

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILLALI LIABES

SIDI BEL ABBES

Laboratoire SMAGCTP



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLIC

**THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE**

Option : Structures & Matériaux

Présentée par

**Mr : MEKSI Ali**

Intitulé de la thèse

# **Etude Du Comportement Mécanique Des Structures Composites à Section Variables**

Composition du jury :

<b>Président</b>	<b>TOUNSI Abdelouahed</b>	<b>Pr</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Directeur de thèse</b>	<b>BELAKHDAR Khalil</b>	<b>Pr</b>	<b>CU DE TAMANRASSAT</b>
<b>Co-Directeur de thèse</b>	<b>BACHIR BOUIDJRA Mohamed</b>	<b>Pr</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Examineur</b>	<b>BOURADA Mohamed</b>	<b>MCA</b>	<b>UDL SBA</b>
<b>Examineur</b>	<b>MCA YEGHNEM Redha</b>	<b>MCA</b>	<b>U DE SAIDA</b>
<b>Examineur</b>	<b>AMARA Khaled</b>	<b>Pr</b>	<b>CU D'AIN TEMOUCHENT</b>

**Année universitaire 2017-2018**



### Remerciement

Je remercie tout particulièrement Monsieur BELAKHDAR Khalil et Monsieur BACHIR BOUIDJRA Mohamed d'avoir dirigé ma thèse avec beaucoup d'efforts et de patience. Ses qualités pédagogiques remarquables m'ont permis de profiter de ses connaissances et ont contribué à l'avancement de mon travail en ne négligeant ni ses conseils avisés et ni ses critiques constructives. Je remercie également BOUGUENINA Otbi qui a toujours su manifester son grand intérêt pour ce travail. Son soutien moral et ses encouragements ont été pour moi d'une grande importance dans le développement de cette recherche. Grâce à ses qualités scientifiques, il m'a donné l'envie d'aller plus loin et de connaître la richesse du métier d'Enseignant chercheur. Mes remerciements vont également à Messieurs les Professeurs BOURADA Mohamed, YEGHNEM Redha et AMARA Khaled, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et dont les remarques et commentaires m'ont permis de corriger certaines erreurs et d'améliorer la compréhension de ce mémoire. Monsieur Professeur TOUNSI Abdelouahed, président du jury de thèse, a accepté de me consacrer son temps en examinant le manuscrit.

J'en suis honoré et je lui exprime toute ma profonde reconnaissance. Je voudrais aussi remercier Monsieur ADDA BEDIA El Abbas qui avait dirigé le LMH (laboratoire des Matériaux et Hydrologie (LMH)) ainsi que BOURADA Mohamed, directeur actuel du laboratoire, j'adresse mes remerciements à membres de SMAGCTP (laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics) et encore à Monsieur BACHIR BOUIDJRA Mohamed directeur actuel de ce laboratoire, de m'y avoir accueilli chaleureusement avec les meilleures conditions de travail. Par ailleurs, je tiens également à adresser mes sincères remerciements aux personnes non encore citées dont les permanents, les anciens et futurs docteurs ainsi que les administrateurs pour leur soutien mutuel, leurs encouragements, leurs savoirs scientifiques et leurs échanges amicaux pendant ces cinq années de dur labeur. Pour tous mes amis qui m'ont apporté leur soutien moral pendant ces années d'études, je les en remercie sincèrement. Enfin, un très grand MERCI à toute ma famille qui m'a gratifié de son amour et fourni les motivations qui ont permis l'aboutissement de mes entreprises. Je leur adresse toute ma gratitude du fond du cœur.

## الملخص

ان المواصفات لعنصر من الهياكل (البنية) التي تعبر بدورها عن وطائف يجب الوفاء بها وفي الدور التي تلعبه : يجب ان تكون خفيفة وزن , مقاومة للتشوه و درجة الحرارة العالية , لها اسطح مناسبة للتجميع (الاندماج الجيد) ومقاومة للصدأ. تعتبر معرفة المواد التي يتم تحديدها من خلال النماذج والخصائص السلوكية خطوة ضرورية وأوليه لأي مشكل محدد. يتطلب الامر مراعاة ثلاث مجالات : التركيبه والبنية المجهرية , الخصائص الميكانيكية , الخصائص الهندسية , يجب ربط هذه المجالات بعقلانية حيث يهتم علم المواد بالربط بين المجالين الاوليين كما ان هندسة الهياكل تسعى الى متطلبات التصميم .

الهدف من هذه الدراسة هو الحصول هلى متطلبات معينة لعناصر هيكلية , علاوة على ذلك دراسة صفيحة ذات مقطع عرضي متغير , وهذه المعاينة مكرسة لدراسة الانبعاج الميكانيكي لصفائح ذات خصائص مادية متغيرة والتي تتميز بسطح مقعر ومعرضة لمختلف قوى على مستوى الحواف , والتي عرضت بشكل جيد في هذا البحث .

تشتق المعادلة التحليلية ومن تم يتم حل المعادلة التفاضلية للتوازن رقميا باستخدام طريقة الفرق المحدد , يتم ادراج معادلة خاصة لمتابعة تغيرات السمك حيث تتحكم هذه المعادلة في التغير المكافئ للسمك الصفيحة من دون تغير الحجم الاصيلي للمادة .

تشير النتائج الى ان معدل هبوط في مقاومة الانبعاج سببه الاختلاف في السمك , يعتمد هذا الهبوط بشدة على الخصائص الهندسية للصفحة دون ان يتأثر بخصائص المادة وتدرج المواد المكونه , يتم دراسة مدى تأثير خصائص المادة والخصائص الهندسية على هبوط معدل مقاومة للانبعاج والتي يمكن ان تساعد في التصميم المبدئي لمثل هذه العناصر المعقدة

**الكلمات مفتاحية:** الصفائح المتدرجة وظيفيا ذات سمك متغير , الانبعاج الميكانيكي , معاينة الاستقرار , الطريقة العددية , القطع المكافئ المقعر .

## Résumé

Les spécifications d'un élément de structure expriment les fonctions à remplir, le rôle à jouer : être légères, « résister » à la déformation, à la température, avoir des surfaces adaptées à un bon contact, la résistance à la corrosion...

La connaissance des matériaux, rendue objective par des modèles et des caractéristiques de comportement, est une étape nécessaire préalable à tout problème de choix. Elle nécessite de prendre en considération trois champs : la composition et la microstructure, les propriétés mécaniques, et les géométries ; et de relier ces champs de façon rationnelle, la science des matériaux s'intéresse aux liens entre les deux premiers, le génie des structures cherche à rendre compte des exigences de la conception.

L'objectif de ce travail avoir à une certaine exigence structurelle en plus l'utilité sur l'étude d'une plaque de section transversale variable. Cette étude numérique consacrée sur la résistance au flambement mécanique des plaques FGM qu'elle ayant une variation d'épaisseur parabolique-concave qu'il exposée à une charge dans le plan est bien présenté dans ce travail de recherche.

Une équation analytique est dérivée, en suite l'équation différentielle de stabilité est résolue numériquement en utilisant la méthode des différences finies. Une fonction spécifique de variation d'épaisseur est introduite, où cette fonction contrôle l'intensité de la variation parabolique de l'épaisseur de la plaque sans changer le volume de matériau d'origine. Les résultats indiquent que le taux de perte dans la résistance au flambage dû à la variation d'épaisseur parabolique-concave, dépend fortement des propriétés géométriques de la plaque, sans être affecté ni par les propriétés du matériau ni par le profil de distribution des matériaux constitutifs. L'influence des paramètres matériels et géométriques sur la chute de la résistance au flambement est étudiée, ce qui peut aider à la conception de lignes directrices pour de telles structures complexes.

**Mots-clés** : plaque FGM d'épaisseur variable ; flambement mécanique ; analyse de la stabilité ; différences finies ; méthode numérique ; parabolique-concave.

## **Abstract**

The characteristics of the structural element express the functions to be fulfilled, the role to be played: to be light, to "resist" the deformation, to the temperature, to have surfaces adapted to a good contact, the resistance to corrosion, etc.

The knowledge of the materials made objectivity by models, and characteristics of behavior, is a necessary step preliminary to any problem of choice. It requires consideration of three fields: composition and microstructure, mechanical properties and geometries; and to have connection with those fields in a rational way, the science of materials is interested in the links between the previously once, the structural engineering seeks to account for the requirements of the design.

The objective of this work is to have a certain structural requirement with similarity to the utility on the study of a plate of the variable cross section. This numerical investigation on the buckling resistance of FGM plates having parabolic-concave thickness variation exposed to in-plane loading is presented in this piece of research work. An analytical formulation is derived, and the governing differential equation of stability is solved numerically using finite difference method. A specific function of thickness variation is introduced, where this function controls the parabolic variation intensity of the plate thickness without changing its original material volume. The results indicated that the loss ratio in the buckling resistance due to the parabolic-concave thickness variation is highly dependent on the geometrical properties of the plate while it is not affected by neither the material properties nor the distribution profile of the constituent materials. Influencing material and geometrical parameters on the degradation of the buckling resistance are investigated which may help in design guidelines of such complex structures.

**Keywords:** FGM plate with variable thickness; mechanical buckling; stability analysis; finite difference; numerical method, parabolic concave.

Table des matières

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCE .....	1
Remerciement .....	I
الملخص .....	II
Résumé.....	III
Abstract .....	IV
Table des matières.....	V
Liste des Figures .....	VIII
Liste des Tableaux .....	X
Liste des Notations.....	XI
Liste des abréviations.....	XIII
Introduction Générale .....	1
Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composites.....	6
I.1. Introduction.....	6
I.2. Qu'appelle-t-on matériaux composites ? .....	6
I.3. Intérêt des composites.....	7
I.4. Les constituants de base d'un matériau composite .....	9
I.4.1. Matrices .....	9
I.4.2. Charges et additifs.....	9
I.4.3. Renforts.....	10
I.4.3.1. Fibres de verre.....	10
I.4.3.2. Fibres de carbone .....	10
I.4.3.3. Fibres aramides : appelées aussi kevlar .....	11
I.4.3.4. Fibres céramiques .....	11
I.5. Structures composites stratifiées.....	12
I.6. Structures sandwich .....	12
I.7. Exemples d'intégration des matériaux composites.....	13
I.7.1. Les composites dans les ouvrages du génie civil .....	13
I.7.2. Les composites dans les équipements de sports et loisirs .....	13
I.7.3. Les composites et la construction nautique.....	14
I.7.4. Les composites dans l'automobile .....	14
I.7.5. Les composites dans l'aéronautique .....	15
I.7.6. Les composites et la construction industrielle .....	15

## Table des Matières

---

I.7.7.    Les composites dans le ferroviaire.....	15
I.8.    Qualités générales des matériaux composites.....	16
I.9.    Conclusion .....	16
Chapitre II : Généralité Sur Les Matériaux en FGM .....	17
II.1.    Introduction.....	17
II.2.    Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés.....	18
II.3.    Fabrication et Méthodes D'élaboration des FGM .....	20
II.3.1.    Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	20
II.3.2.    Coulage en bande (Tape casting).....	21
II.3.3.    Compactage des couches (poudre d'empilement).....	21
II.3.4.    Coulée par centrifugation.....	22
II.3.5.    Projection plasma.....	22
II.3.6.    Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....	23
II.3.7.    Dépôt chimique en phase vapeur (CVD) .....	24
II.3.8.    Dépôt par électrophorèse .....	26
II.4.    Application des Matériaux FGM .....	27
II.5.    Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....	28
II.6.    Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM.....	30
II.6.1.    Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	31
II.6.2.    Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	32
II.6.3.    Propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	33
II.7.    Conclusion .....	34
Chapitre III : Théorie Des Plaques A Gradient Fonctionnel.....	35
III.1.    Introduction.....	35
III.2.    Définition d'une plaque .....	36
III.3.    Les modèles analytiques des plaques (ESL : Equivalent-Single-Layer) .....	36
III.3.4.    La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	36
III.3.5.    La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT).....	37
III.3.6.    La théorie de troisième ordre de Reddy (TSDT) .....	39
III.3.7.    La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	40
III.4.    Revue des travaux antérieurs sur les F.G.M .....	43
III.4.1.    Modèle CPT .....	43
III.4.2.    Modèle FSDT.....	44
III.4.3.    Modèle TSDT .....	46
III.4.4.    Modèle HSDT .....	47



III.4.4.1. Modèles à base de fonctions polynomiales.....	47
III.4.4.2. Modèles à base de fonctions non polynomiales.....	48
III.5. Conclusion.....	49
Chapitre IV : Analyse Du Flambement Mécanique Des Plaques Rectangulaire P-FGM Avec Epaisseur Constant Par La Méthode Des Différences Finies .....	50
IV.1. Introduction.....	50
IV.2. Définition d'un plaque en FGM.....	50
IV.2.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	50
IV.2.2. Configuration géométrique de la plaque FGM proposée.....	52
IV.3. La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre .....	53
IV.3.1. Le champ de déplacements .....	53
IV.3.2. Champs de déformations et de contraintes .....	53
IV.3.3. Prise en compte du cisaillement transverse (facteur de correction).....	54
IV.3.4. Équations des efforts et des moments .....	55
IV.3.5. Détermination des équations d'équilibre du système.....	56
IV.4. La Méthode des Différences Finies (MDF) .....	59
IV.4.1. Principe de la méthode des différences finies.....	59
IV.4.2. Application de la méthode des différences finies à l'analyse des plaques.....	61
IV.4.3. Solution de l'équation différentielle .....	62
IV.4.4. Evaluation de $P_{cr}$ .....	66
IV.5. Validation de la méthode des différences finies .....	67
IV.6. Conclusion .....	69
Chapitre V : Analyse Du Flambement Mécanique Des Plaques Rectangulaire P-FGM Avec Epaisseur Parabolique Par La Méthode Des Différence Finie .....	70
V.1. Introduction.....	70
V.2. Problème associé.....	72
V.2.1. Variation d'épaisseur dans une selle direction.....	72
V.2.2. Variation d'épaisseur dans une deux direction .....	74
V.2.3. Considérations sur les différences finies.....	75
V.3. Résultats et discussion .....	75
V.4. Conclusion .....	81
Conclusion générale.....	82
Bibliographie.....	82

## Liste des Figures

### Chapitre I

<b>Figure I. 1</b> Composition d'un matériau composite.....	7
<b>Figure I. 2</b> Raisons de l'introduction des composites.....	8
<b>Figure I.3</b> Types de matrice .....	9
<b>Figure I.4</b> Types de renfort .....	10
<b>Figure I.5</b> procédé de fabrication des fibres de carbone à partir de PAN (Ait Atmane H., 2011a) .....	11
<b>Figure I.6</b> Une structure en sandwich :A) âme pleines ; B) âme creuses .....	12

### Chapitre II

<b>Figure II. 1</b> Schéma de la microstructure graduée en continu avec des constituants métal-céramique (a) Microstructure graduée (b) Vue agrandie et (c) FGM céramique-métal. (Jha D. K., 2013) .....	18
<b>Figure II. 2</b> Schéma du processus de production de matériaux gradué par coulage (Marple B.R, 1997).....	21
<b>Figure II. 3</b> Projection plasma pour former un FGM thermoélectrique (Ichikawa K., 2000). .....	23
<b>Figure II. 4</b> Schéma d'un faisceau d'électrons - dépôt physique en phase vapeur coucheuse à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz U., 1997).....	24
<b>Figure II. 5</b> Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Miyamoto Y., 1999).....	25
<b>Figure II. 6</b> Procédé de frittage laser différentiel (Yuki M., 1991).....	25
<b>Figure II. 7</b> Procédé EPD pour la production des matériaux FG (Aldo R., 2002).....	26
<b>Figure II. 8</b> Principaux domaines d'application des matériaux à gradient de propriété .....	28
<b>Figure II. 9</b> Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels ( (Koizumi M., 1996) .....	29
<b>Figure II. 10</b> La distribution composante des matériaux (Yoshihisa U., 2004).....	30
<b>Figure II. 11</b> Une plaque de FGM et sa notation géométrique .....	30
<b>Figure II. 12</b> Variation de module de Young $E$ en fonction de $k$ dans une plaque P-FGM. 32	
<b>Figure II. 13</b> Variation de module de Young $E$ en fonction de $k$ dans une plaque S-FGM. 33	
<b>Figure II. 14</b> Variation de module de Young $E$ dans une plaque E-FGM. ....	34

### Chapitre III

<b>Figure III.1</b> Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire. ....	36
--	----

<b>Figure III.2</b> Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff. ....	37
<b>Figure III.3</b> Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Mindlin-Reissner.....	38
<b>Figure III.4</b> Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle.....	39
<b>Figure III.5</b> Comparaison entre différentes théories ; a) Variation de $\Psi_z$ des différents modèles ; b) Variation de $\Psi'_z$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	42
<b>Chapitre IV</b>	
<b>Figure IV. 1</b> Variation de module de Young en fonction de $k$ dans une plaque P-FGM. ...	52
<b>Figure IV. 2</b> Une plaque de FGM et sa notation géométrique .....	53
<b>Figure IV. 3</b> Forces et moments résultants sur un élément de plaque (Reddy J-N., 1997)..	55
<b>Figure IV. 4</b> Discrétisation par un maillage en DF d'un domaine. ....	59
<b>Figure IV. 5</b> Maillage à différence finie de la plaque. ....	62
<b>Figure IV. 6</b> Ecriture de l'équation différentielle en MDF au point $w_{i,j}$ en maillage. ....	62
<b>Chapitre V</b>	
<b>Figure V. 1</b> Profils d'épaisseur-variation parabolique-concave .....	72
<b>Figure V.2</b> Idéalisation par différence finie de la plaque FGM avec variation d'épaisseur parabolique.....	74
<b>Figure V. 3</b> Effet du paramètre de variation d'intensité parabolique $\eta$ sur la charge critique de flambage d'une plaque FGM avec $a/h = 50$ , exposée à une charge.....	76
<b>Figure V. 4</b> Effet du paramètre de variation d'intensité parabolique $\eta$ sur la charge critique de flambage d'une plaque FGM avec $a/h = 50$ , exposée à une charge.....	77
<b>Figure V. 5</b> Effet du paramètre de variation d'intensité parabolique $\eta$ sur la charge critique de flambage d'une plaque FGM avec $a/h=50$ , exposé à une charge dans le plan bi-axiale. ..	77
<b>Figure V.6</b> Le taux de perte de la résistance au flambement de la plaque FGM avec variation d'épaisseur parabolique en termes de $\eta$ . ....	79
<b>Figure V.7</b> Effet du rapport latéral sur épaisseur $a/h$ sur le taux de perte de la résistance au flambement de la plaque carrée FGM avec une variation d'épaisseur dans une direction ....	80
<b>Figure V.8</b> Effet du rapport latéral sur épaisseur $a/h$ sur le taux de perte de la résistance au flambement de la plaque carrée FGM avec une variation d'épaisseur dans deux direction ..	80

**Liste des Tableaux**

**Chapitre II**

**Tableau II. 1** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal. .... 17

**Chapitre III**

**Tableau III. 1** Différentes Fonctions de cisaillement  $\Psi_z$  utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM ..... 41

**Chapitre IV**

**Tableau IV. 1** Comparaison entre la méthode numérique actuelle et les solutions exactes de  $P_{cr}(MN/m)$ . .... 69

### Liste des Notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ \ ]$	Matrice
$\Gamma$	propriété matérielle
$V(z)$	Fraction volumique locale.
$\Psi(z)$	fonction de forme
$f(z)$	fonction de forme
$w_b$	Déplacement transversal dû à la flexion
$w_s$	Déplacement transversal dû au cisaillement
$w_{,x}^b$	Rotation due à la flexion suivant x
$w_{,x}^s$	Rotation due au cisaillement suivant x
$E$	Module de Young
$v(z)$	Fraction volumique
$\rho$	Masse volumique en fonction de l'épaisseur
$\Omega$	Plan moyenne
$K$	La conductivité thermique
$U_p$	énergie de déformation mécanique
$\alpha$	Coefficient thermique
$k$	Paramètre de matériel
$c$	céramique
$m$	métal
$k^b$	Champ des déformations en flexion
$k^s$	Champ des déformations en cisaillement
$K$	L'énergie cinétique
$d_{ij}$ et	opérateurs différentielles
$d_{ijlm}$	
$G$	Module de cisaillement
$u^0$	Déplacement de membrane ou du plan médium suivant l'axe x,

## Liste des notations

---

$v^0$	Le déplacement du plan médium suivant l'axe Y,
$w$	Déplacement transversal ou la flèche,
$i, j$	Nombre naturelle
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Epaisseur de la plaque
$p$	Propriété de matériau typique
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$e_0$	L'épaisseur au centre de la plaque
$V_0$	Volume de la plaque d'épaisseur constante
$V_1$	Volume de la plaque d'épaisseur variable
$\eta$	Rapport d'épaisseur de la plaque
$P$	Force par unité
$P_{cr}$	La charge critique
$\xi$	Paramètre de charge

**Liste des abréviations**

FGM	: Functionally Graded Material
CPT	: Classical Plate Theory
FSDT	: First Order Shear Deformation Theory
HSDT	: Higher Order Shear Deformation theory
TSDT	: Third Order Shear Deformation Theory
P-FGM	: fonction de puissance d'écrite Functionally Graded Material
°C	: Degré celsius
CMO	: Les composites à matrice organique
CMM	: Les composites à matrice métallique
CMC	: Les composites à matrice céramique
PAN	: Polyacrylnitrique
3D	: 3 diamantions
TD	: Matrices thermodurcissables
TP	: Matrices thermoplastiques
HP	: Composites à Hautes Performances
UV	: Ultra violé
K	: Kelvin
S-FGM	: Fonction sigmoïdes d'écrite Functionally Graded Material
E-FGM	: Fonction exponentielle d'écrite Functionally Graded Material
ESL	: Equivalent-single-layer
FG	: Gradient fonctionnel
MDF	: Méthode de différence de fini

# **Introduction Générale Et Objectifs De La Thèse**



## **Introduction Générale**

Depuis plusieurs siècles, les conceptions humaines sont de moins en moins le fruit d'un savoir-faire empirique, mais sont issues du résultat de calculs eux-mêmes basés sur les lois du monde physique. La compréhension des lois qui régissent le monde qui nous entoure est donc essentielle à l'évolution. La modélisation des structures est un point essentiel à toute conception et cette affirmation est d'autant plus valable que la technologie mise en œuvre est complexe.

Le domaine d'ingénierie est un exemple des évolutions en matière de conception. Alors les exigences des consommateurs en matière de performances, de sécurité et de confort ayant évolué. Aujourd'hui, la conception repose majoritairement sur des simulations qui sont effectuées par des ordinateurs impliquant souvent un processus d'optimisation. Par ailleurs, l'évolution technologique de fabrication des matériaux tels que, les composites sont orientés vers la réduction des coûts de fabrication d'une part et l'augmentation des performances mécanique, thermique, sécurité et de confort d'autre part. Pour ces raisons, les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans l'aérospatiale, la mécanique, le génie civil, le nucléaire, l'automobile et diverses autres industries. Qui se présente un défaut de concordance des propriétés mécaniques au niveau d'une interface tant que la liaison de deux matériaux distincts. En conséquence, la concentration des contraintes se produite généralement à l'interface. Cela peut entraîner des dommages (décollement), de fissuration de la matrice et de séparation de la liaison adhésive (Feldman E, 1997).

Des matériaux fonctionnels (FGM) sont donc nés pour surmonter ces problèmes. Le FGM ; le matériau composite avancé qui est constitué de deux ou plusieurs phases constitutives avec une variation continue des propriétés du matériau d'une surface à l'autre, éliminant ainsi la concentration de contrainte qu'elle est trouvée dans les composites stratifiés classiques. Le concept de FGM a été proposé en 1984 par des scientifiques japonais spécialisés dans les matériaux comme un moyen de barrière thermique.

D'autre part, les comportements d'une structure peuvent être complexes et difficiles à simuler au travers de méthodes réputées exactes. Il est donc nécessaire d'établir des modèles

permettant d'approcher le comportement de la structure physique, en faisant des hypothèses simplificatrices.

Par problème, l'ensemble des paramètres caractéristiques d'une simulation (type de plaque, conditions aux limites choisies, excitation) que l'on souhaite réaliser. Un modèle de plaque, est généralement caractérisé par une matrice de comportement, des équations d'équilibre ou encore l'expression de l'énergie potentielle de déformation ou cinétique. Pour un problème donné, le choix d'une méthode de discrétisation est donc souvent rattaché au modèle mécanique, et aussi établi en fonction de la structure à modéliser, du cas de chargement et des conditions aux limites.

Globalement, les modèles plus fréquemment utilisés sont l'approche de la monocouche équivalente (ESL), cette approche considère le stratifié hétérogène comme une seule couche homogène équivalente, et permet ainsi de donner une réponse globale et précise du comportement de la multicouche (flèche transversale, fréquence propre, charge critique, etc). Dans cette approche, on adopte, le plus souvent des modèles en déplacement, en prenant une forme du champ de déplacement comme une combinaison des fonctions inconnues, et des coordonnées concernant l'épaisseur. Cette théorie se scinde en trois grandes familles, qui sont :

- Théorie classique des plaques (CPT),
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT),
- Théories de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs (HSDT).

La théorie classique des plaques (CPT) est le plus simple modèle d'ESL également connue par la théorie de Kirchhoff (Kirchhoff V.G, 1850a), qui ignore à la fois les effets de cisaillement et de déformation normale. La deuxième est la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) développée par Mindlin (Mindlin R.D., 1951). Cette théorie rend compte de l'effet de déformation de cisaillement au moyen d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur, et par conséquent les facteurs de corrections sont nécessaires. La troisième, HSDT peut être développé en utilisant la série de puissance dans les composants de déplacement suivant l'épaisseur. En principe, les théories développées par ce moyen peuvent être aussi précises en incluant un nombre suffisant de termes. Parmi les HSDT, la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) de Reddy (Reddy J.N., 1984) est la plus utilisée en raison de sa simplicité et de sa précision.

L'analyse de la stabilité des plaques en FGM sous chargement mécanique et/ou thermique ont également été examinées par de nombreux chercheurs en utilisant différentes théories et solutions, (Reddy B.S., 2013), (Bouazza M., A., 2012), (Bouazza M., 2013), (Fekrar A., 2013), et (Ramu I., 2014). La plupart de ses travaux de recherche ont été publiés au cours de dernières années, ont traité le comportement des plaques d'une épaisseur constante à divers cas de chargement et de conditions aux limites. Cependant, les plaques ayant une épaisseur variable, ont également attiré l'attention des concepteurs et des chercheurs. En général, les plaques FGM géométriquement complexes telles que les plaques à épaisseur variable deviennent courantes dans différents domaines techniques et industriels en raison des exigences de la conception. Malgré cela, les travaux de recherche menés pour étudier les plaques FGM d'épaisseur variable sont moins nombreux que ceux d'épaisseur constante.

Généralement, les formulations analytiques régissent l'analyse de comportement des plaques d'épaisseur variable, ils sont très complexes. À titre d'exemple, (Mozafari H., 2010), (Mozafari H., 2012) ont étudié la stabilité des plaques FGM à une épaisseur variant linéairement sous chargement mécanique.

En outre, certains chercheurs ont utilisé des hypothèses simples pour faciliter les formulations en incluant la variation d'épaisseur. (Ait Atmane H., 2011b) ont présenté une formulation basée sur la théorie des poutres de Bernoulli-Euler pour étudier la vibration libre des poutres sigmoïdes fonctionnellement graduées à section transversale variable. (Pouladvand M., 2009) a examiné la stabilité thermique de plaques rectangulaires FG minces, d'épaisseur variable basée sur la théorie des plaques classiques. (Alinaghizadeh F., 2016) ont évalué l'analyse de flexion non-linéaire de plaques annulaires FG bidirectionnelles épaisses d'épaisseur variable et de conditions aux limites différentes reposant sur des fondations élastiques non linéaires.

D'un autre côté, d'autres chercheurs ont adopté les méthodes numériques pour l'analyse des plaques, sous différents cas de chargement avec l'inclusion de variation de l'épaisseur. (Rajasekaran S., 2013) ont présenté une solution numérique utilisant la méthode des différences finies pour évaluer les charges de flambage et les fréquences exactes de vibration des plaques isotropes à épaisseur variable. Diverses combinaisons de conditions aux limites ainsi que de nombreux types de chargement sont considérées. Aussi, (Bouguenina O., 2015) ont proposé une solution numérique utilisant la méthode des différences finies pour étudier le flambage thermique d'une plaque FG simplement appuyée avec une variation linéaire de

l'épaisseur. (Ghomshei M.M., 2013) ont développé une formulation par éléments finis pour analyser le flambage thermique axisymétrique de plaques annulaires FGM d'épaisseur variable.

Dans notre démarche, il s'agit de concilier la haute résistance mécanique obtenue par les FGM avec la bonne optimisation de la section transversale et de profil de distribution. Dans cette approche, on a choisi la méthode des différences finies pour analyser le flambement mécanique d'une plaque en FGM avec une épaisseur variable.

L'objectif principal de ce travail, c'est le développement d'un modèle semi-analytique basé sur la méthode des différences finies, afin d'analyser le comportement mécanique des plaques mince rectangulaire en FGM à une épaisseur constante et simplement appuyée, sous différents cas de chargement mécanique et de confronter les résultats obtenues à ceux de la littérature.

Le second objectif de ce travail, est l'étude du flambement mécanique des plaques P-FGM ayant une variation d'épaisseur parabolique concave ; en utilisant la procédure de différence finie décrite dans le premier objectif de ce travail, afin d'avoir la capacité d'inclure la variation d'épaisseur ; notant que cette tâche est complexe à effectuer analytiquement.

Une fonction parabolique-concave extraordinaire est développée pour contrôler l'intensité de la variation parabolique de l'épaisseur de la plaque, mais sans changer son volume de matériau d'origine. Deux types de variation d'épaisseur ont été étudiés ; variation parabolique dans une direction, et dans deux directions. Une étude paramétrique est menée pour étudier l'effet de différents paramètres sur la charge critique de flambement. Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre consiste à décrire le cadre général des matériaux composites en donnant des notions multiples sur leurs principaux constituants entrants dans la composition de ces matériaux, ainsi on présente une approche simple sur les matériaux composites structuraux et des exemples d'intégration des matériaux composites.

Les matériaux à gradient de propriétés sont examinés dans le second chapitre, on montre leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application. Ensuite, les lois de mélange régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM sont présentés.

Le troisième chapitre, constitue les différentes théories, qui permettent la modélisation des plaques en savoir la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Enfin on présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les structures en matériaux à gradient de propriétés.

Le quatrième chapitre détaille la mise en œuvre de la méthode des différences finies pour résoudre l'équation différentielle d'un modèle de plaque générique, obtenue par l'utilisation de la théorie de Von Karman en basant sur les relations contraintes-déformation dérivées par la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre. La validation de cette méthode avec une référence bibliographique quasi-récente est présentée, pour une plaque rectangulaire à une épaisseur constante et simplement appuyée sous différent cas de chargement mécanique.

Le dernier chapitre est consacré à étudier la résistance au flambement mécanique des plaques P-FGM, ayant une variation d'épaisseur parabolique-concave. Deux types de variation d'épaisseur ont été étudiés. Une étude paramétrique est menée pour étudier l'effet de différents paramètres tel que l'effet de la variation de l'épaisseur, l'indice matériel de la loi de mélange, le rapport d'aspect longueur-épaisseur de la plaque sur la charge critique de flambement.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets des différents types de chargement sur le comportement mécanique des structures en matériaux à gradient de propriétés sous un chargement mécanique.

**Chapitre I :**  
**Généralités Sur**  
**Les Matériaux**  
**Composites**

## Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composites

### I.1. Introduction

Le choix des matériaux, quelle que soit l'industrie aérospatiale, automobile, ferroviaire, sports et loisirs, bâtiment, génie civil... est toujours un problème complexe où le compromis coût/performance règne en maître. Pour y remédier, des matériaux composites peuvent être utilisés, qui permettent d'atteindre des niveaux des performances souhaité et qu'inégalés. En effet, les matériaux composites représentent un axe de recherche hautement stratégique pour différentes industries. Depuis leur avènement dans les années trente et jusqu'à nos jours, les matériaux composites présents dans quasiment tous les secteurs industriels.

Les matériaux composites se démarquent par leur légèreté et leur facilité de mise en œuvre. Leur résistance mécanique, physique et chimique offre un large éventail de possibilités en termes d'utilisation, de design, de géométrie et d'intégration de fonctions. S'adaptant parfaitement à toute sorte d'environnement, même les plus hostiles, ils s'intègrent totalement à notre quotidien à tel point qu'ils peuvent passer inaperçus.

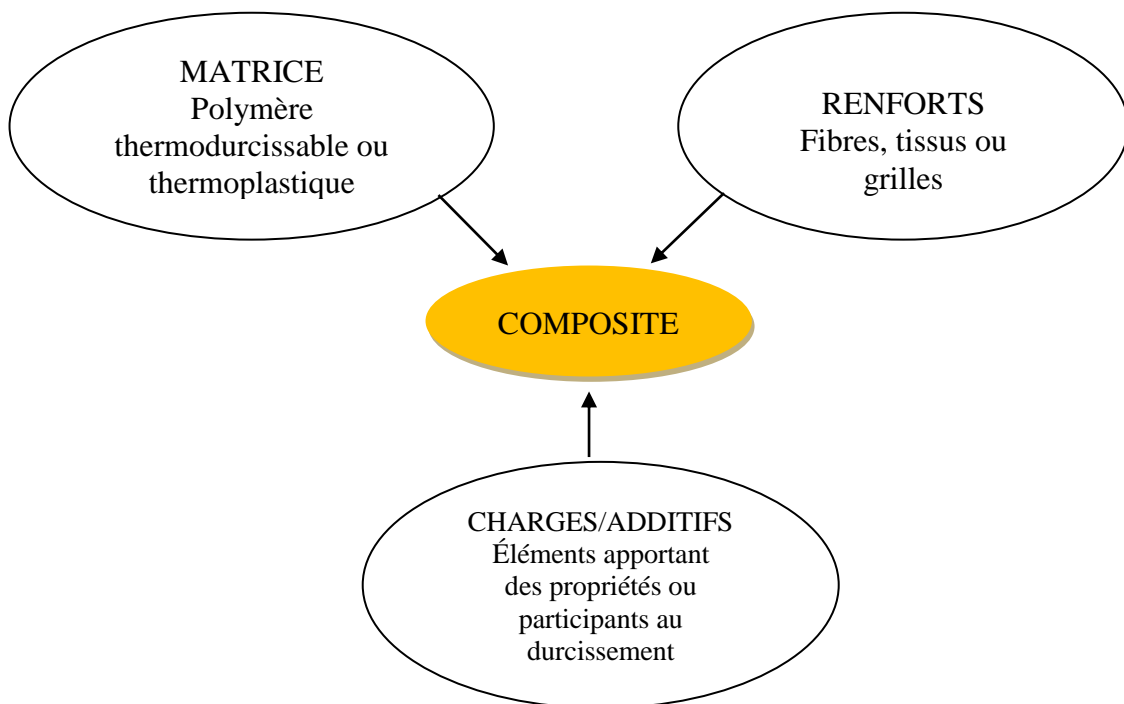
### I.2. Qu'appelle-t-on matériaux composites ?

Un matériau composite résulte de l'association de deux matériaux différents aussi bien par leur forme que par leurs propriétés mécaniques ou chimiques pour tenter d'accroître leurs performances. Les deux constituants du composite sont la matrice et le renfort, qui en se combinant donnent un matériau hétérogène souvent anisotrope, c'est-à-dire dont les propriétés diffèrent suivant les directions. Les matériaux constituant le composite sont généralement choisis en fonction de l'application que l'on souhaite en faire par la suite. Les critères de choix peuvent être, par exemple, les propriétés mécaniques requises, la résistance à la chaleur ou à l'eau ou même la méthode de mise en œuvre.

Bien qu'il existe différentes sortes de matériaux composites (comme par exemple, le béton, la boue, le contreplaqué...), ce terme s'adresse plus particulièrement aux pièces plastiques ou métallique constituées d'une matrice polymère et d'un élément renforçant de type fibreux tel que défini dans la figure I.1.

On distingue deux types de composites: les composites grandes diffusions et les composites hautes performances.

- Les matériaux composites dits de “grande diffusion” dont les propriétés mécaniques sont plus faibles mais d’un coût compatible avec une production en grande série ;
- Les matériaux composites dits “hautes performances”, présentant des propriétés mécaniques spécifiques élevées et un coût unitaire important. Ce sont les plus employés en aéronautique et dans le spatial. (Bouremana M, 2011).



*Figure I. 1 Composition d'un matériau composite.*

### **I.3. Intérêt des composites**

L'intérêt suscité par les composites tient aux nouveaux rapports qualité-prix qu'ils permettent d'obtenir et à l'avantage technique et économique qu'ils apportent. Aussi, en fonction de leurs constituants, les matériaux composites présentent nombreux d'intérêts.

D'un point de vue mécanique, ils offrent d'excellentes propriétés en traction, flexion, compression, cisaillement plan et transverse ainsi qu'une excellente absorption aux chocs. Leur résistance mécanique combinée à leur faible densité en font un élément incontournable des conceptions actuelles qu'elles soient structurelles ou non.



D'un point de vue physico-chimique, ils s'adaptent parfaitement à différents milieux ambiants et peuvent être très performants en termes de résistance aux produits chimiques, au feu, ou à la corrosion.

Néanmoins, leur plus grand intérêt réside dans la possibilité de pouvoir intégrer plusieurs fonctions en une seule opération réduisant de fait et de façon conséquente, le nombre de pièces d'un ensemble mécanique ou d'une conception et par là même son coût de revient.

Bien que leur fabrication nécessite des investissements parfois lourds en termes d'outillages de moulage, ils constituent un compromis technico-économique intéressant lorsqu'ils sont fabriqués en série.

Le schéma suivant résume de l'introduction les raisons matériaux composites.

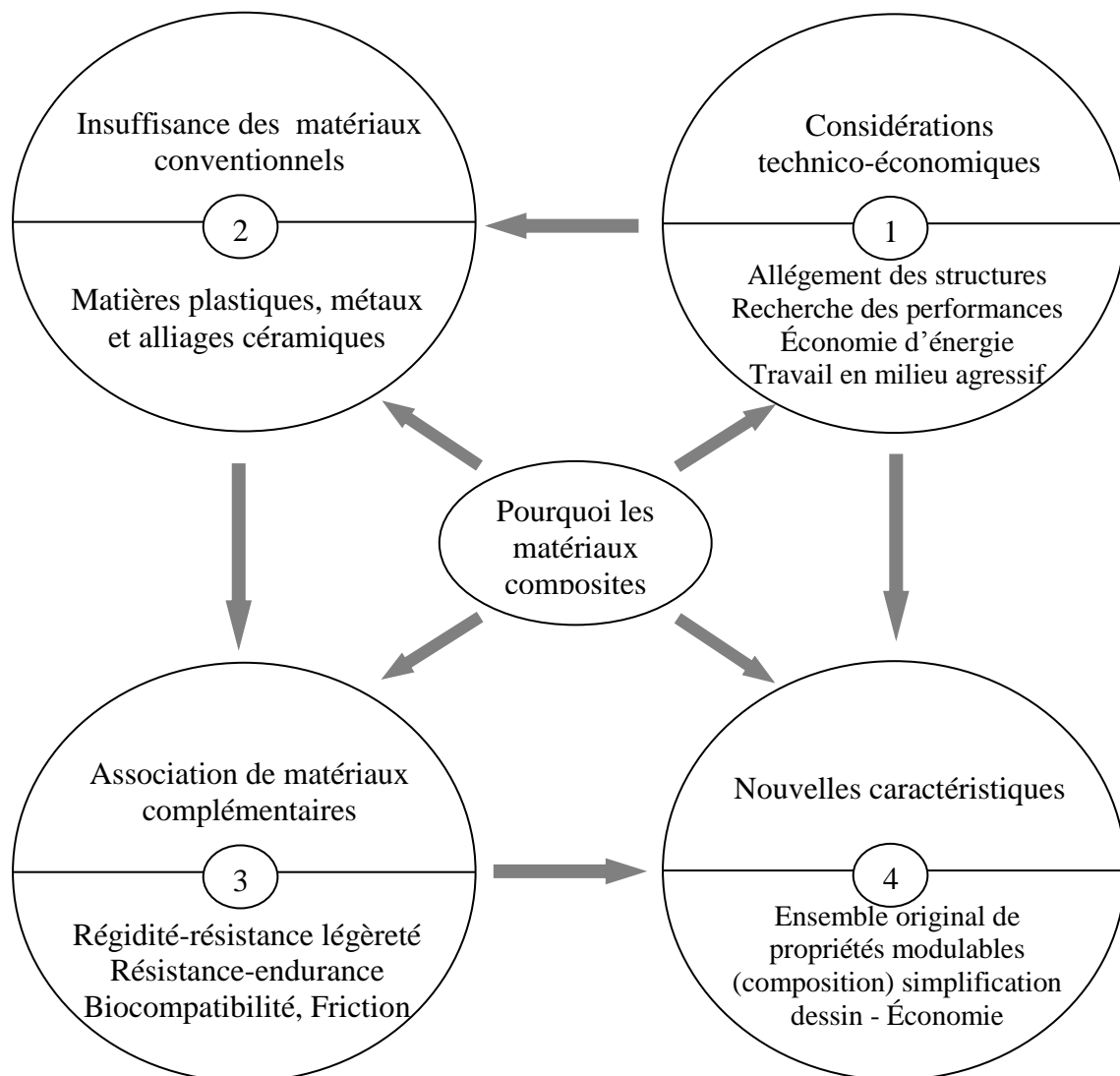


Figure I. 2 Raisons de l'introduction des composites.

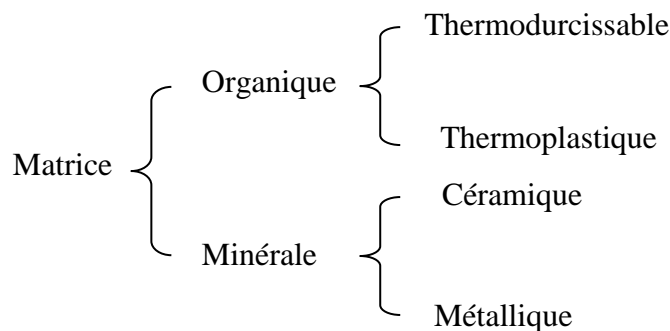
## I.4. Les constituants de base d'un matériau composite

En général les constituants principaux d'un matériau composite sont : la matrice, le renfort et l'interface (figure I.1). Dans certains cas des charges et des additifs peuvent être utilisés.

### I.4.1. Matrices

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques.

En fonction de leur nature, la classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure I.2 :



*Figure I.3* Types de matrice.

Les composites à matrice organique (CMO) qui ne peuvent être utilisés à des températures supérieures à 300°C, les composites à matrice métallique (CMM) qui sont utilisés jusqu'à 600°C, et les composites à matrice céramique (CMC) dont l'utilisation est possible même au-delà de 1000°C. (Draiche K, 2015)

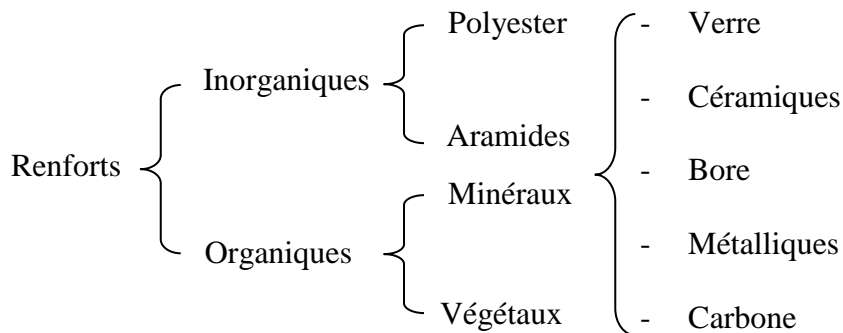
### I.4.2. Charges et additifs

Les charges et additifs sont ajoutés au composite afin de lui conférer de nouvelles propriétés et, ainsi, de lui permettre de remplir davantage de fonctions techniques. De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types.

Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice. Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent grosso modo de la même façon que dans les plastiques « traditionnels ».

### I.4.3. Renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite aux efforts. Présentent sous forme de fibres continues ou discontinues, se présentent sous les formes linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus). La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.4.



*Figure I.4 Types de renfort.*

#### I.4.3.1. Fibres de verre

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance–prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction de structures composites. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres de verre :

- E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- R : pour les composites hautes performances ;
- D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).

#### I.4.3.2. Fibres de carbone

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres utilisées comme précurseurs sont des fibres acryliques élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité

des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur. Dans le principe d'élaboration, le PAN subit un traitement thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation. Le brai, qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille, est également utilisé pour produire des fibres de carbone (Ait Atmane H., 2011a).

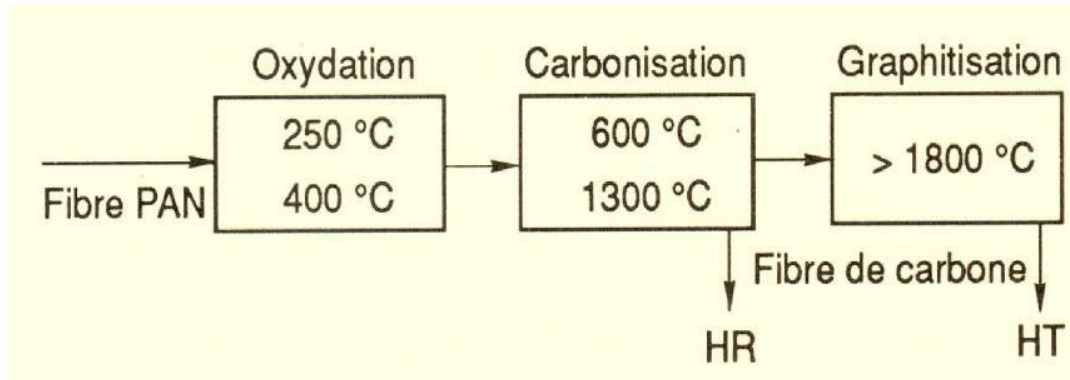


Figure I.5 procédé de fabrication des fibres de carbone à partir de PAN (Ait Atmane H., 2011a)

#### I.4.3.3. Fibres aramides : appelées aussi kevlar

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisé. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides. Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

#### I.4.3.4. Fibres céramiques

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- fibres de Carbure de Silicium
- fibres de Bore
- fibres de Bore carbure de silicium

### I.5. Structures composites stratifiées

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bi-directionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. En jouant sur l'ordre et l'orientation des plis, il est possible d'adapter finement les propriétés mécaniques du stratifié aux sollicitations extérieures, et donc d'atteindre un haut niveau d'optimisation en mettant la matière là où elle est le plus utile. A l'échelle de la structure, les comportements mécaniques ainsi obtenus peuvent être très complexes, et vont du quasi-isotrope à une anisotropie marquée lorsque l'application le nécessite. Les stratifiés sont globalement moins coûteux à fabriquer que les tissus 3D : en contrepartie, ils sont sujets au délaminage.

### I.6. Structures sandwich

Les pièces composites tissées ou stratifiées sont généralement minces. Par conséquent, elles ne résistent efficacement qu'aux sollicitations en membrane, c'est-à-dire dans leur plan, et résistent mal aux sollicitations hors plan (flexion et torsion).

Pour concevoir des pièces rigides en flexion et en torsion, une technique couramment employée est celle des structures en sandwich, constituées de deux peaux (généralement stratifiées) collées sur une âme épaisse mais légère, comme une mousse de polymères ou un nid d'abeilles, à l'aide d'adhésifs (figure I.6).

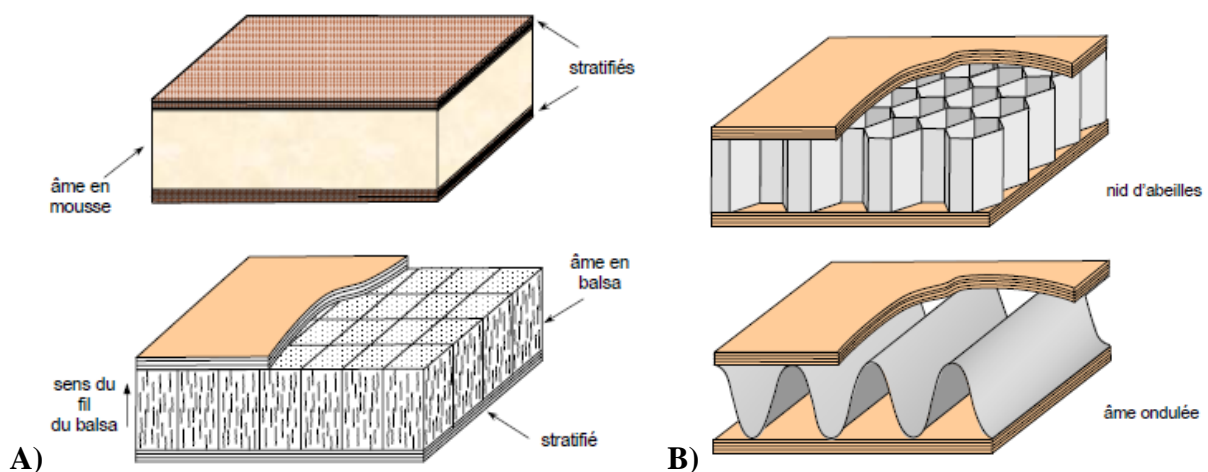


Figure I.6 Une structure en sandwich :A) âme pleines ; B) âme creuses

L'intérêt de cette disposition est encore une fois de mettre la matière là où elle est nécessaire : lorsqu'un tel sandwich est sollicité en torsion ou en flexion, les peaux travaillent essentiellement en membrane, tandis que l'âme travaille essentiellement en cisaillement hors plan.

## **I.7. Exemples d'intégration des matériaux composites**

### **I.7.1. Les composites dans les ouvrages du génie civil**

L'utilisation des composites dans l'ouvrages du génie civil est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Endommagements de matériaux et de structure dus à des erreurs de conception, à des modifications de conditions d'exploitation, au vieillissement des matériaux et les séismes, à travers le monde a poussé les chercheurs de développer les matériaux composites. L'handicap majeur de l'utilisation de ce dernier dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra moins de 6€/kg. (Ait Atmane H., 2011a).

Les matériaux composites, grâce à leurs caractéristiques mécaniques élevées et leurs faibles poids propres, leurs très bonnes performances vis-à-vis de la corrosion, leurs aptitudes au formage et au moulage, sont des matériaux particulièrement intéressants pour remplir les fonctions de confortement des ouvrages du génie civil.

### **I.7.2. Les composites dans les équipements de sports et loisirs**

Les composites se sont imposés dans les sports et les loisirs en se substituant principalement au bois (en particulier dans le nautisme et la glisse) et quelquefois aux métaux (notamment dans le cyclisme). Ce domaine est quasiment le seul où l'on emploie des composites de hautes performances (HP) pour des articles de très grande consommation (cannes à pêche, raquettes, skis...). Plusieurs critères ont favorisé cette utilisation :

- leur légèreté (portage et manipulations aisés) ;
- leur stabilité dimensionnelle (ni gonflage, ni voilage ne parasite) ;
- leur bon comportement à l'humidité et à la corrosion (produits pouvant rester dehors, voire dans l'eau ou sous la neige) ;

- leur bonne tenue à la fatigue répétée ;
- leur grande rigidité (ou flexibilité, modulable en fonction du type de renforcement) d'où une amélioration des performances par rapport aux plastiques ;
- leur souplesse de mise en œuvre (une dizaine de procédés de fabrication utilisables en fonction du cahier des charges et des séries à produire) ;
- une grande liberté de formes réalisables.

### **I.7.3. Les composites et la construction nautique**

A la fin des années 1950, les matériaux composites sont introduire dans la construction nautique de plaisance et de pêche. Ils se sont généralisés entre 1960 et 1965. Ces matériaux deviennent indispensables pour les embarcations de taille inférieure à 40 mètres. Aussi ces matériaux sont largement employés dans l'industrie marine, notamment sur l'eau dans la construction de bateaux de plaisance. Depuis peut, on trouve de plus en plus d'applications de matériaux composites sous l'eau, où les excellentes propriétés spécifiques de ces matériaux les rendent très compétitifs.

### **I.7.4. Les composites dans l'automobile**

Les matériaux composites sont apparus dans l'industrie automobile au milieu des années 1950. Ce dernier reste un grand champ d'investigation pour les matériaux composites. A ce jour, plus de 30 000 tonnes de matières plastiques et composites sont utilisées pour la fabrication de pièces de carrosserie, notamment dans les pare-chocs, les ailes, les portes latérales... Entrouvres beaucoup dans ses applications les composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais intègre massivement les composites thermoplastiques depuis 2003.

Si à ses débuts, il y a environ 100 ans, une automobile était constituée principalement de bois et d'acier, aujourd'hui elle rassemble de nombreux matériaux appartenant à différentes familles :

- matériaux ferreux : fontes, aciers (environ 70 % de sa masse) ;
- matériaux non ferreux : aluminium, cuivre, magnésium (environ 5 %) ;
- matériaux minéraux : verres, céramiques (environ 4 %) ;
- matériaux organiques : peintures, adhésifs, textiles, fluides, caoutchoucs, thermoplastiques et thermodurcissables renforcés ou non par des fibres (verre, carbone, aramide, naturelles) ou des charges minérales (environ 20 %).

### **I.7.5. Les composites dans l'aéronautique**

Avec l'augmentation du prix du pétrole, l'utilisation des matériaux composites est devenue une nécessité. Chaque kilogramme gagné sur la structure d'un avion, fait gagner aux compagnies de voyageurs de l'argent et protège en parallèle l'environnement par réduction des émanations de CO<sub>2</sub>. L'aéronautique utilise principalement des composites HP constitués d'une matrice époxy associée à un taux élevé de renforts en fibres de carbone.

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, de leur souplesse de forme et des économies de frais de maintenance qu'ils engendrent. Le gain total de 450 kilos sur un Airbus permet d'accueillir six passagers supplémentaires. Un gain de 100 kilos sur la structure d'une fusée allonge sa trajectoire de 100 kilomètres.

### **I.7.6. Les composites et la construction industrielle**

Le développement des composites TD et TP, avec la possibilité de jouer sur leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel. Les fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Pour les constructions industrielles standards, les matériaux composites gardent encore leur handicap d'un coût élevé par rapport aux matériaux conventionnels, les métaux. Leur caractérisation en milieu corrosif est encore insuffisamment connue.

### **I.7.7. Les composites dans le ferroviaire**

En construction ferroviaire, les matériaux composites sont utilisés pour deux principaux atouts : un bon comportement au feu et un moulage facile des pièces utilisées. Pour un type d'application, les aspects économiques et industriels sont fondamentaux sur le choix ou non des matériaux composites pour les construire. Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice thermdurcissable et fibres longues, mais il apparaît peu dynamique.



La généralisation des composites dans le ferroviaire est handicapée par leur coût supérieur à 9€/kg, contre 2€/kg pour les solutions en acier et par les difficultés de l'approche fonctionnelle rencontrées par les concepteurs.

### **I.8. Qualités générales des matériaux composites**

Les qualités principales les plus cités des matériaux composites sont :

- Légèreté (gain de masse) ;
- Tenue mécanique particulière (fatigue, résiliences,...) ;
- Rigidité adaptable selon le type de renforts ;
- Bon comportement à la corrosion ;
- Résistance chimique, tenue électrique et une meilleure isolation thermique ;
- Amélioration de la tenue au feu ;
- Fabrication facile, maintenance réduite et réparation possible.

Ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les défauts principaux les plus courants sont les suivants :

- Sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température) ;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Tolérance aux dommages (représente le point faible le plus important) ;
- Problèmes d'assemblage (grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs).

### **I.9. Conclusion**

Pour beaucoup d'applications structurales, les matériaux composites, après avoir suscité beaucoup d'espoir dont ce nouveau matériau est adaptatif, léger et résistant, se déforme sous l'action d'un changement d'environnement. Leur applications sont envisagées pour l'aéronautique, l'aérospatial, ouvrage civil... Du fait de leur importance, dans ce premier chapitre, on a fait appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques. Nous avons aussi acquis dans ce chapitre des connaissances sur les matériaux composites structuraux et leurs avantages principaux qu'offrent ces matériaux.

**Chapitre II :**  
**Généralité Sur Les**  
**Matériaux en FGM**

## Chapitre II : Généralité Sur Les Matériaux en FGM

### II.1. Introduction

L'utilisation des matériaux dans la conception des structures et les objets à des conditions sévères tels que les températures élevées, les devers sollicitations mécaniques, conduit au développement des matériaux composites, qui ont permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème majeur de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Material « FGM »).

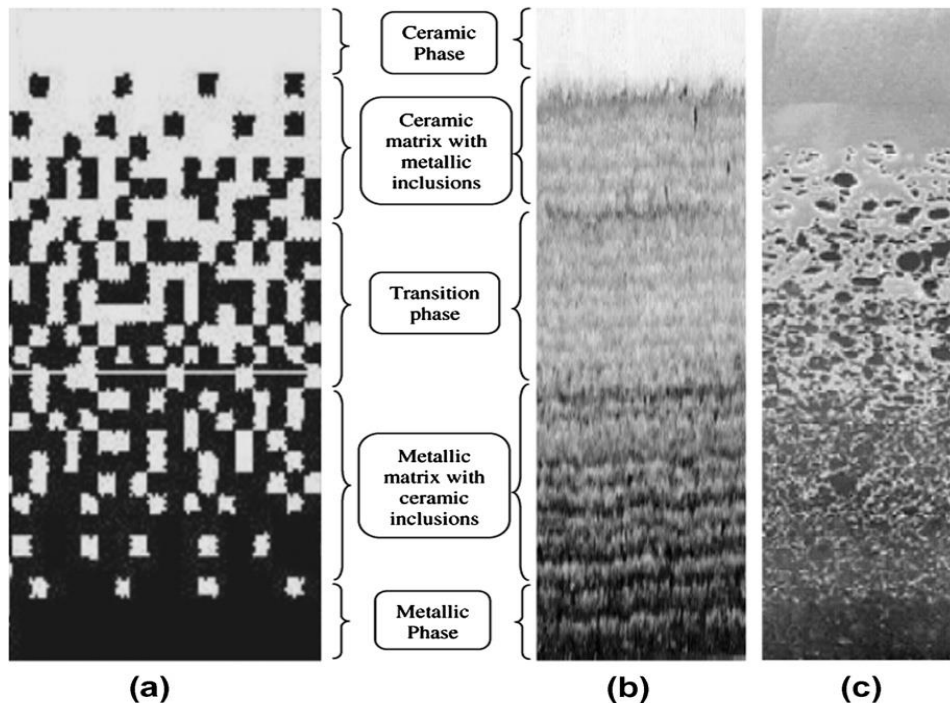
Les FMGs constitués de composants métalliques et céramiques sont bien connus pour améliorer les propriétés des systèmes de barrière thermique, dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau II.1.

*Tableau II. 1 Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.*

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"><li>- Bonne résistance thermique ;</li><li>- Bonne résistance à l'oxydation ;</li><li>- Faible conductivité thermique.</li></ul>
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"><li>- Élimination des problèmes de l'interface ;</li><li>- Relaxer les contraintes thermiques.</li></ul>
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"><li>- Bonne résistance mécanique ;</li><li>- Conductivité thermique élevée,</li><li>- Très bonne ténacité.</li></ul>

Les délaminages, qui sont souvent observés dans les systèmes multicouches classiques, sont évités grâce à la transition douce entre les propriétés des composants. En faisant varier spatialement les teneurs en pourcentage des fractions volumiques de deux ou plusieurs matériaux, on peut former des FGM qui auront la gradation de propriété souhaitée dans les directions spatiales, figure II.1. Ainsi que dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch P., 1986). Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison de nombreux avantages

d'application, il comprend une réduction potentielle des contraintes transversales dans le plan et au travers de l'épaisseur, des propriétés thermiques améliorées, une ténacité élevée, etc.



**Figure II.1** Schéma de la microstructure graduée en continu avec des constituants métal-céramique (a) Microstructure graduée (b) Vue agrandie et (c) FGM céramique-métal. (Jha D. K., 2013)

## II.2. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Bien que le concept des FGM, et notre capacité à les fabriquer, semblent être une invention d'ingénierie avancée, le concept n'est pas nouveau. Ces sortes de matériaux ont eu lieu dans la nature. La première apparition de structures en matériaux gradués a été en 1972, (Bever M.B., 1972) et (Shen M., 1972), pour les composites et les matériaux polymères. Différents modèles ont été proposés pour des gradients de composition, dans la concentration des fibres, et dans la polymérisation pour obtenir des structures gradués. Cependant, il n'y avait aucune enquête réelle sur la façon de concevoir, fabriquer, et d'évaluer les structures de gradient progressives jusqu'aux années 1980 (Miyamoto Y., 1999).

En 1985, l'utilisation du contrôle de la texture continuée a été proposé afin d'augmenter la force d'adhérence et de minimiser les contraintes thermiques dans les revêtements céramiques et les articulations en cours d'élaboration pour le moteur de fusée réutilisable (Niino M., 1984). Les développeurs ont réalisé que ce contrôle continu d'une propriété pourrait être étendu à un concept plus général qui pourrait être appliqué pour conférer de nouvelles propriétés et fonctions à tout matériau en changeant progressivement sa texture ou

composition. À l'heure actuelle, le concept de l'ingrédient matière a été introduit pour la conception de tels matériaux.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un projet de recherche sur la technologie de base pour le développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques. L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des sociétés ont été engagées dans ce projet (Koizumi., 1997).

Dans la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) capables de résister aux températures de surface maximales jusqu'à de 2000K et à un gradient de température de 1000K. La fabrication des matériaux présente un gradient de composition et de structures est basée sur quatre techniques, à savoir : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torche (Okamura H, 1991).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, (Lostec L., 1997).

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. À cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et le développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

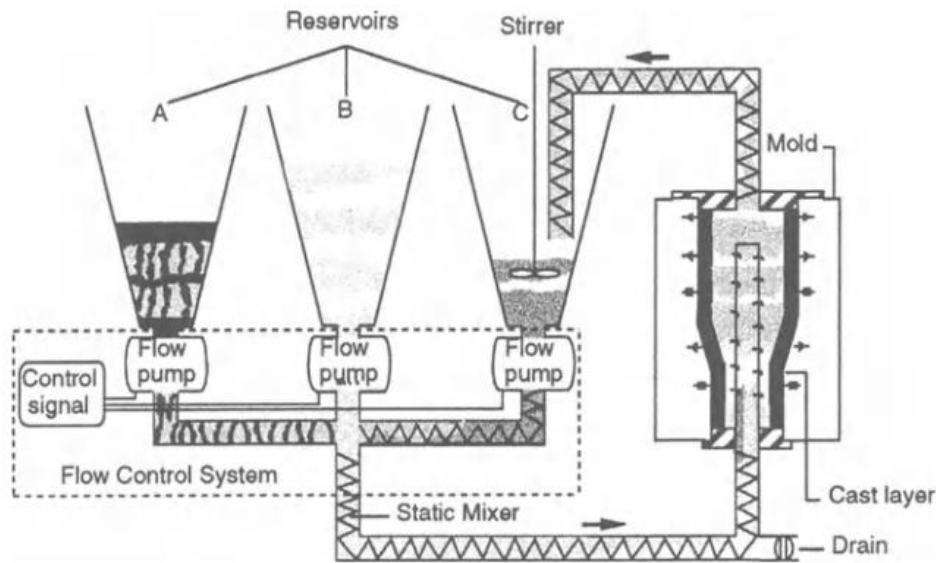
### II.3. Fabrication et Méthodes D'élaboration des FGM

Depuis 1980, des recherches sur les FGM ont été consacrées au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée (Hirai T., 1996). Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en deux étapes, la première c'est d'établir la structure non homogène dans l'espace, gradation, la deuxième c'est la transformation de ce matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étape de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), coulage en bande (Tape Casting), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) et le frittage laser différentiel. Il ressort de notre étude bibliographique que de nombreuses méthodes d'élaboration sont employées pour la réalisation des matériaux FGMs. Les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie (BENATTA Mohamed A., 2011).

#### II.3.1. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

La coulée en barbotine, est une technique utilisée pour la mise en forme de la céramique, un procédé typique pour la poudre empilé sous un courant induit par la pression. Une cavité dans un moule en plâtre de Paris est remplie d'une suspension contenant des particules d'un matériau céramique. Le liquide de suspension est absorbé par le moule par le biais des forces capillaires et les particules de céramique, qui sont généralement plus grands que les canaux capillaires, qui sont laissés sur les parois de la cavité du moule. Lorsque l'épaisseur de paroi souhaitée a été atteinte, la barbotine en excès est évacuée du moule et le corps vert est éliminé par séchage. La répétition de coulage en boues de compositions différentes peut être utilisée pour produire des FGM stratifiés. Un schéma de coulée à gradient dans laquelle un feuillet circule continuellement à travers le moule pendant l'étape de coulée est représenté sur la figure II.2 (Marple B.R, 1997). D'autres configurations sont également proposées par (Marple B.R., 1996). L'élément commun est la présence de plusieurs réservoirs contenant des suspensions de matériaux et d'être jeté. La composition de la barbotine introduite dans le moule est commandée pour correspondre à la composition souhaitée des piles étant déposées. Le glissement est diffusé en continu à travers le moule, et les suspensions des réservoirs sont ajoutées par des pompes de flux à des débits contrôlés par l'ordinateur. Le mélange des

suspensions est amélioré par l'utilisation des mélangeurs fixes, en forme de spirale pour créer une turbulence pendant l'écoulement à travers les tubes d'alimentation.



*Figure II. 2 Schéma du processus de production de matériaux gradué par coulage (Marple B.R, 1997).*

### II.3.2. Coulage en bande (Tape casting)

La méthode de coulage en bande (Tape casting) est favorisée, du fait de faire coller facilement de grands nombres de feuilles minces d'une épaisseur uniforme entre eux. D'une manière générale, ce procédé a été effectué dans un système non aqueux (Takemura M., 1990; Kawasaki A., 1990).

Le processus de coulage en bande a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont laquelle les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$ ) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composants en céramique (Zeng Y.P., 2000).

### II.3.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple, un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec des compositions change dans la matrice compactée (Atarashiya K., 1993) (Leushake U., 1999). Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans

la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce (<100 cm<sup>2</sup>) en raison des limites des forces de compaction. Néanmoins, cette méthode permet des études de laboratoire efficaces sur des systèmes à gradient de propriétés (Kieback B., 2003).

#### **II.3.4. Coulée par centrifugation**

Dans la coulée par centrifugation, des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant (Zhang J., 1998), ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité (Mg<sub>2</sub>Si, (Zhang J., 1998)) et une densité plus élevée (Al<sub>3</sub>Ti, (Watanabe Y., 1997)) que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou extérieure du tube.

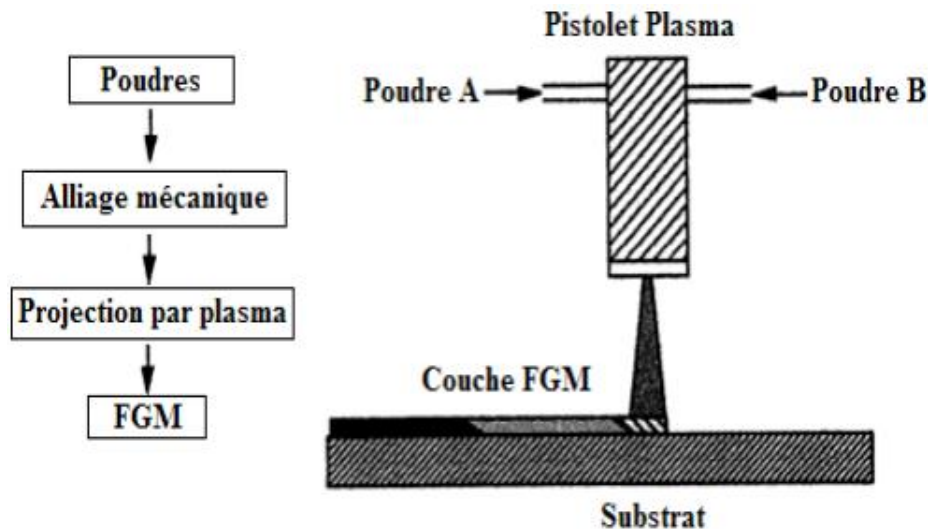
#### **II.3.5. Projection plasma**

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 µm, environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des tronçons solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé (Watre Metz B., 2006).

Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques de cette méthode sont l'isolation thermique et électrique, la résistance à l'usure et à la corrosion.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative (Omori M., 1998). (Ichikawa K., 2000) a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est montrée par la figure II.3.





**Figure II. 3** Projection plasma pour former un FGM thermoélectrique (Ichikawa K., 2000).  
(La composition est graduée dans la direction plane)

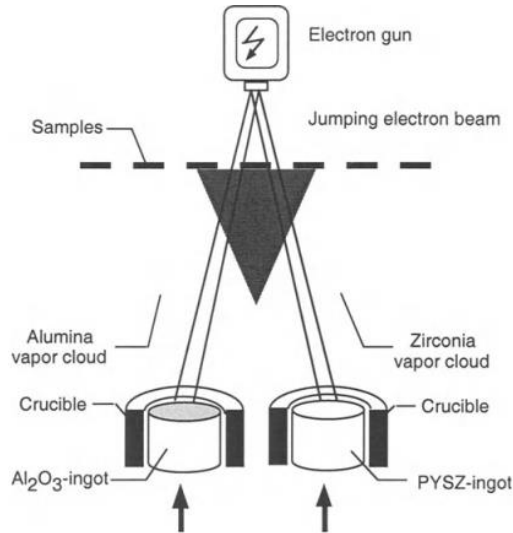
### II.3.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie nécessaire pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les avantages de PVD, les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie considérablement plus longue. L'équipement utilisé par PVD pour déposer les revêtements d'isolation thermique, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plut un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. (Miyamoto Y., 1999).

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlée peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source (Miyamoto Y., 1999). Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple aluminent et zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à des environnements oxydants, notamment, les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone ytriée  $ZrO_2$ ,

un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique (Mévrel R., 2009).



**Figure II. 4** Schéma d'un faisceau d'électrons - dépôt physique en phase vapeur couchée à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz U., 1997).

### II.3.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), figure II.5, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma (Miyamoto Y., 1999).

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces. Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il y a une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlées la source de mélanges des gaz (CH<sub>4</sub>-SiCl<sub>4</sub>-H<sub>2</sub>) sont employés aux températures de dépôt entre 1400°C et 1500°C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

Par définition, le frittage est un procédé de fabrication de pièces solide par chauffage d'une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce. Cette technique est constituée de deux étapes et

convient à la fabrication d'un composite FGM composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi M., 1990). Ce procédé peut être généralement appliqué pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

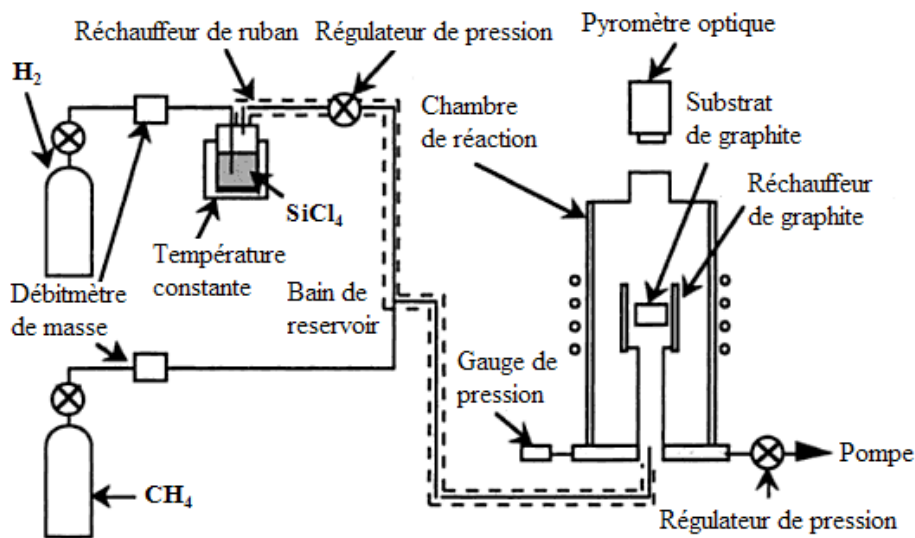


Figure II. 5 Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Miyamoto Y., 1999).

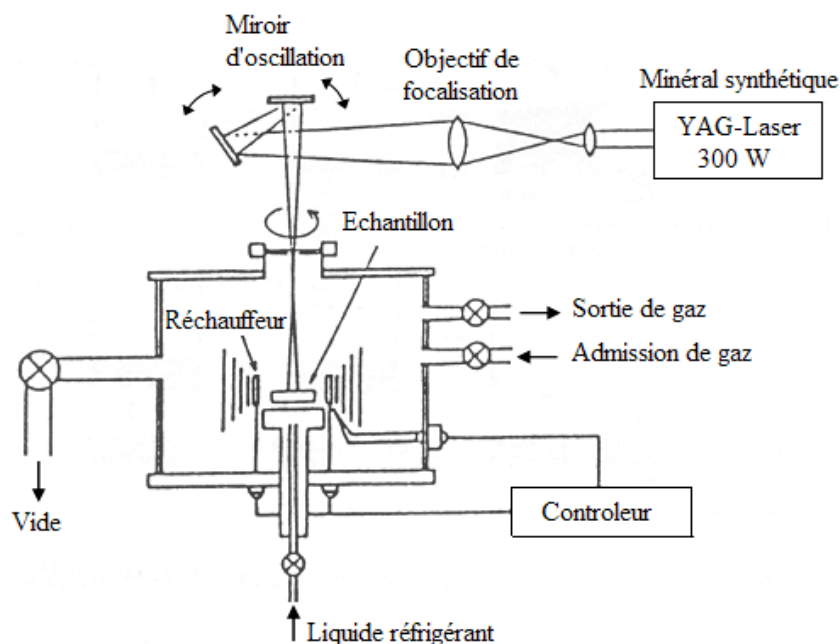


Figure II. 6 Procédé de frittage laser différentiel (Yuki M., 1991).

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

(Yuki M., 1991) ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM PSZ/Mo, figure II.6.

### II.3.8. Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes (Aldo R., 2002). EPD permet la conception des matériaux FG en forme de plaque binaire en déposant une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

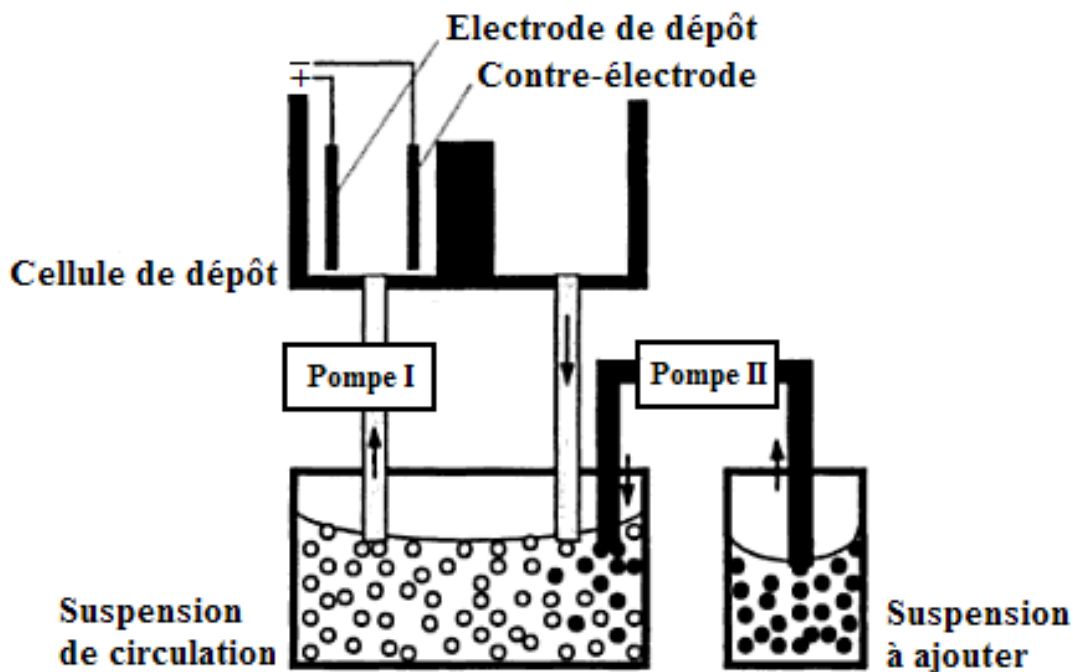


Figure II. 7 Procédé EPD pour la production des matériaux FG (Aldo R., 2002).

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés

peuvent être obtenus tels que la céramique-céramique  $ZrO_2/Al_2O_3$ , et la céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches est déterminée par la suite de la suspension au moment du dépôt, figure II.7.

#### II.4. Application des Matériaux FGM

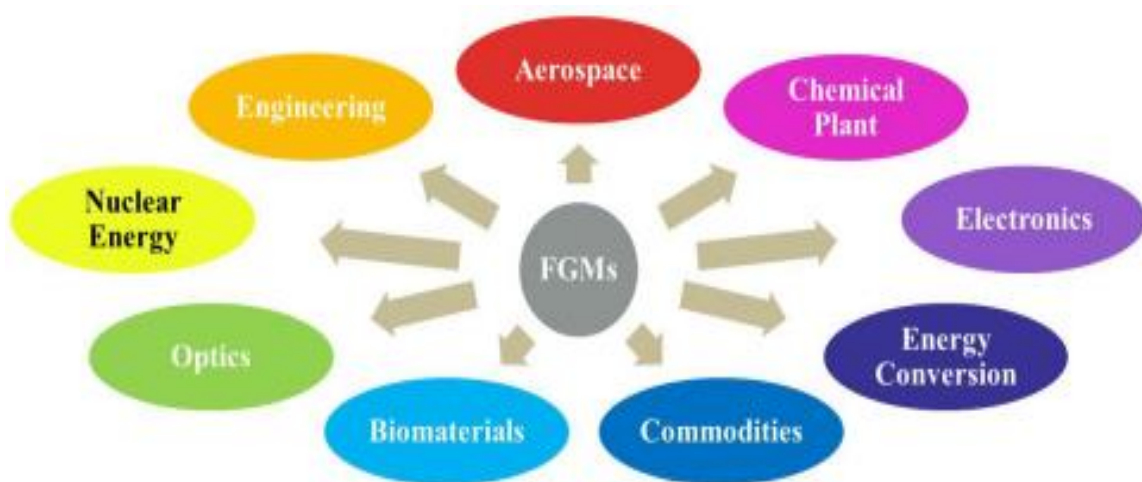
Les FGM ont un grand potentiel dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères, notamment les boucliers thermiques des engins spatiaux, les tubes échangeurs de chaleur, les génies biomédicaux, les revêtements de plasma pour les réacteurs de fusion, pour l'aérospatiale, les réacteurs d'énergie nucléaire, etc.

Par exemple, une couche discrète de matériau céramique est liée à une structure métallique dans un revêtement barrière thermique conventionnel pour des applications à haute température. Cependant, la transition abrupte des propriétés du matériau à travers l'interface entre des matériaux distincts peut provoquer de fortes contraintes inter-laminaires et conduire à une déformation plastique ou à une fissuration (Finot M., 1996). Ces effets nocifs peuvent être atténués par une gradation spatiale régulière des constituants du matériau. Dans de tels cas, de grandes concentrations de matériaux céramiques sont placées à des endroits corrosifs à haute température, tandis que de grandes concentrations de métal sont placées dans des régions où les propriétés mécaniques doivent être élevées.

L'application de ces matériaux avancés a d'abord été visualisée lors d'un projet d'avion spatial en 1984 au laboratoire national aérospatial du Japon afin d'éviter les pics de contrainte aux interfaces dans les revêtements des panneaux pour la navette spatiale. La combinaison des matériaux utilisés ici a servi de système de barrière thermique capable de supporter une température de surface de 2000 K avec un gradient de température de 1000 K sur une section de 10 mm d'épaisseur. Plus tard, ses applications ont été étendues aux composants des usines chimiques, des générateurs d'énergie solaire, des échangeurs de chaleur, des réacteurs nucléaires et des systèmes de combustion à haut rendement.

Le concept de FGM a été appliqué avec succès dans des revêtements de barrière thermique où les exigences visent à améliorer la résistance thermique, à l'oxydation et à la corrosion. Deux systèmes importants de matériel de recherche dans la technologie de fabrication de FGM sont: Alumina " $Al_2O_3$ " (Krell T., 1999) et zircone " $ZrO_2$ " (Gasik MM., 2010) des couches céramiques protectrices extérieures sur des substrats à base de Ni-superalloy " $NiCrAlY$ ". En conséquence, les revêtements ont été déposés par différentes

techniques métallurgiques. Dans le domaine thermoélectrique, le concept de matériau gradué, tel que  $BiTe/PbFe$  dopé a été mis en œuvre pour une application dans des capteurs et des thermo-générateurs avec transition métal semi-conducteur avec une efficacité améliorée. Une application des FGMs, peut également être trouvée dans les technologies de la communication et de l'information. Les outils abrasifs pour la coupe de métal et de pierre sont d'autres exemples importants où la gradation a amélioré les performances de la couche de surface. A titre d'observation finale concernant les MGF, on peut noter que ce concept de matériaux gradués a démontré que le gradient de composition micro / macrostructure peut non seulement éliminer les effets indésirables tels que la concentration des contraintes, mais aussi générer une fonction positive unique (Gasik MM., 2010). Le concept des FGM est applicable à divers domaines, comme l'illustre la figure II.8.



*Figure II. 8 Principaux domaines d'application des matériaux à gradient de propriété FGM (Miyamoto Y., 1999).*

## **II.5. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels**

Généralement, les FGMs sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la figure II.9 (Koizumi M., 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau, mais de microstructure différente (Boch P., 1986). Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des

années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGMs, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

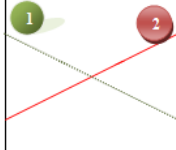
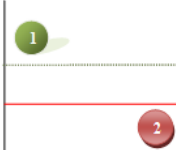
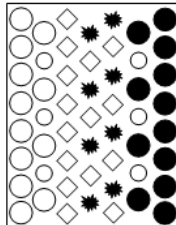
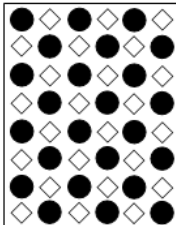
<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p><b>Eléments constitutifs:</b></p> <p>Céramique ○ Métal ● Microporosité ○ Fibre ◇*</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

Figure II. 9 Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels ( Koizumi M., 1996)

Yoshihisa (Yoshihisa U., 2004) à établie un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure II.10). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en terme de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution de composantes graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



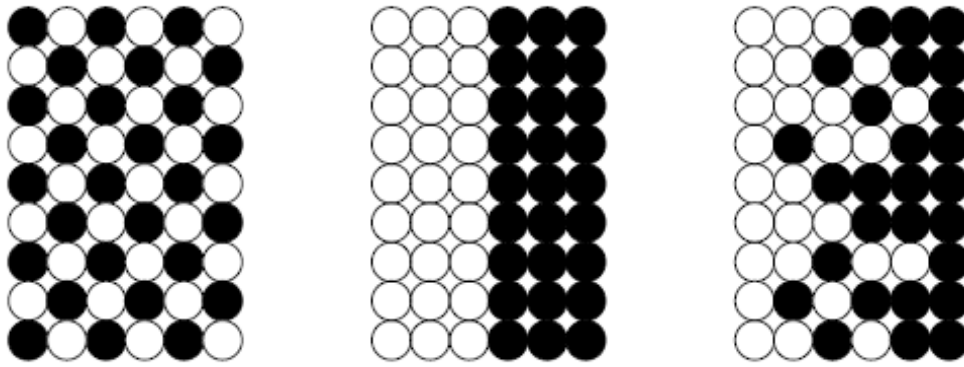


Figure II. 10 La distribution composante des matériaux (Yoshihisa U., 2004)

## II.6. Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés FGM consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure (HOUARI Mohammed S.A., 2011; BENATTA Mohamed A., 2011; KACI A., 2012).

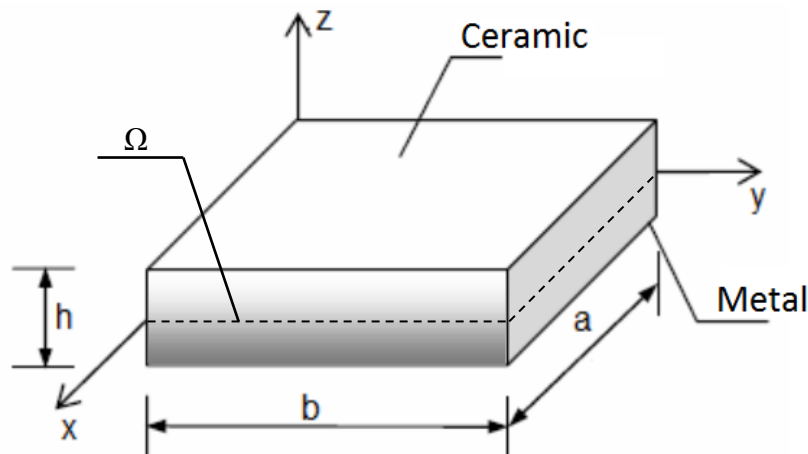


Figure II. 11 Une plaque de FGM et sa notation géométrique



Le plan de la plaque est défini par les coordonnées  $x$  et  $y$ ; tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire au plan moyen de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau : dont le module de Young  $E$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , la conductivité thermique  $K$ , la masse volumique  $\rho$  ou même le coefficient de Poisson  $\nu$ , la variation de ce dernier à travers l'épaisseur est négligeable (Jomehzadeh E., 2009), sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes, mais sont déterminées selon les besoins d'utilisation.

Toutefois, le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ). Les propriétés de la plaque FGM changent dans la direction de l'épaisseur suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), au avec une fonction sigmoïdes (S-FGM).

### II.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique d'une plaque P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0 \quad \text{II. 1}$$

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad \text{II. 2}$$

$$\alpha(z) = \alpha_c V_c + \alpha_m (1 - V_c) \quad \text{II. 3}$$

Où  $k$  est le paramètre du matériel qui décrit le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur  $h$ . En utilisant la loi de mélange, les propriétés des matériaux tels que le module d'élasticité  $E$  et de dilatation thermique  $\alpha$  sont supposés être fonction des matériaux constitutifs, figure II.12.

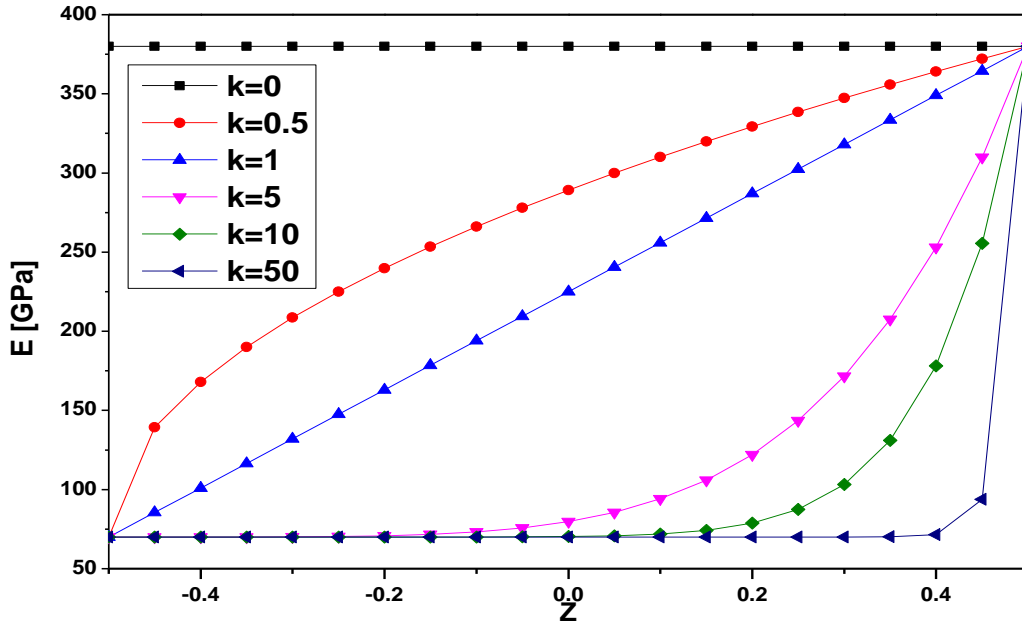


Figure II. 12 Variation de module de Young  $E$  en fonction de  $k$  dans une plaque P-FGM.

### II.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas de l'ajout à la plaque FGM, une fonction singulière simple au composites multicouches, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où la matière est continue, mais changent rapidement.

Par conséquent, Chung et Chi définissent la fraction volumique de puissance en utilisant deux fonctions afin d'assurer la bonne distribution des contraintes de toutes les interfaces (Chi Shyang-ho., 2003). Les deux fonctions sont définies par :

$$\begin{aligned} V_f^1(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad \text{II. 4}$$

En utilisant la loi de mélange, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculée par :

$$E(z) = \begin{cases} V_f^1(z)E_c + (1 - V_f^1(z))E_m & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z)E_c + (1 - V_f^2(z))E_m & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad \text{II. 5}$$

$$\alpha(z) = \begin{cases} V_f^1(z)\alpha_c + (1 - V_f^1(z))\alpha_m & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z)\alpha_c + (1 - V_f^2(z))\alpha_m & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad \text{II. 6}$$

Où les indices  $_c$  et  $_m$  désignent respectivement la propriété de la céramique et le métal.

La figure II.13, montre que la variation du module de Young selon l'équation (I.5) a des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée Plaque S-FGM.

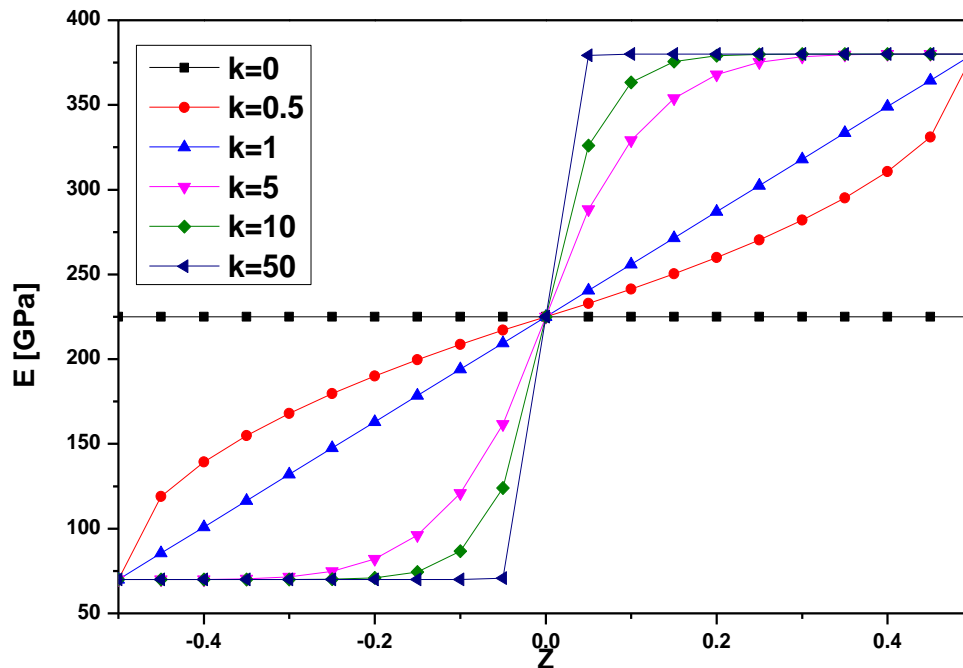


Figure II. 13 Variation de module de Young  $E$  en fonction de  $k$  dans une plaque S-FGM.

### II.6.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par (Delale F., 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad \text{II. 7}$$

$$\alpha(z) = \alpha_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad \text{II. 8}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \text{ ou } B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)$$

Selon la propriété du matériau cherchée.

La figure II.14, représente la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

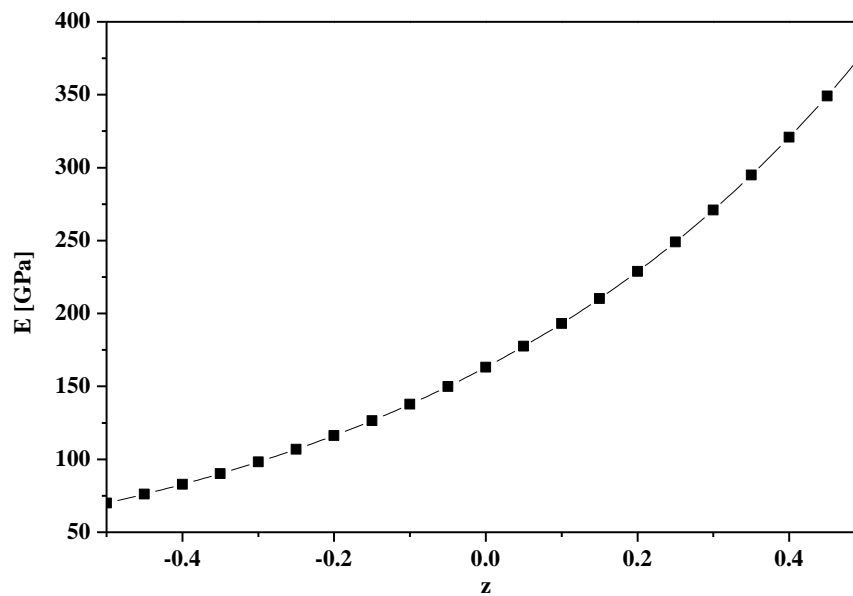


Figure II. 14 Variation de module de Young  $E$  dans une plaque E-FGM.

## II.7. Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à une autre et ainsi élimine les concentrations de contraintes trouvées dans les composites stratifiés. La gradation des propriétés du matériau réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et la concentration de contrainte. Ce chapitre a présenté une définition et un aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés, ainsi que les diverses techniques appliquées pour la fabrication des FGM. Les techniques comprennent la méthode de coulage séquentiel en barbotine, le processus d'infiltration, les processus de coulée graduées et la projection thermique, cette partie a présenté aussi les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du FGM suivant l'épaisseur de la plaque ainsi que leur domaine d'application. Certaines méthodes ont été proposées dans la littérature pour analyser la stabilité des structures en matériaux à gradient de propriété, on a distingué les méthodes analytiques qui basent sur la théorie classique des plaques CPT, la théorie de cisaillement de premier ordre, les théories de cisaillement d'ordre élevé et la méthode raffinée, la méthode des éléments finis et les méthodes numériques ou semi-analytiques.

Une méthode semi-analytique est montrée par la suite basant sur la méthode des différences finies, le principe de cette méthode est détaillé pour la flexion d'une plaque simplement appuyée.

**Chapitre III : Théorie  
Des Plaques A Gradient  
Fonctionnel**

## Chapitre III : Théorie Des Plaques A Gradient Fonctionnel

### III.1. Introduction

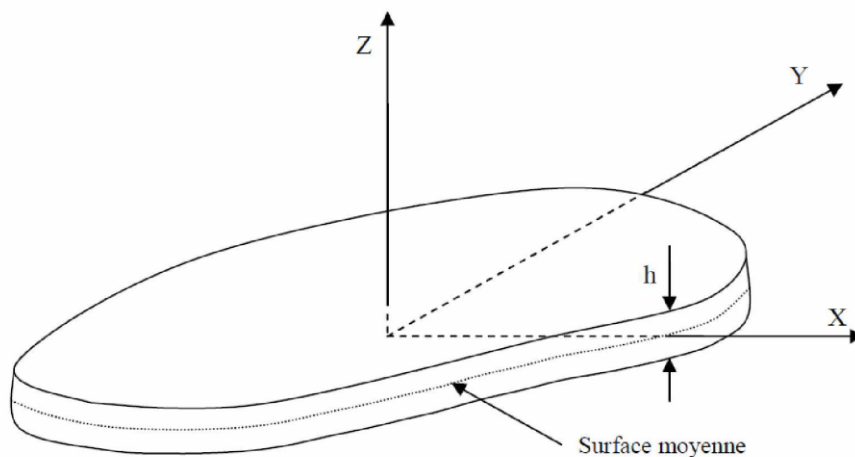
En général, le comportement des plaques et coques à gradient fonctionnel (FG) sous une charge mécanique, thermique ou thermomécanique peut être prédit à l'aide de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D) ou en utilisant les théories de couche unique équivalent (ESL). Les modèles ESL (équivalent-single-layer) sont dérivés de la théorie de l'élasticité 3D en faisant des hypothèses appropriées sur la cinématique de déformation ou un état de tressage à travers l'épaisseur des plaques ou coques (Reddy J., 2004). Les théories ESL expliqués à la fois les effets de cisaillement et de déformation normale en fonction du niveau des hypothèses. La théorie classique des plaques (CPT) est la plus simple modèle d'ESL, également connue par la théorie de Kirchoff (Kirchhoff V.G, 1850a), qui ignore à la fois les effets de cisaillement et de déformation normale. La théorie suivante dans la hiérarchie des modèles ESL est la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) développée par Mindlin (Mindlin R.D., 1951). Cette théorie (FSDT) rend compte de l'effet de déformation de cisaillement au moyen d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Un facteur de correction de cisaillement est donc requis. Le facteur de correction de cisaillement est difficile à déterminer, car il dépend non seulement des paramètres géométriques, mais aussi des conditions de chargement et de limite. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été introduites. Parmi les HSDT, la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) de Reddy (Reddy J.N., 1984) est la plus utilisée en raison de sa simplicité et de sa précision.

Ce chapitre présente une revue bibliographique sur les différents types de modèles ou approches employés pour les matériaux composites et les théories qui s'y rattachent. En général, ces hypothèses permettent la réduction d'un problème en trois dimensions à un problème bidimensionnelle.

Ainsi, on présente une revue exhaustive de la littérature décrivant l'état de l'art de la recherche sur les structures en matériaux à gradient de propriétés. Cette partie résume quelques-unes des dernières œuvres dans l'analyse des structures FGM.

### III.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide tridimensionnel, dont l'épaisseur est bien plus petite que les deux autres dimensions. Quand une plaque à un rapport d'épaisseur à dimensions représentatives est de  $1/20$  ou moins, elle est considérée comme mince (Liew KM., 2011). En partant d'hypothèses adéquates, et en intégrant dans l'épaisseur, l'étude de cet objet se ramène à celle d'un problème bidimensionnel, ce qui la simplifie considérablement. Deux modèles de plaques les plus utilisés sont les modèles de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner. Ils sont obtenus en partant d'hypothèses physiques légèrement différentes, tout en suivant des méthodologies globalement similaires.



*Figure III.1 Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.*

### III.3. Les modèles analytiques des plaques (ESL : Equivalent-Single-Layer)

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches, la plaque multicouche est homogénéisée et donc considérée comme une seule couche. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs, ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

#### III.3.4. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Le modèle CPT (Classical plates Theory- théorie classique des plaques), ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff (Kirchhoff V.G,

1850a) ; (Kirchhoff VG., 1850b) ; (Love A.E.H., 1888). Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane  $u_0, v_0$  et des dérivées de la flèche  $w_0$  au plan de référence (l'exposant 0 indique que la variable est exprimée au plan de référence). Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (III.1). La figure III. 2 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la poutre déformée reste orthogonale à l'axe neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et surestimer les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flambement, d'où son appellation de modèle de « plaques minces ».

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y, z), \end{aligned} \quad \text{III. 1}$$

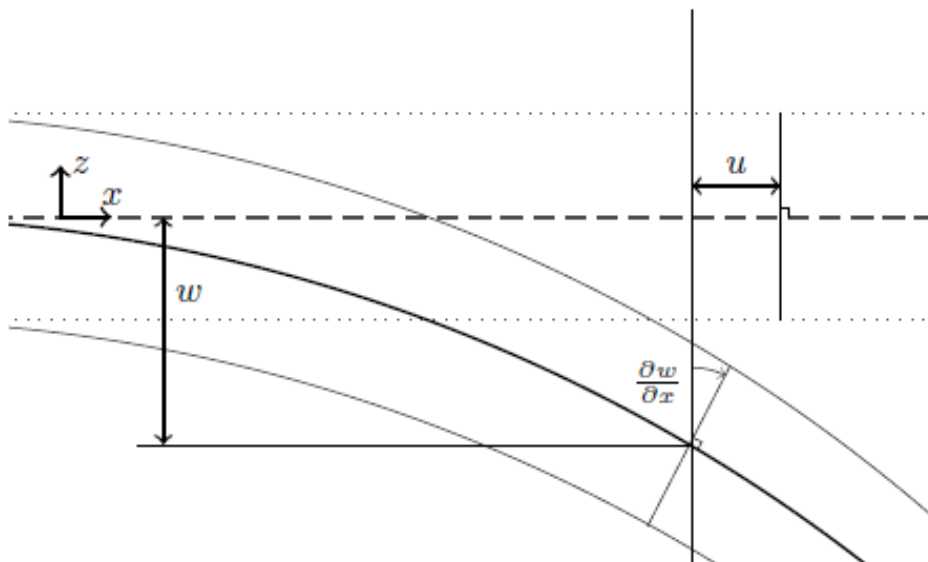


Figure III.2 Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff.

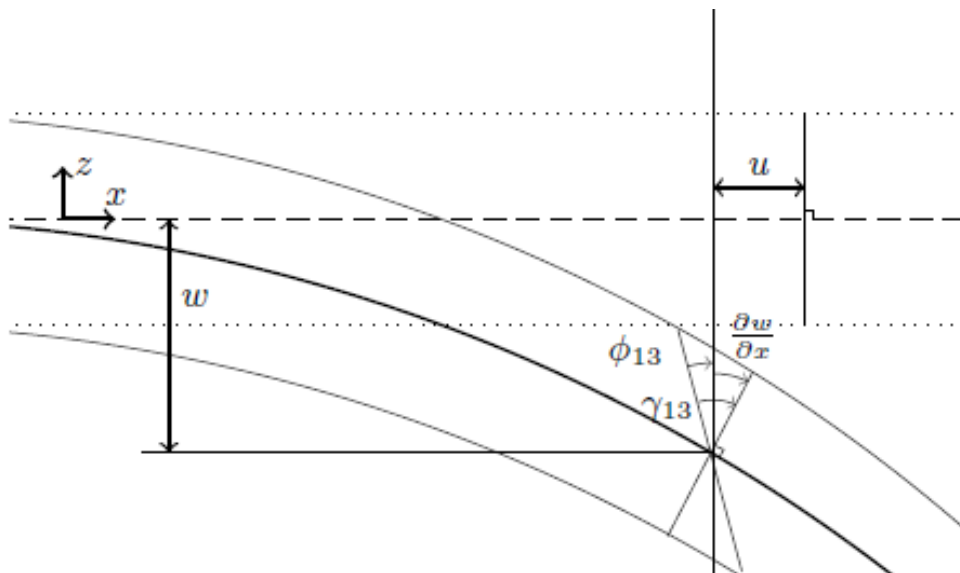
### III.3.5. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La FSDT (First-Order Shear Deformation Theory – théorie de déformation en cisaillement au premier ordre). Aussi appelé modèle de Mindlin-Reissner ou encore « théorie des plaques



épaisses », ce modèle pose pour hypothèse une déformation de cisaillement transverse constante au travers de l'épaisseur de la plaque, le déplacement d'un point de la plaque dépend cette fois de  $u_0, v_0$ , des dérivées de la flèche  $w_0$  et des cisaillements  $\gamma_0$ . L'équation (III.2) présente le champ de déplacement associé à ce modèle. Celui-ci, développé par Reissner (Reissner .E., 1945), fut le premier modèle de plaque prenant en compte les contraintes de cisaillement transverse. On note que la théorie développée n'est pas similaire à la théorie de Mindlin. Il est développé la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur les déplacements (Mindlin R.D., 1951). Cette absence de similitude conduira inévitablement à une autre théorie qui est de Reissner-Mindlin.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \Phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \Phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad \text{III. 2}$$



**Figure III.3** Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Mindlin-Reissner.

Cette théorie (FSDT) rend compte de l'effet de déformation de cisaillement au moyen d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Un facteur de correction de cisaillement est donc requis. Les facteurs de correction de cisaillement est difficile à déterminer, car il dépend non seulement des paramètres géométriques mais aussi des conditions de chargement et de limite. Pour les matériaux isotropes homogène, une valeur de 5/6 proposé par le premier concept Reissner (Reissner .E., 1945) ; (Reissner -E., 1972) (Reissner, 1985), qui est largement utilisée, en employant une méthode de calcul basée sur des

considérations d'équilibre statique et d'équivalence énergétique. Aussi, Mindlin (Mindlin R.D., 1951) a proposé une valeur de  $\pi^2/12$ , en utilisant la méthode d'analyse dynamique pour la première fois. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement, des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été introduites.

### III.3.6. La théorie de troisième ordre de Reddy (TSDT)

La théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement (TSDT) développé par Reddy en 1984 (Reddy J.N., 1984), pour les plaques composites stratifiées tient compte de l'effet de déformation transversale en cisaillement et satisfait aux conditions aux limites de la traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure d'une plaque. La figure III.4 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Reddy. Ce modèle est devenu très populaire parce qu'elle donne une meilleure précision pour les contraintes de cisaillement transversal, et se traduisent par une distribution parabolique de ces contraintes, sans recours à des facteurs de correction, Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La formulation proposée par Reddy implique donc le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z) \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad \text{III. 3}$$

Où :

$$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \quad \text{III. 4}$$

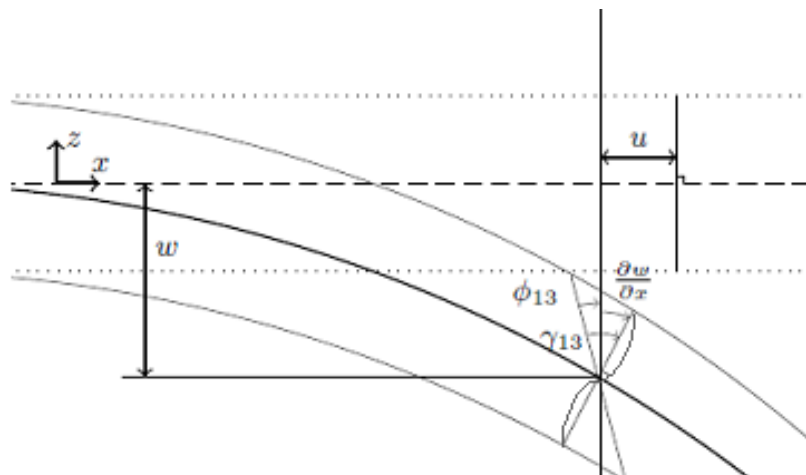


Figure III.4 Paramètres géométriques d'une structure monocouche avec le modèle de Reddy.

### III.3.7. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Les HSDT (Higher-order Shear Deformation Theory – théorie de déformation en cisaillement d'ordres supérieurs) tiennent compte des variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou des déplacements dans le plan et le sens transverse (théorie quasi-3D) à travers l'épaisseur et, par conséquent, prennent les effets de la déformation de cisaillement ou des déformations normales. Les HSDT peuvent être développés en utilisant des fonctions de forme polynomiale ou des fonctions de forme non polynomiale.

Ce modèle reprenant les bases de la théorie de déformations en cisaillement au premier ordre, impose une variation des déformations de cisaillement transverse selon un polynôme du troisième ordre permettant aux contraintes de cisaillement transverses d'être nulles aux limites supérieures et inférieures du stratifié. L'équation (III.3) présente le champ de déplacement associé à ce modèle

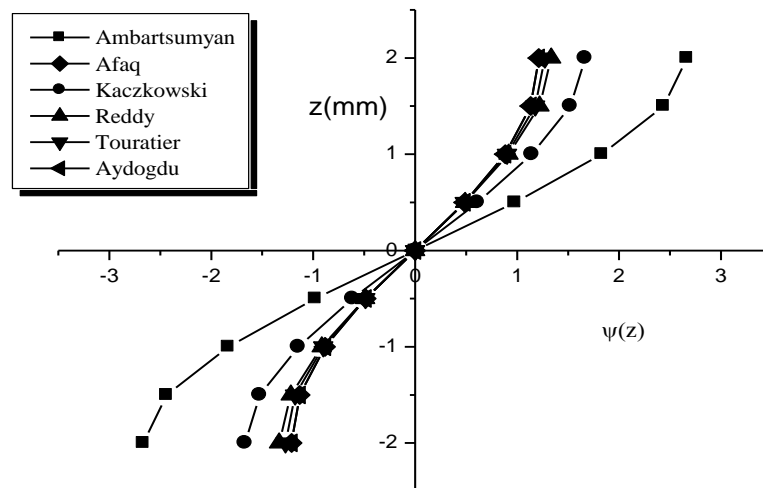
Où :  $\Psi(z)$  peut être considérée comme la fonction de cisaillement qui permet de déterminer la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Selon cette fonction  $\Psi(z)$ , nous pouvons distinguer quelques modèles d'ordre supérieurs importants dans la littérature qui sont chronologiquement décrits comme suit :

**Tableau III. 1** Différentes Fonctions de cisaillement  $\Psi(z)$  utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

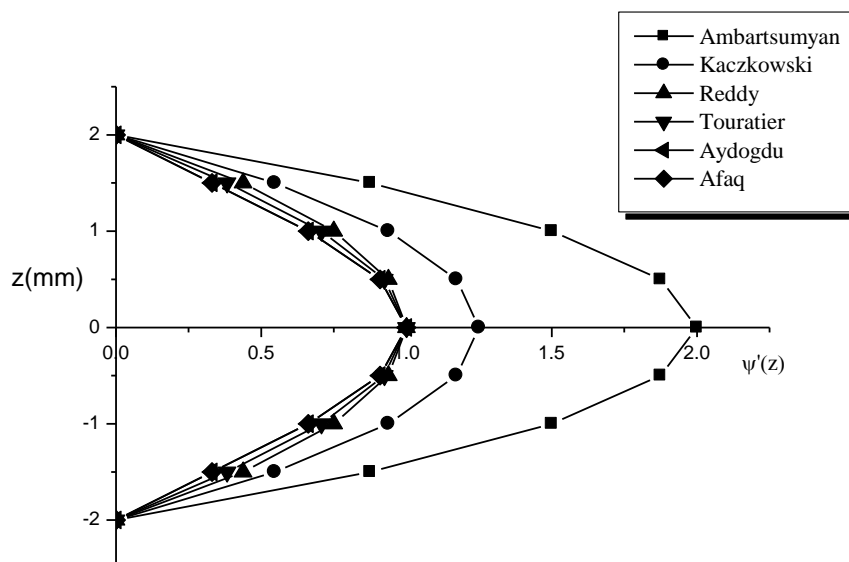
Auteurs	Fonctions de cisaillement
Ambarsumyan (Ambarsumyan S., 1958)	$\Psi(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Kaczkowski (Kaczkowski Z., 1968) ; Panc (Panc V., 1975) et Reissner (Reissner E., 1975)	$\Psi(z) = \frac{5z}{4} \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Levinson (Levinson M., 1980); Murthy (Murthy MVV., 1981) et Reddy (Reddy J.N., 1984)	$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Levy (Levy M., 1877) ; Stein (Stein M., 1986) et Touratier (Touratier M., 1991)	$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Soldatos (Soldatos KP., 1992)	$\Psi(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Karama et al. (Karama M., 2003), (Karama M., 2009)	$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2}$
Ferreira et al. (Ferreira AJM., 2005)	$\Psi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Aydogdu (Aydogdu M., 2009)	$\Psi(z) = z\alpha^{-2(z/h)^2/\ln\alpha}$ , $\alpha > 0$
Mantari et al. (Mantari JL ., 2011)	$\Psi(z) = z\alpha^{-2(z/h)^2}$
El meiche et al. (El Meiche N., 2011)	$\frac{(h/\pi)\sin(hz/\pi) - z}{(\cosh(\pi/2)) - 1}$
Mantari et al. (Mantari JL ., 2012a)	$\Psi(z) = \tan(mz)$
Mantari et al. (Mantari JL., 2012b)	$\Psi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos(\pi z/h)}$
Mantari et Guedes Soares (Mantari JL., 2012c)	$\Psi(z) = \sinh\left(\frac{z}{h}\right) e^{m \cos(\pi z/h)}$
Grover et al. (Grover N., 2013)	$\Psi(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - z \frac{2r}{h\sqrt{r^2 + 4}}$ $r = 3$
Sahoo et Singh (Sahoo R., 2013)	$\Psi(z) = \cos^{-1}\left(\frac{rh}{z}\right) - \frac{4r}{h(4r^2 + 1)}$ $r = 0.46$
Mahi et al. (Mahi A., 2015)	$\frac{h}{2} \tanh\left(2\frac{z}{h}\right) - \frac{4}{3\cosh^2(III.1)} \left(\frac{z^3}{h^2}\right)$

Dans les figures III.5.(a) et III.5.(b), on présente la variation de la fonction de forme  $\Psi(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur, et la variation de la dérivée de la fonction de forme  $\Psi'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur de la plaque, on observe que les deux approches d'Ambartsumyan et celle de Kaczkowski sont notablement loin des autres fonctions de forme, mais elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse en 3D.

**a**



**b**



**Figure III.5** Comparaison entre différentes théories ; a) Variation de  $\Psi(z)$  des différents modèles ; b) Variation de  $\Psi'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur (Attia A., 2015).

En comparant les théories du premier ordre (FSDT) avec les théories d'ordre supérieur (HSDT), le calcul des facteurs de correction du cisaillement n'est pas nécessaire. Ces théories peuvent donner des résultats plus améliorés pour des plaques isotropes et FGM, cependant elles ne sont pas capables de reproduire une variation des déplacements plans suivant la direction de l'épaisseur pour des structures sandwichs.

### **III.4. Revue des travaux antérieurs sur les F.G.M**

#### **III.4.1. Modèle CPT**

Feldman et Aboudi (Feldman E., 1997) ont analysé le flambement élastique des plaques à gradient fonctionnel soumises à un chargement uniaxial dans le plan, dans cette analyse, utilisant une méthode basée sur une combinaison d'approche micromécaniques et structurelles. Ont été résolues analytiquement pour la charge de flambage des plaques FG avec diverses conditions aux limites en utilisant le CPT. Javaheri et Eslami, basé sur le modèle CPT pour étudier le comportement de flambement des plaques FG sous chargement thermiques (Javaheri R., 2002a) et de charges mécanique (Javaheri R., 2002b). Shariat et Eslami (Shariat BS., 2005) présentaient une analyse du flambement thermique des plaques rectangulaires FGP avec des imperfections géométriques en se basant sur la théorie classique des plaques. Kiani et al ont utilisé le modèle CPT, (Kiani Y., 2011) où présenté des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques rectangulaire mince en FGM reposant sur une fondation élastique sous divers types de charges thermiques. Ghannadpour et al. (Ghannadpour S.A.M., 2012) ont également examiné le flambage thermique des plaques FG en utilisant le CPT. Cependant, la charge de flambage a été calculée en utilisant la méthode des bandes finies au lieu de la solution de Navier dans le travail de Javaheri, (Javaheri R., 2002a). Le flambement des plaques de FGM soumises à une compression non uniforme a été examiné par Mahdavian (Mahdavian M., 2009) en utilisant les solutions de Fourier et la théorie CPT. Pouladvand a étudié la stabilité thermique au flambement d'une plaque rectangulaire FG mince avec épaisseur variable, la plaque a été considérée simplement appuyée, l'équation de stabilité et d'équilibre de la plaque ont été obtenues sur la base de la théorie classique des plaques. L'analyse du flambement de la plaque FG a été faite sous une charge thermique uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur (Pouladvand M., 2009). Mohammadi et al. (Mohammadi M., 2010) présenté des solutions analytiques dérivées pour l'analyse de flambement de plaques rectangulaires minces en FG avec deux bords opposés simplement appuyées et les deux autres bords ayant des conditions aux limites arbitraires. Les équations gouvernantes dérivées du CPT ont été

résolues analytiquement en utilisant l'approche en solution de type Levy. Kazerouni et al. (Kazerouni S.M., 2010) Présent une solution analytique exacte pour l'analyse de flambage thermique des plaques rectangulaires à gradient fonctionnel (FG) simplement appuyée dans deux extrémités opposées. Les équations de stabilité sont obtenues en basant sur la théorie classique de la plaque et en utilisant le principe de l'énergie potentielle totale minimale.

#### **III.4.2. Modèle FSDT**

Le FSDT a été largement utilisé pour modéliser les plaques FG. Praveen et Reddy (Praveen G.N., 1998) ont étudié les réponses transitoires non linéaires des plaques FG sous des charges thermiques et mécaniques en utilisant la méthode des éléments finis et le FSDT avec des hypothèses de von Karman. Della Croce et Venini (Della C.L., 2004) ont présenté une famille hiérarchique d'éléments finis pour l'analyse en flambement de plaques FG sous chargements mécaniques et thermiques en utilisant le FSDT et une formulation variationnelle. Cependant, le couplage étirement-flexion (stretching-bending) a été ignoré dans leur travail. Kim et al. (Kim K.D., 2008) ont étudié le comportement en flambement non linéaire des plaques et des coques FG en utilisant le FSDT avec une définition complète du tenseur de déformation. Sur la base de la formulation quasi-conforme, un élément de coque à quatre nœuds a été développé et mis en œuvre dans le paquet d'éléments finis dynamiques non linéaires à usage général XFINAS. Lanhe (Lanhe W., 2004) et Bouazza et al. (Bouazza M., 2010) proposaient des solutions analytiques dérivées pour la température de flambement d'une plaques FG simplement appuyée sous deux types de charges thermiques utilisant la FSDT et solution de Navier. Ganapathi et al. (Ganapathi M., 2006) ont utilisé la méthode FSDT et la méthode des éléments finis pour étudier le flambement des plaques oblique (skew plates) FG sous des charges de compression. Yaghoobi et Yaghoobi (Yaghoobi H., 2013) ont étudié le flambement de plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique sous des charges thermiques et mécaniques. La méthode FSDT et la série de puissance FROBENIUS ont été adoptées pour calculer la charge de flambage critique des plaques FG dans différentes conditions aux limites. Le flambement des plaques FG sous des charges mécaniques et thermiques a été étudié par Zhang et al. (Zhang L.W., 2014) en utilisant le FSDT et la méthode Meshless Local de Kriging qui est basée sur la formulation de forme faible de Petrov-Galerkin et l'interpolation de Kriging. Le comportement de post-flambement des plaques FG sous des chargements thermiques et mécaniques a été étudié par Wu et al. (Wu T.L., 2007) en utilisant le FSDT et les polynômes doubles de Chebyshev finis. Ce problème a également été étudié par Nguyen et Hoang (Nguyen D.D., 2010) en utilisant la méthode FSDT et Galerkin en

combinaison avec une procédure itérative. Kiani et Eslami (Kiani Y., 2012) ont étudié le flambement et le post-flambement des plaques FG sandwich reposant sur une fondation élastique sous des charges mécaniques en utilisant le FSDT avec des hypothèses de von-Karman. L'approche monomode (singlemode) combinée à la technique de Galerkin a été utilisée pour calculer la température critique de flambage et le chemin d'équilibre post-flambement des plaques FG simplement supportées.

Dai et al. (Dai K. Y., 2005) ont étendu la méthode de Galerkin élément-libre (element-free) (Belytschko T, 1994) à des plaques FG à couches piézoélectriques sous des charges mécaniques et thermiques basées sur le FSDT. Les résultats montrent que la méthode de Galerkin élément-libre présente de nombreuses caractéristiques intéressantes par rapport à la méthode des éléments finis.

Zhao et al. (Zhao X., 2009b), Zhao et Liew (Zhao X., 2011) ; (Zhao X., 2009a). (Lee YY., 2009) ; (Lee YY., 2010) ont développé un modèle Meshless Local basé sur le FSDT et le kp-Ritz méthode élément-libre. Ce modèle a été appliqué à des plaques et des coques en FG à travers différents problèmes, flambement non-linéaire (Zhao X., 2009a), flambement thermique (Zhao X., 2009b), cintrage thermique (Lee YY., 2009), post-flambement thermique (Lee YY., 2010) et flambage thermo-mécanique (Zhao X., 2011). Mohammadi et al. (Mohammadi M ., 2010) ont découplé cinq équations de gouvernance du FSDT en deux équations indépendantes. Les équations obtenues ont ensuite été résolues pour la charge de flambement des plaques FG sous des charges dans le plan en utilisant l'approche de la solution de type Levy. Cette approche en solution a été utilisée par Saidi et Jomehzadeh (Saidi AR ., 2009) pour dériver une solution de type Levy pour la déflambement et les contraintes des plaques FG soumises à des chargements transversaux.

Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement dans le FSDT, Nguyen et al. (Nguyen TK., 2008) ont adopté des équations d'équilibre incluant les contraintes transversales de cisaillement et les forces de cisaillement. Les résultats de l'analyse de flambement statique de plaques FG simplement supportées et de plaques sandwich en FG indiquent que la valeur du facteur de correction de cisaillement des modèles FG n'est pas la même que celle des modèles homogènes. Prakash et al. (Prakash T., 2009) ont reformulé le FSDT sur la base de la surface neutre pour étudier l'effet de la position de surface neutre sur la stabilité non-linéaire des plaques d'asymétrie FG sous des charges dans le plan. Les équations gouvernantes basées sur les hypothèses de von-Karman ont été résolues en utilisant



un élément continu  $C^0$  à huit nœuds. La FSDT à base de surface neutre a également été adoptée par Singha et al. (Singha MK., 2011) pour étudier les plaques FG en flambement sous pression transversale en utilisant la méthode des éléments finis. Les équations d'équilibre ont été utilisées pour calculer les contraintes transversales de cisaillement, tandis que la méthode énergétique a été adoptée pour dériver les expressions pour le facteur de correction de cisaillement.

### **III.4.3. Modèle TSDT**

Reddy (Reddy N., 2000) a présenté à la fois des formulations analytiques et des éléments finis basés sur le TSDT. Les formulations tiennent compte du couplage thermo-mécanique, de l'indépendance temporelle et de la non-linéarité géométrique de type von Karman. Yang et al. (Yang J., 2004) ont étudié le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des plaques sandwich FG sous l'action combinée d'un changement de température uniforme et d'une compression périodique dans le plan en utilisant le TSDT et une méthode semi-analytique. Javaheri et Eslami (Javaheri R, 2002c) ont déduit des solutions analytiques pour la température de flambement critique de plaques FG simplement appuyées sous quatre types de charges thermiques en utilisant la TSDT et les solutions de Navier. Un travail similaire a été réalisé par Samsam Shariat et Eslami (Shariat BS., 2007) pour des plaques FG soumises à trois types de chargements mécaniques et deux types de chargements thermiques. Najafizadeh et Heydari (Najafizadeh MM., 2007) ont dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques circulaires FG en utilisant le TSDT. Bodaghi et Saidi (Bodaghi M., 2010) dérivé des solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques de type FG Levy sous chargements dans le plan. En introduisant quatre nouvelles fonctions, cinq équations directrices dérivées du TSDT ont été converties en deux équations indépendantes. Ces équations ont ensuite été résolues pour des plaques rectangulaires FG en utilisant la solution de Levy. Yang et al. (Yang J., 2006) ont étudié la sensibilité des imperfections géométriques initiales sur le comportement post-flambement des plaques FG sous chargements mécaniques et thermiques. L'imperfection géométrique initiale a été supposée sous la forme du produit des fonctions trigonométriques et hyperboliques. Les équations gouvernantes basées sur les hypothèses de TSDT et de von Karman ont été résolues pour le chemin d'équilibre post-flambement des plaques FG avec différentes conditions aux limites, en utilisant une approche semi-analytique en combinaison avec une procédure d'itération. Nguyen et Pham (Nguyen DD., 2010) ont étudié le comportement post-flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique. Des solutions analytiques pour la charge de

flambage et la température de flambement des plaques FG sous des charges mécaniques et thermiques ont été obtenues en utilisant la méthode TSDT et Galerkin. Foroughi et Azhari (Foroughi H., 2014) ont utilisé la méthode TSDT et spline finite strip pour étudier le flambement et la vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique. Le TSDT et l'IGA étaient également employés par Jari et al. (Jari H., 2015) pour étudier les comportements linéaires et non linéaires de flexion, flambement et vibration libre des plaques FG sous sollicitations thermiques et mécaniques.

#### **III.4.4. Modèle HSDT**

Les HSDT peuvent être développés en utilisant des fonctions de forme polynomiales ou des fonctions de forme non polynomiales. En voici quelques travaux sur le modèle HSDT basé sur des fonctions polynomiales et des fonctions non polynomiales

##### **III.4.4.1. Modèles à base de fonctions polynomiales**

Qian et al. (Qian LF., 2004b) ; (Qian LF., 2003) et Gilhooley et al. (Gilhooley DF., 2007) ont utilisé une méthode de Meshless Local de Petrov-Galerkin et la quasi-3D de Batra et Vidoli (Batra RC, 2002) pour étudier le flambement et la vibration des plaques FG. (Qian LF, 2004a) Ils ont étendu leur travail précédent (Qian LF., 2003) aux problèmes transitoires des plaques FG sous des charges thermiques et mécaniques. Roque et al. (Roque CMC., 2007) ont étudié le comportement en flambement des plaques FG en utilisant une méthode de collocation Meshless avec des RBFs multi quadriques. La formulation était basée sur le HSDT de Pandya et Kant (Pandya BN., 1988) avec 7 inconnues et représentant une variation cubique des déplacements dans le plan et un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur. Matsunaga a développé une théorie quasi-3D pour les analyses de flambage et de vibration libre des plaques FG (Matsunaga H., 2008). La théorie était basée sur l'expansion en série de la puissance des déplacements dans le plan et transverse. Matsunaga a étendu sa théorie aux problèmes de flambage thermique (Matsunaga, 2009b), (Matsunaga-H., 2009a) des plaques FG. Chen et al. (Chen CS., 2009) ont étudié la vibration libre et le flambement des plaques FG sous la combinaison d'une contrainte d'extension et d'une contrainte de flambement pure.

Le TSDT est donc déduit comme un cas spécifique. Cette théorie a été étendue au problème de flambement des plaques FG (Xiang S., 2013a). Xiang et Kang (Xiang S., 2013b) ont évalué diverses théories de déformation de cisaillement inconnues pour le flambement de plaques FG en utilisant une méthode Meshless Local avec RBF spline, tandis que Sobhy

(Sobhy M., 2013) a évalué diverses théories de déformation de cisaillement inconnues pour le flambage et la vibration libre des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique avec diverses conditions aux limites en utilisant une méthode en série. Reddy a développé un HSDT général avec une non linéarité géométrique de von Karman pour l'analyse thermomécanique des plaques FG (Reddy JN., 2011).

#### **III.4.4.2. Modèles à base de fonctions non polynomiales**

La fonction non polynomiale est d'abord été utilisée par Levy (Levy M., 1877) avec une fonction sinusoïdale pour développer une théorie raffinée pour les plaques isotropes épaisses. La fonction sinusoïdale a ensuite été adoptée par Stein (Stein M., 1986) et Touratier (Touratier M., 1991) pour développer une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale de cinq inconnues (SSDT) pour les plaques composites isotropes et stratifiées, respectivement.

Le SSDT a été largement utilisé pour étudier le flambement thermique de plaques composites par (Zenkour M., 2004b), (Ferreira AJM., 2005), le flambement de plaques composites étudié par (Zenkour A., 2004a), le flambement de plaques sandwich FG (Zenkour A.M., 2005), (Zenkour AM., 2010b), le flambement et la vibration de plaques sandwich FG par (Zenkour A.M., 2005), (Zenkour AM., 2010a), flambement des plaques FG (Zenkour A-M., 2006) et flambage thermique de plaques FG reposant sur une fondation élastique (Zenkour AM, 2011) .

Les relations de flambement entre les quantités de SSDT et de CPT ont été calculées par Zenkour (Zenkour AM., 2012) pour les plaques de type FG Levy. Soldatos (Soldatos KP., 1992) a d'abord utilisé une fonction hyperbolique pour développer un HSDT pour les plaques composites stratifiées. Akavci (Akavci SS., 2010) ; (Akavci S., 2014) a proposé une nouvelle fonction hyperbolique pour développer un HSDT pour l'analyse en flambement des plaques composites. Une fonction hyperbolique inverse a été utilisée par Grover et al. (Grover N., 2013) afin développer un HSDT pour les plaques composites et sandwichs. Mahi (Mahi A., 2015) a récemment développé un HSDT pour les plaques sandwichs et composites FG basé sur une nouvelle fonction hyperbolique. La fonction exponentielle est d'abord été utilisée par Karama et al (Karama M., 2003) pour développer un HSDT pour les poutres composites. Aydogdu (Aydogdu M., 2009) a étendu le travail précédent (Karama M., 2003) à des plaques composites. Ce HSDT a été adopté par Mantari et Guedes Soares (Mantari JL., 2014a) pour étudier le comportement en flambement des plaques FG. Une fonction tangentielle a été

employée par Mantari et Guedes Soares pour développer un HSDT pour les plaques FG (Mantari JL., 2012d). Mantari et al. combinent des fonctions exponentielles et trigonométriques pour développer un HSDT pour les plaques FG (Mantari JL., 2012e). Mantari et Guedes Soares combinent aussi des fonctions exponentielles et hyperboliques afin de développer un HSDT pour des plaques FG (Mantari JL., 2013). Une combinaison de fonctions tangentielles et exponentielles a été proposée par Mantari et al. (Mantari JL., 2014b) pour développer un HSDT pour les plaques FG. Nguyen et al. combinent les fonctions tangentielles et cubiques inverses pour les plaques sandwich FG, (Nguyen VH., 2014), tandis que Thai et al. (Thai CH., 2014b) développaient des fonctions tangentielles et linéaires inverses combinées pour les plaques composites et sandwiches. Thai et al. (Thai CH., 2014a) ont suivi leur travail antérieur (Thai CH., 2014b) pour développer un HSDT pour l'IGA des plaques sandwich de FG en utilisant deux nouvelles fonctions trigonométriques.

### **III.5. Conclusion**

Les éléments présentés dans cette section montrent, le développement de divers modèles pour la modélisation et l'analyse des plaques FG telle que, la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. D'autre part, une revue de littérature sur les différents travaux qui ont été effectués sur l'analyse des structures FGM. La majorité des recherches menées purement analytique, pour prédire la réponse globale des plaques FG et des coques sous des charges mécaniques et thermiques.

**Chapitre IV :**  
**Analyse Du Flambement Mécanique**  
**Des Plaques Rectangulaire P-FGM**  
**Avec Epaisseur Constant Par La**  
**Méthode Des Différences Finis**

**Chapitre IV : Analyse Du Flambement Mécanique Des Plaques Rectangulaire P-FGM**  
Avec Epaisseur Constant Par La Méthode Des Différences Finies

**IV.1. Introduction**

Les besoins de modélisation des structures évoluent fortement, et bien que la plupart des problèmes soient théoriquement résolubles avec des méthodes bidimensionnel ou tridimensionnelles et que les capacités de calculs des ordinateurs modernes soient très importantes, les modèles de plaques posés sur des hypothèses cinématiques restent indispensables pour permettre le calcul sur de larges structures ou encore l'utilisation d'algorithmes d'optimisation tels que les algorithmes génétiques.

Ce chapitre présente un modèle ESL générique permettant de décrire le comportement d'une plaque en matériaux à gradient de propriété (FGM) admettant une variation de la déformation en cisaillement transverse au travers de l'épaisseur. Cette variation est décrite par le modèle de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et résolue au moyen d'un jeu de fonctions de différence de fini (MDF). Le principal avantage de cette méthode est sa souplesse, en effet cette méthode (MDF), peut être adaptée, permettant ainsi de mettre en œuvre différents modèles. Ceci confère à une capacité à résoudre les équations différentielles d'autres modèles de plaques classiques notamment la CPT et HSDT.

Après une présentation de différentes formulations numériques de la section IV.3 et ainsi que la méthode de différences finies pour un modèle de plaque générique dans la section IV.4. Nous présentons par la suite une validation numérique de la méthode différence finie en comparant le flambement d'une plaque rectangulaire à une épaisseur constante et simplement appuyée, sous différent cas de chargement mécanique avec une référence bibliographique quasi-récente. Cette validation oriente nous vers une autre proposition de modéliser par la méthode de différence finie d'une plaque rectangulaire d'épaisseur parabolique.

**IV.2. Définition d'un plaque en FGM**

**IV.2.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM**

Un FGM est défini comme un matériau qui a une gradation continue à travers épaisseur ( $h$ ). Un côté du matériau est typiquement en céramique et l'autre côté est typiquement en métal. Un mélange des deux matériaux compose les caractéristiques à travers l'épaisseur. Cette variation de matériau est décrite par un paramètre ( $k$ ).

La valeur de  $k$  est significative, car elle est un exposant de l'équation de la fraction volumique. ( $k$ ) décrit essentiellement la quantité et la distribution de céramique dans la plaque. Les concepteurs peuvent varier la valeur de  $k$  pour adapter le FGM à des applications spécifiques, où avec des valeurs plus élevées de ( $k$ ), la plaque tend vers le métal (la surface inférieure) tandis que les valeurs inférieures de ( $k$ ) tendent vers la céramique (la surface supérieure), comme illustré dans la figure suivant.

La propriété de matériau typique ( $P$ ) varie à travers l'épaisseur de la plaque en fonction des expressions (une loi de puissance).

$$P(z) = (P_t - P_b)V_c + P_b$$
$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k ; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{IV. 1}$$

Où ( $P_t$  et  $P_b$ ) désigne la propriété particulière considérée sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement, et ( $k$ ) le paramètre qui détermine le profil de variation du matériau dans l'épaisseur. La variation de la fraction volumique ( $V_c$ ), de céramique à travers l'épaisseur de la plaque est un indicateur de la fraction volumétrique de céramique à un emplacement donné. Cette fraction volumique est basée sur le mélange de métal et de céramique est un indicateur de la composition du matériau (volumétrique) à tout endroit donné dans l'épaisseur.

Si la fraction volumique de céramique est définie comme ( $V_c$ ), alors la fraction volumique du métal est le reste du matériau, où ( $1 - V_c$ ). Soit ( $E, G$  et  $\rho$ ) également varient selon la loi sur puissance. Tant dit que le module de Poisson ( $\nu$ ), est Considère pour être une constant à travers l'épaisseur

Par exemple, la variation du module de Young est donnée par l'équation (IV.2).

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad \text{IV. 2}$$

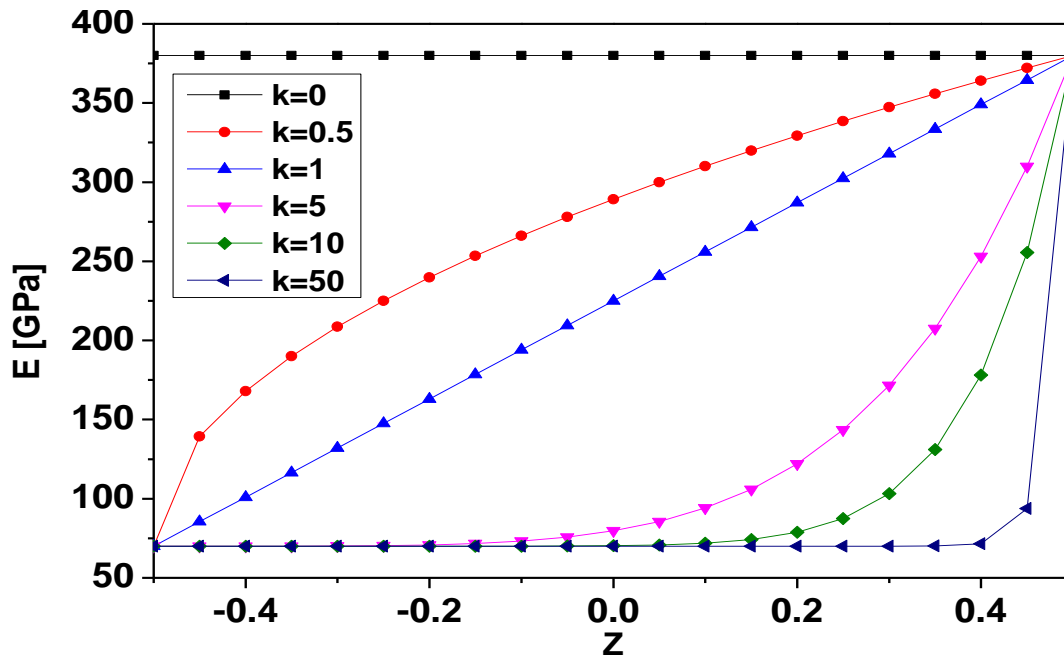


Figure IV. 1 Variation de module de Young en fonction de k dans une plaque P-FGM.

#### IV.2.2. Configuration géométrique de la plaque FGM proposée

Pour les éléments de plaque, on définit une surface de référence, ou surface moyenne, plane ( $x, y$ ) et une épaisseur  $h(x, y)$ . Cette épaisseur doit être petite par rapport aux autres dimensions de la structure à modéliser. Une représentation plus détaillée de la géométrie et le matériau de la plaque est montrée dans la figure IV.2. On attache à la surface moyenne ( $\Omega$ ) un repère orthonormé local ( $Oxyz$ ) associé au plan tangent de la structure différent du repère global ( $OXYZ$ ). La position des points de la plaque est donnée par les coordonnées cartésiennes ( $x, y$ ) de la surface moyenne et l'élévation ( $z$ ) par rapport à cette surface, avec pour origine ( $O$ ) joignant les sommets, on définit le repère dit intrinsèque.

Ainsi que le noir indique le métal et le blanc indique le matériau céramique. La zone grise entre le noir et le blanc est un indicateur visuel du mélange de métal et de céramique. Le gris foncé est un mélange riche en métal tandis que le gris clair est un mélange riche en céramique.



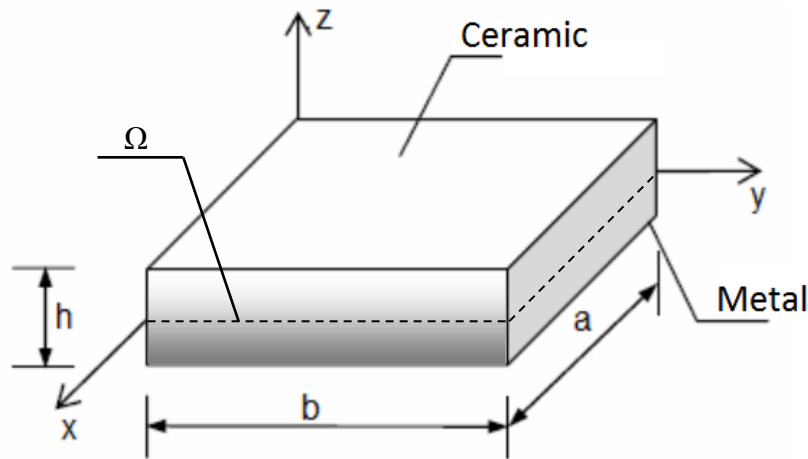


Figure IV. 2 Une plaque de FGM et sa notation géométrique

### IV.3. La théorie de déformation en cisaillement de premier ordre

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques. Cette théorie (FSDT) rend compte de l'effet de déformation de cisaillement au moyen d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur (Reissner .E., 1945) (Mindlin R.D., 1951).

#### IV.3.1. Le champ de déplacements

Dans ce qui suite, les éléments reposent sur la théorie des plaques en petits déplacements et petites déformations.

Le champ de déplacements de chaque point s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_1(x, y) = u + z\vartheta_x \\ v_1(x, y) = v + z\vartheta_y \\ w_1(x, y) = w \end{cases} \quad \text{IV. 3}$$

Avec  $u_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$  représente les déplacement totaux et  $u$  et  $v$  les déplacements dans le plan de la surface neutre, respectivement dans la direction  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  $\vartheta_x, \vartheta_y$  sont les rotations autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement, voir la figure III.3.

#### IV.3.2. Champs de déformations et de contraintes

Le champ de déformations en tout point issu de l'équation <sup>(IV.3)</sup> s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} + z\phi_{x,x} \\ \varepsilon_y = v_{,y} + z\phi_{y,y} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + z(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ \gamma_{xz} = \phi_x + w_{,x} \\ \gamma_{zy} = \phi_y + w_{,y} \end{cases} \quad \text{IV. 4}$$

On remarque que ce jeu de fonction est déjà réduit à cinq variables, comme pour tout modèle de plaque classique, on suppose un état de déformation plane généralisée dans la structure. On élimine alors  $(\varepsilon_z)$  pour obtenir la loi de Hooke modifiée. Cela revient donc à poser pour hypothèse (hypothèse des contraintes planes) qu'est  $\sigma_{zz}(x, y, z)$  est nulle.

La loi de comportement la plus générale s'écrit alors ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \\ \sigma_{zy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zy} \end{cases} \quad \text{IV. 5}$$

Où, les premiers paramètres de multiplications au paramètre de déformations sont les rigidités de contraintes planes généralisées.

### IV.3.3. Prise en compte du cisaillement transverse (facteur de correction)

La prise en compte du cisaillement transverse dépend de facteurs de correction déterminés a priori par des équivalences énergétiques avec des modèles 3D, de façon à ce que la rigidité en cisaillement transverse du modèle de plaque soit la plus proche possible de celle définie par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

□

Reissner a supposé la variation des contraintes de membrane ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_{xy}$ ) linéaire dans l'épaisseur. Il utilise les équations d'équilibre pour en déduire la variation des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque, en respectant notamment les conditions d'équilibre sur les faces supérieures et inférieures de plaque. L'énergie interne du

modèle obtenue après résolution des équations d'équilibre en 3D, pour la flexion uniquement, avec la variation des contraintes planes suivant (z) , fait apparaître, pour un matériau élastique, une relation entre les efforts résultants, les rotations et la flèche moyennes. C'est dans cette relation qu'apparaît le facteur de correction de cisaillement de (k = 5/6) dans la relation qui lie l'effort tranchant à la distorsion pour une plaque homogène et isotrope. C'est notre cas où on a supposé la plaque FGM qu'elle est isotrope.

#### IV.3.4. Équations des efforts et des moments

Les forces et les moments par unité de longueur (figure IV.3) sont donnés en termes de composants de contrainte à travers l'épaisseur comme :

$$\begin{cases} N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz & ; i = x, y, xy \\ M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i z dz & ; i = x, y, xy \\ Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iz} dz & ; i = x, y \end{cases} \quad \text{IV. 6}$$

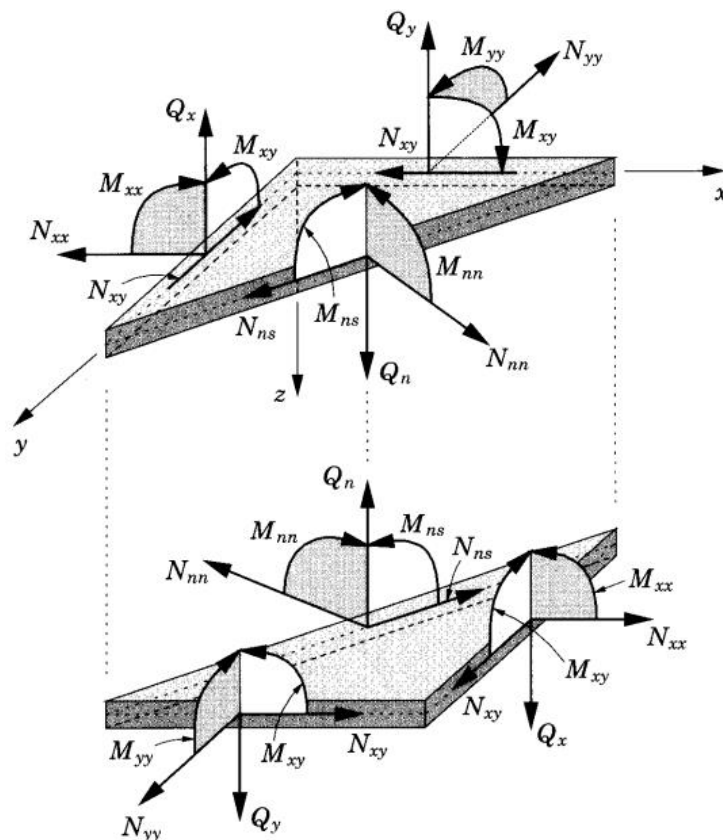


Figure IV. 3 Forces et moments résultants sur un élément de plaque (Reddy J-N., 1997)

L'intégration des équations <sup>(IV.6)</sup> au travers de l'épaisseur, avec l'aide des équations <sup>(IV.3)</sup>, <sup>(IV.4)</sup> et <sup>(IV.5)</sup> donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x = \frac{E_1}{1-\nu^2} (u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{E_2}{1-\nu^2} (\phi_{x,x} + \nu \phi_{y,y}) \\ N_y = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\nu u_{,x} + v_{,y}) + \frac{E_2}{1-\nu^2} (\nu \phi_{x,x} + \phi_{y,y}) \\ N_{xy} = \frac{E_1}{2(1+\nu)} (u_{,y} + v_{,x}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ M_x = \frac{E_2}{1-\nu^2} (u_{,x} + \nu v_{,y}) + \frac{E_3}{1-\nu^2} (\phi_{x,x} + \nu \phi_{y,y}) \\ M_y = \frac{E_2}{1-\nu^2} (\nu u_{,x} + v_{,y}) + \frac{E_3}{1-\nu^2} (\nu \phi_{x,x} + \phi_{y,y}) \\ M_{xy} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} (u_{,y} + v_{,x}) + \frac{E_3}{2(1+\nu)} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ Q_x = \frac{E_1}{2(1+\nu)} (\phi_x + w_{,x}) \\ Q_y = \frac{E_1}{2(1+\nu)} (\phi_y + w_{,y}) \end{array} \right. \quad \text{IV. 7}$$

Avec les quantités suivantes  $(E_1, E_2, E_3)$  sont déterminé par l'équation <sup>(IV.8)</sup>:

$$(E_1, E_2, E_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) E(z) dz \quad \text{IV. 8}$$

### IV.3.5. Détermination des équations d'équilibre du système

En négligeant les forces extérieures, et en gardant la même convention sur les indices, les équations d'équilibre de Von Karman, s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = 0 \\ (Q_{x,x} + Q_{y,y} + q + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2 N_{xy} w_{,xy}) = 0 \end{array} \right. \quad \text{IV. 9}$$

Les calculs des forces généralisées obtenues à partir des équations <sup>(IV.7)</sup> et <sup>(IV.9)</sup> donnent :

$$\begin{cases} \frac{E_1}{1-\nu^2}(u_{,xx} + \nu v_{,xy}) + \frac{E_2}{1-\nu^2}(\phi_{x,xx} + \nu \phi_{y,xy}) + \frac{E_1}{2(1+\nu)}(u_{,yy} + v_{,xy}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)}(\phi_{x,yy} + \phi_{y,xy}) = 0 \\ \frac{E_1}{1-\nu^2}(\nu u_{,xy} + v_{,yy}) + \frac{E_2}{1-\nu^2}(\nu \phi_{x,xy} + \phi_{y,yy}) + \frac{E_1}{2(1+\nu)}(u_{,xy} + v_{,xx}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)}(\phi_{x,xy} + \phi_{y,xx}) = 0 \\ \frac{E_2}{1-\nu^2}(u_{,xx} + \nu v_{,xy}) + \frac{E_3}{1-\nu^2}(\phi_{x,xx} + \nu \phi_{y,xy}) + \frac{E_2}{2(1+\nu)}(u_{,yy} + v_{,xy}) + \frac{E_3}{2(1+\nu)}(\phi_{x,yy} + \phi_{y,xy}) - \frac{E_1}{2(1+\nu)}(\phi_x + w_{,x}) = 0 \\ \frac{E_2}{2(1+\nu)}(u_{,xy} + v_{,xx}) + \frac{E_3}{2(1+\nu)}(\phi_{x,xy} + \phi_{y,xx}) + \frac{E_2}{1-\nu^2}(\nu u_{,xy} + v_{,yy}) + \frac{E_3}{1-\nu^2}(\nu \phi_{x,xy} + \phi_{y,yy}) - \frac{E_1}{2(1+\nu)}(\phi_y + w_{,y}) = 0 \\ \frac{E_1}{2(1+\nu)}((\phi_{x,x} + w_{,xx}) + (\phi_{y,y} + w_{,yy})) + q + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2 N_{xy} w_{,xy} = 0 \end{cases} \quad \text{IV. 10}$$

Les équations d'équilibre <sup>(IV.10)</sup> peut être aboutir à une selle équation différentielle qui exprime l'équilibre des plaques soumises à une charge axiale de compression, cette équation est ainsi applicable dans tous les cas d'appui : appui simple, appui double et encastrement).

$$\nabla^4 w + D_1 \nabla^2 (N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2 N_{xy} w_{,xy} + q) + D_2 (N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + 2 N_{xy} w_{,xy} + q) = 0 \quad \text{IV. 11}$$

Sachant :

$$\begin{cases} D_1 = \frac{2(1+\nu)}{E_1} \\ D_2 = -\frac{E_1(1-\nu^2)}{E_1 E_3 - E_2^2} \end{cases} \quad \text{IV. 12}$$

Pour établir les équations de stabilité, la méthode d'équilibre critique est utilisée (Brush D.O., 1975). En supposant que l'état d'équilibre stable d'une plaque générale sous charge mécanique peut être désigné par  $(w_0)$ . Le déplacement de l'état voisin est  $(w_0 + w_1)$ , où  $(w_1)$  est un incrément de déplacement arbitrairement petit. Substitution de  $(w_0 + w_1)$  dans l'équation <sup>(IV.11)</sup> et en substituant l'équation d'origine, les résultats dans l'équation de stabilité suivante :

$$\nabla^4 w_1 + D_1 \nabla^2 (N_x^0 w_{1,xx} + N_y^0 w_{1,yy} + 2 N_{xy}^0 w_{1,xy}) + D_2 (N_x^0 w_{1,xx} + N_y^0 w_{1,yy} + 2 N_{xy}^0 w_{1,xy}) = 0 \quad \text{IV. 13}$$

Sachant que:

$N_x^0$ ,  $N_y^0$  et  $N_{xy}^0$  représentent les résultantes des forces du pré-flambage.

Pour déterminer la charge critique du flambement, les forces pré-flambage  $N_x^0$ ,  $N_y^0$  et  $N_{xy}^0$  devrait être trouvée d'abord. En considérant une plaque carrée soumise à des charges dans le plan, les forces de pré-flambage peuvent être obtenues en utilisant les conditions d'équilibre comme :

$$\begin{cases} N_x^0 = \xi_1 P \\ N_y^0 = \xi_2 P \\ N_{xy}^0 = 0 \end{cases} \quad \text{IV. 14}$$

Où,  $(P)$  est la force par unité de longueur,  $(\xi_1)$  et  $(\xi_2)$  sont les paramètres de charge qui indiquent les conditions de chargement. Notant que les valeurs négatives pour  $(\xi_1)$  et  $(\xi_2)$  correspondent à des charges de compression.

En remplaçant l'expression <sup>(IV.14)</sup> dans l'équation <sup>(IV.13)</sup> on aura :

$$\nabla^4 w_1 + D_1 P \nabla^2 (\xi_1 w_{1,xx} + \xi_2 w_{1,yy}) + D_2 P (\xi_1 w_{1,xx} + \xi_2 w_{1,yy}) = 0 \quad \text{IV. 15}$$

L'équation différentielle du quatrième ordre présentée par l'équation <sup>(IV.15)</sup> peut être résolue numériquement en utilisant la méthode des différences finies. L'avantage de l'utilisation de la méthode des différences finies est d'avoir des capacités supplémentaires telles que la variation

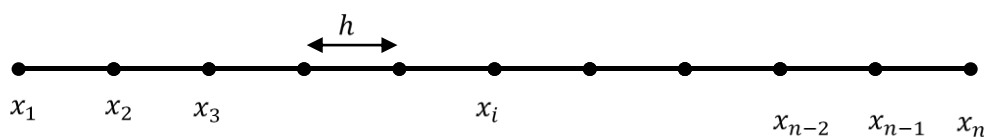
de l'épaisseur, tout en incluant une telle capacité dans la procédure analytique peut généralement conduire à des expressions complexes qui sont difficiles à résoudre.

#### IV.4. La Méthode des Différences Finies (MDF)

L'objectif de la méthode des différences finies est de trouver une solution approchée aux équations différentielles d'un problème donné, à savoir, de trouver une fonction (ou une approximation discrète à cette fonction) qui satisfait une relation donnée entre ses dérivés sur une région donnée de l'espace et / ou le temps, ainsi que certaines conditions limites le long des bords de ce domaine. En général, cela est un problème difficile à résoudre et une formule analytique ne peut que rarement être trouvée pour la solution. Une méthode des différences finies procède par le remplacement des dérivés dans les équations différentielles par approximations aux différences finies. Cela donne un grand système algébrique des équations à résoudre à la place de l'équation différentielle, quelque chose qui est facilement résolu sur un ordinateur.

##### IV.4.1. Principe de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies (MDF) fonctionne en remplaçant la région sur laquelle les variables indépendantes de l'équation de dériver partielle EDP sont définis par une grille finie (un maillage) des points où la variable dépendante est approchée. Les dérivées partielles de l'EDP à chaque zone de point de grille estimée, figure IV.4, à partir des valeurs voisines en utilisant le théorème de Taylor.



**Figure IV. 4** Discrétisation par un maillage en DF d'un domaine.

Soit  $U(x)$  une fonction accepte  $n$  dérivées continues sur l'intervalle  $(a, b)$ . Pour

$$a < x_0, x_0 + h < b,$$

$$U(x_0 + h) = U(x_0) + h U_x(x_0) + h^2 \frac{U_{xx}(x_0)}{2!} \dots + h^{n-1} \frac{U_{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + O(h^n) \quad \text{IV. 16}$$

Où

$$U_x = \frac{dU}{dx}, U_{xx} = \frac{d^2U}{dx^2}, \dots, U_{(n-1)} = \frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}.$$

$U_x(x_0)$  : la dérivé de  $U$  par rapport à  $x$  pour  $x = x_0$ .

$O(h^n)$  : Terme d'erreur inconnu.

$h$  : le pas de grille.

L'interprétation habituelle du théorème de Taylor dit que si nous connaissons la valeur de  $U$  et les valeurs de ses dérivés au point  $x_0$  alors nous pouvons écrire l'équation <sup>(IV.16)</sup> pour sa valeur au point  $x_0 + h$  (à proximité). Cette expression contient une quantité inconnue qui est  $O(h^n)$ . Si nous écartons le terme  $O(h^n)$  à l'équation <sup>(IV.16)</sup> nous obtenons une approximation de  $U(x_0 + h)$ . L'erreur dans cette approximation est  $O(h^n)$ .

Dans la MDF, les deux points de grille  $x_0$  et  $x_0 + h$  et  $U(x_0)$  et  $U(x_0 + h)$  sont connus. Cela nous permet de réorganiser l'équation <sup>(IV.16)</sup> pour obtenir soi-disant différences finies (FD) approximatives aux dérivés qui ont les erreurs  $O(h^n)$ .

Après simplification, le premier terme de dérivé en avant est donné par :

$$U_x(x_0) = \frac{U(x_0 + h) - U(x_0)}{h} + O(h) \quad \text{IV. 17}$$

Négligeant le terme  $O(h)$

$$U_x(x_0) \approx \frac{U(x_0 + h) - U(x_0)}{h} \quad \text{IV. 18}$$

$$U_x(x_0) \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \quad \text{IV. 18 bis}$$

Pour le premier terme de dérivé en arrière on prend  $-h$  au lieu de  $h$  est donné par :

$$U_x(x_0) \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h} \quad \text{IV. 19}$$

La dérivé central est donné par :



$$U_x(x_0) \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \quad \text{IV. 20}$$

Le deuxième dérivé est donné par une différence finie symétrique :

$$U_{xx}(x_0) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{2h^2} \quad \text{IV. 21}$$

#### IV.4.2. Application de la méthode des différences finies à l'analyse des plaques

Considérons une plaque mince simplement appuyée, l'équation décrivant la flexion de la plaque est donnée :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \text{IV. 22}$$

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad \text{IV. 23}$$

Les trois paramètres de l'équation <sup>IV.22</sup> s'écrivent en utilisant la MDF au point  $w_{i,j}$ , figure IV.5, par :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4} (w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}) \quad \text{IV.24a}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4} (w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}) \quad \text{IV.24b}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{h^2} (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}) \right) \quad \text{IV.24c}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h^4} & (w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 4w_{i,j} - 2w_{i-1,j} \\ & + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j-1}) \end{aligned} \quad \text{IV. 24}$$

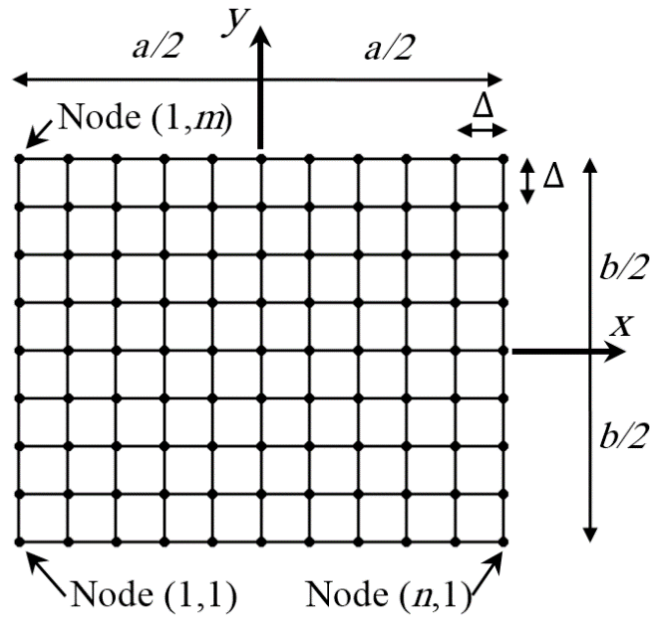


Figure IV. 5 Maillage à différence finie de la plaque.

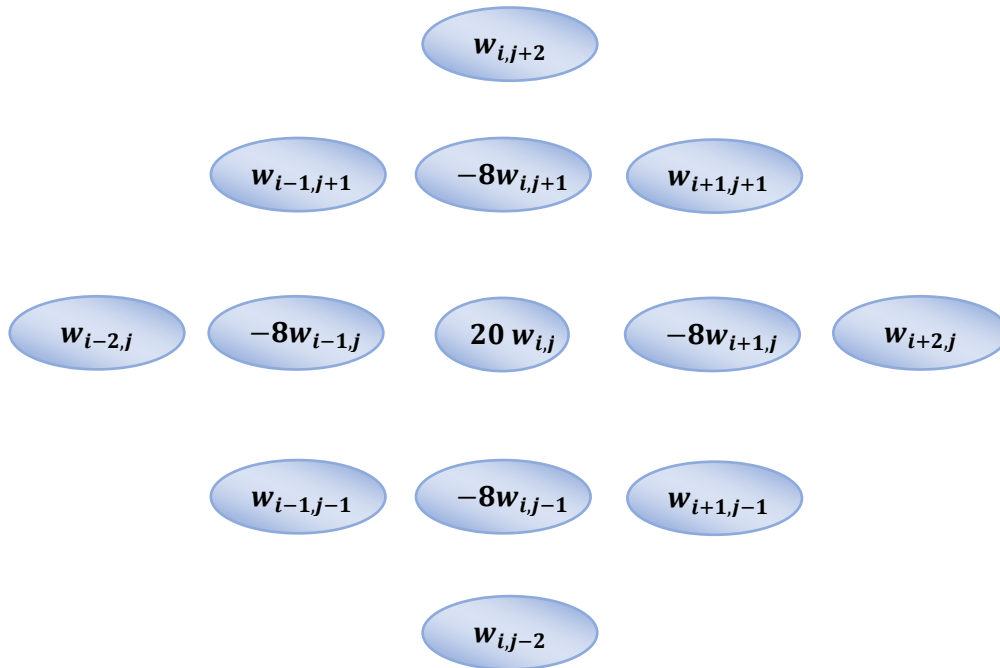


Figure IV. 6 Ecriture de l'équation différentielle en MDF au point  $w_{i,j}$  en maillage.

#### IV.4.3. Solution de l'équation différentielle

La détermination de la charge critique, charge minimale nécessaire pour que la plaque instable, nécessite la résolution de l'équation différentielle <sup>(IV.15)</sup>. Dans cette recherche, la

résolution du problème s'effectuera par une discrétisation en utilisant la méthode des différences finies.

Pour donner une solution approchée à l'équation différentielle <sup>(IV.15)</sup>, en savoir, de trouver une fonction, ou une approximation discrète à cette fonction, qui satisfait une relation donnée entre ses dérivés sur une région donnée de l'espace et / ou le temps, avec les conditions des frontières le long des bords de ce domaine. En général, cela est un problème difficile et une formule analytique ne peut que rarement être trouvée pour la solution. La méthode de différence finie est une alternative, procède en remplaçant les dérivés dans les équations différentielles par approximations aux différences finies. Cela donne un grand système algébrique des équations à résoudre à la place de l'équation différentielle, quelque chose qui est facilement résolu sur un ordinateur.

L'objectif de l'utilisation de la méthode des différences finies est de disposer des capacités supplémentaires telles que notamment la variation d'épaisseur, tout en évitant une telle procédure analytique qui peut généralement conduire à des expressions complexes qui sont difficiles à résoudre.

Pour ce faire, nous considérons une plaque FGM rectangulaire maillée en  $(n \times m)$  nœuds espacés par  $(\Delta h)$  dans les directions  $(x)$  et  $(y)$ , comme le montre la figure (IV.5).

L'équation gouvernante donnée par l'équation <sup>(IV.15)</sup> est écrit en format de différence finie (mesh) comme :

$$\begin{aligned}
 & (10(2 + (\xi_1 + \xi_2)C_1P))w_{(i,j)} \\
 & + (2 + D_1(\xi_1 + \xi_2)P)(w_{(i+1,j+1)} + w_{(i+1,j-1)} + w_{(i-1,j-1)} \\
 & + w_{(i-1,j+1)}) + (C_2P - 8)(w_{(i+1,j)} + w_{(i-1,j)}) \\
 & + (C_3P - 8)(w_{(i,j+1)} + w_{(i,j-1)}) \\
 & + (D_1P\xi_1 + 1)(w_{(i+2,j)} + w_{(i-2,j)} + w_{(i,j+2)} + w_{(i,j-2)}) = 0
 \end{aligned}
 \tag{IV. 25}$$

Où:

$$\begin{cases} C_1 = D_1 - D_2 \Delta h^2 / 5 \\ C_2 = D_1(-6 \xi_1 - 2 \xi_2) + D_2 \Delta^2 \xi_1 \\ C_3 = D_1(-2 \xi_1 - 6 \xi_2) + D_2 \Delta^2 \xi_2 \end{cases} \quad \text{IV. 26}$$

Ce maillage (présenté par l'équation <sup>(IV.25)</sup>) est appliqué aux nœuds de coordonnées ( $i = 2..n - 1, j = 2..m - 1$ ). Notant que cette opération entraînera des nœuds virtuels le long des lignes ( $i = 2, i = n - 1, j = 2, j = m - 1$ ).

Puisque l'on choisi de respecter les conditions aux limites simplement appuyées, les nœuds virtuels peut être annulé.

On satisfera les conditions aux limites, qui peuvent être formulées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{à } x = 0, a: & w_1 = 0; \quad M_{x1} = 0; \quad \phi_y = 0 \\ \text{à } y = 0, b: & w_1 = 0; \quad M_{y1} = 0; \quad \phi_x = 0 \end{cases} \quad \text{IV. 27}$$

- Pour que ces conditions aux limites soient satisfaites, on adopter les déplacements nuls le long des bords soit :

$$w_{1(i,j)} = 0 \quad \text{on} \quad \begin{cases} i = (1, n), & j = (1..m) \\ i = (1..n), & j = (1, m) \end{cases} \quad \text{IV. 28}$$

- On peut également, exprimant les moments nuls le long des bords en termes de déflexions  $w_1$ , les nœuds virtuels sont simplement éliminés en un système de  $(n - 2) \times (m - 2)$  simultanée, les équations qui s'expriment comme :

$$[A]\{w_1\} = \{0\} \quad \text{IV. 29}$$

Soit la matrice A égale :

$$\begin{bmatrix}
 A_{(2,2)} & A_{(2,3)} & A_{(2,4)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 A_{(3,2)} & A_{(3,3)} & A_{(3,4)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 A_{(4,2)} & A_{(4,3)} & A_{(4,4)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A_{(i,i)} & A_{(i,i+1)} & A_{(i,i+2)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A_{(i+1,i)} & A_{(i+1,i+1)} & A_{(i+1,i+2)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A_{(i+2,i)} & A_{(i+2,i+1)} & A_{(i+2,i+2)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A_{(n-3,m-3)} & A_{(n-3,m-2)} & A_{(n-3,m-1)} \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A_{(n-2,m-3)} & A_{(n-2,m-2)} & A_{(n-2,m-1)} \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A_{(n-1,m-3)} & A_{(n-1,m-2)} & A_{(n-1,m-1)}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 W_{(2,2)} \\
 W_{(3,2)} \\
 W_{(4,2)} \\
 \vdots \\
 W_{(i,j)} \\
 W_{(i+1,j)} \\
 W_{(i+2,j)} \\
 \vdots \\
 W_{(n-3,m-1)} \\
 W_{(n-2,m-1)} \\
 W_{(n-1,m-1)}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad \text{IV. 30}$$

$$A_{(2,2)} = A_{(3,3)} = A_{(i,i)} = A_{(j,j)} = A_{(n-1,m-1)} = (10(2 + (\xi_1 + \xi_2)C_1P)) - (D_1P \xi_1 + 1)$$

$$A_{(3,2)} = A_{(2,3)} = A_{(i,i+1)} = A_{(i+1,i)} = A_{(j,j+1)} = A_{(j+1,j)} = (C_2P - 8) \quad \text{IV. 31}$$

$$A_{(4,2)} = A_{(2,4)} = A_{(i,i+2)} = A_{(i+2,i)} = A_{(j,j+2)} = A_{(j+2,j)} = (D_1P \xi_1 + 1)$$

#### IV.4.4. Evaluation de $P_{cr}$

Les équations simultanées représentées par l'équation (IV.30) ne peuvent pas être résolues, car la matrice  $[A]$  contient la force inconnue ( $P$ ). Ce problème est résolu en utilisant la technique d'essai et d'erreur comme suit:

- Étape (1): dans le premier essai, une valeur initiale égale à l'unité est désignée à ( $P$ ), Soit :  $P = 1$

La matrice  $[A]$  est simplifiée en remplaçant une valeur de un pour  $P$

$$\begin{bmatrix}
 A'_{(2,2)} & A'_{(2,3)} & A'_{(2,4)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 A'_{(3,2)} & A'_{(3,3)} & A'_{(3,4)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 A'_{(4,2)} & A'_{(4,3)} & A'_{(4,4)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A'_{(i,i)} & A'_{(i,i+1)} & A'_{(i,i+2)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A'_{(i+1,i)} & A'_{(i+1,i+1)} & A'_{(i+1,i+2)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A'_{(i+2,i)} & A'_{(i+2,i+1)} & A'_{(i+2,i+2)} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A'_{(n-3,m-3)} & A'_{(n-3,m-2)} & A'_{(n-3,m-1)} \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A'_{(n-2,m-3)} & A'_{(n-2,m-2)} & A'_{(n-2,m-1)} \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & A'_{(n-1,m-3)} & A'_{(n-1,m-2)} & A'_{(n-1,m-1)}
 \end{bmatrix} \quad \text{IV. 32}$$

$$\begin{aligned}
 A'_{(2,2)} &= A'_{(3,3)} = A'_{(i,i)} = A'_{(j,j)} = A'_{(n-1,m-1)} = (10(2 + (\xi_1 + \xi_2)C_1)) - (D_1\xi_1 + 1) \\
 A'_{(3,2)} &= A'_{(2,3)} = A'_{(i,i+1)} = A'_{(i+1,i)} = A'_{(j,j+1)} = A'_{(j+1,j)} = (C_2 - 8) \\
 A'_{(4,2)} &= A'_{(2,4)} = A'_{(i,i+2)} = A'_{(i+2,i)} = A'_{(j,j+2)} = A'_{(j+2,j)} = (D_1\xi_1 + 1)
 \end{aligned} \quad \text{IV. 33}$$

- Étape (2): après avoir résolu le système d'équations (IV.30), la première forme de mode ( $w_1^{(1)}$ ) est utilisée pour calculer la charge de flambage critique ( $P_{cr1}$ ) en utilisant l'équation (IV.15), comme suit:

$$P_{cr} = - \frac{\nabla^4 w_1^{(1)}}{D_1 \nabla^2 (\xi_1 w_{1,xx}^{(1)} + \xi_2 w_{1,yy}^{(1)}) + D_2 (\xi_1 w_{1,xx}^{(1)} + \xi_2 w_{1,yy}^{(1)})} \quad \text{IV. 34}$$

Notant que l'équation suivante est calculée numériquement en utilisant son format de différence finie comme suit:

$$P_{cr} = - \frac{\left( \begin{array}{c} 20w_{(i,j)} - 8(w_{(i+1,j)} + w_{(i-1,j)} + w_{(i,j+1)} + w_{(i,j-1)}) \\ + 2(w_{(i+1,j+1)} + w_{(i+1,j-1)} + w_{(i-1,j+1)} + w_{(i-1,j-1)}) \\ + w_{(i+2,j)} + w_{(i-2,j)} + w_{(i,j+2)} + w_{(i,j-2)} \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{c} 10C_1(\xi_1 + \xi_2)w_{(i,j)} + D_1(\xi_1 + \xi_2)(w_{(i+1,j+1)} + w_{(i+1,j-1)} + w_{(i-1,j+1)} + w_{(i-1,j-1)}) \\ + D_1\xi_1(w_{(i+2,j)} + w_{(i-2,j)}) + D_1\xi_2(w_{(i,j-2)} + w_{(i,j+2)}) \\ + C_2(w_{(i+1,j)} + w_{(i-1,j)}) + C_3(w_{(i,j+1)} + w_{(i,j-1)}) \end{array} \right)} \quad \text{IV. 35}$$

- Etape (3) : l'obtenu de  $(P_{cr_1})$  est utilisé pour une autre itération pour résoudre l'équation (IV.30) où une nouvelle charge critique de flambage  $(P_{cr_2})$  est obtenue.
- Les étapes (2) et (3) sont répétées successivement jusqu'à ce que la solution converge et que les critères suivants soient validés :

$$\frac{P_{cr_i} - P_{cr_{i-1}}}{P_{cr_i}} \leq 10^{-5} \quad \text{IV. 36}$$

#### IV.5. Validation de la méthode des différences finies

Afin de valider la présente méthode numérique, les charges critiques de flambage prévues pour les plaques FG simplement appuyée sont comparées à la littérature. En supposant que la plaque FGM est constituée d'aluminium et d'alumine où le module d'Young de l'alumine est  $E_c = 380 \text{ GPa}$ , et pour l'aluminium est  $E_m = 70 \text{ GPa}$ . Le coefficient de Poisson est supposé constant pour le métal et la céramique avec  $\nu = 0,3$ .

Le tableau (IV.1) résume le flambement critique pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sous différents cas de charge dans le plan, pour différentes valeurs du paramètre de distribution de matériau ( $k$ ) et du rapport d'aspect ( $a/b$ ). Les présents résultats dans le tableau (IV.1) sont donnés pour différentes tailles de mailles ( $a/\Delta = 10,20,30,40$ ) pour tester la convergence de la solution de différence finie. De plus, pour améliorer l'exactitude des résultats prévus, la formule d'extrapolation de Richardson est adoptée, qui est exprimé comme: (Szilard R., 2004).

$$P_{cr}^{[ex]} = P_{cr}^{[40]} + \frac{P_{cr}^{[40]} - P_{cr}^{[20]}}{2^\mu - 1} \quad \text{IV. 37}$$

Où  $P_{cr}^{[ex]}$  est la valeur extrapolée,  $(P_{cr}^{[20]})$  est  $(P_{cr}^{[40]})$  sont les valeurs de la charge de flambage critique obtenues en utilisant la taille de mailles  $a/\Delta = 20$  et  $a/\Delta = 40$ , respectivement.  $\mu = 2$  est la valeur de l'exposant qui dépend des caractéristiques de convergence de la méthode numérique.

En comparant les résultats actuels avec des travaux précédemment publiés : (Bouazza M., A,2012), (Bouazza M., 2013) et (Mohammadi M., 2009), on constate que les résultats sont en excellent accord et valident la méthode numérique actuelle.

Généralement, les résultats indiquent que lorsque la rigidité de la plaque augmente, la charge critique augmente. Notant que la rigidité de la plaque augmente en cas d'utilisation de valeurs inférieures de  $(a/h)$  et de valeur inférieure du paramètre de matériau  $(k)$ . De plus, les résultats indiquent que la charge critique de flambage des plaques FGM ( $k \geq 1$ ) est inférieure à celle de la plaque homogène ( $k = 0$ ).



Tableau IV. 1 Comparaison entre la méthode numérique actuelle et les solutions exactes de  $P_{cr}$ (MN/m).

k	Ref	Mesh size $a/\Delta$	$(\xi_1, \xi_2) = (-1, 0)$			$(\xi_1, \xi_2) = (0, -1)$			$(\xi_1, \xi_2) = (-1, -1)$		
			a/b=0.5	a/b=1	a/b=1.5	a/b=0.5	a/b=1	a/b=1.5	a/b=0.5	a/b=1	a/b=1.5
k=0	Present	10	2.1317	1.3619	1.5957	8.4744	1.3619	0.7125	1.7033	0.6809	0.4925
		20	2.1409	1.3703	1.6077	8.5506	1.3703	0.7154	1.7122	0.6852	0.4951
		30	2.1426	1.3719	1.6100	8.5647	1.3719	0.7159	1.7139	0.6859	0.4955
		40	2.1432	1.3724	1.6107	8.5697	1.3724	0.7161	1.7145	0.6862	0.4957
		$\infty (P_{cr}^{[ex]})$	<b>2.1440</b>	<b>1.3731</b>	<b>1.6117</b>	<b>8.5761</b>	<b>1.3731</b>	<b>0.7163</b>	<b>1.7153</b>	<b>0.6865</b>	<b>0.4959</b>
	Bouazza (2012)	2.1440	1.3732	1.6118	8.5761	1.3732	0.7163	1.7152	0.6866	0.4959	
	Bouazza (2013)	2.1466	1.3738	1.6123	8.5862	1.3738	0.7166	1.7172	0.6869	0.4961	
Mohammadi (2009)	2.1466	1.3738	1.4907	8.5862	1.3738	0.7166	1.7172	0.6869	0.4961		
k=1	Present	10	1.0627	0.6789	0.7954	4.2248	0.6789	0.3551	0.8491	0.3394	0.2455
		20	1.0673	0.6831	0.8014	4.2627	0.6831	0.3566	0.8536	0.3415	0.2468
		30	1.0682	0.6839	0.8025	4.2698	0.6839	0.3569	0.8544	0.3419	0.2470
		40	1.0685	0.6841	0.8029	4.2723	0.6841	0.3569	0.8547	0.3421	0.2471
		$\infty (P_{cr}^{[ex]})$	<b>1.0689</b>	<b>0.6844</b>	<b>0.8034</b>	<b>4.2755</b>	<b>0.6844</b>	<b>0.3570</b>	<b>0.8551</b>	<b>0.3423</b>	<b>0.2472</b>
	Bouazza (2012)	1.0689	0.6845	0.8034	4.2755	0.6845	0.3571	0.8551	0.3422	0.2472	
	Bouazza (2013)	1.0699	0.6848	0.8036	4.2797	0.6848	0.3572	0.8559	0.3424	0.2473	
Mohammadi (2009)	1.0699	0.6848	0.7430	4.2797	0.6848	0.3572	0.8559	0.3424	0.2473		
k=2	Present	10	0.8293	0.5297	0.6207	3.2966	0.5297	0.2771	0.6626	0.2649	0.1916
		20	0.8328	0.5330	0.6253	3.3263	0.5330	0.2782	0.6661	0.2665	0.1926
		30	0.8335	0.5336	0.6262	3.3318	0.5336	0.2785	0.6667	0.2668	0.1927
		40	0.8337	0.5338	0.6265	3.3337	0.5338	0.2785	0.6669	0.2669	0.1928
		$\infty (P_{cr}^{[ex]})$	<b>0.8340</b>	<b>0.5341</b>	<b>0.6269</b>	<b>3.3362</b>	<b>0.5341</b>	<b>0.2786</b>	<b>0.6672</b>	<b>0.2670</b>	<b>0.1929</b>
	Bouazza (2012)	0.8341	0.5341	0.6269	3.3362	0.5341	0.2786	0.6672	0.2671	0.1929	
	Bouazza (2013)	0.8349	0.5343	0.6271	3.3395	0.5343	0.2787	0.6679	0.2672	0.1930	
Mohammadi (2009)	0.8349	0.5343	0.5798	3.3395	0.5343	0.2787	0.6679	0.2672	0.1930		

#### **IV.6. Conclusion**

Dans cette partie, nous avons présenté un modèle de plaque générique, ainsi que différentes étapes de discrétisation de l'équation différentielle en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. L'équation différentielle de stabilité est résolue numériquement en utilisant la méthode des différences finies. Les résultats de la charge critique sont obtenus pour une plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à des charges dans le plan.

La validation des résultats obtenus par la présente méthode donne une extra-concordance avec les résultats issus de la solution exacte présenté par (Bouazza M., A,2012), (Bouazza M., 2013) et (Mohammadi M., 2009). Le tableau (IV.1) montre cette même concordance et aide à soutenir cette conclusion.

Cette conclusion, fiabiliser la méthode de différence finie pour l'utiliser dans l'analyse des plaques ayant une épaisseur parabolique.

**Chapitre V :**

**Analyse Du Flambement Mécanique  
Des Plaques Rectangulaire P-FGM Avec  
Epaisseur Parabolique Par La Méthode  
Des Différences Finies**

**Chapitre V : Analyse Du Flambement Mécanique Des Plaques Rectangulaire P-FGM Avec Epaisseur Parabolique Par La Méthode Des Différence Finie**

**V.1. Introduction**

L'analyse de la stabilité des plaques de FGM sous chargement mécanique et / ou thermique a été réalisée par de nombreux chercheurs utilisant différentes théories et solutions, (Reddy B.S., 2013), (Bouazza M., A,2012), (Bouazza M., 2013), (Fekrar A., 2013), et (Ramu I., 2014). Divers cas de chargement et de conditions aux limites ont été largement étudiés pour des plaques de FGM d'épaisseur constante. Cependant, les plaques ayant une épaisseur variable ont également attiré l'attention des concepteurs et des chercheurs. En général, les plaques de FGM géométriquement complexes telles que les plaques à épaisseur variable deviennent courantes dans différents domaines techniques et industriels en raison des exigences de la conception. Malgré cela, les travaux de recherche menés pour étudier les plaques de FGM d'épaisseur variable sont moins nombreux que l'épaisseur constant.

Généralement, les formulations analytiques pour l'analyse de structures géométriquement complexes comme des plaques d'épaisseur variable se caractérisent par leur complexité. À titre d'exemple, (Mozafari H., 2010), (Mozafari H., 2012) ont étudié la stabilité des plaques FGM à une épaisseur variant linéairement sous charge de flambage mécanique. Ils ont présenté une théorie d'ordre supérieur. Ils ont utilisé le déplacement de déformation non linéaire de Sanders et la méthode résiduelle pondérée pour dériver la charge de flambage.

En outre, certains chercheurs ont utilisé une hypothèse et une hypothèse simples pour faciliter les formulations en incluant la variation d'épaisseur. (Ait Atmane H., 2011b) ont présenté une formulation basée sur la théorie des poutres de Bernoulli-Euler pour étudier la vibration libre des poutres sigmoïdaux fonctionnellement gradués à section transversale variable. (Pouladvand M., 2009) a examiné la stabilité thermique de plaques rectangulaires FG minces, d'épaisseur variable basée sur la théorie des plaques classiques. (Alinaghizadeh F., 2016) ont évalué l'analyse de flexion non-linéaire de plaques de secteur annulaires FG bidirectionnelles épaisses d'épaisseur variable et de conditions aux limites différentes reposant sur des fondations élastiques non linéaires.

D'un autre côté, d'autres chercheurs ont adopté les méthodes numériques pour l'analyse des plaques sous différents cas de chargement avec l'inclusion de variation de l'épaisseur. (Rajasekaran S., 2013) ont présenté une solution numérique utilisant la méthode des différences finies pour évaluer les charges de flambage et les fréquences exactes de vibration des plaques isotropes à épaisseur variable. Diverses combinaisons de conditions aux limites ainsi que de nombreux types de chargement sont considérées. Aussi, (Bouguenina O., 2015) ont proposé une solution numérique utilisant la méthode des différences finies pour étudier le flambage thermique d'une plaque FG simplement appuyée avec une variation linéaire de l'épaisseur. (Ghomshei M.M., 2013) ont développé une formulation par éléments finis pour analyser le flambage thermique axisymétrique de plaques annulaires FGM d'épaisseur variable.

Comme mentionné précédemment, l'objectif de cette étude porte sur l'étude de la résistance au flambement mécanique des plaques FGM simplement appuyée avec une variation d'épaisseur parabolique. Après avoir présenté, une validation du modèle issu de la méthode de différence finie. Les résultats numériques obtenus sont permettant d'aller vers l'utilisation de cette méthode pour l'analysé le comportement mécanique des plaques dans divers cas soit type de support, chargement et particulièrement la variation d'épaisseur. La procédure de différence finie décrite dans le chapitre VI a été étendue pour utiliser dans l'évaluation de flambement mécanique d'une plaque FGM simplement appuyée d'épaisseur variable.

Ce chapitre s'intéresse à étudier la résistance au flambement mécanique des plaques P-FGM ayant une variation d'épaisseur parabolique-concave. Pour atteindre cet objectif, l'équation gouvernante dérivée de la stabilité est résolue numériquement en utilisant la méthode des différences finies afin d'avoir la capacité d'inclure la variation d'épaisseur, notant que cette tâche est complexe à effectuer analytiquement. Une fonction parabolique-concave spéciale est développée pour contrôler l'intensité de la variation parabolique de l'épaisseur de la plaque, mais sans changer son volume de matériau d'origine. Deux types de variation d'épaisseur ont été étudiés ; variation parabolique dans une direction, et variation parabolique dans les deux directions, comme le montre la figure (V.1). Une étude paramétrique est menée pour étudier l'effet de différents paramètres sur la charge critique de flambement.

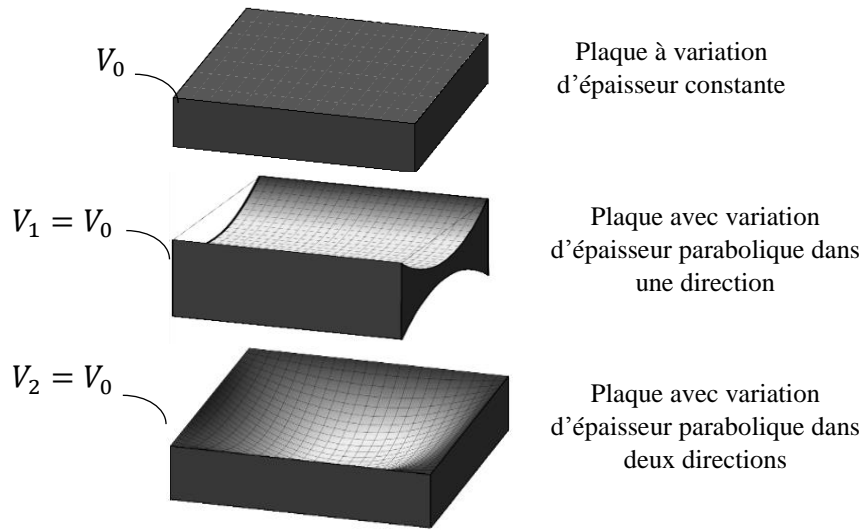


Figure V. 1 Profils d'épaisseur-variation parabolique-concave

## V.2. Problème associé

La procédure de différences finies, décrit au chapitre précédent, a été étendue pour évaluer le flambement mécanique d'une plaque P-FGM d'épaisseur variable. La capacité de variation d'épaisseur peut être facilement inclus dans la formulation par différence finie en faisant varier l'épaisseur au niveau de chaque nœud, à savoir l'introduction d'une épaisseur variable  $h(i, j)$  qui représente l'épaisseur de la plaque au niveau du nœud  $(i, j)$ , figure (V.2) illustre le cas étudié.

### V.2.1. Variation d'épaisseur dans une seule direction

Dans le cas d'une direction, l'épaisseur de la plaque devient une fonction en fonction de  $(x)$  qui est dérivée selon la fonction parabolique générale suivante :

$$H(x) = -\frac{4}{a^2}(e_0 - e_1)x^2 + e_0 \quad \text{V. 1}$$

Où  $e_0$  est l'épaisseur au centre de la plaque ( $x = 0$ ), et ( $e_1$ ) est l'épaisseur aux bords de la plaque, c'est-à-dire à  $x = (-a/2, a/2)$ .

Soit ( $V_0$ ) le volume de la plaque d'épaisseur constante (plaque d'origine) qui a une épaisseur constante ( $h$ ) et soit ( $V_1$ ) le volume de la plaque d'épaisseur variable, où :

$$V_0 = a.b.h \quad \text{V. 2}$$

$$V_1 = a \cdot b \left( \frac{2}{3}(e_0 - e_1) + e_1 \right) \quad \text{V. 3}$$

En maintenant les mêmes volumes des deux plaques que  $V_0 = V_1$ , on obtient :

$$e_1 + 2e_0 = 3h \quad \text{V. 4}$$

Exprimer  $e_0$  en termes de ( $e_1$ ) comme :

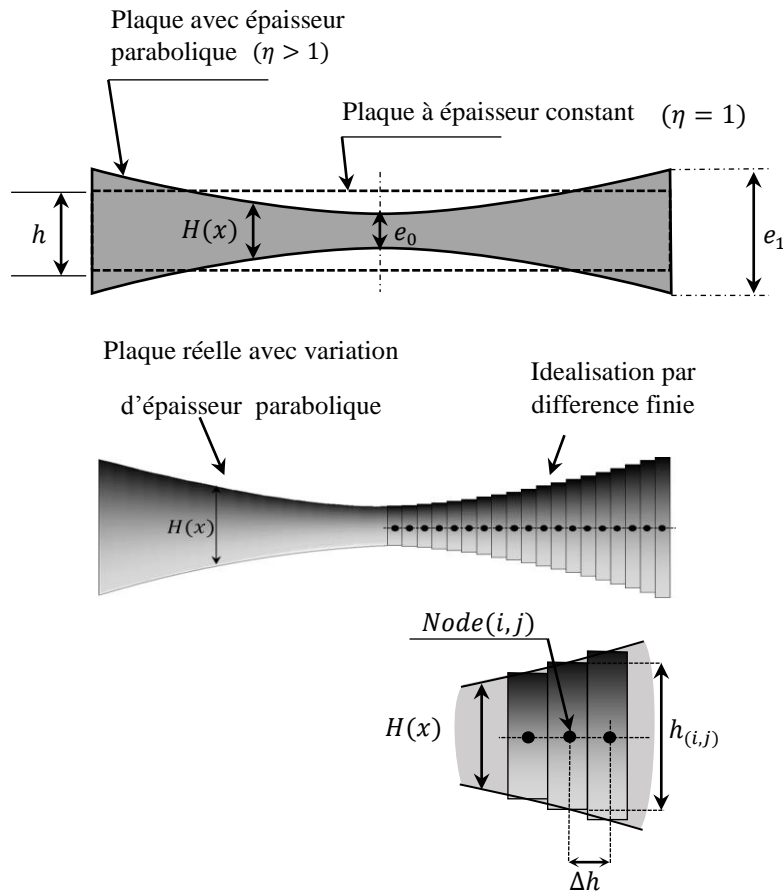
$$e_1 = \eta \cdot e_0 \quad \text{V. 5}$$

Où  $\eta$  représente le rapport d'épaisseur de la plaque au milieu. Notant que  $\eta > 1$  correspond à la variation parabolique-concave.

Substituer l'équation <sup>(V.4)</sup> et l'équation <sup>(V.5)</sup> dans l'équation <sup>(V.1)</sup>; nous obtenons la fonction de variation d'épaisseur comme :

$$H(x) = \frac{3h}{2 + \eta} \left( \frac{4(\eta - 1)}{a^2} x^2 + 1 \right) \quad \text{V. 6}$$

Ainsi, la fonction de variation d'épaisseur est exprimée par un paramètre  $\eta$  qui contrôle l'intensité de la variation parabolique et maintient le volume de la nouvelle plaque égal à celui de la plaque d'origine comme montré sur la figure (V.2).



**Figure V.2** Idéalisaton par différence finie de la plaque FGM avec variation d'épaisseur parabolique.

**V.2.2. Variation d'épaisseur dans une deux direction**

Dans le cas d'une plaque ayant une épaisseur variable dans deux directions, la fonction d'épaisseur est dérivée de l'équation parabolique générale suivante :

$$H(x, y) = \frac{16(e_0 - e_1)}{a^2 b^2} x^2 y^2 - \frac{4(e_0 - e_1)}{a^2} x^2 - \frac{4(e_0 - e_1)}{b^2} y^2 + e_0 \tag{V. 7}$$

Soit ( $V_2$ ) le volume de cette plaque qui est donné comme suit :

$$V_2 = a \cdot b \left( \frac{4}{9} (e_0 - e_1) + e_1 \right) \tag{V. 8}$$

En faisant  $V_0 = V_2$ , on obtient :

$$5e_1 + 4e_0 = 9h \tag{V. 9}$$

Exprimer ( $e_0$ ) en termes de ( $e_1$ ) comme :



$$e_1 = \eta \cdot e_0 \quad \text{V. 10}$$

Substituer l'équation <sup>(V.9)</sup> et l'équation <sup>(V.10)</sup> dans l'équation <sup>(V.7)</sup>, la fonction  $H(x, y)$  peut s'écrire comme suit :

$$H(x, y) = \frac{9h}{4 + 5\eta} \left( 4(\eta - 1) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 4 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} \right) + 1 \right) \quad \text{V. 11}$$

De même, le paramètre d'intensité  $\eta$  contrôle l'intensité de la variation parabolique dans les deux directions et maintient le volume de la nouvelle plaque égal à celui de la plaque d'épaisseur constante d'origine comme précisé sur la figure (V.2).

### V.2.3. Considérations sur les différences finies

Dans l'idéalisation de la différence finie dans le cas de la plaque d'épaisseur variable, on suppose qu'à chaque discret ( $Node_{(i,j)}$ ) l'épaisseur est constante donnée par ( $h_{(i,j)}$ ) comme montré sur la figure (V.2). La valeur de ( $h_{(i,j)}$ ) est simplement calculée en substituant les coordonnées du nœud dans la fonction d'épaisseur  $H(x)$  ou  $H(x, y)$  donnée par l'équation <sup>(V.6)</sup> ou l'équation <sup>(V.11)</sup>. Dans ce cas, la coordonnée ( $z_{(i,j)}$ ) à chaque ( $Node_{(i,j)}$ ) varie dans son domaine spécifique :  $\left[ -\frac{h_{(i,j)}}{2}, \frac{h_{(i,j)}}{2} \right]$ .

Basé sur l'équation <sup>(IV.1)</sup> le profil de distribution du matériau à travers l'épaisseur sera le même à chaque nœud puisque les fractions volumiques des constituants du matériau dépendent du rapport  $z/h$ , c'est-à-dire  $z_{(i,j)}/h_{(i,j)} = [-1, +1]$ .

Sur cette base, toutes les équations contenant les paramètres d'épaisseur  $h$  tels que l'équation <sup>(IV.8)</sup>, ils sont calculés en utilisant la valeur constante ( $h_{(i,j)}$ ). De plus, les expressions d'intégration à travers l'épaisseur sont évaluées en utilisant la règle trapézoïdale notant que chaque épaisseur ( $h_{(i,j)}$ ) est divisée en 2000 subdivisions.

### V.3. Résultats et discussion

Après avoir présenté un modèle de plaque générique dans le chapitre IV ainsi que différentes méthodes de discrétisation de l'équation différentielle, une validation du modèle, et après avoir présenté les fonctions de la variation d'épaisseur, nous proposons ici plusieurs applications et études illustrant le fonctionnement du modèle. Nous présentons, dans un

premier temps, les effets du paramètre d'intensité de variation parabolique (rapport entre l'épaisseur et le milieu) sur la charge de flambage critique des plaques carrées FGM simplement appuyée avec un rapport latéral à l'épaisseur de  $a/h = 50$  soumis à différents cas de chargement.

Les résultats obtenus avec cette mesure (effet du paramètre de variation d'intensité parabolique  $\eta$ ) sont donnés dans la figure (V.3 à V.5).

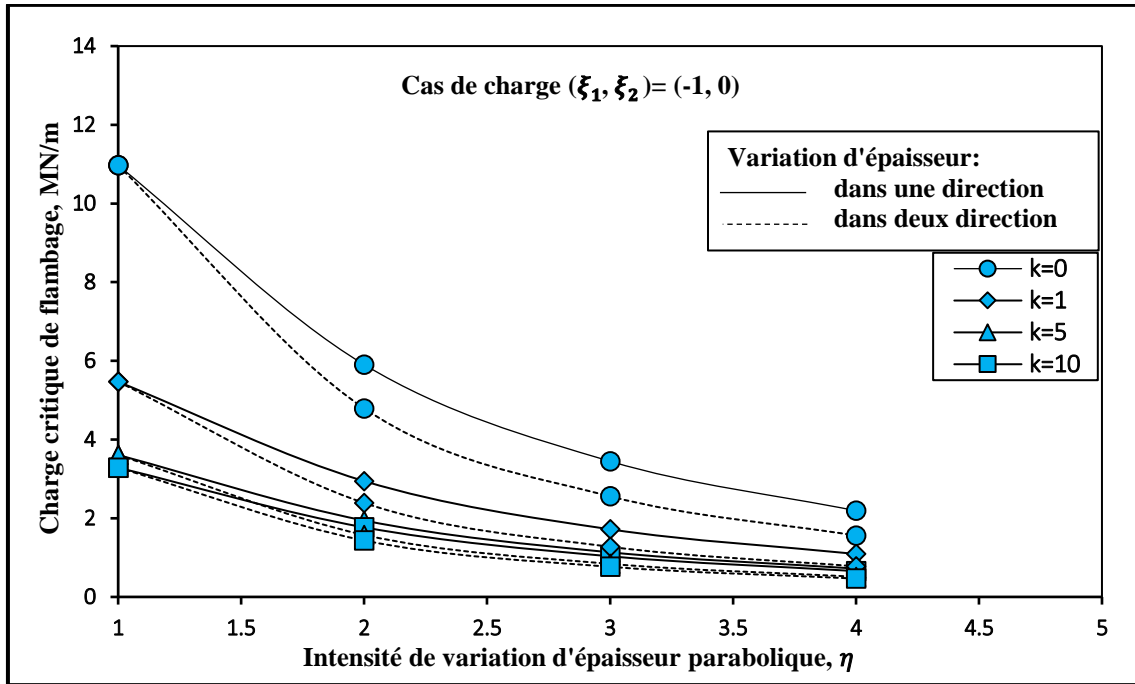


Figure V. 3 Effet du paramètre de variation d'intensité parabolique  $\eta$  sur la charge critique de flambage d'une plaque FGM avec  $a/h = 50$ , exposée à une charge dans le plan x-uniaxiale.

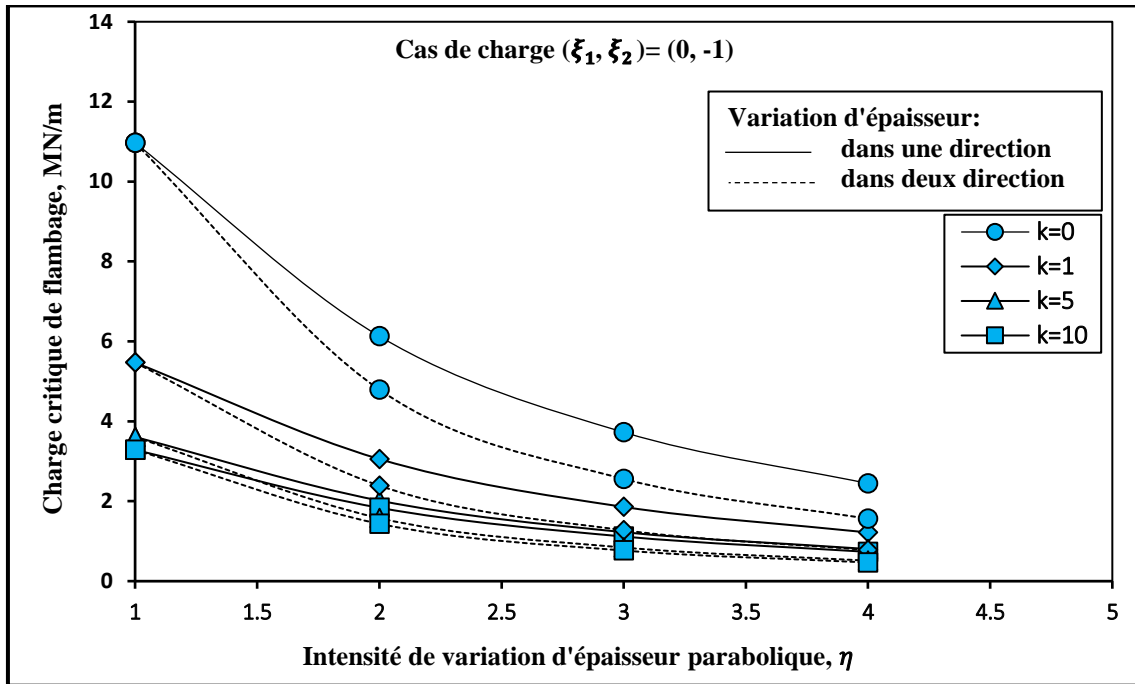


Figure V. 4 Effet du paramètre de variation d'intensité parabolique  $\eta$  sur la charge critique de flambage d'une plaque FGM avec  $a/h = 50$ , exposée à une charge dans le plan y-uniaxiale.

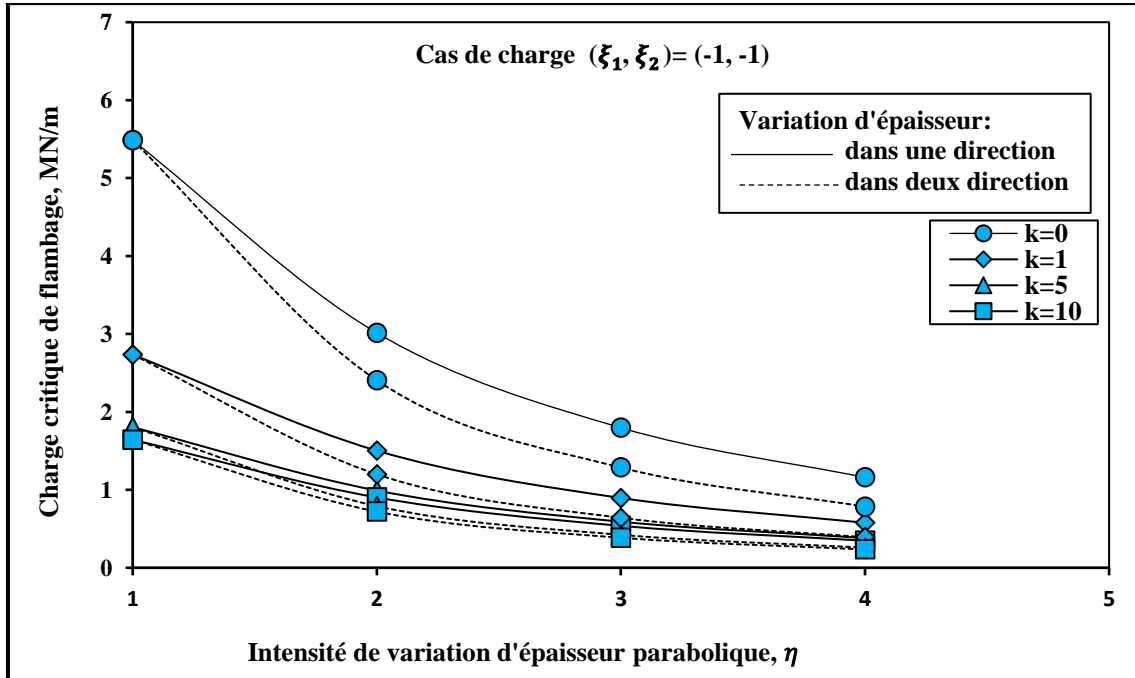


Figure V. 5 Effet du paramètre de variation d'intensité parabolique  $\eta$  sur la charge critique de flambage d'une plaque FGM avec  $a/h=50$ , exposé à une charge dans le plan bi-axiale.

La note générale que l'on peut observer à partir de ces figures est que la variation de la géométrie d'épaisseur de la plaque pour s'adapter à une forme parabolique-concave diminue significativement sa résistance au flambement notamment lorsque la variation d'épaisseur est appliquée dans les deux sens. De plus, la charge de flambage critique de la plaque FGM ayant une variation d'épaisseur parabolique est affectée par le profil de distribution du matériau où, lorsque la valeur de l'indice de loi de puissance ( $k$ ) augmente, la charge critique de flambage diminue. En effet, les plaques à haute teneur en métal ont une rigidité plus faible que celles à forte teneur en céramique.

La figure (V.6) représente le taux de perte de résistance au flambage dans les plaques FGM avec une variation d'épaisseur parabolique en termes d'intensité de variation parabolique  $\eta$ . Cela signifie le taux de perte de la résistance au flambage ; le taux de chute de la charge de flambement critique de la plaque FGM d'épaisseur variable ( $\eta > 1$ ) par rapport à celle de l'épaisseur de la plaque d'origine ( $\eta = 1$ ). Le taux de perte est simplement calculé comme suit :

$$\text{Le ratio de perte en } P_{cr} = \left( \frac{P_{cr}(\text{épaisseur constante}) - P_{cr}(\text{épaisseur variable})}{P_{cr}(\text{épaisseur constante})} \right) \quad \text{V. 12}$$

Sur la base de la figure (V.6), les résultats indiquent que le taux de perte dans la charge de flambage critique augmente à mesure que le paramètre ( $\eta$ ) augmente. Ceci est justifié par le fait que l'augmentation de la valeur de ( $\eta$ ) favorise l'apparition de flambage puisqu'elle réduit l'épaisseur au niveau du milieu de la plaque où le flambage commence à se développer. On remarque également que la relation entre le taux de perte de la résistance au flambement et l'intensité de variation parabolique ( $\eta$ ) n'est pas affectée par la variation de la fraction volumique des matériaux constitutifs ( $k$ ), ce qui signifie quelle que soit la valeur de ( $k$ ), le taux de perte de la charge de flambement critique est le même. Nous concluons ici que le taux de perte dans la charge de flambement critique est le même dans les plaques homogènes et les plaques FGM si elles ont les mêmes propriétés géométriques, y compris les dimensions de variation d'épaisseur parabolique.

De plus, lorsque la variation d'épaisseur est appliquée dans deux directions, le taux de perte dans la résistance au flambage sous charge, uni-axiale dans le plan est approximativement le même que la charge bi-axiale. Cependant, lorsque la variation

d'épaisseur est appliquée dans une direction, les rapports de perte prédits dans la résistance au flambage pour chaque cas de chargement en termes de ( $\eta$ ) sont proches les uns des autres.

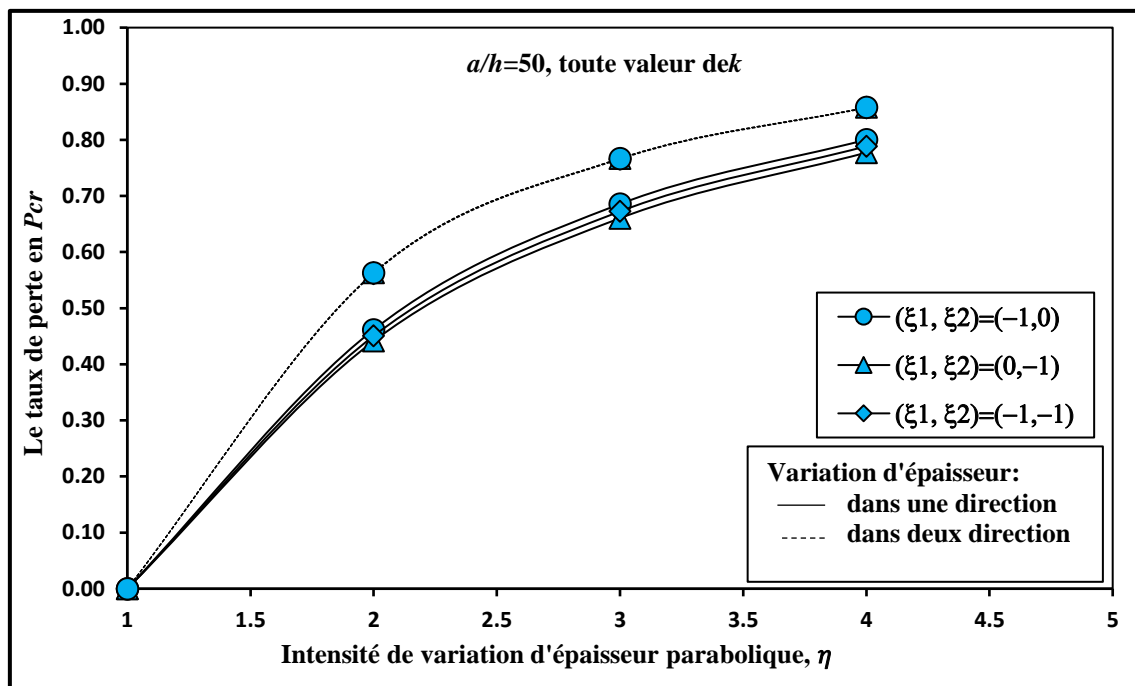


Figure V.6 Le taux de perte de la résistance au flambement de la plaque FGM avec variation d'épaisseur parabolique en termes de  $\eta$ .

La variation du taux de perte dans la charge de flambement critique de plaques FGM carrées simplement supportées ayant une variation d'épaisseur parabolique dans une direction et dans deux directions en termes de rapport latéral-épaisseur ( $a/h$ ) est présentée sur la figure (V.8 et V.9), respectivement.

Généralement, sur les figures (V.8 et V.9), il est montré que le taux de perte dans la résistance au flambement est fortement affecté par le paramètre d'intensité de variation d'épaisseur ( $\eta$ ), alors qu'il est légèrement affecté par le cas de charge et le rapport latéral-épaisseur. Les résultats indiquent également que l'indice de profil de matériau  $k$  a un effet négligeable sur le taux de perte de la résistance au flambage des plaques FGM.

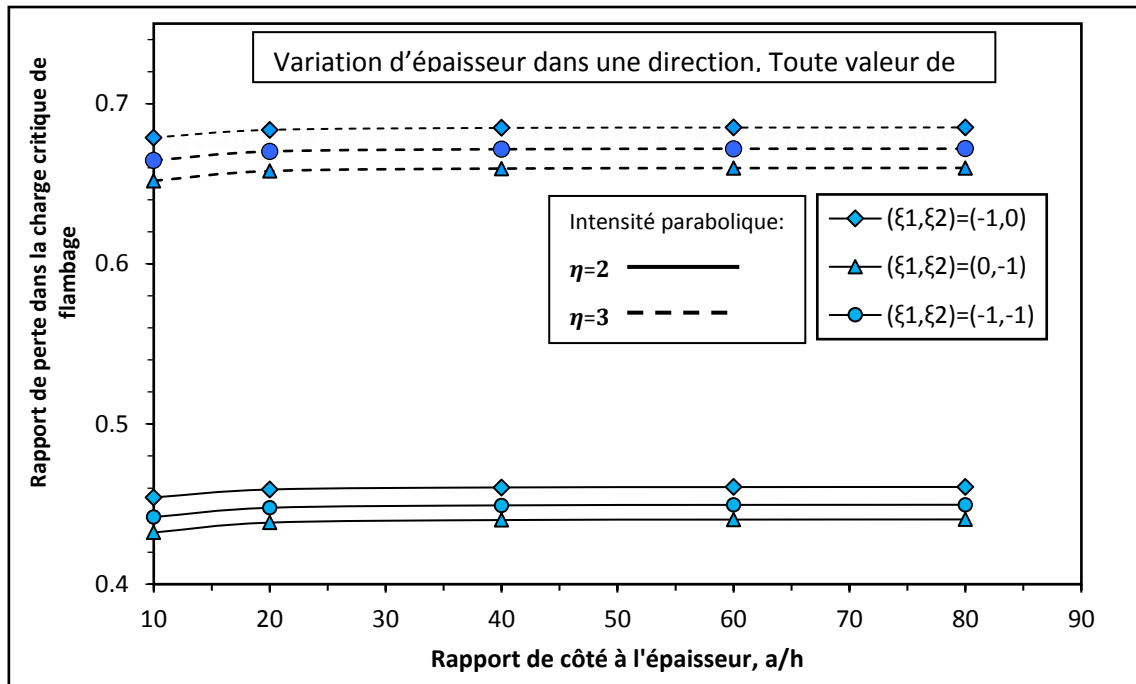


Figure V.7 Effet du rapport latéral  $a/h$  sur épaisseur et sur le taux de perte de la résistance au flambement de la plaque carrée FGM avec une variation d'épaisseur dans une direction

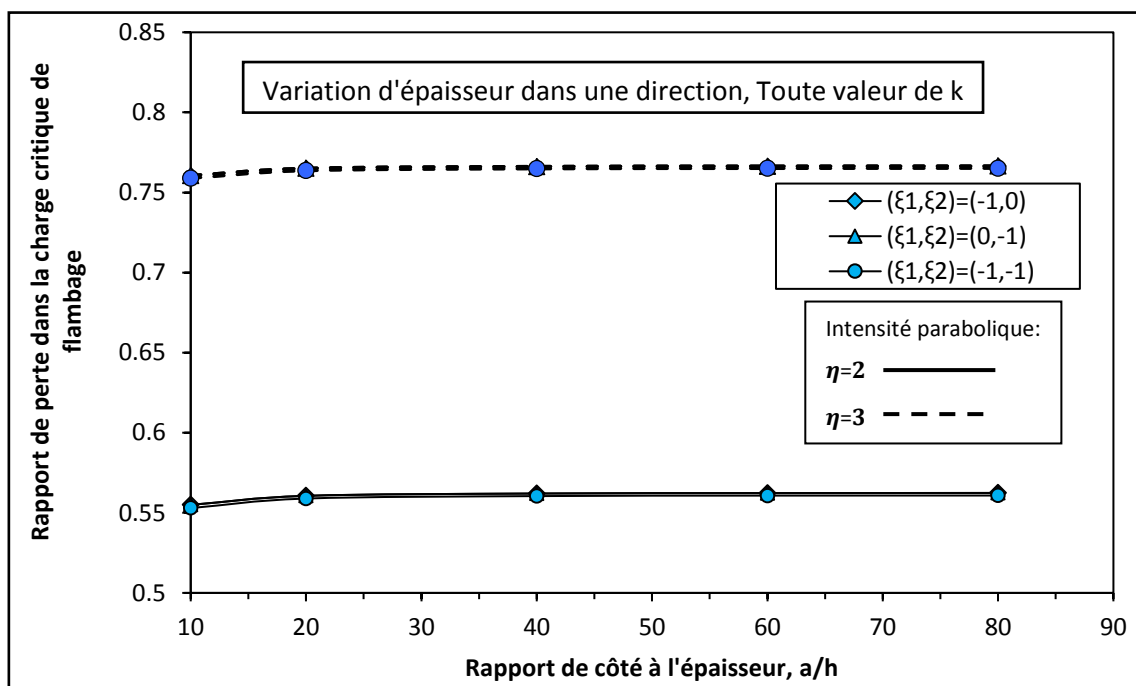


Figure V.8 Effet du rapport latéral  $a/h$  sur épaisseur et sur le taux de perte de la résistance au flambement de la plaque carrée FGM avec une variation d'épaisseur dans deux direction

Ainsi, les résultats indiquent que le taux de perte dans la résistance au flambage est égal à environ 45% et 65% pour ( $\eta$ ) égal à 2 et 3, respectivement, dans le cas de l'application de la variation d'épaisseur dans une direction. Cependant, lors de l'application de la variation d'épaisseur dans deux directions, la résistance au flambement de la plaque est réduite à 56% et 75% pour l'intensité de variation d'épaisseur ( $\eta$ ) égale à 2 et 3, respectivement.

D'après la figure (V.7), on conclut que, lorsque de l'application d'une variation d'épaisseur parabolique-concave à des plaques ayant les mêmes propriétés géométriques, elles perdront la même résistance au flambement indépendamment des propriétés du matériau et du profil de distribution. De plus, lorsque la variation d'épaisseur parabolique est appliquée dans deux directions, le cas de chargement dans le plan (uniaxial, biaxial) aura un faible effet sur le taux de perte de la résistance au flambage de la plaque.

#### **V.4. Conclusion**

Dans le présent chapitre, la stabilité mécanique des plaques FGM simplement appuyée est étudiée afin d'étudier la chute de la résistance au flambage après variation de l'épaisseur de la plaque selon une fonction parabolique-concave. L'équation gouvernante est résolue numériquement en utilisant la méthode des différences finies pour avoir la capacité d'inclure la variation d'épaisseur. L'effet de différentes propriétés géométriques et matérielles sur la résistance au flambage des plaques de FGM est étudié.

Selon les résultats obtenus, l'application d'une variation d'épaisseur parabolique à des plaques de FGM simplement appuyée en conservant leur volume de matière d'origine conduit aux conclusions principales suivantes :

- L'intensité de variation d'épaisseur parabolique réduit de manière significative la charge de flambage critique de la plaque, en particulier lorsque la variation est appliquée dans les deux directions longitudinales.
- Le taux de perte dans la résistance au flambage des plaques avec différents profils de distribution de matériau, mais avec les mêmes propriétés géométriques et l'intensité de variation d'épaisseur ; est le même.
- Lorsque la variation d'épaisseur parabolique est appliquée dans deux directions, le cas de chargement dans le plan (uni-axial, bi-axial) a un petit effet sur le rapport de perte de la résistance au flambage de la plaque

# **Conclusion générale**



### Conclusion générale

Les matériaux composites suscitent un intérêt croissant de la part de nombreux secteurs industriels, et leur emploi tend à se généraliser. Elles permettent d'atteindre des niveaux de performance inégalés. En effet, ils possèdent une structure géométrique spécialement conçue pour leur conférer des propriétés que leurs constituants élémentaires ne possèdent pas individuellement, et leur permettre de remplir de nombreuses fonctions techniques. Pour tirer le meilleur parti de leurs capacités, les composites sont généralement conçus en même temps que les pièces qu'ils constituent. La frontière entre le produit et le matériau est donc plus floue qu'avec les matériaux traditionnels, ce qui implique de profonds changements dans la conception des produits industriels.

D'un point de vue géométrique, les entreprises aujourd'hui font l'appel au design comme outil pour répondre aux préférences du consommateur et faire face à la compétitivité accrue. Le design est un facteur clé de la conception et l'usinage des pièces. Il est donc nécessaire d'avoir recours à une méthode qui permet de traiter les matériaux composites des formes géométriques plus complexes et les plus proches de la réalité. Une alternative pour traiter de tels problèmes de manière systématique est l'utilisation des méthodes analytiques. Et c'est sur l'utilisation de l'une des méthodes analytique à savoir la méthode de différence finie (MDF), qu'a porté notre travail.

L'objectif de ce travail apporte une contribution à l'étude de la stabilité mécanique des plaques mince en matériau composite de type FGM, simplement appuyée et de section transversale parabolique-concave.

Alors qu'on a montré la méthode de différence finie (MDF) permet de calculer à une manière précise la charge critique minimale de flambage, d'une plaque rectangulaire d'épaisseurs constant en matériau composite de type FGM avec une distribution en puissance, simplement appuyée et soumise à des charges dans le plan. On adopte la formule d'extrapolation de Richardson pour l'exactitude de nos résultats. Ainsi, les résultats de nos interactions numériques, pour différentes valeurs du paramètre de distribution de matériau ( $k$ ) et du rapport d'aspect ( $a/b$ ), sont en excellent accord avec ceux de littérature, qui sont montré l'efficacité et la rigueur de la méthode MDF.

Cette efficacité permis de mettre en évidence à une nouvelle application sur l'étude d'une plaque de section variable, l'idée principale c'est d'étendre cette méthode pour introduire la variation de l'épaisseur de la plaque. Deux types de variation d'épaisseur ont été étudiés ; variation parabolique dans une direction, et variation parabolique dans les deux directions.

Afin contrôler l'intensité de la variation parabolique de l'épaisseur de la plaque, avec sans changer son volume de matériau d'origine, on a utilisé une fonction parabolique-concave spécifique et développée.

Nous avons également attendu à des résultats fiables et efficaces de l'application de cette méthode sur nos modèle de la plaque (une plaque rectangulaire avec un profil d'épaisseur-variation parabolique-concave) en FGM. Selon les résultats obtenus, l'application d'une variation d'épaisseur parabolique à des plaques de FGM simplement appuyée en conservant leur volume de matière d'origine conduit aux conclusions principales suivantes :

- L'intensité de variation d'épaisseur parabolique réduit de manière significative la charge de flambage critique de la plaque, en particulier lorsque la variation est appliquée dans les deux directions longitudinales.
- Le taux de perte dans la résistance au flambement des plaques dépend fortement des propriétés géométriques de l'épaisseur de la plaque (c'est-à-dire la variation d'intensité parabolique), mais il est légèrement sensible aux propriétés des matériaux et aux profils de distribution.
- Lorsque la variation d'épaisseur parabolique est appliquée dans deux directions, le cas de chargement dans le plan (uni-axial, bi-axial) a un petit effet sur le rapport de perte de la résistance au flambage de la plaque.

Le présent travail peut être poursuivi pour analyser la stabilité des plaques FGM avec épaisseur variable sous différents types de chargement, mécanique associée avec vibration et thermomécanique, étudier le comportement des plaques FGM avec d'autres configurations de changement d'épaisseur, en tenant compte l'influence des conditions aux limites et la variation des propriétés matériels et géométriques.

En plus, l'utilisation des méthodes analytiques constitue des outils appréciables pour la détermination des caractéristiques géo-matériaux. Elles permettent une économie de moyens et de temps dans la conception et la prédiction des caractéristiques des structures.

# **Références Bibliographiques**

## Bibliographie

- Ait Atmane H. 2011a.** "Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement". *Thèse de Doctorat Université Djilali Liabes*. 2011a.
- Ait Atmane H., Tounsi A., Ziane N. and Mechab I., 2011b.** "Mathematical solution for free vibration of sigmoid functionally graded beams with varying cross-section". *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 2011b, Vol. 11, 6, pp. 489-504.
- Akavci S. 2014.** "An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation". *Composite Structures*. 2014, Vol. 108, pp. 667-676.
- Akavci SS. 2010.** "Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates". *Mechanics of Composite Materials*. 2010, Vol. 46, 2, pp. 215-226.
- Aldo R., Boccaccini O., Van der Biest, Talbot Jan B., 2002.** "Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications". in *Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society*, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.), 2002.
- Alinaghizadeh F., & Shariati, M. 2016.** "Geometrically non-linear bending analysis of thick two-directional functionally graded annular sector and rectangular plates with variable thickness resting on non-linear elastic foundation". *Composites Part B: Engineering*. 2016, Vol. 86, pp. 61-83.
- Ambarsumyan S. 1958.** K teorii izgiba anisotropnykh plasinok, *Izv. Akad Nauk SSR*. 1958, pp. 69-77.
- Atarashiya K., Ishida Y., Nagai T., 1993.** "Functionally Gradient Materials". in: *Holt J.B, Koizumi M, Hirai T, Munir Z.A. American Ceramic Society, Westerville, OH*, Ceram. Trans., 1993, Vol. 34, 141-148.
- Attia A. 2015.** "Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique". *Thèse de Doctorat 3ème Cycle Université Djilali Liabes*. 2015.
- Aydogdu M. 2009.** "A new shear deformation theory for laminated composite plates. 2009, Vol. 89, 1, pp. 94-101.
- Batra RC, Vidoli S. 2002.** "Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle". *AIAA Journal*. 2002, Vol. 40, 1, pp. 91-104.
- Belytschko T, Lu YY, Gu L. 1994.** "Element-free Galerkin methods". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1994;37(2):229-256. 1994, Vol. 37, 2, pp. 229-256.

## Références Bibliographiques

---

- BENATTA Mohamed A. 2011.** "Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2011.
- Bever M.B., and Duwez P.E.,. 1972.** "Gradients in composite materials". *Mater. Sci. Eng.* 1972, Vol. 10, 1-8.
- Boch P ., Chartier, T., & Huttepain, M. 1986.** "Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated composites.". 1986, Vol. 69, 08, pp. 191-192.
- Bodaghi M., Saidi AR. 2010.** "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory". *Applied Mathematical Modelling.* 2010, Vol. 34, 11, pp. 3659-3673.
- Bouazza M ., Ouinas D., Yazid, A., & Hamouine A. A,2012.** " Buckling of thin plates under uniaxial and biaxial compression". *Journal of Materials Science and Engineering. A, 2012, 2.8A: 487.* A,2012, Vol. 2, 8, pp. 487-492.
- Bouazza M., Hammadi, F., Seddiki, S. and Adda-Bedia, E.A. 2013.** "Mechanical Stability of Moderately Thick Functionally Graded Plates". *J of Frontiers in Constr Eng.* 2013, Vol. 2, 3, pp. 60-65.
- Bouazza M., Ouinas D., Yazid, A., & Hamouine A. A,2012.** " Buckling of thin plates under uniaxial and biaxial compression". *Journal of Materials Science and Engineering. A, 2012, 2.8A: 487.* A,2012, Vol. 2, 8, pp. 487-492.
- Bouazza M., Ouinas D., Yazid, A., and Hamouine, A .. A,2012.** " Buckling of thin plates under uniaxial and biaxial compression". *Journal of Materials Science and Engineering. A, 2012, 2.8A: 487.* A,2012, Vol. 2, 8, pp. 487-492.
- Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia, E. A., & Megueni, A. 2010.** "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach". *Computational Materials Science.* 2010, Vol. 49, 4, pp. 865-870.
- Bouguenina O., Belakhdar, K., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. 2015.** "Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling". *Steel and Composite Structures.* 2015, Vol. 19, 3, pp. 679-695.
- Bouremana M. 2011.** "contrôle des déformations thermiques des matériaux composites. *Thèse de Doctorat Université Djilali Liabes.* 2011.
- Brush D.O., Almroth B.O. 1975.** "Buckling of bars, Plates and Shells". Second. New York : McGraw-Hill, 1975.

## Références Bibliographiques

---

- Chen CS., Hsu, CY., & Tzou, GJ. 2009.** "Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory". *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2009, Vol. 28, 10, pp. 1215-1234.
- Chi Shyang-ho., Chung Yen-Ling., 2003.** "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*. 2003, Vol. 70 (10), 1227–1243.
- Dai K. Y., Liu, G., Han, X., & Lim, K. M. 2005.** "Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method". *Computers & structures*. 2005, Vol. 83, 17, pp. 1487-1502.
- Delale F., Erdogan F., 1983.** "The crack problem for a non homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1983, Vol. 50 (3), 609-614.
- Della C.L., & Venini, P. 2004.** "Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004, Vol. 193, 9, pp. 705-725.
- Draiche K. 2015.** "Contribution à l'analyse de la vibration des plaques composites comportant des patches". *Laboratoire des Matériaux & Hydrologie*. 2015.
- El Meiche N., Tounsi, A., Ziane, N., & Mechab, I. 2011.** "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate". *International Journal of Mechanical Sciences*. 2011, Vol. 53, 4, pp. 237-247.
- Fekrar A ., Zidi, M., Boumia, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bedia Adda, E.A. 2013.** "Thermal buckling of AL/AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub> functionally graded plates based on first order theory ". *Nature & Tech*. 2013, Vol. A, 08, pp. 12-16.
- Fekrar A., Zidi, M., Boumia, L., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bedia Adda, E.A. 2013.** "Thermal buckling of AL/AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub> functionally graded plates based on first order theory ". *Nature & Tech*. 2013, Vol. A, 08, pp. 12-16.
- Feldman E, Aboudi J. 1997.** " Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading ". *Composite Structures*. 1997, Vol. 38, 1, pp. 29-36.
- Feldman E., & Aboudi, J. 1997.** "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading". 1997, Vol. 38, 1-4, pp. 29-36.
- Ferreira AJM., CMC. Roque, RMN. 2005.** "Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics". 2005, Vol. 83, 27, pp. 2225-2237.
- Finot M ., & Suresh. 1996.** "Small and large deformation of thick and thin-film multi-layers: effects of layer geometry, plasticity and compositional gradients". 1996, Vol. 44, 5, pp. 683-721.

## Références Bibliographiques

---

- Foroughi H ., & Azhari, M. 2014.** "Mechanical buckling and free vibration of thick functionally graded plates resting on elastic foundation using the higher order B-spline finite strip method". *Meccanica*. 2014, pp. 49(4), 981-993.
- Ganapathi M., Prakash, T., & Sundararajan, N. 2006.** " Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads". *Journal of engineering mechanics*. 2006, Vol. 132, 8, pp. 902-905.
- Gasik MM. 2010.** "Functionally graded materials: bulk processing techniques". 2010, Vol. 39, 1-2, pp. 9-20.
- Ghannadpour S.A.M., Ovesy, H. R., & Nassirnia, M. 2012.** Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. 2012, Vol. 108, pp. 93-99.
- Ghomshei M.M., and Abbasi V., 2013.** "Thermal buckling analysis of annular FGM plate having variable thickness under thermal load of arbitrary distribution by finite element method". *J. of Mech. Sci. and Tech.* 2013, Vol. 27(4), 1031-1039.
- Gilhooley DF., Batra RC., Xiao JR., McCarthy MA., & Gillespie JW. 2007.** "Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions". *Composite Structures*. 2007, pp. 80(4), 539-552.
- Grover N., D. Maiti & B. Singh. 2013.** "A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates". 2013, Vol. 95, pp. 667-675.
- Hirai T. 1996.** Chapter 20, "Functional Gradient Materials". [éd.] P. Hassen and E.J. Kramer R.W. Chan. *Mater. Sci. and Tech.* 1996, Vol. 17B, 293-341.
- HOUARI Mohammed S.A. 2011.** "Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie*. 2011.
- Ichikawa K. 2000.** "Functionally graded materials". *in the 21ST CENTURY, A Workshop on Trends and Forecasts*. 2000, 264 p.,Hardcover. .
- Jari H ., Atri, H. R., & Shojaee, S. 2015.** "Nonlinear thermal analysis of functionally graded material plates using a NURBS based isogeometric approach". *Composite Structures*. 2015, Vol. 119, pp. 333-345.
- Javaheri R ., Eslami M.R., 2002b.** "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading". *ZAMM Z Angew Mater Mech*. 2002b, Vol. 82, 4, pp. 277-283.
- Javaheri R, . Eslami MR. 2002c.** " Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory". *Journal of thermal stresses*. 2002c, Vol. 25, 7, pp. 603-625.

## Références Bibliographiques

---

- Javaheri R., and Eslami M.R., 2002a.** "Thermal buckling of functionally graded plates". *AIAA. J.* 2002a, Vol. 40, 1, pp. 162-169.
- Jha D. K., Tarun Kant and R. K. Singh. 2013.** "A critical review of recent research on functionally graded plates". 2013, Vol. 96, pp. 833-849.
- Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashipour, S.R. 2009.** "An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates". *Materials & Design.* 2009, Vol. 30, 3679-3685.
- KACI A. 2012.** "Etude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie.* 2012.
- Kaczkowski Z. 1968.** *Plates, Statical calculations, (Warsaw, Arkady ).* 1968.
- Karama M., Afaq. K.S., Mistou. S. 2003.** "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity". 2003, Vol. 40, 6, pp. 1525-1546.
- Karama M., K.S. Afaq & S. Mistou. 2009.** "A new theory for laminated composite plates. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L". 2009, Vol. 223, 2, pp. 53-62.
- Kawasaki A ., and Watanabe R.,. 1990.** "Fabrication of sintered functionally gradient materials by powder spray forming process". *In Proc. 1st. Int. symp. FGM.* edited by : Yamanouchi M., Koizumi M.,, 1990, 197-202.
- Kazerouni S.M., Saidi, A. R., & Mohammadi, M. 2010.** "Buckling analysis of thin functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported". 2010, Vol. 23, pp. 179-192.
- Kiani Y ., & Eslami, M. R. (2012). 2012.** "Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation". *Archive of Applied Mechanics.* 2012, Vol. 82, 7, pp. 891-905.
- Kiani Y., Bagherizadeh, E., & Eslami, M. R. 2011.** "Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions)". 2011, Vol. 91, 7, pp. 581-593.
- Kieback B., Neubrand A., Riedel H.,. 2003.** "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering.* 2003, Vol. A362, 81–105.
- Kim KD., Lomboy, G. R., & Han, S. C. 2008.** "Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element". *Journal of composite materials.* 2008, Vol. 42, 5, pp. 485-511.



## Références Bibliographiques

---

**Kirchhoff V.G. 1850a.** "Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe". 1850a, Vol. 1850, 40, pp. 51-88.

**Kirchhoff VG. 1850b.** "Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe". 1850b, pp. 258–264.

**Koizumi . 1997.** "FGM activities in Japan". 1997, Vol. 28, 1-2, pp. 1-4.

**Koizumi M. 1996.** "FGM activities in Japan, department of materials chemistry". 1996.

**Krell T., Schulz, U., Peters, M., & Kaysser, W. A. 1999.** "Graded EB-PVD alumina-zirconia thermal barrier coatings-an experimental approach". 1999, Vol. 308, pp. 396-401.

**Lanhe W. 2004.** "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate". *Composite Structures*. 2004, Vol. 64, 2, pp. 211-218.

**Lee YY ., Zhao, X., & Reddy, JN. 2010.** "Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010, Vol. 199, 25, pp. 1645-1653.

**Lee YY., Zhao, X., & Liew, KM. 2009.** "Thermoelastic analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method". *Smart Materials and Structures*. 2009, Vol. 18, 3, p. 035007.

**Leushake U., Winter A.N., Rabin B.H., Corff B.A.,. 1999.** "Functionally Graded Materials 1998". *Proceedings of the 5 International Symposium on FGM 1998*. in: Kaysser W.A, Trans Tech Publications, Switzerland, 1999, 13-18.

**Levinson M. 1980.** An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. 1980, Vol. 7, 6, pp. 343-350.

**Levy M. 1877.** *Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes*. Ser.3, 3, 1877 : s.n., 1877. pp. 219-306. Vol. Ser.3, 3.

**Liew KM., Zhao X., Ferreira A.J.,. 2011.** "A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates". 2011, Vol. 93, 8, pp. 2031–2041.

**Lostec L. 1997.** " Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L". 1997.

**Love A.E.H. 1888.** "On the small free vibrations and deformations of elastic shells". 1888, Vol. 17, 1888, pp. 491–549.

**Mahdavian M. 2009.** "Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading". 2009, Vol. 1, 3, pp. 213-225.

## Références Bibliographiques

---

- Mahi A., Tounsi A. 2015.** "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates". *Applied Mathematical Modelling*. 2015, Vol. 39, 9, pp. 2489-2508.
- Mantari JL ., A.S. Oktem & C.G Soares. 2011.** "Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory". 2011, Vol. 94, 1, pp. 37-49.
- Mantari JL ., Guedes Soares C. 2014a.** "Static response of advanced composite plates by new non-polynomial higher-order shear deformation theory". *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014a, Vol. 78, pp. 60-71.
- Mantari JL ., Oktem A.S. & Soares C.G. ., 2012a.** "A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates". 2012a, Vol. 49, 1, pp. 43-53.
- Mantari JL, Guedes Soares C. 2012d.** "Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory". *Composite Structures*. 2012d, Vol. 94, 6, pp. 1991-2000.
- Mantari JL., & C.G. Soares. 2012c.** "Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory". 2012c, Vol. 94, 8, pp. 2640-2656.
- Mantari JL., A.S., Oktem & C.G. Soares. 2012b.** " A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates". 2012b, Vol. 43, 3, pp. 1489-1499.
- Mantari JL., Bonilla. EM, Guedes. SC. 2014b.** " A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates". *Composites Part B:Engineering*. 2014b, Vol. 60, pp. 319-328.
- Mantari JL., Guedes. SC., 2013.** "Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates". *Composite Structures*. 2013, Vol. 96, pp. 545-553.
- Mantari JL., Oktem AS, Guedes Soares C. 2012e.** "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates". *Composites Part B: Engineering*. 2012e, Vol. 43, 3, pp. 1489-1499.
- Marple B.R ., and Boulanger J., 1996.** "Slip casting process and apparatus for producing graded materials". *Us. Patent*. 1996, Vol. 5, 498-383.
- Marple B.R, and Tuffe S., 1997.** "Graded casting for producing smoothly varying gradients in materials". *ibid*. 1997, 159-166.
- Matsunaga. 2009b.** "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory". *Composite Structures*. 2009b, Vol. 90, 1, pp. 76-86.

## Références Bibliographiques

---

- Matsunaga H. 2008.** "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory". *Composite structures*. 2008, Vol. 82, 4, pp. 499-512.
- Matsunaga-H. 2009a.** "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings". *Composite Structures*. 2009a, Vol. 87, 4, pp. 344-357.
- Mévrel R. 2009.** "Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine. *PlastOx 2007 - Mécanismes et Mécanique des Interactions Plasticité - Environnement*. 2009, 255-264.
- Mindlin R.D. 1951.** "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". *Journal of Applied Mechanics*. 1951, Vol. 18, 31-38.
- Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B.H. Kawasaki A., Ford Renee G., 1999.** "*FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS, Design, Processing and Applications*". [éd.] Miyamoto Y. Media New York : LLC, 1999.
- Mohammadi M., Saidi A., Jomehzadeh E., 2010.** "A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*". 2010, Vol. 224, 9, pp. 1831-1841.
- Mohammadi M., Saidi A.R., and Jomehzadeh E., 2010.** "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates". *Appl. Compos. Mater.* 2010, Vol. 17(1), 81-93.
- Mohammadi M., Saidi, A. R., & Jomehzadeh, E. 2009.** 1, "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates" : s.n., 2009, *Applied Composite Materials*, Vol. 17, pp. 81-93.
- Mozafari H., & Ayob, A. 2012.** "Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of functionally graded materials". *Procedia Technology*. 2012, Vol. 1, pp. 496-504.
- Mozafari H., Ayob, A. and Alias, A. 2010.** "Influence of thickness variation on the buckling load in plates made of functionally graded materials". *Eur. J Sci.* 2010, Vol. 47, 3, pp. 422-435.
- Murthy MVV. 1981.** "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates". 1981, Vol. 1903, pp. 1-37.
- Najafizadeh MM., & Heydari, HR. 2007.** "Higher-order theory for buckling of functionally graded circular plates". *AIAA journal*. 2007, Vol. 56, 6, pp. 1153-1160.
- Nguyen DD., Hoang VT. 2010.** "Mechanical and thermal postbuckling of shear-deformable FGM plates with temperature-dependent properties". *Mechanics of Composite Materials*. 2010, Vol. 46, 5, pp. 461-476.

## Références Bibliographiques

---

- Nguyen TK., Sab, K., & Bonnet, G. 2008.** "First-order shear deformation plate models for functionally graded materials". *Composite Structures*. 2008, Vol. 83, 1, pp. 25-36.
- Nguyen VH., Nguyen TK, Thai HT, Vo TP. 2014.** " A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates". *Composites Part B: Engineering*. 2014, Vol. 66, pp. 233-246.
- Niino M., Kumakawa A., Watanabe R., Doi Y. 1984.** "Fabrication of a high pressure thrust chamber by the eIP forming method". *20th Joint Propulsion Conference*. Joint Propulsion Conferences, 1984, 84-1227.
- Okamura H, . 1991.** "State of the art of material design projects for severe service applications". 1991, Vol. 143, 1-2, pp. 3-9.
- Omori M., Kakita T., Okubo A., and Hirai T.,. 1998.** *J. Jpn. Inst. Met.* 1998, Vol. 62, 986-991.
- Panc V. 1975.** *Theories of elastic plates*. [éd.] Springer Science & Business Media. 1975. Vol. (Vol. 2).
- Pandya BN., & Kant, T. 1988.** "Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates—finite element evaluations". *International Journal of Solids and Structures*. 1988, Vol. 24, 12, pp. 1267-1286.
- Pouladvand M. 2009.** "Thermal stability of thin rectangular plates with variable thickness made of functionally graded material". *J. of Solid Mechanics*. 2009, Vol. 1(3), 171-189.
- Prakash T., Singha, M. K., & Ganapathi, M. (2009). 2009.** " Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates". *Computational mechanics*. 2009, Vol. 43, 3, pp. 341-350.
- Praveen G.N., Reddy JN. 1998.** "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates". *International Journal of Solids and Structures*. 1998, Vol. 35, 33, pp. 4457-4476.
- Qian LF ., Batra, R. C., & Chen, L. M. 2003.** "Free and forced vibrations of thick rectangular plates using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless Petrov-Galerkin (MLPG) method". *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2003.
- Qian LF, . Batra, RC. 2004a.** "Transient thermoelastic deformations of a thick functionally graded plate". *Journal of Thermal Stresses*. 2004a, Vol. 27, 8, pp. 705-740.
- Qian LF., Batra, RC., & Chen, LM. 2004b.** "Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Composites Part B: Engineering*. 2004b, Vol. 35, 6, pp. 685-697.

## Références Bibliographiques

---

- Rajasekaran S., and Wilson J.A., 2013.** "Buckling and vibration of rectangular plates of variable thickness with different end conditions by finite difference technique". *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 2013, Vol. 46, 2, pp. 269-294.
- Ramu I., and Mohanty, S.C. 2014.** "Buckling Analysis of Rectangular Functionally Graded Material Plates under Uniaxial and Biaxial Compression Load". *Procedia Engineering*. 2014, Vol. 86, pp. 748-757.
- Reddy B.S., Kumar, S.J., Reddy, C.E. and Reddy, K. 2013.** "Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates Using Higher Order Shear Deformation Theory". *J of Comp.*, 2013, 1-12. *Journal of Composites*. 2013, Vol. 2013, pp. 1-12.
- Reddy J. 2004.** *theory and analysis*. 2nd Edition. s.l. : CRC press, 2004.
- Reddy J.N. 1984.** "A simple higher-order theory for laminated composite plates". *Journal of Applied Mechanics*. 1984, Vol. 51, 4, pp. 745-752.
- Reddy JN. 2011.** "A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates". *International Journal of Aerospace and Lightweight Structures*. 2011, Vol. 1, pp. 1-21.
- Reddy J-N. 1997.** "Mechanics of Laminated Composites Plates and shells: Theory and Analysis". [éd.] second. 1997.
- Reddy N. 2000.** "Analysis of functionally graded plates". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000, Vol. 47, 1-3, pp. 663-684.
- Reissner .E. 1945.** "The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech*. 1945, 69-77.
- Reissner -E. 1972.** "A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates". 1972, Vol. 10, 5, pp. 716-718.
- Reissner E. 1975.** "On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation". 1975, Vol. 11, 5, pp. 569-573.
- Reissner, E. 1985.** "Reflections on the Theory of Elastic Plates". 1985, Vol. 38, 11, pp. 1453-1464.
- Roque CMC., Ferreira, AJM., & Jorge, RMN. 2007.** "A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory". *Journal of Sound and Vibration*. 2007, Vol. 300, 3, pp. 1048-1070.
- Sahoo R., & B.N. Singh. 2013.** "A new shear deformation theory for the static analysis of laminated composite and sandwich plates". 2013, Vol. 75, pp. 324-336.

## Références Bibliographiques

---

- Saidi AR ., & Jomehzadeh, E. 2009.** "On the analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported". *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2009, Vol. 223, 9, pp. 2009-2016.
- Schulz U., et al. 1997.** "Graded design of EB-PVD thermal barrier coating systems". *AGARD 85th Structures and Materials Panel Meeting, Workshop 3, Thermal Barrier Coatings, Aalborg, Denmark*. 1997.
- Shariat BS., & Eslami, M. R. 2007.** "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads". *Composite Structures*. 2007, Vol. 78, 3, pp. 433-439.
- Shariat BS., Javaheri R., & Eslami, M. R. 2005.** "Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading". 2005, Vol. 43, 7, pp. 1020-1036.
- Shen M., and Bever M.B., 1972.** "Gradients in polymeric materials". *J. Mater. Sci.* 1972, Vol. 7, 741-746.
- Singha MK., Prakash, T., & Ganapathi, M. (2011). 2011.** "Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load". *Finite elements in Analysis and Design*. 2011, Vol. 47, 4, pp. 453-460.
- Sobhy M. 2013.** " Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions". *Composite Structures*. 2013, Vol. 99, pp. 76-87.
- Soldatos KP. 1992.** "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates". 1992, Vol. 94, 3-4, pp. 195-220.
- Stein M. 1986.** "Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. 1986, Vol. 24, 9, pp. 1537-1544.
- Szillard R. 2004.** "*Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods*". [éd.] John Wiley & Sons. 2004.
- Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., 1990.** "Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique". *in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan*. 1990, 129-134.
- Takemura M., and Tamura M. et al., 1990.** "Mechanical and thermal properties of FGM fabricated by thin sheet lamination method". *In Proc. 1st. Int. symp. FGM,*. edited by: Yamanouchi. M., Koizumi M.,, 1990, 97-100.

## Références Bibliographiques

---

- Thai CH ., Kulasegaram, S., Tran, L V., & Nguyen-Xuan, H.,. 2014a.** " Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach". *Computers & Structures*. 2014a, Vol. 141, pp. 94-112.
- Thai CH., Ferreira, AJM., Bordas, SPA., Rabczuk, T., & Nguyen-Xuan, H. 2014b.** " Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory". *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2014b, Vol. 43, pp. 89-108.
- Touratier M. 1991.** "An efficient standard plate theory". 1991, Vol. 29, 8, pp. 901-916.
- Watanabe Y., Yamanaka N., Fukui Y., Metallkd Z.,. 1997.** "Orientation of Al3Ti platelets in Al-Al3Ti functionally graded material manufactured by centrifugal method". 1997, Vol. 88 N° 09, 717–721.
- Watremetz B. 2006.** "Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères". *Thèse de doctorat*. Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2006.
- Wu TL., Shukla K.K., & Huang, J. H. 2007.** " Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates". *Composite structures*. 2007, Vol. 81, 1, pp. 1-10.
- Xiang S ., & Kang, GW. 2013a.** "A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates". *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2013a, Vol. 37, pp. 336-343.
- Xiang S., Kang G. 2013b.** "Static analysis of functionally graded plates by the various shear deformation theory". *Composite Structures*. 2013b, Vol. 99, pp. 224-230.
- Yaghoobi H., & Yaghoobi, P. 2013.** "Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach". *Meccanica*. 2013, Vol. 48, 8, pp. 2019-2035.
- Yang J ., Liew KM, Kitipornchai S. 2006.** "Imperfection sensitivity of the post-buckling behavior of higher-order shear deformable functionally graded plates". *International Journal of Solids and Structures*". 2006, Vol. 43, 17, pp. 5247-5266.
- Yang J., Liew, K. M., & Kitipornchai, S. 2004.** "Dynamic stability of laminated FGM plates based on higher-order shear deformation theory". *Computational Mechanics*. 2004, Vol. 33, 4, pp. 305-315.
- Yoshihisa U. 2004.** "Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications". 2004, Vol. 39, B, pp. 39-51-B.



- Yuki M., Murayama T., Irisawa T., 1991.** "Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating. *in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan.* 1991, 203-208.
- Zeng Y.P., Jiang D.L., Watanabe T., 2000.** "Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials". *Journal of the American Ceramic Society.* 2000, Vol. 83, N° 12, 2999-3003.
- Zenkour A. 2004a.** "Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories. *Journal of Engineering Mathematics.* 2004a, Vol. 50, 1, pp. 75-93.
- Zenkour A.M. 2005.** "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflection and stresses". *International Journal of Solids and Structures.* 2005, Vol. 42, 18–19, pp. 5224-5242.
- Zenkour AM ., Alghamdi NA. 2010b.** "Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads". *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2010b, Vol. 17, 6, pp. 419-432.
- Zenkour AM ., Sobhy M. 2010a.** "Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates". *Composite Structures 2010.* 2010a, Vol. 93, 1, pp. 93-102.
- Zenkour AM, , Sobhy M. 2011.** "Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory". *Journal of Thermal Stresses.* 2011, Vol. 34, 11, pp. 1119-1138.
- Zenkour AM. 2012.** " Exact relationships between classical and sinusoidal theories for FGM plates". *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2012, Vol. 19, 7, pp. 551-567.
- Zenkour A-M. 2006.** "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates". *Applied Mathematical Modelling.* 2006, Vol. 30, 1, pp. 67-84.
- Zenkour M. 2004b.** "Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory". *Acta Mechanica.* 2004b, Vol. 171, 3-4, pp. 171-187.
- Zhang J., Wang Y.Q., Zhou B.L., Wu X.Q., 1998.** *Mater J. Sci. Lett.* 17. 1998, 1677-1679.
- Zhang LW., Zhu P., & Liew, K. M. 2014.** "Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method". *Composite Structures.* 2014, Vol. 108, pp. 472-492.
- Zhao X ., & Liew, K. M. 2011.** "An element-free analysis of mechanical and thermal buckling of functionally graded conical shell panels". *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2011, Vol. 86, 3, pp. 269-285.



## Références Bibliographiques

---

**Zhao X ., Liew, K. M. 2009a.** "Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009a, Vol. 198, 33, pp. 2796-2811.

**Zhao X., Lee, Y. Y., & Liew, K. M. 2009b.** " Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates". *Composite Structures*. 2009b, Vol. 90, 2, pp. 161-171.

## المخلص

ان المواصفات لعنصر من الهياكل (البنية) التي تعبر بدورها عن وطائف يجب الوفاء بها وفي الدور التي تلعبه : يجب ان تكون خفيفة وزن, مقاومة للتشوه و درجة الحرارة العالية, لها اسطح مناسبة للتجميع (الاندماج الجيد) ومقاومة للصدأ. تعتبر معرفة المواد التي يتم تحديدها من خلال النماذج والخصائص السلوكية خطوة ضرورية وأولى لأي مشكل محدد. يتطلب الامر مراعاة ثلاث مجالات : التركيبية والبنية المجهرية, الخصائص الميكانيكية, الخصائص الهندسية. يجب ربط هذه المجالات بعقلانية حيث يهتم علم المواد بالربط بين المجالين الاوليين كما ان هندسة الهياكل تسعى الى متطلبات التصميم. الهدف من هذه الدراسة هو الحصول على متطلبات معينة لعناصر هيكلية, علاوة على ذلك دراسة صفيحة ذات مقطع عرضي متغير, وهذه المعاينة مكرسة لدراسة الانبعاج الميكانيكي لصفائح ذات خصائص مادية متغيرة والتي تتميز بسطح مقعر ومعرضة لقوى على مستوى الحواف, والتي عرضت بشكل جيد في هذا البحث.

تشتق المعادلة التحليلية ومن تم يتم حل المعادلة التقاضلية للتوازن رقميا باستخدام طريقة الفرق المحدد, يتم ادراج معادلة خاصة لمتابعة تغيرات السمك حيث تتحكم هذه المعادلة في التغير المكافئ للسمك الصفيحة من دون تغير الحجم الاصلي للمادة. تشير النتائج الى ان معدل هبوط في مقاومة الانبعاج سببه الاختلاف في السمك, يعتمد هذا الهبوط بشدة على الخصائص الهندسية للصفحة دون ان يتأثر بخصائص المادة وتدرج المواد المكونه, يتم دراسة مدى تأثير خصائص المادة والخصائص الهندسية على هبوط معدل مقاومة للانبعاج والتي يمكن ان تساعد في التصميم المبدي لمثل هذه العناصر المعقدة.

**الكلمات مفتاحية:** الصفائح المتدرجة وظيفيا ذات سمك متغير, الانبعاج الميكانيكي, معاينة الاستقرار, الطريقة العددية, القطع المكافئ المقعر.

## Résumé

Les spécifications d'un élément de structure expriment les fonctions à remplir, le rôle à jouer : être légères, « résister » à la déformation, à la température, avoir des surfaces adaptées à un bon contact, la résistance à la corrosion... La connaissance des matériaux, rendue objective par des modèles et des caractéristiques de comportement, est une étape nécessaire préalable à tout problème de choix. Elle nécessite de prendre en considération trois champs : la composition et la microstructure, les propriétés mécaniques, et les géométries ; et de relier ces champs de façon rationnelle, la science des matériaux s'intéresse aux liens entre les deux premiers, le génie des structures cherche à rendre compte des exigences de la conception. L'objectif de ce travail avoir à une certaine exigence structurelle en plus l'utilité sur l'étude d'une plaque de section transversale variable. Cette étude numérique consacrée sur la résistance au flambement mécanique des plaques FGM qu'elle ayant une variation d'épaisseur parabolique-concave qu'il exposée à une charge dans le plan est bien présenté dans ce travail de recherche. Une équation analytique est dérivée, en suite l'équation différentielle de stabilité est résolue numériquement en utilisant la méthode des différences finies. Une fonction spécifique de variation d'épaisseur est introduite, où cette fonction contrôle l'intensité de la variation parabolique de l'épaisseur de la plaque sans changer le volume de matériau d'origine. Les résultats indiquent que le taux de perte dans la résistance au flambage dû à la variation d'épaisseur parabolique-concave, dépend fortement des propriétés géométriques de la plaque, sans être affecté ni par les propriétés du matériau ni par le profil de distribution des matériaux constitutifs. L'influence des paramètres matériels et géométriques sur la chute de la résistance au flambement est étudiée, ce qui peut aider à la conception de lignes directrices pour de telles structures complexes.

**Mots-clés :** plaque FGM d'épaisseur variable ; flambement mécanique ; analyse de la stabilité ; différences finies ; méthode numérique ; parabolique-concave. Abstract

## Abstract

The characteristics of the structural element express the functions to be fulfilled, the role to be played: to be light, to "resist" the deformation, to the temperature, to have surfaces adapted to a good contact, the resistance to corrosion, etc. The knowledge of the materials made objectivity by models, and characteristics of behavior, is a necessary step preliminary to any problem of choice. It requires consideration of three fields: composition and microstructure, mechanical properties and geometries;

and to have connection with those fields in a rational way, the science of materials is interested in the links between the previously once, the structural engineering seeks to account for the requirements of the design. The objective of this work is to have a certain structural requirement with similarity to the utility on the study of a plate of the variable cross section. This numerical investigation on the buckling resistance of FGM plates having parabolic-concave thickness variation exposed to in-plane loading is presented in this piece of research work. An analytical formulation is derived, and the governing differential equation of stability is solved numerically using finite difference method. A specific function of thickness variation is introduced, where this function controls the parabolic variation intensity of the plate thickness without changing its original material volume. The results indicated that the loss ratio in the buckling resistance due to the parabolic-concave thickness variation is highly dependent on the geometrical properties of the plate while it is not affected by neither the material properties nor the distribution profile of the constituent materials. Influencing material and geometrical parameters on the degradation of the buckling resistance are investigated which may help in design guidelines of such complex structures.

**Keywords:** FGM plate with variable thickness; mechanical buckling; stability analysis; finite difference; numerical method, parabolic concave.