Nous présentons à la fin une application à travers une estimation du point à haut risque.
Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la convergence en moyenne quadratique de l'estimateur de notre fonction de hasard conditionnelle. Ce chapitre est composé de quatre sections, une introduction fait la première section. Nous introduisons nos hypothèses dans la deuxième section. Dans la suivante section, nous énonçons nos principaux résultats et on laisse les démonstrations à la dernière section.
Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse au cadre spatial lorsque le champ aléatoire prend ses valeurs dans un espace abstrait de dimension infinie. On considère la variable aléatoire fonctionnelle spatiale discrète $\{X_{\mathbf{n}}\}$ indexée par $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$, l'idée est de faire une extension des résultats asymptotiques obtenus dans le deuxième chapitre pour $N = 1$ au cas spatial lorsque $N > 1$. La structure est la suivante. Dans la deuxième section, nous présentons le modèle spatial de notre étude. Les hypothèses et les notations sont données dans la troisième section. La section quatre est réservée au résultat de convergence de notre estimateur dans un ordre spatial. Les démonstrations des résultats sont données à la dernière section.
Pour Compléter ce travail nous avons mis en œuvre au cinquième chapitre

une étude par simulation.
Enfin, Nous terminerons la thèse par une conclusion et quelques prolongements possibles de nos travaux rattachés au contenu de ce domaine de recherche.

Références

Ahmedou, A., Marion, J.M. and Pumo, B. (2015). Generalized linear model with functional predictors and their derivatives. *J. Multivariate Anal.*

Baìllo, A., Grané, A. (2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response. *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 102-111.

Barrientos-Marin, J., F. Ferraty, F and Vieu, P. (2010). Locally modelled regression and functional data. *Journal of Nonparametric Statistics*, **22(5)**, 617-632.

Bongiorno, E., Goia, A., Salinelli, E. and Vieu, P. (2014). Contributions in infinite-dimensional statistics and related topics, *Esculapio, Bologna.*

Bosq, D. (2000). Linear Processes in Functional Spaces, *Springer-Verlag*, New-York.

Bosq, D., Lecoutre, J.P (1987) . Théorie de l'estimation fonnctionnelle. *Economica.*

Bosq, D., Blanke, D. (2007). Inference and Prediction in Large Dimensions, *Wiley Series in Probability and Statistics* John Wiley & Sons.

Chen, D., Hall, P. and Müller, H.G. (2011). Single and multiple index functional regression models with nonparametric link, *Ann. Statist.* **39 (3)**, 1720-1747.

Cholaquidis, A., Fraiman, R., Kalemkerian, J. and Llop, P. (2015). An nonlinear aggregation type classifyer, *J. Multivariate Anal.*

Cressie, N. A. (1991). *Statistics for spatial data.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York.

Cuevas, A. (2014). A partial overview of the theory of statistics with functional data. *J. Statist. Plann. Inference* **147**, 1-23.

Dabo-Niang, S. (2002). Estimation de la densité dans un espace de dimension infinie : Application aux diffusions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **334**, 213-216.

Dabo-Niang, S. (2004). Kernel density estimator in an infnite dimensional space with a rate of convergence in the case of diffusion process. *Applied*

Math. Lett.,**17**, 381-386.

Dabo-Niang, S., Laksaci, A. (2007). Propriétés asymptotiques d'un estimateur à noyau du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. (French) [Asymptotic properties of the kernel estimator of the conditional mode when the regressor is functional]. *Ann. I.S.U.P.* **51** , 27-42.

Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2010). Local linear estimation of the conditional density for functional data. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, **348**, 931-934.

Demongeot, J. , Laksaci, A. , Madani, F. and Rachdi, M. (2012). Functional data : Local linear estimation of the conditional density and its application *Statistics C. R., Math.*, Acad. Sci. Paris, **348** 931-934
Fan, J. (1992). Design-adaptative nonparametric regression. *Journal of the American Statistical association*, **87**, 998-1004.

Fan, J., Gijbels, I. (1996). Local Polynomial Modelling and its Applications. *Monographs on Statistics and Applied Probability 66*,Chapman& Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN, UK.

Ferraty, F., Vieu, P. (2002). The functional nonparametric model and application to spectrometric data.*Comput. Statist. and Data Anal.* **17**, 545-564.

Ferraty, F., Vieu, P. (2000). Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés.*C. R. Acad. Sci.*, Paris,**330**, 139-142.

Ferraty, F., Vieu, P. (2003). Curves discrimination : a nonparametric functional approach. *Comput. Statist. and Data Anal.* **44**, 161-173.

Ferraty, F., Vieu, P. (2004). Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination. *J. Nonparametric Statist.* **16**, 111-127.

Ferraty, F., Romain, Y. (2011). The Oxford handbook of functional data analysis. *Oxford University Press.*

Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. (2005). Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic El Niño phenomenon. *Sankhya.* **67** , 378-398.

FERRATY, F., VIEU, P. (2006). *Nonparametric functional data analysis. Theory and Practice.* Springer Series in Statistics. Springer. New York.

FERRATY, F., LAKSACI, A. and VIEU, P.(2006). Estimation some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat Inference Stoch. Process.* **9**, 47-76.

FERRATY, F., RABHI, A. and VIEU, P. (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **53**, 1-18.

FERRATY, F., VIEU, P. (2009). Additive prediction and boosting for functional data. *Computat. Statist. Data Anal.* **53**, 1400-1413.

FERRATY, F., LAKSACI, A., TADJ, A. and VIEU, P. (2010). Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J. Statist. Plann. Inference.* **140**, 335-352.

FERRATY, F., GOIA, A., SALINELLI, E. and VIEU, P. (2013). Functional projection pursuit regression, Test **22**, 293-320.

FLORENS, J. P., LARRIBEAU, S. and MOUCHART, M. (1994). Bayesian Encompassing Tests of a Unit Root Hypothesis. *Econometric Theory.* **10**, 747-763.

GASSER, T., HALL, P. and Presnell, B. (1998). Nonparametric estimation of the mode of a distribution of random curves. *J. R. Stat. Soc.Ser. B, Stat. Methodol.* **60**, 681-691.

GOIA, A., VIEU, P. (2014). Some advances in semiparametric functional data modelling. *Contributions in infinite-dimensional statistics and related topics*, Esculapio, Bologna, 135-141.

HAFEN, R. P. (2010). *Local regression models : Advancements, applications, and new methods.* Thesis (Ph.D.).

HORVÁTH, L., RICE, G. (2015). An introduction to functional data analysis and a principal component approach for testing the equality of mean curves. *Rev. Mat. Complut.* **28 (3)**, 505-548.

HSING, T., EUBANK, R. (2015). Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with An Introduction to Linear Operators, *Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons*, Chichester.

IRIZARRY, R. A. (2001). Local Regression With Meaningful Parameters Local Regression With Meaningful Parameters. *The American Statistician* Volume 55, Issue **1**, 72-79.

LAKSACI, A. (2007). Erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle à variable explicative fonctionnelle. (French) [Quadratic error of the kernel estimator of conditional density when the regressor is functional.] *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **345**, 171-175.

LAKSACI, A., RACHDI, M. and RAHMANI, S. (2013). Spatial modelization : Local linear estimation of the conditional distribution for functional data. *Spatial Statistics* **6** 1-23.

LANCASTER, T. (1990). *The econometric analysis of the transition data.* Cambridge University Press.

LOADER, C. (2004). Smoothing : local regression techniques. *Handbook of computational statistics*, 539-563, Springer, Berlin.

MASRY, E. (2005). Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality. *Stoch. Proc. and their Appl.*,**115**, 155-177.

MÜLLER, H.G. Functional modelling and classification of longitudinal data. (2005). *Scand. J. Stat.* **3**, 223-240.

QUINTELA-DEL-RÍO, A. (2008). Hazard function given a functional variable : Non-parametric estimation under strong mixing conditions.*J. Nonparametr. Stat.* **20**, 413-430.

RAMSAY J, SILVERMAN B (1997). Functional data analysis. *Springer*.

RAMSAY, J. and SILVERMAN, B. (2002). Applied Functional Data Analysis. Methods and Case Studies, *Springer Series in Statistics, Springer*, New York.

RAMSAY, J. and SILVERMAN, B. (2005). Springer Series in Statistics. *Springer*, New York.

WATSON, G. S. (1964a). Smooth regression analysis. *Sankhya.* **26**, 359-372.

WATSON, G. S. and LEADBETTER, M. R. (1964b). Hazard analysis. I. *Biometrika.* **51**, 175-184.

Youndjé, E. (1993). Estimation non-paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau. Thèse 3eme cycle, Université de Rouen.

Youndjé, E., Sarda, P. and Vieu, P. (1996). Optimal smooth hazard estimates. Test **5, 2**, 379-394.

Zhang, J. (2013). Analysis of Variance for Functional Data. *in : Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability.*

Chapitre 2

Local linear estimation of the conditional hazard function

Ce chapitre fait l'objet d'une publication accepté dans *International Journal of Statistics & Economics*

Local linear estimation of the conditional hazard function

Ibrahim Massim and Boubaker Mechab

Laboratory of Statistics and Stochastic Processes
Department of Probability and Statistics
Djillali Liabes University
Sidi Bel Abbes 22000, Algeria
ibrahim.massim@yahoo.fr
mechaboub@yahoo.fr

Abstract

In this paper, we consider the local linear estimation of the conditional hazard function of a real response variable given a functional variable, using the local linear estimation of the conditional density and cumulative distribution function. Under some regularity conditions, we establish the almost complete convergence with rate for the proposed estimator.

Keywords : functional data, local linear estimation, conditional hazard function, functional nonparametric statistics.

2000 Mathematics Subject Classification : 62G05, 62G20.

2.1 Introduction

Recently there has been an increasing interest in the study of functional data. For an overview of the present state on nonparametric functional data (FDA), we refer to the works of [10], [4] and [14], and the references therein. Nonparametric estimation of a hazard function based on ratio of estimation of the density and the survival function was first introduced in the statistical literature by [16]. Other authors have worked in this field. We can cite for example, [15] showed the asymptotic normality of the hazard rate function with dependence conditions. [12] established the uniform convergence properties and asymptotic normality of an estimate of the maximum of the hazard function, in a context of strong mixing dependence. For this topic but in the functional data case, [13] has shown that, the kernel estimator of the hazard function is strongly consistent and asymptotically normally distributed. At the same time, [9] stated the uniform almost convergence with rates of the kernel estimator of the conditional hazard function in several situations, including censored and/ or dependent variables. The spatial model of these results were obtained by [11].
In the case of finite-dimensional data, local linear estimation technique has several advantages over the kernel method, as bias reduction and adaptation of edge effects, for more discussion we can refer to [7] and [8]. Concerning the local linear estimation in the functional data case have been investigated recently (see [3] for more details). [1] proposed a local linear regression estimator and study its asymptotic behavior (the rate of convergence of the conditional mean squared error) when the explanatory variable takes values in a Hilbert space. The locally modelled regression estimator was proposed by [2], they established the almost-complete convergence (with rate) of the proposed estimator. [6] considered the estimation of the conditional density function based on the local modelling approach when the explanatory variable is functional.
In this article, we employ the local linear estimation to construct the estimator of the conditional hazard function of a scalar response given a functional explanatory variable. The article is organized as follows. In section 2, we introduce the local linear estimation of the conditional hazard for functional data. The assumptions and some remarks are given in section 3. In section 4, we give our main result. An application to estimate the point of high risk is given in section 5. Finally, we gathered all the proofs of this article in the last section.

2.2 Local linear estimation for functional data

Consider $(X_i, Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ be a $\mathcal{F}\times\mathbb{R}$-valued measurable random variables (r.v's), defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, where $(\mathcal{F}, d)$ is a semi-metric space. In most practical applications, $\mathcal{F}$ is a normed space (e.g. Hilbert or banach space) with norm $||.||$ so that $d(x, x') = ||x - x'||$. In the following x will be a fixed point in $\mathcal{F}$. We intend to estimate the conditional hazard function h^x using n independent observations (X_i, Y_i) draw from a random variables with the same distribution with (X, Y) where the regular version F^x of the conditional distribution function of Y given $X = x$ exists for any $x \in \mathcal{F}$. Moreover we suppose that F^x has a continuous density f^x with respect to (w.r.t) Lebesgue's measure over $\mathbb{R}$. The estimation of the conditional hazard function $h^x(y)$ in the local linear modeling is based on the approximation of the conditional cumulative distribution $F^x(y)$ and conditional density function $f^x(y)$ by a linear function. We use technique extended the local linear ideas to the infinite dimensional framework (cf. for instance [1], [2], [6], for some examples and references). As indicated by [8] the function $F^x(\cdot)$ can be viewed as a nonparametric regression model with response variable $h_H^{-j}H^{(j)}(h_H^{-1}(\cdot - Y_i))$ where H is some cumulative distribution function and h_H is a sequence of positive real numbers. This consideration is motivated by the fact that

$$E[h_H^{-j}H^{(j)}(h_H^{-1}(y - Y_i))|X_i = x] \to F^{x(j)}(y) \text{ as } h_n \to 0 \ (j = 0, 1).$$

Here, we adopt the fast functional local modeling, that is, the conditional cumulative distribution function $\widehat{F}^x$ is estimated by $\widehat{a}$ where the couple $(\widehat{a},\ \widehat{b})$ is obtained by the optimization rule :

$$(\widehat{a}, \widehat{b}) = arg \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} \left(H(h_H^{-1}(y - Y_i)) - a - b\beta(X_i,\ x)\right)^2 K(h_H^{-1}\delta(x, X_i)) \tag{2.1}$$

where $\beta(.,.)$ and $\delta(.,.)$ are locating functions defined from $\mathcal{F}^2$ into $\mathbb{R}$, such that :

$$\forall\xi \in \mathcal{F}, \quad \beta(\xi, \xi) = 0 \text{ and } \mathrm{d}(.,.) = |\delta(.,.)|$$

and where the function K is a kernel, H is a distribution function and $h_K = h_{K,n}$(respectively, $h_H = h_{H,n}$) is a sequence of positive real numbers which converges to 0 when $n \to \infty$. Clearly, the estimator $\widehat{a}$, given by 4.4, can be explicitly written as follows :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{1\le i,j\le n} W_{ij}(x)H({h_H}^{-1}(y-Y_j))}{\sum_{1\le i,j\le n} W_{ij}(x)}, \qquad \forall y\in\mathbb{R} \tag{2.2}$$

where
$W_{ij}(x) = \beta_i(\beta_i-\beta_j)K(h_K^{-1}\delta(x,X_i))K(h_K^{-1}\delta(x,X_j))$
with $\beta_i=\beta(X_i,x)$ and the convention $0/0=0$.
then the density function estimator $\widehat{f}^x$ of f^x can be deduced from the distribution function and we defined by

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\sum_{1\le i,j\le n} W_{ij}(x)H'({h_H}^{-1}(y-Y_j))}{h_H\sum_{1\le i,j\le n} W_{ij}(x)}, \qquad \forall y\in\mathbb{R}$$

Where H' is the derivative of H.
We estimate the conditional hazard function h^x when $(F^x<1)$ by

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)}, \quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

2.3 Hypothesis

We give the hypotheses that are necessary in deriving the almost-complete convergence [1] (a.co.) of the functional locally modeled estimator of h^x.
In what follows x (resp. y) will denote a fixed point in ($\mathcal{F}$ (resp. $\mathbb{R}$), $\aleph_x$ (resp. $\aleph_y$) will denote a fixed neighborhood of a fixed point x (resp. of y) and $\phi_x(r_1,r_2)=\mathbb{P}(r_2<\delta(X,x)<r_1)$. Then, we assume that our nonparametric model satisfies the following conditions :

(H1) For any $r>0$, $\phi_x(r) := \phi_x(-r,r) > 0$.

1. Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real r.v.'s ; we say that z_n converges almost completely (a.co.) to zero if, and only if, $\forall\epsilon>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|z_n|>\epsilon)<\infty$. Moreover, we say that the rate of almost complete convergence of z_n to zero is of order u_n (with $u_n\to 0$) and we write $z_n=O_{a.co.}(u_n)$ if, and only if, $\exists\epsilon>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}P(|z_n|>\epsilon u_n)<\infty$.

(H2) The conditional distribution function F^x (resp. density function f^x) is such that : there exist some positive constants b_1 and b_2, $\forall (y_1, y_2) \in \aleph_y \times \aleph_y$ and $\forall (x_1, x_2) \in \aleph_x \times \aleph_x$:

$$|F^{x_1^{(j)}}(y_1) - F^{x_2^{(j)}}(y_2)| \leq C\left(\delta|(x_1, x_2)|^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2}\right), j = 0, 1$$

where C is a positive constant depending on x.

(H3) The function $\delta(\cdot,\cdot)$ and $\beta(\cdot,\cdot)$ are such that :

$$\forall z \in \mathcal{F}, |\delta(x,z)| = d(x,z) \text{ and } C_1|\delta(x,z)| \leq |\beta(x,z)| \leq C_1|\delta(x,z)|.$$

where $C_1 > 0, C_2 > 0$.

(H4) The kernel K is a Positive, differentiable function which is supported within $(-1, 1)$.

(H5) The kernel H is a differentiable function and H' is a positive, bounded, Lipschitzian continuous function such that :

$$\int |t|^{b_2} H^{'}(t)dt < \infty \quad \text{and} \int H^{'2}(t)dt < \infty.$$

(H6) The bandwidth h_K satisfies : that there exists a positive integer n_0, such that, $\forall n > n_0$:

$$-\frac{1}{\phi_x(h_K)} \int_{-1}^{1} \phi(zh_K, h_K) \frac{d}{dz}(z^2 K(z))dz > C_3 > 0$$

and

$$h_K \int_{B(x,h_K)} \beta(u,x)dP(u) = o\left(\int_{B(x,h_K)} \beta^2(u,x)dP(u)\right)$$

where $B(x,r) = \{z \in \mathcal{F} / |\delta(z,x)| \leq r\}$ and $dP(x)$ is the cumulative distribution of X.

Also that

$$\lim_{n\to\infty} n^{\gamma} h_H = \infty \text{ for some } \gamma > 0 \text{ and } \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n h_H^j \phi_x(h_K)} = 0. \text{ for } j \in \{0, 1\}.$$

Let us make some remarks on the previous assumptions. Condition (H1) is simple adaptation of hypothesis (H1)in Ferraty *et al.* (2008), when one replaces the semi-metric $d(\cdot,\cdot)$ by $\delta(\cdot,\cdot)$. Moreover, the conditions (H3) and the first part of (H6) used here are just the same as conditions used in Barrientos-Marin *et al.* (2010) and Demongeot *et al.* (2013). While assumption (H2) is a regularity condition which characterizes the functional space of our model. The condition (H4) is assumed in order to simplify the proofs. The hypotheses ($H5$) and the second part of (H6) are technical conditions, standard in nonparametric estimation with functional data, similar to those considered in Fan and Gijbels (1996).

2.4 Main Result : almost-complete convergence

Theorem 2.1 *Under assumptions (H1)-(H6), we obtain :*

$$|\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| = O\left(h_K^{b_1}\right) + O\left(h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad a.co.$$

Proof of Theorem 4.1. The proof of theorem 4.1 is a direct consequence of the following decomposition :

$$\widehat{h}^x(y) - h^x(y) = \frac{1}{1-\widehat{F}^x(y)}\left[\widehat{f}^x(y) - f^x(y)\right] + \frac{h^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)}\left[\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right] \tag{2.3}$$

And it's based on following results

$$|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \;\; a.co.$$

$$|\widehat{f}^x(y) - f^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n\,h_H\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \;\; a.co.$$

$$\exists \eta > 0 \;\text{ such that } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{|1 - \widehat{F}^x(y)| < \eta\right\} < \infty. \tag{2.4}$$

Whose demonstrations are based, respectively, on the decompositions

$$\begin{aligned} \widehat{F}^x(y) - F^x(y) &= \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\left\{\left(\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right) - \left(F^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right)\right\} \\ &+ \frac{F^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left(1 - \widehat{F}_D^x\right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\widehat{f^x}(y) - f^x(y) &= \frac{1}{\widehat{F_D^x}} \left\{ \left(\widehat{f_N^x}(y) - \mathbb{E}[\widehat{f_N^x}(y)] \right) - \left(f^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f_N^x}(y)] \right) \right\} \\ &+ \frac{f^x(y)}{\widehat{F_D^x}} \left(1 - \widehat{F_D^x} \right).\end{aligned}$$

Where

$$\widehat{F_D^x} = \frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}\left[W_{12}(x)\right]} \sum_{i \neq j} W_{ij}(x),$$

$$\widehat{F_N^x}(y) = \frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}\left[W_{12}(x)\right]} \sum_{i \neq j} W_{ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_j))$$

and

$$\widehat{f_N^x}(y) = \frac{1}{n(n-1)h_H\mathbb{E}\left[W_{12}(x)\right]} \sum_{i \neq j} W_{ij}(x) H'(h_H^{-1}(y - Y_j)).$$

and of lemmas below, for which the proofs are given in the appendix.

Lemma 2.1 *(cf. Barrientos-Marin et al., 2010)*
Under assumptions (H1), (H3), (H4) and(H6) we have that :

$$1 - \widehat{F_D^x} = O\left(\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad a.co.$$

and

$$\exists \delta > 0, such\ that \sum_n \mathbb{P}\left(\widehat{F_D^x} < \delta \right) < \infty.$$

Lemma 2.2 *Under assumptions (H1), (H2), (H4) and (H5), we obtain :*

$$|F^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F_N^x}(y)]| = O\left(h_K^{b_1}\right) + O\left(h_H^{b_2}\right), \quad a.co.$$

Lemma 2.3 *Under assumptions (H1), (H2), (H4) and (H5), we obtain :*

$$|f^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f_N^x}(y)]| = O\left(h_K^{b_1}\right) + O\left(h_H^{b_2}\right), \quad a.co.$$

Lemma 2.4 *Under the assumptions of Theorem 4.1, we get :*

$$|\widehat{F_N^x}(y) - \mathbb{E}[\widehat{F_N^x}(y)]| = O\left(\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a.co.$$

Lemma 2.5 *Under the assumptions of Theorem 4.1, we get :*

$$|\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f}_N^x(y)]| = O\left(\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad a.co.$$

2.5 Application : estimate the point of high risk

In this Section, we try to estimate the point of high risk, denoted by $\theta(x)$, defined by

$$h^x(\theta(x)) = \max_{y\in\mathbb{R}} h^x(y). \tag{2.5}$$

This model has a great interest in statistics, this is mainly due to its application in various disciplines. Indeed, this is the tool used in seismic risk analysis (see [12]). In our context functional, we assume that there is a single point $\theta(x)$ in $\mathbb{R}$ satisfying (4.9). The estimator natural of $\theta(x)$, denoted by $\widehat{\theta}(x)$, is as :

$$\widehat{h}^x(\widehat{\theta}(x)) = \max_{y\in\mathbb{R}} \widehat{h}^x(y). \tag{2.6}$$

In general, this estimator is not unique. thus, throughout the rest of this article $\widehat{\theta}(x)$ mean any random variable satisfying (2.6). We keep the assumptions of the previous section to state precisely the rate of convergence of the estimator $\widehat{\theta}(x)$, and we assume that h^x is 2-times continuously differentiable around y with :

$$h^{x'}(\theta(x)) = 0 \qquad \text{and} \qquad h^{x''}(\theta(x)) < 0. \tag{2.7}$$

Finally, our main result allows us to conclude this corollary

Corollary 2.1 *Under the conditions of conditions (H1)-(H6), if (4.11) is holds, we have*

$$\widehat{\theta}(x) - \theta(x) = O\left(h_K^{\frac{b_1}{2}}\right) + O\left(h_H^{\frac{b_2}{2}}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{nh_H\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{4}}\right), \qquad a.co.$$

2.6 Appendix

In what follows, we will denote by C and C' some strictly positive generic constants. Moreover, we define the quantities, for any $x \in \mathcal{F}$, and for all

$i = 1, ..., n$:

$$K_i = K(h_K^{-1}\delta(x, X_i))\text{and } H_j = H(h_H^{-1}(y - Y_j)).$$

Proof of Lemma 4.2.
Since the pairs (X_i, Y_i) are identically distributed then :

$$\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x] = \frac{1}{\mathbb{E}[W_{12}]}\mathbb{E}[W_{12}[\mathbb{E}[H_2|X_2]]].$$

Next, we use an integration by part to show that :

$$\mathbb{E}[H_2|X_1] = h_H^{-1}\int_{\mathbb{R}} H'(h_H^{-1}(y - z))F^X(z)dz$$

Now, the change of variables $t = \frac{y-z}{h_H}$ allows to write :

$$|\mathbb{E}[H_2|X_2] - F^x(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} H'(t)|F^X(y - h_H t) - F^x(y)|dt$$

Thus, from assumptions (H2) and (H4) we get :

$$\mathbb{I}_{B(x,h_K)}(X)|\mathbb{E}[H_2|X] - F^x(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} H'(t)\big(h_K^{b_1} + |t|^{b_2}h_H^{b_2}\big)dt.$$

Since H' is a probability density, the claimed result of this lemma is then a direct consequence of the assumption (H5).

Proof of Lemma 4.3.
Since the pairs (X_i, Y_i) are identically distributed, then from assumption (H4) we obtain :

$$\mathbb{E}[\widehat{f}_N^x] = \mathbb{E}[W_{12}(x)[\mathbb{E}[h_H^{-1}H_1'|X]]].$$

By the classical change of variables $t = \frac{y-z}{h_H}$, we obtain :

$$h_H^{-1}\mathbb{E}[H_1'|X] = \int_{\mathbb{R}} H'(t)f^X(y - h_H t)dt,$$

therefore

$$|\mathbb{E}[H_1'|X] - f^x(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} H'(t)|f^X(y - h_H t) - f^x(y)|dt.$$

Thus, by the assumption (H2) we get :

$$\mathbb{I}_{B(x,h_K)}(X)|\mathbb{E}[H_1'|X]-f^x(y)|\leq\int_{\mathbb{R}}H'(t)\big(h_K^{b_1}+|t|^{b_2}h_H^{b_2}\big)dt.$$

Since H' is a probability density, the claimed result of this lemma is then a direct consequence of the assumption (H5).

Proof of Lemma 4.4.

The proof of this lemma is given by a straightforward adaptation of the proof of Lemma 2 in Barrientos-Marin *et al.* (2010) by writing

$$\widehat{F}_N^x(y)=T_1\left(T_2T_3-T_4T_5\right) \tag{2.8}$$

where

$$T_1=\frac{n^2h_K^2\phi_x(h_K)^2}{n(n-1)\mathbb{E}(W_{12})}\qquad T_2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\frac{K_jH_j}{\phi_x(h_K)}\qquad T_3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{K_i\beta_i^2}{h_K^2\phi_x(h_K)}$$
$$T_4=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\frac{K_j\beta_jH_j}{h_K\phi_x(h_K)}\qquad T_5=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{K_i\beta_i}{h_K\phi_x(h_K)}.$$

Thus, similarly to Barrientos *et al.* (2010), the claimed result will be obtained as soon as the following assertions were checked :

$$T_i-\mathbb{E}[T_i]=O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right),\ \text{ for }\ i=2,3,4,5, \tag{2.9}$$

$$T_1=O(1),\qquad \mathbb{E}[T_l]=O(1)\ \text{ for }\ l=2,3,4,5 \tag{2.10}$$

$$Cov(T_2,T_3)=o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right) \tag{2.11}$$

$$\text{and}\qquad Cov(T_4,T_5)=o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right). \tag{2.12}$$

Note first that (3.6) was already stated by Barrientos *et al.* (2010). Therefore, it suffices to prove (3.5), (3.7) and (3.8) to complete the proof of the Lemma. Let us show the result (3.5) : We set

$$T_{l,k}-\mathbb{E}[T_{l,k}]=\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\sum_{i=1}^n Z_i^{l,k}\ \text{for}\ l=0,1,2,\ \text{ and }\ k=0,1$$

where $Z_i^{l,k} = \dfrac{1}{h_K^l \phi_x(h_K)} \left(K_i H_i^k \beta_i^l - \mathbb{E}\left[K_i H_i^k \beta_i^l\right]\right)$. Thus, it remains to check that

$$T_{l,k} - \mathbb{E}[T_{l,k}] = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right), \text{ for } l = 0, 1, 2, \text{ and } k = 0, 1.$$

By (H3), we have $\frac{1}{h_K^l}\left(K_i \beta_i^l\right) < C$ and since $H < 1$ we can write

$$|Z_i^{l,k}| \leq \frac{C}{\phi_x(h_K)} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[Z_i^{l,k^2}] \leq \frac{C'}{\phi_x(h_K)}.$$

So, the use of the classical Bernstein's inequality (Uspensky, 1937, p205) allows us to write for all $\eta \in (0, \frac{C'}{C})$:

$$\mathbb{P}\left\{ |T_{l,k} - \mathbb{E}[T_{l,k}]| > \eta \sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}} \right\} \leq C' n^{-C\eta^2}.$$

Finally, an appropriate choice of η permits to deduce that :

$$\mathbb{P}\left\{ |T_{l,k} - \mathbb{E}[T_{l,k}]| > \eta \sqrt{\frac{\log n}{n\, h_H \phi_x(h_K)}} \right\} \leq C' n^{-1-\gamma}, \text{ for } l = 0, 1, 2, \text{ and } k = 0, 1.$$

Now, we proceed in proving the results of (3.7) and (3.8). For the both equations we use the fact that the pairs (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$ are identically distributed, we obtain that :

$$\begin{cases} Cov(T_2, T_3) = \dfrac{1}{n h_K^2 \phi_x^2(h_K)} \left[\mathbb{E}[K_1^2 H_1 \beta_1^2] - \mathbb{E}[K_1 H_1]\mathbb{E}[K_1 \beta_1^2]\right] \\ \text{and } Cov(T_4, T_5) = \dfrac{1}{n h_K^2 \phi_x^2(h_K)} \left[\mathbb{E}[K_1^2 H_1 \beta_1^2] - \mathbb{E}[K_1 H_1 \beta_1]\mathbb{E}[K_1 \beta_1]\right]. \end{cases}$$

So, for the both results, we have to evaluate :

$$\mathbb{E}\left[K_i H_i^k \beta_i^l\right], \text{ for } l = 0, 1, 2, \text{ and } k = 0, 1.$$

Once again, as $H < 1$, then , for all $l = 0, 1, 2$, and $k = 0, 1$, we have :

$$\mathbb{E}\left[K_i H_i^k \beta_i^l\right] = O\left(\mathbb{E}\left[K_i \beta_i^l\right]\right)$$

and by Lemma 3 in Barrientos *et al.* (2010), we obtain that :

$$\mathbb{E}\left[K_i H_i^k \beta_i^l\right] = O(h_K^l \phi_x(h_K))$$

which implies that :

$$Cov(T_2, T_3) = O\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right) = o\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right)$$
$$\text{and } Cov(T_4, T_5) = O\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right) = o\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

Proof of Lemma 4.5.
We prove this lemma with the same idea used in the proof of lemma 4.4, noting that

$$\widehat{f}_N^x(y) = \underbrace{\frac{n^2 h_k^2 \phi_x^2(h_k)}{n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}]}}_{T_1}\left[\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{K_j(x)H_j(y)}{h_H\phi_x(h_K)}\right)}_{S_2}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{K_i(x)\beta_i^2(x)}{h_K^2\phi_x(h_K)}\right)}_{T_3}\right.$$
$$\left. - \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{K_j(x)\beta_j(x)H_j(y)}{h_H h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_4}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{K_i(x)\beta_i(x)}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{T_5}\right]$$

With the same method used above, just we show that

$$S_i - \mathbb{E}[S_i] = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\, h_H\phi_x(h_K)}}\right), \text{ for } i = 2, 4,$$
$$\mathbb{E}[S_l] = O(1) \text{ for } l = 2, 4,$$
$$Cov(S_2, T_3) = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\, h_H\phi_x(h_K)}}\right)$$
$$\text{and} \qquad Cov(S_4, T_5) = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\, h_H\phi_x(h_K)}}\right),$$

we take the following variable

$$S_{l,k} - \mathbb{E}[S_{l,k}] = \frac{1}{n\phi_x(h_K)}\sum_{i=1}^n Z_i^{l,k} \text{ for } l = 0, 1, 2, \text{ and } k = 0, 1$$

where $Z_i^{l,k} = \dfrac{1}{h_K^l h_H^k \phi_x(h_K)} \left(K_i H_i^k \beta_i^l - \mathbb{E}\left[K_i H_i^k \beta_i^l\right]\right).$

Proof of (4.4)

We can write

$$|1-\widehat{F}^x(y)| \leq (1-F^x(y))/2 \Rightarrow |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq F^x(y)/2.$$

So that we arrive finally at

$$\mathbb{P}\{|1-\widehat{F}^x(y)| < (1-F^x(y))/2\} \leq \mathbb{P}\{|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| \geq F^x(y)/2\}.$$

It is enough to take, $\eta = (1-F^x(y))/2$ to show the result.

Proof of Corollary 2.1

Taylor expansion of the function h^x leads to the existence of some θ^* between $\widehat{\theta}(x)$ and $\theta(x)$ such that :

$$h^x(\widehat{\theta}(x)) = h^x(\theta(x)) + (\widehat{\theta}(x) - \theta(x))^2 \frac{h^{x''}(\theta^*)}{2!},$$

because of (4.11),

$$|\widehat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 \leq \frac{2!}{h^{x''}(y)} |h^x(\widehat{\theta}(x)) - h^x(\theta(x))|$$

and using analytical arguments we show that

$$|h^x(\widehat{\theta}(x)) - h^x(\theta(x))| \leq 2|\widehat{h}^x(y) - h^x(y)|.$$

Hence

$$|\widehat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 \leq \frac{C}{h^{x''}(y)} |\widehat{h}^x(y) - h^x(y)|.$$

By Theorem 4.1, we show that

$$|\widehat{\theta}(x) - \theta(x)|^2 = O\left(h_K^{b_1}\right) + O\left(h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

The proof of corollary is finished.

Bibliographie

[1] A. Baìllo, A. Grané. Local linear regression for functional predictor and scalar response. *Journal of Multivariate Analysis*, **100** (2009), 102-111.

[2] J. Barrientos-Marin, F. Ferraty, P. Vieu. Locally modelled regression and functional data. *Journal ofNonparametric Statistics*, **22(5)** (2010), 617-632.

[3] E. Boj, P. Delicado, J. Fortiana. Distance-based local linear regression for functional predictors. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54** (2010), 429-437.

[4] D. Bosq. Linear Processes in Function Spaces : Theory and applications. *Lecture Notes in Statistics* (2000), pringer Science+Business Media, LLC, Inc., 233 Spring Street, New York,NY10013, USA.

[5] A. Chouaf Modelization local linear regression for Functional random variables. *International Journal of Statistics & Economics*, **16**(2015), 54-68.

[6] J. Demongeot, A. Laksaci, F.Madani, M. Rachdi. Local linear estimation of the conditional density for functional data. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, **348** (2010), 931-934.

[7] J. Fan. Design-adaptative nonparametric regression. *Journal of the American Statistical association*, **87** (1992), 998-1004.

[8] J. Fan, I. Gijbels. Local Polynomial Modelling and its Applications. *Monographs on Statistics and Applied Probability 66* (1996),Chapman& Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN, UK.

[9] F. Ferraty, A. Rabhi, P. Vieu. Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées*. **53** (2008), 1-18.

[10] F. Ferraty, P. Vieu. Nonparametric Functional Data Analysis. *Springer-Series in Statistics* (2006), Springer Science+Business Media, Inc., 233 Spring Street, New York,NY10013, USA.

[11] A. Laksaci, B. Mechab. Estimation non-paramétrique dela fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales.*Revue de Mathématiques Pures et Appliquées.* **55** (2010), 35-51.

[12] A. Quintela-del-Río. Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions. *Statistics and Probability Letters.* **76** (2006), 1117-1124.

[13] A. Quintela-del-Río. Hazard function given a functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions. *Journal of Nonparametric Statistics.* **20** (2008), 413-430.

[14] J. O. Ramsay, B. W. Silverman. Applied functional data analysis ; Methods and case studies. Vol. 1 of *Springer series in statistics* (2002), Springer-Verlag New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York,NY 10010, USA.

[15] G. Roussas. Hazard rate estimation under dependence conditions. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **22** (1989), 81-93.

[16] G. S. Watson, M. R. Leadbetter. Hazard analysis, *Sankhyia* **26** (1964), 101-116.

Chapitre 3

Quadratic error of the conditional hazard function in the functional local linear estimation

3.1 Introduction

The estimated hazard rate, because of the variety of its possible applications, is an important issue in statistics. This topic can (and should) be approached from several angles depending on the complexity of the problem : presence of censoring in the observed sample (for example, common phenomenon in medical applications), presence of dependence between the observed variables (for Example, common phenomenon in applications such as seismic or econometric) or presence of explanatory variables. Many techniques have been studied in the literature to deal with these situations but all deal only with random explanatory variables real and multidimensional.
Technical advances in collection and data storage can have more often statistical functional : curves, images, tables, ... The data are modeled as realizations of a random variable taking values in an abstract space of infinite dimension, and the scientific community was naturally interested in recent years the development of statistical tools capable of handling this type of sample.
The recent monograph by Ferraty and Vieu [11] summarizes many of their contributions to the nonparametric estimation with functional data, among other properties, consistency of the conditional density, conditional distribu-

tion and regression estimates are established in the i.i.d. case as well as under dependence conditions.
The nonparametric estimation of the hazard and/or the conditional hazard function is quite important in a variety of fields such as medicine, reliability, survival analysis or in seismology. The hazard estimate was introduced by Watson and Leadbetter [17] and we can also cite Quintela [12, 13] Who worked on the asymptotic properties of the hazard function.
The local linear estimation in the functional data case have been investigated recently (see [3] for more details). [1] proposed a local linear regression estimator and study its asymptotic behavior (the rate of convergence of the conditional mean squared error) when the explanatory variable takes values in a Hilbert space. The locally modelled regression estimator was proposed by [2], they established the almost-complete convergence (with rate) of the proposed estimator. [6] considered the estimation of the conditional density function based on the local modelling approach when the explanatory variable is functional.
Our paper is organized as follows : Section 2, we present our functional model. In the next section, we announce our assumptions. In Section 3, we present our main results about the mean square convergence. Concerning the demonstrations of the results obtained are left at the end of the article.

3.2 Model and estimator

In what follows x (resp. y) will denote a fixed point in ($\mathcal{F}$ (resp. $\mathbb{R}$), $\aleph_x$ (resp. $\aleph_y$) will denote a fixed neighborhood of a fixed point x (resp. of y) and $\phi_x(r_1, r_2) = \mathbb{P}(r_2 < \delta(X, x) < r_1)$. Then, we assume that our nonparametric model satisfies the following conditions :
Consider $(X_i, Y_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ be a $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$-valued measurable random variables (r.v's), defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, where $(\mathcal{F}, d)$ is a semi-metric space. In most practical applications, $\mathcal{F}$ is a normed space (e.g. Hilbert or banach space) with norm $||.||$ so that $d(x, x') = ||x - x'||$. In the following x will be a fixed point in $\mathcal{F}$. We intend to estimate the conditional hazard function h^x using n independent observations (X_i, Y_i) draw from a random variables with the same distribution with (X, Y) where the regular version F^x of the conditional distribution function of Y given $X = x$ exists for any $x \in \mathcal{F}$. Moreover we suppose that F^x has a continuous density f^x with respect to (w.r.t) Lebesgue's measure over $\mathbb{R}$. The estimation of the conditional

hazard function $h^x(y)$ in the local linear modeling is based on the approximation of the conditional cumulative distribution $F^x(y)$ and conditional density function $f^x(y)$ by a linear function. We use technique extended the local linear ideas to the infinite dimensional framework (cf. for instance [1], [2], [6], for some examples and references). As indicated by [9] the function $F^x(\cdot)$ can be viewed as a nonparametric regression model with response variable $h_H^{-j} H^{(j)}(h_H^{-1}(\cdot - Y_i))$ where H is some cumulative distribution function and h_H is a sequence of positive real numbers. This consideration is motivated by the fact that

$$E[h_H^{-j} H^{(j)}(h_H^{-1}(y - Y_i))|X_i = x] \to F^{x^{(j)}}(y) \text{ as } h_n \to 0 \ (j = 0, 1).$$

Here, we adopt the fast functional local modeling, that is, the conditional cumulative distribution function $\widehat{F^x}$ is estimated by $\widehat{a}$ where the couple $(\widehat{a}, \ \widehat{b})$ is obtained by the optimization rule :

$$(\widehat{a}, \widehat{b}) = arg \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} \left(H(h_H^{-1}(y - Y_i)) - a - b\beta(X_i, \ x)\right)^2 \ K(h_H^{-1}\delta(x, X_i)) \tag{3.1}$$

where $\beta(.,.)$ and $\delta(.,.)$ are locating functions defined from $\mathcal{F}^2$ into $\mathbb{R}$, such that :

$$\forall \xi \in \mathcal{F}, \quad \beta(\xi, \xi) = 0 \text{ and } \mathrm{d}(.,.) = |\delta(.,.)|$$

and where the function K is a kernel, H is a distribution function and $h_K = h_{K,n}$(respectively, $h_H = h_{H,n}$) is a sequence of positive real numbers which converges to 0 when $n \to \infty$. Clearly, the estimator $\widehat{a}$, given by 4.4, can be explicitly written as follows :

$$\widehat{F^x}(y) = \frac{\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} W_{ij}(x) H({h_H}^{-1}(y - Y_j))}{\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} W_{ij}(x)}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

where
$W_{ij}(x) = \beta_i(\beta_i - \beta_j)K(h_K^{-1}\delta(x, X_i))K(h_K^{-1}\delta(x, X_j))$
with $\beta_i = \beta(X_i, x)$ and the convention $0/0 = 0$.
then the density function estimator $\widehat{f^x}$ of f^x can be deduced from the distri-

bution function and we defined by

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\sum_{1\le i,j\le n} W_{ij}(x) H'({h_H}^{-1}(y - Y_j))}{h_H \sum_{1\le i,j\le n} W_{ij}(x)}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Where H' is the derivative of H.
We estimate the conditional hazard function h^x when $(F^x < 1)$ by

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

3.3 Notations and assumptions

In what follows x (resp. y) will denote a fixed point in ($\mathcal{F}$ (resp. $\mathbb{R}$), $\aleph_x$ (resp. $\aleph_y$) will denote a fixed neighborhood of a fixed point x (resp. of y) and $\phi_x(r_1, r_2) = \mathbb{P}(r_2 < \delta(X, x) < r_1)$. we study the L^2-consistency of $\widehat{h^x}(y)$. To do that, we denote, for any $l \in \{0, 2\}$ and $j = 0, 1$,by :

$$\psi_{l,j}(x, y) = \frac{\partial^l F^{x^{(j)}}(y)}{\partial y^l} \text{ and } \Psi_{l,j}(s) = \mathbb{E}[\psi_{l,j}(X, y) - \psi_{l,j}(x, y)|\beta(x, X) = s] \tag{3.3}$$

and we set the following hypotheses which will be needed to enounce our main result.

(H1) For any $r > 0$, $\phi_x(r) := \phi_x(-r, r) > 0$. There exists a function $\chi_x(.)$ such that :

$$\forall t \in (-1, 1), \lim_{h_K \to 0} \frac{\phi_x(th_K, h_K)}{\phi_x(h_K)} = \chi_x(t)$$

.

(H2) For any $l \in \{0, 2\}$, the quantities $\Psi'_{l,j}(0)$ and $\Psi''_{l,j}(0)$ exist.

(H3) The function $\delta(\cdot, \cdot)$ and $\beta(\cdot, \cdot)$ are such that :

$$\forall z \in \mathcal{F}, |\delta(x, z)| = d(x, z) \text{ and } C_1|\delta(x, z)| \le |\beta(x, z)| \le C_1|\delta(x, z)|.$$

where $C_1 > 0, C_2 > 0$ and

$$\sup_{u \in B(x,r)} |\beta(u, x) - \delta(x, u)| = o(r).$$

(H4) The kernel K is a Positive, differentiable function which is supported within $(-1,1)$ and its first derivative $K^{(1)}$ satisfies :

$$K^{2^{(1)}} - \int_{1}^{-1} (K^2(u))'\chi_x(u)du > 0.$$

(H5) The kernel H is a differentiable function which has a bounded first derivative such that :

$$\int |t|^{b_2} H^{(j)}(t)dt < \infty \quad \text{and} \int {H^{(j)}}^2(t)dt < \infty. \quad \text{for } j = \{0,1\}$$

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |H'(y_1) - H'(y_2)| \leq C|y_1 - y_2|,$$

$H^{(1)}$ is symmetric and such that :

$$\int H'dt = 1$$

and

$$\int t^2 H^{(j)}(t)dt < \infty. \quad \text{for } j = 0,1$$

(H6) The bandwidths h_K and h_H satisfy :

$$\lim_{n\to\infty} h_K = 0, \quad \lim_{n\to\infty} h_H = 0, \quad \text{and } \lim_{n\to\infty} n h_H^j \phi_x(h_K) = 0.j = 0,1.$$

3.4 Mains results : Mean Square Convergence

Theorem 3.1 *Under assumptions (H1)-(H6), we obtain :*

$$\mathbb{E}\left[\widehat{h^x}(y) - h^x(y)\right]^2 = B_n^2(x,y) + \frac{V_{HK}(x,y)}{n h_H \phi_x(h_K)} + o(h_H^4) + o(h_K^4) + o\left(\frac{1}{n h_H \phi_x(h_K)}\right)$$

where

$$B_n(x,y) = \frac{(B_H^f - h(y\backslash x)B_H^F)h_H^2 + (B_K^f - h(y\backslash x)B_K^F)h_K^2}{1 - F^x(y)}$$

with

$$\begin{aligned}
B_H^f(x,y) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f^x(y)}{\partial y^2} \int t^2 H(t)dt, \\
B_K^f(x,y) &= \tfrac{1}{2}\Psi_{0,1}^{(2)}(0)\left[\frac{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}K'(u)\chi_x(u)du\right)}\right] \\
B_H^F(x,y) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 F^x(y)}{\partial y^2} \int t^2 H'(t)dt, \\
B_K^F(x,y) &= \tfrac{1}{2}\Psi_{0,0}^{(2)}(0)\left[\frac{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}K'(u)\chi_x(u)du\right)}\right] + o(h_K^2)
\end{aligned}$$

and

$$V_{HK}(x,y) = \frac{h(y\backslash x)}{(1-F^x(y))}\left[\frac{\left(K^2(1)-\int_{-1}^{1}(K^2(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(K(u))'\chi_x(u)du\right)^2}\right]$$

Proof of Theorem 3.1. By using the same steps as in Ferraty *et al.* (2007), we show that the proof of Theorem 3.1 is achieved if results of Lemmas below are established.

Lemma 3.1 *Under the hypotheses of Theorem 3.1, we get :*

$$E\left[\widehat{f}_N^x(y)\right] - f^x(y) = B_H^f(x,y)h_H^2 + B_K^f(x,y)h_K^2 + o(h_H^2) + o(h_K^2)$$

Lemma 3.2 *Under the hypotheses of Theorem 3.1, we get :*

$$E\left[\widehat{F}_N^x(y)\right] - F^x(y) = B_H^F(x,y)h_H^2 + B_K^F(x,y)h_K^2 + o(h_H^2) + o(h_K^2).$$

Lemma 3.3 *Under the hypotheses of Theorem 3.1, we have :*

$$Var\left[\widehat{f}_N^x(y)\right] = \frac{\sigma_f^2(x,y)}{nh_H\phi_x(h_K)} + o\left(\frac{1}{nh_H\phi_x(H_k)}\right),$$

where $\sigma_f^2(x,y) = f^x(x,y)\left[\frac{\left(K^2(1)-\int_{-1}^{1}(K^2(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(K(u))'\chi_x(u)du\right)^2}\right]\int H^2(t)dt.$

Lemma 3.4 *Under the hypotheses of Theorem 3.1, we have :*

$$Var\left[\widehat{F}^x(y)\right] = \frac{\sigma_F^2(x,y)}{n\phi_x(h_K)} + o\left(\frac{1}{n\phi_x(H_k)}\right),$$

where $\sigma_F^2(x,y) = F^x(y)(1-F^x(y))\left[\frac{\left(K^2(1)-\int_{-1}^{1}(K^2(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(K(u))'\chi_x(u)du\right)^2}\right].$

Lemma 3.5 *Under the hypotheses of Theorem 3.1, we get :*

$$Cov(\widehat{f}_N^x(y), \widehat{F}_D^x) = o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right),$$

and

$$Cov(\widehat{F}_N^x(y), \widehat{F}_D^x) = o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

Lemma 3.6 *Under the hypotheses of Theorem 3.1, we have*

$$Var\left[\widehat{F}_D^x\right] = o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

3.5 Appendix

In what follows, when no confusion is possible, we will denote by C and C' some strictly positive generic constants.

Proof of lemma 3.1. Since the pairs (X_i, Y_i) are identically distributed, then

$$E[\widehat{F}_N^x(y)] = \frac{1}{E[W_{12}]}E\left[W_{12}\left[E\left[H_1/X\right]\right]\right].$$

Next, we use an integration by part to show that

$$E\left(H_1/X\right) = h_H^{-1}\int_{\mathbb{R}} H'(h_H^{-1}(y-z))F^X(z)dz.$$

Now, a change of variables $t = \dfrac{y-z}{h_H}$ allows to write

$$|E(H_1/X) - F^x(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} H'(t)|F^X(y - h_H t) - F^x(y)|dt.$$

Thus, by the assumptions (H2) and (H4) we get

$$1\!\!1_{B(x,h_K)}(X)|E(H_1/X) - F^x(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} H'(t)(h_K^{b_1} + |t|^{b_2}h_H^{b_2})dt.$$

Because H' is a probability density, the claimed result in this lemma is a direct consequence of (H5). ■

Proof of lemma 3.2. The proof of this lemma is given by a straightforward adaptation of the proof of Lemma 2 in Barrientos-Marin *et al.* (2010) by writing

$$\widehat{F}_N^x(y) = T_1\left(T_2T_3 - T_4T_5\right) \tag{3.4}$$

where

$$T_1 = \frac{n^2h_K^2\varphi_x(h)^2}{n(n-1)E(w_{12})} \qquad T_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{K_jH_j}{\varphi_x(h_K)} \qquad T_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{K_i\beta_i^2}{h^2\varphi_x(h_K)}$$

$$T_4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{K_j\beta_jH_j}{h\varphi_x(h_K)} \qquad T_5 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{K_i\beta_i}{h\varphi_x(h_K)}.$$

So, similarly to Barrientos *et al.* (2010), the claimed result will be obtained as soon as the following assertions have been checked :

$$T_i - E[T_i] = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right), \text{ for } i = 2,3,4,5, \tag{3.5}$$

$$T_1 = O(1), \qquad E[T_l] = O(1) \text{ for } l = 2,3,4,5 \tag{3.6}$$

$$Cov(T_2,T_3) = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right) \tag{3.7}$$

$$\text{and} \qquad Cov(T_4,T_5) = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right). \tag{3.8}$$

Note first that (3.6) was already stated by Barrientos *et al.* (2010). Therefore, it suffices to prove (3.5), (3.7) and (3.8) to finish the proof of the Lemma. Let us show the result (3.5) : To do that, we put

$$S_{l,k} - E[S_{l,k}] = \frac{1}{n\phi_x(h_K)}\sum_{i=1}^{n} Z_i^{l,k} \text{ for } l = 0,1,2, \text{ and } k = 0,1$$

where $Z_i^{l,k} = \dfrac{1}{h_K^l\phi_x(h_K)}\left(K_iH_i^k\beta_i^l - E\left[K_iH_i^k\beta_i^l\right]\right)$. Thus, it remains to check that

$$S_{l,k} - E[S_{l,k}] = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right), \text{ for } l = 0,1,2, \text{ and } k = 0,1.$$

By (H3), we have $\frac{1}{h_K^l}\left(K_i\beta_i^l\right) < C$ and since $H < 1$ we can write

$$|Z_i^{l,k}| \le \frac{C}{\phi_x(h_K)} \quad \text{and} \quad E[Z_i^{l,k^2}] \le \frac{C'}{\phi_x(h_K)}.$$

So, the use of the classical Bernstein's inequality (Uspensky, 1937, p205) allows us to write for all $\eta \in (0, \frac{C'}{C})$:

$$\mathbb{P}\left\{|S_{l,k} - E[S_{l,k}]| > \eta\sqrt{\frac{\log n}{n\,\phi_x(h_K)}}\right\} \le C'n^{-C\eta^2}.$$

Finally, an appropriate choice of η permits to deduce that :

$$\mathbb{P}\left\{|S_{l,k} - E[S_{l,k}]| > \eta\sqrt{\frac{\log n}{n\, h_H \phi_x(h_K)}}\right\} \leq C' n^{-1-\gamma}, \text{ for } l = 0,1,2, \text{ and } k = 0,1.$$

Now, we proceed in proving the results of (3.7) and (3.8). For the both equations we use the fact that the pairs (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$ are identically distributed, we obtain that :

$$\begin{cases} Cov(T_2, T_3) = \dfrac{1}{nh^2\phi_x^2(h_K)}\left[E[K_1^2 H_1 \beta_1^2] - E[K_1 H_1]E[K_1\beta_1^2]\right] \\ \text{and } Cov(T_4, T_5) = \dfrac{1}{nh^2\phi_x^2(h_K)}\left[E[K_1^2 H_1 \beta_1^2] - E[K_1 H_1 \beta_1]E[K_1\beta_1]\right]. \end{cases}$$

So, for the both results, we have to evaluate :

$$E\left[K_i H_i^k \beta_i^l\right], \text{ for } l = 0,1,2, \text{ and } k = 0,1.$$

Once again, as $H < 1$, then , for all $l = 0,1,2$, and $k = 0,1$, we have :

$$E\left[K_i H_i^k \beta_i^l\right] = O\left(E\left[K_i \beta_i^l\right]\right)$$

and by Lemma 3 in Barrientos *et al.* (2010), we obtain that :

$$E\left[K_i H_i^k \beta_i^l\right] = O(h_K^l \phi_x(h_K))$$

which implies that :

$$\begin{aligned} Cov(T_2, T_3) &= O\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right) = o\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right) \\ \text{and } Cov(T_4, T_5) &= O\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right) = o\left(\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}\right). \end{aligned}$$

■

Similarly to Lemma 3.1, we can write

$$E[\widehat{F}_N^x(y)] = \frac{1}{E[W_{12}]} E\left[W_{12} E[H_1/X]\right] \text{ with } E\left(H_1/X\right) = \int_{\mathbb{R}} H'(t) F^X(y - h_H t) dt.$$

The latter can be re-written, by using a Taylor expansion under $(H2)$, as follows

$$E[H_1/X] = \psi_{0,j}(X, y) + \frac{h_H^2}{2}\left(\int t^2 H'(t) dt\right)\psi_{2,j}(X, y) + o(h_H^2).$$

Thus, we get

$$E\left[\widehat{F}_N^x(y)\right] = \frac{1}{E[W_{12}]}\left(E\left[W_{12}\psi_{0,j}(X,y)\right] + \left(\int t^2 H'(t)dt\right) E\left[W_{12}\psi_{2,j}(X,y)\right] + o(h_H^2)\right).$$

Observe that, as $\Psi_{l,j}(0)=0$, for $l \in \{0,2\}$, we have

$$\begin{aligned} E\left[W_{12}\psi_{l,j}(X,y)\right] &= \psi_{l,j}(x,y)E[W_{12}] + E\left[W_{12}\left(\psi_{l,j}(X,y)-\psi_{l,j}(x,y)\right)\right] \\ &= \psi_{l,j}(x,y)E[W_{12}] + E\left[W_{12}\left(\Psi_{l,j}(\delta(x,X)\right)\right] \\ &= \psi_{l,j}(x,y)E[W_{12}] + \Psi'_{l,j}(0)E\left[\delta(x,X)W_{12}\right] + o(E\left[\delta(x,X)W_{12}\right]). \end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{F}_N^x(y)\right] &= F^x(y) + \frac{h_H^2}{2}\frac{\partial^2 F^x(y)}{\partial y^2}\int t^2 H'(t)dt + o\left(h_H^2 \frac{E\left[\delta(x,X)W_{12}\right]}{E[W_{12}]}\right) \\ &\quad + \Psi'_{0,j}(0)\frac{E\left[\delta(x,X)W_{12}\right]}{E[W_{12}]} + o\left(\frac{E\left[\delta(x,X)W_{12}\right]}{E[W_{12}]}\right). \end{aligned}$$

According the definition of W_{12}, the two quantities $E\left[\delta(x,X)W_{12}\right]$ and $E[W_{12}]$ are based on the evaluation asymptotic of $E[K_1^a\beta_1^b]$. To do that, we treat firstly, the case $b=1$. For this case, we use (H3) and the last part of (H6) to get,

$$h_K E[K_1^a\beta_1] = o\left(\int_{B(x,h_K)} \beta^2(u,x)dP(u)\right) = o(h_K^2\phi_x(h_K)).$$

So, we can see that,

$$E[K_1^a\beta_1] = o(h_K\phi_x(h_K)). \tag{3.9}$$

On the other hand, for all $b>1$, we have, under the second part of (H3)

$$E[K_1^a\beta_1^b] = E[K_1^a\delta^b(x,X)] + o(h_K^b\phi_x(h_K)).$$

Concerning the first term, we write

$$\begin{aligned} h_K^{-b}E[K_1^a\delta^b] &= \int v^b K^a(v)dP^{h_K^{-1}\delta(x,X)}(v) \\ &= \int_{-1}^{1}\left[K^a(1) - \int_v^1 \left((u^bK^a(u))'\right)du\right]dP^{h_K^{-1}\delta(x,X)}(v) \\ &= \left(K(1)\phi_x(h_K) - \int_{-1}^{1}(u^bK^a(u))'\phi_x(-uh_K,h_K)du\right) \\ &= \phi_x(h_K)\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^bK^a(u))'\frac{\phi_x(-uh_K,h_K)}{\phi_x(h_K)}du\right). \end{aligned}$$

Finally,under $(H1)$ we get

$$E[K_1^a\beta_1^b] = h^b\phi_x(h_K)\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^bK^a(u))'\chi_x(u)du\right) + o(h_K^b\phi_x(h_K)). \tag{3.10}$$

Combining (3.9) with (3.10) we obtain

$$\begin{aligned} E[W_{12}] &= h_K^2\phi_x^2(h_K)\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\chi_x(u)du\right) \\ &\qquad \left(K(1) - \int_{-1}^{1}K'(u)\chi_x(u)du\right) + o(h_K^2\phi_x^2(h_K)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} E\left[\delta(x,X)W_{12}\right] &= h_K^3\phi_x^2(h_K)\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^3K(u))'\chi_x(u)du\right) \\ &\qquad \left(K(1) - \int_{-1}^{1}K'(u)\chi_x(u)du\right) + o(h_K^3\phi_x^2(h_K)). \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{F}_N^x(y)\right] &= F^x(y) + \frac{h_H^2}{2}\frac{\partial^2F^x(y)}{\partial y^2}\int t^2H'(t)dt + o(h_H^2) \\ &\quad + h_K\Psi'_{0,j}(0)\frac{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^3K(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\chi_x(u)du\right)} + o(h_K). \end{aligned}$$

■

Proof of Lemma 3.3 By simple calculation, we have

$$\begin{aligned} Var\left(\widehat{f}_N^x(y)\right) &= \frac{1}{\left(n(n-1)h_H(E[W_{12}])\right)^2}\Big[n(n-1)E[W_{12}^2H_1^2] + n(n-1)E[W_{12}W_{21}H_1H_2] \\ &\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{13}H_1^2] + n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{23}H_1H_2] \\ &\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{31}H_1H_3] + n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{32}H_1H_3] \\ &\quad -n(n-1)(4n-6)(E[W_{12}H_1])^2\Big]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Clearly, the third term is the leading one, which can be evaluated by following the same steps as in the previous Lemma. It suffices to write that

$$E[W_{12}W_{13}H_1^2] = E[\beta_1^4K_1^2H_1^2](E[K_1])^2 + o(h_K^4h_H\phi_x^3(h_K)).$$

Furthermore,

$$E[\beta_1^4 K_1^2 H_1^2] = h_H f^x(y) \int H^2(t)dt \left(E[\beta_1^4 K_1^2]\right) + o\left(h_H E[\beta_1^4 K_1^2]\right).$$

It follows from (3.10) and (3.12) that

$$Var\left(\widehat{f}_N^x(y)\right) = \frac{f^x(y)}{nh_H\phi_x(h_K)} \left(\int H^2(t)dt\right) \left[\frac{\left(K^2(1) - \int_{-1}^1 (u^4K^2(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1) - \int_{-1}^1 (u^2K(u))'\chi_x(u)du\right)^2}\right]$$
$$+ o\left(\frac{1}{nh_H\phi_x(h_K)}\right).$$

■

Proof of Lemma 3.4 By simple calculation, we have

$$\begin{aligned} Var\left(\widehat{F}_N^x(y)\right) &= \frac{1}{(n(n-1)(EW_{12}))^2}\Big[n(n-1)E[W_{12}^2H_1^2] + n(n-1)E[W_{12}W_{21}H_1H_2] \\ &\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{13}H_1^2] + n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{23}H_1H_2] \\ &\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{31}H_1H_3] + n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{32}H_1H_3] \\ &\quad -n(n-1)(4n-6)(E[W_{12}H_1])^2\Big]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Clearly, the third term is the leading one, which can be evaluated by following the same steps as in the previous Lemma. It suffices to write that

$$E[W_{12}W_{13}H_1^2] = E[\beta_1^4K_1^2H_1^2](E[K_1])^2 + o(h_K^4 h_H \phi_x^3(h_K)).$$

Furthermore,

$$E[\beta_1^4 K_1^2 H_1^2] = F^x(y) \int H^{(1)^2}(t)dt \left(E[\beta_1^4 K_1^2]\right) + o\left(h_H E[\beta_1^4 K_1^2]\right).$$

It follows from (3.10) and (3.12) that

$$Var\left(\widehat{F}_N^x(y)\right) = \frac{F^x(y)}{n\phi_x(h_K)} \left(\int H^{(1)^2}(t)dt\right) \left[\frac{\left(K^2(1) - \int_{-1}^1 (u^4K^2(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1) - \int_{-1}^1 (u^2K(u))'\chi_x(u)du\right)^2}\right]$$
$$+ o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

■

Proof of Lemma 3.5 Following a similar arguments as in previous lemma we can write

$$\begin{aligned}
Cov(\widehat{f}_N^x(y),\widehat{F}_D^x) &= \frac{1}{h_H(n(n-1)E[W_{12}])^2}Cov\left(\sum_{i\neq j=1}^{n} W_{ij}H_i,\sum_{i'\neq j'=1}^{n} W_{i'j'}\right)\\
&= \frac{1}{h_H\left(n(n-1)EW_{12}\right)^2}\big(n(n-1)E[W_{12}^2H_1]+n(n-1)E[W_{12}W_{21}H_1]\\
&\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{13}H_1]+n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{23}H_1]\\
&\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{31}H_1]+n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{32}H_1]\\
&\quad -n(n-1)(4n-6)(E[W_{12}H_1]E[W_{12}])\big).
\end{aligned}$$

By a simple algebra, we get

$$\begin{cases}
E[W_{12}^2H_1]=O(h_K^4h_H\phi_x^2(h_K)),\ \ E[W_{12}W_{13}H_1]=O(h_K^4h_H\phi_x^2(h_K)),\\
E[W_{12}W_{21}H_1]=O(h_K^4h_H\phi_x^2(h_K)),\ \ E[W_{12}W_{23}H_1]=O(h_K^4h_H\phi_x^2(h_K)),\\
E[W_{12}W_{31}H_1]=O(h_K^4h_H\phi_x^2(h_K))\ \text{and}\ E[W_{12}W_{32}H_1]=O(h_K^4h_H\phi_x^2(h_K))
\end{cases}$$

Furthermore, as $E[W_{12}]=O(h_K^2\phi_x(h_K))$, we deduce that

$$Cov(\widehat{f}_N^x(y),\widehat{F}_D^x)=O\left(\frac{1}{n}\right)=o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

■

And Also for the distribution function it's similarly to the previous Proof. we can write

$$\begin{aligned}
Cov(\widehat{F}_N^x(y),\widehat{F}_D^x) &= \frac{1}{(n(n-1)E[W_{12}])^2}Cov\left(\sum_{i\neq j=1}^{n} W_{ij}H_i,\sum_{i'\neq j'=1}^{n} W_{i'j'}\right)\\
&= \frac{1}{\left(n(n-1)EW_{12}\right)^2}\big(n(n-1)E[W_{12}^2H_1]+n(n-1)E[W_{12}W_{21}H_1]\\
&\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{13}H_1]+n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{23}H_1]\\
&\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{31}H_1]+n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{32}H_1]\\
&\quad -n(n-1)(4n-6)(E[W_{12}H_1]E[W_{12}])\big).
\end{aligned}$$

By a simple algebra, we get

$$\begin{cases}
E[W_{12}^2H_1]=O(h_K^4\phi_x^2(h_K)),\ \ E[W_{12}W_{13}H_1]=O(h_K^4\phi_x^2(h_K)),\\
E[W_{12}W_{21}H_1]=O(h_K^4\phi_x^2(h_K)),\ \ E[W_{12}W_{23}H_1]=O(h_K^4\phi_x^2(h_K)),\\
E[W_{12}W_{31}H_1]=O(h_K^4\phi_x^2(h_K))\ \text{and}\ E[W_{12}W_{32}H_1]=O(h_K^4\phi_x^2(h_K))
\end{cases}$$

Furthermore, as $E[W_{12}] = O(h_K^2 \phi_x(h_K))$, we have :

$$Cov(\widehat{F}_N^x(y), \widehat{F}_D^x) = O\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

$\blacksquare$

Proof of Lemma 3.6 The demonstration of this result follows step by step the proof of the previous lemma by replacing H by 1. Thus,

$$\begin{aligned}
Var(\widehat{F}_D^x) &= \frac{1}{(n(n-1)E[W_{12}])^2} Var\left(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{\left(n(n-1)EW_{12}\right)\right)^2} \left(n(n-1)E[W_{12}^2] + n(n-1)E[W_{12}W_{21}] \right. \\
&\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{13}] + n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{23}] \\
&\quad n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{31}] + n(n-1)(n-2)E[W_{12}W_{32}] \\
&\quad \left. -n(n-1)(4n-6)(E[W_{12}])^2 \right).
\end{aligned}$$

So, we have that :

$$Var\left(\widehat{F}_D^x\right) = o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

$\blacksquare$

Bibliographie

[1] A. Baìllo, A. Grané. Local linear regression for functional predictor and scalar response. *Journal of Multivariate Analysis*, **100** (2009), 102-111.

[2] J. Barrientos-Marin, F. Ferraty, P. Vieu. Locally modelled regression and functional data. *Journal ofNonparametric Statistics*, **22(5)** (2010), 617-632.

[3] E. Boj, P. Delicado, J. Fortiana. Distance-based local linear regression for functional predictors. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54** (2010), 429-437.

[4] D. Bosq. Linear Processes in Function Spaces : Theory and applications. *Lecture Notes in Statistics* (2000), pringer Science+Business Media, LLC, Inc., 233 Spring Street, New York,NY10013, USA.

[5] A. Chouaf Modelization local linear regression for Functional random variables. *International Journal of Statistics & Economics*, **16**(2015), 54-68.

[6] J. Demongeot, A. Laksaci, F.Madani, M. Rachdi. Local linear estimation of the conditional density for functional data. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, **348** (2010), 931-934.

[7] J. Demongeot, A. Laksaci, M. Rachdi and S. Rahmani, On the Local Linear Modelization of the Conditional Distribution for Functional Data. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics.* 76-A(2) (2014) 328-355.

[8] J. Fan. Design-adaptative nonparametric regression. *Journal of the American Statistical association*, **87** (1992), 998-1004.

[9] J. Fan, I. Gijbels. Local Polynomial Modelling and its Applications. *Monographs on Statistics and Applied Probability 66* (1996),Chapman& Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN, UK.

[10] F. Ferraty, A. Rabhi, P. Vieu. Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées.* **53** (2008), 1-18.

[11] F. Ferraty, P. Vieu. Nonparametric Functional Data Analysis. *Springer-Series in Statistics* (2006), Springer Science+Business Media, Inc., 233 Spring Street, New York,NY10013, USA.

[12] A. Quintela-del-Río. Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions. *Statistics and Probability Letters.* **76** (2006), 1117-1124.

[13] A. Quintela-del-Río. Hazard function given a functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions. *Journal of Nonparametric Statistics.* **20** (2008), 413-430.

[14] M. Rachdi, A. Laksaci, J. Demongeot, A. Abdali and F. Madani, Theoretical and practical aspects of the quadratic error in the local linear estimation of the conditional density for functional data. *Computational Statistics and Data Analysis*, **73** (2014), 53Ű68.

[15] J. O. Ramsay, B. W. Silverman. Applied functional data analysis ; Methods and case studies. Vol. 1 of *Springer series in statistics* (2002), Springer-Verlag New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York,NY 10010, USA.

[16] G. Roussas. Hazard rate estimation under dependence conditions. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **22** (1989), 81-93.

[17] G. S. Watson, M. R. Leadbetter. Hazard analysis, *Sankhyia* **26** (1964), 101-116.

Chapitre 4

Spatial locale linear modelization of the conditional hazard function for functional data

Ce chapitre fait l'objet d'un article soumis.

Spatial Locale Linear Modelization of the Conditional Hazard function for Functional data

Ibrahim Massim, Samir Benaissa and Boubaker Mechab

Laboratory of Statistics and Stochastic Processes
Department of Probability and Statistics
Djillali Liabes University
Sidi Bel Abbes 22000, Algeria
ibrahim.massim@yahoo.fr
mechaboub@yahoo.fr

Abstract

The purpose of the present paper is to investigate by the local linear method a nonparametric estimate of the conditional hazard function of scalar response variable given a functional variable when the observations are spatially dependent. The main goal is to establish the almost complete convergence with rate of this estimate under some general conditions.

Keywords : Spatial functional data, Local linear estimation, Conditional hazard function, Strongly mixing process, Small balls probability.

AMS 2000 Subject Classification : 62G05, 62G20,62N20.

4.1 Introduction

The conditional hasard rate appears in a variety of domains In particular, econometrics, epidemiology, environmental science and other. There is extensive documentation on the estimation of hasard function for independent mixing data as well as for dependent mixing data (see, for example, Watson and Leadbetter [29], Roussas [27], Estévez-Pérez et *al.* [9] and Quintela-del-Río [24]). However for the case of censored variables we can cite the work of Lecoutre and Ould-Said [22].
In recent years, there has been a considerable interest in functional data analysis. We refer to Ferraty and Vieu [13], Ferraty et *al.* [11], Ramsay and Silverman [26].
The work about the conditional hazard rate in infinite dimensional space for functional covariates are of Quintela-del-Río [25] and Ferraty et al. [12].
The statistical methods for the spatial data have been developed by a lot of authors, to name only a few of them : Cressie [6], Guyon [14] for methods and applications on the spatial parametric models. Hallin et al. [15] studied nonparametric density estimation for spatial data with linear or nonlinear structures and showed the convergence of the estimator in L_1. Li and Tran [23] have established the normality asymptotic of the hazard rate at multiple points, for the spatial nonparametric models, Biau and Cadre [5] showed the uniform consistency on compact sets of the kernel estimator of the regression function as well as its asymptotic normality. However, the functional spatial data case, via a kernel type estimate, we can cited for example, Laksaci and Maref [18] proved the almost complete convergence (with rate) of the conditional quantile. The literature on the functional spatial data of the hazard function is limited and we can refer to Laksaci and Mechab [19] studied the almost complete convergence of the kernel estimate of the conditional hazard function. These authors studied in [20] the mean squared convergence rate and proved the asymptotic normality of the proposed estimator.
In view of the importance of the estimate by the linear local method, the local polynomial fitting has been recognized to have superior bias properties than the kernel method (see Fan and Gijbels [10] for more details). Works in the context of the functional non spatial data as well as the functional spatial data are very limited and key references of this topic can be found in Barrientos-Marin et al. [2], Demongeot et al. [7], Chouaf and Laksaci [5], Hallin et al. [16, 17], Laksaci et al. [21], but there is no work of the conditional hazard function for the local linear approach, the present work deals the

estimation of the conditional hazard function under dependent spatial data with the local linear approach and we show the almost-complete convergence with rates for our proposed estimator.
Our paper is organized as follows : Section 2, we present the spatial framework. In section 3, we build our estimator of the conditional hazard function and we give the hypotheses and some notations. In Section 4, we present our main results. The derivation of the main results is given in Section 5 by estimate the point of high risk. Finally, the proofs are relegated to appendix.

4.2 Presentation of the spatial data

In order to define the spatial functional version of the local linear estimator of the conditional distribution function, let $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$ for $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^N$ and $N \geq 1$, be $(\mathcal{F} \times \mathbb{R})$-valued measurable and strictly stationary spatial process, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, where $(\mathcal{F}, d)$ is a semimetric space. Moreover, a point $\mathbf{i} = (i_1, ..., i_N) \in \mathbb{Z}^N$ will be referred to as a site.
On the other hand, we assume that the process $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$, under study, is observed over a rectangular domain :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{n}} = \left\{\mathbf{i} = (i_1, ..., i_N) \in \mathbb{Z}^N,\ 1 \leq i_k \leq n_k,\ k = 1, ..., N\right\}$$

where $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_N) \in \mathbb{Z}^N$.
All along the paper, when no confusion is possible, we denote by C and C' any generic positive constants and we will write :

$$\mathbf{n} \to \infty \text{ if } \min_{k=1,\dots,N}\{n_k\} \to \infty \text{ and } |n_j/n_k| < C$$

for all $j, k \in \{1, ..., N\}$. This kind of design is known as an asymptotically increasing domain, which allows the area of observations to become larger but keeping a minimum distance between observation sites. Throughout this paper, we denote by $\aleph_x$ a fixed neighborhood of a fixed point $x \in \mathcal{F}$, and by $\mathcal{S}$ a fixed compact subset of $\mathbb{R}$. Assume that the $Z_{\mathbf{i}}$'s are identically distributed to $Z = (X, Y)$ and that there exists a regular version of the conditional probability of Y given X. Then, let F^x be the conditional distribution of the variable Y given $X = x$. Moreover, we suppose that F^x has a continuous probability density f^x with respect to (w.r.t.) the Lebesgue's measure over $\mathbb{R}$.
Then, in what follows, we mainly study the local linear estimation of the

functions F^x and f^x when the functional random field $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}}),\ \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^N)$ satisfies the following mixing condition :

$$\begin{cases} \text{There exists a function } \varphi(t) \downarrow 0 \text{ as } t \to \infty, \text{ such that} \\ \forall\, E,\ E' \text{ subsets of } \mathbb{N}^N \text{ with finite cardinals} \\ \alpha\left(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}\left(E'\right)\right) = \sup_{B \in \mathcal{B}(E),\, C \in \mathcal{B}\left(E'\right)} \left|\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)\right| \\ \leq \psi\left(\text{Card}(E), \text{Card}\left(E'\right)\right) \varphi\left(\text{dist}\left(E, E'\right)\right), \end{cases} \tag{4.1}$$

where $\beta(E)$ (respectively,$\beta(E')$)denotes the Borel σ-field generated by $(Z_{\mathbf{i}},\mathbf{i} \in E)$ (respectively, $(Z_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} \in E')$), $Card(E)$ (respectively, $Card(E')$) is the cardinality number of E (respectively, E'),$dist(E, E')$ is the Euclidean distance between E and E' and $\psi\ : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^+$ is a symmetric positive nondecreasing function in each variable such that :

$$\forall n,\ m \in Z,\ \psi(n, m) \leq C\ min(n,\ m). \tag{4.2}$$

Remark that, when (4.1) holds with $\psi \equiv 1$ or $N = 1$, then the random field $Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}})$ is called strongly mixing (cf. Doukhan [8] for a discussion on the mixing properties and some examples). We also assume that the process Z satisfies the following mixing condition :

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^k \varphi(i) < \infty, \quad k > 0. \tag{4.3}$$

We note that the conditions (4.2) and (4.3) are the same as the mixing conditions have been used also in Carbon et al. [4] and Tran [28].

4.3 Conditional hazard function estimate and hypotheses

The estimation of the conditional hazard function $h^x(y)$ in the local linear modeling is based on the approximation of the conditional cumulative distribution $F^x(y)$ and conditional density function $f^x(y)$ by a linear function. As we are in a spatial framework we use technique extended the local linear ideas to the infinite dimensional framework (cf. for instance Baìllo and Grané [1], Barrientos-Marin et al. [2], Demongeot et al. [7], for some examples and references). Here, we adopt the fast functional local modeling, that is, the conditional cumulative distribution function $\widehat{F}^x$ is estimated by $\widehat{a}$ where the couple $(\widehat{a},\ \widehat{b})$ is obtained by the optimization rule :

$$(\widehat{a},\widehat{b}) = \arg\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}} \left(H(h_H^{-1}(y-Y_\mathbf{i})) - a - b\beta(X_\mathbf{i},\ x)\right)^2 K(h_H^{-1}\delta(x,X_\mathbf{i})) \tag{4.4}$$

where $\beta(.,.)$ and $\delta(.,.)$ are locating functions defined from $\mathcal{F}^2$ into $\mathbb{R}$, such that :

$$\forall \xi \in \mathcal{F}, \quad \beta(\xi,\xi) = 0 \text{ and } \mathrm{d}(.,.) = |\delta(.,.)|$$

and where the function K is a kernel, H is a distribution function and $h_K = h_{K,\mathbf{n}}$(respectively, $h_H = h_{H,\mathbf{n}}$) is a sequence of positive real numbers which converges to 0 when $\mathbf{n} \to \infty$. Clearly, the estimator $\widehat{a}$, given by (4.4), can be explicitly written as follows :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}\\ \mathbf{i}\neq\mathbf{j}}} W_{\mathbf{ij}}(x) H({h_H}^{-1}(y-Y_\mathbf{j}))}{\displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}\\ \mathbf{i}\neq\mathbf{j}}} W_{\mathbf{ij}}(x)}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

where
$W_{\mathbf{ij}}(x) = \beta_\mathbf{i}(\beta_\mathbf{i}\beta_\mathbf{j})K_\mathbf{i}K_\mathbf{j}$
with $K_\mathbf{i} = K(h_K^{-1}\delta(x,X_\mathbf{i}))$ and $\beta_\mathbf{i} = \beta(X_\mathbf{i},x)$.
then the density function estimator $\widehat{f}^x$ of f^x can be deduced from the distribution function and we defined by

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}\\ \mathbf{i}\neq\mathbf{j}}} W_{\mathbf{ij}}(x) H'({h_H}^{-1}(y-Y_\mathbf{j}))}{h_H \displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}\\ \mathbf{i}\neq\mathbf{j}}} W_{\mathbf{ij}}(x)}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Where H' is the derivative of H.
We estimate the conditional hazard function h^x by

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

We first give the hypotheses that are necessary in deriving the almost-complete convergence[1] (a.co.) of the functional locally modeled estimator of h^x.

(H1) For all $r > 0$, $\mathbb{P}(-r < \delta(X,x) < r)) = \phi_x(r) > 0$.

(H2) The random field $(X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{j}})$ satisfiers :

$$0 < \sup_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}} \mathbb{P}\left[(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}}) \in B(x,h_K) \times B(x,h_K)\right] \leq C(\phi_x(h_K))^{(a+1)/a}$$

for some $0 < a < \kappa N^{-1}$.

(H3) The conditional distribution function F^x is such that, $\forall y \in \mathcal{S}$, $\exists \beta > 0$, $\inf_{y\in\mathcal{S}}(1 - F^x(y)) > \beta$. The density f^x is such that,$\forall y \in \mathcal{S}$, $\exists \alpha > 0$, $f^x(y) < \alpha$, and for all $(x_1,x_2) \in \aleph_x^2$ and for all $(y_1,y_2) \in \mathcal{S}^2$:

$$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C\left(\delta^{b_1}(x_1,x_2) + |y_1-y_2|^{b_2}\right),$$

and

$$|f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq C\left|\delta^{b_3}(x_1,x_2) + |y_1-y_2|^{b_4}\right|$$

where b_1, b_2,b_3 and b_4 are some positive constants.

(H4) The function $\beta(\cdot,\cdot)$ is such that :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{F}, \quad C'|\delta(x_1,x_2)| \leq |\beta(x_1,x_2)| \leq C|\delta(x_1,x_2)|.$$

(H5) The kernel K is a positive, differentiable function which is supported within $(-1,1)$.

(H6) H is a differentiable function which has a bounded first derivative such that :

$$\int |t|^{b_2} H'(t)dt < \infty \quad and \int H'^2(t)dt < \infty,$$

$$\forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2, |H'(y_1) - H'(y_2)| \leq C|y_1-y_2|,$$

H' is a bounded function.

1. Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real r.v.'s ; we say that z_n converges almost completely (a.co.) to zero if, and only if, $\forall\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|z_n| > \epsilon) < \infty$. Moreover, we say that the rate of almost complete convergence of z_n to zero is of order u_n (with $u_n \to 0$) and we write $z_n = O_{a.co.}(u_n)$ if, and only if, $\exists\epsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|z_n| > \epsilon u_n) < \infty$.

(H7) The bandwidth h_k satisfies that there exists an integer n_0, such that :

$$\forall n > n_0, \quad -\frac{1}{\phi_x(h_K)} \int_{-1}^{1} \phi(zh_K, h_K) \frac{d}{dz}(z^2 K(z))dz > C' > 0$$

and

$$h_K \int_{B(x,h_K)} \beta(u,x) d\mathbb{P}(u) = o\left(\int_{B(x,h_K)} \beta^2(u,x) d\mathbb{P}(u) \right)$$

where $B(x,r) = \{z \in \mathcal{F}/(z,x) \leq r\}$ denotes the closed ball centered at x and of radius r, $d\mathbb{P}(x)$ is the cumulative distribution of the functional random variable X and $\phi_x(r_1,r_2) = \mathbb{P}(r_2 \leq \delta(X,x) \leq r_1)$.

(H8) There exist positive numbers $\alpha < (k-5N)/2N$ and η_0 such that :

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\mathbf{n}}^{\alpha} h_H = \infty \quad and \quad C\widehat{\mathbf{n}}^{\frac{(5+2\alpha)N-k}{k}+\eta_0} \leq \phi_x(h_K)$$

where $\widehat{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^{N} n_i$.

4.4 Main results

Theorem 4.1 *Under assumptions (H1)-(H8), and (4.1)-(4.3), we have :*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{h}^x(y) - h^x(y)| = O\left(h_K^{\beta_1} + h_H^{\beta_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\, h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad a.co.$$

where $\beta_1 = \max\{b_1, b_3\}$ and $\beta_2 = \max\{b_1, b_4\}$.

Proof of Theorem 4.1. Remark that, the proof of Theorem 4.1 is a direct consequence of the following decomposition :

$$\widehat{h}^x(y) - h^x(y) = \frac{1}{1-\widehat{F}^x(y)}\left[\widehat{f}^x(y) - f^x(y)\right] + \frac{h^x(y)}{1-\widehat{F}^x(y)}\left[\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right] \tag{4.6}$$

And it's based on following results

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\, \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \; a.co.$$

$$\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{f}^x(y)-f^x(y)| = O\left(h_K^{b_3}+h_H^{b_4}\right)+O\left(\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,h_H\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\ a.co.$$

$$\exists\eta>0\ \text{ such that } \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^N}\mathbb{P}\left\{\inf_{y\in\mathcal{S}}|1-\widehat{F}^x(y)|<\eta\right\}<\infty.$$

Whose demonstrations are based, respectively, on the decompositions

$$\begin{aligned}\widehat{F}^x(y)-F^x(y) &= \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\left\{\left(\widehat{F}_N^x(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)\right)-\left(F^x(y)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)\right)\right\}\\ &+ \frac{F^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left(\mathbb{E}\widehat{F}_D^x-\widehat{F}_D^x\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\widehat{f}^x(y)-f^x(y) &= \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\left\{\left(\widehat{f}_N^x(y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)\right)-\left(f^x(y)-\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y)\right)\right\}\\ &+ \frac{f^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left(\mathbb{E}\widehat{F}_D^x-\widehat{F}_D^x\right).\end{aligned}$$

Where

$$\widehat{F}_D^x=\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)\mathbb{E}\left[W_{12}(x)\right]}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}}W_{\mathbf{ij}}(x),$$

and

$$\widehat{F}_N^x(y)=\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)\mathbb{E}\left[W_{12}(x)\right]}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}}W_{\mathbf{ij}}(x)H(h_H^{-1}(y-Y_{\mathbf{j}})),$$

also

$$\widehat{f}_N^x(y)=\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)h_H\mathbb{E}\left[W_{12}(x)\right]}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}}W_{\mathbf{ij}}(x)H'(h_H^{-1}(y-Y_{\mathbf{j}})).$$

and of lemmas 4.1-4.6, for which the proofs are given in the Appendix.

Lemma 4.1 *Under assumptions (H1), (H2), (H4), (H5), (H7), (H8) and (1)-(3) we have that :*

$$1-\widehat{F}_D^x=O\left(\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\ a.co.\quad as\ \mathbf{n}\to\infty$$

and

$$\exists k > 0, \textit{such that} \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{P}\left(\widehat{F}_D^x < k\right) < \infty.$$

Lemma 4.2 *Under assumptions (H1), (H3), (H5) and (H6) we obtain :*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |F^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]| = O\left(h_K^{b_1}\right) + O\left(h_H^{b_2}\right), \quad a.co.$$

Lemma 4.3 *Under assumptions (H1), (H3), (H5) and (H6) we obtain :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y\in\mathcal{S}} |f^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f}_N^x(y)]| = O\left(h_K^{b_3}\right) + O\left(h_H^{b_4}\right), \quad a.co.$$

Lemma 4.4 *Under the assumptions of Theorem 4.1, we get :*

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]| = O\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad a.co. \tag{4.7}$$

Lemma 4.5 *Under the assumptions of Theorem 4.1, we get :*

$$\frac{1}{\widehat{F}_D^x} \sup_{y\in\mathcal{S}} |\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{f}_N^x(y)]| = O\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}} h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad a.co. \tag{4.8}$$

Lemma 4.6 *Under the assumptions of Theorem 4.1, we get :*

$$\exists \eta > 0 \quad \textit{such that} \quad \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^N} \mathbb{P}\left\{\inf_{y\in\mathcal{S}} |1 - \widehat{F}^x(y)| < \eta\right\} < \infty.$$

4.5 Estimate the point of high risk

In this Section, we try to estimate the point of high risk in $\mathcal{S}$, denoted by $\theta(x)$, defined by

$$h^x(\theta(x)) = \max_{y\in\mathcal{S}} h^x(y). \tag{4.9}$$

This model has a great interest in statistics, this is mainly due to its application in various disciplines. Indeed, this is the tool used in seismic risk analysis (see Quintela-del-Río (2006)). In our context functional, we assume that there is a single point $\theta(x)$ in $\mathcal{S}$ satisfying (4.9). The estimator natural of $\theta(x)$, denoted by $\widehat{\theta}(x)$, is as :

$$\widehat{h}^x(\widehat{\theta}(x)) = \max_{y\in\mathcal{S}} \widehat{h}^x(y). \tag{4.10}$$

In general, this estimator is not unique. thus, throughout the rest of this article $\widehat{\theta}(x)$ mean any random variable satisfying (4.10). We keep the assumptions of the previous section to state precisely the rate of convergence of the estimator $\widehat{\theta}(x)$, and we assume that h^x is 2-times continuously differentiable around y with :

$$h^{x'}(\theta(x)) = 0 \qquad \text{and} \qquad h^{x''}(\theta(x)) < 0. \tag{4.11}$$

Finally, our main result allows us to conclude this corollary.

Corollary 4.1 *Under the conditions of conditions (H1)-(H7), if (4.11) is holds, we have*
$\widehat{\theta}(x) - \theta(x) = O\left(h_K^{b_1/2}\right) + O\left(h_H^{b_2/2}\right) + O\left(\left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\, h_H \phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{4}}\right),$ *a.co.*

4.6 Appendix

As the Lemma 4.1 is a particular case of Lemma 4.4 by taking ($H_{\mathbf{j}} \equiv 1$), then the proof of it will be omitted.
Proof of Lemma 4.2.
Since this term is not affected by the dependence structure of the data, we can write that :

$$\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x] = \frac{1}{\mathbb{E}[W_{12}]}\mathbb{E}[W_{12}[\mathbb{E}[H_1|X]]].$$

So, by an integration by parts and by using assumptions (H3) and (H5) we get that :

$$\mathbb{1}_{B(x,h_K)}(x)|\mathbb{E}[H_1|X] - F^x(y)| \le \int_{\mathbf{R}} H'(t)(h_K^{b_1} + |t|^{b_2} h_{\mathbf{H}}^{b_2})dt. \tag{4.12}$$

Thus, the claimed result of this lemma is a direct consequence of the assumption (H6).

Proof of Lemma 4.3.

By denoting $H'_{\mathbf{i}}(y) = H'(h_H^{-1}(y - Y_{\mathbf{i}}))$, we write :

$$\mathbb{E}[\widehat{f}_N^x(y)] - f^x(y) = \frac{1}{h_H \mathbb{E}[W12]} \mathbb{E}\left[W12\left[\mathbb{E}[H'_1(y)|X_1] - h_H f^x(y)\right]\right]. \quad (4.13)$$

Moreover

$$\mathbb{E}[H'_1(y)|X_1] \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}} H'(h_H^{-1}(y-z)) f^{X_1}(z) dz \quad (4.14)$$

Notice that the assumption (H6) allows us to write :

$$\left| \frac{1}{h_H} \mathbb{E}[H'_1(y)|X_1] - f^x(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} H'(t) |f^{X_1}(y - h_H t) - f^x(y)| dt.$$

Finally, by assumption (H3) that becomes :

$$\left| \frac{1}{h_H} \mathbb{E}[H'_1(y)|X_1] - f^x(y) \right| \leq C \int_{\mathbb{R}} H'(t)(h_K^{b_3} + (|t| h_H)^{b_4}) dt.$$

By remarking that the last inequality is uniform on y, the proof of Lemma is a consequence of assumption (H6), (4.13) and the second part of Lemma 4.1.

Proof of Lemma 4.4.

The compactness property of the set $\mathcal{S}$ allows us to write that, for some t_1, t_2,...,$t_{z_n} \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^{z_{\mathbf{n}}} (t_j - l_{\mathbf{n}}, t_j + l_{\mathbf{n}})$$

with $l_{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{n}}^{-\alpha - \frac{1}{2}}$ and $z_{\mathbf{n}} \leq \widehat{\mathbf{n}}^{\alpha + \frac{1}{2}}$.

We consider the following decomposition :

$$\left| \widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) \right| \leq \underbrace{\left| \widehat{F}_N^x(y) - \widehat{F}_N^x(t_{j(y)}) \right|}_{T_1} + \underbrace{\left| \widehat{F}_N^x(t_{j(y)}) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(t_{j(y)}) \right|}_{T_2}$$
$$+ \underbrace{\left| \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(t_{j(y)}) - \mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y) \right|}_{T_3}. \quad (4.15)$$

where $\quad j(y) = \arg\min_{j \in \{1,2,\ldots,z_{\mathbf{n}}\}} |y - t_j|$.

- First, for the terms T_1 and T_3, we have that :

$$\begin{aligned}\left|\widehat{F}_N^x(y)-\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})\right| &\leq \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)\mathbb{E}\left[W_{12}(x)\right]}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}} W_{\mathbf{ij}}(x)\left|H_{\mathbf{i}}(y)-H_{\mathbf{i}}(t_{j(y)})\right| \\ &\leq C\frac{l_{\mathbf{n}}}{h_H}\widehat{F}_D^x\end{aligned}$$

.

Clearly, from the definition of $l_{\mathbf{n}}$ and by the result of Lemma 4.1 we obtain, under assumption (H8), that :
$\dfrac{l_{\mathbf{n}}}{h_H}=o\left(\dfrac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi(h_K)}\right)^{1/2}.$
Hence :

$$\left|\widehat{F}_N^x(y)-\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})\right|=o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi(h_K)}\right)^{1/2}, \qquad a.co..$$

and

$$\left|\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(y)\right|=o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi(h_K)}\right)^{1/2}.$$

- Second, for the term T_2, we can write that, for any $\eta>0$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{y\in\mathcal{S}}\left|\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})-\mathbb{E}\widehat{F}_N^x(t_{j(y)})\right|>\eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi(h_K)}\right)^{1/2}\right)\\ &\quad=\mathbb{P}\left(\max_{j\in\{1,2,\ldots,z_{\mathbf{n}}\}}\left|\widehat{F}_N^{x_k}(t_j)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{x_k}(t_j)\right|>\eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi(h_K)}\right)^{1/2}\right)\\ &\quad\leq z_{\mathbf{n}}\max_{j\in\{1,2,\ldots,z_{\mathbf{n}}\}}P\left(\left|\widehat{F}_N^{x_k}(t_j)-\mathbb{E}\widehat{F}_N^{x_k}(t_j)\right|>\eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi(h_K)}\right)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Then, notice that this latter can be treated by same ideas as in Barrientos-Marin et al.(2010). Indeed by using the following decomposition :

$$\widehat{F}_N^x(t_{j(y)}) = \underbrace{\frac{\widehat{\mathbf{n}}^2 h_k^2 \phi_x^2(h_k)}{\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{n}}-1)\mathbb{E}[W_{12}]}}_{T_1} \Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{j}\in l_{\mathbf{n}}} \frac{K_{\mathbf{j}} H_{\mathbf{j}}(t_{j(y)})}{\phi_x(h_K)}\right)}_{S_1} \underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{i}\in l_{\mathbf{n}}} \frac{K_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{i}}^2}{h_K^2 \phi_x(h_K)}\right)}_{S_2}$$
$$- \underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{j}\in l_{\mathbf{n}}} \frac{K_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}} H_{\mathbf{j}}(t_{j(y)})}{h_K \phi_x(h_K)}\right)}_{S_3} \underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{i}\in l_{\mathbf{n}}} \frac{K_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{i}}}{h_K \phi_x(h_K)}\right)}_{S_4} \Bigg]$$

and by a similar fashion, the claimed result will be obtained as soon as the three following equalities (4.16)-(4.18) have been checked :

$$\sum_n z_{\mathbf{n}} \mathbb{P}\left\{ |S_k - \mathbb{E}[S_k]| > \eta \left(\frac{log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}} \phi_x(h_K)} \right)^{1/2} \right\} < \infty, \quad \text{for } k = 1,2,3,4 \quad (4.16)$$

$$\mathrm{Cov}(S_1, S_2) = o\left(\sqrt{\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\, \phi(h_K)}} \right) \quad (4.17)$$

and

$$\mathrm{Cov}(S_3, S_4) = o\left(\sqrt{\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\, \phi(h_K)}} \right). \quad (4.18)$$

Recall that T_1, which is not affected by the dependence structure of the data, has been evaluated by Barrientos-Marin et al.(2010) in the i.i.d case.
In order to show the required result (4.16), we denote first :

$$\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l} = \frac{1}{h_K^k} K_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{i}}^k H_{\mathbf{i}}^l(t_j) - \frac{1}{h_K^k} \mathbb{E}\left[K_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{i}}^k H_{\mathbf{i}}^l(t_j) \right] \quad \text{for } k = 0,1,2 \text{ and } l = 0,1.$$

Then, it can be seen that : for all $1 \le i \le 4$, there exists some integers $k,\ l$ such that :

$$S_{\mathbf{i}} - \mathbb{E}[S_{\mathbf{i}}] = \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}} \phi_x(h_K)} \sum_{\mathbf{i}\in l_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}.$$

At this stage we are in a position to use some standard arguments which are classically used in the nonparametric spatial statistics, for instance the spatial decomposition in Tran(1990). More specifically, for a fixed integer $p_{\mathbf{n}}$, we define :

$$U(1,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+1\\k=1,\dots,N}}^{2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l},$$

$$U(2,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+1\\k=1,\dots,N-1}}^{2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_N=2j_Np_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1}^{2(j_N+1)p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l},$$

$$U(3,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+1\\k=1,\dots,N-2}}^{2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_{N-1}=2j_{N-1}p_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1}^{2(j_{N-1}+1)p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_N=2j_Np_{\mathbf{n}}+1}^{2j_Np_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l},$$

$$U(4,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+1\\k=1,\dots,N-2}}^{2j_kp_{\mathbf{n}}} \sum_{i_{N-1}=2j_{N-1}p_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1}^{2(j_{N-1}+1)p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_N=2j_Np_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1}^{2(j_N+1)p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l},$$

and so on. Notice that the last two terms of this sequence are :

$$U(2^{N-1},\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1\\k=1,\dots,N-1}}^{2(j_k+1)p_{\mathbf{n}}} \sum_{i_N=2j_Np_{\mathbf{n}}+1}^{2j_Np_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

and

$$U(2^N,\mathbf{n},\mathbf{j}) = \sum_{\substack{i_k=2j_kp_{\mathbf{n}}+p_{\mathbf{n}}+1\\k=1,\dots,N}}^{2(j_k+1)p_{\mathbf{n}}} \Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}.$$

In what follows, we denote :

$$T(\mathbf{n},i) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}} U(i,\mathbf{n},\mathbf{j},k) \text{ for } 1 \le i \le 2^N.$$

where $r_i = 2^{-1}n_ip_{\mathbf{n}}^{-1}$, $i = 1,\dots,N$ and $\mathcal{J} = \{0,...,r_1-1\}\times...\times\{0,...,r_N-1\}$. It is then clear that :

$$\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l} - \mathbb{E}\left[\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}\right] = \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\sum_{i=1}^{2^N} T(\mathbf{n},\ i,\ k). \quad (4.19)$$

Notice that, it is important to remark that $T(\mathbf{n},\ 1)$ is the sum of the random variables $\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$ over large blocks, whereas the other terms, that is $T(\mathbf{n},\ 1)$, for

$2 \leq i \leq 2^N$, are sums over small blocks.
We remark also that as raised in Biau and Cadre (2004), if one does not have the equalities $n_i = 2r_i p_{\mathbf{n}}$, the term say $T(\mathbf{n},\ 2^N+1)$ (which contains the $\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$ is at the end and which is not included in the above blocks) can be added. So, this term does not impact too much on the demonstration. Thus, we can write, for all $\eta > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l} - \mathbb{E}\left[\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}\right]\right| \geq \eta\right) \leq$$
$$2^N \max_{i=1,\dots,2^N}\mathbb{P}(T(\mathbf{n},\ i) \geq \eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)).$$

Therefore, the desired result follows from the evaluation of the following quantities :

$$\mathbb{P}(T(\mathbf{n},\ i) \geq \eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)), \quad \text{for all } i = 1, \dots, 2^N.$$

For shortness sake, we consider only the case when $i = 1$, because the other cases are very similar. To do that, we enumerate the

$$M = \prod_{k=1}^{N} r_k = 2^{-N}\widehat{\mathbf{n}}p_{\mathbf{n}}^{-N}$$

random variables $U(1, \mathbf{n}, \mathbf{j}, k)$ for each $\mathbf{j} \in \mathcal{J}$ in the arbitrary way $Z_1^{k,l}, \dots,\ Z_M^{k,l}$. Thus, for each $Z_{\mathbf{j}}^{k,l}$ there exists certain $\mathbf{j}$ in $\mathcal{J}$ such that :

$$Z_{\mathbf{j}}^{k,l} = \sum_{\mathbf{i}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{j})}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}$$

where $I(1, \mathbf{n}, \mathbf{j}) = \{\mathbf{i} : 2j_k p_{\mathbf{n}} + 1 \leq i_k \leq 2j_k p_{\mathbf{n}} + p_{\mathbf{n}} \text{ for } k = 1, \dots, N\}$. Clearly the set $I(1, \mathbf{n}, \mathbf{j})$ contains $p_{\mathbf{n}}^N$ sites, and these sites are distant from each other by at least $p_{\mathbf{n}}$. Moreover, under assumptions (H4) and (H5), there exists a positive constant C such that :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^k H_{\mathbf{i}}^l(t_j) &\leq \frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}|\delta(X_{\mathbf{i}}, x)|^k \\
&\leq \frac{1}{h^k}K(h^{-1}\delta(x, X_{\mathbf{i}}))|\delta(X_{\mathbf{i}}, x)|^k \mathbb{1}_{]-1,1[}(h^{-1}\delta(x, X_{\mathbf{i}})) \\
&\leq K(h^{-1}\delta(x, X_{\mathbf{i}})) \leq C.
\end{aligned}$$

Then, according to Lemma 4.5 in [4] one can find independent random variables $Z_1^*,\ldots,Z_M^*$ which are identically distributed as $Z_j^{k,l}$ for $j=1,\ldots,M$ and such that :

$$\sum_{j=1}^{M}\mathbb{E}|Z_{\mathbf{j}}^{k,l}-Z_{\mathbf{j}}^{*}|\leq 2CMp_{\mathbf{n}}^{N}\psi((M-1)p_{\mathbf{n}}^{N},p_{\mathbf{n}}^{N})\varphi(p_{\mathbf{n}}).$$

$$\mathbb{P}\left(T(\mathbf{n},i)\geq \eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)\right)\leq B_1(\mathbf{n})+B_2(\mathbf{n})$$

where

$$B_1(\mathbf{n})=\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{M}Z_{\mathbf{j}}^{*}\right|\geq\frac{M\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}{2M}\right)$$

and

$$B_2(\mathbf{n})=\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{M}|Z_{\mathbf{j}}^{k,l}-Z_{\mathbf{j}}^{*}|\geq\frac{\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}{2}\right).$$

Now we have to treat each term alone.

- Concerning the term $B_1(\mathbf{n})$: by using the Bernstein's inequality we obtain that :

$$\begin{aligned}B_1(\mathbf{n}) &= \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{M}Z_{\mathbf{j}}^{*}\right|\geq\frac{M\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}{2M}\right)\\ &\leq 2\exp\left(-\frac{(\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K))^2}{MVar\left[Z_1^{k*}\right]+Cp_{\mathbf{n}}^{N}\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right).\end{aligned}$$

  In order to determine the behavior of this term, we have to evaluate asymptotically $Var\left[Z_1^*\right]$. Indeed :

$$Var\left[Z_1^{k*}\right]=Var\left[\sum_{\mathbf{i}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{1})}\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}\right]=\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{1})}\left|Cov(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l},\Delta_{\mathbf{j}}^{k,l})\right|.$$

  Let $Q_{\mathbf{n}}=\sum_{\mathbf{i}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{1})}Var\left[\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}\right]$ and $R_{\mathbf{n}}=\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{1})}\left|Cov(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l},\Delta_{\mathbf{j}}^{k,l})\right|$.
  By assumption (H1) and (21), we get that :

$$Var[\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}]\leq C(\phi_x(h_K)+(\phi_x(h_K))^2)$$

hence

$$Q_{\mathbf{n}} = O\left(p_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K)\right).$$

Now, for $R_{\mathbf{n}}$, we introduce the following sets :
$E_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(1, \mathbf{n}, \mathbf{1}) : 0 < \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\| \leq c_{\mathbf{n}}\}$ and
$E_2 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(1, \mathbf{n}, \mathbf{1}) : \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\| > c_{\mathbf{n}}\}$
where $c_{\mathbf{n}}$ is a real sequence that diverges to $+\infty$ and that will be specified later.
By splitting the sum in $R_{\mathbf{n}}$ into two separate summations over sites within E_1 and E_2, we can write :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}} &= \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in E_1} \left| Cov\left(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l}\right)\right| + \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in E_2} \left| Cov\left(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l}\right)\right| \\ &= R_{\mathbf{n}}^1 + R_{\mathbf{n}}^2. \end{aligned}$$

On one hand, we have :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}}^1 &= C \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in E_1} \left|\mathbb{E}\left[K_{\mathbf{i}} K_{\mathbf{j}}\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[K_{\mathbf{i}}\right] \mathbb{E}\left[K_{\mathbf{j}}\right]\right| \\ &\leq C p_{\mathbf{n}}^N c_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K) \left((\phi_x(h_K))^{1/a} + \phi_x(h_K) \right) \\ &\leq C p_{\mathbf{n}}^N c_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K)^{(a+1)/a}. \end{aligned}$$

and on the other hand, we have :

$$R_{\mathbf{n}}^2 = \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in E_2} \left| Cov\left(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l}\right)\right|.$$

As from Lemma 2.1(ii) in Tran [28], we get :

$$\left| Cov\left(\Delta_{\mathbf{i}}^{k,l}, \Delta_{\mathbf{j}}^{k,l}\right)\right| \leq C\varphi\left(\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|\right).$$

then :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}}^2 &\leq C \sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in E_2} \varphi\left(\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|\right) \leq C p_{\mathbf{n}}^N \sum_{\mathbf{i} : \|\mathbf{i}\| \geq c_{\mathbf{n}}} \varphi\left(\|\mathbf{i}\|\right) \\ &\leq C p_{\mathbf{n}}^N c_{\mathbf{n}}^{-Na} \sum_{\mathbf{i} : \|\mathbf{i}\| \geq c_{\mathbf{n}}} \|\mathbf{i}\|^{Na} \varphi\left(\|\mathbf{i}\|\right). \end{aligned}$$

Let $c_{\mathbf{n}} = (\phi_x(h_K))^{-1/Na}$, then we obtain :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}}^2 &\leq Cp_{\mathbf{n}}^N c_{\mathbf{n}}^{-Na} \sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}} \|\mathbf{i}\|^{Na} \varphi(\|\mathbf{i}\|) \\ &\leq Cp_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K) \sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}} \|\mathbf{i}\|^{Na} \varphi(\|\mathbf{i}\|). \end{aligned}$$

And, because of (4.3), we get :

$$R_{\mathbf{n}}^2 \leq Cp_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K).$$

Furthermore, under the same choice of $c_{\mathbf{n}}$ as above, we obtain also :

$$R_{\mathbf{n}}^1 \leq Cp_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K).$$

So,

$$Var\left[Z_1^*\right] = O\left(p_{\mathbf{n}}^N \phi_x(h_K)\right).$$

This last result combined with the definitions of $p_{\mathbf{n}}$, M and η is enough to show that :

$$B_1(\mathbf{n}) \leq \exp\left(-C(\eta_0)\log \widehat{\mathbf{n}}.\right)$$

Consequently, an appropriate choice of η_0 allows us to write that :

$$\sum_{\mathbf{n}} z_{\mathbf{n}} B_1(\mathbf{n}) < \infty.$$

- Concerning the term $B_2(\mathbf{n})$: by using the Markov's inequality we can write that :

$$\begin{aligned} B_2(\mathbf{n}) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{M} |Z_{\mathbf{j}}^{k,l} - Z_{\mathbf{j}}^*| \geq \frac{\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)} \sum_{j=1}^{M} \mathbb{E}|Z_{\mathbf{j}}^{k,l} - Z_{\mathbf{j}}^*| \\ &\leq 2\frac{Mp_{\mathbf{n}}^N}{\eta\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)} \psi((M-1)p_{\mathbf{n}}^N, p_{\mathbf{n}}^N)\varphi(p_{\mathbf{n}}). \end{aligned}$$

Then, since $\widehat{\mathbf{n}} = 2^N M p_{\mathbf{n}}^N$ and $\psi((M-1)p_{\mathbf{n}}^N, p_{\mathbf{n}}^N) \leq p_{\mathbf{n}}^N$, and by choosing $\eta = \eta_0 \left(\frac{\log \widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\,\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$ we get that :

$$B_2 \leq \widehat{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}}^N \left(\log \widehat{\mathbf{n}}\right)^{-1/2} \left(\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)\right)^{-1/2} \varphi(p_{\mathbf{n}}).$$

Moreover, by taking $p_{\mathbf{n}} = C\left(\frac{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}{\log \widehat{\mathbf{n}}}\right)^{1/2N}$, we arrive at :

$$B_2 \leq \widehat{\mathbf{n}}\,\varphi(p_{\mathbf{n}}). \tag{4.20}$$

This last inequality together with the assumption (H8) is enough to prove that :

$$\sum_{\mathbf{n}} Z_{\mathbf{n}} B_2(\mathbf{n}) < \infty.$$

Now, we show results (4.17) and (4.18). To do that, we write :
$\mathrm{Cov}(S_1, S_2) =$

$$\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}^2\phi_x^2(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\mathrm{Cov}\left(K_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{i}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^2}{h_K^2}\right) + \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}^2\phi_x^2(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\mathrm{Cov}\left(K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^2}{h_K^2}\right)$$

and
$\mathrm{Cov}(S_3, S_4) =$

$$\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}^2\phi_x^2(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\mathrm{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{i}}}{h_K}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}}{h_K}\right) + \frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}^2\phi_x^2(h_K)}\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\mathrm{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}}{h_K}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}}{h_K}\right).$$

Observe that, under assumptions (H4) and (H6), for $k' = 0, 1$ and $l' = 1, 2$ we obtain that :

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'}H_{\mathbf{i}}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\frac{K_{\mathbf{i}}^2\beta_{\mathbf{i}}^{k'+l'}H_{\mathbf{i}}}{h_K^{k'+l'}}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'}H_{\mathbf{i}}}{h_K^{k'}}\right]\mathbb{E}\left[\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right]\right| \\
&\leq C\left[\mathbb{E}[K_{\mathbf{i}}^2] + \mathbb{E}[K_{\mathbf{i}}]\mathbb{E}[K_{\mathbf{i}}]\right] \\
&\leq C\phi_x(h_K).
\end{aligned}$$

It follows that :

$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}}\mathrm{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'}H_{\mathbf{i}}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right) = O(\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)).$$

Concerning the quantity :

$$\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} \operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)$$

we use the following decomposition :

$$\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} \operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right) = \sum_{\substack{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\\(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_1}} \operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right) + \sum_{\substack{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\\(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_2}} \operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right).$$

Once again, we use assumptions (H4) and (H6) to show that : for all $\mathbf{i}\neq\mathbf{j}$ in E_1 :

$$\left|\operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)\right| \leq C(\phi_x^{(a+1)/a}(h_K) + \phi_x(h_K)^2)$$

and for all $\mathbf{i}\neq\mathbf{j}$ in E_2 :

$$\left|\operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right)\right| \leq C\varphi(\|i-j\|).$$

So,

$$\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_1} \operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right) \leq C\widehat{\mathbf{n}}c_{\mathbf{n}}^N\phi_x(h_K)^{(a+1)/a}$$

and

$$\sum_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_2} \operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right) \leq C\widehat{\mathbf{n}}c_{\mathbf{n}}^{-Na}\sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}}\|\mathbf{i}\|^{Na}\varphi(\|\mathbf{i}\|).$$

Because of the same choice, as above, of the sequence $c_{\mathbf{n}} = (\phi_x(h_K))^{-1/Na}$, we obtain :

$$\sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}\in l_{\mathbf{n}}} \operatorname{Cov}\left(\frac{K_{\mathbf{j}}H_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'}}{h_K^{k'}}, \frac{K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{l'}}{h_K^{l'}}\right) = O(\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)).$$

Finally, on the first hand, the case $(k',l')=(0,2)$ implies that :

$$\operatorname{Cov}(S_1,S_2) = O\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right) = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$$

and, on the second hand, the case $(k', l') = (1, 1)$ gives :

$$\mathrm{Cov}(S_3, S_4) = O\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right) = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$$

Proof of Lemma 4.5.
The proof of this lemma is very close to the proof of Lemma 4.4. Specifically, by keeping the same notations as those used in Lemma 4.4 and by recovering topologically the compact S by intervals of lengths $l_n = n^{(-3\alpha-1)/2}$ allow us to get : $\dfrac{l_n}{h_H^2} = o\left(\dfrac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}$.
Therefore, by assumption (H6) and Lemma 4.1 we obtain :

$$\begin{cases} \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\sup_{y\in S}\left|\widehat{f}_N^x(y) - \widehat{f}_N^x(t_{j(y)})\right| = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}, \\ \text{and} \\ \sup_{y\in S}\left|\mathbb{E}\widehat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(t_{j(y)})\right| = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)^{1/2}}\right). \end{cases} \tag{4.21}$$

On the other hand, for all $\eta > 0$, we write :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\sup_{y\in(\alpha_x,\beta_x)}\left|\widehat{f}_N^x(t_{j(y)}) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(t_{j(y)})\right| > \eta\sqrt{\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}}\right) \\ &\qquad \le\ z_{\mathbf{n}} \max_{j\in\{1,2,\dots,z_{\mathbf{n}}\}} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{f}_N^x(t_j) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(t_j)\right| > \eta\sqrt{\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}}\right). \end{aligned}$$

Then, it remains to show that :

$$\sum_{\mathbf{n}} z_{\mathbf{n}} \max_{j\in\{1,2,\dots,z_{\mathbf{n}}\}} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{f}_N^x(t_j) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(t_j)\right| > \eta\sqrt{\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}}\right) < \infty. \tag{4.22}$$

Clearly, the proof of (4.22) is very close to the proof of the convergence of the term T_2 in (4.15). More precisely, it is based on the following decomposition :

$$\widehat{f}_N^x(t_j) = A_1\Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}}\frac{K_\mathbf{j}H'_\mathbf{j}(t_{j(y)})}{h_H\phi_x(h_K)}\right)}_{T_2}\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}}\frac{K_\mathbf{i}\beta_\mathbf{i}^2}{h_K^2\phi_x(h_K)}\right)}_{S_2}$$

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}}\frac{K_\mathbf{j}\beta_\mathbf{j}H'_\mathbf{j}(t_{j(y)})}{h_Kh_H\phi_x(h_K)}\right)}_{T_3}\underbrace{\left(\frac{1}{\widehat{\mathbf{n}}}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}}\frac{K_\mathbf{i}\beta_\mathbf{i}}{h_K\phi_x(h_K)}\right)}_{S_4}\Bigg]$$

Thus, it suffices to show that :

$$\sum_n z_\mathbf{n}\mathbb{P}\left\{|T_k-\mathbb{E}[T_k]|>\eta\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}\right)^{1/2}\right\}<\infty,\quad\text{for } k=2,3 \tag{4.23}$$

$$\mathrm{Cov}(T_2,S_2) = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi(h_K)}\right)^{1/2} \tag{4.24}$$

and

$$\mathrm{Cov}(T_3,S_4) = o\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi(h_K)}\right)^{1/2}. \tag{4.25}$$

The result (4.23) is given by a straightforward modification of the spatial decomposition used in the proof of (4.16) where $\Delta_\mathbf{i}^{k,l}$ is replaced by :

$$\Gamma_\mathbf{i}^k = \frac{K_\mathbf{i}\beta_\mathbf{i}^kH'_\mathbf{i}(t_{j(y)})}{h_K^kh_H\phi_x(h_K)} - \mathbb{E}\left[\frac{K_\mathbf{i}\beta_\mathbf{i}^kH'_\mathbf{i}(t_{j(y)})}{h_K^kh_H\phi_x(h_K)}\right]$$

and by taking $p_\mathbf{n} = C\left(\frac{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}{\log\widehat{\mathbf{n}}}\right)^{1/2N}$.

Notice that, the main step in this calculus is the computation of the variance term of $\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}}\Gamma_\mathbf{i}^k$.

Moreover, both results(4.24) and (4.25) are based on the evaluation of :

$$\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}}\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{h^k}K_\mathbf{i}\beta_\mathbf{i}^kH'_\mathbf{i}(t_j),\frac{1}{h^{k'}}K_\mathbf{j}\beta_\mathbf{j}^{k'}\right)$$

for $(k,k')\in\{0,1\}\times\{1,2\}$. Then, all it remains to evaluate :

$$\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_\mathbf{n}}\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{h^k}K_\mathbf{i}\beta_\mathbf{i}^kH'^l_\mathbf{i}(t_j),\frac{1}{h^{k'}}K_\mathbf{j}\beta_\mathbf{j}^{k'}H'^{l'}_\mathbf{j}\right)$$

for $(k,k') \in \{0,1\} \times \{1,2\}$ and $l,l' \in \{0,1\}$.
Notice that, this latter is given by using the fact that :

$$\mathbb{E}\left[H_{\mathbf{i}}|X_{\mathbf{i}}\right] = O(h_H) \text{ and } \mathbb{E}\left[H_{\mathbf{i}}H_{\mathbf{j}}|(X_{\mathbf{i}},X_{\mathbf{j}})\right] = O(h_H^2), \quad \text{for all } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}.$$

So, by the same arguments as those used in the proof of Lemma 4.4 we obtain that :

$$\sum_{\mathbf{i}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{1})} \left|\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^k {H_{\mathbf{i}}}^l(t_j), \frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^{k'} {H_{\mathbf{i}}}^{l'}\right)\right| = O(p_{\mathbf{n}}^N h_H \phi_x(h_K))$$

and for some sequence $c_{\mathbf{n}}$ which diverges to $+\infty$, we obtain that :

$$\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{1})} \left|\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^k {H_{\mathbf{i}}}^l(t_j), \frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'} {H_{\mathbf{j}}}^{l'}(t_j)\right)\right|$$
$$\leq C p_{\mathbf{n}}^N \left(c_{\mathbf{n}}^N h_H^2 \phi_x(h_K)^{1/a}\phi_x(h_K) + c_{\mathbf{n}}^{-Na} \sum_{\mathbf{i}:\|\mathbf{i}\|\geq c_{\mathbf{n}}} \|\mathbf{i}\|^{Na}\varphi(\|\mathbf{i}\|)\right).$$

Now, if we choose $c_{\mathbf{n}} = (h_H\phi_x(h_K))^{-1/Na}$, then we can write :

$$\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}\in I(1,\mathbf{n},\mathbf{1})} \left|\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^k {H_{\mathbf{i}}}^l(t_j), \frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'} {H_{\mathbf{j}}}^{l'}(t_j)\right)\right| \leq C p_{\mathbf{n}}^N h_H \phi_x(h_K).$$

Finally, we obtain, for $(k,k') \in \{0,1\} \times \{1,2\}$ and $l,l' \in \{0,1\}$, that :

$$\sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathcal{I}_{\mathbf{n}}} \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{h^k}K_{\mathbf{i}}\beta_{\mathbf{i}}^k {H_{\mathbf{i}}}^l(t_j), \frac{1}{h^{k'}}K_{\mathbf{j}}\beta_{\mathbf{j}}^{k'} {H_{\mathbf{j}}}^{l'}(t_j)\right) = O(p_{\mathbf{n}}^N h_H \phi_x(h_K)).$$

The rest of this proof follows the same steps as in the proof of Lemma 4.4. Therefore, we can write :

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} \left|\widehat{f}_N^x(t_{j(y)}) - \mathbb{E}\widehat{f}_N^x(t_{j(y)})\right| = O_{a.co.}\left(\sqrt{\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}h_H\phi_x(h_K)}}\right). \tag{4.26}$$

Finally, the result of Lemma 4.5 is a consequence of (4.26) together with (4.21).

Proof of lemma 4.6
We can write

$$\inf_{y\in\mathcal{S}}|1-\widehat{F}^x(y)| \le (1-\sup_{y\in\mathcal{S}}F^x(y))/2 \Rightarrow \sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}^x(y)-F^x(y)| \ge (1-\sup_{y\in\mathcal{S}}F^x(y))/2.$$

So that we arrive finally at

$$\mathbb{P}\{\inf_{y\in\mathcal{S}}|1-\widehat{F}^x(y)| < (1-\sup_{y\in\mathcal{S}}F^x(y))/2\} \le \mathbb{P}\{\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{F}^x(y)-F^x(y)| \ge (1-\sup_{y\in\mathcal{S}}F^x(y))/2\} < \infty.$$

It is enough to take, $\eta = (1-\sup_{y\in\mathcal{S}}F^x(y))/2$ and using the results of Lemmas 4.1, 4.2 and 4.4 allows us to finish the proof of this lemma.
Proof of Corollary 4.1
Taylor expansion of the function h^x leads to the existence of some θ^* between $\widehat{\theta}(x)$ and $\theta(x)$ such that :

$$h^x(\widehat{\theta}(x)) = h^x(\theta(x)) + (\widehat{\theta}(x)-\theta(x))^2\frac{h^{x''}(\theta^*)}{2!},$$

because of (4.11), θ^* it is necessarily in the compact $\mathcal{S}$. So

$$|\widehat{\theta}(x)-\theta(x)|^2 \le \frac{2!}{\min\limits_{y\in\mathcal{S}} h^{x''}(y)}|h^x(\widehat{\theta}(x)) - h^x(\theta(x))|$$

and using analytical arguments we show that

$$|h^x(\widehat{\theta}(x)) - h^x(\theta(x))| \le 2\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{h}^x(y)-h^x(y)|.$$

Hence

$$|\widehat{\theta}(x)-\theta(x)|^2 \le \frac{C}{\min\limits_{y\in\mathcal{S}} h^{x''}(y)}\sup_{y\in\mathcal{S}}|\widehat{h}^x(y)-h^x(y)|.$$

By Theorem 4.1, we show that

$$|\widehat{\theta}(x)-\theta(x)|^2 = O\left(h_K^{b_1}\right) + O\left(h_H^{b_2}\right) + O\left(\left(\frac{\log\widehat{\mathbf{n}}}{\widehat{\mathbf{n}}\, h_H\phi_x(h_K)}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

The proof of corollary is finished.

Bibliographie

[1] A. Baìllo, A. Grané, Local linear regression for functional predictor and scalar response. *Journal of Multivariate Analysis*, **100** (2009), 102-111.

[2] J. Barrientos-Marin, F. Ferraty, P. Vieu, Locally Modelled Regression and Functional Data. *Journal of Nonparametric Statistics*, 22, 5 (2010), 617-632.

[3] G. Biau, B. Cadre, Nonparametric spatial prediction. *Stat. Inference Stoch. Process.* **7** (2004), 327-349.

[4] M. Carbon, M. Hallin, L. T. Tran, Kernel density estimation for random fields. *Stat. Probab. Lett.*, **36** (1996), 115-125.

[5] A. Chouaf, A. Laksaci, On the functional local linear estimate for spatial regression. *Stat. Risk. Model.* **29**, 3 (2012), 189-214

[6] N. A. Cressie, *Statistics for spatial data.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York. 1991.

[7] J. Demongeot, A. Laksaci, F. Madani, M. Rachdi, Local linear estimation of the conditional density for functional data. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, **348** (2010), 931-934.

[8] P. Doukhan, *Mixing : Properties and examples.* Lecture Notes in Statistics. **85**. Springer-Verlag. New York. 1994.

[9] G. Estévez-Pérez, A. Quintela-del-Río, P. Vieu, Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples.*Journal of Statistical Planning and Inference* **104** (2002), 1-30.

[10] J. Fan, I. Gijbels, *Local Polynomial Modelling and its Applications.* London, Chapman & Hall. 1996.

[11] F. Ferraty, A. Laksaci, P. Vieu, Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Statistical Inference for Stochastic Processes.* **9** (2006), 47-76.

[12] F. Ferraty, A. Rabhi, P. Vieu, Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle.*REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.* **53**(2008), 1-18.

[13] F. Ferraty, P. Vieu, Nonparametric functional data analysis. Springer Series in Statistics, Springer New York, 2006.

[14] X. Guyon, *Random Fields on a Network-Modeling, Statistics and applications.* Springer, New York. 1995.

[15] M. Hallin, Z. Lu, and L.T. Tran, . Kernel density estimation for spatial processes : the L_1 theory, *J. of Mult. Anal.* **88** (2004a), 61-75.

[16] M. Hallin, Z. Lu, L. T. Tran, Local linear spatial regression. *Ann. Stat.* **32** (2004b), 2469-2500.

[17] M. Hallin, Z. Lu, K. Yu, Local linear spatial quantile regression, *Bernouilli.* **15** (2009), 659-686.

[18] A. Laksaci, F. Maref, Estimation non paramétrique de quantiles conditionnels pour des variables fonctionnelles spatialement dépendantes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **347** (2009), 1075-1080.

[19] A. Laksaci, B. Mechab, Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales.*REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.* **55** (2010), 1, 35-51.

[20] A. Laksaci, B. Mechab, Conditional hazard estimate for functional random fields. *Journal of Statistical Theory and Practice.* 8,2 (2014), 192-200.

[21] A. Laksaci, M. Rachdi, S. Rahmani, Spatial modelization : Local linear estimation of the conditional distribution for functional data. *Spatial Statistics.* 6 (2013) 1-23.

[22] J. P. Lecoutre, E. Ould-Said, Estimation de la densité et de la fonction de hasard conditionnelle pour un processus fortement mélangeant avec censure. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences Paris.* **314** (1992), 295-300.

[23] J. Li, L. T. Tran, Hazard rate estimation on random fields. *Journal of Multivariate analysis.* **98** (2007), 1337-1355.

[24] A. Quintela-del-Río, Nonparametric estimation of the maximum hazard under dependence conditions. *Statistics and Probability Letters.* **76** (2006), 1117-1124.

[25] A. Quintela-del-Río, Hazard function given a functional variable : Nonparametric estimation under strong mixing conditions. *Journal of Nonparametric Statistics.* **20** (2008), 413-430.

[26] J. O. Ramsay, B. W. Silverman, Applied functional data analysis ; Methods and case studies. Springer-Verlag, New York, 2002.

[27] G. Roussas, Hazard rate estimation under dependence conditions. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **22** (1989), 81-93.

[28] L. T. Tran, Kernel density estimation on random fields.*Journal of Multivariate analysis.* **34** (1990), 37-53.

[29] G. S. Watson, M. R. Leadbetter, Hazard analysis, Sankhyia **26** (1964), 101-116.

Chapitre 5

Simulation

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents à des données simulées. Plus précisément, l'objectif principal est de montrer la performance de notre estimateur et qu'il admet de bonne propriétés par rapport à la méthode du noyau. Ce chapitre est présenté en deux sections, la première section est consacrée à la description des données traitées. Tandis que, les résultats numériques sont donnés et commentés dans la deuxième section.

5.1 Données

Dans cette section, une simulation simple est présentée pour illustrer performance de notre estimateur sur des échantillons finis, nous générons $n = 100$ données fonctionnelles (voir Fig.5.1), par

$$X_i(t) = \cos(W_i(t)), \text{pour tout, } t \in [0, \pi] \text{ et } i = 1, ..., n$$

où les variables aléatoires W_i sont i.i.d. et suivent la distribution de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Les courbes sont discrétisées sur la même grille qui est composée de 100 valeurs équidistantes dans $(0, \pi)$.
Ensuite, nous générons la variable de réponse réelle Y par :

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon,$$

où la variable aléatoire ε suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$m(x) = 4 \exp\left(\frac{1}{1 + \int_0^\pi |x(t)|^2 dt}\right).$$

L'objectif principal de cet exemple de simulation est de montrer que l'approche locale linéaire est facilement implémentée par un algorithme rapide sur des échantillons finis, en particulier pour l'analyse de prédiction. Remarquez que cela est étroitement lié aux choix pratiques des fonctions de localisation (β et δ) et des paramètres de lissage (h_K et h_H). Il doit être évident que nous ne visons pas ici à trouver le choix optimal de ces paramètres, mais seulement à montrer qu'ils peuvent prendre plusieurs formes ou valeurs. C'est pourquoi nous testons l'efficacité de notre procédure sur deux exemples de paramètres de localisation avec un choix optimal des paramètres de lissage par une adaptation de la méthode de validation croisée.

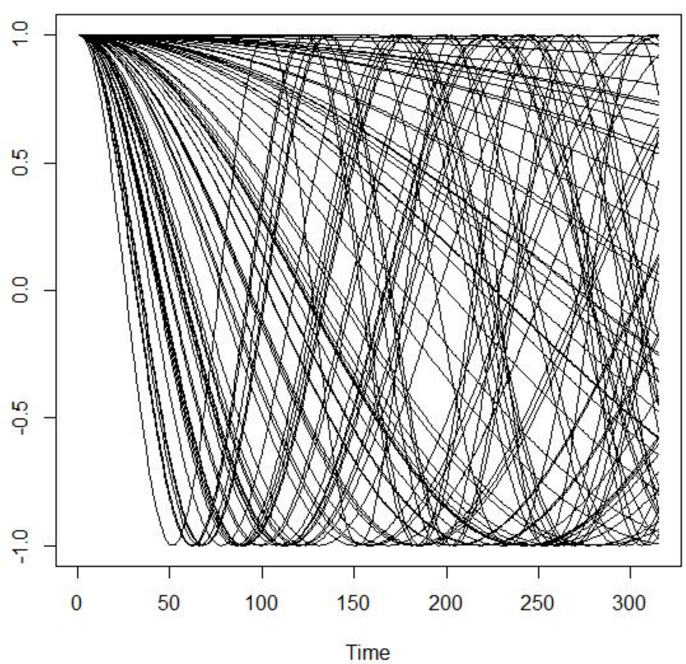

Fig.5.1 Les courbes X_i

Les fonctions de localisation : Remarquons d'abord que notre étude théorique offre une grande souplesse dans le choix des techniques permettant d'obtenir correctement les opérateurs β et δ. La méthode est basée sur le modèle fonctionnel simple (voir Barrientos-Marin et al., 2010).

5.2 Résultats

L'objectif de cette illustration est de montrer l'utilité de la function de hasard conditionnelle dans un contexte de prévision.

$$\widehat{h}^x(y) = \frac{\widehat{f}^x(y)}{1 - \widehat{F}^x(y)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Pour ce dernier, nous estimons la fonction de répartition par la méthode locale linéaire (L.L.M) :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{1 \le i,j \le n} W_{ij}(x) H({h_H}^{-1}(y - Y_j))}{\sum_{1 \le i,j \le n} W_{ij}(x)}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

d'autre part, la fonction de densité est comme suit

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\sum_{1 \le i,j \le n} W_{ij}(x) H'({h_H}^{-1}(y - Y_j))}{h_H \sum_{1 \le i,j \le n} W_{ij}(x)}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

oú
$W_{ij}(x) = \beta_i(\beta_i - \beta_j) K(h_K^{-1}\delta(x, X_i)) K(h_K^{-1}\delta(x, X_j))$ et $\beta_i = \beta(X_i, x)$
et la convention $0/0 = 0$.

Concernant la méthode d'estimation à noyau (K.M). En effet, l'estimateur utilisé pour la fonction de répartition :

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{1 \le i,j \le n} K(h_K^{-1} d(x, X_i)) H({h_H}^{-1}(y - Y_j))}{\sum_{1 \le i,j \le n} K(h_K^{-1} d(x, X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

de plus, pour la fonction de densité

$$\widehat{f}^x(y) = \frac{\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} K(h_K^{-1}d(x,X_i))H'(h_H{}^{-1}(y-Y_j))}{h_H \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} K(h_K^{-1}d(x,X_i))}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Maintenant, on présente les résultats, dont on trace le graphe de la fonction de hasard conditionnelle estimée par la méthode du noyau et on le compare au graphe de la fonction de hasard conditionnelle estimée par la méthode locale linéaire. Pour comparer ces derniers au graphe de la vraie fonction de hasard conditionnelle. les résultats sont illustrés dans la figure.5.2 ci-dessous.

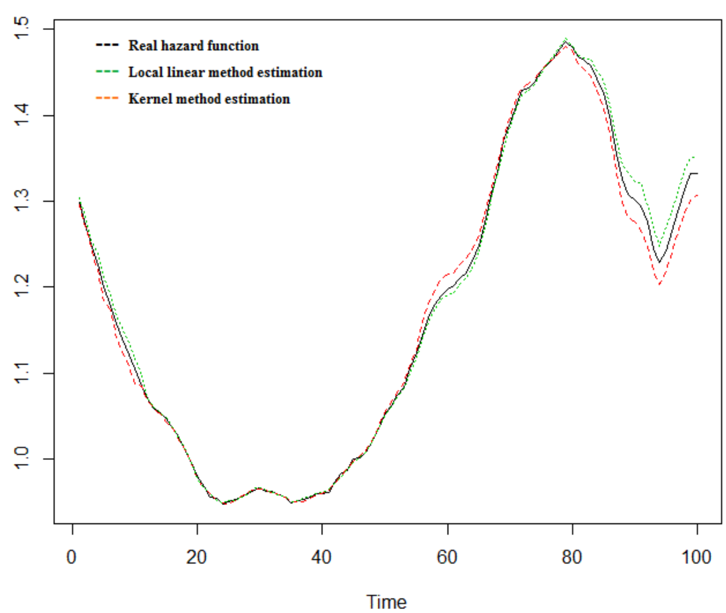

Fig.5.2 Comparison between estimation methods

Dans le but de vérfier l'efficacité de notre méthode d'estimation dans un contexte de prévision, on compare dans le tableau suivant l'erreur absolue des deux modèles d'estimations selon notre échantillon et qui est donnée par :

$$AE = |\text{vraie valeur} - \text{valeur estimée}|$$

Number of sample	AE (L.L.M)$\times 10^3$	AE (K.M)$\times 10^3$
10	11.9	15.1
20	1.6	1.9
40	0.7	1.3
60	6.2	17.4
80	0.6	4.8
100	19.1	25.4

De plus, la figure.5.3 présente la simulation graphique des erreurs absolues dans un contexte de comparaison entre les deux méthodes d'éstimation

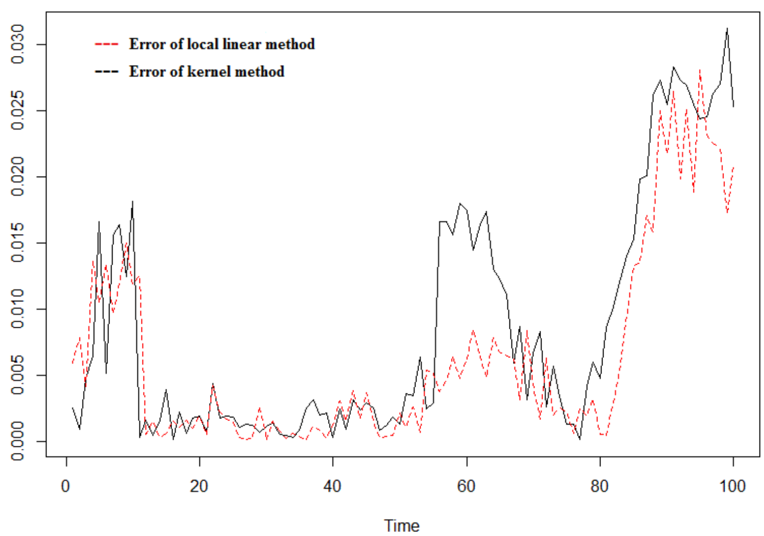

Fig.5.3 Comparison of errors between estimation methods

Conclusion et Perspectives

1. Conclusion

Cette contribution porte sur l'estimation non paramétrique de la fonction de hasard conditionnelle dans la présence d'une variable explicative fonctionnelle, dont nous avons considéré un estimateur par l'approche locale linéaire qui est une généralisation de la méthode introduite par Fan et Gijbels en 1996. Comme résultats asymptotiques nous avons établi la convergence presque complète et nous avons donné l'expression asymptotiquement exacte de l'erreur quadratique de cet estimateur dans un cadre fonctionnel non-spatial. Par suite, dans le cas des données spatiales nous avons établi la vitesse de convergence presque complète ponctuelle de notre estimateur construit. Il est clair que nos résultats théoriques obtenus couvrent tous les différents types de convergence stochastique comme il s'agit d'une convergence presque complète qui est la plus forte des convergences. De plus, notre estimateur possède de bonnes propriétés asymptotiques dans tous les cas de notre étude. Ainsi, l'aspect non paramétrique est bien exploité dans ce travail par les hypothèses précédentes. Concernant les hypothèses, on peut les diviser en trois catégories, des hypothèses structurales, des hypothèses sur la variable explicative et des hypothèses techniques. Nos vitesses de convergence sont en deux parties : partie biais et partie dispersion. On trouvera les conditions sur la dimensionnalité du modèle dans la partie biais. Tandis que, la dimensionnalité de la variable explicative est juste dans la partie dispersion.

2. Perspectives

Les méthodes d'estimation non paramétrique ont été proposés comme alternative à la méthode de prévision. Cependant, les résultats théoriques de l'estimation (à noyau et/ou locale linéaire) sont montrés et utilisés dans le domaine de statistique, mais reste encore beaucoup d'étude à faire, nous proposons quelques questions ouvertes qui restent à développer pour de futures recherches.

– Tout d'abord, nous procédons actuellement à la finalisation d'un travail de recherche sur l'erreur quadratique d'un éstimateur de la fonction de hasard conditionnelle par la méthode locale linéaire.

– Tous les résultats obtenus dans cette thèse reposent sur l'hypothèse que les observations sont α-mélangeantes. Il pourrait être possible de considérer d'autre type de dépendance tel que le quasi-associé.

– Le travail sur les données incomplètes en présence d'une variable explicative fonctionnelle n'est pas encore abordé, ce qui nous permettra d'adapter nos résultats pour le cas de missing at random pour la variable réponse.

– L'importance du choix de la semi métrique et le paramètre de lissage pour améliorer les vitesses de convergence et optimiser les intervalles de confiance respectivement, nous poussera à généraliser les résultats existants en utilisant d'autres familles de semi métriques et l'étude du choix de la fenêtre de lissage.

– Il sera important de traiter la normalité asymptotique de notre estimateur pour motiver la partie pratique (simulation) en considérant des intervalles de confiance.

Bibliographie Générale

Bibliographie

[1] Ahmedou, A., Marion, J.M. and Pumo, B. Generalized linear model with functional predictors and their derivatives. (2015) *J. Multivariate Anal.*

[2] Aneiros-Pérez, G. and Vieu, P. Nonparametric time series prediction : a semi-functional partial linear modelling. (2008) *J. Multivariate Anal.* **99 (5)** 834-857.

[3] Baìllo, A. and Grané, A. (2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response. *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 102-111.

[4] Barrientos-Marin, J., F. Ferraty, F and Vieu, P. (2010) Locally modelled regression and functional data. *Journal of Nonparametric Statistics*, **22(5)**, 617-632.

[5] G. Biau, B. Cadre, Nonparametric spatial prediction. *Stat. Inference Stoch. Process.* **7** (2004), 327-349.

[6] Boj, E., Delicado, P. and Fortiana, J.(2010). Distance-based local linear regression for functional predictors. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 429-437.

[7] Bongiorno, E., Goia, A., Salinelli, E. and Vieu, P. (2014). Contributions in infinite-dimensional statistics and related topics, Esculapio, Bologna.

[8] Bosq, D., Lecoutre, J.P (1987) . Théorie de l'estimation fonnctionnelle. *Economica.*

[9] Bosq, D. (2000). *Linear Processes in Function Spaces : Theory and applications.* Lecture Notes in Statistics. **149**, Springer.

[10] Bosq, D. and Blanke, D. Inference and Prediction in Large Dimensions. (2007) *Wiley Series in Probability and Statistics* John Wiley & Sons, 617-632.

[11] M. Carbon, M. Hallin, L. T. Tran, Kernel density estimation for random fields. *Stat. Probab. Lett.*, **36** (1996), 115-125.

[12] Chen, D., Hall, P. and Müller, H.G. (2011) Single and multiple index functional regression models with nonparametric link, *Ann. Statist.* **39 (3)**, 1720-1747.

[13] Chouaf, A. (2015) Modelization local linear regression for Functional random variables. *International Journal of Statistics & Economics*, **16**, 54-68.

[14] Chouaf, A. and Laksaci, A. (2012). On the functional local linear estimate for spatial regression. *Stat. Risk. Model.* **29**, 3, 189-214.

[15] Cholaquidis, A., Fraiman, R., Kalemkerian, J. and Llop, P. (2015). An nonlinear aggregation type classifyer, *J. Multivariate Anal.*

[16] Cressie, N. A. (1991). *Statistics for spatial data.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York.

[17] Cuevas, A. (2014). A partial overview of the theory of statistics with functional data. *J. Statist. Plann. Inference* **147**, 1-23.

[18] Dabo-Niang, S. (2002). Estimation de la densité dans un espace de dimension infinie : Application aux diffusions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **334**, 213-216.

[19] Dabo-Niang, S. (2004). Kernel density estimator in an infnite dimensional space with a rate of convergence in the case of diffusion process. *Applied Math. Lett.*,**17**, 381-386.

[20] Dabo-Niang, S. and Laksaci, A. (2007). Propriétés asymptotiques d'un estimateur à noyau du mode conditionnel pour variable explicative fonctionnelle. (French) [Asymptotic properties of the kernel estimator of the conditional mode when the regressor is functional]. *Ann. I.S.U.P.* **51** , 27-42.

[21] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2010). Local linear estimation of the conditional density for functional data. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, **348**, 931-934.

[22] Demongeot, J. , Laksaci, A. , Madani, F. and Rachdi, M. (2012). Functional data : Local linear estimation of the conditional density and its application *Statistics C. R., Math.*, Acad. Sci. Paris, **348** 931-934.

[23] Demongeot, J., Laksaci, A.,Rachdi, M. and Rahmani, S., On the Local Linear Modelization of the Conditional Distribution for Functional Data. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics.* 76-A(2) (2014) 328-355.

[24] Doukhan, P. (1994).*Mixing : Properties and examples.* Lecture Notes in Statistics. **85**. Springer-Verlag. New York.

[25] Estévez-Pérez, G., Quintela-del-Río, A. and Vieu, P., Convergence rate for cross-validatory bandwidth in kernel hazard estimation from dependent samples.*Journal of Statistical Planning and Inference* **104** (2002), 1-30.

[26] Fan, J. (1992). Design-adaptative nonparametric regression. *Journal of the American Statistical association*, **87**, 998-1004.

[27] Fan, J. and Gijbels, I. (1996). Local Polynomial Modelling and its Applications. *Monographs on Statistics and Applied Probability 66*,Chapman& Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN, UK.

[28] Ferraty, F., Vieu, P. (2000). Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés.*C. R. Acad. Sci.*, Paris,**330**, 139-142.

[29] Ferraty, F. and Vieu, P. (2002). The functional nonparametric model and application to spectrometric data.*Comput. Statist. and Data Anal.* **17**, 545-564.

[30] Ferraty, F. and Vieu, P. (2003). Curves discrimination : a nonparametric functional approach. *Comput. Statist. and Data Anal.* **44**, 161-173.

[31] Ferraty, F. and Vieu, P. (2004). Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination. *J. Nonparametric Statist.* **16**, 111-127.

[32] Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. (2005). Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic El Niño phenomenon. *Sankhya.* **67** , 378-398.

[33] Ferraty, F., Laksaci, A. and Vieu, P.(2006). Estimation some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat Inference Stoch. Process.* **9**, 47-76.

[34] Ferraty, F., Mas, A. and Vieu, P. (2007). Advances in nonparametric regression for functional variables. *Aust. and New Zeal. J. of Statist.* **49**, 1-20.

[35] Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. (2008). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **53**, 1-18.

[36] Ferraty, F. and Vieu, P. (2006). *Nonparametric functional data analysis. Theory and Practice.* Springer Series in Statistics. Springer. New York.

[37] Ferraty, F., Laksaci, A., Tadj, A. and Vieu, P. (2010). Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J. Statist. Plann. Inference.* **140**, 335-352.

[38] Ferraty, F., Romain, Y. (2011). The Oxford handbook of functional data analysis. *Oxford University Press.*

[39] Ferraty, F., Goia, A., Salinelli, E. and Vieu, P. (2013). Functional projection pursuit regression, Test **22**, 293-320.

[40] Ferraty, F. and Vieu, P. (2009). Additive prediction and boosting for functional data. *Computat. Statist. Data Anal.* **53**, 1400-1413.

[41] Florens, J. P., Larribeau, S. and Mouchart, M. (1994). Bayesian Encompassing Tests of a Unit Root Hypothesis. *Econometric Theory.* **10**, 747-763.

[42] Gasser, T., Hall, P. and Presnell, B. (1998). Nonparametric estimation of the mode of a distribution of random curves. *J. R. Stat. Soc.Ser. B, Stat. Methodol.* **60**, 681-691.

[43] Goia, A. and Vieu, P. (2014). Some advances in semiparametric functional data modelling. *Contributions in infinite-dimensional statistics and related topics*, Esculapio, Bologna, 135-141.

[44] Guyon, X. *Random Fields on a Network-Modeling, Statistics and applications.* Springer, New York. 1995.

[45] Hafen, R. P. (2010). *Local regression models : Advancements, applications, and new methods.* Thesis (Ph.D.).

[46] Hallin, M., Lu, Z. and Tran, L. T., . Kernel density estimation for spatial processes : the L_1 theory, *J. of Mult. Anal.* **88** (2004a), 61-75.

[47] Hallin, M., Lu, Z. and Tran, L. T., Local linear spatial regression. *Ann. Stat.* **32** (2004b), 2469-2500.

[48] Hallin, M., Lu, Z. and Yu, K., Local linear spatial quantile regression, *Bernouilli.* **15** (2009), 659-686.

[49] Horváth, L. and Rice, G. (2015). An introduction to functional data analysis and a principal component approach for testing the equality of mean curves. *Rev. Mat. Complut.* **28 (3)**, 505-548.

[50] Hsing, T., Eubank, R. (2015). Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with An Introduction to Linear Operators, *Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons*, Chichester.

[51] Irizarry, R. A. (2001). Local Regression With Meaningful Parameters Local Regression With Meaningful Parameters. *The American Statistician* Volume 55, Issue **1**, 72-79.

[52] Laksaci, A. (2007). Erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle à variable explicative

fonctionnelle. (French) [Quadratic error of the kernel estimator of conditional density when the regressor is functional.] *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **345**, 171-175.

[53] Laksaci, A. and Maref, F. (2009). Estimation non paramétrique de quantiles conditionnels pour des variables fonctionnelles spatialement dépendantes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **347**, 1075-1080.

[54] Laksaci, A. and Mechab, B. (2010). Estimation non-paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle : cas des données spatiales. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **55**, 35-51.

[55] Laksaci, A., Rachdi, M. and Rahmani, S. (2013). Spatial modelization : Local linear estimation of the conditional distribution for functional data. *Spatial Statistics.* 6, 1-23.

[56] Laksaci, A. and Mechab, B. (2014). Conditional hazard estimate for functional random fields. *Journal of Statistical Theory and Practice.* 8, 2, 192-200.

[57] Lancaster, T. (1990). *The econometric analysis of the transition data.* Cambridge University Press.

[58] Loader, C. (2004). Smoothing : local regression techniques. *Handbook of computational statistics*, 539-563, Springer, Berlin.

[59] Lecoutre,J. P., E. Ould-Said, Estimation de la densité et de la fonction de hasard conditionnelle pour un processus fortement mélangeant avec censure. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences Paris.* **314** (1992), 295-300.

[60] Li, J. and Tran, L. T. Hazard rate estimation on random fields. *Journal of Multivariate analysis.* **98** (2007), 1337-1355.

[61] Masry, E. (2005). Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality. *Stoch. Proc. and their Appl.*,**115**, 155-177.

[62] Müller, H.G. (2005). Functional modelling and classification of longitudinal data. *Scand. J. Stat.* **3**, 223-240.

[63] NAKHAPETYAN, B. S. (1987). AN APPROACH TO THE PROOF OF LIMIT THEOREMS FOR DEPENDENT RANDOM VARIABLES. *Theory of Probab. and its Appl.* **32**, 535-539.

[64] PASCU, M. AND VADUVA, I. (2003). NONPARAMETER ESTIMATION OF THE HAZARD RATE, A SURVEY. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **48**, 173-191.

[65] QUINTELA-DEL-RÍO, A. (2006). NONPARAMETRIC ESTIMATION OF THE MAXIMUM HAZARD UNDER DEPENDENCE CONDITIONS. *Statist. Probab. Lett.* **76**, 1117-1124.

[66] QUINTELA-DEL-RÍO, A. (2008). HAZARD FUNCTION GIVEN A FUNCTIONAL VARIABLE : NON-PARAMETRIC ESTIMATION UNDER STRONG MIXING CONDITIONS.*J. Nonparametr. Stat.* **20**, 413-430.

[67] QUINTELA-DEL-RÍO, A. AND VIEU, P. (1997). A NONPARAMETRIC CONDITIONAL MODE ESTIMATE. *J. Nonparametr. Statist.* **8**, 253-266.

[68] RACHDI, M., LAKSACI, A., DEMONGEOT, J., ABDALI, A. AND MADANI, F., THEORETICAL AND PRACTICAL ASPECTS OF THE QUADRATIC ERROR IN THE LOCAL LINEAR ESTIMATION OF THE CONDITIONAL DENSITY FOR FUNCTIONAL DATA. *Computational Statistics and Data Analysis*, **73** (2014), 53Ű68.

[69] RAMSAY J, SILVERMAN B (1997). FUNCTIONAL DATA ANALYSIS. *Springer.*

[70] RAMSAY, J. AND SILVERMAN, B. (2002). *Applied Functional Data Analysis. Methods and Case Studies, Springer Series in Statistics, Springer*, NEW YORK.

[71] RAMSAY, J. AND SILVERMAN, B. (2005). *Springer Series in Statistics. Springer*, NEW YORK.

[72] ROUSSAS, G. (1989) HAZARD RATE ESTIMATION UNDER DEPENDENCE CONDITIONS. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **22**, 81-93.

[73] TRAN, L. T. (1990). KERNEL DENSITY ESTIMATION ON RANDOM FIELDS.*Journal of Multivariate analysis.* **34**, 37-53.

[74] Tran, L. T. and Yakowitz, S. (1993). Nearest neighbor estimators for random fields. *J. of Mult. Anal.* **44**, 23-46.

[75] Vieu, P. (1991). Quadratic errors for nonparametric estimates under dependence. *Journal of Multivariate Analysis.* **39**, 324-347.

[76] Watson, G. S. and Leadbetter, M. R. (1964a). Hazard analysis. I. *Biometrika.* **51**, 175-184.

[77] Watson, G. S. and Leadbetter, M. R. (1964b). Hazard analysis, *Sankhyia* **26**, 101-116.

[78] Youndjé, E. (1993). Estimation non-paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau. Thèse 3eme cycle, Université de Rouen.

[79] Youndjé, E., Sarda, P. and Vieu, P. (1996). Optimal smooth hazard estimates. Test 5, **2**, 379-394.